Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №3

ЖЁСТКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Студент: Овчинников П.А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Задание №1. Жёсткие фильтры

Итак, зададим следующую функцию:

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t \in [-1, 4] \\ 0, & t \in (-\infty, -1) \cap (4, \infty) \end{cases}$$

И выберем интервал времени $T = 14$ с шагом $dt = 0.01$. Сформируем множество из $^T/_{dt} = 1400$ равномерно распределённых точек на промежутке $[-^T/_2, ^T/_2] = [-7, 7]$ Посмотрим на график функции, чтобы узнать, как ведёт себя функция на этом множестве точек:

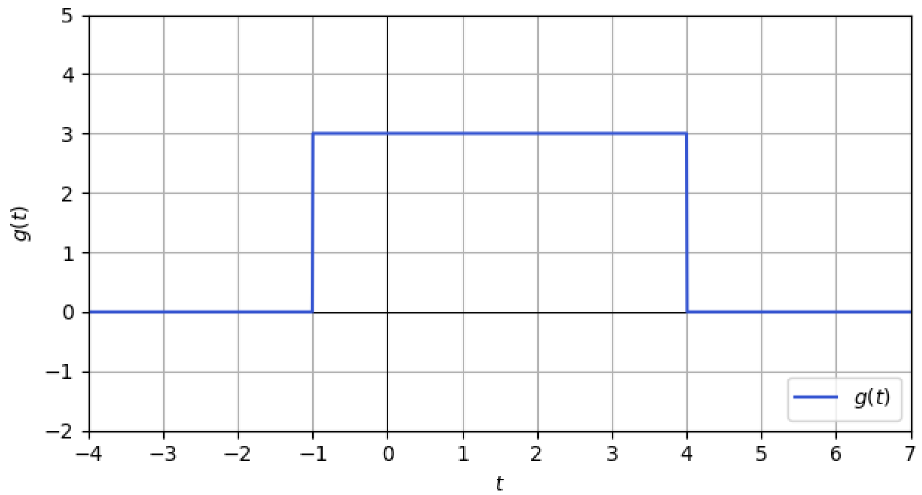

Рис. 1: График функции $f(t)$ — исходный сигнал

В ходе выполнения задания мы будем искусственно зашумлять функцию $g(t)$ и после этого выполнять жёсткую фильтрацию Фурье-образа зашумлённого сигнала различными методами. Зашумлённый сигнал будет выглядеть так:

$$u(t) = g(t) + b \cdot (\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5) + c \cdot \sin(dt)$$

Здесь $\text{rand}(\text{size}(t))$ — функцию, возвращающая вектор, состоящий из случайных чисел от 0 до 1, той же длины, что и вектор t. (Подразумевается, что функции работают как линейные операторы, преобразующие вектор t заданной длины в другой вектор такой же длины.)

Убираем высокие частоты

Начнём с так называемого low-pass фильтра или, по-другому говоря, с *фильтра нижних частот*, который убирает верхние частоты и пропускает нижние. Зададим $c = 0, d = 0$, коэффициент b будет варьироваться в множестве $\{0.5, 1.5, 3\}$. Посмотрим, как выглядит зашумлённая функция для каждого b:

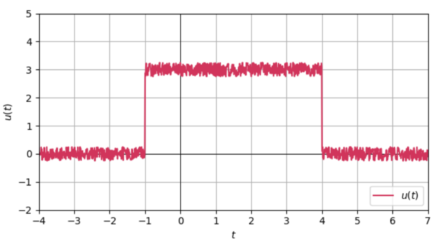

Рис. 2: $b = 0.5$

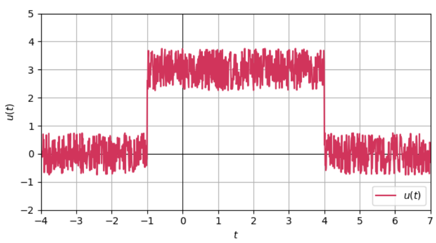

Рис. 3: $b = 1.5$

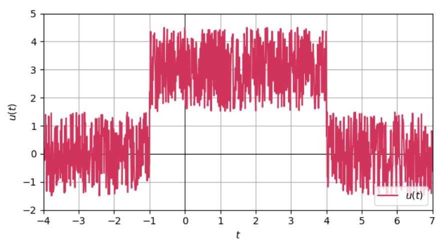

Рис. 4: $b = 3$

Графики функции $u(t)$ — зашумленный сигнал

Приходим к выводу, что с ростом b растёт амплитуда шума в каждой точке сигнала.

Выберем частоты v, за пределами которых мы будем глушить Фурье-образ: $\{3, 7, 13\}$. И для каждого b применим фильтр нижних частот. Предлагаю посмотреть на сравнительные графики модулей Фурье-образов зашумлённого и отфильтрованного сигнала:

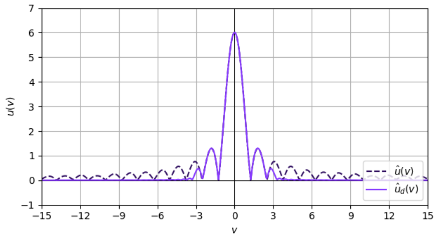

Рис. 5: $v = 3$

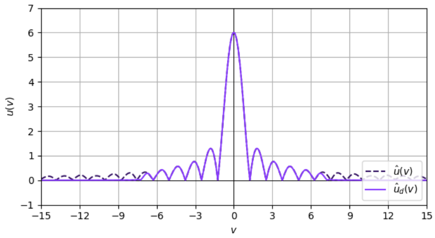

Рис. 6: $v = 7$

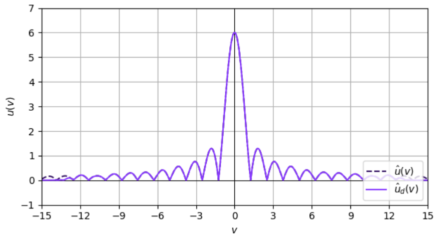

Рис. 7: $v = 13$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 0.5$

Выполним обратное преобразование отфильтрованного Фурье-образа, чтобы получить отфильтрованный сигнал. Посмотрим на сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов:

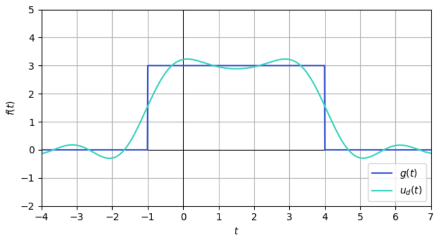

Рис. 8: $v = 3$

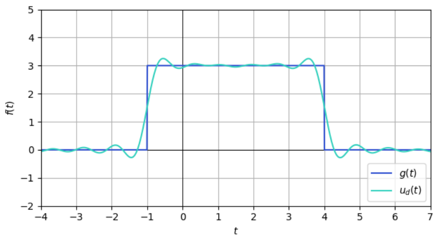

Рис. 9: $v = 7$

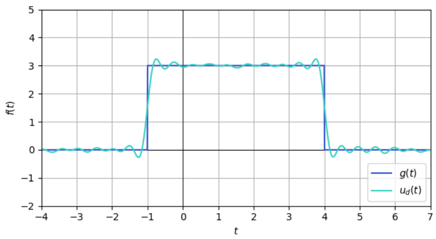

Рис. 10: $v = 13$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 0.5$

Амплитуда шума невысокая, поэтому не трудно восстановить исходный сигнал, обрезав высокие частоты — к примеру, на частоте $v = 13$. Отфильтрованный сигнал вполне схож с исходным.

Проверним такой же трюк для сигнала с шумом амплитудой $b = 1.5$:

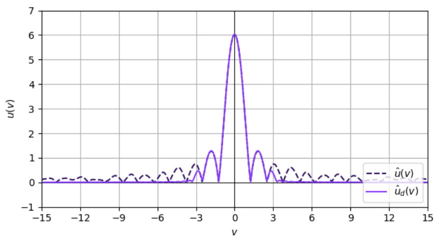

Рис. 11: $v = 3$

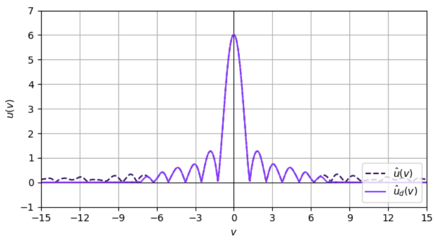

Рис. 12: $v = 7$

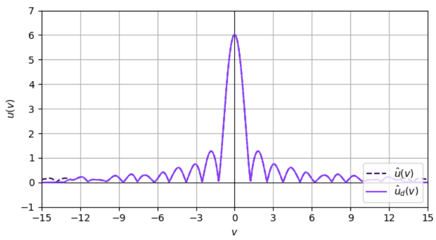

Рис. 13: $v = 13$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 1.5$

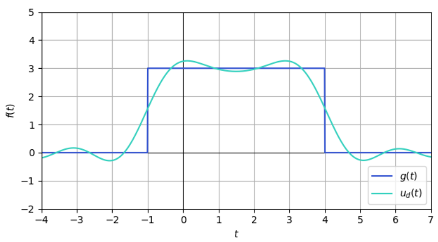

Рис. 14: $v = 3$

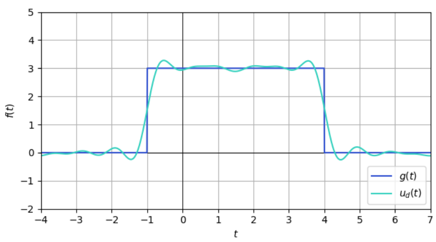

Рис. 15: $v = 7$

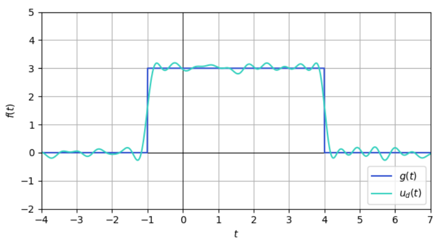

Рис. 16: $v = 13$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 1.5$

Видим, что исходный сигнал восстановлен не так хорошо, как при $b = 0.5$, но всё равно вполне приемлемо.

Наконец, посмотрим на результаты фильтрации для сигнала с амплитудой шума $b = 3$:

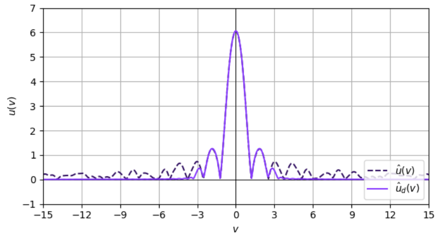

Рис. 17: $v = 3$

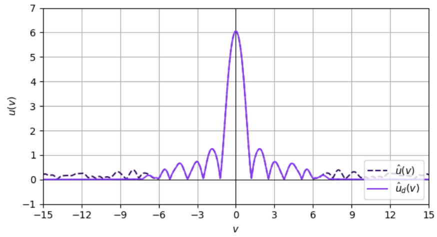

Рис. 18: $v = 7$

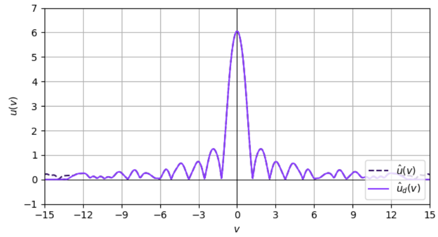

Рис. 19: $v = 13$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 3$

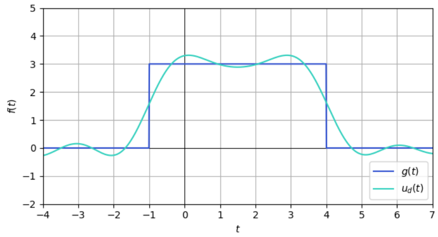

Рис. 20: $v = 3$

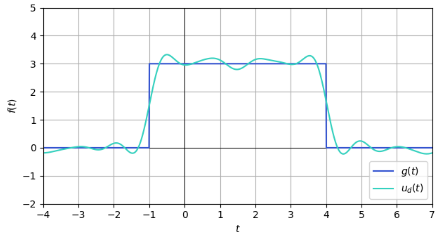

Рис. 21: $v = 7$

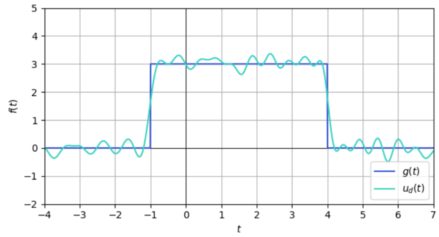

Рис. 22: $v = 13$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 3$

Видим, что при $b = 3$ восстановить исходный сигнал становится сложнее, но всё равно возможно. В графике модуля Фурье-образа искажения всё ближе к оси ординат, поэтому приходить выбирать всё меньшую частоту фильтрации v, но в таком случае мы теряем всё больше от внешнего облика исходного сигнала.

> Итак, чем больше b (т.е. чем больше амлитуда шума), тем сложнее восстановить исходный сигнал даже с фильтрацией Фурье-образа. При этом, чем меньше b (т.е. чем меньше шума в сигнале), тем большую частоту фильтрации v можно выбирать, чтобы максимально приблизить отфильтрованный сигнал к исходному.

Убираем специфические частоты

Теперь рассмотрим *band-stop фильтр*, который убирает частоты в определённом диапазоне и пропускает остальные. Зададим набор значений $b = \{0, 1, 2\}$, $c = \{0.8, 1, 1.5\}$ и $d = \{8, 10, 15\}$. Дабы не засорять отчёт множество графиков с полным перебором всех значений (всего $3^3 = 27$ графиков), приведём лишь три примера, репрезентативно отражающих влияние каждого параметра на сигнал:

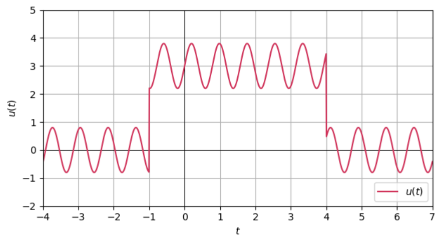

Рис. 23: $b = 0, c = 0.8, d = 8$

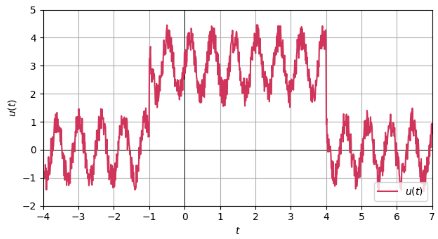

Рис. 24: $b = 1, c = 1, d = 10$

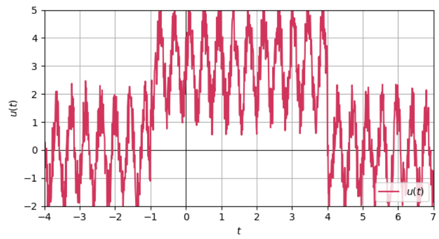

Рис. 25: $b = 2, c = 1.5, d = 15$

Графики функции $u(t)$ — зашумленный сигнал

Компонента b всё так же отвечает за амплитуду шума, а c и d — за амплитуду и частоту синусоидального шума. С ростом c увеличивается амплитуда синусоидального шума, а с ростом d — его частота.

Выберем частоты v, вокруг которых на расстоянии 3 мы будем глушить Фурье-образ: $\{5, 9, 16\}$. И для каждого набора значений b, c, d применим фильтр. Посмотрим на сравнительные графики модулей Фурье-образов зашумлённого и отфильтрованного сигнала. Примеры будут приведены для тех же наборов, что и выше:

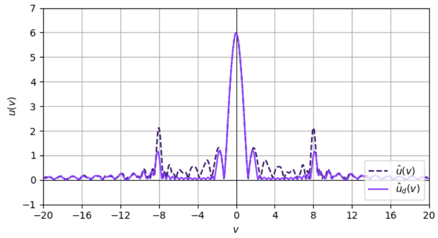

Рис. 26: $v = 5$

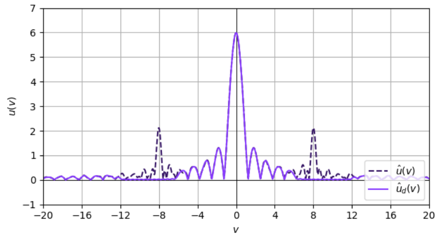

Рис. 27: $v = 9$

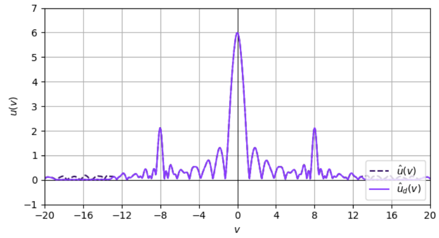

Рис. 28: $v = 16$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 0, c = 0.8, d = 8$

Мы наблюдаем ярко выраженную частоту 8 и -8 на графике модуля Фурье-образа, соответствующую частоте синусоидального шума. Взглянем на сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов:

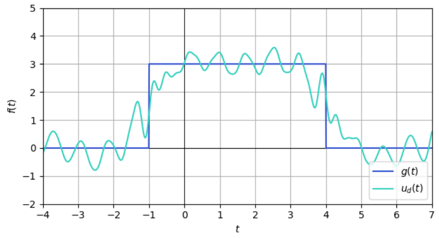

Рис. 29: $v = 5$

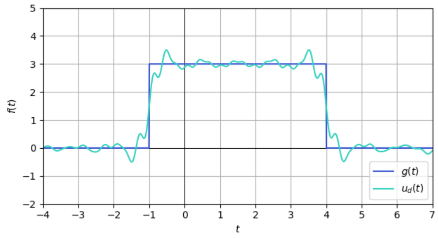

Рис. 30: $v = 9$

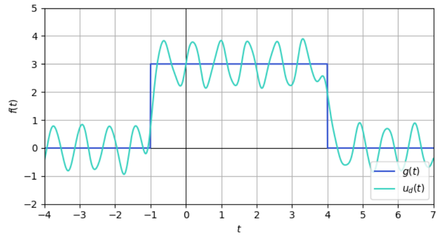

Рис. 31: $v = 16$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 0, c = 0.8, d = 8$

Действительно, при фильтрации с частотой $v = 9$ мы получаем наиболее чистый сигнал. Для $v = 5$ мы теряем слишком много важной информации, которая хранится в нижних частотах, при этом никак не устраняем случайный и синусоидальный шумы. Для $v = 16$ мы убираем случайный шум, но при этом сохраняем синусоидальный.

Посмотрим на результаты фильтрации для сигнала с $b = 1, c = 1, d = 10$:

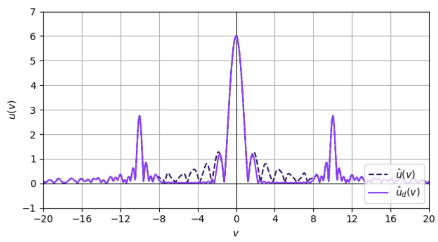

Рис. 32: $v = 5$

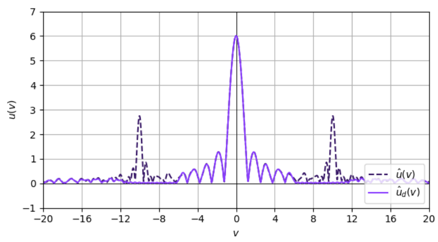

Рис. 33: $v = 9$

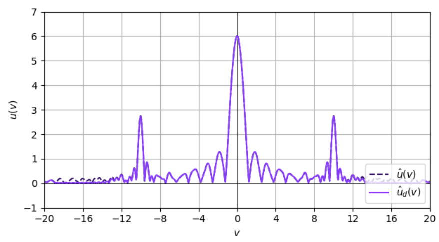

Рис. 34: $v = 16$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 1, c = 1, d = 10$

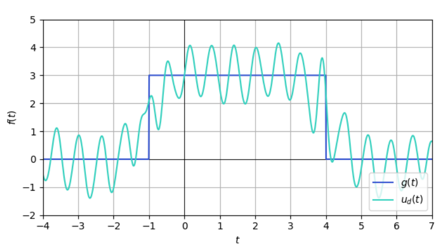

Рис. 35: $v = 5$

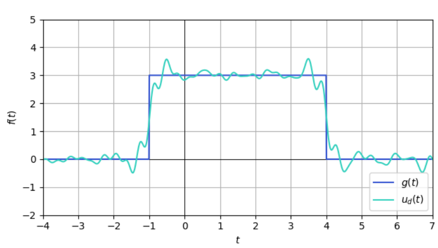

Рис. 36: $v = 9$

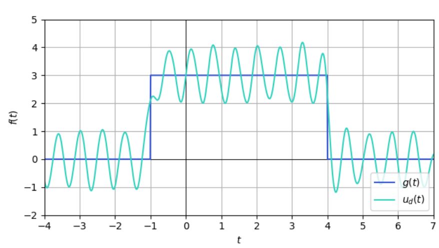

Рис. 37: $v = 16$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 1, c = 1, d = 10$

Теперь становится очевидно, что на графике модуля Фурье-образа частота, которую необходимо гасить, равна d и $-d$. При $v = 9$ мы снова получаем чистый сигнал.

Наконец, посмотрим на результаты фильтрации для сигнала с $b = 2, c = 1.5, d = 15$:

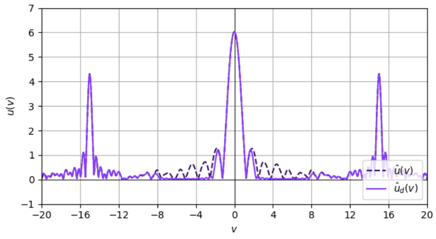

Рис. 38: $v = 5$

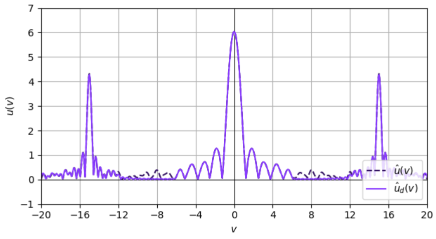

Рис. 39: $v = 9$

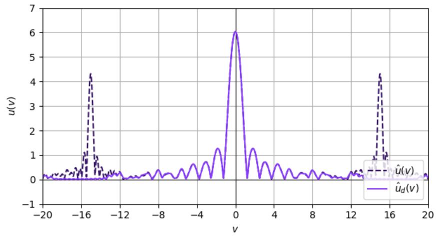

Рис. 40: $v = 16$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов при $b = 2, c = 1.5, d = 15$

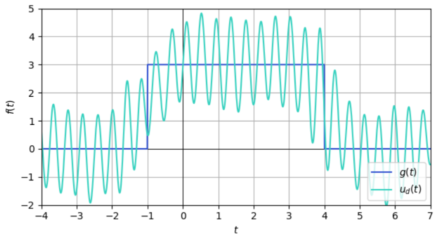

Рис. 41: $v = 5$

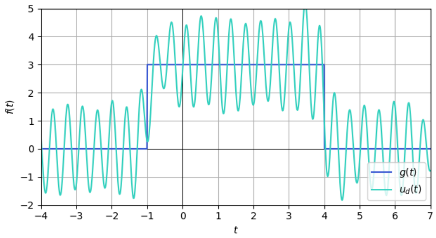

Рис. 42: $v = 9$

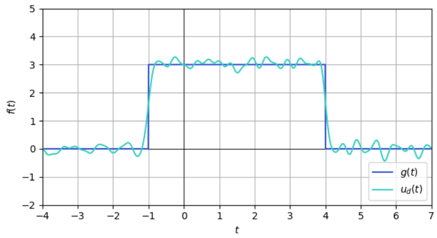

Рис. 43: $v = 16$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов при $b = 2, c = 1.5, d = 15$

В этот раз частота синусоидального шума равна 15 и -15, поэтому наиболее чистый сигнал мы получаем при $v = 16$, заодно и фильтруем большую часть случайного шума.

> Итак, амплитуда синусоидального шума c никак не влияет на фильтрацию и достаточно того, чтобы частота v фильтрации совпадала с частотой синусоидального шума d — тогда весь синусоидальный шум можно погасить. При этом амплитуда случайного шума b всё так же влияет на сложность восстановления исходного сигнала. Это означает, что если $b = 0$, то после фильтрации синусоидального шума мы полностью восстановим исходный сигнал.

Убираем низкие частоты?

Действительно, есть ли смысл гасить нижние частоты? Давайте проверим, рассмотрев *high-pass фильтр*, который убирает низкие частоты и пропускает высокие. Используем тот же набор значений, что и для band-stop фильтра, и те же зашумленные сигналы:

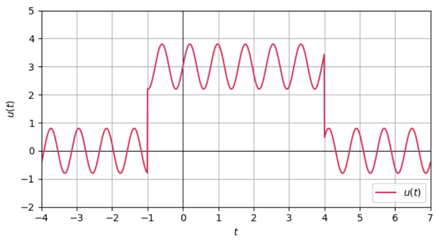

Рис. 44: $b = 0, c = 0.8, d = 8$

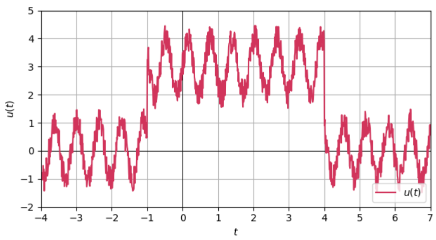

Рис. 45: $b = 1, c = 1, d = 10$

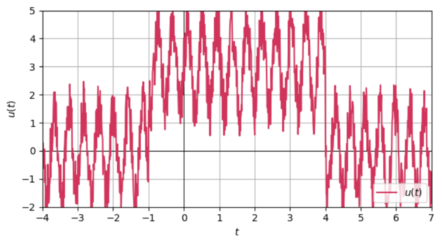

Рис. 46: $b = 2, c = 1.5, d = 15$

Графики функции $u(t)$ — зашумленный сигнал

Стоит отметить заранее, что на низких частотах хранится вся основная информация о сигнале и его основные компоненты. Поэтому для каждого из сигналов рассмотрим частоты v, ниже которых мы будем глушить Фурье-образ: $\{11, 6, 3\}$, но для каждого из сигналов мы выберем по одной частоте v в порядке, представленном выше. Рассмотрим сравнительный график модулеей Фурье-образов зашумлённого и отфильтрованного сигналов:

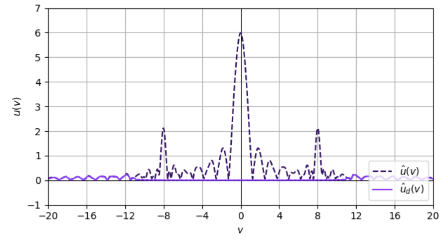

Рис. 47: $b = 0, c = 0.8, d = 8, v = 11$

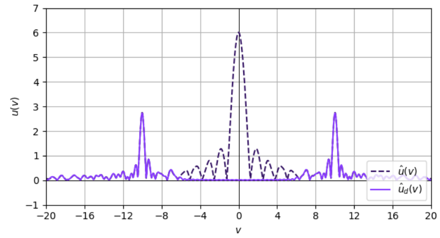

Рис. 48: $b = 1, c = 1, d = 10, v = 6$

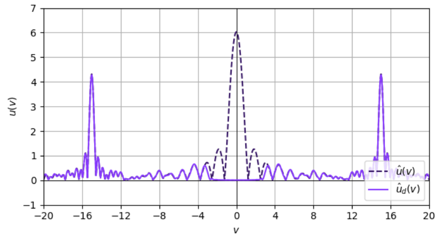

Рис. 49: $b = 2, c = 1.5, d = 15, v = 3$

Сравнительные графики модулей Фурье-образов

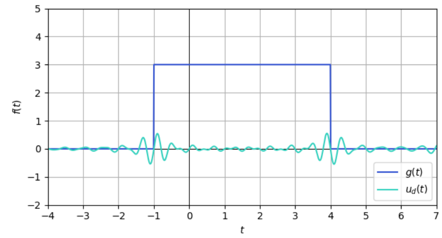

Рис. 50: $b = 0, c = 0.8, d = 8, v = 11$

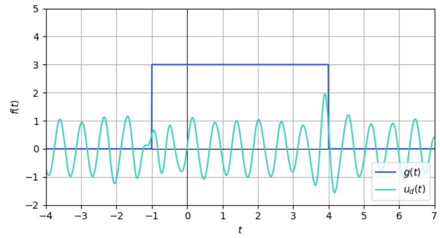

Рис. 51: $b = 1, c = 1, d = 10, v = 6$

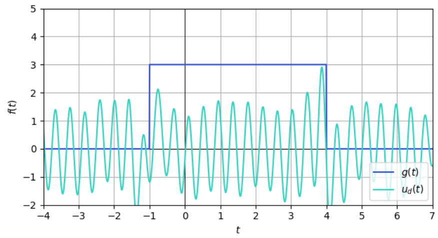

Рис. 52: $b = 2, c = 1.5, d = 15, v = 3$

Сравнительные графики исходного и отфильтрованного сигналов

Видим, что при $v = 11$ мы заглушили в сигнале всё, кроме случайного шума. При $v = 6$ мы сохраняем ещё и синусоидальный шум, а при $v = 3$ мы сохраняем всё, кроме основного перепада прямоугольной волны.

> Итак, гасить низкие частоты в сигнале не имеет смысла, так как именно на них хранится основная информация о сигнале. Поэтому не стоит рассматривать high-pass фильтр в контексте удаления шумов и восстановления исходного сигнала.

Задание №2. Фильтрация звука

В данном задании мы будем фильтровать звуковой сигнал — мы слышим записанный с микрофона голос и шум в низких частотах. Для этого мы будем использовать библиотеку `librosa` для чтения и записи аудиофайла, библиотеку `numpy` для фильтрации Фурье-образа и, как и всегда, `matplotlib` для отображения графиков.

Для начала загрузим аудиофайл и посмотрим на график амплитуды от времени звукового сигнала:

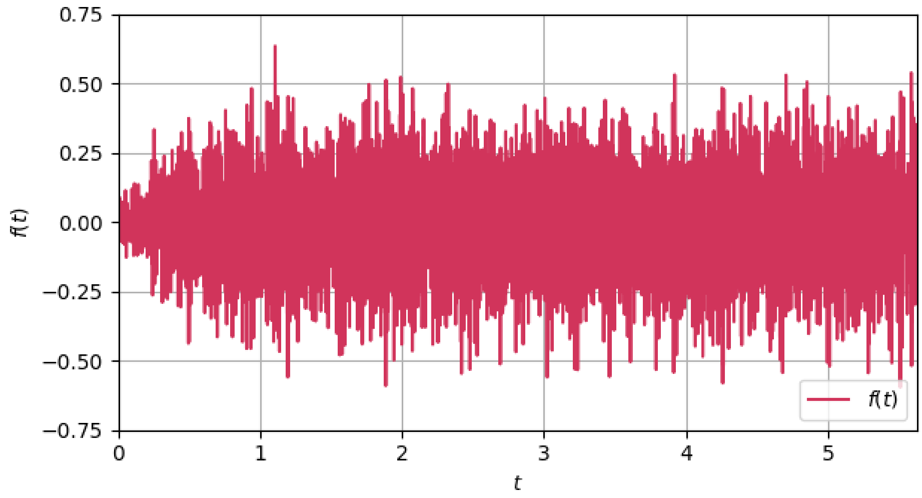

Рис. 53: График звукового сигнала

Теперь применим Фурье-преобразование к сигналу и посмотрим на график модуля Фурье-образа. График сравнительный, то есть здесь отображены Фурье-образы зашумлённого и отфильтрованного сигналов:

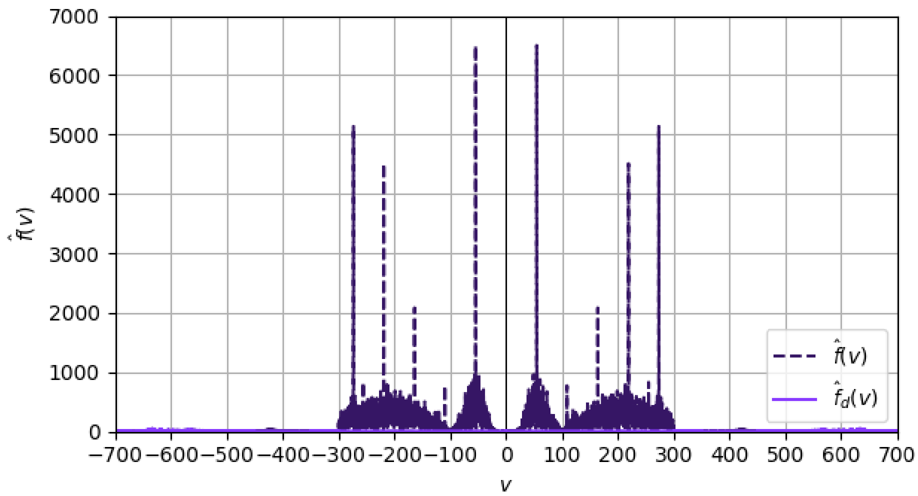

Рис. 54: График модуля Фурье-образа оригинального и отфильтрованного сигналов

Как мы видим, в диапазоне от 0 Гц до 300 Гц наблюдается шум, который заглушает голос. Сам голос находится в диапазоне от 550 Гц до 750 Гц. Но наблюдается также небольшой выброс на частоте 420 Гц. Мы применили фильтр нижних частот на частоты до 300 Гц и band-stop фильтр шириной 50 Гц на частоте 400 Гц, удаляющий частоты в определённом диапазоне — он заглушит сигнал на частотах 350-450 Гц.

Применим обратное преобразование Фурье, чтобы получить отфильтрованный звуковой сигнал. Посмотрим на график амплитуды от времени отфильтрованного сигнала:

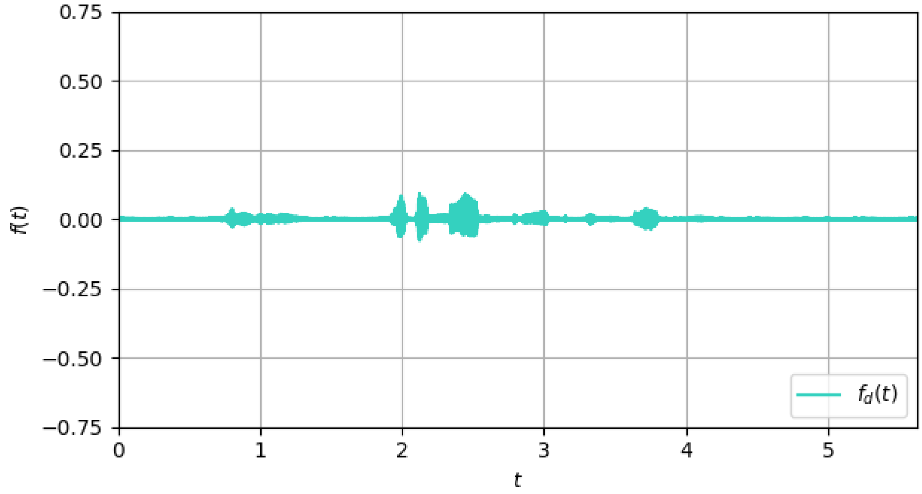

Рис. 55: График отфильтрованного звукового сигнала

Как мы видим, теперь на графике чётко виден голос, и остался только синусоидальный шум, который достаточно тих, чтобы не отображаться на графике и не мешать восприятию голоса.