Дифференциальные уравнения

Задание №1

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни в λ:

$$2\lambda^5 + 5\lambda^3 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda^4 + 5\lambda^2 + 2) = 0 \quad \Big| \; t = \lambda^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ 2t^2 + 5t + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ t_1 = -2 \\ t_2 = -1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda^2 = -2 \\ \lambda^2 = -1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}i \\ \lambda_{4,5} = \pm\sqrt{2}/2 i \end{array}\right.$$

Теперь, зная моды, из которых составляются решения дифференциальных уравнений, составим линейные комбинации мод, которые и станут общим решением для заданного дифф.уравнения:

$$\boxed{y(t) = c_1 + c_2 \sin\sqrt{2}t + c_3\cos\sqrt{2}t + c_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + c_5\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t}$$

Задание №2

С учётом имеющихся начальных условий дифф.уравнения, найдём его частное решение, уточнив каждую из констант c:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_3 + c_5 = 2 \\ \dot{y}(0) = \left(\sqrt{2}c_2\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}c_3\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}c_4\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}c_5\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\Big|_{t=0} = \sqrt{2}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_4 = 0 \\ \ddot{y}(0) = \left(2c_2\sin\sqrt{2}t + 2c_3\cos\sqrt{2}t + \frac{c_4}{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{c_5}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\Big|_{t=0} = 2c_3 + \frac{c_5}{2} = 2 \\ \dddot{y}(0) = \left(2\sqrt{2}c_2\cos\sqrt{2}t + 2\sqrt{2}c_3\sin\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{4}c_4\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{4}c_5\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\Big|_{t=0} = 2\sqrt{2}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}c_4 = 0 \\ y^{(4)}(0) = \left(4c_2\sin\sqrt{2}t + 4c_3\cos\sqrt{2}t + \frac{c_4}{4}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{c_5}{4}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\Big|_{t=0} = 4c_3 + \frac{c_5}{4} = 2 \end{cases}$$

Получаем обычную систему линейных уравнений, которую решаем как всегда:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 + c_5 = 2 \\ \sqrt{2}c_2 + \sqrt{2}/2 c_4 = 0 \\ 2c_3 + c_5/2 = 2 \\ 2\sqrt{2}c_2 + \sqrt{2}/4 c_4 = 0 \\ 4c_3 + c_5/4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 + c_5 = 2 \\ 2\sqrt{2}c_2 + \sqrt{2}c_4 = 0 \\ 4c_3 + c_5 = 4 \\ 8\sqrt{2}c_2 + \sqrt{2}c_4 = 0 \\ 16c_3 + c_5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 8\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_3 - c_5 \\ 2\sqrt{2}c_2 = -\sqrt{2}c_4 \\ c_3 = 1 - c_5/4 \\ 3\sqrt{2}c_4 = 0 \\ c_5 = 8/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1/3 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 8/3 \end{cases}$$

Итак, частное решение этого дифф.уравнения для заданных начальных условий: $\boxed{y(t) = -1 + \frac{1}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{8}{3}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t}$

Непрерывные системы дифференциальных уравнений

Задание №1

Перед нами система простейших дифф.уравнений вида $\dot{x} = Ax$, который решается так:

$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = Ax \Rightarrow \frac{dx}{x} = A\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int A\,dt \Rightarrow \ln x = At \Rightarrow x = e^{At}$$

Из получившего решения мы делаем вывод, что нам необходимо вычислить матричную экспоненту. Для этого необходимо получить спектральное разложение матрицы. Подробный процесс будет описан в задании №2, а сейчас рекомендую просто принять результат, полученный «путём нетрудных вычислений» ;)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & te^{0t} & \frac{t^2}{2}e^{0t} \\ 0 & e^{0t} & te^{0t} \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4t^2 & 4t & 8t^2 \\ -2t & 1 & 4t \\ -2t^2 & 2t & 4t^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-4t^2)x_1(0) + 4tx_2(0) + 8t^2x_3(0) \\ -2tx_1(0) + x_2(0) + 4tx_3(0) \\ -2t^2x_1(0) + 2tx_2(0) + (4t^2+1)x_3(0) \end{bmatrix}$$

Задание №2

Для того, чтобы найти собственные вектора и числа матрицы, необходимо вычислить корни её характеристического полинома:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ -2 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \cancel{8\lambda} - \cancel{8\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2,3} = 0$$

Итак, у нас одно собственное число 0 с алгебраическом кратностью 0. Теперь найдём собственные векторы к этому числу:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ -2x + 4z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NB: Заметим, что мы заодно нашли и ядро матрицы, так как ядро — множество векторов, которое обнуляется под действием матрицы.
Нам необходимо найти ещё два присоединённых вектора к собсвтенному, чтобы получить базис собственных векторов, в котором мы и строили жорданово разложение матрицы выше, в задании №1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y = 2 \\ -2x + 4z = 0 \\ 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 1/2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ -2x + 4z = 1/2 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z - 1/4 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Может показаться, что здесь другие собственные и присоединённые вектора, но это не так — числа в собственных векторах, как ни странно, зависят от того, какое частное решение системы мы выбираем на каждом шаге.

Ввиду того, что все собственные числа матрицы равны нулю, мы можем смело заявить, что $\boxed{\text{система неустойчива.}}$ Это в том числе можно заметить, если устремить $t \to \infty$, и тогда $x_n(t)$ в найденном в задании №1 решении будут также увеличиваться.

Дискретные системы дифференциальных уравнений

Задание №1

Найдём общее решение такой системы. Здесь так же результат A^k предоставится как есть, а процесс получения разложения, необходимого для возведения матрицы A в степень k, будет описан в задании №2:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \pi k/4 & \sin \pi k/4 \\ -\sin \pi k/4 & \cos \pi k/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi k/4 & i \sin \pi k/4 \\ i \sin \pi k/4 & \cos \pi k/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos \pi k/4 \cdot x_1(0) + i \sin \pi k/4 \cdot x_2(0) \\ i \sin \pi k/4 \cdot x_1(0) + \cos \pi k/4 \cdot x_2(0) \end{bmatrix}}$$

Задание №2

Вычислим корни характеристического полинома матрицы, чтобы найти её собственные числа:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

Перед нами два комплексно сопряжённых собственных числа. Найдём для каждого из них собственный вектор:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2\right) x \\ \left(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2\right) y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y \\ \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}/2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2x + i\sqrt{2}/2x \\ \sqrt{2}/2y + i\sqrt{2}/2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -iy \\ y = ix \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\right) x \\ \left(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\right) y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y \\ \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}/2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2x - i\sqrt{2}/2x \\ \sqrt{2}/2y - i\sqrt{2}/2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = iy \\ y = -ix \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём ядро матрицы:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y \\ \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}/2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \text{Nullspace A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Для дискретных систем асимптотическая устойчивость определяется через собственные числа, если $|\lambda| < 1$, но если $|\lambda| = 1$, то система устойчива не асимптотически. Для комплексных собственных чисел $\lambda = a \pm bi$ свойство модифицируется — система асимптотически устойчива, если $\sqrt{a^2 + b^2} < 1$, и устойчива не асимптотически, если аналогично $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

В нашем случае $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{система устойчива не асимптотически.}}$