Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2
ПО РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Студенты: Овчинников П. А.
Румянцев А. А.
Чебаненко Д. А.
Группа: R3241

Вариант №6

Преподаватель: Шиманская Г.С.

Санкт-Петербург
2023

Задача №11

Многократно проинтегрируем обе части уравнения, чтобы получить исходную функцию y:

$$y''' = x + \sin x$$
$$y'' = \int (x + \sin x) dx y'' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$
$$y' = \int \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$$
$$\boxed{y = \frac{x^4}{24} + \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3}$$

Задача №12

$$xy'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x}$$
$$] \, y' = r$$
$$xr' = r \cdot \ln \frac{r}{x}$$
$$\frac{dr}{dx} = \frac{r \ln {}^r\!/_x}{x}$$
$$] \, \frac{r}{x} = t \quad r = tx \quad dr = x\,dt + t\,dx$$
$$x(x\,dt + t\,dx) = tx \ln t\,dx$$
$$x^2\,dt + xt\,dx = tx \ln t\,dx$$
$$x^2\,dt = (\ln t - 1)xt\,dx$$
$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными — проинтегрируем обе половины уравнения:

$$\int \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int \frac{d(\ln t)}{\ln t - 1} = \ln(\ln t - 1)$$
$$\ln(\ln t - 1) = \ln x + C$$
$$] \, C_1 = \ln C$$
$$\ln(\ln t - 1) = \ln C_1 x$$
$$\ln t - 1 = C_1 x$$
$$\ln t = C_1 x + 1$$
$$t = e^{C_1 x + 1}$$

Проводим обратные замены, чтобы вновь вернуться к y':

$$r = xe^{C_1 x + 1}$$
$$y' = xe^{C_1 x + 1}$$

Остаётся проинтегрировать обе части уравнения, чтобы получить искомую функцию $y(x)$:

$$y = \int xe^{C_1 x + 1}\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{C_1 x + 1}\,dx & v = \frac{1}{C_1} \cdot e^{C_1 x + 1} \end{bmatrix} = uv - \int v\,du = x\frac{1}{C_1} \cdot e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1} \int e^{C_1 x + 1}\,dx =$$
$$= \boxed{\frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} (x - \frac{1}{C_1} + C_2)}$$

Задача №13

Перед нами дифференциальное уравнение $y^3y'' = -1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$, частное решение которого нам необходимо найти. Решим его понижением порядка через замену:

$$y' = u(y) \quad y'' = \frac{u\,du}{dy}$$

$$\frac{uy^3\,du}{dy} = -1 \quad \Rightarrow \quad u\,du = \frac{-dy}{y^3}$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части:

$$\int u\,du = -\int \frac{dy}{y^3} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$$

Делаем обратную замену:

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad (y'y)^2 = 1 + C_1y^2$$

Пусть $v(x) = y^2$, тогда возможна следующая замена:

$$v' = 2yy' \Rightarrow y' = \frac{v'}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{(v')^2\cancel{y^2}}{4\cancel{y^2}} = C_1v + 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{(v')^2}{4C_1} - \frac{1}{C_1}$$

Введём последнюю замену $q = v' \Rightarrow dv = q\,dx$:

$$v = \frac{q^2}{4C_1} - \frac{1}{C_1} \quad (1)$$

Возьмём производную от обеих частей равенства:

$$dv = \frac{q\,dq}{2C_1}$$

И применим следствие из объявленной выше замены:

$$\cancel{q}\,dx = \frac{\cancel{q}\,dq}{2C_1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dq}{2C_1}$$

Вновь перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части:

$$\int dx = \int \frac{dq}{2C_1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{q}{2C_1} + C_2 \quad \Rightarrow \quad q = 2C_1x - 2C_1C_2$$

Выраженное из получившегося уравнения q подставим в уравнение (1):

$$v = \frac{\cancel{4}C_1^{\cancel{2}}x^2 - \overset{2}{\cancel{8}}C_1^{\cancel{2}}C_2x + \cancel{4}C_1^{\cancel{2}}C_2^2}{\cancel{4}\cancel{C_1}} - \frac{1}{C_1} = C_1x^2 - 2C_1C_2x + C_1C_2^2 - \frac{1}{C_1}$$

Делаем обратную замену $v(x) = y^2$ и найдём возьмём от получившегося выражения производную:

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = C_1x^2 - 2C_1C_2x + C_1C_2^2 - \dfrac{1}{C_1} \\ 2yy' = 2C_1x - C_1C_2 \end{array}\right.$$

Итак, у нас уже есть общее решение. Теперь найдём частное, подставив в каждое из выражений $x = 1, y = 1, y' = 0$ и вычислим C_1 и C_2:

$$\left[\begin{array}{l} 1 = C_1 - 2C_1C_2 + C_1C_2^2 - \dfrac{1}{C_1} \\ 0 = \overset{1}{\cancel{2C_1}} - \cancel{2C_1}C_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = C_1 - 2C_1C_2 + C_1C_2^2 - \dfrac{1}{C_1} \\ C_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = -\dfrac{1}{C_1} \\ C_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{array}\right.$$

При таких коэффициентах C_1 и C_2 частное решение дифференциального уравнения будет выглядеть так:

$$\boxed{y^2 = -x^2 + 2x}$$

Задача №14

Уравнение, описывающее такой процесс, будет выглядеть так:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{k(T-20)} = dt$$

Здесь t — прошедшее время, а T — температура тела в момент времени t. Проинтегрируем обе половины уравнения с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dT}{k(T-20)} = \int dt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k}\ln(T-20) + C$$

Имеем следующие начальные условия, которые подставим в полученное уравнение:

$$\begin{cases} t=0 \quad T=100 \\ t=20 \quad T=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{k}\ln 80 + C \\ 20 = \frac{1}{k}\ln 40 + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{k}\ln 80 \\ 20 = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{20\ln 80}{\ln\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{k} = \frac{20}{\ln\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Итак, мы нашли $\frac{1}{k}$ и C — подставим их в исходное уравнение, зададим температуру $T = 25$ и найдём время t, через которое тело достигнет этой температуры:

$$t = \frac{20\ln(T-20)}{\ln\frac{1}{2}} - \frac{20\ln 80}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{20\ln(T-20) - 20\ln 80}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{20\ln\frac{T-20}{80}}{\ln\frac{1}{2}}$$

$$t(25) = \frac{20\ln\frac{\cancelto{1}{5}}{\cancelto{16}{80}}}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{20\ln\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\ln\frac{1}{2}} = \frac{20\cdot 4\cancel{\ln\frac{1}{2}}}{\cancel{\ln\frac{1}{2}}} = \boxed{80}$$

Задача №15

Перед нами две функции $y = \sin 2x$ и $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. Необходимо исследовать, являются ли они линейно зависимыми. Для этого преобразуем вторую функцию в соответствии с преобразованием углов в тригонометрических функциях, где $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$. Функции линейно зависимы, если найдутся такие $a \neq 0$ и $b \neq 0$, что $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) = 0$ С учётом условий нашей задачи получаем $a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x$.

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ — функции, отличающиеся на фазу $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поэтому нет ни одной пары a и b, кроме $a = 0$ и $b = 0$, при которых $a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x = 0 \;\Rightarrow$ $\boxed{\text{функции линейно независимые.}}$

Задача №16

Итак, имеем функцию $y = C_1x + 2C_2e^{3-x} + C_3e^{-x}$. В общем решении ДУ на каждый корень приходится по экспоненте e^{r_ix}, где r_i — корни характеристического уравнения ДУ. Это означает, что мы никак не можем получить e^{3-x}, находящуюся в функции выше, поэтому необходимо сделать небольшое преобразование: $y = C_1e^{0x}x + 2C_2e^3e^{-x} + C_3e^{-x}$. В таком виде функции наблюдаем, что характеристическое уравнение ДУ имеет корни $r_1 = 0,\ r_2 = -1$.

Рассмотрим первый корень $r_1 = 0$ — исходя из того, что первый член многочлена $C_1e^{0x}x$ имеет x как один из сомножителей, делаем вывод, что кратность этого корня равна 2, но в таком случае в функции не хватает члена $C_0e^{0x}x^0$. Таким образом $\boxed{\text{функция \textbf{не является} общим решением требуемого дифференциального уравнения.}}$

Задача №17

Для решения каждого из этих линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо воспользоваться характеристическим уравнением.

1) $y'' + 2y' - 63y = 0$

$$r^2 + 2r - 63 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = -9 \quad r_2 = 7$$

$$\boxed{y = C_1e^{-9x} + C_2e^{7x}}$$

2) $9y'' + 48y' + 64y = 0$

$$9r^2 + 48r + 64 = 0 \;\Rightarrow\; r_{1,2} = -\frac{8}{3}$$

$$\boxed{y = e^{-8x/3}(C_1 + C_2x)}$$

3) $y'' + 18y' + 90y = 0$

$$r^2 + 18r + 90 = 0 \;\Rightarrow\; r_{1,2} = -9 \pm 3i$$

$$\boxed{y = e^{-9x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)}$$

4) $y''' - 10y'' - 11y' + 180y = 0$

$$r^3 - 10r^2 - 11r + 180 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = -4 \quad r_2 = 5 \quad r_3 = 9$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x} + C_3 e^{9x}}$$

5) $y''' - 17y'' + 96y' - 180y = 0$

$$r^3 - 17r^2 + 96r - 180 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 5 \quad r_{2,3} = 6$$

$$\boxed{y = C_1 e^{5x} + e^{6x}(C_2 + C_3 x)}$$

6) $y''' + 14y'' + 124y' + 200y = 0$

$$r^3 + 14r^2 + 124r + 200 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = -2 \quad r_{2,3} = -6 \pm 8i$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + e^{-6x}(C_2 \sin 8x + C_3 \cos 8x)}$$

7) $y^{\mathrm{IV}} - 70y'' + 1369y = 0$

$$r^4 - 70r^2 + 1369 = 0 \;\Rightarrow\; r^4 + 74r^2 + 1369 - 144r^2 = 0 \;\Rightarrow\; (r^2+37)^2 - (12r)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (r^2 + 37 - 12r)(r^2 + 17 + 12r) = 0$$

$$r_{1,2} = 6 \pm i \quad r_{3,4} = -6 \pm i$$

$$\boxed{y = e^{6x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{-6x}(C_3 \sin x + C_4 \cos x)}$$

Задача №18

В этой задаче ход решения предыдущей дополняется нахождением коэффициентов C_n, путём взятия производной от полученной функции $y(x)$ и подстановкой начальных условий. Для решения каждого из этих дифференциальных уравнений воспользуемся характеристическим уравнением и затем найдём частное решение каждого.

1) $y'' - 6y' - 27y = 0$

$$r^2 - 6r - 27 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 9 \quad r_2 = -3$$

$$\begin{cases} y = C_1 e^{9x} + C_2 e^{-3x} \\ y' = 9C_1 e^{9x} - 3C_2 e^{-3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = C_1 + C_2 \\ 0 = 9C_1 - 3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = e^{9x} + 3e^{-3x}}$$

2) $49y'' - 126y' + 81y = 0$

$$49r^2 - 126r + 81 = 0 \;\Rightarrow\; r_{1,2} = \frac{9}{7}$$

$$\begin{cases} y = e^{9x/7}(C_1 + C_2 x) \\ y' = \frac{9}{7} C_1 e^{9x/7} + C_2 e^{9x/7}(\frac{9}{7}x + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = 4xe^{9x/7}}$$

3) $y'' - 16y' + 128y = 0$

$$r^2 - 16r + 128 = 0 \;\Rightarrow\; r_{1,2} = 8 \pm 8i$$

$$\begin{cases} y = e^{8x}(C_1 \cos 8x + C_2 \sin 8x) \\ y' = 8e^{8x}(C_1(\cos 8x - \sin 8x) + C_2(\sin 8x + \cos 8x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 = C_1 \\ 0 = 8(C_1 + C_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -5 \\ C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = 5e^{8x}(\sin 8x - \cos 8x)}$$

Задача №19

В общем виде частное решение выглядит как $x^m e^{\alpha x} P(x)$, где $P(x)$ — полином степени не выше степени полинома внутри $f(x)$, α определяется из экспоненты в $f(x)$, а x появляется в случае α равна любому из k_i, т.е. является корнем характеристического уравнения.

1) $x^0 e^{0\cdot x}(Ax^2 + Bx + C) \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \neq k_{1,2} \;\Rightarrow\; m = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx + C}$

2) $x^1 e^{0\cdot x}(Ax + B) \;\Rightarrow\; \alpha = 0 = k_1 \neq k_2 \;\Rightarrow\; m = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_{\text{ч}} = x(Ax + B)}$

3) $x^2 e^{0\cdot x}(Ax + B) \;\Rightarrow\; \alpha = 0 = k_{1,2} \;\Rightarrow\; m = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_{\text{ч}} = x^2(Ax + B)}$

4) $x^0 e^{2\cdot x}(Ax^2 + Bx + C) \;\Rightarrow\; \alpha = 2 \neq k_{1,2} \;\Rightarrow\; m = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_{\text{ч}} = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)}$

5) $x^1e^{-1\cdot x}(Ax+B) \;\Rightarrow\; \alpha=-1=k_1\neq k_2 \;\Rightarrow\; m=1 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = xe^{-x}(Ax+B)}$

6) $x^2e^{4\cdot x}(Ax^2+Bx+C) \;\Rightarrow\; \alpha=4=k_{1,2} \;\Rightarrow\; m=2 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = x^2e^{4x}(Ax^2+Bx+C)}$

7) $x^me^{\alpha\cdot x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \;\Rightarrow\; \alpha\pm\beta i=0\pm 3i\neq k_{1,2} \;\Rightarrow\; m=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = (Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x}$

8) $x^me^{\alpha\cdot x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \;\Rightarrow\; \alpha\pm\beta i=0\pm 5i=k_{1,2} \;\Rightarrow\; m=1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = x((Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x)}$

9) $x^me^{\alpha\cdot x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \;\Rightarrow\; \alpha\pm\beta i=-5\pm 3i\neq k_{1,2} \;\Rightarrow\; m=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = e^{-5x}\big((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x\big)}$

10) $x^me^{\alpha\cdot x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \;\Rightarrow\; \alpha\pm\beta i=1\pm 3i=k_{1,2} \;\Rightarrow\; m=1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = xe^{x}\left((Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x\right)}$

11) $C_1x^{m_1}e^{\alpha x}+C_2x^{m_2}e^{\beta x}+\dots+C_nx^{m_n}e^{\gamma x} \;\Rightarrow\; \begin{matrix}\alpha=3\Rightarrow m_1=1\\ \alpha=5\Rightarrow m_2=1\end{matrix} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{вид: } y_ч = x(Ae^{3x}+Be^{5x})}$

Задача №20

Коэффициенты характеристического уравнения будет восстанавливать из его корней по теореме Виета, а общее решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами, получившегося из характеристического уравнения, будет состоять из общего решения соответствующего ему ЛОДУ и частного решения с коэффициентами, найденными путём подстановки производных общего вида частного решения ЛНДУ в исходное ДУ. Как говорил Гагарин, поехали!

Уравнение 1

$$\begin{cases}-4+2=-p\\ -4\cdot 2=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=2\\ q=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y''+2y'-8y=-16x^2+72x-76\\ y_o=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}\end{matrix}$$

$$y_ч=Ax^2+Bx+C \quad y'_ч=2Ax+B \quad y''_ч=2A$$

$$2A+4Ax+2B-8Ax^2-8Bx-8C=-16x^2+72x-76 \Rightarrow \begin{cases}-8A=-16\\ 4A-8B=72\\ 2A+2B-8C=-76\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2\\ B=-8\\ C=8\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}+2x^2-8x+8}$$

Уравнение 2

$$\begin{cases}0-1=-p\\ 0=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=1\\ q=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y''+y'=8x-1\\ y_o=C_1+C_2e^{-x}\end{matrix}$$

$$y_ч=Ax^2+Bx \quad y'_ч=2Ax+B \quad y''_ч=2A$$

$$2A+2Ax+B=8x-1 \Rightarrow \begin{cases}2A=8\\ 2A+B=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=4\\ B=-9\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1+C_2e^{-x}+x(4x-9)}$$

Уравнение 3

$$\begin{cases}0=-p\\ 0=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p=0\\ q=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y''=12x-14\\ y_o=C_1+C_2x\end{matrix}$$

$$y_ч=Ax^3+Bx^2 \quad y'_ч=3Ax^2+2Bx \quad y''_ч=6Ax+2B$$

$$6Ax+2B=12x-14 \Rightarrow \begin{cases}6A=12\\ 2B=-14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2\\ B=-7\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1+C_2x+x^2(2x-7)}$$

Уравнение 4

$$\begin{cases} 3+7=-p \\ 3\cdot 7=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-10 \\ q=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y''-10y'+21y=e^{2x}(5x^2-7x+31) \\ y_o=C_1e^{3x}+C_2e^{7x} \end{array}$$

$$y_ч=e^{2x}(Ax^2+Bx+C) \quad y_ч'=2e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+e^{2x}(2Ax+B) \quad y_ч''=2Ae^{2x}+4e^{2x}(2Ax+B)+4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$$

$$e^{2x}(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B+4C)-10e^{2x}(2Ax^2+2Ax+2Bx+B+2C)+21e^{2x}(Ax^2+Bx+C)=e^{2x}(5x^2-7x+31)$$

$$(2A-6B+5C)+x(5B-12A)+5Ax^2=5x^2-7x+31 \Rightarrow \begin{cases} 5A=5 \\ 5B-12A=-7 \\ 2A-6B+5C=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=7 \end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}+e^{2x}(x^2+x+7)}$$

Уравнение 5

$$\begin{cases} -1+6=-p \\ -1\cdot 6=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=5 \\ q=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y''-5y'-6y=e^{x}(-42x+34) \\ y_o=C_1e^{-x}+C_2e^{6x} \end{array}$$

$$y_ч=e^{-x}(Ax^2+Bx) \quad y_ч'=e^{-x}(2Ax+B)-e^{-x}(Ax^2+Bx) \quad y_ч''=2Ae^{-x}-2e^{-x}(2Ax+B)+e^{-x}(Ax^2+Bx)$$

$$2Ae^{-x}-e^{-x}(2Ax+B)+e^{-x}(Ax^2+Bx)-e^{-x}(2Ax+B)-5e^{-x}(B+2Ax-Bx-Ax^2)-6e^{-x}(Ax^2+Bx)=e^{-x}(-42x+34)$$

$$2A-7B-14Ax=-42x+34 \Rightarrow \begin{cases} 2A-7B=34 \\ -14A=-42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-4 \end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}+e^{-x}(3x^2-4x)}$$

Уравнение 6

$$\begin{cases} 4+4=-p \\ 4\cdot 4=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-8 \\ q=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y''-8y'+16y=e^{4x}(60x^2+24x+18) \\ y_o=e^{4x}(C_1+C_2x) \end{array}$$

$$y_ч=e^{4x}(Ax^4+Bx^3+Cx^2) \quad y_ч'=4e^{4x}(Ax^4+Bx^3+Cx^2)+e^{4x}(4Ax^3+3Bx^2+2Cx)$$

$$y_ч''=16e^{4x}(Ax^4+Bx^3+Cx^2)+8e^{4x}(4Ax^3+3Bx^2+2Cx)+e^{4x}(12Ax^2+6Bx+2C)$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к уравнению, которое необходимо решить:

$$12Ax^2+6Bx+2C=60x^2+24x+18 \Rightarrow \begin{cases} 12A=60 \\ 6B=24 \\ 2C=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=4 \\ C=9 \end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=e^{4x}(C_1+C_2x)+x^2e^{4x}(5x^2+4x+9)}$$

Уравнение 7

$$\begin{cases} 2i-2i=-p \\ -2i\cdot 2i=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y''+4y=(-10x^2+45x-42)\cos 3x+(-25x^2+6x+37)\sin 3x \\ y_o=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x \end{array}$$

$$y_ч=(Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx_2+Ex+F)\sin 3x$$

$$y_ч'=(3Dx^2+2Ax+3Ex+B+3F)\cos 3x+(E-3C+2Dx-3Bx-3Ax^2)\sin 3x$$

$$y_ч''=(6E-9C+2A+12Dx-9Bx-9Ax^2)\cos 3x+(-9Dx^2-12Ax-9Ex-6B+2D-9F)\sin 3x$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к системе, которую необходимо решить:

$$\begin{cases} -5Ax^2+(12D-5B)x+2A+6E-5C=-10x^2+45x-42 \\ -5Dx^2+(-12A-5E)x+2D-6B-5F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+6E-5C=-42 \\ 12D-5B=45 \\ -5A=-10 \\ -5D=-25 \\ -12A-5E=6 \\ 2D-6B-5F=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=2 \\ D=5 \\ E=-6 \\ F=-9 \end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(2x^2+3x+2)\cos 3x+(5x^2-6x-9)\sin 3x}$$

Уравнение 8

$$\begin{cases}5i-5i=-p\\-5i\cdot 5i=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=0\\q=25\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}y''+25y=(80x+16)\cos 5x+(-60x-22)\sin 5x\\y_o=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\end{array}$$

$$y_ч=(Ax^2+Bx)\cos 5x+(Cx^2+Dx)\sin 5x$$

$$y'_ч=(5Cx^2+2Ax+5Dx+B)\cos 5x+(D+2Cx-5Bx-5Ax^2)\sin 5x$$

$$y''_ч=(10D-25B+2A+20Cx-25Ax^2)\cos 5x+(2C-10B-25Dx-20Ax-25Cx^2)\sin 5x$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к системе, которую необходимо решить:

$$\begin{cases}20Cx+2A+10D=80x+16\\-20Ax-10B+2C=-60x-22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A+10D=16\\20C=80\\-10B+2C=-22\\-20A=-60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=3\\C=4\\D=1\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x+x((3x+3)\cos 5x+(4x+1)\sin 5x)}$$

Уравнение 9

$$\begin{cases}-3+i-3-i=-p\\(-3+i)(-3-i)=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=6\\q=10\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}y''+6y'+10y=e^{-5x}\big((-88x^2+92x+26)\cos 3x+(24x^2+28x+76)\sin 3x\big)\\y_o=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\end{array}$$

$$y_ч=e^{-5x}\left((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x\right)$$

$$y'_ч=-e^{-5x}\Big(\big((5D+3A)x^2+(-2D+3B+5E)x+5F+3C-E\big)\sin 3x+$$
$$+\big((5A-3D)x^2+(5B-2A-3E)x-3F+5C-B\big)\cos 3x\Big)$$

$$y''_ч=e^{-5x}\Big(\big((16D+30A)x^2+(-20D+30B-12A+16E)x+16F+2D+30C-6B-10E\big)\sin 3x+$$
$$+\big((16A-30D)x^2+(12D+16B-20A-30E)x-30F+16C-10B+2A+6E\big)\cos 3x\Big)$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к системе, которую необходимо решить:

$$\begin{cases}12A-4D=24\\-4E-8D+12B-12A=28\\-4F-4E+2D+12C-6B=76\\-12D-4A=-88\\-12E+12D-4B-8A=92\\-12F+6E-4C-4B+2A=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4\\B=8\\C=4\\D=6\\E=-7\\F=-9\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-5x}\left((4x^2+8x+4)\cos 3x+(6x^2-7x-9)\sin 3x\right)}$$

Уравнение 10

$$\begin{cases}1+3i+1-3i=-p\\(1+3i)(1-3i)=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-2\\q=10\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}y''-2y'+10y=e^x\left((60x+26)\cos 3x+(-84x+52)\sin 3x\right)\\y_o=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\end{array}$$

$$y_ч=e^x\left((Ax^2+Bx)\cos 3x+(Cx^2+Dx)\sin 3x\right)$$

$$y'_ч=e^x\Big(\big((C-3A)x^2+(D+2C-3B)x+D\big)\sin 3x+\big((3C+A)x^2+(3D+B+2A)x+B\big)\cos 3x\Big)$$

$$y''_ч=e^x\Big(\big((-8C-6A)x^2+(-8D+4C-6B-12A)x+2D+2C-6B\big)e^x\sin 3x+$$
$$+\big((6C-8A)x^2+(6D+12C-8B+4A)x+6D+2B+2A\big)\cos 3x\Big)$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к системе, которую необходимо решить:

$$\begin{cases}-12A=-84\\2C-8B=52\\12C=60\\6D+2A=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=7\\B=-7\\C=5\\D=2\end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+xe^x\left((7x-7)\right)\cos 3x+(5x-2)\sin 3x}$$

Уравнение 11

$$\begin{cases} 3+5=-p \\ 3\cdot 5=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-8 \\ q=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y''-8y'+15y=-6e^{3x}+4e^{5x} \\ y_o=C_1e^{2x}+C_2e^{5x} \end{matrix}$$

$$y_ч=Axe^{3x}+Bxe^{5x} \quad y'_ч=e^{3x}(3Ax+A)+e^{5x}(5Bx+B) \quad y''_ч=e^{3x}(9Ax+6A)+e^{5x}(25Bx+10B)$$

$$-2Ae^{3x}+2Be^{5x}=-6e^{3x}+4e^{5x}$$

$$2A-7B-14Ax=-42x+34 \Rightarrow \begin{cases} -2A=-6 \\ 2B=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\boxed{y=y_o+y_ч=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+x(3e^{3x}+2e^{5x})}$$

Задача №21

В этом задании необходимо найти общее решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами, а затем определить коэффициенты C_n, имея начальные условия ДУ.

1) $y''-5y'+4y=4x^2+2x-5$ с начальными условиями $y(0)=2,\ y'(0)=0$

$$r^2-5r+4=0 \Rightarrow r_1=1 \quad r_2=4 \Rightarrow y_o=C_1e^x+C_2e^{4x}$$

$$y_ч=Ax^2+Bx+C \quad y'_ч=2Ax+B \quad y''_ч=2A$$

$$4Ax^2-10Ax+4Bx+2A-5B+4C=4x^2+2x-5$$

$$\begin{cases} 4A=4 \\ -10A+4B=2 \\ -5B+4C=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases}$$

$$y=y_o+y_ч=C_1e^x+C_2e^{4x}+x^2+3x+2$$

$$\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{4x}+x^2+3x+2 \\ y'=C_1e^x+4C_2e^{4x}+2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=C_1+C_2 \\ -3=C_1+4C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=e^x-e^{4x}+x^2+3x+2}$$

2) $y''-6y'+18y=e^{4x}\left((26x^2+2x+12)\cos 2x+(26x^2+14x-6)\sin 2x\right)$ с начальными условиями $y(0)=1,\ y'(0)=-1$

$$r^2-6r+18=0 \Rightarrow r_{1,2}=3\pm 3i \Rightarrow y_o=e^{3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

$$y_ч=e^{4x}\left((Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x\right)$$

$$y'_ч=e^{4x}\Big(\big((4D-2A)\,x^2+(2D-2B+4E)\,x+4F-2C+E\big)\sin 2x+$$
$$+\big((2D+4A)\,x^2+(4B+2A+2E)\,x+2F+4C+B\big)\cos 2x\Big)$$

$$y''_ч=e^{4x}\Big(\big((12D-16A)\,x^2+(16D-16B-8A+12E)\,x+12F+2D-16C-4B+8E\big)\sin 2x+$$
$$+\big((16D+12A)\,x^2+(8D+12B+16A+16E)\,x+16F+12C+8B+2A+4E\big)\cos 2x\Big)$$

Опустим подстановку производных в исходное ДУ и сразу перейдём к системе, которую необходимо решить:

$$\begin{cases} 6D-4A=26 \\ 6E+4D-4B-8A=14 \\ 6F+2E+2D-4C-4B=-6 \\ 4D+6A=26 \\ 4E+8D+6B+4A=2 \\ 4F+4E+6C+2B+2A=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-5 \\ C=6 \\ D=5 \\ E=-3 \\ F=-1 \end{cases}$$

$$y=y_o+y_ч=e^{3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{4x}\left((x^2-5x+6)\cos 2x+(5x^2-3x-1)\sin 2x\right)$$

$$y'=(3C_2-3C_1)\,e^{3x}\sin 3x+(3C_2+3C_1)\,e^{3x}\cos 3x+\left(18x^2+8x-19\right)e^{4x}\sin 2x+\left(14x^2-24x+17\right)e^{4x}\cos 2x$$

$$\begin{cases} 1=C_1+6 \\ -1=3C_2+3C_1+17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-5 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

$$\boxed{y=e^{3x}(-5\cos 3x-\sin 3x)+e^{4x}\left((x^2-5x+6)\cos 2x+(5x^2-3x-1)\sin 2x\right)}$$