Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Расчётно-графическая работа
по дифференциальным уравнениям

Студент: Овчинников П.А.
Поток: ДУ СУиР 21.3

Преподаватель: Борель Л.В.

Санкт-Петербург
2024

Задание №1

Условие

Найти положения равновесия системы, определить их характер и начертить фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем:

$$196.\ (3-64)\qquad \begin{cases} \dot{x} = \sinh(2xy - 4y - 8), \\ \dot{y} = \arcsin\left(4y^2 - x^2\right) \end{cases}$$

Решение

Найдём положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \sinh(2xy - 4y - 8) = 0 \\ \arcsin\left(4y^2 - x^2\right) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x = -2, & y = -1 \\ x = 0, & y = -2 \\ x = 1, & y = -4 \\ x = 3, & y = 4 \\ x = 4, & y = 2 \end{array}\right. \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{x^2}}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ll} x = -2, & y = -1 \\ x = 4, & y = 2 \end{array}\right.$$

Итак, имеем два положения равновесия: $M(-2,-1)$ и $N(4,2)$. Для каждой из точек:

1. Совершим сдвиг переменных в точку равновесия
2. Линеаризуем систему относительно новых переменных и точки равновесия
3. Определим характер положения равновесия с помощью собственных значений матрицы линеаризованной системы
4. При необходимости, определим собственные векторы матрицы для построения фазовых траекторий

$M(-2,-1)$:

$$\begin{cases} x = u - 2 \\ y = v - 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dot{u} = \sinh(2(u-2)(v-1) - 4(v-1) - 8) \\ \dot{v} = \arcsin\left(4(v-1)^2 - (u-2)^2\right) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dot{u} = \sinh(2uv - 2u - 8v) \\ \dot{v} = \arcsin\left(4v^2 - 8v - u^2 + 4u\right) \end{cases}$$

$$\frac{d}{du}\sinh(2uv - 2u - 8v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 2(v-1)\cosh(2uv - 2u - 8v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = -2$$

$$\frac{d}{dv}\sinh(2uv - 2u - 8v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 2(u-4)\cosh(2uv - 2u - 8v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = -8$$

$$\frac{d}{du}\arcsin\left(4v^2 - 8v - u^2 + 4u\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \frac{4 - 2u}{\sqrt{1 - (4v^2 - 8v - u^2 + 4u)^2}}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 4$$

$$\frac{d}{dv}\arcsin\left(4v^2 - 8v - u^2 + 4u\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \frac{8v - 8}{\sqrt{1 - (4v^2 - 8v - u^2 + 4u)^2}}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = -8$$

Получаем линеаризованную систему и соответствующую ей матрицу, для которой найдём собственные значения:

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u - 8v \\ \dot{v} = 4u - 8v \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$$

В точке $M(-2,-1)$ имеем устойчивый фокус, закручивающийся против часовой стрелке.

Фазовый портрет такой системы выглядит так:

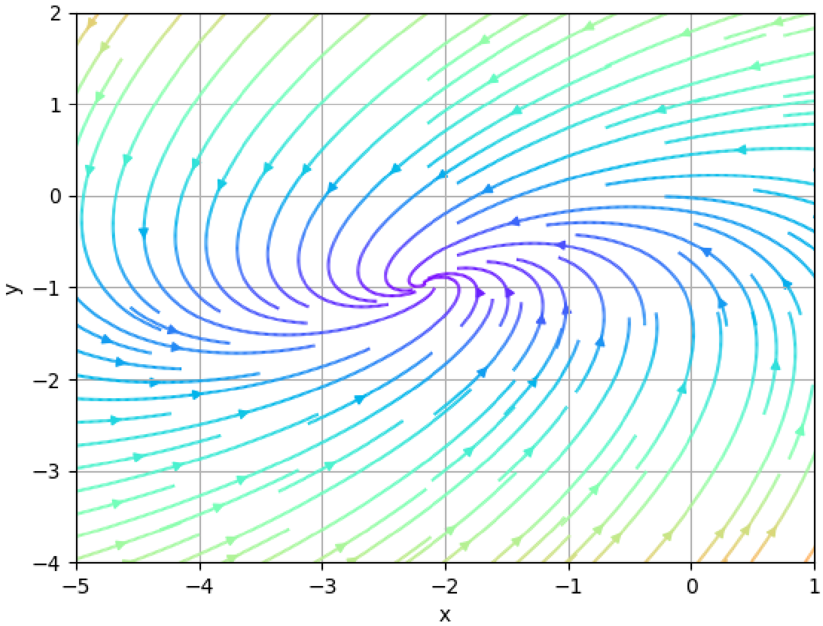

Рис. 1: Фазовый портерт системы в точке $M(-2,-1)$.

$N(4,2)$:

$$\begin{cases} x = u+4 \\ y = v+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \sinh(2(u+4)(v+2) - 4(v+2) - 8) \\ \dot{v} = \arcsin\left(4(v+2)^2 - (u+4)^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \sinh(2uv + 4u + 4v) \\ \dot{v} = \arcsin\left(4v^2 + 16v - u^2 - 8u\right) \end{cases}$$

$$\frac{d}{du}\sinh(2uv+4u+4v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 2(v+2)\cosh(2uv+4u+4v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 4$$

$$\frac{d}{dv}\sinh(2uv+4u+4v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 2(u+2)\cosh(2uv+4u+4v)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 4$$

$$\frac{d}{du}\arcsin\left(4v^2+16v-u^2-8u\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \frac{-2u-8}{\sqrt{1-(4v^2+16v-u^2-8u)^2}}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = -8$$

$$\frac{d}{dv}\arcsin\left(4v^2+16v-u^2-8u\right)\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \frac{8v+16}{\sqrt{1-(4v^2+16v-u^2-8u)^2}}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = 16$$

$$\begin{cases} \dot{u} = 4u + 4v \\ \dot{v} = -8u + 16v \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 12$$

В точке $N(4,2)$ имеем неустойчивый узел. Найдём собственные векторы, вдоль которых будут проходить фазовые траектории:

Имеется матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$. Найдём собственный вектор v для каждого λ, решив уравнение $(A - I\lambda)v = 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = b \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2a = b \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Именно по таким векторам расходится неустойчивый узел. Теперь составим фазовый портрет системы:

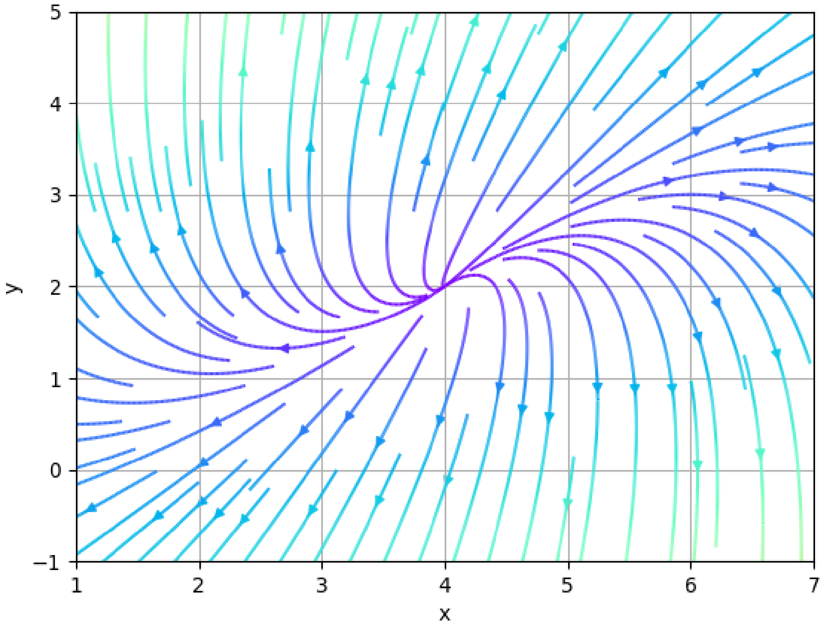

Рис. 2: Фазовый портрет системы в точке $N(4, 2)$.

Задание №2

Условие

Найти общее решение уравнения. Сделать проверку.

$$28. \quad 6u_{xx} - 7u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Решение

Перед нами дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Для его решения воспользуемся коэффициентами и дискриминантом характеристической формы уравнения:

$$A = 6 \quad B = -3.5 \quad C = 1$$

$$\Delta = B^2 - AC = 3.5^2 - 6 = 12.25 - 6 = 6.25 = 2.5^2 > 0 \quad \Rightarrow \text{ уравнение гиперболическое.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A} = \frac{-3.5 \pm 2.5}{6} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = -1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{6} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = -x + C \\ y = -\dfrac{x}{6} + C \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C = y + x \\ C = y + \dfrac{x}{6} \end{array} \right.$$

Введём замену $U(\gamma, \eta) = u(x, y)$, где $\gamma = y + x$, $\eta = y + x/6$. Найдём каждую из производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, выраженные через $U_{\gamma\gamma}$, $U_{\gamma\eta}$, $U_{\eta\eta}$:

$$u_x = U_\gamma \gamma_x + U_\eta \eta_x = U_\gamma + \frac{1}{6}U_\eta \qquad\qquad u_y = U_\gamma \gamma_y + U_\eta \eta_y = U_\gamma + U_\eta$$

$$u_{xx} = U_{\gamma\gamma}\gamma_x + U_{\gamma\eta}\eta_x + \frac{1}{6}\left(U_{\eta\gamma}\gamma_x + U_{\eta\eta}\eta_x\right) = U_{\gamma\gamma} + \frac{1}{3}U_{\gamma\eta} + \frac{1}{36}U_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = U_{\gamma\gamma}\gamma_y + U_{\gamma\eta}\eta_y + \frac{1}{6}\left(U_{\eta\gamma}\gamma_y + U_{\eta\eta}\eta_y\right) = U_{\gamma\gamma} + \frac{7}{6}U_{\gamma\eta} + \frac{1}{6}U_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = U_{\gamma\gamma}\gamma_y + U_{\gamma\eta}\eta_y + U_{\eta\gamma}\gamma_y + U_{\eta\eta}\eta_y = U_{\gamma\gamma} + 2U_{\gamma\eta} + U_{\eta\eta}$$

Заменим в исходном уравнении все производные на производные, выраженные через U:

$$6\left(U_{\gamma\gamma} + \frac{1}{3}U_{\gamma\eta} + \frac{1}{36}U_{\eta\eta}\right) - 7\left(U_{\gamma\gamma} + \frac{7}{6}U_{\gamma\eta} + \frac{1}{6}U_{\eta\eta}\right) + U_{\gamma\gamma} + 2U_{\gamma\eta} + U_{\eta\eta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{6U_{\gamma\gamma}} + 2U_{\gamma\eta} + \cancel{\frac{1}{6}U_{\eta\eta}} - \cancel{7U_{\gamma\gamma}} - \frac{49}{6}U_{\gamma\eta} - \cancel{\frac{7}{6}U_{\eta\eta}} + \cancel{U_{\gamma\gamma}} + 2U_{\gamma\eta} + \cancel{U_{\eta\eta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{25}{6}U_{\gamma\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{\gamma\eta} = 0$$

Проверим, выполнив обратную замену и зная, что $U_{\gamma\eta} = 0$:

$$U_{\gamma\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\eta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \varphi_1(y+x) + \varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right) = 0$$

$$u_x = \varphi_1(y+x) + \frac{1}{6}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right) \qquad u_y = \varphi_1(y+x) + \varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)$$

$$u_{xx} = \varphi_1(y+x) + \frac{1}{36}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right) \qquad u_{xy} = \varphi_1(y+x) + \frac{1}{6}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right) \qquad u_{yy} = \varphi_1(y+x) + \varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)$$

$$6\left(\varphi_1(y+x) + \frac{1}{36}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)\right) - 7\left(\varphi_1(y+x) + \frac{1}{6}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)\right) + \varphi_1(y+x) + \varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right) =$$

$$= \cancel{6\varphi_1(y+x)} + \cancel{\frac{1}{6}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)} - \cancel{7\varphi_1(y+x)} - \cancel{\frac{7}{6}\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)} + \cancel{\varphi_1(y+x)} + \cancel{\varphi_2\left(y + \frac{x}{6}\right)} = 0$$

Действительно, даже с учётом обратной замены равенство $U_{\gamma\eta} = 0$ выполняется. Значит общее решение уравнения найдено верно.

Задание №3

Условие

Решить первую смешанную задачу на отрезке.

$$28.\ u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t \in (0,\infty);$$
$$u|_{t=0} = 10x(1-x),\ u_t|_{t=0} = 0,\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Решение

Предположим решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим его в уравнение в частных производных и получим следующее:

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

Теперь разделим обе части уравнения на $9u(x,t)$:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Таким образом имеем два дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + 9\lambda T(t) = 0 \qquad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Решим второе уравнение для $X(x)$, имея в виду граничные условия $X(0) = X(1) = 0$. Это задача Штурма-Лиувилля, поэтому нетрудно найти собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{1}\right) = k^2\pi^2, \qquad X_k(x) = \sin(k\pi x)$$
$$k \in \mathbb{N}$$

Теперь решим уравнение для $T(t)$, подставив найденное собственное значение λ:

$$T''(t) + 9k^2\pi^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k(t) = A_k\cos(3k\pi t) + B_k\sin(3k\pi t)$$

Составим общее решение:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k\cos(3k\pi t) + B_k\sin(3k\pi t))\sin(k\pi x)$$

Остаётся найти коэффициенты A_k и B_k, используя начальные условия $u(x,0) = 10x(1-x)$ и $u(x,0) = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(k\pi x) = 10x(1-x) \quad \Rightarrow \quad A_k = 2\int_0^1 10x(1-x)\sin(k\pi x)dx \quad \Rightarrow \quad A_k = \frac{40}{k^3\pi^3}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 3k\pi B_k\sin(k\pi x) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_k = 0 \text{ для всех } k$$

Составим итоговое решение, с учётом того, что $A_k = 0$, если k — чётное:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{80}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left(3(2n+1)\pi t\right)\sin\left((2n+1)\pi x\right)$$