ДЗ №1

1. $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}$ $\quad A^{-1}-?$

Проверим на обратимость:
$\det A=\cancel{2}+6+4-3-8-\cancel{2}=-1$ ✓

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\3&2&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&-1&0\\3&2&0&1&-1&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&2&-1&0\\1&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-1\\1&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-1\\0&1&0&-4&1&2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right]\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-4&1&2\\-1&1&0\end{bmatrix}}$$

2. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&4&2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&1\\0&0&4\end{bmatrix}$

$\det(A^T)^T+\operatorname{trace}(A+B)^T+\det(AB)^T=\det A+\operatorname{trace}(A+B)+\det B^TA^T=\det A+\operatorname{trace}A+\operatorname{trace}B+$
$\det B^T\det A^T=\det A+\operatorname{trace}A+\operatorname{trace}B+\det A\cdot\det B=4+5+7+4\cdot8=16+32=\boxed{48}$

3. $A=\begin{bmatrix}1+i&i\\2+i&2\end{bmatrix}$ $\quad Q=\begin{bmatrix}8&7+4i\\9+10i&4+14i\end{bmatrix}$ $\quad XA+A^TX=Q$ $\quad X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=?$

$$\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1+i&i\\2+i&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-i&2-i\\-i&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7+4i\\9+10i&4+14i\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(1+i)x_1+(2+i)x_2&ix_1+2x_2\\(1+i)x_3+(2+i)x_4&ix_3+2x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(1-i)x_1+(2-i)x_3&(1-i)x_2+(2-i)x_4\\-ix_1+2x_3&-ix_2+2x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7+4i\\9+10i&4+14i\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x_1+(2+i)x_2+(2-i)x_3&ix_1+(3-i)x_2+(2-i)x_4\\-ix_1+(3+i)x_3+(2+i)x_4&-1x_2+ix_3+4x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7+4i\\9+10i&4+14i\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}2x_1+(2+i)x_2+(2-i)x_3=8\\-ix_1+(3+i)x_3+(2+i)x_4=9+10i\\ix_1+(3-i)x_2+(2-i)x_4=7+4i\\-1x_2+ix_3+4x_4=4+14i\end{cases}\Leftrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}2&2+i&2-i&0\\-i&0&3+i&2+i\\i&3-i&0&2-i\\0&-i&i&4\end{bmatrix}}_{B}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}8\\9+10i\\7+4i\\4+14i\end{bmatrix}}_{C}$$

Решим методом Крамера:

$\Delta=\det B=-108$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&2+i&2-i&0\\9+10i&0&3+i&2+i\\7+4i&3-i&0&2-i\\4+14i&-i&i&4\end{vmatrix}=-108i\qquad\Delta_2=\begin{vmatrix}2&8&2-i&0\\-i&9+10i&3+i&2+i\\i&7+4i&0&2-i\\0&4+14i&i&4\end{vmatrix}=-108$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&2+i&8&0\\-i&0&9+10i&2+i\\i&3-i&7+4i&2-i\\0&-i&4+14i&4\end{vmatrix}=-324\qquad\Delta_4=\begin{vmatrix}2&2+i&2-i&8\\-i&0&3+i&9+10i\\i&3-i&0&7+4i\\0&-i&i&4+14i\end{vmatrix}=-108-324i$$

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\boxed{i}$ $\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\boxed{1}$ $\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\boxed{3}$ $\quad x_4=\dfrac{\Delta_4}{\Delta}=\dfrac{-108-324i}{-108}=\boxed{1+3i}$

4. Имеется матрица M с $\dim M\geq2$ и $\dim M\%2=0$.
В такой матрице если $\operatorname{rank}M<\dim M$, то $\det M=0$.
Тогда задача Ксении сводится к тому, чтобы уменьшить ранг матрицы хотя бы на 1, т.е сделать по крайней мере две строки линейно зависимыми.
Ксении достаточно следить за одной из строк, которые заполняет Илья, и повторять в другой все числа из неё.
В случае если Илья заменит ноль на строке Ксении на другое число, Ксении нужно повторить это число в той строке, за которой она следила.
Если Илья решит заполнить другую строку, то Ксении необходимо присоединиться к нему, и тогда, учитывая кратность размерности, Илья всегда будет вынужден возвращаться к строке, выбранной Ксенией.
Пример:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\2&3&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\2&3&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}$$

$$\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&6&0&0\\1&0&0&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\begin{bmatrix}1&6&0&0\\1&6&0&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&6&0&0\\1&6&7&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\begin{bmatrix}1&6&7&0\\1&6&7&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{И}}\begin{bmatrix}1&6&7&8\\1&6&7&0\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{К}}\underset{\operatorname{rank}=3}{\begin{bmatrix}1&6&7&8\\1&6&7&8\\2&3&4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}}\xrightarrow[\text{выиграла}]{\text{на этом этапе Ксения уже}}\dots$$

5. $A=\begin{bmatrix}b&b&b-a\\a-b&-b&a\\a+b&b&0\end{bmatrix}$ $\quad\operatorname{rank}A=?$ Приведём к ступенчатому виду.

$$\begin{bmatrix}b&b&b-a\\a-b&-b&a\\a+b&b&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}b&b&b-a\\-2b&-2b&a\\a+b&b&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}b&b&b-a\\0&0&2b-a\\a+b&b&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&b&b-a\\0&0&2b-a\\a&b&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a&b&0\\0&b&b-a\\0&0&2b-a\end{bmatrix}$$

Строки и столбцы линейно независимы между собой, поэтому $\operatorname{rank}A=\boxed{3.}$