В этой лабораторной мы будем воспринимать любую матрицу 2×2 как линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}.$$

Перед началом выполнения заданий выберите четыре целых числа a, b, c и d таким образом, чтобы все они были различными и ни одно из них не равнялось 0 или ± 1.

Задание 1. Придумайте. Придумайте матрицы 2×2, которые задают:

1. Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$.
2. Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$.
3. Поворот плоскости на $10c$ градусов против часовой стрелки.
4. Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.
5. Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$, потом поворот на $10d$ градусов по часовой стрелке.
6. Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ и прямую $x = 0$ в $y = bx$.
7. Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ в $y = 0$ и прямую $y = bx$ в $x = 0$.
8. Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$.
9. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c.
10. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в **не**круг площади d.
11. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.
12. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.
13. Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).
14. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.
15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$.
16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга.

Задание 2. Проанализируйте.

- Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.
- Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
- Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.
- В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

Задание 3. Визуализируйте. Используя MATLAB или Python, выполните визуализацию полученных линейных преобразований. Для этого:

- Задайте произвольную фигуру как многоугольник с вершинами в выбранных вами точках. Постройте её графическое изображение. Это – оригинал.
- Найдите образ каждой вершины многоугольника при линейном отображении рассматриваемой матрицей. Постройте графическое изображение многоугольника на полученных (отображённых) вершинах. Это – результат преобразования, образ.
- Выполните указанную визуализацию для **всех** отображений из первого задания.
- При работе с пунктами 15 и 16 сделайте визуализацию всех рассматриваемых отображений, а именно: A, B, AB и BA.
- Для пунктов 1, 11, 12, 14, 15, 16 добавьте на картинку прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов.