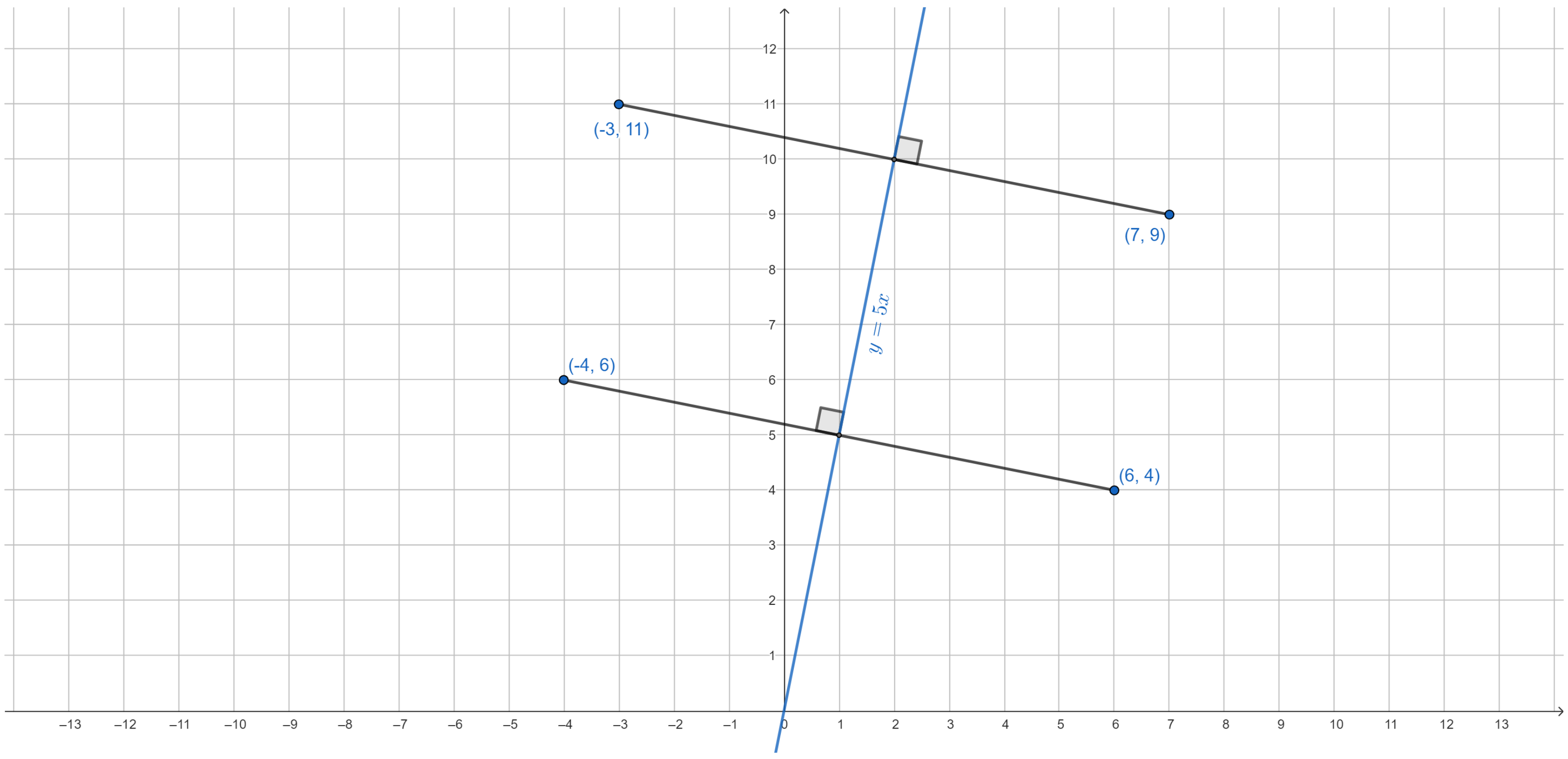
Лабораторная работа №2

Выберем 4 числа $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 7$ — ни одно из них не равно 0 или ± 1.

Задание №1. Imagine Dragons

Придумать — задачка интересная, конечно, но лучше всё же по возможности искать матрицы вычислительным путём.

1. Начнём с симметрии плоскости относительно прямой. Для этого нарисуем прямую $y = 5x$ на плоскости и выберем две пары точек, где в каждой из пар отрезок, соединяющий их, образует прямой угол с $y = 5x$ — преобразование одной из точек каждой пары в другую и будет отражением плоскости относительно прямой.



Теперь координаты точек в каждой из пар точек можно представить как действие линейного отображения на координаты другой точки в каждой из пар. Получим:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 = -3 \\ 7x_3 + 9x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = -4 \\ 6x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$$

Скомпонуем системы так, чтобы в одной системе были только x_1 и x_2, а в другой в то же время x_3 и x_4:

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 = -3 \\ 6x_1 + 4x_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 = -3 \\ x_2 = -1 - {}^3\!/_2\, x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -{}^{13}\!/_2\, x_1 = 6 \\ x_2 = -1 - {}^3\!/_2\, x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -{}^{12}\!/_{13} \\ x_2 = -1 + {}^{18}\!/_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -{}^{12}\!/_{13} \\ x_2 = {}^5\!/_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_3 + 9x_4 = 11 \\ 6x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_3 + 9x_4 = 11 \\ x_3 = 1 - {}^2\!/_3\, x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -{}^{13}\!/_3\, x_4 = 4 \\ x_3 = 1 - {}^2\!/_3\, x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = {}^{12}\!/_{13} \\ x_3 = 1 - {}^8\!/_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = {}^5\!/_{13} \\ x_4 = {}^{12}\!/_{13} \end{cases}$$

Итак, вычислив x_1, x_2, x_3 и x_4, получаем матрицу отражения плоскости относительно прямой $y = 5x$:

$$A = \begin{bmatrix} -{}^{12}\!/_{13} & {}^5\!/_{13} \\ {}^5\!/_{13} & {}^{12}\!/_{13} \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** дроби, сформированные в матрице — не что иное, как стороны прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной единице. К квадрату коэффициента k прямой $y = kx$ ищется ближайшее число n, которое в сумме с квадратом коэффициента даст квадрат числа $n+1$, т.е. $(n+1)^2 = n^2 + k^2$, и с этими числами формируются дроби ${}^k\!/_{n+1}$ и ${}^n\!/_{n+1}$ в матрице, причём на главной диагонали встанет дробь ${}^n\!/_{n+1}$ с разными знаками, а на побочной — дробь ${}^k\!/_{n+1}$ с коэффициентом k. В таком случае катеты по сути отражаются оси Ox и Oy, а гипотенуза — единичный отрезок.

2. Подобный алгоритм применим и для расчёта этого отображения. Нам понадобятся две точки по обе стороны от прямой $y = 3x$: точка $(-2, 4)$, которая преобразуется линейным отображением в точку $(1, 3)$, и точка $(5, 5)$, которая под действием линейного отображения станет точкой $(2, 6)$. И получим следующие матричные выражения и системы, образованные ими:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 1 \\ -2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 2 \\ 5x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}$$

Точно так же перекомпонуем системы и найдём их решения в x_1, x_2, x_3 и x_4:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_2 = 1 - 7x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/10 \\ x_2 = 1 - 7x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/10 \\ x_2 = 3/10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_4 = 3 - 7x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3/10 \\ x_4 = 3 - 7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3/10 \\ x_4 = 9/10 \end{cases}$$

Итак, вычислив x_1, x_2, x_3 и x_4, получаем матрицу отображения плоскости в прямую $y = 3x$:

$$B = \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{bmatrix}$$

3. Матрица поворота на θ градусов в общем виде выглядит как матрица с $\cos\theta$ на главной диагонали и с разными по знаку $\sin\theta$ на побочной диагонали. Тогда линейное отображение, поворачивающее плоскость на 20° против часовой стрелки, будет выглядеть так:

$$C = \begin{bmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}$$

4. Центральная симметрия преобразовывает каждую точку плоскости из координаты (x, y) в $(-x, -y)$. Нетрудно догадаться, какая <u>единственная</u> для такой симметрии матрица существует:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Отображение F, которое выполняет последовательно отражение и поворот, можно представить как произведение двух матриц, выполняющих эти действия. Притом важен порядок: ввиду того, что сначала выполняется отражение, а затем поворот, то к вектору применяется сначала A, а затем $\tilde{E}$ (новая матрица поворота, которая будет описана ниже), которое как бы оборачивает результат Av. Мы будем использовать матрицу из п.1 и немного изменённую матрицу из п.3, где вместо 20° будет стоят 70°, а знаки у синусов будут изменены, т.к. поворот осуществляется по часовой стрелке:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} \cos 70^\circ & \sin 70^\circ \\ -\sin 70^\circ & \cos 70^\circ \end{bmatrix}$$

$$F = \tilde{E}A = \begin{bmatrix} \cos 70^\circ & \sin 70^\circ \\ -\sin 70^\circ & \cos 70^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/13 \cos 70^\circ + 5/13 \sin 70^\circ & 5/13 \cos 70^\circ + 12/13 \sin 70^\circ \\ 12/13 \sin 70^\circ + 5/13 \cos 70^\circ & -5/13 \sin 70^\circ + 12/13 \cos 70^\circ \end{bmatrix}$$

Итак, мы получили отображение, которое сначала отражает плоскость относительно прямой $y = 5x$, а затем поворачивает её на 70° по часовой стрелке.

6. Заметим, что когда мы говорим о прямых $x = 0$ и $y = 0$, то речь заходит об осях Ox и Oy и стандартном базисе $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Зная координаты начальных векторов и конечные векторы $(1, 5)$ и $(1, 3)$, в которые будут преобразованы начальные, мы можем найти матрицу отображения:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Наилегчайшее задание по поиску отображение сделано (это вам не п.1 и п.2). Итак, получаем отображение:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Теперь проделываем то же самое, но наоборот. Векторы базиса $\{(1,5),(1,3)\}$ преобразовываем в $\{(1,0),(0,1)\}$ с помощью матрицы линейного отображения. Опять вьетнамские флешбеки п.1 и п.2...

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Вновь миксуем системки:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -5x_4 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -5x_4 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases}$$

Получаем линейное отображение, которое переводит прямые $y = 5x$ и $y = 3x$ в координатные оси:

$$H = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** т.к. линейные отображения G и H делают взаимно обратные преобразования, т.е. отображение H невелирует действие отображения G, то можно сказать, что матрицы взаимно обратные. Иначе говоря, $G = H^{-1}$.

8. Для получения матрицы этого отображения вновь придётся считать системы. Мы возьмём векторы $\{(1,5),(1,3)\}$ и преобразуем их в $\{(1,3),(1,5)\}$. Моя чуйка подсказывает мне, что результат будет очень интересным:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

И вновь компонуем системы так, чтобы одни и те же переменные оказались в одной и той же из систем:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 5x_2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 - 5x_4 \\ x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 - 5x_4 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 8 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Получаем матрицу линейного отображения, которая выглядит вот так:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** казалось бы, обычная ничем не примечательная матрица — и даже не диагональная (зато нижнетреугольная, кстати), но не тут то было. В связи с тем, что матрица по сути меняет местами базисные вектора, её обратная матрица равна исходной или, выражаясь математическим языком, $I^{-1} = I$.

9. Не будем вдаваться в вычисления радиуса круга единичной площади, а сразу перейдём к тому факту, что если x-координату растянуть в 2 раза, а y-координату растянуть в 3 раза, то площадь каждого объекта на плокости, будь то круг, прямоугольник или квадрат, увеличится в 6 раз. Согласно такой установке, приходим к выводу, что для того, чтобы круг единичной площади стал кругом площадью 2, каждую из координат необходимо растянуть в $\sqrt{2}$ раз соответственно. Матрица такого линейного отображения очевидна:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** внимательный зритель заметит, что это диагональная матрица — просто факт для наблюдения, говорящий нам о том, что пространство растягивается вдоль осей координат без поворотов и смещений.

10. Подобно предыдущему заданию, нам нужно сформировать такую матрицу, которая растянет круг единичной площади до площади равной 7, но здесь наблюдаем деталь — в конечном итоге должен получиться не круг, а в частности эллипс. Задача упрощается, потому как нам достаточно растянуть одну из координат в 7 раз, чтобы получить семикратное увеличение площади, а другую из координат оставить нетронутой:

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** заметим, что определитель этой матрицы и матрицы из предыдущего пункта равны 7 и 2 соответственно. Получается, ещё один метод подбора матрицы линейного отображения, которое увеличивает плоскость в N раз — определитель подобранной матрицы должен быть равен N

11. Собственные вектора — такие вектора, вдоль которых плоскость растягивается под действием линейного отображения. У нас имеется условие — угол между Ox и одним из собственных векторов не может быть кратен 45°. Тогда предположим, что матрица линейного отображения растянет каждый из векторов базиса $\{(2,1),(-1,2)\}$ в 2 раза. Для начала проверем, что векторы базиса ортогональны:

$$cos\varphi = \frac{2\cdot(-1)+1\cdot 2}{5} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Итак, векторы ортогональны — поэтому снова ловим вьетнамские флешбеки из п.1 и п.2:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -2 \\ -x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Крутим системы как нам нужно:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_4 = 2 - 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 2 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Полученные значения подставляем в матрицу линейного отображения и открываем одно интересное наблюдение в подходящей для него рубрике:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** полученная матрица сигнализирует нам о том, что если на плоскости выбран ортогональный базис, то масштабируемые линейные отображения в нём будут совершаться так, как если бы они были выполнены в стандартном базисе.

12. Подбираем отображение, которое растягивает плоскость только вдоль одной прямой — у матрицы таких отображений только один собственный вектор $(1,0)$, но ими без препятствий могут стать векторы $(1,0)$ и $(-1,0)$, которые в свою очередь коллинеарны.

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Такие отображения называются вращательными, а их матрицы — матрицами поворота. Сами матрицы поворота могут состоять не только из синусов и косинусов, но и вполне обычных вещественных чисел. Тогда собственные числа или собственные векторы такого отображения как раз содержат в себе комплексные числа. Хороший пример матрицы, которая соответствует такому отображению:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. О подобных отображениях мы говорили в п.11 — такие отображения не должны каким-либо образом изменять угол между базисными векторами, а лишь масштабировать и симметрировать пространство. Тогда собственным вектором такого отображения может быть любой ненулевой вектор, потому как отображение растягивает, или сжимает, или симметрирует пространство во всех направлениях сразу. Для разнообразия я приведу пример, который ранее не фигурировал в предыдущих пунктах, но к ответу так же подойдут матрицы D, $\tilde{J}$ и L.

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

15. У многих пар матриц линейных отображений произведение некоммутативно — посему придумаем от балды любую пару матриц и проверим, коммутативно ли их произведение:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad QP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$PQ \neq QP$$

Результат на лицо — выбранная пара матриц линейных отображений нам подходит.

16. Мы могли бы воспользоваться матрицами отображений из предыдущих пунктов — некоторые пары матриц подходят под коммутативность умножения, но воспользуемся одним интересным фактом: $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E$. Поэтому возьмём любую матрицу с определителем, не равным нулю, и найдём обратную ей матрицу:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow S = R^{-1} = \frac{1}{\det R} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Итак, получаем две взаимно обратные максимально непохожие друг на друга матрицы, для которых выполняется свойство $RS = SR$.

Задание №2. There is no spoon

Образы и ядра

Для начала вычислим ядра каждого из отображений последовательно, а затем уже, исходя из полученной информации, найдём образ отображений:

$$\text{Nullspace}(A)\colon \begin{bmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12x = 5y \\ 5x = -12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Nullspace}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nullspace}(B)\colon \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ \forall y \end{cases} \Longrightarrow \text{Nullspace}(B) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{Nullspace}(\tilde{N})\colon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Nullspace}(\tilde{N}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nullspace}(\tilde{O})\colon \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Nullspace}(\tilde{O}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** не зря ядро называется ядром — это такая часть пространства, которая в ходе действия отображением на это пространство сжимается в ноль относительно образа отображения.

Исходя из размерности ядер отображений, сделаем вывод, чему равен образ каждого из отображений:

$$\text{Range}(A) = \mathbb{R}^2\colon \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}\right) \text{ — отражает плоскость, не уменьшая размерность.}$$

$$\text{Range}(B) = \mathbb{R}\colon \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \text{ — сжимает всю плоскость в прямую, потому размерность образа уменьшается на один.}$$

$$\mathrm{Range}(\tilde{N}) = \mathbb{R}^2\colon \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) \text{ — лишь поворачивает плоскость, не уменьшая размерность.}$$

$$\mathrm{Range}(\tilde{O}) = \mathbb{R}^2\colon \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right) \text{ — масштабирует каждую координату в 3 раза, не уменьшая размерность.}$$

Собственные числа и собственные вектора

Матрица A

$$\begin{vmatrix} -12/13-\lambda & 5/13 \\ 5/13 & 12/13-\lambda \end{vmatrix} = (-12/13-\lambda)(12/13-\lambda) - 25/169 = \lambda^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-5x+y=0\\5x-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\\y=5x\end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+5y=0\\x+5y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-5y\\\forall y\end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** собственное число $\lambda_1 = 1$ с его собственным вектором $[1 \quad 5]^T$ означают, что прямая, образованная этим вектором просто было основопологающим в трансформации плоскости, а собственное число $\lambda_2 = -1$ с его вектором $[-5 \quad 1]^T$ означают, что все значения на прямой были отражены относительно первого собственного вектора.

Матрица B

$$\begin{vmatrix} 1/10-\lambda & 3/10 \\ 3/10 & 9/10-\lambda \end{vmatrix} = (1/10-\lambda)(9/10-\lambda) - 9/100 = \lambda(\lambda-1) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

Для λ_1 собственный вектор уже посчитан в рамках ядра — $v_1 = \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-9x+3y=0\\3x-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\\y=3x\end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** здесь применительна такая же логика, что и в предыдущем наблюдении — все точки прямой, образованные вектором $[-3 \quad 1]^T$ сжимаются в точку под действием собственного числа, а $\lambda_2 = 1$ с его вектором $[1 \quad 3]^T$ делают прямую $y = 3x$ ведущей, вокруг которой плоскость трансформируется.

Здесь должны были быть расчёты для матрицы С, но в ней синусы и косинусы, и мои вычисления затянулись...

Матрица D

Матрицы D, L и $\tilde{O}$ ведут себя похоже и меняются лишь собственные числа, поэтому отдельно каждую рассматривать нет смысла. Сразу отметим, что в таких матрицах собственные числа уже расположены на главной диагонали, поэтому $\lambda_1, 2 = -1$ для D, $\lambda_1, 2 = 2$ для L и $\lambda_1, 2 = 3$ для $\tilde{O}$. И для все этих матриц собственные вектора — любые два ненулевых вектора, которые образуют базис (например, $\{(1,0),(0,1)\}$).

Матрица I

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=x\\4x=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall x\\y=4x\end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\\forall y\end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Матрица $\tilde{M}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x\\2y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x+y=2x\\2y=2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0\\\forall x\end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Матрица P

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{-\sqrt{33}+5}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{33}+5}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{33}+5}{2}x \\ \frac{-\sqrt{33}+5}{2}y \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}+5}{2}x \\ \frac{\sqrt{33}+5}{2}y \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{33}-3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Q

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица R

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \sqrt{13}+3 \quad \lambda_2 = -\sqrt{13}+3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{13}+3)x \\ (\sqrt{13}+3)y \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\sqrt{13}+3)x \\ (-\sqrt{13}+3)y \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{13}-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Матрица S

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3/4 & -1/2-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(4\lambda^2 + 6\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \quad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{13}+3}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}+3}{4}x \\ \frac{\sqrt{13}+3}{4}y \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{13}+3}{4}x \\ \frac{-\sqrt{13}+3}{4}y \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{13}-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

***Рубрика «наблюдения»*:** заметим, что собственные числа отличаются в последних двух матрицах на $\frac{1}{\det R}$.

Определители

Рассчитывать определители — дело нетрудное. Приступим к нему незамедлительно:

$$\det A = \begin{vmatrix} -12/13 & 5/13 \\ 5/13 & 12/13 \end{vmatrix} = -144/169 - 25/169 = -1$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{vmatrix} = 9/100 - 9/100 = 0$$

$$\det C = \begin{vmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{vmatrix} = \cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ = 1$$

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det F = \begin{vmatrix} -12/13 \cos 70^\circ + 5/13 \sin 70^\circ & 5/13 \cos 70^\circ + 12/13 \sin 70^\circ \\ 12/13 \sin 70^\circ + 5/13 \cos 70^\circ & -5/13 \sin 70^\circ + 12/13 \cos 70^\circ \end{vmatrix} = -\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ = -1$$

$$\det \tilde{J} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2$$

$$\det K = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

***Рубрика «наблюдения»*:** как и говорилось ранее в п.10, определитель играет важную роль в понимании того, как изменяется площадь объектов, изображённых на плоскости. Вспомним, как мы увеличивали круг единичной площади в 2 раза и делали из него эллипс площадью 7 — сейчас видно, что определители точно отразили факт увеличения площади.

Теперь необходимо выяснить, в каких из пунктов матриц получаются обязательно симметричными:

- В пункте 4, т.к. существует единственная матрица с центральной симметрией плоскости.
- В пункте 9, т.к. мы увеличиваем площадь каждой из координат, оставляя одинаковые числа на главной диагонали — здесь получаем диагональную матрицу.
- В пункте 11, т.к. точно так же мы растягиваем каждый из векторов базиса в два раза.
- В пункте 14 — оставляю без пояснений, т.к. сам пункт даёт представление о том, почему матрица выглядит так.

Задание №3. Show me the money

Здесь была бы классная визуализация с помощью Manim из Python, но студент уже спит, а лаба сама не пишется. . .