Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Домашнее задание №1
по теории вероятностей

Студент: Овчинников П.А.
ИСУ: 368606 (вариант №3)
Поток: ТеорВер 1.2

Преподаватели: Шиманская Г.С.
Ватутин А.Д.

Санкт-Петербург
2024

Имеется 8 баллов за работу на занятиях, следовательно могу сделать всего лишь 3 задания в домашней работе, чтобы получить максимальные 20 баллов за первый раздел дисциплины.

Задание №1

Рассмотрим каждое из событий по отдельности под призмой теоремы о вписанном угле:

1. $\angle ABC$ острый — на величину угла влияют точки A и C,смещение точки B не изменяет его величину по теореме о вписанном угле.
2. $\angle ACB$ острый — на величину угла влияют точки A и B, смещение точки C не изменяет его величину по теореме о вписанном угле.

Если бы точки B и C были зафиксированы и произвольным было бы только положение A, то тогда можно было бы говорить о зависимости событий, но в нашем случае события независимы, т.к. кроме A в этих двух углах их величины задают другие две точки, которые выбираются произвольно и независимо.

Теперь воспользуемся теоремой Фалеса, которая сообщает нам, что угол, опирающий на диаметр окружности, всегда прямой. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 1):

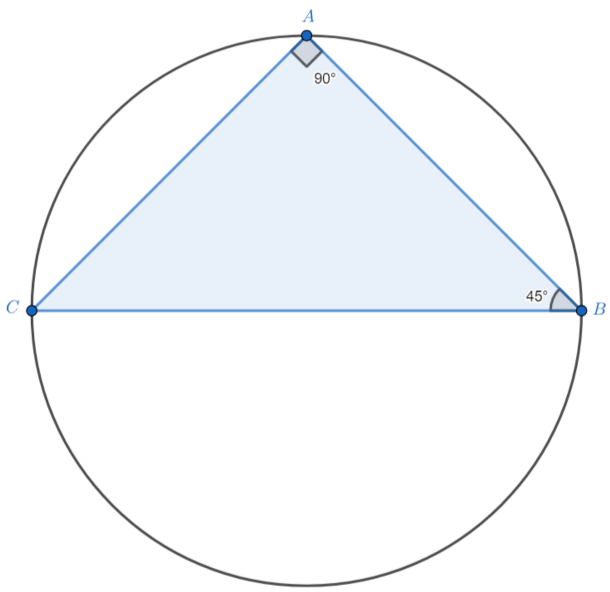

Рис. 1: Начальное состояние $\triangle ABC$

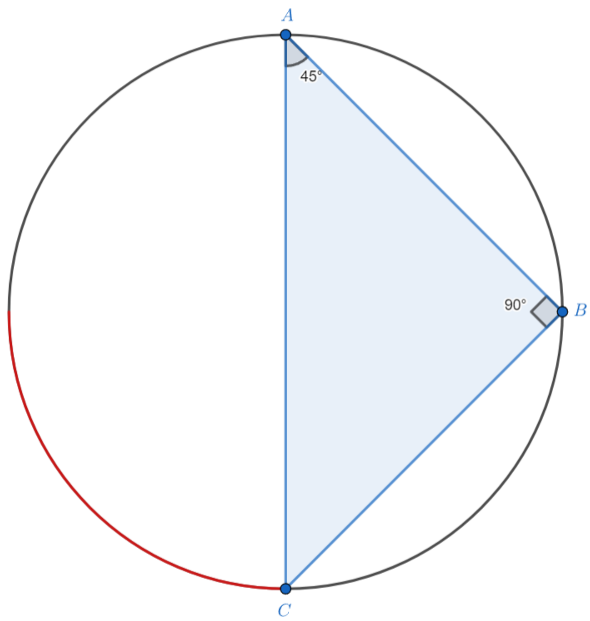

Рис. 2: Конечное состояние $\triangle ABC$

Отметим $\angle A$ и $\angle B$, чтобы видеть, как они изменяются, и будем двигать точку C против часовой стрелки до тех пор, пока отрезок AC не станет параллельным вертикальной оси. Во время этого движения заметим, что:

- $\angle C$ остаётся неизменным по теореме о вписанном угле, т.к. опирается на одну и ту же прямую,
- $\angle A$ будет уменьшаться от 90° до 45°,
- $\angle B$ будет, наоборот, увеличиваться от 45° до 90°.

Во время всего этого движения треугольник будет остроугольным, т.к. все углы будут острые (не учитывая крайние состояния, когда треугольник опирается на диаметр и $\angle A = 90°$ или $\angle B = 90°$). Когда точка C закончит движение, мы вновь получим прямоугольный треугольник теперь уже с прямым $\angle B$. При дальнейшем движении точки C мы получим тупоугольный треугольник с $\angle$.На рис. 2 выделена дуга, по которой двигалась точка C — она составляет $\boxed{1/4}$ от общей длины окружности. Это и есть ответ.

Возвращаясь к теореме о вписанно угле и рассматривая начальное состояние, мы также можем двигать точку A от точки C до точки B и получим дугу, равную половине окружности — на всей этой дуге треугольник будет прямоугольный и $\angle A$ будет равне 90°. Получаем ответ на вторую часть задания — $\boxed{1/2}$.

Задание №3

Вспомним формулу условной вероятности: $P(X|Y) = \frac{P(X \cdot Y)}{P(X)}$. Согласно этой формуле раскроем выражение из условия задания:

$$P(A|B) + P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} + \frac{P(A \cdot \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

Предположим, что события независимые. В таком случае, как мы знаем, для двух независмых событий верно равенство $P(X \cdot Y) = P(X) \cdot P(Y)$. Согласно этой формуле получаем:

$$\frac{P(A \cdot B)}{P(B)} + \frac{P(A \cdot \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} + \frac{P(A) \cdot \cancel{P(\bar{B})}}{\cancel{P(\bar{B})}} = P(A) + P(A) = P(A)$$

$P(A) = P(A|B) + P(A|\bar{B}) = P(A) \Rightarrow$ наше предположение верно, и <u>события действительно независимые</u>.

Задание №5

Пусть имеются три события:

- S_1 — первым произвёл выстрел первый стрелок
- S_2 — первым произвёл выстрел второй стрелок
- A — при пятом выстреле произошло попадание в мишень

Вероятность, которую мы ищем — $P(S_1|A)$. Раскроем её по формуле Байеса: $P(S_1|A) = \frac{P(S_1)P(A|S_1)}{P(A)}$. Необходимо найти каждое неизвестное в формуле.

Начнём с того, что вероятность первых двух событий равна, то есть $P(S_1) = P(S_2) = 0.5$, потому как доподлинно неизвестно, кто начал первым и в равной степени это мог быть как первый стрелок, так и второй.

Теперь найдём вероятность события A при условии возникновения событий S_1 или S_2:

$$P(A|S_1) = (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.45) \cdot (1 - 0.55) \cdot 0.5 = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.55 \cdot 0.45 \cdot 0.5 = \frac{297}{8000}$$

$$P(A|S_2) = (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.55) \cdot (1 - 0.45) \cdot 0.6 = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.45 \cdot 0.55 \cdot 0.6 = \frac{891}{20000}$$

И воспользуемся формулой полной вероятности, чтобы найти $P(A)$:

$$P(A) = P(S_1)P(A|S_1) + P(S_2)P(A|S_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{297}{8000} + \frac{1}{2} \cdot \frac{891}{20000} = \frac{1}{2}\left(\frac{297}{8000} + \frac{891}{20000}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3267}{40000} = \frac{3267}{80000}$$

Все слагаемые для нахождения искомой вероятности имеются, найдём же её:

$$P(S_1|A) = \frac{P(S_1)P(A|S_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{297}{8000}}{\frac{3267}{80000}} = \frac{\cancel{80000}^{5} \cdot 297}{\cancel{16000} \cdot 3267} = \frac{1485}{3267} \approx \boxed{0.(45)}$$