ФИО/Поток: Овчинников Павел Алексеевич, ТеорВер 1.2

Задание №1

Да, является.

Задание №2

Задание №3

Да, будет, с коэффициентами $x_0' = \frac{x_0 - b}{a}, \gamma' = \frac{\gamma}{|a|}$.

Задание №4

Да, может. $C = 12$ в этом случае.

Задание №5

$X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$

Задания №6

Задания №7

Да, может.

Задания №8

Нет, не может.

Задания №9

Да, может. Например, у распределения Коши, когда плотность вероятности не имеет конечного среднего значения.

Задание №10

Рис. 1: Картинка сгенерирована нейросетью.

Задание №1

Совместные функции распределения равняются произведению одномерных функций распределений каждой из переменных. Поэтому нам достаточно проверить выполнение свойств функции распределения случайной величины для каждой из переменных:

1. $F(x, y) \to 0$ при $x, y \to -\infty$, $F(x, y) \to 1$ при $x, y \to \infty$
2. $F(x, y)$ монотонно возрастает
3. $F(x, y)$ непрерывна справа

Задание №3

Предположим, что Y — распределение Коши. Тогда плотность вероятности можно будет выразить через плотность вероятности X:

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\pi\gamma\left(1 + \left(\frac{x-b-x_0}{a\gamma}\right)^2\right)}$$

Задание №4

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dxdy = 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1\int\limits_0^1 C(x^3+y^2-2xy)dxdy = \int\limits_0^1 \frac{Cx^4}{4} + Cxy^2 - 2C\frac{x^2}{2}y\bigg|_0^1 dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{C}{4} + Cy^2 - Cy\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{C}{4} + \frac{C}{3} - \frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{C}{12} = 1 \Rightarrow C = 12$$

Задание №5

Зная о том, что X и Y независимые, мы можем визуализировать $X+Y$ следующим образом: X представляет собой количество успехов в первой серии испытаний, Y — количество успехов во второй серии испытаний. Когда мы суммируем X и Y, мы фактически объединяем обе серии испытаний в одну большую серию испытаний. Таким образом, общее количество испытаний становится $n+m$, а вероятность успеха в каждом испытании остается той же — p.

$$C_n^k p^k q^{n-k} + C_m^k p^k q^{m-k} = p^k \left(C_n^k q^{n-k} + C_m^k q^{m-k}\right)$$

Задания №7

Например, пусть у вас есть случайная величина X, которая представляет собой количество времени за день, проведенного в смартфоне. Если у вас есть большой процент дней, когда вы не пользуетесь смартфоном вовсе, то медиана может быть равна нулю. Или, например, массив из пяти чисел: $[0, 0, 0, 1, 2]$ — его медиана равна 0 и массив удовлетворяет условиям для неотрицательной случайной величины.

Задания №8

Для зависимых (или по-другому говоря, коррелируемых) X, Y дисперсия суммы выражается через ковариацию: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$. Данное в задании равенство выполняется только для некоррелированных величин, когда ковариация равна нулю.

Задания №9

Можно привести и другой пример случайной величины с такой плотностью распределения:

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Вычислить мат.ожидания для такого распределния не получится, потому что перед нами будет расходящийся интеграл, который мы не сможем вычислить.