Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Индивидуальное домашнее задание

РЯДЫ

Студенты: Овчинников П.А.
Группа: R3241
Преподаватель: Кольцова Т.Б.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Задание №1

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^3}+5}{n^3+6}$

Проверим, стремится ли общий член ряда к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^3}+5}{n^3+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n^3}}{n^3} + \cancelto{0}{\frac{5}{n^3}}}{1+\cancelto{0}{\frac{6}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^3}}{n^3} = \left[3^{n^3} \gg n^3 \text{ при } n\to\infty\right] = \infty \neq 0$$

Общий член ряда не стремится к нулю, поэтому $\boxed{\text{ряд расходится.}}$

b) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{4^{n+2}(n-5)!}$

Определим сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}\cdot \cancelto{4}{4^{n+3}}(n-4)\cancel{!}}{\cancel{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}\cdot(3n+2)\cdot\cancel{4^{n+2}}\cancel{(n-5)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-16}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{16}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{4}{3} > 1$$

Получившееся число больше 1, следовательно $\boxed{\text{ряд расходится.}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arccos\frac{4}{n^2+1}$

Проверим, стремится ли общий член ряда к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \arccos\frac{4}{n^2+1} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Общий член ряда не стремится к нулю, поэтому $\boxed{\text{ряд расходится.}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)\ln(n-1)}$
Имеем знакопеременный ряд, поэтому исследуем ряд по признаку Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n-1)} = 0 \cdot 0 = 0$$

По признаку Лейбница ряд сходится, но нам необходимо исследовать ряд по общим признакам сходимости рядов. Выберем признак сходимости Коши:

$$\int\limits_3^{\infty} \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)} dn = \left[t = \ln(n-1); \quad dt = \tfrac{dn}{n-1}\right] = \int\limits_3^{\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_3^{\infty} = \ln\infty - \ln 3 = \infty$$

Этот несобственный интеграл расходится, поэтому расходится и исследуемый ряд. По признаку Лейбница делаем вывод, что $\boxed{\text{ряд сходится условно.}}$

Задание №2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^{n^2} 3^{n^2}$$

Имеем $a_n = (x+1)^{n^2} 3^{n^2}$, и тогда $|a_n| = |x+1|^{n^2} 3^{n^2}$. Для определения области сходимости ряда воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|^{(n+1)^2} 3^{(n+1)^2}}{|x+1|^{n^2} 3^{n^2}} = |x+1|^{2n+1} 3^{2n+1}$$

Второй множитель в основании содержит 3, поэтому пороговое значение первого множителя $|x+1| = 1/3$: при нём $|x+1|^{2n+1} \to 0$ с такой же скоростью, с какой $3^{2n+1} \to \infty$ — эту границу нам ещё предстоит уточнить другим методом. Если $|x+1| < 1/3$, то $|x+1|^{2n+1}$ будет стремиться к нулю быстрее 3^{2n+1} — и ряд будет сходится абсолютно. Если же $|x+1| > 1/3$, то $|x+1|^{2n+1}$ будет либо стремиться к нулю медленее 3^{2n+1}, либо будет стремиться к бесконечности вместе с последним — в любом случае ряд будет расходится.

Имеем такую область сходимость ряда: $|x+1| < 1/3 \Rightarrow -1/3 < x+1 < 1/3 \Rightarrow -4/3 < x < -2/3 \Rightarrow x \in (-4/3; -2/3)$. Дополнительно уточним сходимость в точках $-4/3$ и $-2/3$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(-4/3) = \lim_{n\to\infty} (-1/3)^{n^2} 3^{n^2} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n^2} \text{ — предела не сущестует.}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(-2/3) = \lim_{n\to\infty} 1/3^{n^2} 3^{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1^{n^2} = 1 \neq 0 \text{ — ряд расходится.}$$

Итак, область сходимости данного ряда — $\boxed{(-4/3; -2/3).}$

Задание №3

$$f(x) = (1 + \operatorname{ctg}(x+1))^{-1}$$

Ряд Маклорена выглядит как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Будем искать производные, начиная с нулевого порядка:

$$f^{(0)}(0) = f(0) = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} 1} \approx \frac{1}{1.642} \approx 0.609 \Rightarrow m_1 = 0.609$$

$$f'(0) = \frac{\operatorname{ctg}^2 1 + 1}{(\operatorname{ctg} 1 + 1)^2} \approx \frac{1.412}{2.696} \approx 0.524 \Rightarrow m_2 = 0.524x$$

$$f''(0) = \left(-2 - 2\operatorname{ctg}^2 1\right) \frac{\operatorname{ctg} 1}{(\operatorname{ctg} 1 + 1)^2} + \left(\operatorname{ctg}^2 1 + 1\right) \frac{2\operatorname{ctg}^2 1 + 2}{(\operatorname{ctg} 1 + 1)^3} \approx -0.673 + 0.901 \approx 0.228 \Rightarrow m_3 = 0.114x^2$$

Ответ: $\boxed{(1 + \operatorname{ctg}(x+1))^{-1} = 0.609 + 0.524x + 0.114x^2 + \ldots}$

Задание №4

a) $f(x) = 2^{3(x+1)},\ x_0 = -2$
Сделаем замену $x - x_0 = x + 2 = t \ \Rightarrow\ x = t - 2$.

Функция представима в виде более простых элементарных $2^{3(t-1)} = \dfrac{2^{3t}}{8}$.

Стандартное разложение показательной функции в ряд Маклорена: $a^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^n a}{n!} t^n$. Применим его для 2^{3t}:

$$2^{3t} = 1 + \frac{3\ln 2}{1!}t + \frac{(3\ln 2)^2}{2!}t^2 + \frac{(3\ln 2)^3}{3!}t^3 + \ldots + \frac{(3\ln 2)^n}{n!}t^n$$

Разделим на 8:

$$\frac{2^{3t}}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3\ln 2}{8}t + \frac{(3\ln 2)^2}{8\cdot 2!}t^2 + \frac{(3\ln 2)^3}{8\cdot 3!}t^3 + \ldots + \frac{(3\ln 2)^n}{8\cdot n!}t^n$$

Произведём обратную замену $t = x + 2$:

$$\frac{2^{3(x+2)}}{8} = 2^{3(x+1)} = \frac{1}{8} + \frac{3\ln 2}{8}(x+2) + \frac{(3\ln 2)^2}{8\cdot 2!}(x+2)^2 + \ldots + \frac{(3\ln 2)^n}{8\cdot n!}(x+2)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3\ln 2)^n}{8\cdot n!}(x+2)^n}$$

Область сходимости показательной функции $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ — неизменно при домножении на константу.

b) $f(x) = x(x+2)^{-1},\ x_0 = 1$
Сделаем замену $x - x_0 = x - 1 = t \ \Rightarrow\ x = t + 1$.
Функция представима в виде более простых элементарных $\dfrac{t+1}{t+3} = (t+1)\dfrac{1}{t+3}$.

Стандартное разложение для $\dfrac{1}{t+a} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{a^{n+1}} t^n$, а для $(t+1)^b = \sum\limits_{n=0}^{b} \dfrac{1\cdot \prod\limits_{m=0}^{n-1}(b-m)}{n!} t^n$.

$$(t+1)^1 \frac{1}{t+3} = \sum_{n=0}^{1} \frac{1\cdot \prod\limits_{m=0}^{n-1}(1-m)}{n!} t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n = (1+t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n.$$

Произведём обратную замену $t = x - 1$:

$$\frac{x}{x+2} = \boxed{x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n.}$$

Область сходимости первого разложения — $[-1;1]$ и второго — $(-1;1)$. Рассматривается область, включающая в себя обе $\Rightarrow$ область сходимости результирующего ряда — $\boxed{(-1;1).}$

Задание №5

Со стандартным рядом Маклорена для функции $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ будем иметь такой для e^{-2x^2}:

$$e^{-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{2n}$$

Проинтегрируем ряд:

$$\int_0^{0.3} e^{-2x^2}\,dx = \int_0^{0.3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{0.3} \frac{(-2)^n}{n!} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_0^{0.3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n 0.3^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

Будем наращивать n до достижения точности в 0.001:

$$\begin{aligned}
n = 0\colon &\quad 0.3 > 0.001 \\
n = 1\colon &\quad \frac{-2 \cdot 0.3^3}{3} = -0.018 > 0.001 \\
n = 2\colon &\quad \frac{4 \cdot 0.3^5}{2 \cdot 5} = 0.000972 < 0.001
\end{aligned}$$

Итак, суммы первых двух членов достаточно для заданной точности: $0.3 - 0.018 = \boxed{0.282.}$

Задание №6

Имеем такую задачу $2y'' - xy' + 2y = x - 4x^2$, решение которой нужно найти в виде ряда.

Решение такой задачи можно сразу искать в виде ряда Маклорена $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ при заданных по условию начальных условиях $y(0) = -1$ и $y'(0) = 1$. Выразим вторую производную из исходного выражения, подставим $x = 0$ и будем последовательно искать новые и новые значения производных, чтобы выявить зависимость:

$$\begin{array}{lll}
y'' = \dfrac{xy' + x}{2} - y - 2x^2 & \Rightarrow & y''(0) = -y(0) = 1 \\
y''' = \dfrac{y''x - y' + 1}{2} - 4x & \Rightarrow & y'''(0) = -y'(0) = 0 \\
y^{IV} = \dfrac{y'''x}{2} - 4 & \Rightarrow & y^{IV}(0) = -4 \\
y^{V} = \dfrac{y^{IV}x + y'''}{2} & \Rightarrow & y^{V}(0) = \dfrac{y'''(0)}{2} = 0 \\
y^{VI} = \dfrac{y^{V}x}{2} + y^{IV} & \Rightarrow & y^{VI}(0) = y^{IV}(0) = -4 \\
y^{VII} = \dfrac{y^{VI}x + 3y^{V}}{2} & \Rightarrow & y^{VII}(0) = \dfrac{3y^{V}(0)}{2} = 0 \\
y^{VIII} = \dfrac{y^{VII}x}{2} + 2y^{VI} & \Rightarrow & y^{VIII}(0) = 2y^{VI}(0) = -8 \\
y^{IX} = \dfrac{y^{VIII}x + 5y^{VII}}{2} & \Rightarrow & y^{IX}(0) = \dfrac{5y^{VII}(0)}{2} = 0 \\
y^{X} = \dfrac{y^{IX}x}{2} + 3y^{VIII} & \Rightarrow & y^{X}(0) = 3y^{VIII}(0) = -24 \\
\vdots \quad \vdots & & \vdots \\
y^{(n+2)} = \dfrac{y^{(n+1)}x + (n-2)y^{(n)}}{2} & \Rightarrow & y^{(n+2)} = \dfrac{(n-2)}{2} y^{(n)}
\end{array}$$

Отличны от нуля при $x = 0$ только производные с чётным порядком.

$$y^{XII}(0) = 4y^{X} = -24 \cdot 4 = -4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = -4 \cdot 4!$$

$$y^{XIV}(0) = 5y^{XII} = -4 \cdot 4! \cdot 5 = -4 \cdot 5!$$

$$\Downarrow$$

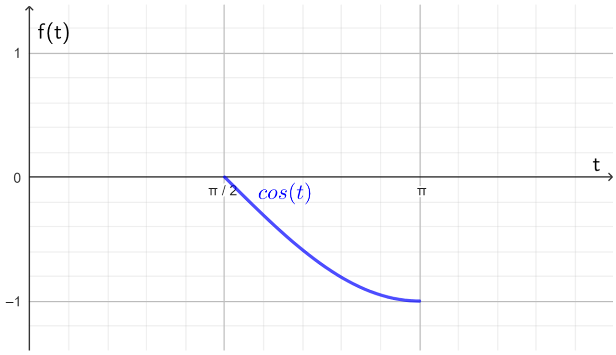
$$y^{(2m)}(0) = -4 \cdot (m-2)!$$

Таким образом мы обозначили производную $(2m)$-го порядка и теперь можем представить решение задачи в виде ряда:

$$\boxed{y(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{-4 \cdot (m-2)!}{(2m)!} x^{2m}}$$

Задание №7

Задана функция $f(t) = \cos t$ на промежутке от $\pi/2$ до π и график выглядит так:



Тригонометрический ряд Фурье

Тригонометрический ряд Фурье выглядит так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

Здесь $\omega = 2\pi/T$, T — длина промежутка, на котором задана исходная функция $f(t)$. Итак, $T = \pi - \pi/2 = \pi/2$, $\omega = 4$. А коэффициенты a_n и b_n вычисляются так:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,\cos 4nt\,dt, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,\sin 4nt\,dt, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$$

Найдём a_0, a_n и b_n:

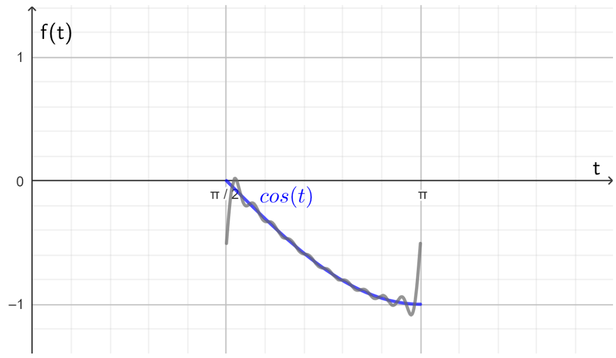
$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,dt = \frac{4}{\pi}(\sin t)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4}{\pi}(\sin\pi - \sin \pi/2) = -\frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,\cos 4nt\,dt = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(4n+1)t}{2(4n+1)} + \frac{\sin(4n-1)t}{2(4n-1)}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4}{\pi(16n^2-1)}$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\,\sin 4nt\,dt = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(4n+1)t}{2(4n+1)} + \frac{\cos(4n-1)t}{2(4n-1)}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{n}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{16}\right)}$$

$$\boxed{f(t) = -\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos 4nt}{\pi(16n^2-1)} + \frac{n\sin 4nt}{\pi\left(n^2-\frac{1}{16}\right)}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$$

И вот как выглядит график ряда с технически доступной точностью — он выделен серым на фоне функции $f(t) = \cos t$:



Ряд Фурье по синусам

Поскольку ряд Фурье по синусам применим только к нечётным функциям, продолжим функцию нечётным образом через $-\cos t$ на промежутке $[-\pi, -\pi/2]$. Обозначим полученную функцию как $\tilde{f}(t)$ и так будет выглядит ряд Фурье по синусам в общем виде:

$$\tilde{f}(t) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin n\omega t$$

График функции будет представлен позже вместе с графиком ряда Фурье.

Обозначим константы: $T = \pi$, $\omega = 2$ и остаётся только коэффициент $\tilde{b}_n$:

$$\tilde{b}_n = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt, \;\; n = 1,\, 2,\, \ldots$$

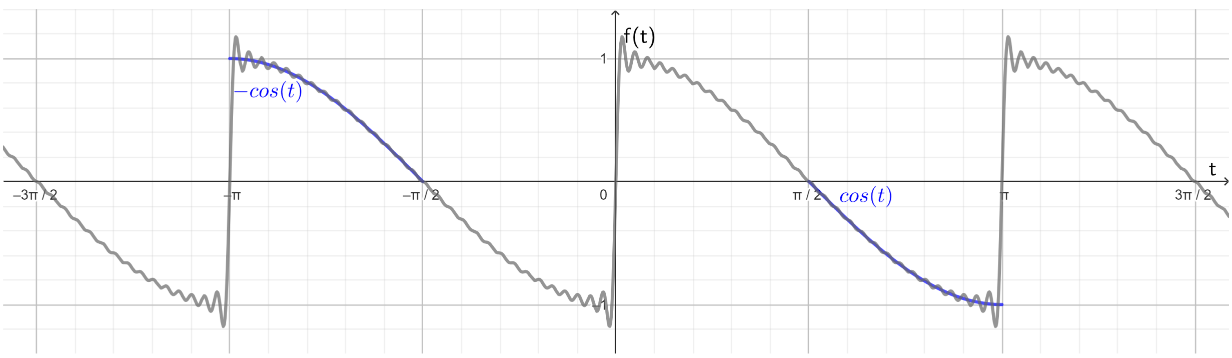
Вычислим этот коэффициент:

$$\tilde{b}_n = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin 2nt \, dt - = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos{(2n+1)t}}{2(2n+1)} + \frac{\cos{(2n-1)t}}{2(2n-1)} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}$$

Получаем такой ряд по синусам для заданной нами функции:

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n \sin 2nt}{\pi(4n^2-1)}, \quad t \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$$

И так выглядит график ряда вместе с графиком функции $\tilde{f}(t)$:



Ряд Фурье по косинусам

Этот ряд, наоборот, существует только для чётных функций, поэтому продолжаем исходную функцию на промежутке $[-\pi, -\pi/2]$. Вот как выглядит ряд Фурье по косинусам в общем виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t, \quad \text{где } a_n = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вновь обозначим константы $T = \pi$, $\omega = 2$, а a_0 мы сейчас найдём вместе с a_n:

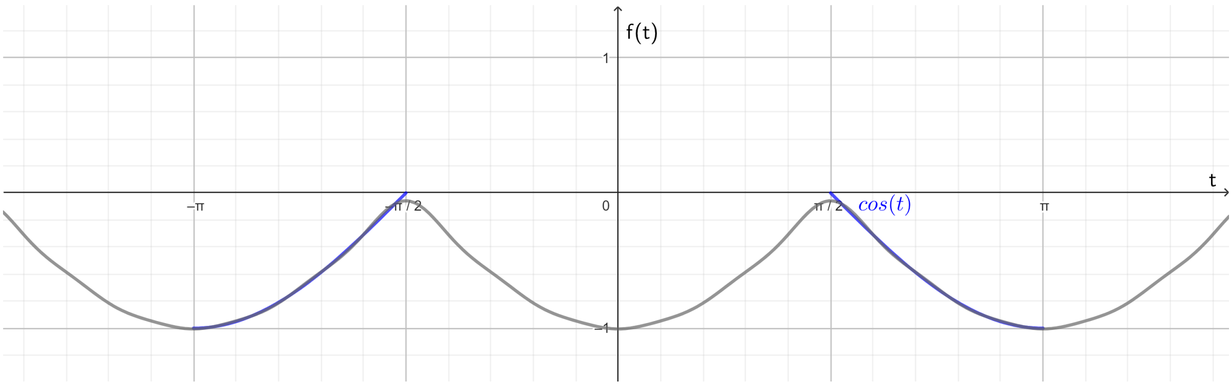
$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{4}{\pi} \left(\sin t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cos 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin{(2n+1)t}}{2(2n+1)} + \frac{\sin{(2n-1)t}}{2(2n-1)} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4 \cdot (-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

Получаем такой ряд по косинусам для заданной функции:

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n \cos 2nt}{\pi(4n^2 - 1)}, \quad t \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$$

И так выглядит график ряда вместе с графиком функции $\tilde{f}(t)$:



Ряд Фурье в комплексной форме

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}, \quad \text{где } c_n = T^{-1} \int\limits_a^b f(t) e^{-i\omega nt} \, dt$$

Вновь обозначим константы $T = \pi/2$, $\omega = 4$ и найдём c_0 и c_n:

$$c_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt = -\frac{2}{\pi}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos t e^{-4int} \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin t - 4in \cos t}{(16n^2 - 1)e^{4int}}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2e^{2i\pi n} - 8in}{\pi(16n^2 - 1)e^{4i\pi n}}$$

Получаем следующий ряд в комплексной форме для функции $f(t)$:

$$\boxed{f(t) = -\frac{2}{\pi} + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 1/4}^{\infty} \frac{2e^{2i\pi n} - 8in}{\pi(16n^2-1)e^{4i\pi n}} e^{4int}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$$

Задание №8

Функция задана на всей области через два промежутка:

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & t \in [-\pi, \pi] \\ 0, & t \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Прямое преобразование Фурье в комплексной форме для этой задачи выглядит так:

$$F(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_a^b f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

Подставим $\sin 2t$ вместо $f(t)$ и $a = -\pi$, $b = \pi$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 2t e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega t}(2\cos 2t - i\omega \sin 2t)}{\omega^2 - 4}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{2(e^{2i\pi\omega} - 1)}{\sqrt{2\pi}(\omega^2 - 4)e^{i\pi\omega}}}$$