Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1

РЯДЫ ФУРЬЕ

Студент: Овчинников П.А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Задание №1. Синусы, косинусы и экспонента могут всё!

Для начала немного теории. **Ряд Фурье** — это представление функции $f(x)$ в виде бесконечной суммы тригонометрических функций $sin(x)$ и $cos(x)$. Кроме того, путём преобразований можно получить и представление в виде e^{ix}, но об этом в следующем задании. В общем виде для периода длиной T ряд Фурье выглядит так:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x)\text{, где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Как мы видим, ряд зависит коэффициентов a_n и b_n, которые регулируют косинусы и синусы так, что они представляют исходную функцию $f(x)$. Сами коэффициенты вычисляются с помощью исходной функции следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos\omega_n x\, dx \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin\omega_n x\, dx \quad (b_0 = 0)$$

Также стоит упомянуть про **эффект Гиббса** — колебательное поведение ряда Фурье кусочной непрерывно дифференцируемой периодической функции вокруг скачкообразного разрыва. Этот поведение не устранить даже с увеличением количества членов ряда Фурье и возникает оно тогда, когда функция имеет разрыв, сходящийся к вертикальной асимптоте, то есть когда производная в точке разрыва стремится к 1.

Для выполнения задания нам предлагается построить ряд Фурье для периодической кусочной функции, для чётной и нечётной функций и для любой периодической функции, состоящей не только из прямых линий и являющейся ни чётной, ни нечётной. Начнём с кусочной функции.

Квадратная волна — такую в море не встретишь

Придумаем следующий набор чисел (единица для слабаков!):

$$\begin{bmatrix} a = 2 \quad b = 3 \\ t_0 = 4 \quad t_1 = 5 \quad t_2 = 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [4, 5), \\ 3, & t \in [5, 7). \end{cases}$$

Теперь построим график функции $f(t)$, которая циклично параметризуется с помощью этого набора чисел:

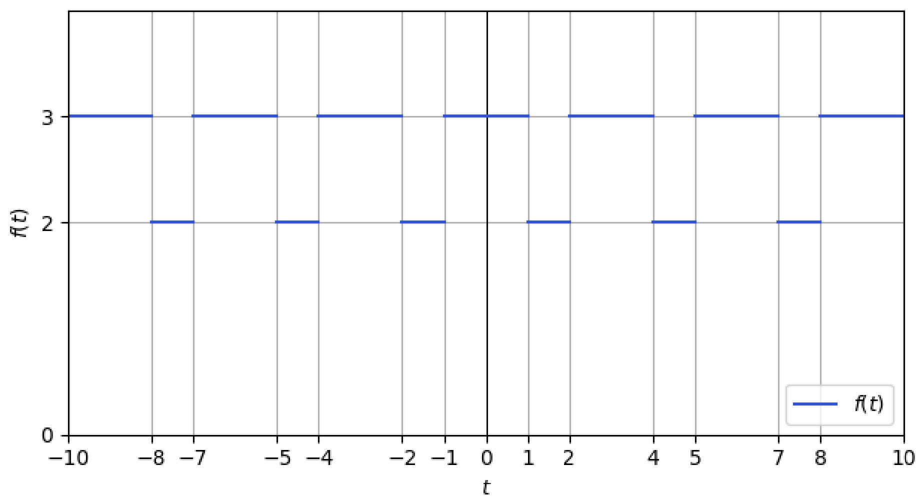

Рис. 1: График функции $f(t)$

Итак, период функции $f(t)$ равен $T = 3 \;\Rightarrow\; \omega_n = {}^{2\pi n}/_3$. Пришло время найти коэффициенты Фурье для этой функции — вычислим первые три a_n, b_n и c_n ручками, а дальше за нас всё сделает машина ;)

Считаем интегральчики...

NB: Т.к. перед нами кусочная функция, то нам необходимо разложить интегралы на два: один от t_0 до t_1, другой от t_1 до t_2, но при этом длина T в ω_n сохраняется для обоих интегралов.

Начнём расчёты с a_n:

$$a_0 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\,dt + \int\limits_5^7 3\,dt\right) = \frac{2}{3}\left(2t\Big|_4^5 + 3t\Big|_5^7\right) = \frac{2}{3}(10-8+21-15) = \boxed{\frac{16}{3}}$$

$$a_1 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\cos\frac{2\pi t}{3}\,dt + \int\limits_5^7 3\cos\frac{2\pi t}{3}\,dt\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3\sin\frac{2\pi t}{3}}{\pi}\Bigg|_4^5 + \frac{9\sin\frac{2\pi t}{3}}{2\pi}\Bigg|_5^7\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

$$a_2 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\cos\frac{4\pi t}{3}\,dt + \int\limits_5^7 3\cos\frac{4\pi t}{3}\,dt\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3\sin\frac{4\pi t}{3}}{2\pi}\Bigg|_4^5 + \frac{9\sin\frac{2\pi t}{3}}{2\pi}\Bigg|_5^7\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{9\sqrt{3}}{4\pi}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$$

Казалось бы, всё хорошо, но давайте найдём a_3 (это действительно важно!), при котором $\omega_3 = {}^{2\cdot\cancel{3}\pi}/_{\cancel{3}} = 2\pi$:

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\cos 2\pi t\,dt + \int\limits_5^7 3\cos 2\pi t\,dt\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi}\Bigg|_4^5 + \frac{3\sin 2\pi t}{2\pi}\Bigg|_5^7\right) = \boxed{0} \quad \text{т.к. } \forall\, t, k \in \mathbb{Z}\colon\ \sin 2k\pi t = 0$$

Становится понятно, что все коэффициенты a_n при $n \vdots 3$ равны нулю. Теперь найдём коэффициенты b_n:

$$b_1 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\sin\frac{2\pi t}{3}\,dt + \int\limits_5^7 3\sin\frac{2\pi t}{3}\,dt\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3\cos\frac{2\pi t}{3}}{\pi}\Bigg|_4^5 + \frac{9\cos\frac{2\pi t}{3}}{2\pi}\Bigg|_5^7\right) = \boxed{0}$$

$$b_2 = \frac{2}{3}\left(\int\limits_4^5 2\sin\frac{4\pi t}{3}\,dt + \int\limits_5^7 3\sin\frac{4\pi t}{3}\,dt\right) = \boxed{0} \quad \text{т.к. косинусы вновь взаимно уничтожат друг друга.}$$

Приходим к выводу, что все коэффициенты b_n равны нулю. В сущности это следует и из того, что функция чётная — такие функции раскладываются в ряд Фурье только по косинусам. На очереди коэффициенты c_n:

$$c_0 = \frac{1}{3}\left(\int\limits_4^5 2\,dt + \int\limits_5^7 3\,dt\right) = \frac{a_0}{2} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

NB: Для коэффициентов c_n будет использоваться свойство $\mathrm{e}^{2ki\pi} = 1\ \forall k \in \mathbb{Z}$, связанное с кратностью $\cos 2k\pi t = 1$ и $\sin 2k\pi t = 0$.

$$c_1 = \frac{1}{3}\left(\int\limits_4^5 2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i t}{3}}\,dt + \int\limits_5^7 3\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i t}{3}}\,dt\right) = \frac{i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{10\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{8\pi i}{3}}\right) + \frac{3i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{14\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{10\pi i}{3}}\right) = \frac{i}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) +$$

$$+\frac{3i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{i}{\pi} - \frac{3i}{2\pi}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{3i}{2\pi} - \frac{i}{\pi}\right) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \frac{i}{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} = \boxed{\frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\left(\int\limits_4^5 2\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi i t}{3}}\,dt + \int\limits_5^7 3\,\mathrm{e}^{-\frac{4\pi i t}{3}}\,dt\right) = \frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{20\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{16\pi i}{3}}\right) + \frac{3i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{28\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{20\pi i}{3}}\right) = \frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right) +$$

$$+\frac{3i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{3i}{4\pi} - \frac{i}{2\pi}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}}\left(\frac{i}{2\pi} - \frac{3i}{4\pi}\right) = \frac{i}{4\pi}\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} - \frac{i}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} = \boxed{-\frac{i}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}\right)}$$

Хоть мы и знаем, заглядывая наперёд, что $c_3 = c_{-3} = 0$, давайте всё же проверим себя, вычислив c_3:

$$c_3 = \frac{1}{3}\left(\int\limits_4^5 2\,\mathrm{e}^{-2\pi i t}\,dt + \int\limits_5^7 3\,\mathrm{e}^{-2\pi i t}\,dt\right) = \frac{i}{3\pi}\left(\mathrm{e}^{-10\pi i} - \mathrm{e}^{-8\pi i}\right) + \frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{-14\pi i} - \mathrm{e}^{-10\pi i}\right) = \frac{i}{3\pi}\left(\cancel{\mathrm{e}^{2\pi i}} - \cancel{\mathrm{e}^{2\pi i}}\right) +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\left(\cancel{\mathrm{e}^{2\pi i}} - \cancel{\mathrm{e}^{2\pi i}}\right) = \boxed{0}$$

А теперь кодим!

Напишем программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье самостоятельно для любого n.

```
from typing import Callable

import numpy as np

T = 3


def dot_product(f: Callable, g: Callable, a: float, b: float) -> np.ndarray:
    """Вычисляет скалярное произведение функций f и g на отрезке [a, b]."""
    x = np.linspace(a, b, 10000)  # Генерируем точки на отрезке [a, b]
    dx = x[1] - x[0]  # Шаг интегрирования
    return np.dot(f(x), g(x)) * dx  # Возвращаем скалярное произведение


def f(t):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    # В данном случае периодическая кусочная функция
    return np.vectorize(lambda t: 2 if 0 <= (t - 1) % 3 < 1 else 3)(t)


def a(n: int, func: Callable = f, s: float = -T / 2, p: float = T) -> np.ndarray:
    """Вычисляет коэффициент a_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 2 / p * dot_product(func, lambda t: np.cos(w(p) * n * t), s, s + p)


def b(n: int, func: Callable = f, s: float = -T / 2, p: float = T) -> np.ndarray:
    """Вычисляет коэффициент b_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 2 / p * dot_product(func, lambda t: np.sin(w(p) * n * t), s, s + p)


def c(n, func: Callable = f, s: float = -T / 2, p: float = T) -> np.ndarray:
    """Вычисляет коэффициент c_n для функции func на отрезке (s, s + p)."""
    return 1 / p * dot_product(func, lambda t: np.exp(-1j * w(p) * n * t), s, s + p)


def fourier_coefficients(n: int):
    """Вычисляет коэффициенты Фурье a_n, b_n и c_n для функции f с периодом T."""
    return a(n).round(3), b(n).round(3), c(n).round(3), c(-n).round(3)


# Задаем период функции и порядковый номер коэффициента
print('Оставьте поле ввода пустым, и программа выведет первые 6 коэффициентов Фурье, начиная с 0.')
coef_num = int(data) if (data := input('Введите порядковый номер коэффициента: ')) else None
w = lambda period: 2 * np.pi / period

# Выводим коэффициенты Фурье (либо первые 6, либо введенный пользователем)
for n in range(coef_num or 0, (coef_num or 5) + 1):
    a_n, b_n, c_n, c_mn = fourier_coefficients(n)
    print(f'a_{n} = {a_n},\tb_{n} = {b_n},\tc_{n} = {c_n}  c_{-n} = {c_mn}')
```

Листинг 1: Вычисление коэффициентов Фурье для кусочной функции

Итак, программа выведет нам первые шесть коэффициентов Фурье для функции $f(t)$, среди которых есть и необходимые по заданию a_3, b_3 и c_3 — хотя они всё равно равны нулю, чего тут смотреть :)

```
a_0 = 5.334,    b_0 = 0.0,     c_0 = (2.667+0j)  c_0 = (2.667+0j)
a_1 = 0.551,    b_1 = 0.0,     c_1 = (0.275-0j)  c_-1 = (0.275+0j)
a_2 = -0.275,   b_2 = -0.0,    c_2 = (-0.138+0j)  c_-2 = (-0.138-0j)
a_3 = -0.0,     b_3 = 0.0,     c_3 = (-0-0j)  c_-3 = (-0+0j)
a_4 = 0.138,    b_4 = 0.0,     c_4 = (0.069-0j)  c_-4 = (0.069+0j)
a_5 = -0.111,   b_5 = -0.0,    c_5 = (-0.055+0j)  c_-5 = (-0.055-0j)
```

Листинг 2: Вывод программы

Созерцаем плоды трудов!

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(t)$:

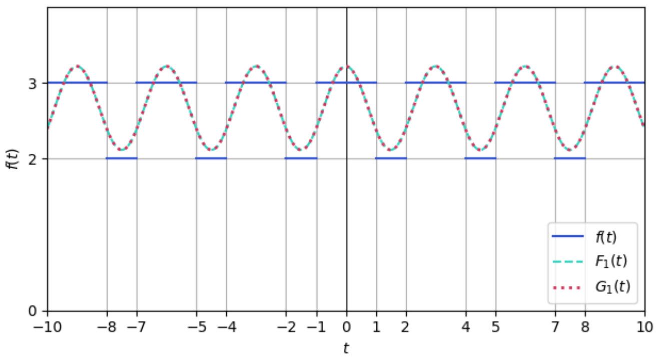

Рис. 2: $n = 1$

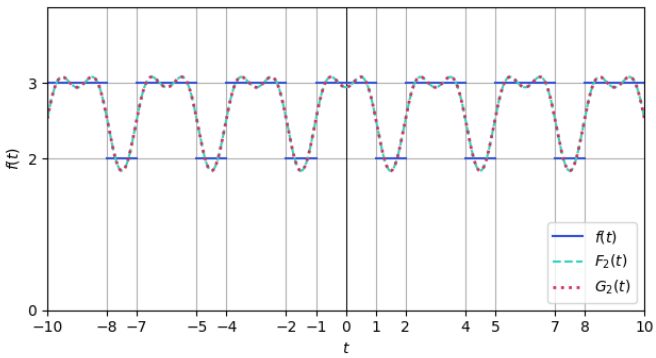

Рис. 3: $n = 2$

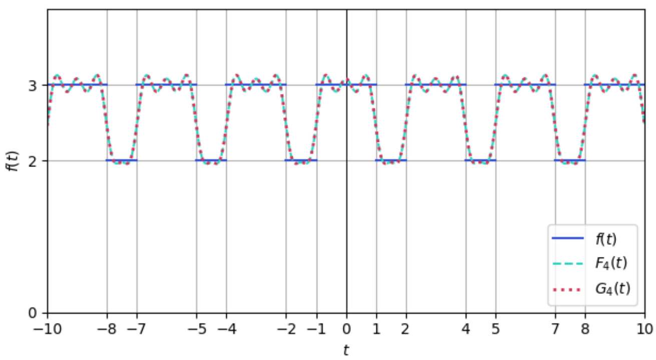

Рис. 4: $n = 4$

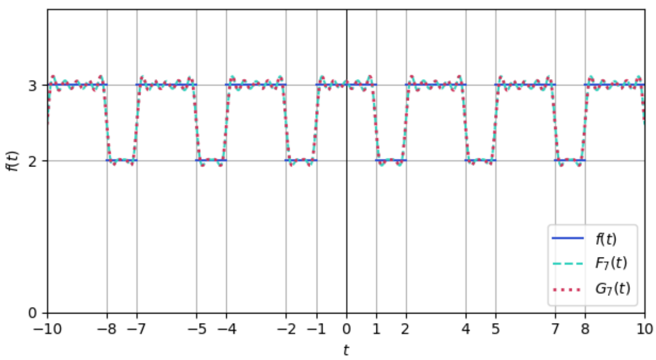

Рис. 5: $n = 7$

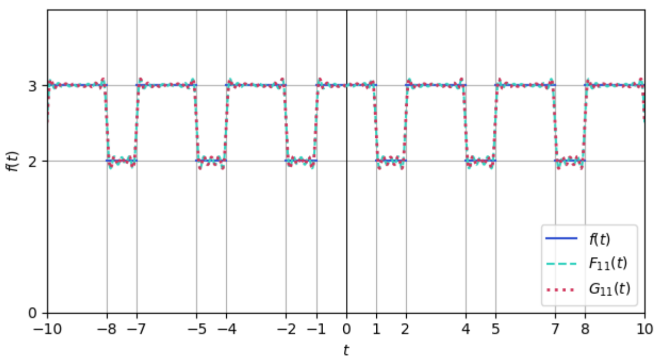

Рис. 6: $n = 11$

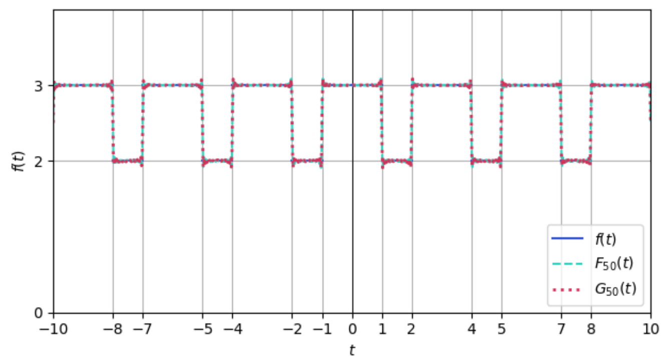

Рис. 7: $n = 50$

Как мы видим, ряды Фурье $F_n(t)$ и $G_n(t)$:

- во-первых, совпадают;
- во-вторых, шедевральны;
- в-третьих, вполне неплохо аппроксимируют функцию $f(t)$ уже при $n = 7$;
- и, наконец, разница, без учёта эффекта Гиббса практически незаметна при $n = 50$.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 50$ ряд Фурье действительно хорошо приближается к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 1.35317
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 1.35317
```

Листинг 3: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.01964
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.01964
```

Листинг 4: Равенство Парсеваля при $n = 50$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f(t)$ всё лучше и лучше.

Время чётных функций!

Теперь рассмотрим чётную периодическую функцию $f(x) = |2\sin x|$ на отрезке $[0, \pi]$ — брать чистый синус со стандартным промежутком не интересно, а так будет хоть какое-то разнообразие. И, конечно, построим график этой функции.

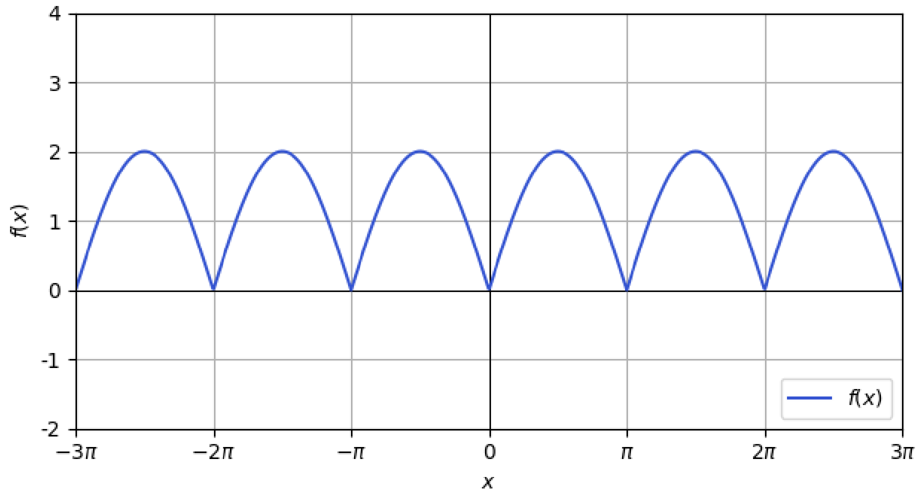

Рис. 8: График функции $f(x)$

Период функции $f(x)$ равен $T = \pi \;\Rightarrow\; \omega_n = 2n$. И снова настало время найти коэффициенты Фурье теперь для этой функции, но мы стали умными и у нас есть код, поэтому пускай за нас всё делает машина ;)

Однако же не будет лишним привести формулу для вычисления коэффициентов. Для чётной функции $f(x)$ коэффициенты b_n равны нулю и ряд Фурье строится по косинусам. Таким образом, коэффициенты a_n и c_n в общем виде вычисляются следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |2\sin x| \cos 2nx \, dx \qquad c_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |2\sin x| \, \mathrm{e}^{-2inx} \, dx$$

Снова немножко кодим...

Изменим программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье самостоятельно для любого n, под нашу функцию.

```python
...

def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda x: 2*np.abs(np.sin(x)))(x)

...
```

Листинг 5: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $|2\sin x|$

Программа вновь выводит нам первые шесть коэффициентов Фурье, среди которых есть и необходимые по заданию a_3, b_3 и c_3:

```
a_0 = 2.547,    b_0 = 0.0,      c_0 = (1.273+0j)  c_0 = (1.273+0j)
a_1 = -0.849,   b_1 = 0.0,      c_1 = (-0.425+0j)  c_-1 = (-0.425-0j)
a_2 = -0.169,   b_2 = -0.0,     c_2 = (-0.085+0j)  c_-2 = (-0.085-0j)
a_3 = -0.073,   b_3 = -0.0,     c_3 = (-0.037-0j)  c_-3 = (-0.037+0j)
a_4 = -0.04,    b_4 = 0.0,      c_4 = (-0.02-0j)  c_-4 = (-0.02+0j)
a_5 = -0.026,   b_5 = -0.0,     c_5 = (-0.013-0j)  c_-5 = (-0.013+0j)
```

Листинг 6: Вывод программы

Убеждаемся, что, действительно, коэффициенты b_n равны нулю.

Рисуем графики!

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

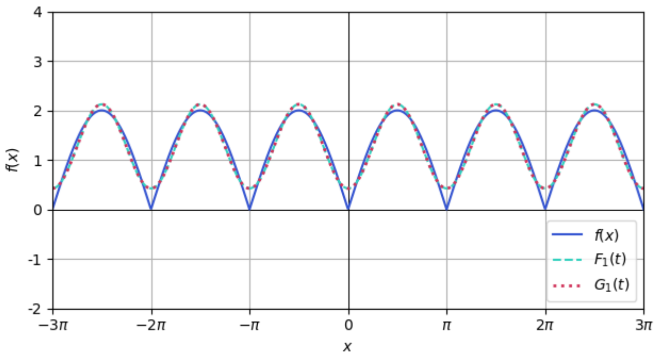

Рис. 9: $n = 1$

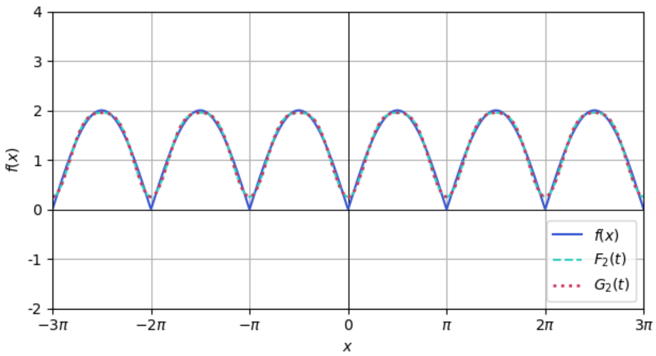

Рис. 10: $n = 2$

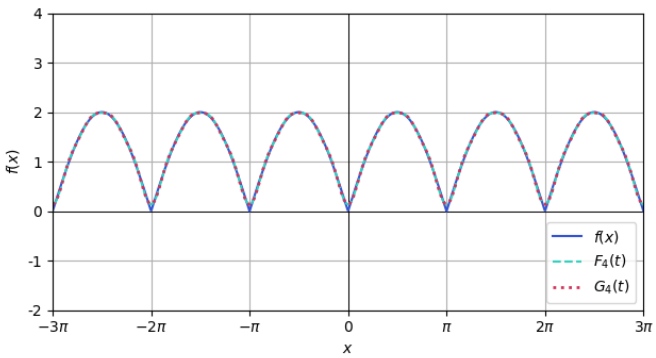

Рис. 11: $n = 4$

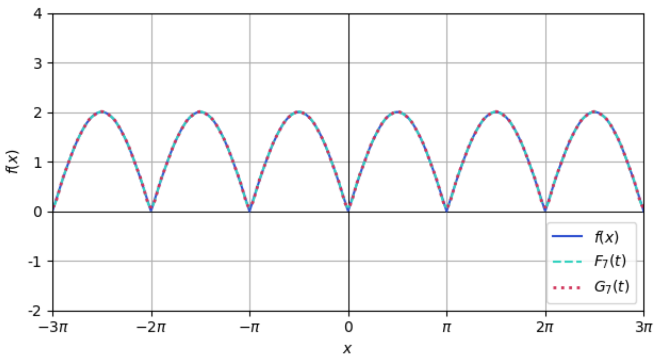

Рис. 12: $n = 7$

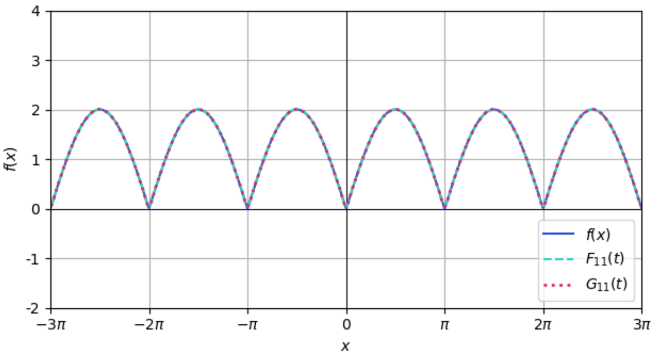

Рис. 13: $n = 11$

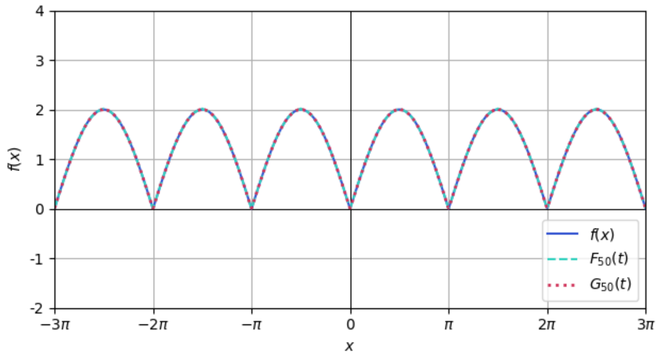

Рис. 14: $n = 50$

И вновь графики рядов Фурье $F_n(x)$ и $G_n(x)$ совпадают и хорошо аппроксимируют функцию $f(x)$. Ввиду простоты функции $f(x)$, разница между графиками рядов Фурье и функции практически незаметна даже при $n = 4$. Более того, не наблюдается эффекта Гиббса, т.к. у функции нет разрывов.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 50$ ряд Фурье действительно аппроксимирует функцию $f(x)$ довольно точно, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 2.38045
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 2.38045
```

Листинг 7: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.00003
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.00003
```

Листинг 8: Равенство Парсеваля при $n = 50$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f(x)$ всё лучше и лучше.

Ты чего такой нечётный?

Настал черёд нечётной периодической функцию $f(x) = ((x-2) \bmod 4 - 2)^3$ на отрезке $[-2, 2]$. Кто бы мог подумать, что для периодичности кубического корня нужно так усложнять аргумент внутри? Но это всё лирика, поэтому давайте уже строить график функции.

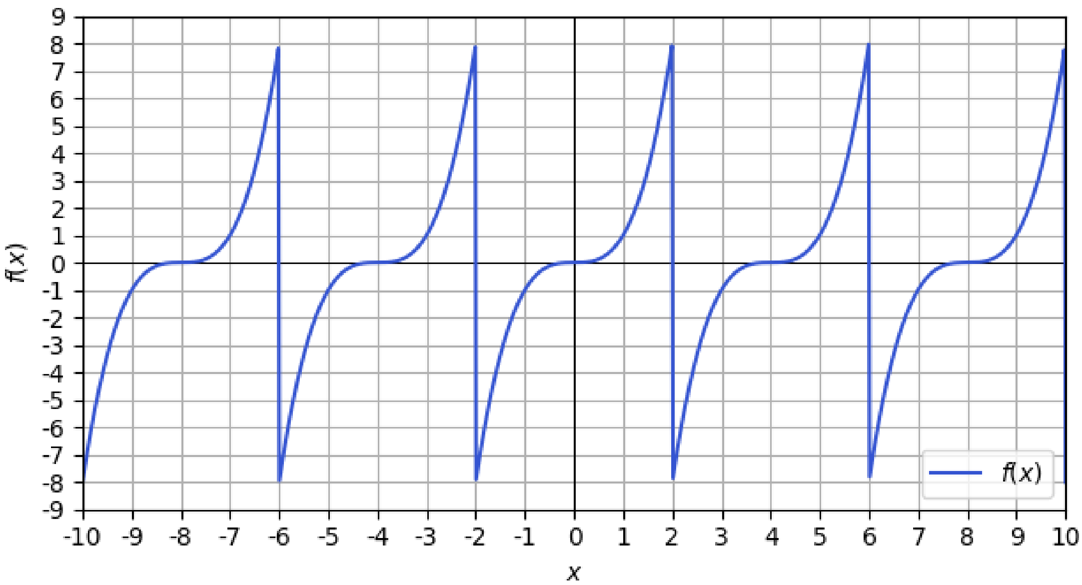

Рис. 15: График функции $f(x)$

Период функции $f(x)$ равен $T = 4 \Rightarrow \omega_n = {}^{n\pi}/_{2}$. Вновь найдём коэффициенты Фурье для функции с помощью уже написанной нами ранее программы, но перед этим посмотрим на интегралы. Для нечётной функции $f(x)$ коэффициенты a_n равны нулю и ряд Фурье строится по синусам. Таким образом, коэффициенты b_n и c_n в общем виде вычисляются следующим образом:

$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \left((x-2) \bmod 4 - 2\right)^3 \sin\frac{n\pi x}{2}\, dx \qquad c_n = \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2} \left((x-2) \bmod 4 - 2\right)^3\ \mathrm{e}^{-in\pi x/2}\, dx$$

Опять кодим одну строчку

Изменим программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье самостоятельно для любого n, под нашу функцию.

```
...

def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda x: ((x - 2) % 4 - 2) ** 3)(x)

...
```

Листинг 9: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(x)$

Программа вновь выводит нам первые шесть коэффициентов Фурье, среди которых есть и необходимые по заданию a_3, b_3 и c_3:

```
a_0 = -0.0,   b_0 = 0.0,      c_0 = (-0+0j)   c_0 = (-0.002+0j)
a_1 = 0.0,    b_1 = 1.997,    c_1 = (0-0.998j)   c_-1 = (0.002+0.998j)
a_2 = -0.0,   b_2 = -2.159,   c_2 = (-0+1.08j)   c_-2 = (-0.002-1.08j)
a_3 = 0.0,    b_3 = 1.583,    c_3 = (0.002-0.791j)   c_-3 = (0.002+0.791j)
a_4 = -0.0,   b_4 = -1.225,   c_4 = (-0+0.612j)   c_-4 = (-0.002-0.612j)
a_5 = 0.0,    b_5 = 0.994,    c_5 = (0-0.497j)   c_-5 = (0.002+0.497j)
```

Листинг 10: Вывод программы

Убеждаемся в том, что, действительно, коэффициенты a_n равны нулю.

И снова любуемся на рисунки!

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

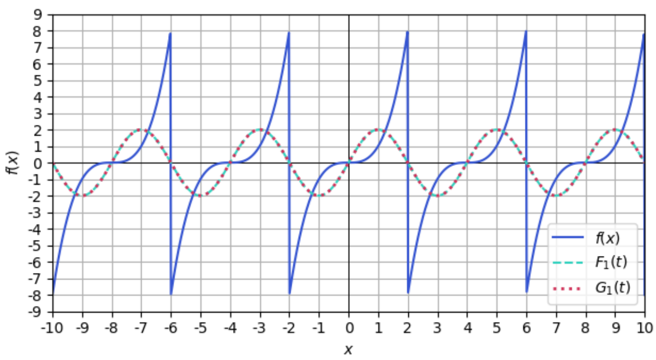

Рис. 16: $n = 1$

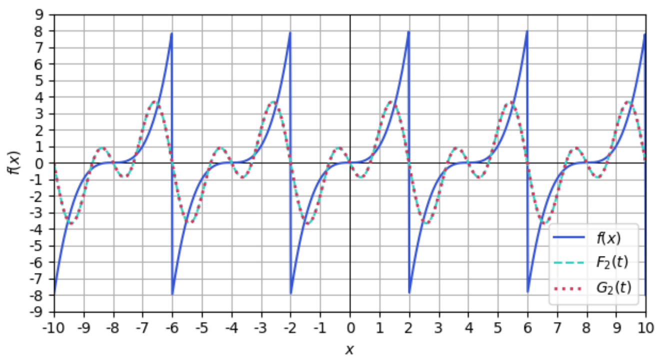

Рис. 17: $n = 2$

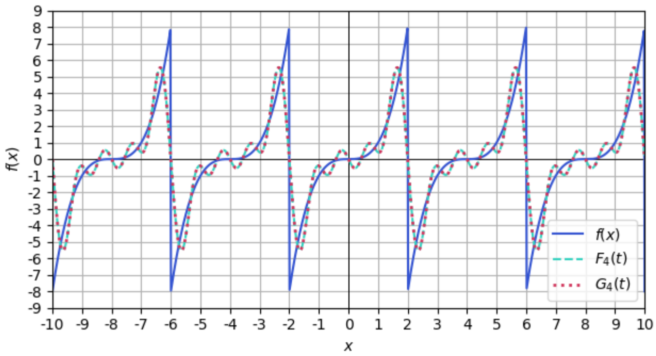

Рис. 18: $n = 4$

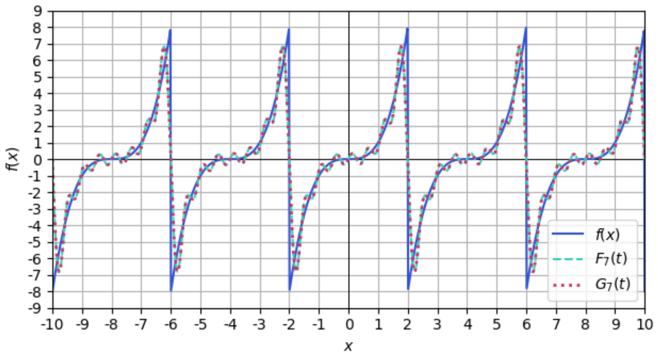

Рис. 19: $n = 7$

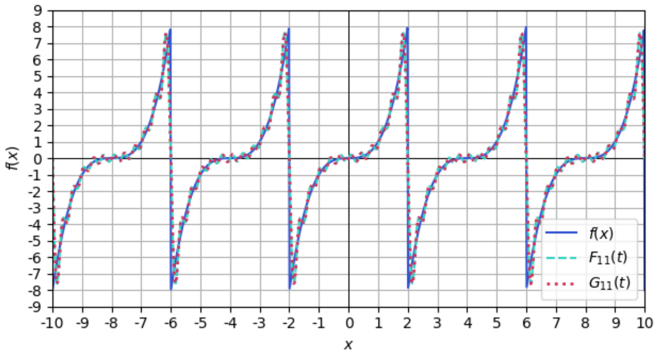

Рис. 20: $n = 11$

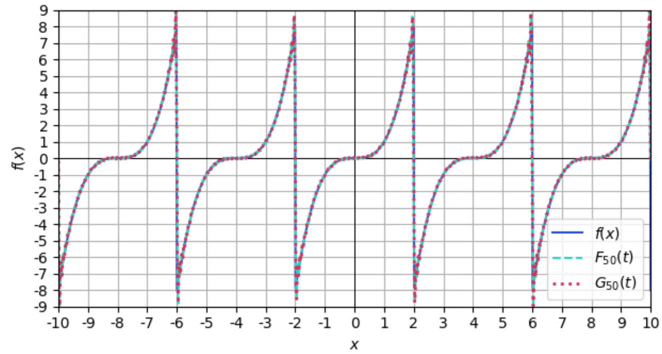

Рис. 21: $n = 50$

Графики рядов Фурье $F_n(x)$ и $G_n(x)$ совпадают и хорошо приближаются к функции $f(x)$ при $n > 7$. Также не наблюдается эффекта Гиббса, т.к. у функции имеется разрыв только по вертикальной асимптоте.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 50$ ряд Фурье аппроксимирует функцию $f(x)$ очень точно, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 23.80626
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 23.80626
```

Листинг 11: Равенство Парасеваля при $n = 1$

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.00068
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.00068
```

Листинг 12: Равенство Парасеваля при $n = 50$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно представляет функцию $f(x)$ всё лучше и лучше.

Ты вообще с какого района, чушпан?

Наконец, рассмотрим периодическую функцию, являющуюся ни чётной, ни нечётной — в студии $f(x) = (x/\pi \bmod 2)^2$ на отрезке $[0, 2\pi]$ — а вот это будет интересно... И, по традиции, построим график этой функции.

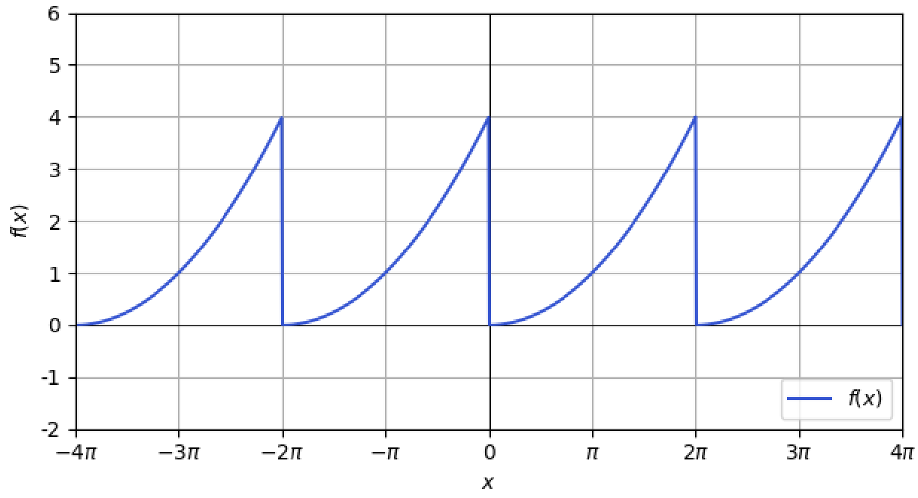

Рис. 22: График функции $f(x)$

Период функции $f(x)$ равен $T = 2\pi \;\Rightarrow\; \omega_n = n$. Найдём коэффициенты Фурье для функции с помощью уже написанной программы, но перед этим взглянем на то, как вычисляются коэффициенты a_n, b_n и c_n в общем виде:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{x}{\pi} \bmod 2\right)^2 \sin nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{x}{\pi} \bmod 2\right)^2 \cos nx\,dx \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{x}{\pi} \bmod 2\right)^2 \mathrm{e}^{-inx}\,dx$$

Немножко помучаем машину...

Изменим в программе функцию, для которой вычисляются коэффициенты Фурье:

```
...

def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    return np.vectorize(lambda x: ((x / np.pi) % 2) ** 2)(x)

...
```

Листинг 13: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(x)$

Программа вновь выводит нам первые шесть коэффициентов Фурье, среди которых есть и необходимые по заданию a_3, b_3 и c_3:

```
a_0 = 2.997,    b_0 = 0.0,      c_0 = (1.499+0j)      c_0 = (1.499+0j)
a_1 = 0.352,    b_1 = -1.736,   c_1 = (0.176+0.868j)  c_-1 = (0.176-0.868j)
a_2 = 0.041,    b_2 = -0.405,   c_2 = (0.021+0.203j)  c_-2 = (0.021-0.203j)
a_3 = 0.039,    b_3 = -0.579,   c_3 = (0.019+0.289j)  c_-3 = (0.019-0.289j)
a_4 = 0.01,     b_4 = -0.203,   c_4 = (0.005+0.101j)  c_-4 = (0.005-0.101j)
a_5 = 0.014,    b_5 = -0.347,   c_5 = (0.007+0.174j)  c_-5 = (0.007-0.174j)
```

Листинг 14: Вывод программы

И что же получилось на графиках?

Воспользуемся этими коэффициентами для построения графиков тригонометрического F_n и экспоненциального G_n рядов Фурье для функции $f(x)$:

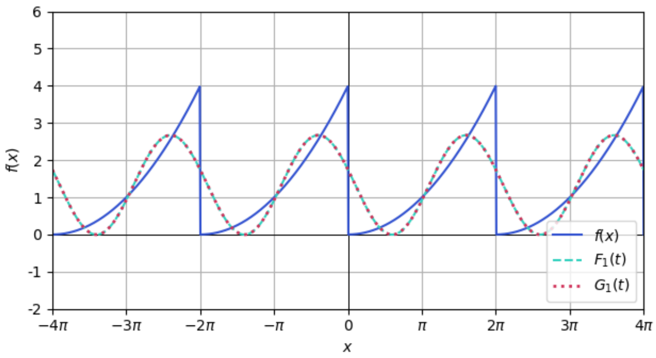

Рис. 23: $n = 1$

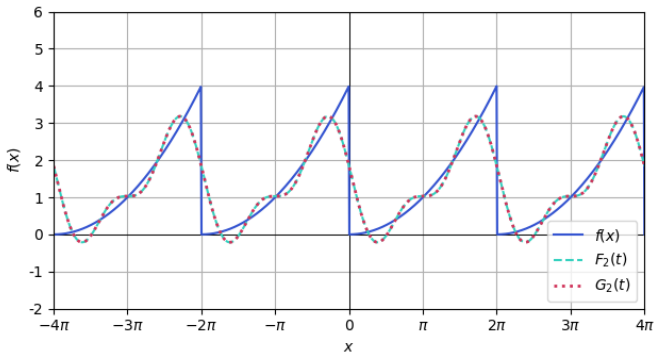

Рис. 24: $n = 2$

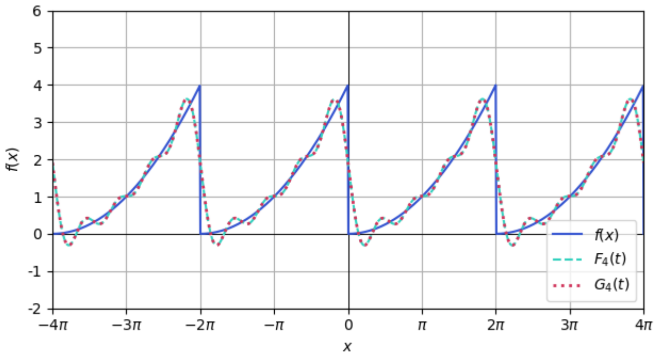

Рис. 25: $n = 4$

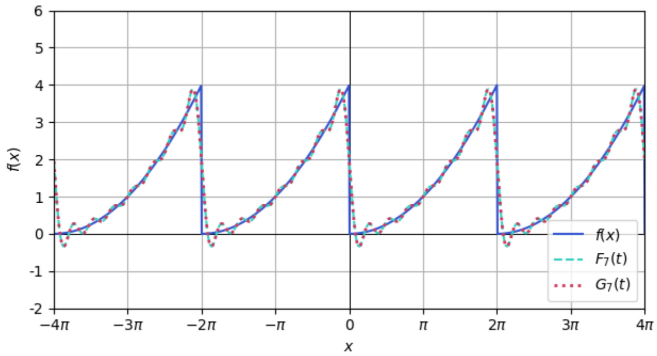

Рис. 26: $n = 7$

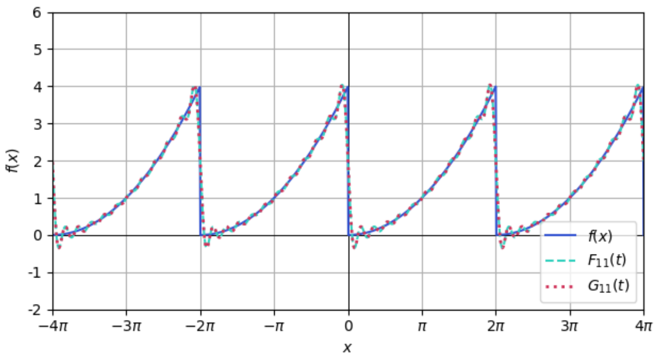

Рис. 27: $n = 11$

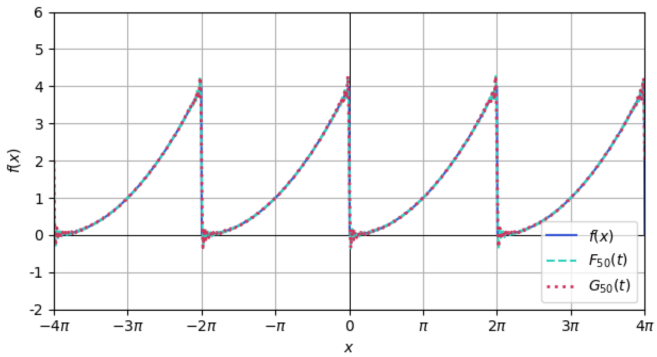

Рис. 28: $n = 50$

Графики рядов Фурье $F_n(x)$ и $G_n(x)$ совпадают и хорошо приближаются к функции $f(x)$ при $n > 7$ без учёта эффекта Гиббса, т.к. у функции имеется разрыв под углом.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 50$ ряд Фурье аппроксимирует функцию $f(x)$ очень точно, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 3.32656
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 3.32656
```

Листинг 15: Равенство Парасеваля при $n = 1$

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.10021
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.10021
```

Листинг 16: Равенство Парасеваля при $n = 50$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно аппроксимирует функцию $f(x)$ всё лучше и лучше.

Задание №2. Компле́ксная функция vs. мозг читателя

Начнём новое задание, как и предыдущее, с небольшой теоретической справки. В прошлом задании мы говорили о представлении тригонометрического ряда Фурье с помощью e^{ix} — это форма ряда называется **комплексным рядом Фурье**. Давайте пройдём через преобразования, которые приведут нас от коэффициентов тригонометрического ряда a_n и b_n к коэффициентам комплексного ряда c_n. Для этого воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

И вот как будет выглядеть такое преобразование:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = a\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2}\right) + b\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i}\right) = \frac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t} + \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) - \frac{ib}{2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t} - \mathrm{e}^{-i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{a - ib}{2}\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = c\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \bar{c}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

Отсюда и выясняется причина, по которой комплексный ряд Фурье раскладывается в обе стороны от нуля — одна пара (a_n, b_n) дают два коэффициента (c_n, c_{-n}), которые двигаются в противофазе. И поэтому в предыдущем задании для вещественных функций мы также рассматривали ряд G_n.

Говоря о комплексных функциях, $f(t)$ подобна таковой, и поэтому представляется <u>только</u> в виде комплексного ряда Фурье, который выглядит следующим образом:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\omega_n t}, \text{ где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Зададим $R = 2$ и $T = 8 \;\Rightarrow\; \omega = {}^{\pi n}\!/_4$. И получим по заданию следующую комплекснозначную функцию, заданную параметрическим образом:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-1, 1), \\ -2t + 4, & t \in [1, 3), \\ -2, & t \in [3, 5), \\ 2t - 12, & t \in [5, 7), \end{cases} \qquad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [-1, 1), \\ 2, & t \in [1, 3), \\ -2t + 8, & t \in [3, 5), \\ -2, & t \in [5, 7). \end{cases}$$

График функции $f(t)$ обозначим на комплексной плоскости:

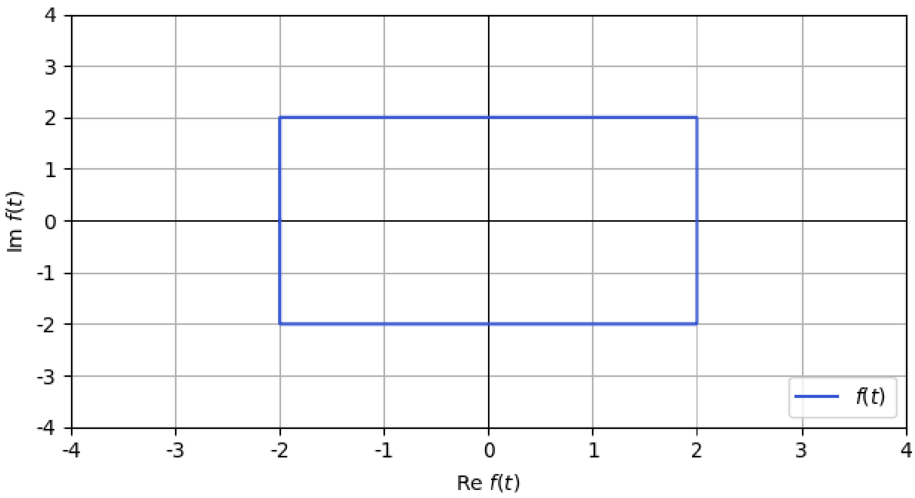

Рис. 29: График функции $f(t)$

Получаем вот такой скромненький квадратик на комплексной плоскости — он пока одинок, но скоро обрастёт интересными подробностями ;)

Самое скучное — вы не разучились считать интегральчики?

Теперь найдём коэффициенты Фурье c_n для этой функции, которые в общем виде вычисляются так:

$$c_n = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{7} f(t)e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt = \frac{1}{8}\left(\int\limits_{-1}^{1}(2+2ti)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \int\limits_{1}^{3}(-2t+4+2i)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{3}^{5}(-2+8i-2ti)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt + \int\limits_{5}^{7}(2t-12-2i)\,e^{-i\frac{\pi n}{4}t}\,dt\right)$$

И эту громадину придётся вычислять? Конечно, да! Вычислим вручную c_0, c_1, c_2:

$$c_0 = \int\limits_{-1}^{1}\frac{(2+2ti)}{8}\,dt + \int\limits_{1}^{3}\frac{(-2t+4+2i)}{8}\,dt + \int\limits_{3}^{5}\frac{(-2+8i-2ti)}{8}\,dt + \int\limits_{5}^{8}\frac{(2t-12-2i)}{8}\,dt = \frac{1}{8}\left(\cancel{4}+\cancel{4i}-\cancel{4}-\cancel{4i}\right) = 0$$

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1}\frac{(2+2ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,dt + \int\limits_{1}^{3}\frac{(-2t+4+2i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,dt + \int\limits_{3}^{5}\frac{(-2+8i-2ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,dt + \int\limits_{5}^{8}\frac{(2t-12-2i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\cdot\frac{32\sqrt{2}}{\pi^2}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}$$

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1}\frac{(2+2ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int\limits_{1}^{3}\frac{(-2t+4+2i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int\limits_{3}^{5}\frac{(-2+8i-2ti)}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt + \int\limits_{5}^{7}\frac{(2t-12-2i)}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cancel{\frac{8}{\pi}+\frac{16}{\pi^2}}-\cancel{\frac{8i}{\pi}-\frac{16i}{\pi^2}}-\cancel{\frac{8}{\pi}-\frac{16}{\pi^2}}+\cancel{\frac{8i}{\pi}+\frac{16i}{\pi^2}}\right) = 0$$

Что необычно, коэффициент c_0 равен нулю, хотя на комплексной плоскости хорошо видно, что функция приподнята на графике — это из-за того, что мы рассматриваем не оси XOY, а комплексную плоскость.

Самое приятное — код всё сделает за нас

Воспользуемся программой, которая вычисляет коэффициенты Фурье самостоятельно для любого n, чтобы найти требуемый в задании коэффициент c_3 для функции $f(t)$. Программа уже написана, поэтому мы просто вставим в неё нашу функцию и запустим её, чтобы получить коэффициенты:

```python
...

def f(x):
    """Функция, для которой вычисляются коэффициенты Фурье."""
    def create_parametric_func(R, T):
        """Возвращает параметрическую функцию с заданными R и T."""

        def pfunc_instance(t):
            """Чистый экземпляр параметрической функции."""
            t = (t + T / 8) % T - T / 8
            if -T / 8 <= t < T / 8:
                real = R
            elif T / 8 <= t < 3 * T / 8:
                real = 2 * R - 8 * R * t / T
            elif 3 * T / 8 <= t < 5 * T / 8:
                real = -R
            elif 5 * T / 8 <= t <= 7 * T / 8:
                real = -6 * R + 8 * R * t / T

            if -T / 8 <= t < T / 8:
                imag = 8 * R * t / T
            if T / 8 <= t < 3 * T / 8:
                imag = R
            if 3 * T / 8 <= t < 5 * T / 8:
                imag = 4 * R - 8 * R * t / T
            if 5 * T / 8 <= t <= 7 * T / 8:
                imag = -R

            return real + 1j * imag

        return pfunc_instance

    return create_parametric_func(2, 8)

...
```

Листинг 17: Вычисление коэффициентов Фурье для функции $f(t)$

Итак, программа выдаёт нам первые 5 коэфциентов:

```
a_0 = (-0-0j),        b_0 = 0j,             c_0 = (-0-0j)  c_0 = (-0-0j)
a_1 = (2.293+0j),     b_1 = (-0+2.293j),    c_1 = (2.293+0j)  c_-1 = 0j
a_2 = (-0-0j),        b_2 = (-0-0j),        c_2 = (-0-0j)  c_-2 = (-0-0j)
a_3 = (-0.254+0j),    b_3 = 0.255j,         c_3 = -0j  c_-3 = (-0.255+0j)
a_4 = (-0-0j),        b_4 = (-0+0j),        c_4 = (-0-0j)  c_-4 = (-0-0j)
a_5 = (-0.091-0j),    b_5 = -0.092j,        c_5 = (-0.092-0j)  c_-5 = -0j
```

Листинг 18: Вывод программы

Мы видим, что коэффициент c_3 равен нулю, как и большинство коэффициентов c_n и c_{-n}.

Самое интересное — красивые графики!

Уже не терпится взглянуть, как комплексный ряд Фурье представляет наш квадратик. Построим графики для различных первых n коэффициентов:

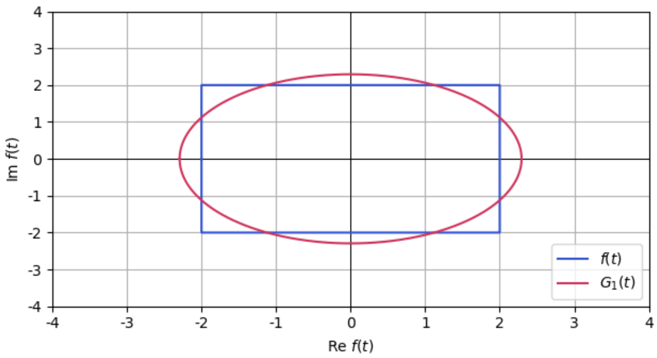

Рис. 30: $n = 1$

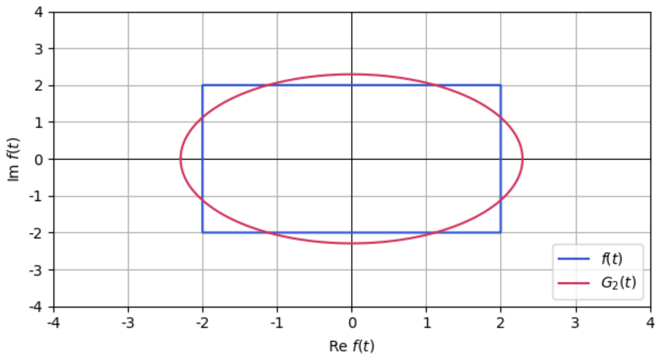

Рис. 31: $n = 2$

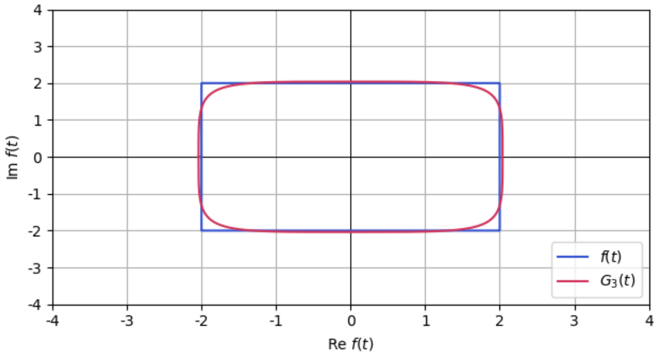

Рис. 32: $n = 3$

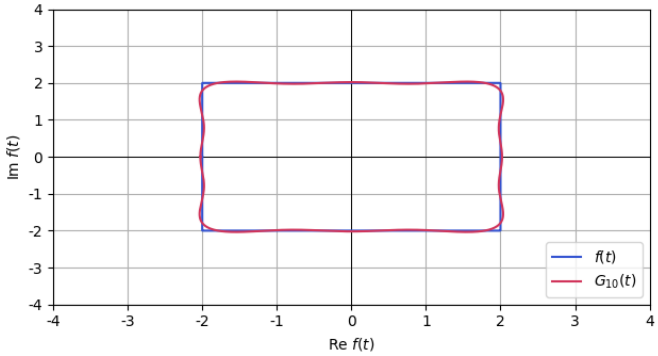

Рис. 33: $n = 10$

Начиная с первых значений, вокруг квадрата формируется круг, который становится с увеличением гармоник всё больше похож на квадрат. Мы убедимся в этом ещё раз, построив уже другие графики, где на абсциссе отложим t, а по ординате отложим сначала вещественные части $f(t)$ и $G_n(t)$, а затем мнимые части этих же функций.

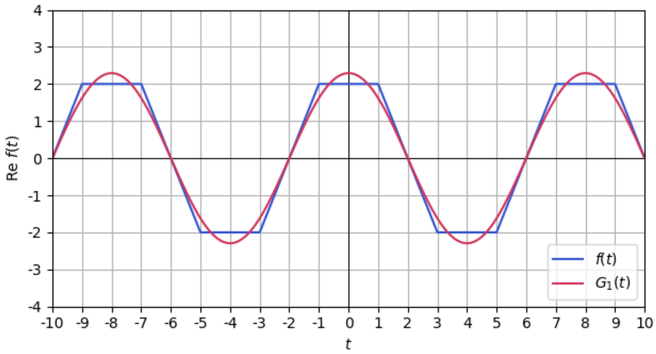

Рис. 34: $Re \quad n = 1$

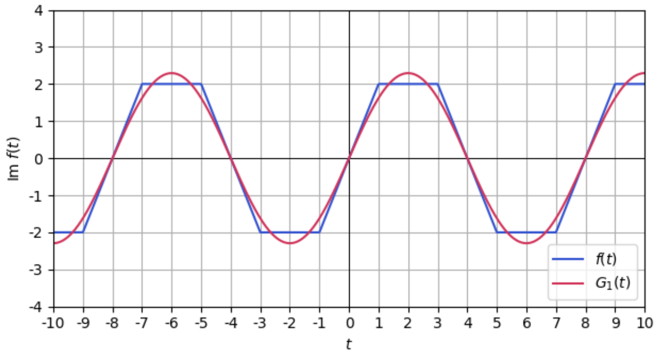

Рис. 35: $Im \quad n = 1$

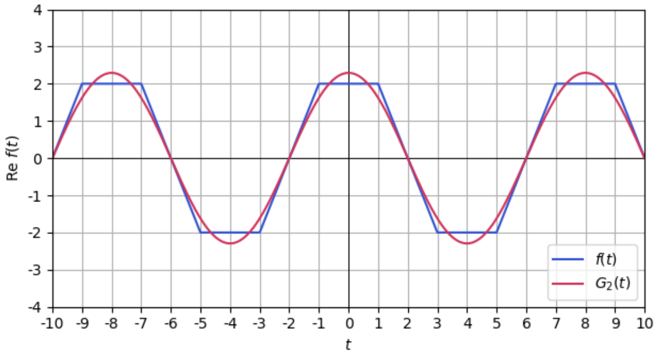

Рис. 36: $Re \quad n = 2$

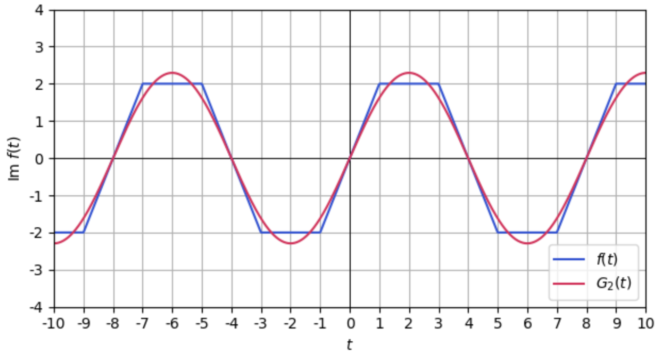

Рис. 37: $Im \quad n = 2$

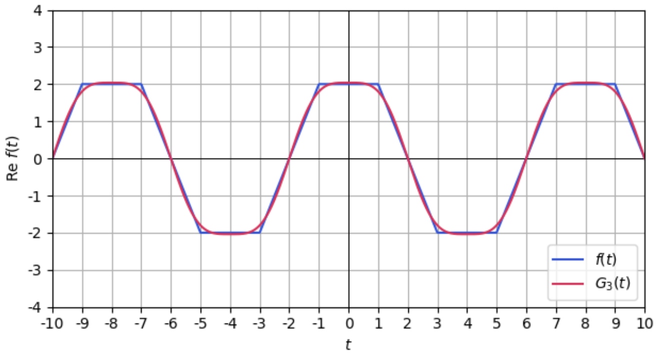

Рис. 38: $Re \quad n = 3$

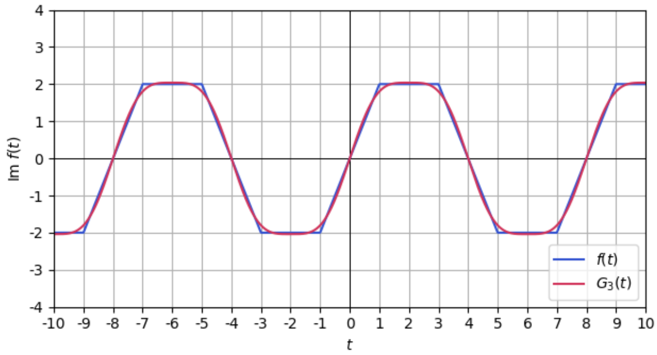

Рис. 39: $Im \quad n = 3$

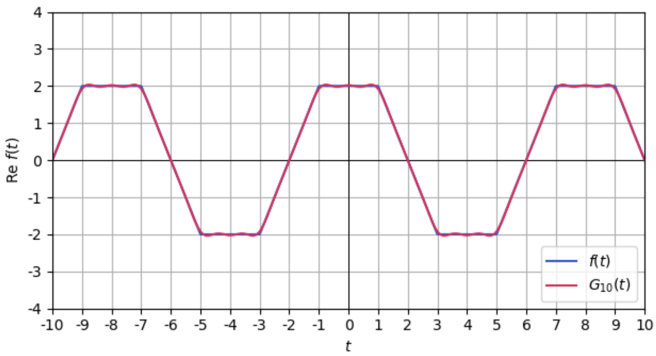

Рис. 40: $Re \quad n = 10$

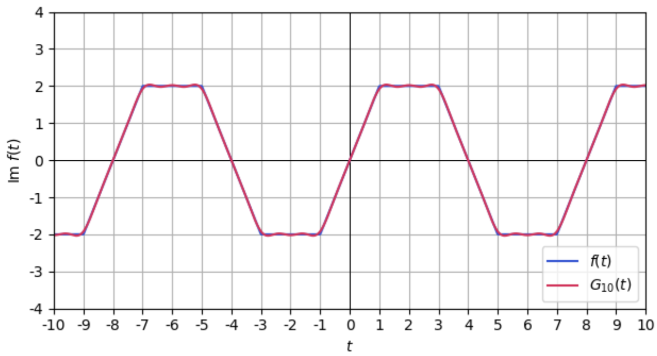

Рис. 41: $Im \quad n = 10$

Действительно, по графикам мы приходим к выводу, что $G_n(t)$ аппроксимирует исходную параметрическую комплекснозначную функцию $f(t)$, как в её действительной части, так и в мнимой.

Чтобы убедиться в том, что при $n = 10$ ряд Фурье очень точен к функции $f(t)$, проверим равенство Парсеваля при этом же количестве коэффициентов и при $n = 1$ — так мы увидим разницу.

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.42457
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.42457
```

Листинг 19: Равенство Парсеваля при $n = 1$

```
Parseval deviation:
| |f|^2 - sum(|a_i|^2 + |b_i|^2) | = 0.00146
| |f|^2 - sum(|c_i|^2) |           = 0.00146
```

Листинг 20: Равенство Парсеваля при $n = 10$

Мы наблюдаем, что отклонение в равенстве Парсеваля с увеличением количества коэффициентов стремится к нулю. Это означает, что ряд Фурье действительно приближается к функции $f(t)$ всё лучше и лучше.

Подводим выводы, подытоживаем итоги

В ходе выполнения лабораторной работы мы научились находить коэффициенты Фурье для различных функций и выяснили, что ряд Фурье может раскладываться как тригонометрически, так и комплексно.

Также пришли к выводу, что ряд Фурье раскладывается по разному в зависимости от чётности функции, и в нём могут отсутствовать как косинусы, если функция нечётная, так и синусы, если функция чётная, но в противном случае и в общем виде ряд Фурье раскладывается и по косинусам, и по синусам.

Мы убедились в том, что с увеличением количества членов ряда Фурье ряд первоклассно аппроксимирует исходную функцию — это подтверждается как графически (мы наблюдали множество графиков, где с ростом количества суммируемых членов ряда Фурье наблюдалась всё лучшая и лучшая аппроксимация этим рядом функции), так и аналитически с помощью равенства Парсеваля, который говорит нам, что квадрат нормы исходной функции равен сумме квадратов модулей всех коэффициентов ряда Фурье (с ростом количества коэффициентов отклонение от квадрата нормы функции в равенстве Парсеваля стремится к нулю).