Овчинников П.А.
Вариант №6

Задание №1.

Ряд Фурье функции $f(t)$ на интервале $[-\pi, \pi]$ имеет вид:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Определим каждый из коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1 dt + \int_{0}^{\pi} -t^2 dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^3}{3}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos(nt) dt + \int_{0}^{\pi} -t^2 \cos(nt) dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{n}(\sin 0 - \sin(-\pi n))} -\right.$$

$$\left. - \frac{\cancel{((\pi n)^2 - 2)\sin(\pi n)} + 2\pi n \cos(\pi n)}{n^3}\right) = -\frac{2\cos(\pi n)}{n^2} = -\frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin(nt) dt + \int_{0}^{\pi} -t^2 \sin(nt) dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(\cos(-\pi n) - \cos 0) -\right.$$

$$\left. - \frac{2\pi n \sin(\pi n) + (2 - (\pi n)^2)\cos(\pi n) - 2}{n^3}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n} - \frac{(2 - (\pi n)^2)(-1)^n - 2}{n^3}\right) =$$

$$= \frac{(n^2 - 2 + (\pi n)^2)(-1)^n - n^2 + 2}{\pi n^3}.$$ Итак, имеем следующий ряд:

$$\boxed{f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nt) + \frac{(n^2 - 2 + (\pi n)^2)(-1)^n - n^2 + 2}{\pi n^3}\sin(nt)\right)}$$

$f(t)$ имеет разрывы в $t=0$ и $t=\pi$, значение которых можно вычислить как среднее пределов слева и справа от этих точек:

$$f(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \qquad f(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{-\pi^2 + 1}{2} = \frac{1 - \pi^2}{2}$$

Задание №2.

Воспользуемся унитарным преобразованием Фурье к обычной частоте:

$F(\nu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$. В нашем случае разобьём интеграл на три части в соответствии с функцией.

$$F(\nu)=F_1(\nu)+F_2(\nu)+F_3(\nu)$$

$$F_1(\nu)=\int\limits_{-\infty}^{-1}(1-e^{1+t})e^{-2\pi i\nu t}dt=-\frac{(2\pi i\nu+1)\sin(2\pi\nu)+(2\pi\nu-i)\cos(2\pi\nu)}{8\pi^3\nu^3+2\pi\nu}$$

$F_2(\nu)=\int\limits_{-1}^{1}0\,dt=0$ – этот участок не влияет на образ Фурье.

$$F_3(\nu)=\int\limits_{1}^{\infty}(1-e^{1-t})e^{-2\pi i\nu t}dt=\frac{(2\pi i\nu-1)\sin(2\pi\nu)-(2\pi\nu+i)\cos(2\pi\nu)}{8\pi^3\nu^3+2\pi\nu}$$

$$F(\nu)=\frac{(\cancel{2\pi i\nu}-1-\cancel{2\pi i\nu}-1)\sin(2\pi\nu)-(2\pi\nu\cancel{+i}+2\pi\nu\cancel{-i})\cos(2\pi\nu)}{8\pi^3\nu^3+2\pi\nu}=$$

$$=-\frac{\cancel{2}\sin(2\pi\nu)+\cancel{4}^{\,2}\pi\nu\cos(2\pi\nu)}{\cancel{2}\pi\nu\left((2\pi\nu)^2+1\right)}=\boxed{-\frac{\sin(2\pi\nu)+2\pi\nu\cos(2\pi\nu)}{\pi\nu\left((2\pi\nu)^2+1\right)}}$$

Задание №3

Для выполнения этого задания воспользуемся унитарным преобразованием Фурье к обычной многомерной частоте:

$$F(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(ux+vy)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Вычислим для нашей функции.

$$F(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-2xy-y^2} e^{-i(ux+vy)}\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{y^2}{2}-\frac{\pi^2u^2}{2}}\cdot\left(i\sin(\pi(2v-u)y)-\cos(\pi(2v-u)y)\right)}{\sqrt{2}}\,dy=$$

$$=\pi e^{-2\pi^2v^2+2\pi^2uv-\pi^2u^2}=\boxed{\pi e^{\pi^2(-2v^2+2uv-u^2)}}$$

Задание №4.

1) Свёртка по определению: $A * B$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \varepsilon & \gamma \\ 1 & \gamma- \end{matrix} = \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$a = -2 \quad b = (-2)\cdot 2 + 1 = -3 \quad c = 2 \quad d = -2\cdot 2 + 2 = -2$

$e = (-2)\cdot(-1) + 2 + 2\cdot 2 + 3 = 11 \quad f = -1 + 2\cdot 3 = 5$

$g = 2\cdot 2 = 4 \quad h = 2\cdot(-1) + 2\cdot 3 = 4 \quad i = 3\cdot(-1) = -3$

$$\boxed{A * B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -2 & 11 & 5 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}}$$

2) Свёртка через образы Фурье: $(\hat{A}_{+0}) \cdot (\hat{B}_{+0})$

$$A_{+0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{+0} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Введём $\hat{M}_{p,q} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \overline{\omega}_n^{kp} \overline{\omega}_n^{jq} M_{k,j}$ для матриц $n \times n$, где $\overline{\omega}_n^m = e^{-\frac{2\pi i m}{n}}$. Тогда:

$\hat{A}_{0,0} = \omega_3^0 \cdot \omega_3^0 \cdot 1 + \omega_3^0 \omega_3^{0\cdot 1} \cdot 2 + \omega_3^0 \omega_3^{0\cdot 2} \cdot 0 + \omega_3^{0\cdot 1} \cdot \omega_3^0 \cdot 2 + \omega_3^{0\cdot 1} \cdot \omega_3^{0\cdot 1} \cdot (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 + 2 + 2 - 1 = 4.$

$\hat{A}_{0,1} = \omega_3^0 \cdot \omega_3^{0\cdot 1} \cdot 1 + \omega_3^0 \omega_3^{1\cdot 1} \cdot 2 + \omega_3^0 \omega_3^{1\cdot 2} \cdot 0 + \omega_3^{0\cdot 1} \omega_3^{0\cdot 1} \cdot 2 + \omega_3^{0\cdot 1} \omega_3^{1\cdot 1} \cdot (-1) + 0 + 0 + 0 + 0 = \cancel{1} + \cancel{-1} + \sqrt{3} i + 2 + 0.5 - \sqrt{3}/2\, i = 2.5 + \sqrt{3}/2\, i$

Продолжаем вычисление до $\hat{A}_{2,2}$ и получаем Фурье-образ матрицы A_{+0}:

$$\hat{A}_{+0} = \begin{bmatrix} 4 & 2.5-0.866i & 2.5+0.866i \\ 2.5-0.866i & -0.5-4.33i & -2 \\ 2.5+0.866i & -2 & -0.5+4.33i \end{bmatrix}$$

Таким же образом поступаем с матрицей B_{+0} и получаем:

$$\hat{B}_{+0} = \begin{bmatrix} 4 & -2-3.464i & -2+3.464i \\ -3.5-4.33i & -5 & -0.5-0.866i \\ -3.5+4.33i & -0.5+0.866i & -5 \end{bmatrix}$$

Теперь вычислим покомпонентное произведение $(\hat{A}_{+0})\cdot(\hat{B}_{+0})$:

$$(\hat{A}_{+0})\cdot(\hat{B}_{+0}) = \begin{bmatrix} 16 & -8-6.928i & -8+6.928i \\ -12.5-7.794i & 2.5+21.65i & 1+1.732i \\ -12.5+7.794i & 1-1.732i & 2.5-21.65i \end{bmatrix}$$

Введём обратное преобразование $M_{p,q} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\omega_n^{kp}\omega_n^{jq}\hat{M}_{k,j}$ для матриц $n\times n$, где $\omega_n^m = e^{\frac{2\pi i m}{n}}$. Согласно нему

$$M_{0,0} = \frac{1}{9}\Big(\omega_3^0\omega_3^0\cdot 16 - 8 - \cancel{6.928i} - 8 + \cancel{6.928i} - 12,5 - \cancel{7.794i} + 2.5 + \cancel{21.65i} + 1 + \cancel{1.732i} - 12,5 + \cancel{7.794i} + 1 - \cancel{1.732i} + 2.5 - \cancel{21.65i}\Big) = \frac{1}{9}\big(\cancel{16} - \cancel{16} - 10 - 10 + 2\big) = \frac{-18}{9} = -2.$$

Также получаем и другие элементы матрицы.

$$\boxed{F^{-1}\{(\hat{A}_{+0})\cdot(\hat{B}_{+0})\} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -2 & 11 & 5 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}}.$$

Матрицы $A * B$ и $F^{-1}\{(\hat{A}_{+0})\cdot(\hat{B}_{+0})\}$ совпадают.

Задание №6.

3	-2	7	1	3	-2	7	1

$= A$ $\qquad C = [0\ 15\ 19\ 5]$

1) $\quad ɥ \quad x$
2) $\quad z \quad ɥ \quad x$
3) $\quad p \quad ɔ \quad q \quad ɤ$

$= B$ $\qquad A *_{0} B = C$. Найти B.

Дополним циклически вектор A и будем постепенно наращивать длину вектора B, пока решение системы уравнений не даст решение.

1) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -2x + 3y = 15 \\ 7x - 2y = 19 \\ x + 7y = 5 \end{cases}$ – решение нет

2) $\begin{cases} 3x + y + 7z = 0 \\ -2x + 3y + z = 15 \\ 7x - 2y + 3z = 19 \\ x + 7y - 2z = 5 \end{cases}$ – решение нет.

3) $\begin{cases} 3a + b + 7c - 2d = 0 \\ -2a + 3b + c + 7d = 15 \\ 7a - 2b + 3c + d = 19 \\ a + 7b - 2c + 3d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1634/825 \\ b = -688/825 \\ c = 116/825 \\ d = 2513/825 \end{cases}$

Итак, вектор $\boxed{B = \left[\frac{1634}{825}\ -\frac{688}{825}\ \frac{116}{825}\ \frac{2513}{825}\right]}$

Задание №8.

$f(x)\cdot g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ по определению, но $g(x)$ содержит δ-функцию. Скалярное произведение $f(x)$ и $\delta(x-a)$ определяется как значение $f(x)$ в точке $x=a$. Аналогично с $\dot{\delta}(x-a)$.

Итак, $f(x)\cdot g(x) = \dot{f}(5) + f(2) = \ln(\ln^2(\ln^2 x))'\Big|_{x=5} +$

$+ \ln(\ln^2(\ln^2 2)) = \left(\frac{1}{\ln^2(\ln^2 x)}(\ln^2(\ln^2 x))'\right)\Big|_{x=5} - 0.621 =$

$= \left(\frac{1}{\ln^2(\ln^2 x)}\cdot 2\ln(\ln^2 x)\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=5} - 0.621 =$

$= \frac{4}{\ln(\ln^2 x)\ln(x)\cdot x}\Big|_{x=5} - 0.621 = 0.522 - 0.621 = -0.099$

Задание №9.

Представим функции как вектора, каждое значение которого отражает значение функции на участках 0-0.25, 0.25-0.5, 0.5-0.75, 0.75-1. Тогда:

$f(t) \Leftrightarrow V_4 = [11\ 1\ -1\ 1]$. Базис $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{V_1, V_2, V_3\}$: $V_1 = [1\ 1\ 1\ 1]$, $V_2 = [1\ -1\ 1\ -1]$,

$V_3 = [1\ 1\ -1\ -1]$

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Домножим на каждый из базисных векторов, другие вектора из базиса обратятся в 0 под ортогональностью базисных векторов попарно (поверим в то, что они ортогональны) — и так мы найдём a, b, c:

1) $$a\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3$$

2) $$b\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow b=2$$

3) $$c\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow 4c=12 \Rightarrow c=3$$

Таким образом $3V_1+2V_2+3V_3=V_f$ или, иначе говоря,

$$3f_1(t)+2f_2(t)+3f_3(t)=f(t)$$