Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
ПО РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Студент: Овчинников П. А.
Группа: R3241
Вариант №6
Преподаватель: Шиманская Г.С.

Санкт-Петербург
2023

Задание №1

a) $(y^2+3)\,dx - \dfrac{e^x}{x}y\,dy = 0$

Перед нами простое дифференциальное уравнение, в котором достаточно будет перенести соответствующие слагаемые с каждой из переменных по разные стороны и затем проинтегрировать обе части:

$$(y^2+3)\,dx = \frac{e^x}{x}y\,dy$$

$$\frac{x}{e^x}\,dx = \frac{y}{y^2+3}\,dy$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int \frac{y}{y^2+3}\,dy$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx^{\,*} = \int \frac{y}{y^2+3}\,dy^{\,**}$$

$$(*):\ \int \frac{x}{e^x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \int uv' = uv - \int u'v \\ u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = {}^{1}\!/_{e^x} \Rightarrow v = {}^{-1}\!/_{e^x} \end{array}\right] = \frac{-x}{e^x} - \int \frac{-1}{e^x} + C = \frac{-x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C = -\frac{x+1}{e^x} + C$$

$$(**):\ \int \frac{y}{y^2+3}\,dy = \left[\begin{array}{c} t = y^2+3 \\ {}^{dt}\!/_{dy} = 2y \Rightarrow\ dy = {}^{dt}\!/_{2y} \end{array}\right] = \int \frac{\cancel{y}\,dt}{2\cancel{y}\,t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{\ln|t|}{2} = \frac{\ln\left|y^2+3\right|}{2}$$

$$-\frac{x+1}{e^x} + C = \frac{\ln\left|y^2+3\right|}{2}$$

$$\ln\left|y^2+3\right| = -2\,\frac{x+1}{e^x} + C$$

$$y^2+3 = e^{-2\,{}^{x+1}\!/_{e^x}+C}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{e^{-2\,{}^{x+1}\!/_{e^x}+C} - 3}}$$

b) $y^2 + x^2y' = xyy'$

Практически не очевидно, что здесь однородное уравнение. Для начала приведём его к виду однородного и затем решим по известному нам алгоритму:

$$y'yx - y'x^2 = y^2$$

$$yx\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$yx\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} = y^2\ \Big|\cdot dx$$

$$yx\,dy - x^2\,dy = y^2\,dx$$

$$(yx - x^2)\,dy = y^2\,dx$$

Проверим на однородность: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{yx-x^2}\Big|_{:x^2} = \dfrac{({}^{y}\!/_{x})^2}{{}^{y}\!/_{x} - 1} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\ \checkmark \quad\Rightarrow\quad y = zx \quad dy = x\,dz + z\,dx$

$$(zx^2 - x^2)(x\,dz + z\,dx) = z^2x^2\,dx$$

$$zx^3\,dz - x^3\,dz + \cancel{z^2x^2\,dx} - zx^2\,dx = \cancel{z^2x^2\,dx}\ \Big|: x^2 \quad (x\neq 0)$$

$$zx\,dz - x\,dz = z\,dx$$

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(1 - \frac{1}{z}\right)\,dz = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(1\,dz - \frac{1}{z}\,dz\right) = \ln|x| + C$$

$$z - \ln|z| = \ln|x| + C \qquad \Rightarrow [z = yx] \Rightarrow \qquad \frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} - \ln|y| + \cancel{\ln|x|} = \cancel{\ln|x|} + C$$

$$\boxed{\frac{y}{x} - \ln|y| = C}$$

c) $y' - y = e^x$
Перед нами самое обычное линейное неоднородное уравнение. Решаем его, как и подобает, через замену:

$$\rceil\, y = uv \;\Rightarrow\; uv' + u'v - uv = e^x$$

$$u(v' - v) + u'v = e^x$$

$$\rceil\, v' - v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v} = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = x \;\Rightarrow\; v = e^x + C_1$$

$$u'e^x = e^x \Big| : e^x$$

$$u' = 1 \;\Rightarrow\; u = x + C_2$$

$$y = uv = (e^x + C_1)(x + C_2) \;\Rightarrow\; \boxed{y = xe^x + C} \quad (C = C_1C_2)$$

Итак, функция $y(x)$ найдена. Остаётся найти её частное решение в точке $(0, 1)$:

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0 \cdot e^0 + C = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{C = 1}$$

d) $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$
Похоже, перед нами уравнение Бернулли. Решаем его делением на y^3 со старшей степенью и последующей заменой на $z = y^{-2}$, чтобы получить линейное неоднородное уравнение, но для начала нужно избавиться от x рядом с y':

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0 \Big| : x$$

$$y' + \frac{2y}{x} + x^4y^3e^x = 0 \Big| : y^3$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} + x^4e^x = 0$$

$$\rceil\, z = y^{-2} \;\Rightarrow\; z' = -2y^{-3}y'$$

$$\frac{z'\cancel{y^3}}{-2\cancel{y^3}} + \frac{2z}{x} + x^4e^x = 0$$

$$-\frac{z'}{2} + \frac{2z}{x} + x^4e^x = 0 \Big| \cdot (-2)$$

$$z' - \frac{4z}{x} - 2x^4e^x = 0$$

$$\rceil\, z = uv \;\Rightarrow\; z' = uv' + u'v$$

$$uv' + u'v - \frac{4uv}{x} - 2x^4e^x = 0$$

$$u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) + u'v - 2x^4e^x = 0$$

$$\rceil\, v' - \frac{4v}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{4v} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{4v} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \frac{\ln|v|}{4} = \ln|x| \;\Rightarrow\; v = e^{4\ln|x|} + C_1 = x^4 + C_1$$

$$u'x^4 = 2x^4e^x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2\cancel{x^4}e^x}{\cancel{x^4}}$$

$$du = 2e^x\,dx$$

$$\int du = \int 2e^x\,dx$$

$$u = 2e^x + C_2$$

$$z = uv = (x^4 + C_1)(2e^x + C_2) = 2e^xx^4 + C \quad (C = C_1C_2)$$

$$z = y^{-2} = 2e^xx^4 + C \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{\pm 1}{\sqrt{2e^xx^4 + C}}}$$

Задание №2

26. $y' = (y-1)x$

Имеем функцию, которую приравняем к коэффициенту наклона k, чтобы получить ряд изоклинов:

$$y' = (y-1)x = k$$

$$y - 1 = \frac{k}{x}$$

$$y = \frac{k}{x} + 1$$

Выберем шаг $\Delta k = 0.5$ и точку старта $k_0 = 0$ и построим 10 изоклин дифференциального уравнения. Для простоты восприятия на графике, кроме изоклин, уже отмечены синим интегральная кривая дифференциального уравнения и поле направлений тонкими отрезками, которое строилось так же с шагами $(\Delta x, \Delta y) = (0.5, 0.5)$ под углом наклона $\arctan(k)$ к точкам, лежащим на изоклинах:

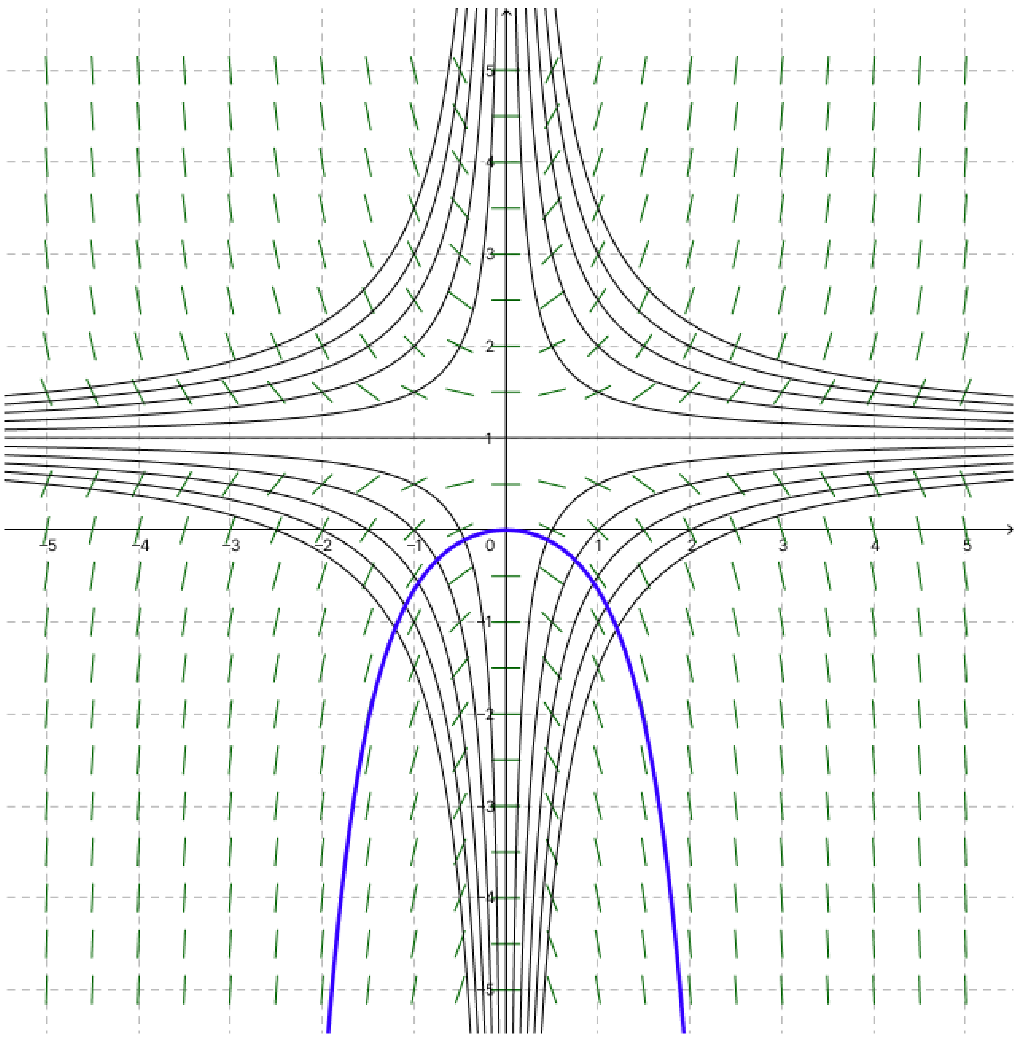

Рис. 1: Рис. 1. Изоклины дифференциального уравнения $y' = (y-1)x$

Отмечу также, что ветви параболы могут идти и вверх — здесь всё зависит от произвольной постоянной интегрирования C, которая может быть как отрицательной, так и положительной в решении этого уравнения $y = Ce^{x^2/2} + 1$.