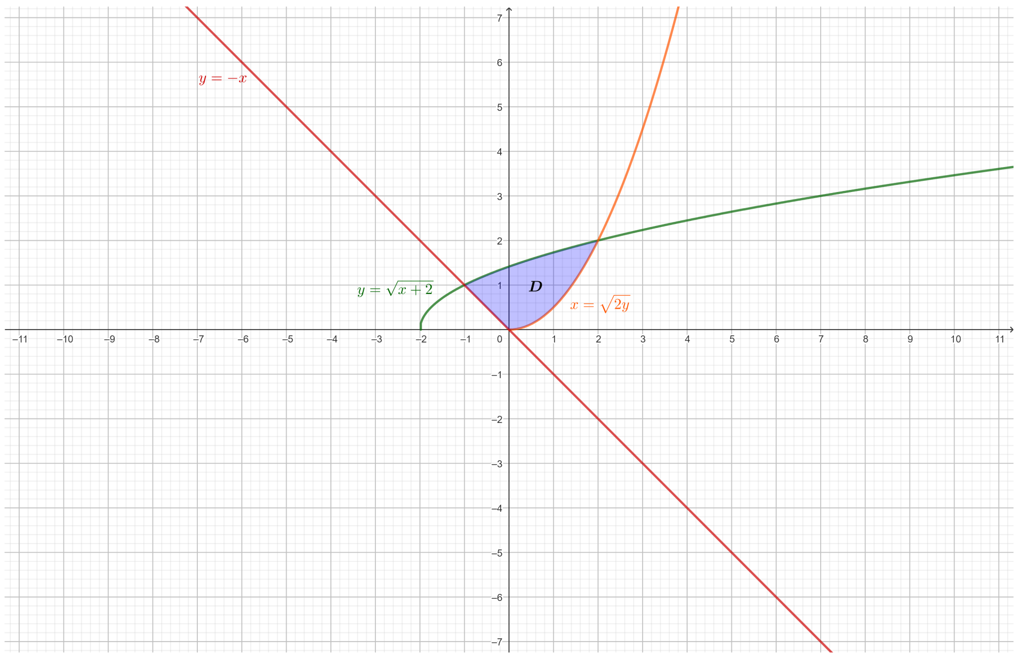
Задание №1

1. Область D ограничена функциями $y = \sqrt{x+2}$, $y = {}^{x^2}/_2$, $y = -x$. Получаем следующий схематический рисунок, на котором эта область выделена цветом и буквой:



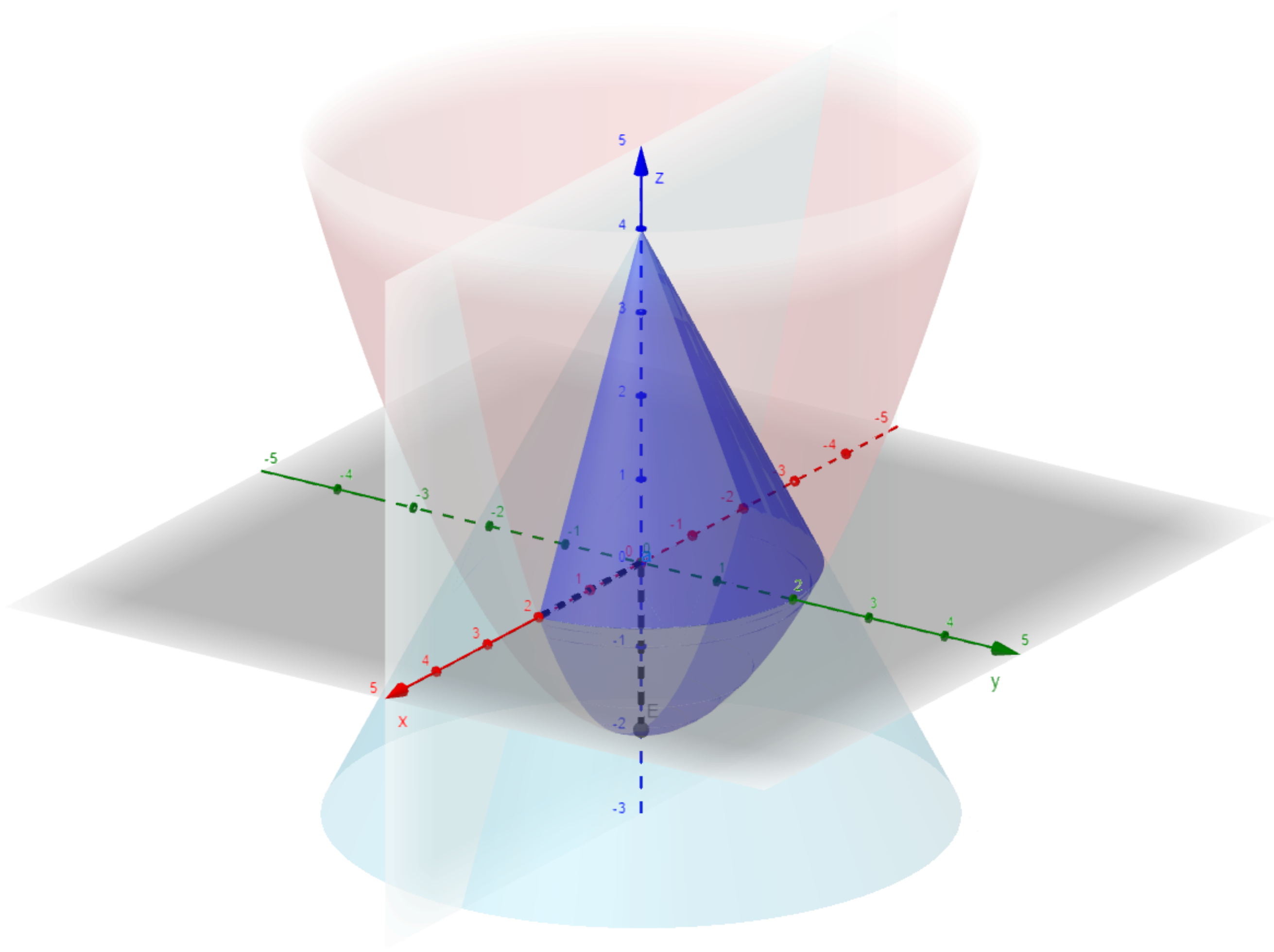
2. Разобъём область на две прямой $x = 0$ и получим области $-1 \le x \le 0$ и $0 \le x \le 2$, а по y-координате будем брать интеграл от функций:

$$S_D = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{x+2}} dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2/2}^{\sqrt{x+2}} dy = \int\limits_{-1}^{0} (\sqrt{x+2} + x) dx + \int\limits_{0}^{2} \left(\sqrt{x+2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2(x+2)\sqrt{x+2}}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{2(x+2)\sqrt{x+2}}{3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_{0}^{2} = \cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3}} - \frac{7}{6} + 4 - \cancel{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \boxed{\frac{17}{6}}$$

Задание №2

1. Тело T ограничено функциями $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{x^2+y^2}{2} - 2$, $y = 0$. На все функции наложено ограничение $y \ge 0$. Получаем следующий схематический рисунок, на котором конус — первая функция, параболоид — вторая, а плоскость — третья, и кроме этого, конечно, синим выделено интересующее нас тело, объём которого нам необходимо найти:



2. Наблюдается тело вращения в рамках развёрнутого угла, поэтому перейдём к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Якобиан перехода будет равен r, поэтому интеграл объёма будет выглядеть так: $V = \iiint\limits_T r\,dr\,d\varphi\,dz$.

Вот как будут выглядеть после такого перехода уравнения:

- конуса — $z = 4 - 2\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = 4 - 2r$
- параболоида — $z = \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{2} - 2 = \frac{r^2}{2} - 2$
- неравенство $y \geq 0$ даст нам $r\sin\varphi \geq 0 \Rightarrow \sin\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$

Найдём линию пересечения параболоида и конуса:

$$\begin{cases} z = 4 - 2r \\ z = \frac{r^2}{2} - 2 \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - 2r \\ 4 - 2r = \frac{r^2}{2} - 2 \\ r \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Итак, нам известны пределы φ, пределы r и для интегрирования мы выбираем две функции, образующие тело вращения, т.е. $\frac{r^2}{2} - 2 \leq z \leq 4 - 2r$. Вычислим интеграл, чтобы найти объём:

$$V = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}-2}^{4-2r} dz = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^2 \left(-\frac{r^3}{2} - 2r^2 + 6r\right) dr = \int\limits_0^\pi \left(-\frac{r^4}{8} - \frac{2r^3}{3} + 3r^2\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{14}{3} d\varphi = \boxed{\frac{14\pi}{3}}$$

Задание №3

а) Для кривой, заданой уравнением $y = \ln(x^2 - 1)$ с $\rho(x, y) = 1, x_1 = 3, x_2 = 5$ масса M дуги может быть вычислена с помощью криволинейного интеграла первого рода:

$$M = \rho(x,y) \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int\limits_3^5 \sqrt{1 + \left((\ln(x^2-1))'\right)^2} = \int\limits_3^5 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^4 - 2x^2 + 1}} = \left(x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_3^5 =$$

$$= 2 + \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \boxed{2 + \ln\frac{4}{3}}$$

б) Для кривой, заданной параметрическим способом $x = e^t;\ y = e^{-t}$ с плотностью вещества $\rho(x, y) = \frac{3x^2}{y^3}$, массу её дуги в значениях $t_1 = \frac{1}{4}\ln 8, t_2 = \frac{1}{4}\ln 24$ можно вычислить с помощью всё того же криволинейного интеграла первого рода, но т.к. $x' \neq 1$, то:

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho(x,y)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int\limits_{1/4\ln 8}^{1/4\ln 24} \frac{3e^{2t}}{e^{-3t}}\sqrt{e^{2t} - e^{-2t}}\,dt = \int\limits_{1/4\ln 8}^{1/4\ln 24} 3\sqrt{e^{12t} - e^{8t}}\,dt = \frac{1}{2}\left((e^{4t} - 1)\sqrt{e^{4t} - 1}\right)\Bigg|_{1/4\ln 8}^{1/4\ln 24} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((e^{\ln 24} - 1)\sqrt{e^{\ln 24} - 1} - (e^{\ln 8} - 1)\sqrt{e^{\ln 8} - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(23\sqrt{23} - 7\sqrt{7}\right) = \boxed{\frac{23\sqrt{23} - 7\sqrt{7}}{2}}$$

Задание №4

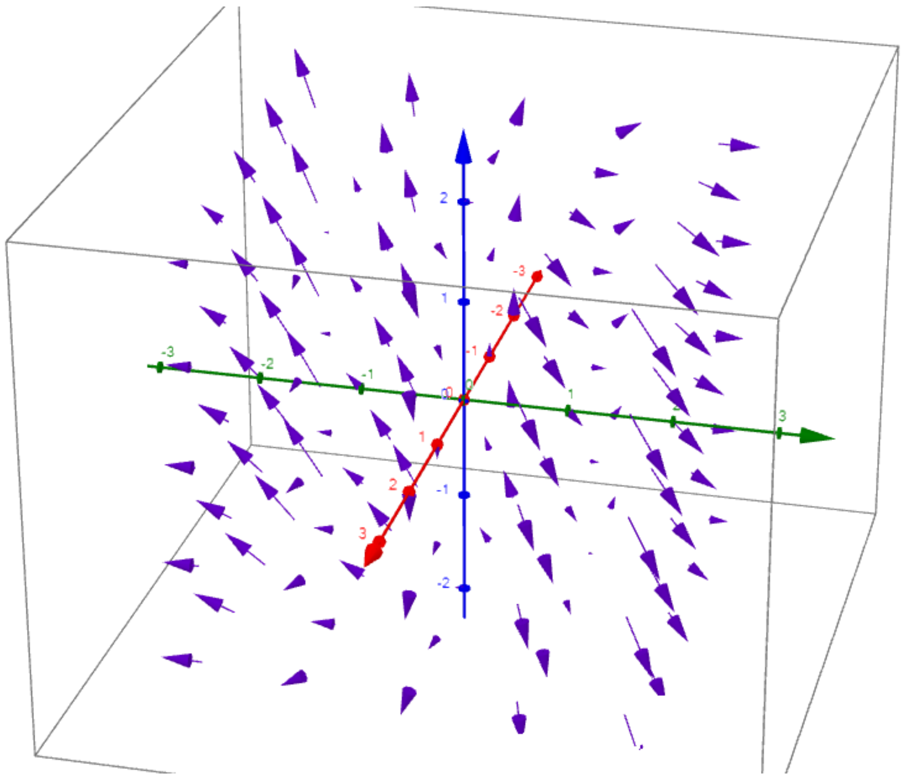
Задание не сильно отличается от п. б предыдущего задания. Для материальной кривой в пространстве мы всё так же подставляем в функцию плотности вещества каждое из уравнений, а под корнем берутся квадраты производных уже трёх функций:

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho(x,y,z)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{7(t^2+1)}\sqrt{(3\sqrt{7}t)^2}\,dt = \frac{3\sqrt{7}}{7}\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1} = \frac{3\sqrt{7}}{14}\ln(t^2+1)\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

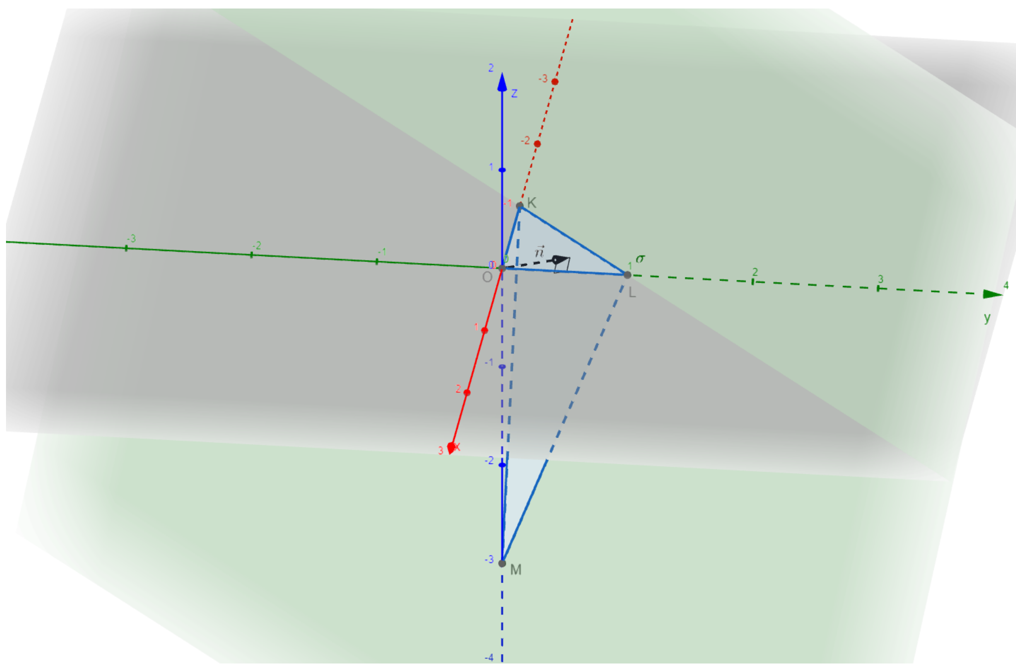
$$= \frac{3\sqrt{7}}{14}\left(\ln 4 - \ln\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{7}\ln 3}{14}}$$

Задание №5

Нам дано векторное поле $\vec{a} = (3y+z)\vec{j} - 3(x+y)\vec{k}$ и плоскость $\sigma\colon 3x - 3y + z = -3$. Представлю в декартовом пространстве векторное поле, чтобы не возвращаться к его визуализации далее в пунктах задания (плоскость визуализируем в п. **1**):



1. Чтобы найти поток Q поля $\vec{a}$ через поверхность S, образованной $\triangle KLM$, нам понадобится в первую очередь скромная визуализация, а затем поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$, где $\vec{n}$ — нормаль плоскости σ, направленная из начала координат. И вот как это всё выглядит на рисунке:



Плоскость σ пересекает ось Oz в точке M, ось Oy — в точке L и ось Ox — в точке K. И теперь необходимо разобраться в интеграле. $\vec{a}$ выражается своими составляющими $a_y = 3y + z$ и $a_z = -3(x + y)$, а $\vec{n}$ можно представить как вектор, отклонённый на углы α, β, γ от осей Ox, Oy и Oz соответственно. И тогда скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n} = a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma$ (произведение $a_x \cos\alpha$ отсутствует, т.к. $a_x = 0$).

Мы будем проецировать всё на плоскость Oxy, поэтому нам понадобятся функции $p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ (здесь z — уравнение плоскости σ, решённое относительно этой переменной), благодаря которым мы сможем ввести функцию $D(x, y) = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}$. И с этой функцией дифференциал dS можно представить как $dS = D(x, y)\, dxdy$, а $\cos\beta = \frac{-q(x,y)}{\pm D(x,y)}$ и $\cos\gamma = \frac{1}{\pm D(x,y)}$. Знак $\pm$ перед $D(x, y)$ выбирается в зависимости от того, какой угол образует нормаль с осью Oz — в формулы ставится $+$, если он острый, и в нашем случае ставится $-$.

Найдём $p(x, y)$, $q(x, y)$ и $D(x, y)$:

$$p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = (3y - 3x - 3)'_x = -3 \qquad q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = (3y - 3x - 3)'_y = 3$$

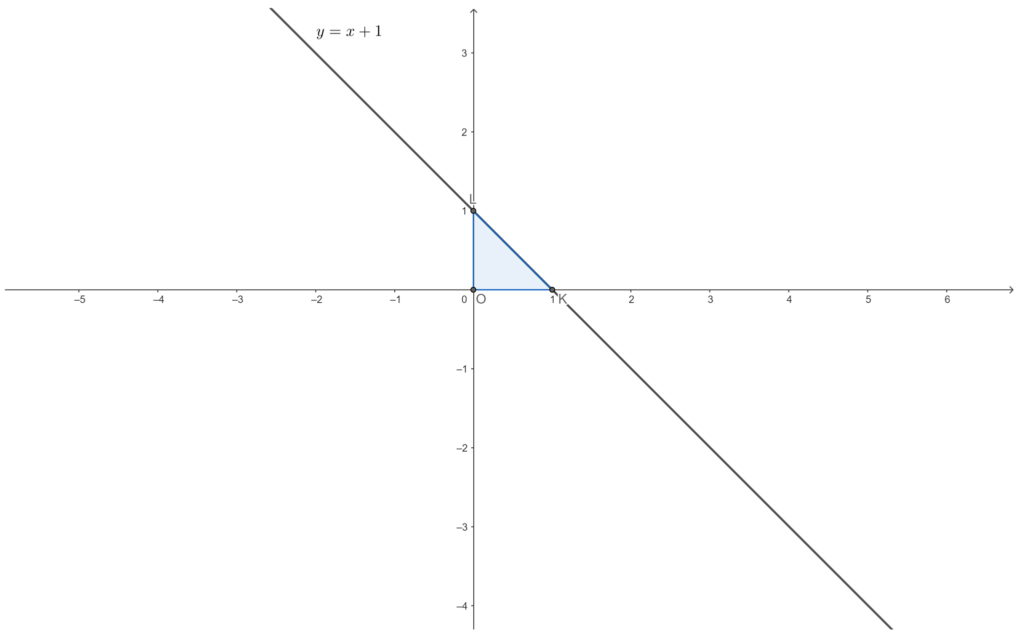
$$D(x, y) = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$$

Преобразуем в соответствии с полученной информацией наш поверхностный интеграл в интеграл по площади $\triangle OKL$ — спроецированный $\triangle KLM$ на плоскость Oxy, заменив на последнем шаге z на уравнение плоскости σ, решённое относительно этой переменной:

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iint\limits_S (a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS = \iint\limits_{OKL} \cancel{D(x,y)}\left((3y+z)\frac{q(x,y)}{\cancel{D(x,y)}} + \frac{3(x+y)}{\cancel{D(x,y)}}\right)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{OKL} (3(3y+z) + 3(x+y))\ dxdy = 3\iint\limits_{OKL} (x+4y+z)\ dxdy = 3\iint\limits_{OKL} (7y-2x-3)\ dxdy$$

Нам остаётся только определить пределы интегрирования. Для этого посмотрим, какая прямая соответствует гипотенузе спроецированного $\triangle OKL$:



По оси Ox интегрируем от -1 до 0 и по оси Oy — от 0 до $x+1$:

$$3\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} (7y-2x-3)\ dy = 3\int\limits_{-1}^{0} dx\left(\frac{7y^2}{2} - 2xy - 3y\right)\Bigg|_0^{x+1} = 3\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}\right)\,dx = -3\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{0}$$

2. Формула Остроградского-Гаусса для вычисления потока Q векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность T выглядит так: $Q = \iiint\limits_T \mathrm{div}\vec{a}\,dv$. Посчитаем дивергенцию:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial(3y+z)}{\partial y} + \frac{\partial(-3(x+y))}{\partial z} = 3$$

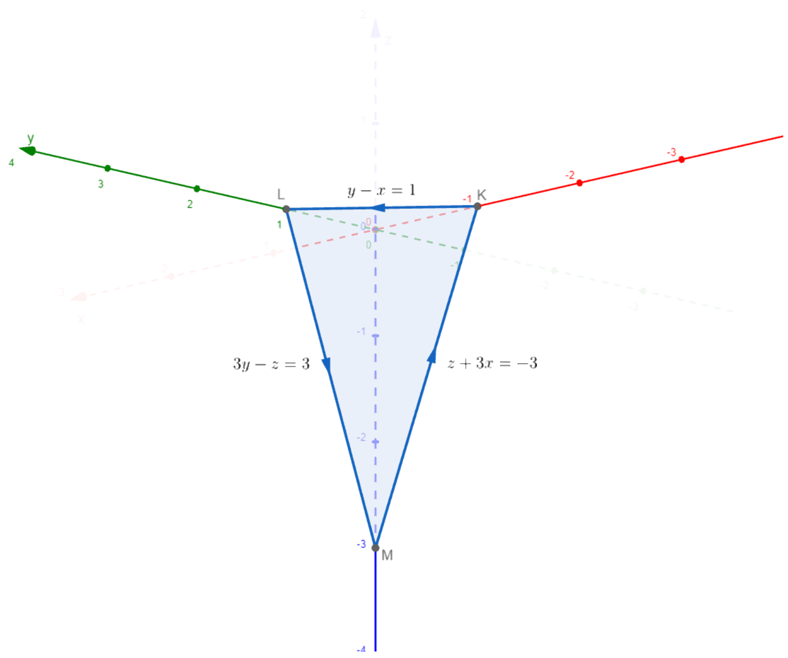
Теперь интеграл принимает вид $Q = 3\iiint\limits_T dv = 3V_T$. Объём тетраэдра вычислим по формуле:

$$V_T = \frac{1}{6}\cdot OM\cdot OK\cdot OL = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad Q = 3\cdot\frac{1}{2} = \boxed{1.5}$$

3. Для вычисления циркуляции C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $l = KLMK$ необходим криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int\limits_l \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_l a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \int\limits_l (3y+z)\,dy - 3(x+y)\,dz$$

Думаю, тут необходимо продемонстрировать контур, чтобы было понятно, каким образом нужно считать:



Теперь с таким интегралом пройдёмся по каждой составляющей контура, чтобы найти сумму $C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK}$:

1. I_{KL}: $\begin{cases} z = 0 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ с пределами интегрирования $0 \le y \le 1$ подставим в интеграл $I_{KL} = \int\limits_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2}$.

2. I_{LM}: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ dz = 3dy \\ z = 3y - 3 \end{cases}$ с пределами $1 \ge y \ge 0$ подставим в интеграл $I_{LM} = \int\limits_1^0 (-3y - 3)\,dy = \frac{9}{2}$.

3. I_{MK}: $\begin{cases} y = 0 \\ z = -3x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \\ dz = -3dx \end{cases}$ с пределами $0 \ge x \ge -1$ подставим в интеграл $I_{MK} = \int\limits_0^{-1} 9x\,dx = \frac{9}{2}$.

Общей циркуляцией C поля будет сумма $C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{10.5}$.

Задание №6

Дано векторное поле $\vec{a} = 2x(y+z)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (x^2 - z^2 + 3)\vec{k}$.

1. Проверим, является ли векторное поле соленоидальным — то есть равна ли дивергенция поля нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(2x(y+z))}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 - z^2 + 3)}{\partial z} = \cancel{2y} + \cancel{2z} - \cancel{2y} - \cancel{2z} = 0$$

$\boxed{\text{Поле соленоидальное.}}$

Проверим, является ли векторное поле потенциальным — для этого необходимо выяснить, равен ли ротор поля нулю:

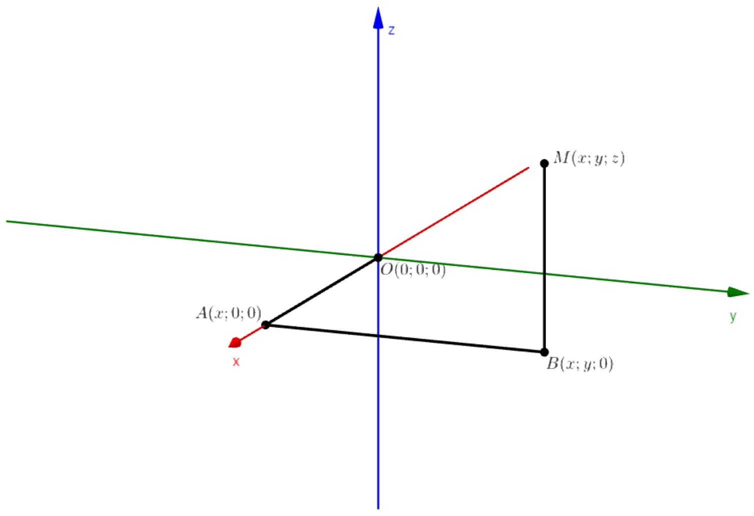
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x(y+z) & x^2 - y^2 & x^2 - z^2 + 3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x^2 - z^2 + 3)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(2x(y+z))}{\partial z} - \frac{\partial(x^2 - z^2 + 3)}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2x(y+z))}{\partial y}\right)\vec{k} = 0\vec{i} + (2x - 2x)\vec{j} + (2x - 2x)\vec{k} = 0$$

Ротор при любых значениях переменных равен нулю, поэтому $\boxed{\text{поле потенциальное.}}$

2. Т.к. поле потенциально, нам необходимо найти его потенциал — такое скалярное поле U, что его градиент будет равен исходному векторному полю, т.е $\vec{a} = \operatorname{grad} U$. Дифференциал такого поля при этом равен $dU = a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz$. Это значит, что справедливо $U = \int\limits_{M_0}^{M} dU + C$, где M_0 — начальная точка интегрирования, а M — конечная.

В нашем случае получаем такой интеграл $U = \int\limits_{M_0}^{M} 2\tilde{x}(\tilde{y}+\tilde{z})\,d\tilde{x} + (\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)\,d\tilde{y} + (\tilde{x}^2 - \tilde{z}^2 + 3)\,d\tilde{z}$. Мы начнём с точки $M(0;0;0)$ и будем последовательно добавлять x, y и z к исходное точке. На рисунке можно подробно рассмотреть ломанную $OABM$, по которой мы будем поэлементно вычислять интегралы и потенциалом станет сумма этих интегралов.



1. I_{OA}: $\begin{cases} \tilde{y} = 0 \\ \tilde{z} = 0 \end{cases}$, вне зависимости от выбранных пределов получаем $\int 0 dx = 0$.
2. I_{AB}: $\begin{cases} \tilde{x} = x = \text{const} \\ \tilde{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{x} = 0 \\ d\tilde{z} = 0 \end{cases}$ с пределами интегрирования $0 \le \tilde{y} \le y$ получаем $\int\limits_0^y (\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)\,d\tilde{y} = x^2 y - \frac{y^3}{3}$.
3. I_{BM}: $\begin{cases} \tilde{x} = x = \text{const} \\ \tilde{y} = y = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{x} = 0 \\ d\tilde{y} = 0 \end{cases}$ с пределами $0 \le \tilde{z} \le z$ получаем $\int\limits_0^z (\tilde{x}^2 - \tilde{z}^2 + 3)\,d\tilde{z} = x^2 z - \frac{z^3}{3} + 3z$.

Итак, потенциал векторного поля $\vec{a}$ — скалярное поле $U = I_{OA} + I_{AB} + I_{BM} + C = \boxed{x^2(y+z) - \frac{y^3}{3} - \frac{z^3}{3} + 3z + C.}$