Задание №1

Найдём собственные числа матрицы:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -7 & -4\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=5 \qquad \lambda_2=-2 \qquad \lambda_3=1$$

Теперь найдём собственные вектора каждого из собственный чисел:

$$\lambda_1=5$$

$$\begin{bmatrix}5 & -7 & -4\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x\\ 5y\\ 5z\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}5x-7y-4z=5x\\ -2y=5y\\ z=5z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-7y-4z=5x\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x\\ y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-2$$

$$\begin{bmatrix}5 & -7 & -4\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x\\ -2y\\ -2z\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}5x-7y-4z=-2x\\ -2y=-2y\\ z=-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-7y-0=-2x\\ y=y\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ y=y\\ z=0\end{cases}\Rightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=1$$

$$\begin{bmatrix}5 & -7 & -4\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}5x-7y-4z=x\\ -2y=y\\ z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-0-4z=x\\ y=0\\ z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\\ z=z\end{cases}\Rightarrow v_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Спектральное разложение — разожение, которое представляет матрицу в базисе собственных векторов, где она представлена диагональной матрицей с собственными числами на диагонали. И вот как оно выглядит:

$$A=PA^*P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Задание №2

Найдём собственные числа матрицы:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \qquad \lambda_3 = 1$$

Теперь найдём собственные вектора каждого из собственный чисел:

$$\lambda_{1,2} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - z = 2x \\ x + 2y - z = 2y \\ z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = 2x \\ x + 2y - z = 2y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдём присоединённый вектор к v_1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - z = x \\ x + 2y - z = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 2y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Жорданово разложение — разложение матрицы, образованное Жордановой формой матрицы в базисе её собственных и присоединённых векторов. Она выглядит так:

$$A = P\mathcal{J}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$