

Если правильно объяснить людям «зачем», то они всегда найдут способ «как».

@ Джордан Белфорт

Задание 1. (1 балл) Сриниваса Рамануджан уже работает бухгалтером, но только начинает постигать математику и просит вашей помощи. Разложите в ряд Фурье функцию, определите значения в точках разрыва:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\pi \leq t \leq 0, \\ -t^2, & \text{при } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Задание 2. (1 балл) Уилл Хантинг от скуки уже решил всю нашу контрольную, а сможете ли вы? Найдите образ Фурье от функции

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{1+t}, & \text{при } t \leq -1, \\ 1 - e^{1-t}, & \text{при } t \geq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задание 3. (2 балла) Семилетняя Мэри, проходя мимо кабинета, где готовилась контрольная, решила данное задание за пару минут. Посмотрим, сколько времени понадобится вам. Найдите образ Фурье от функции

$$f(x, y) = e^{-2x^2 - 2xy - y^2}.$$

Задание 4. (1 балл) Найдите свёртку матриц $A * B$ двумя способами и сравните результат:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задание 5. (2 балла) Космическая гонка в самом разгаре. NASA собирает команду, которой предстоит в короткие сроки добиться больших результатов, и одна из задач – это фильтрация. Даны уравнения фильтров в дифференциальной форме. Найдите H_2 –норму⁶ каждого уравнения. Найдите решение уравнений $y(t)$ при входе $u(t) = 1(t)$, где $1(t)$ – функция Хевисайда, с помощью преобразования Лапласа:

$$\dot{y} + 2y = u, \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + y = u.$$

Задание 6. (1 балл) Великое создание Энигмы давно позади, но для её взлома Алан Тьюринг познал немало математических основ. Прикоснёмся и мы к одной из задач. Пусть $C = A *_o B$. Найдите вектор B , если

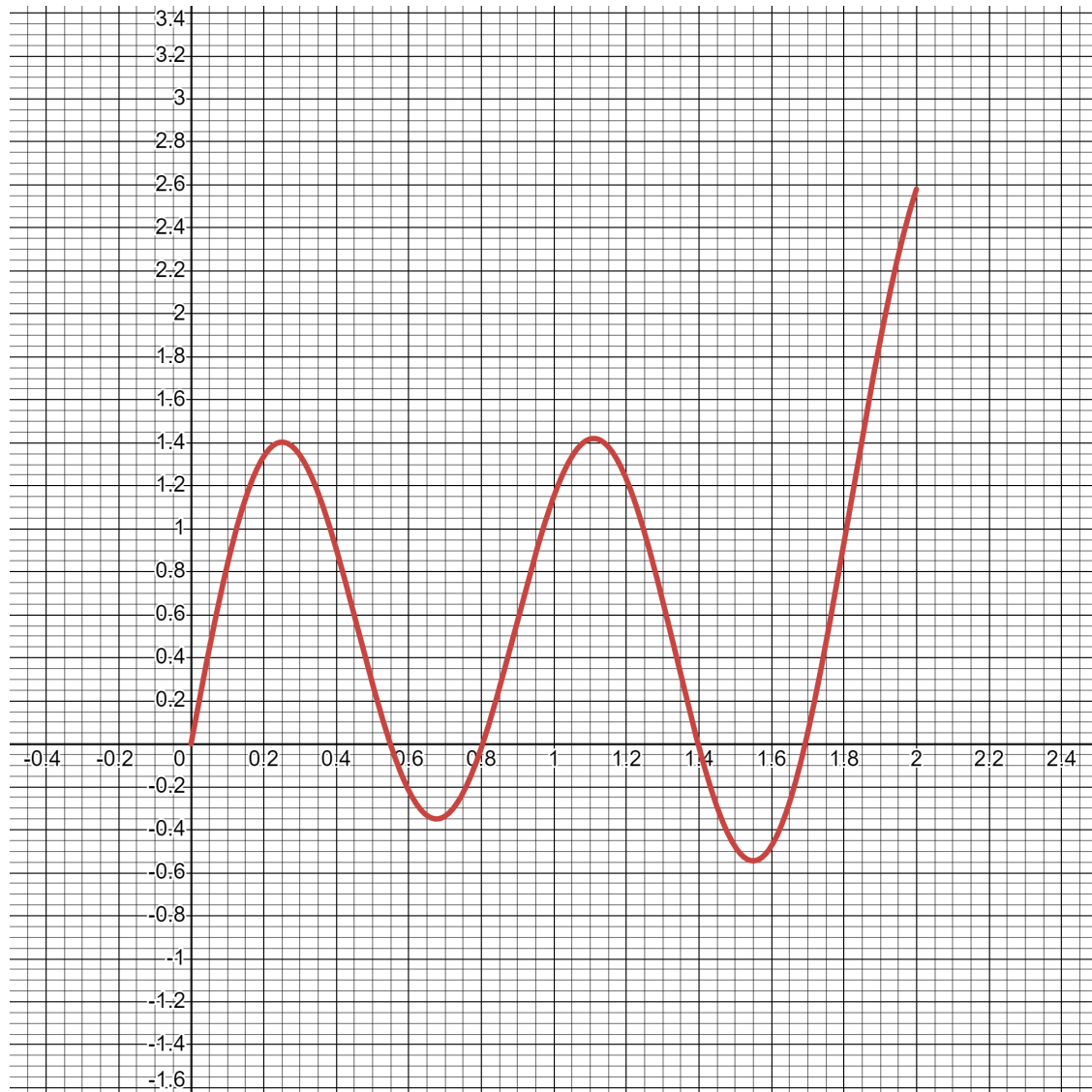
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 19 & 5 \end{bmatrix}.$$

⁶ H_2 –норма одномерной системы определяется как L_2 –норма её функции АЧХ, умноженная на $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

Если правильно объяснить людям «зачем», то они всегда найдут способ «как».

@ Джордан Белфорт

Задание 7. (2 балла) Гениальный Джон Нэш и в один из дней решил разложить функцию, случайно нарисованную от руки. Попробуйте и вы. Разложите в Ряд Фурье чётную функцию заданную на отрезке $[-2, 2]$, часть которой представлена на графике.



Задание 8. (1 балл) Для математического гения Кристиана Вульфа, который подрабатывает аудитором для самых опасных преступных организаций, это просто семечки. Докажите, что для вас тоже. Даны две функции, найдите их скалярное произведение:

$$f(x) = \ln(\ln^2(\ln^2 x)),$$

$$g(x) = \dot{\delta}(5 - x) + \delta(2 - x).$$

Если правильно объяснить людям «зачем», то они всегда найдут способ «как».

@ Джордан Белфорт

Задание 9. (1 балл) Иногда удивительный мир чисел, уравнений и теорем дарит человеческое тепло и спасает от одиночества. Не знаем, сколько сейчас вокруг вас людей, но вот вам последнее задание. Дан базис из трёх функций, которые вы видите на рисунке. Выполните разложение функции $f(t)$ в данном базисе.

$$f(t) = \begin{cases} 11, & \text{при } 0 \leq t \leq 1/4, \\ 1, & \text{при } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ -1, & \text{при } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ 1, & \text{при } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

