Линейные однородные уравнения высшего порядка

1. $y'' - 5y - 6y = 0$
Заменяем все производные на соответствующие r — таким образом составляем характеристическое уравнение:

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} r_1 = 6 \\ r_2 = -1 \end{array}\right. \qquad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad k = 1$$

$$y = C_1 e^{-x} + C + 2e^{6x}$$

2. $y''' - 6y'' + 13y' = 0$

$$r^3 - 6r^2 + 13r = 0$$

$$r(r^2 - 6r + 13) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} r_1 = 0 \in \mathbb{R}, \quad k = 1 \\ r_{2,3} = 3 \pm 2i \in \mathbb{C}, \quad k = 1 \end{array}\right.$$

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) = C_1 + e^3 x(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$$

3. $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r + 2)^2 = 0$$

$$r = -2 \in \mathbb{R}, \quad k = 2$$

$$y = e^{-2x}(C_1 x + C_2)$$

4. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)}$

$$r^7 + 2r^5 + r^3 = 0$$

$$r^3(r^4 + 2r^2 + 1) = 0$$

$$r^3(r^2 + 1)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} r_1 = 0 \in \mathbb{R}, \quad k = 3 \\ r_{2,3} = \pm i \in \mathbb{C}, \quad k = 2 \end{array}\right.$$

$$y = C_1 e^{0 \cdot x}(C_1 x^2 + C_2 x + C_3) + e^{0 \cdot x}((C_4 x + C_5)\cos x + (C_6 x + C_7)\sin x) =$$
$$= C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + (C_4 x + C_5)\cos x + (C_6 x + C_7)\sin x$$

5. $y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad y(0) = -3; \quad y'(0) = 0$

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$r_{1,2} = -2 \pm i, \quad k = 2$$

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(-C_1 \sin_x + C_2 \cos x) = e^{-2x}((-2C_1 + C_2)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x)$$

$$y(0) = -3 \;\Rightarrow\; C_1 = -3$$

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; -2C_1 + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = -6$$

Получаем с учётом констант: $y = -e^{-2x}(3\cos x + 6\sin x)$

Линейные неоднородные уравнения высшего порядка

В общем виде:

- $n = 2$ (второй порядок), r_1, r_2 — корни ХУ (характеристического уравнения):
  $y_1 = e^{r_1 x}\int e^{(r_2-r_1)x}(\int qe^{-r_2 x}dx)dx$
- $n = 3$, r_1, r_2, r_3 — корни ХУ (характеристического уравнения):
  $y_1 = e^{r_1 x}\int e^{(r_2-r_1)x}(\int e^{(r_3-r_2)x}(\int qe^{-r_3 x}dx)dx)dx$

1. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$
1) Решаем ЛОУ:

$$r^2 + 6r + 5 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} r_1 = -1 \\ r_2 = -5 \end{array}\right. \quad r_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad k = 1$$

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x}$$

2) Решение для остаточного члена: $q = 25x^2 - 2 = e^{0\cdot x}(25x^2 - 2) \quad m = 0$ не корень ХУ

$$y_1 \sim q(x) \quad y_1 = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_1' = 2Ax + B \quad y_1'' = 2A$$

$$2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 2$$

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + (2A + 6B + 5C) = 25x^2 - 2$$

$$\begin{cases} 5A = 25 \\ 12A + 5B = 0 \\ 2A + 6B + 5C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -12 \\ C = 12 \end{cases} \qquad y_1 = 5x^2 - 12x + 12$$

Общее решение: $y = u + y_1 = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12$

2. $y''' + 4y' = 8e^{2x} + 5e^x \sin x$
1) ЛОУ

$$r^3 + 4r = 0$$

$$r(r^2 + 4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_{2,3} = \pm 2i \end{array}\right.$$

$$u = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

2) ЛНУ: $q = 8e^{2x} + 5e^x \sin x \quad m = 2$ не корень ХУ

$$y_1 = e^{2x}A + e^x(B\cos x + C\sin x)$$

$$y_1' = 2Ae^{2x} + e^x(B\cos x + C\sin x) + e^x(C\cos x - B\sin x) = 2Ae^{2x} + e^x((B+C)\cos x + (C-B)\sin x)$$

$$y_1'' = 4Ae^{2x} + e^x((B+C)\cos x + (C-B)\sin x) + e^x((C-B)\cos x - (B+C)\sin x) == 4Ae^{2x} + e^x(2C\cos x - 2B\sin x)$$

$$y_1''' = 8Ae^{2x} + e^x(2C\cos x - 2B\sin x) + e^x(-2C\sin x - 2B\cos x) = 8Ae^{2x} + 2e^x((C-B)\cos x - (B+C)\sin x)$$

$$8Ae^{2x} + 2e^x((C-B)\cos x - (B+C)\sin x) + 4(= 2Ae^{2x} + e^x((B+C)\cos x + (C-B)\sin x)) = 8e^{2x} + 5e^x \sin x$$

$$\begin{cases} 16A = 8 \\ 2B + 6C = 0 \\ 2C - 6B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = {}^1\!/_2 \\ B = {}^{-3}\!/_4 \\ C = {}^1\!/_4 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x\left(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x\right)$$

$$y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{1}{2}e^{2x} + e^x\left(\frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{4}\cos x\right)$$