Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент: Овчинников П.А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Перед началом выполнения заданий представлю формулы, которыми мы будем активно пользоваться в этом заданий.

Нам понадобится унитарное преобразование Фурье к угловой скорости ω:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \leftrightarrows \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad \text{(обратное преобразование)}$$

А также равенство Парсеваля для преобразования Фурье:

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}\|_2 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Задание №1. Вещественное преобразование

Зададим несколько значений a и b: $(a, b) = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$. Они нам пригодятся для видоизменения функций, даваемых в задании к рассмотрению.

Прямоугольная функция

Итак, дана следующая функция, для которой мы будем строить Фурье-образ:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leqslant b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Для начала выведем выражение для вычисление Фурье-образа в общем виде:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} a\, e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{a\, e^{i\omega t}}{-\sqrt{2\pi} i\omega} \right|_{-b}^{b} = \frac{a\left(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}\right)}{\omega i \sqrt{2\pi}} = \left[\frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = 2\sin\omega b \right] = \frac{2a\sin\omega b}{\omega\sqrt{2\pi}} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\omega b$$

И для каждого из набора коэффициентов формула приобретает следующий вид:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}\omega \text{ для } (1,\ 1) \qquad \sqrt{\frac{8}{\pi}} \operatorname{sinc}\omega \text{ для } (2,\ 1) \qquad \sqrt{\frac{32}{\pi}} \operatorname{sinc} 2\omega \text{ для } (2,\ 2)$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b), которые мы задали перед выполнением задания.

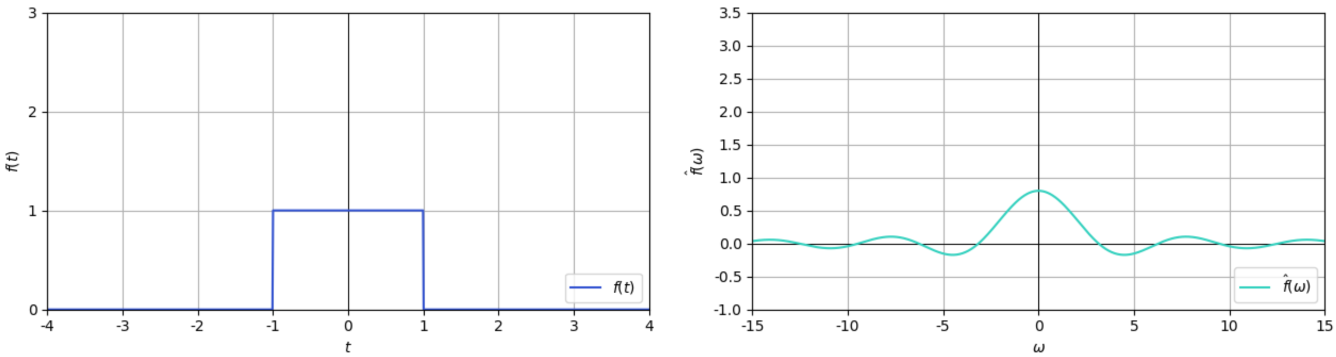

Рис. 1: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

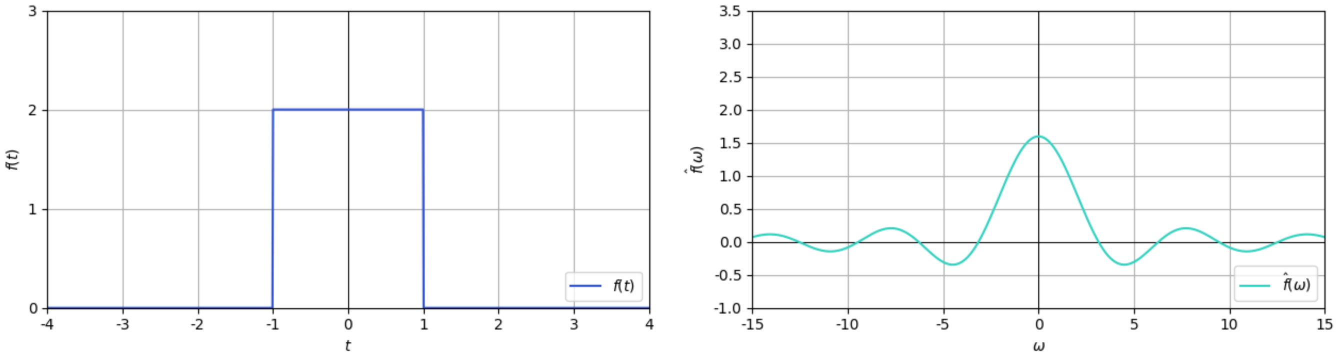

Рис. 2: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 1$

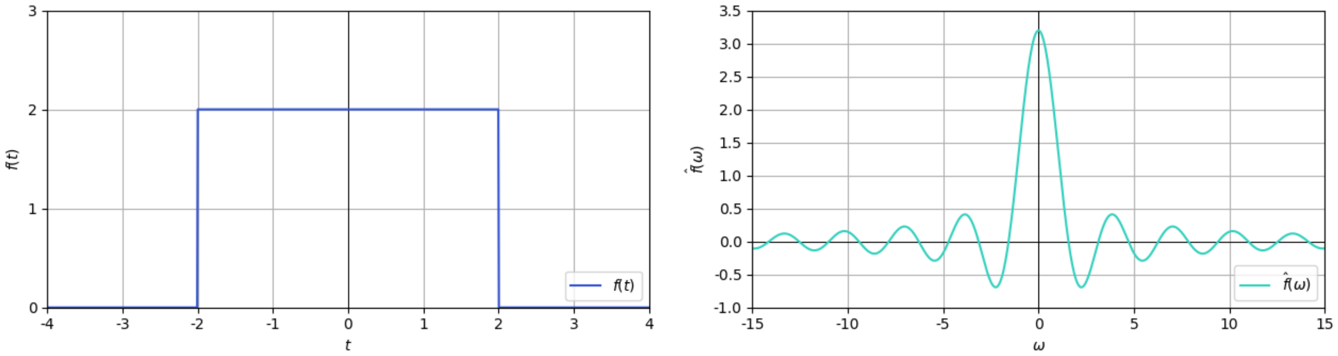

Рис. 3: Графики прямоугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля для каждого из набора параметров a и b, использовав модификацию программы с прошлой лабороторной работы.

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0063333
```

Листинг 1: $a = 1$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0253333
```

Листинг 2: $a = 2$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0253036
```

Листинг 3: $a = 2$, $b = 2$

Как мы видим, отклонение по равенству Парсеваля совсем небольшое.

Чтобы понять, как параметры a и b влияют на исходную функцию и Фурье-образ, достаточно взглянуть на их формулы. В исходной функции b влияет на ширину прямоугольника, а a — на его высоту. И согласно формуле Фурье-образа, с изменением a изменяется амплитуда кардинального синуса, а изменение b приводит к изменению не только амплитуды, но и частоты. То же самое мы наблюдаем и на графиках.

Треугольная функция

Итак, дана следующая функция, для которой мы будем строить Фурье-образ:

$$f(t) = \begin{cases} a - \left|{}^{at}/_{b}\right|, & |t| \leqslant b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Для начала выведем выражение для вычисление Фурье-образа в общем виде:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} \left(a - \left| \frac{at}{b} \right| \right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{b} \left(a - \frac{at}{b} \right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt + \int\limits_{-b}^{0} \left(a + \frac{at}{b} \right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{b} \left(1 - \frac{t}{b} \right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt + \int\limits_{-b}^{0} \left(1 + \frac{t}{b} \right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(i\omega(t+b)+1)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}}{b\omega^2} \Bigg|_{-b}^{0} - \frac{(i\omega(t-b)+1)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}}{b\omega^2} \Bigg|_{0}^{b} \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i\omega b + 1 - e^{i\omega b}}{b\omega^2} - \frac{e^{-i\omega b} - 1 + i\omega b}{b\omega^2} \right) = \frac{-a}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega b} + e^{i\omega b} - 2 \right) = \left[e^{i\omega b} + e^{-i\omega b} = 2\cos\omega b \right] =$$

$$= \frac{a(2 - 2\cos\omega b)}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}} = \left[2 - 2\cos\omega b = 4\sin^2 {}^{\omega b}\!/_2 \right] = \frac{4a\sin^2 {}^{\omega b}\!/_2}{\omega^2 b\sqrt{2\pi}} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega b}{2}$$

Для каждого из набора коэффициентов формула приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega}{2} \text{ для } (1,\ 1) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega}{2} \text{ для } (2,\ 1) \qquad \sqrt{\frac{8}{\pi}} \operatorname{sinc}^2 \omega \text{ для } (2,\ 2)$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b), которые мы задали перед выполнением задания.

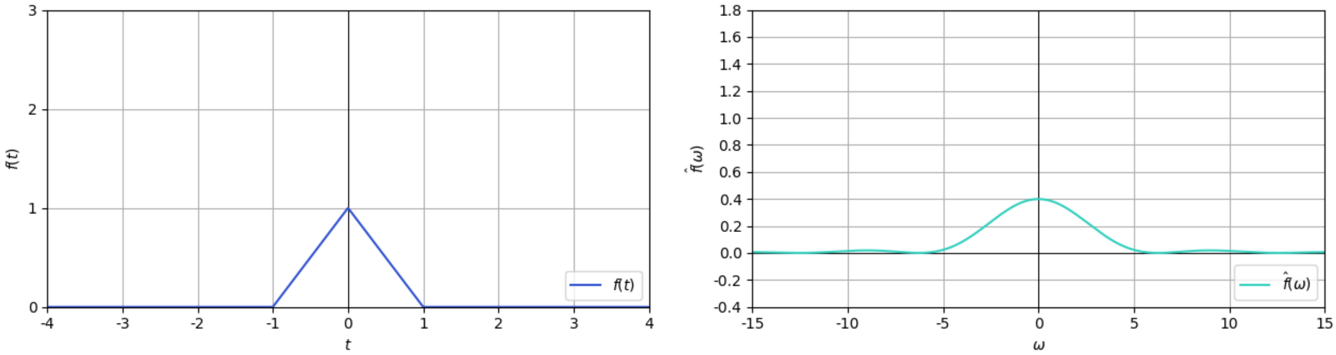

Рис. 4: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

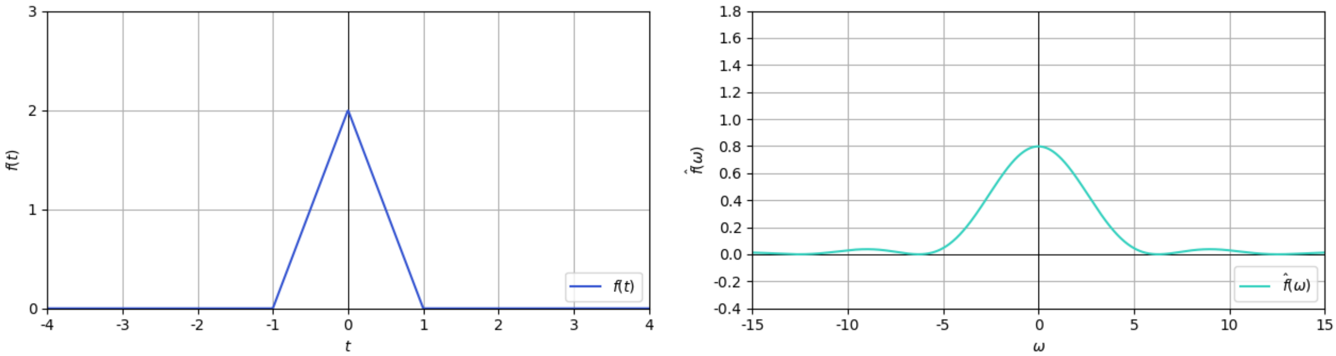

Рис. 5: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 1$

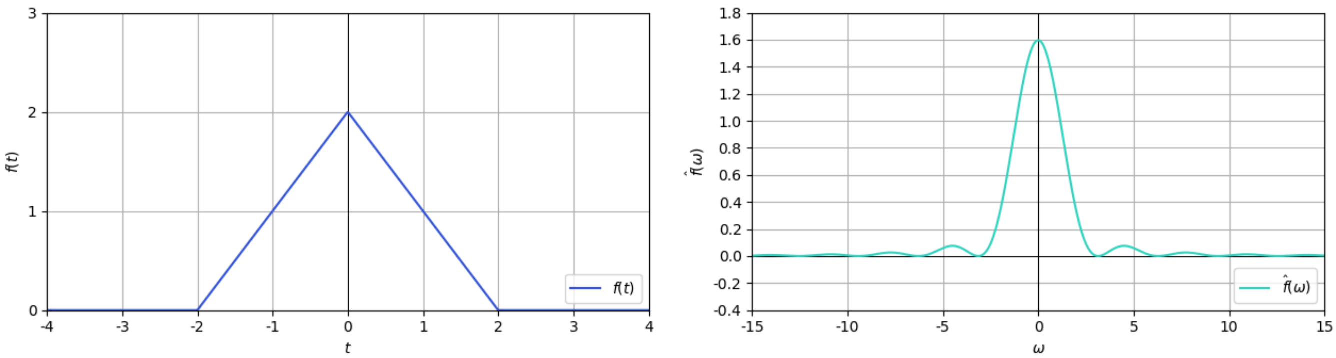

Рис. 6: Графики треугольной функции и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля для каждого из набора параметров a и b, использовав модификацию программы с прошлой лабороторной работы.

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000006
```

Листинг 4: $a = 1$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000025
```

Листинг 5: $a = 2$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000006
```

Листинг 6: $a = 2$, $b = 2$

При более низкой точности отклонение было бы нулевым, но тем не менее в последних разрядах всё ещё есть цифры ;)

В исходной функции b влияет на ширину основания треугольника, а a — на длину его высоты. И согласно формуле Фурье-образа, с изменением a изменяется амплитуда кардинального синуса, а изменение b приводит к изменению не только амплитуды, но и частоты. То же самое мы наблюдаем и на графиках.

Кардинальный синус

Итак, перед нами новая функция, для которой мы будем строить Фурье-образ: $f(t) = a \operatorname{sinc} bt$.

Предоставляю результат вычисления Фурье-образа в общем виде, выполненный в Wolfram Alpha:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}(bt)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(bt)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{a\pi}{\sqrt{2\pi}|b|} \begin{cases} 0 & {}^{b^2}\!/_{\omega^2} \leqslant 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 0 & -1 \leqslant {}^{b}\!/_{\omega} \leqslant 1 \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{a}{|b|} & \text{otherwise} \end{cases}$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b), которые мы задали перед выполнением задания.

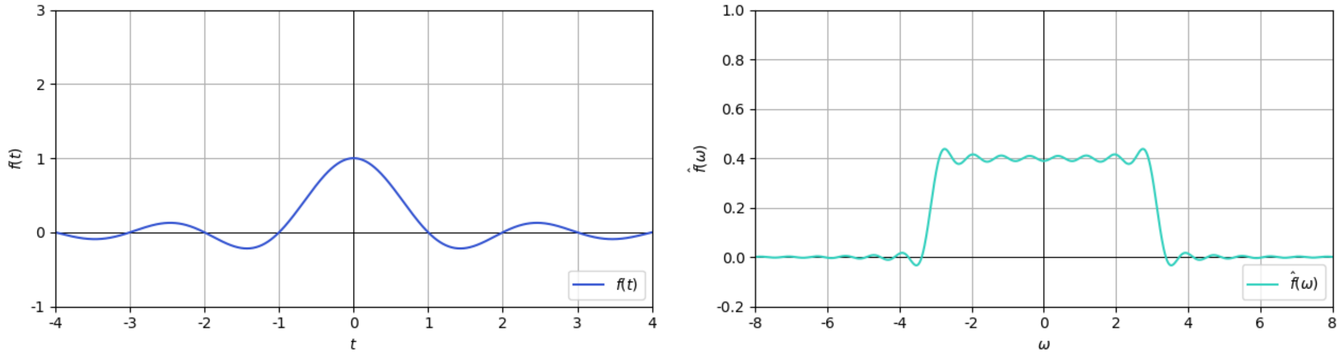

Рис. 7: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

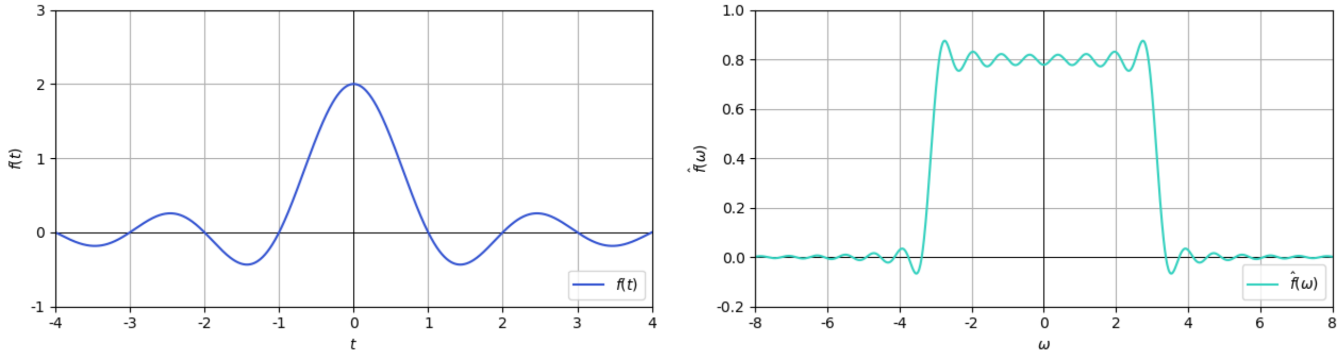

Рис. 8: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 1$

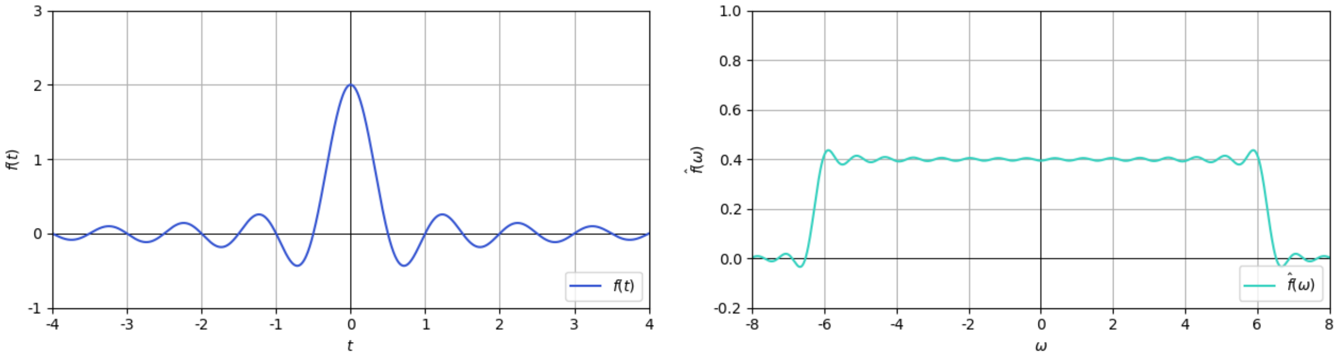

Рис. 9: Графики кардинального синуса и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля для каждого из набора параметров a и b, использовав модификацию программы с прошлой лабороторной работы.

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000002
```
Листинг 7: $a = 1$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000009
```
Листинг 8: $a = 2$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000002
```
Листинг 9: $a = 2$, $b = 2$

И, опять же, наблюдаем практически полное отсутствие отклонение по равенству Парсеваля.

Говоря о влиянии параметров a и b на вид исходной функции и Фурье-образа: параметр a прямо пропорционально влияет на амплитуду обеих функций, а параметр b прямо пропорционально влияет на частоту исходной функции и на ширину приподнятого участка Фурье-образа, а также обратно пропорционально влияет на амплитуду Фурье-образа. И, что примечательно, частота второй гармоники Фурье-образа остаётся неизменной. То же самое мы наблюдаем и на графиках.

Функция Гаусса

А теперь мы будем строить Фурье-образ для функции Гаусса: $f(t) = a\,\mathrm{e}^{-bt^2}$.

Предоставляю результат вычисления Фурье-образа в общем виде, выполненный в Wolfram Alpha:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{e}^{-bt^2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-bt^2 - i\omega t} dt = \frac{a\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-w^2/4b}}{\sqrt{2\pi b}} = \frac{a\,\mathrm{e}^{-w^2/4b}}{\sqrt{2b}}$$

Для каждого из набора коэффициентов формула приобретает следующий вид:

$$\frac{\mathrm{e}^{-w^2/4}}{\sqrt{2}} \text{ для } (1,\ 1) \qquad \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-w^2/4} \text{ для } (2,\ 1) \qquad \mathrm{e}^{-w^2/8} \text{ для } (2,\ 2)$$

Пришло время строить графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b), которые мы задали перед выполнением задания.

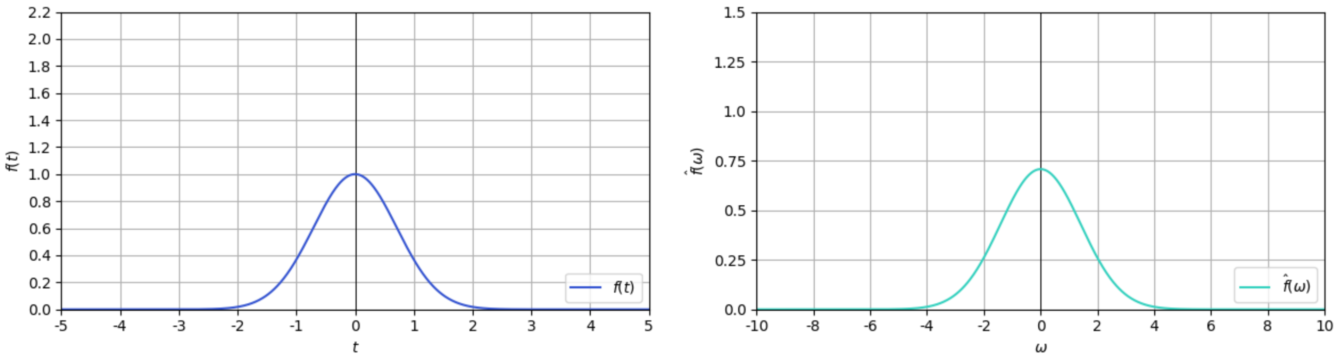

Рис. 10: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

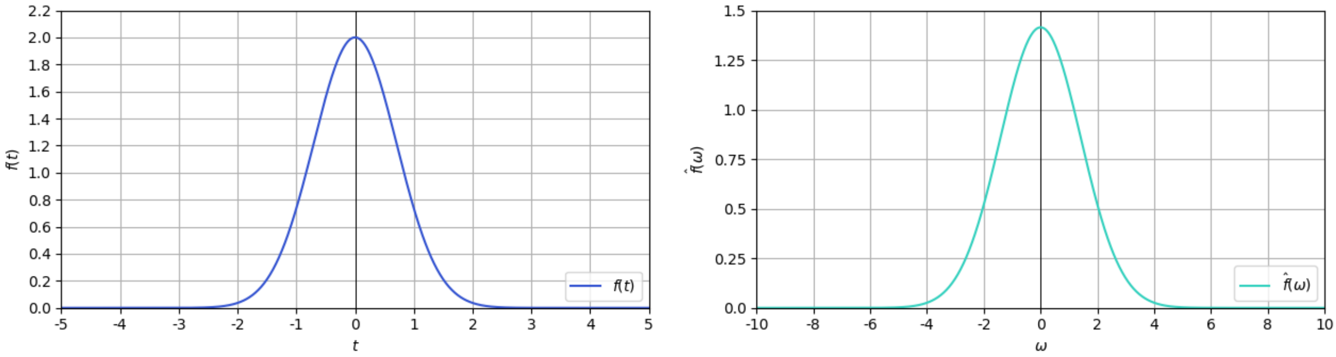

Рис. 11: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 1$

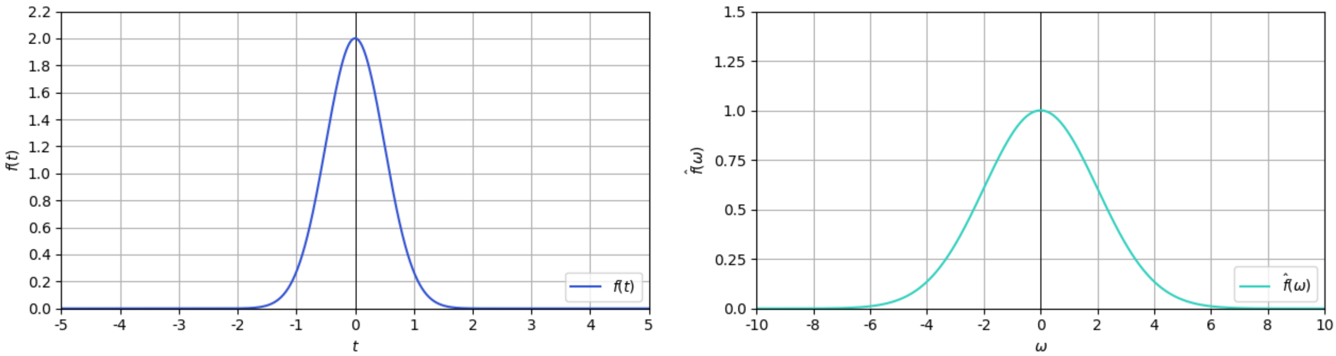

Рис. 12: Графики функции Гаусса и её Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля для каждого из набора параметров a и b, использовав модификацию программы с прошлой лаборотной работы.

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0008553
```

Листинг 10: $a = 1$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0034212
```

Листинг 11: $a = 2$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000000
```

Листинг 12: $a = 2$, $b = 2$

Наблюдаем низкое отклонение по равенству Парсеваля, что говорит о хорошем приближении Фурье-образа к исходной функции.

В исходной функции b обратно пропоционально влияет на её ширину, а a влияет прямо пропоционально на амплитуду. Для Фурье-образа с увеличением a растёт амплитуда, а изменение b прямо пропорционально изменяет её ширину и обратно пропорционально изменяет её амплитуду. То же самое мы наблюдаем и на графиках.

Двустороннее затухание

И перед нами последняя функция из тех, для которых строится вещественный Фурье-образ: $f(t) = a\,\mathrm{e}^{-b|t|}$.

Для начала выведем выражение для вычисление Фурье-образа в общем виде:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{e}^{-b|t|}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-b|t|-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t(b+i\omega)} dt + \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t(b-i\omega)} dt \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{t(b-i\omega)}}{b-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-t(b+i\omega)}}{b+i\omega}\bigg|_{\infty}^{0} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} - \cancel{\frac{e^{-\infty(b-i\omega)}}{b-i\omega}} + \frac{1}{b+i\omega} - \cancel{\frac{e^{-\infty(b+i\omega)}}{b+i\omega}} \right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)} = \frac{ab}{(b^2+\omega^2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

И теперь построим графики исходной функции и её Фурье-образа для каждой из пар значений (a, b), которые мы задали перед выполнением задания.

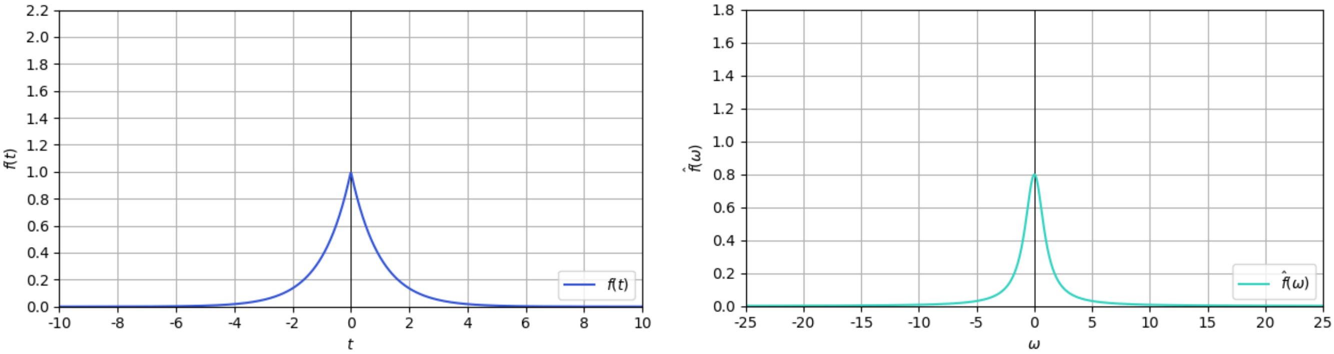

Рис. 13: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 1$ и $b = 1$

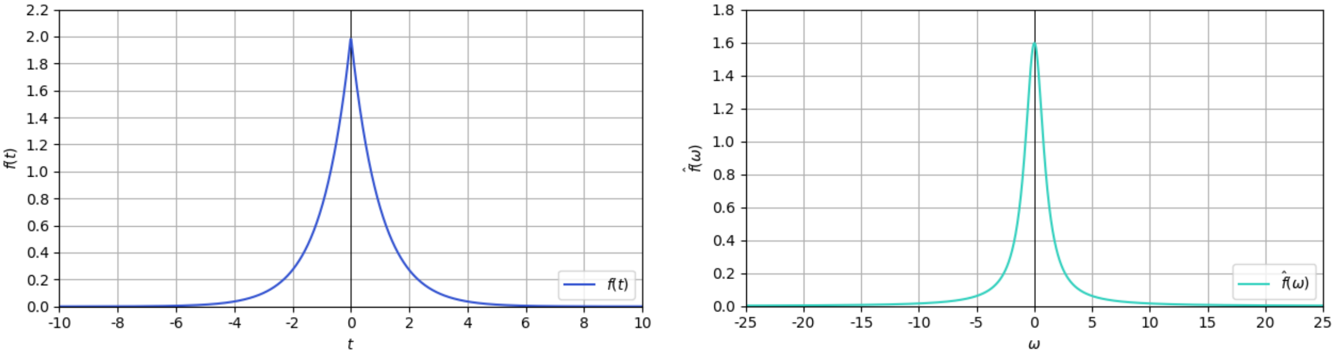

Рис. 14: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 1$

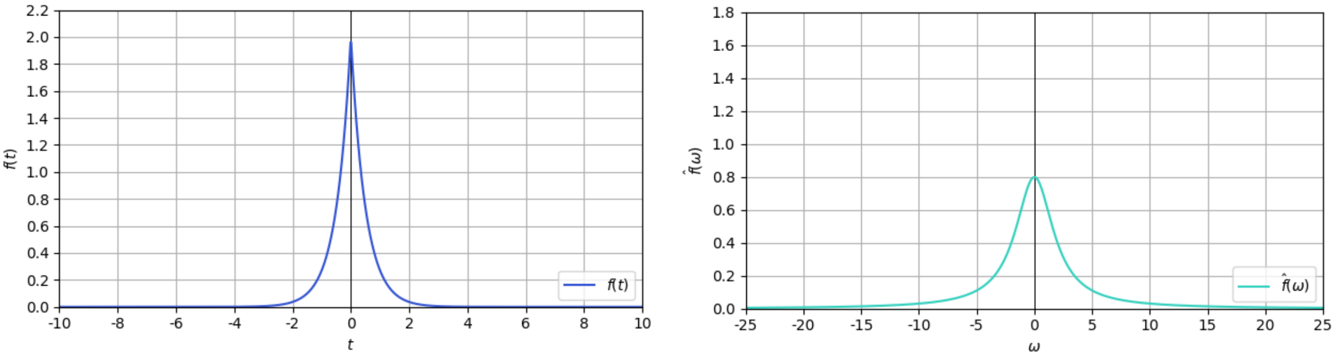

Рис. 15: Графики двустороннего затухания и его Фурье-образа для $a = 2$ и $b = 2$

Теперь проверим выполнение равенства Парсеваля для каждого из набора параметров a и b, использовав модификацию программы с прошлой лаборотной работы.

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0008574
```

Листинг 13: $a = 1$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0034297
```

Листинг 14: $a = 2$, $b = 1$

```
Parseval deviation:
| ||f||^2 - ||F||^2 | = 0.0000153
```

Листинг 15: $a = 2$, $b = 2$

И вновь перед нами низкое отклонение по равенству Парсеваля, что говорит о хорошем приближении Фурье-образа к исходной функции.

В исходной функции b влияет на ширину основания треугольника, а a — на длину его высоты. И согласно формуле Фурье-образа, с изменением a изменяется амплитуда кардинального синуса, а изменение b приводит к изменению не только амплитуды, но и частоты. То же самое мы наблюдаем и на графиках.

Задание №2. Комплексное преобразование

В этом задании, как и в предыдущем, нам понадобится унитарное преобразование Фурье к угловой частоте. Мы будем сдвигать треугольную функцию вправо и влево — для этого возьмём два положительных и два отрицательных коэффициента $c = \{-5, -2, 3, 4\}$. И зафиксируем у треугольной функции $a = 1$ и $b = 2$. Тогда функция к рассмотрению следующая:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t/2|, & |t| \leqslant 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

Определим функцию $g(t) = f(t + c)$. Тогда с учётом выше заданного набора c она приобретает такой вид:

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t-5}{2}\right|, & |t-5| \leqslant 2 \\ 0, & |t-5| > 2 \end{cases} \text{ для } c = -5 \qquad g(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t-2}{2}\right|, & |t-2| \leqslant 2 \\ 0, & |t-2| > 2 \end{cases} \text{ для } c = -2$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t+3}{2}\right|, & |t+3| \leqslant 2 \\ 0, & |t+3| > 2 \end{cases} \text{ для } c = 3 \qquad g(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t+4}{2}\right|, & |t+4| \leqslant 2 \\ 0, & |t+4| > 2 \end{cases} \text{ для } c = 4$$

Но преобразовывать функцию к Фурье-образу мы будем в общем виде $f(t + c)$ и только затем уже подставлять конкретные значения c:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{2} \left(1 - \left|\frac{t+c}{2}\right|\right) \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{2} \left(1 - \left|\frac{t}{2}\right|\right) \mathrm{e}^{-i\omega(t-c)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right) \mathrm{e}^{-i\omega(t-c)} dt + \int\limits_{-2}^{0} \left(1 + \frac{t}{2}\right) \mathrm{e}^{-i\omega(t-c)} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{(i\omega(t+2)+1)\,\mathrm{e}^{i\omega(c-t)}}{2\omega^2} \Bigg|_{-2}^{0} - \right.$$

$$\left. - \frac{(i\omega(t-2)+1)\,\mathrm{e}^{i\omega(c-t)}}{2\omega^2} \Bigg|_{0}^{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\,\mathrm{e}^{i\omega c} - \mathrm{e}^{i\omega(c-2)} - \mathrm{e}^{i\omega(c+2)}}{2\omega^2} \right) = \frac{-\mathrm{e}^{i\omega c}}{2\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(\mathrm{e}^{-2i\omega} + \mathrm{e}^{2i\omega} - 2\right) =$$

$$= \left[\mathrm{e}^{2i\omega} + \mathrm{e}^{-2i\omega} = 2\cos 2\omega\right] = \frac{\mathrm{e}^{i\omega c}(2 - 2\cos 2\omega)}{2\omega^2\sqrt{2\pi}} = \left[2 - 2\cos 2\omega = 4\sin^2\omega\right] = \frac{4\,\mathrm{e}^{i\omega c}\sin^2\omega}{2\omega^2\sqrt{2\pi}} = \frac{2e^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^2\omega$$

Сравнивая с Фурье-образом треугольной функции без сдвигов при тех же коэффициентах выясняем, что разница между $\hat{f}(\omega)$ и $\hat{g}(\omega)$ в множителе $e^{i\omega c}$, который как раз и придаёт Фурье-образу комплексные свойства.

Рассмотрим графики функции $g(t)$ с разными сдвигами:

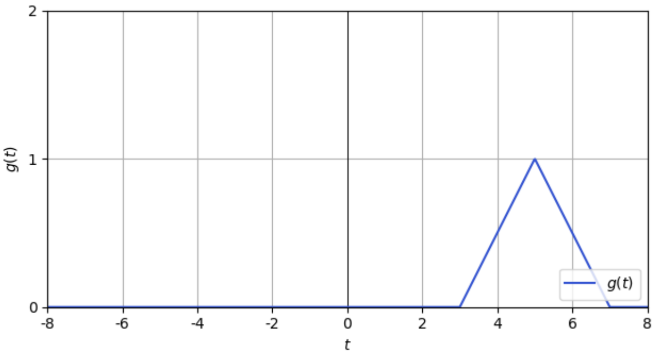

Рис. 16: График функции $g(t)$ со сдвигом $c = -5$

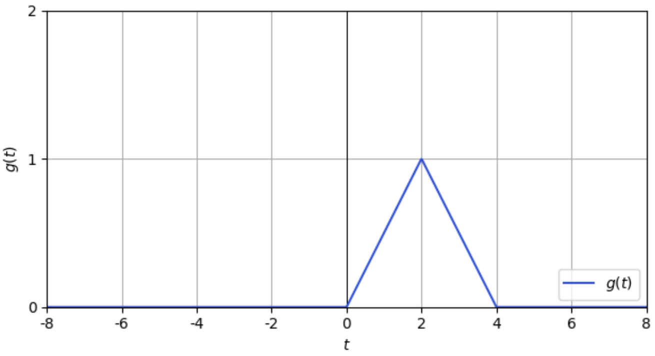

Рис. 17: График функции $g(t)$ со сдвигом $c = -2$

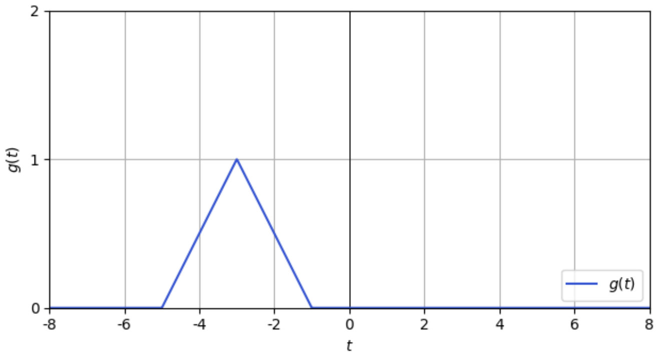

Рис. 18: График функции $g(t)$ со сдвигом $c = 3$

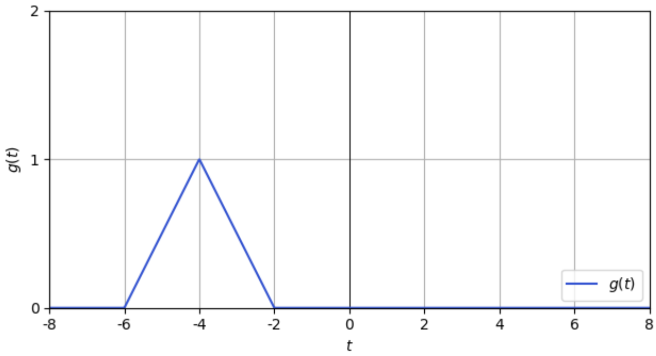

Рис. 19: График функции $g(t)$ со сдвигом $c = 4$

И теперь построим для каждого из сдвигов c графики с действительной и мнимой частями Фурье-образа и модулем Фурье-образа.

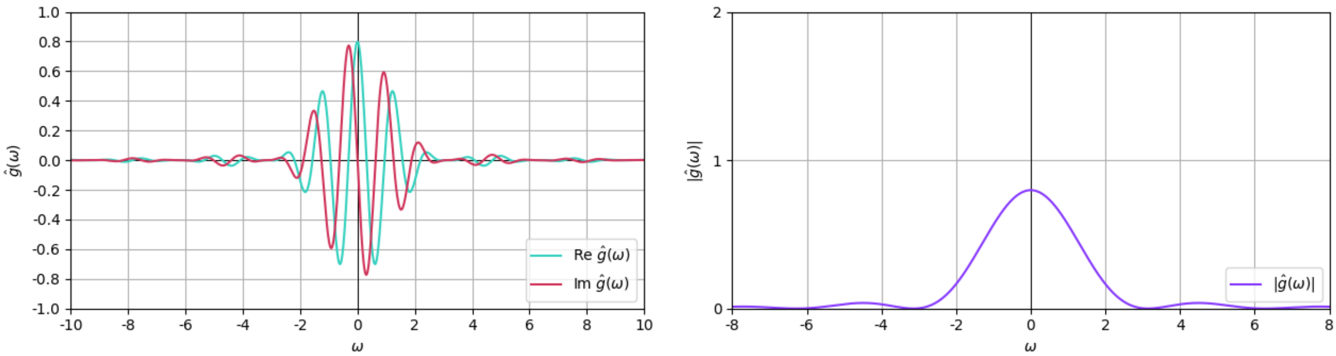

Рис. 20: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = -5$

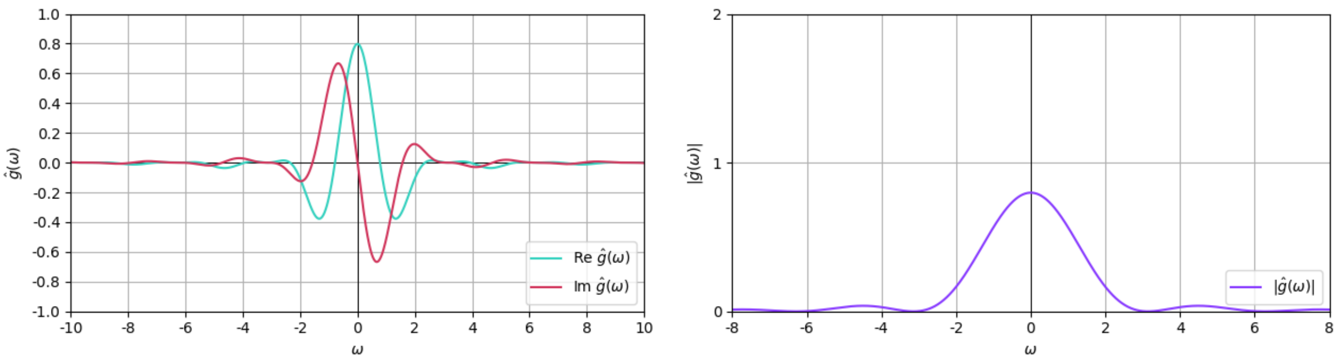

Рис. 21: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = -2$

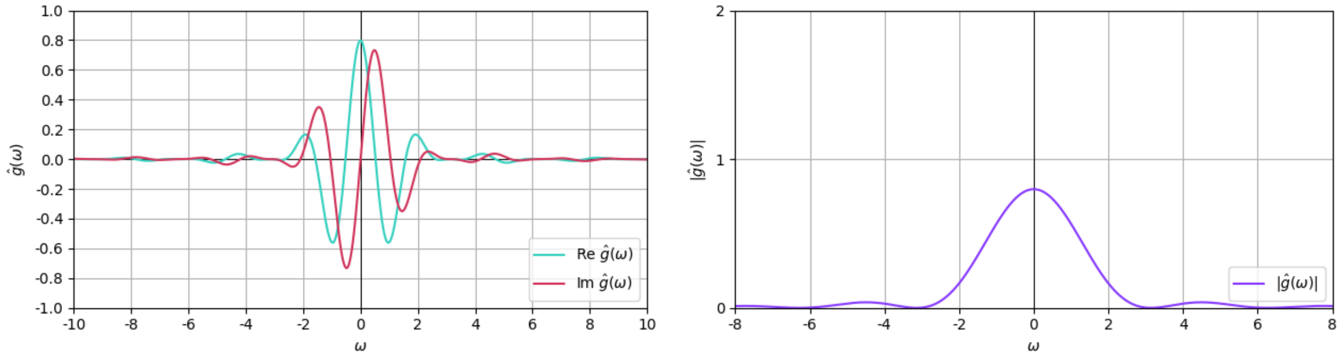

Рис. 22: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = 3$

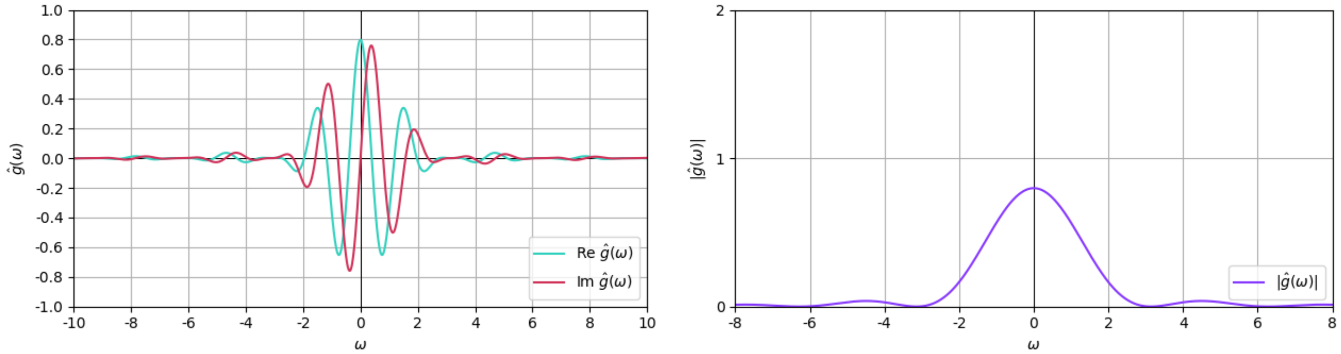

Рис. 23: Графики Фурье-образа для исходной функции со сдвигом $c = 4$

Как мы видим, амплитуды действительной и мнимой части Фурье-образа остаются неизменными, а вот чем больше $|c|$, тем выше частота $\operatorname{Re}\hat{g}(\omega)$ и $\operatorname{Im}\hat{g}(\omega)$. В зависимости от знака коэффициента c мнимая часть Фурье-образа находится либо справа ($c > 0$), либо слева ($c < 0$) от оси ординат. Вещественная часть Фурье-образа при этом симметрична относительно оси ординат.

Обратим внимание на модуль Фурье-образа. Он равен при всех сдвигах исходной функции и похож на вещественный Фурье-образ функции, как если бы она не была сдвинута.

Задание №3. Музыкальное преобразование

Перед началом выполнения задания обозначим унитарное преобразование Фурье к обычной частоте ν:

$$\hat{f}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,dt \qquad \leftrightarrows \qquad f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu)\,\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}\,d\nu \;\; \text{(обратное преобразование)}$$

Для обработки я выбрал аккорд №2 и с помощью библиотеки `librosa` в **Python** я преобразовал сигнал из аудиофайла в набор амплитуд, которые мы теперь можем проанализировать.

В целях упрощения работы с аудиофайлом, в нём предварительно была вырезана лишняя тишина в начале и в конце, а также аудиодорожка была нормализована, чтобы общий уровень громкости поднялся.

Теперь посмотрим на график зависимости времени от амплитуды:

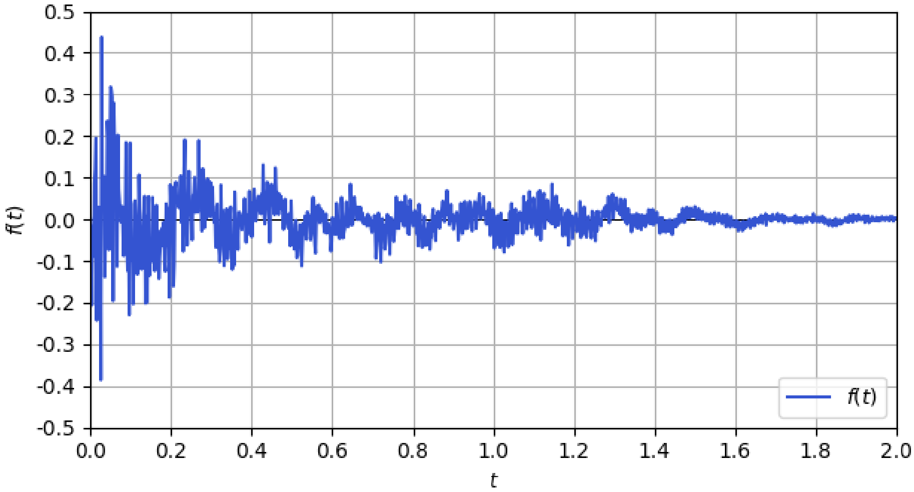

Рис. 24: График зависимости амплитуды от времени

Ну что ж, применим преобразование Фурье к нашему аудиосигналу и посмотрим на модуль получившегося Фурье-образа:

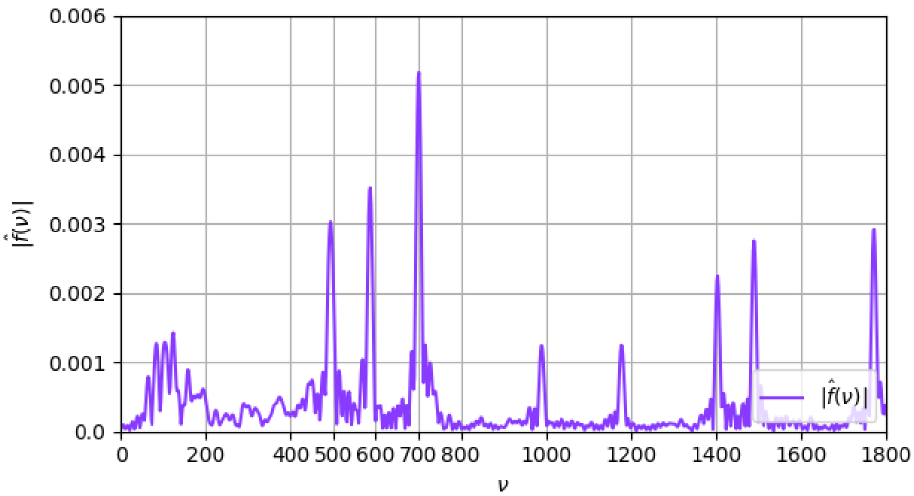

Рис. 25: Модуль Фурье-образа аудиосигнала

На графике я выделил, что на частотах, близких к 500, 600 и 700 Гц находятся пики, которые вероятнее всего определяют аккорд. Уточняем частоты по таблице частот и нот: B4 на частоте 493.88 Гц, D5 на частоте 587.32 Гц и F5 на частоте 698.46 Гц — именно из таких нот состоит аккорд. Убедиться в этом можно, прослушав мою запись каждой из трёх нот по отдельности. И, если мне не изменяет память, это трезвучие Bdim.