Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Практическая работа

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Студенты: Овчинников П.А.
Румянцев А.А.
Чебаненко Д.А.

Группа: R3241

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Численные методы решения дифференциальных уравнений высших порядков — методы, которые решают дифференциальные уравнения, представляя результат в виде набора чисел. Чаще всего такие методы имеют чёткий алгоритм, поэтому их реализация в компьютерных программах не вызывает трудностей. Иногда для решения задачи требуется применение сразу нескольких численных методов, и вот какие из них существуют:

1. Метод Эйлера
2. Метод Рунге-Кутта
3. Метод Адамса
4. Метод стрельбы
5. Метод конечных разностей
6. Метод конечных элементов
7. Метод Галёркина
8. Метод Ритца

Как следует из содержания, в данной работе мы рассмотрим первый, второй и четвёртый методы.

Метод Эйлера

В чем заключается суть метода Эйлера?

Идея метода Эйлера заключается в аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией, называемой ломаной Эйлера. Чтобы применить численный метод Эйлера к дифференциальному уравнению высшего порядка, необходимо свести заданное уравнение к системе уравнений первого порядка. В следующих пунктах преобразования и метод будут подробно рассмотрены.

За простоту алгоритма мы платим погрешностью полученной ломаной – она будет достаточно большая, так как она систематически возрастает на каждом новом шагу – явный метод Эйлера является одношаговым первого порядка точности. Для уменьшения погрешности были придуманы модифицироанный метод Эйлера с пересчетом, где добавляется коррекция прогноза, вследствие чего достигается второй порядок точности, и двухшаговый метод Адамса-Башфорта, где используются несколько вычисленных ранее значений функции.

С учетом всех минусов и доступных более практичных методов кажется, что данный метод использовался ранее до появления более точных аналогов, а сейчас устарел и нигде не применяется, но на самом деле в виду своей простоты данный алгоритм находит свое применение в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений, задач вариационного исчисления и ряда других математических проблем.

Теоретическая справка

Рассмотрим основной принцип метода Эйлера на самом простом примере, еще без уравнений высших порядков. Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0,$$

где функция f определена на некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$. Решение ищется на полуинтервале $(x_0, b]$. Разобьем интервал на n равных частей и получим шаг сетки $h = {}^{(b-x_0)}/_{n}$, иными словами введем на промежутке узлы $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$. Приближенное решение в узлах x_i, которое обозначим через y_i, определяется по формуле:

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1}) \equiv y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Как уже было написано в предыдущем пункте, метод Эйлера решает только уравнения первого порядка, а значит нам придется приводить уравнение высшего порядка к системе уравнений первого порядка и решать каждое по отдельности по этому принципу.

NB: Другими словами метод Эйлера основан на дискретизации дифференциальных уравнений во времени.

Алгоритм

Любое дифференциальное уравнение m-го порядка

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)})$$

можно свести к системе, состоящей из m уравнений первого порядка при помощи замен. Проведем следующие замены:

$$\begin{aligned}
&y_1 = y', \\
&y_2 = y'' = y_1', \\
&y_3 = y''' = y_2', \\
&\vdots \\
&y_m = y^{(m)} = y_{m-1}'
\end{aligned}$$

В результате дифференциальное уравнение m-го порядка сводится к системе, состоящей из m дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y^{(m)}(x) = \begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{m-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) \end{cases}$$

Применим метод Эйлера к каждому уравнению в системе, тогда расчетные формулы примут вид:

$$y^{(m)}(x) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot y_{1,n} \\ y_{1,n+1} = y_{1,n} + h \cdot y_{2,n} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h \cdot y_{3,n} \\ \vdots \\ y_{m-1,n+1} = y_{m-1,n} + h f(x_n, y_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \ldots, y_{m-1,n}) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

где $y_n, y_{1,n}, y_{2,n} \ldots y_{m-1,n}$ – значения переменных на текущем шагу, а $y_{n+1}, y_{1,n+1}, y_{2,n+1} \ldots y_{m-1,n+1}$ – значения на следующем шагу.

Каждое из уравнений в системе будет являться решением заданного дифференциального уравнения высшего порядка. Можно построить график зависимости конкретного уравнения из системы от времени x и получить приблеженное решение соответствующего ДУ высшего порядка.

Если заданное дифференциальное уравнение высшего порядка является неоднородным ($g(x) \neq 0$)

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}) + g(x),$$

то его решением также будет являться система уравнений первого порядка, а неоднородность будет учитываться в уравнении самого высокого порядка:

$$y^{(m)}(x) = \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot y_{1,n} \\ y_{1,n+1} = y_{1,n} + h \cdot y_{2,n} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h \cdot y_{3,n} \\ \vdots \\ y_{m-2,n+1} = y_{m-2,n} + h \cdot y_{m-1,n} \\ y_{m-1,n+1} = y_{m-1,n} + h \left[f(x_n, y_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \ldots, y_{m-1,n}) + g(x_n) \right] \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Пример

Пусть у нас есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y'''(x) + 2y''(x) - y'(x) + 1 = e^x$$

с начальными условиями

$$x_0 = 0, \quad y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 2.$$

Сделаем следующие замены

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'',$$

тогда имеем такую систему ДУ первого порядка:

$$y'''(x) = \begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h \cdot y_{2,n} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h \cdot y_{3,n} \\ y_{3,n+1} = y_{3,n} + h(-2y_{3,n} + y_{2,n} - 1 + e^{x_n}) \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

Имеем $x_0 = 0 \Rightarrow y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = 0$, $y_{3,0} = 2$. Рассмотрим работу алгоритма для простоты при малых значениях b и n. Пусть $b = 0.5$, $n = 2$, $h = 0.25$. Имеем следующие системы:

$$n = 0, \; y'''(x) = \begin{cases} y_{1,1} = y_{1,0} + h \cdot y_{2,0} \\ y_{2,1} = y_{2,0} + h \cdot y_{3,0} \\ y_{3,1} = y_{3,0} + h(-2y_{3,0} + y_{2,0} - 1 + e^{x_0}) \\ x_1 = x_0 + h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{1,1} = 1 \\ y_{2,1} = 0.5 \\ y_{3,1} = 1 \\ x_1 = 0.25 \end{cases}$$

$$n = 1, \; y'''(x) = \begin{cases} y_{1,2} = y_{1,1} + h \cdot y_{2,1} \\ y_{2,2} = y_{2,1} + h \cdot y_{3,1} \\ y_{3,2} = y_{3,1} + h(-2y_{3,1} + y_{2,1} - 1 + e^{x_1}) \\ x_2 = x_1 + h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{1,2} = 1.125 \\ y_{2,2} = 0.75 \\ y_{3,2} = 0.696 \\ x_2 = 0.5 \end{cases}$$

$$n = 2, \; y'''(x) = \begin{cases} y_{1,3} = y_{1,2} + h \cdot y_{2,2} \\ y_{2,3} = y_{2,2} + h \cdot y_{3,2} \\ y_{3,3} = y_{3,2} + h(-2y_{3,2} + y_{2,2} - 1 + e^{x_2}) \\ x_3 = x_2 + h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{1,3} = 1.3125 \\ y_{2,3} = 0.924 \\ y_{3,3} = 0.6975 \\ x_3 = 0.75 \end{cases}$$

Мы решили неоднородное линейное ДУ третьего порядка методом Эйлера с заданными начальными условиями, интервалом, количеством шагов и шагом сетки. Теперь можно построить три графика – $y_{1,n}(x_n)$, $y_{2,n}(x_n)$, $y_{3,n}(x_n)$, где $n \in [0, 2]$, чтобы получить приближенные графики заданного ДУ.

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутты является численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и применяется для аппроксимации решений дифференциальных уравнений. Он особенно эффективен для решения систем ОДУ и уравнений высших порядков. Для уравнения высшего порядка метод Рунге-Кутты применяется после его преобразования в систему уравнений первого порядка.

Любое дифференциальное уравнение m-ого порядка:

$$y^m = f(x, y, y', ..., y^{m-1})$$

можно свети к системе, состоящей из m уравнений первого порядка при помощи замен.

$$y_1 = y'$$

$$y_2 = y'' = y_1'$$
$$y_3 = y''' = y_2'$$
$$...$$
$$y_m = y^{(m)} = y^{(m-1)}$$

В результате дифференциальное уравнение m-го порядка сводится к системе, состоящей из m дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ ... \\ y_{m_1}' = f(x, y, y_1, y_2, ..., y_{m_1}) \end{cases}$$

Решением системы, а значит и дифференциального уравнения m-ого порядка является m табличных функций

$$y, y_1 = y' \cdot y_2 = y_2'' = y_{m-1}$$

то есть функция y_x и все ее производные включая производную $(m-1)$-го порядка. При этом каждая итз табличных функция определяется на промежутке [a, b] с шагом h и включает n узловых точек. Таким образом, численным решением уравнения или системы является матрица порядка $m \times n$.
Дальше применяется метод Рунге-Кутты для уравнений первого порядка.

Пример

Пусть надо решить дифференциальное уравнение

$$y'' - xy' + 2xy = 0.8$$

с краевыми условиями

$$y(1.5) = -0.2$$
$$y'(1.5) = 2$$

Заданные параметры:

1. диапазон изменения аргумента [1.5; 2.5]
2. шаг изменения аргумента h = 0.1
3. решение — значения y при x = 1.5; 1.6; ...; 2.5

Заменяем уравнение второго порядка на систему уравнений первого порядка, введя функцию $z(x) = y'(x)$ и выразив производные:

$$z' = U(x, y, z) = xz - 2xy + 0.8$$

$$y' = V(x, y, z) = z$$

при краевых условиях

$$y(1.5) = -0.2$$

$$z(1.5) = 2$$

В методе Рунге-Кутта значение функции в узле ищут по значению функции в предыдущем узле.

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

где

$$q_0 = U(x_i, y_i, z_i)$$

$$q_1 = U(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_0\frac{h}{2}, z_i + q_0\frac{h}{2})$$

$$q_2 = U(x_i + \frac{h}{2}), y_i + k_1\frac{h}{2}, z_i + q_1\frac{h}{2}$$

$$q_3 = U(x_i + h, y_i + k_2 h, z_i + q_2 h)$$

$$k_0 = V(z_i)$$

$$k_1 = V(z_i + q_0\frac{h}{2})$$

$$k_2 = V(z_i + q_1\frac{h}{2})$$

$$k_3 = V(z_i + q_2 h)$$

Решим задачу Коши методом Рунге-Кутта четвертого порядка, разделив интервал на 10 частей.

i	x	y	z	k	q	Dy	Dz
0	1,5	-0,2	2	2	4,4	2	4,4
	1,55	-0,1	2,22	2,22	4,551	4,44	9,102
	1,55	-0,089	2,2276	2,2276	4,5286	4,4551	9,0572
	1,6	0,0228	2,4529	2,4529	4,6518	2,4529	4,6518
						0,2225	0,4535
1	1,6	0,0225	2,4535	2,4535	4,6537	2,4535	4,6537
	1,65	0,1451	2,6862	2,6862	4,7533	5,3724	9,5065
	1,65	0,1568	2,6912	2,6912	4,7231	5,3824	9,4462
	1,7	0,2916	2,9258	2,9258	4,7825	2,9258	4,7825
						0,2689	0,4731
2	1,7	0,2914	2,9267	2,926	4,847	2,9267	4.7847
	1,75						
	1,75						
	1,8						
h = 0,1							
x0 = 1.5							
y0 = -0.2							
z0 = 2							

Метод стрельбы

Метод стрельбы — численный метод решения краевой задачи для дифференциальных уравнений любого порядка. Краевые задачи являются задачами, в которых необходимы найти решение, удовлетворяющее заданным границам. Рассмотрим уравнение второго порядка (*для уравнений более высоких порядков метод стрельбы применяется аналогично, а уравнение n-го порядка сводится к системе из n дифференциальных уравнений первого порядка*):

$$y''(x) = f(x, y, y')$$

Здесь $y(x)$ — искомая функция, $f(x, y, y')$ — заданная функция. Также заданы граничные условия ниже:

$$\begin{aligned} y(0) &= a \\ y(l) &= b \end{aligned} \qquad 0 < x < l$$

Преобразуем уравнение, приведя его к системе:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$$

Для разрешимости получившейся системы в рамках задачи Коши к условию $y(0)$ необходимо условие $y'(0) = u(0)$. Нам известно, что $y(0) = a$, а вот значение $u(0)$ мы будем подбирать. Зададим экспериментальным путём произвольное значение $u(0) = \lambda_1$ и решим задачу численно любым известным методом (например, методом Рунге-Кутта). Так в координате $x = l$ будет вычислено значение $y(l) = y_1$ — очевидно, $y_1 \neq b$, поэтому мы решим задачу для другого произвольного значения $u(0) = \lambda_2$ и выясним, ближе или дальше от b находится y_2, чем y_1. Повторяя этот процесс многократно, применяя разные методы коррекции начального значения (например, метод бисекции), мы найдём такое значение $u(0) = \lambda_n$, что y_n будет находиться достаточно близко к b. Таким образом, мы найдём решение, удовлетворяющее граничным условиям.

Такая коррекция λ под начальные условия называется методом стрельбы — название связано с тем, что путём «недолётов-перелётов» мы определяем подходящее значение y, из которого вытекает решение $y(x)$.

NB: Важно отметить, что метод стрельбы не гарантирует нахождения решения, а лишь приближает к нему — необходимая точность решения задаётся условием задачи или экспериментально. К тому же этот метод требует нескольких итераций, поэтому его выбор должен быть обоснованным.

Пример

Рассмотрим пример дифференциального уравнения второго порядка и решим его методом стрельбы. Пусть дано уравнение:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

Для него задано начальные условия:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение в систему двух уравнений первого порядка, введя новую переменную $u(x) = y'(x)$:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = -2u - y \end{cases}$$

Теперь мы будем решать эту систему методом стрельбы. Выберем произвольное значение $u(0) = \lambda_1 = 1$. Используем метод Рунге-Кутта для интегрирования системы уравнений (h — шаг интегрирования, о котором в рамках метода стрельбы будет сказано позже):

$$\begin{aligned}
&k_{1y} = u \\
&k_{1u} = -2u - y \\
&k_{2y} = u + \frac{h}{2}k_{1u} \\
&k_{2u} = -2\left(u + \frac{h}{2}k_{1u}\right) - \left(y + \frac{h}{2}k_{1y}\right) \\
&k_{3y} = u + \frac{h}{2}k_{2u} \\
&k_{3u} = -2\left(u + \frac{h}{2}k_{2u}\right) - \left(y + \frac{h}{2}k_{2y}\right) \\
&k_{4y} = u + hk_{3u} \\
&k_{4u} = -2\left(u + hk_{3u}\right) - \left(y + hk_{3y}\right)
\end{aligned}$$

Обновим значения y и u с использованием метода Рунге-Кутта ($y_0 = y(0)$ и $u_0 = y'(0)$ на первой итерации):

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}\left(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}\right) \\
u_1 &= u_0 + \frac{h}{6}\left(k_{1u} + 2k_{2u} + 2k_{3u} + k_{4u}\right)
\end{aligned}$$

Проверяем, насколько близко полученное значение y_1 к желаемому $y(0)$. Если они близки для заданной точности, то мы нашли решение. Если нет, то мы повторяем процесс, скорректировав λ_1 при помощи корректировочной формулы $\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{y_1 - y_0}{u_1}$ и повторяем процесс. В общем виде корректировочная формула выглядит так:

$$\lambda_{n+1} = \lambda n - \frac{y_n - y_0}{u_n}$$

Остаётся лишь повторять процесс с новым и новым λ до тех пор, пока не достигнем достаточной близости.

NB: Шаг интегрирования h необходимо выбирать внимательно. Решение будет приблежённым, и его точность напрямую зависит от шага интегрирования — чем меньше шаг, тем точнее решение. Однако слишком маленький шаг может привести к тому, что метод стрельбы не сойдётся к решению. Или же можно использовать более точные методы интегрирования.