ДЗ №2.

1. Проверим замкнутость отн. умножение на скаляр и сложение

а) $p_1 = \alpha_1 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \gamma_1 \quad p_2 = \alpha_2 x^m + \beta_2 x^{m-1} + \ldots + \gamma_2 \quad (p_1, p_2 \in P_m)$

- сложение

  $p_1 + p_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) x^m + (\beta_1 + \beta_2) x^{m-1} + \ldots + (\gamma_1 + \gamma_2) \quad p_3 \in P_m$ ✓
- умножение на скаляр

  $\Delta p_1 = \Delta \alpha_1 x^m + \Delta \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \Delta \gamma_1 = p_4 \quad p_4 \in P_m$ ✓

б) $f_1(x), f_2(x) \in A_p : \{ f(x) \mid f(x) \in P_n,\ f(1) = f(-1) = 0 \}$

- сложение (по н.а степень не изменится)

  $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$:

  $$\left.\begin{array}{l} - f_3(1) = f_1(1) + f_2(1) = 0 + 0 = 0 \\ - f_3(-1) = f_1(-1) + f_2(-1) = 0 + 0 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f_3 \in A_p \ ✓$$

  $$\left.\begin{array}{l} - f_4(1) = \alpha f_1(1) = 0\alpha = 0 \\ - f_4(-1) = \alpha f_1(-1) = 0\alpha = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f_4 \in A_p \ ✓$$

в) $f_1(x), f_2(x) \in B_p : \{ f(x) \mid f(x) \in P_n,\ f(0) = f(1) \}$

- сложение (по н.а степень не изменится)

  $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$

  $$\left.\begin{array}{l} - f_3(1) = f_1(1) + f_2(1) \\ - f_3(0) = f_1(0) + f_2(0) \end{array}\right| \Rightarrow f_3(1) = f_1(1) + f_2(1) = f_1(0) + f_2(0) = f_3(0)$$

  $$\Downarrow$$

  $$f_3 \in B_p \ ✓$$
- умножение на скаляр (по н.а степень не изменится)

  $f_4(x) = \alpha f_1(x)$

  $$\left.\begin{array}{l} - f_4(1) = \alpha f_1(1) \\ - f_4(0) = \alpha f_1(0) \end{array}\right| \Rightarrow f_4(1) = \alpha f_1(1) = \alpha f_1(0) = f_4(0) \Rightarrow f_4 \in B_p \ ✓$$

Ответ: $\boxed{\text{а) да б) да в) да}}$

2. Составим из векторов матрицу и вычислим их ранг

1. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rank $= 2 \Rightarrow$ ЛЗ, базис $\{a, b\}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rank $= 2 \Rightarrow$ ЛЗ, базис $\{a, b\}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ rank $= 3 \Rightarrow$ ЛНЗ, базис $\{a, b, c\}$.

3.

1. $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2v & & & -1v \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$

   $\boxed{\begin{array}{l} \text{Range}\, A = \text{Span}(\{1; -1; -2; 2\}^T) \\ \text{rank}\, A = \dim(\text{Range}\, A) = 1 \end{array}}$

   Решим уравнение:

   $2x_1 + x_3 + x_4 = 0$

   $\Updownarrow$

   $x_3 = -2x_1 + 0x_2 - x_4$

   $\boxed{\begin{array}{l} \text{Nullspace}\, A = \text{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \\ \text{nullity}\, A = \dim(\text{Nullspace}\, A) = 3 \end{array}}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{Range}\, B = \text{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right) \quad \text{rank}\, B = 2.}$

   Решим систему:

   $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$

   $\boxed{\text{Nullspace}\, B = \text{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \quad \text{nullity}\, B = 2.}$

4. 1) Матрицы с неполным рангом 2x2 в общем виде выглядят так:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

a, b - любые числа

Для матриц с коэф. -1, 0 и 1 получаем всего $3^4 = 81$ матриц.

Матриц с неполным рангом: $4\begin{bmatrix} \pm1 & 0 \\ \pm1 & 0 \end{bmatrix}, 4\begin{bmatrix} 0 & \pm1 \\ 0 & \pm1 \end{bmatrix}, 4\begin{bmatrix} \pm1 & \pm1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm1, & \pm1 \end{bmatrix}$

$8\begin{bmatrix} \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 \end{bmatrix}, 8\begin{bmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ с учётом всех поворотов, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Итого: 33.

Тогда вероятность, что ранг неполный: $\frac{33}{81} = \frac{33}{81} \approx \boxed{0.4074 = 40.74\%}$

2) Воспользуемся чудом инженерной мысли — Python:

main.py

```python
import numpy as np

counter = 0
for a in -1, 0, 1:
    for b in -1, 0, 1:
        for c in -1, 0, 1:
            for d in -1, 0, 1:
                for e in -1, 0, 1:
                    for f in -1, 0, 1:
                        if np.linalg.matrix_rank([[a, b, c], [d, e, f]]) == 2:
                            counter += 1
print(f'{counter}/{3**6}')
```

Console — Run — 831ms on 11:23:01 pm, Oct 08, 2023

```
624/729
```

$\frac{624}{729} \approx \boxed{0.856 = 85,6\%}$

https://replit.com/@PaveTranquil/PracticalLinalgHW2

ссылка на код