Semidefinitní programování v geometrii počítačového vidění

Pavel Trutman

Vedoucí práce: Ing. Tomáš Pajdla, Ph.D.

Centrum strojového vnímání
Katedra kybernetiky
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Obsah

- Motivace
- Lasserrova hierarchie
- Metoda momentů
- Implementace
- Experimenty
  - Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)
  - Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)

Motivace

- Mnoho problémů v geometrii počítačového vidění vede na řešení soustav polynomiálních rovnic
- Tyto soustavy umíme řešit algebraicky (Algoritmus F_4 [1], Automatický generátor [3])
  - jsou vypočtena všechna komplexní řešení, nereálná jsou poté vyřazena
  - nevhodné na přeurčené soustavy na datech se šumem
- Aplikace metod z polynomiální optimalizace řeší tyto problémy
  - umíme najít pouze reálná řešení
  - do systému lze přidat polynomiální nerovnice
  - lze optimalizovat kriteriální polynomialní funkci na prostoru řešení

[1] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f_4).

[3] Z. Kukelova, M. Bujnak, T. Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers.

Lasserrova hierarchie [4]

- Problém polynomiální optimalizace

$$\begin{aligned} p^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} & \; f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \\ & h_j(x) = 0 \quad (j = 1, \ldots, l) \end{aligned} \tag{1}$$

- Každý monom nahradíme novou proměnnou: $\ell_y(x^\alpha) = y_\alpha$
- Semidefinitní problém (nekonečné dimenze)

$$\begin{aligned} p^* = \min_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} & \; \mathrm{vec}(f)^\top y \\ \text{s.t.} \quad & y_{0\ldots0} = 1 \\ & M(y) \succeq 0 \\ & M(g_i y) \succeq 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \\ & \mathrm{vec}(h)^\top y = 0 \quad \forall h \in \langle h_1, \ldots, h_l \rangle \end{aligned} \tag{2}$$

[4] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments.

Lasserrova hierarchie [4]

- Problém polynomiální optimalizace

$$p^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g_i(x) \geq 0 \quad (i = 1,\dots,k), \quad h_j(x) = 0 \quad (j = 1,\dots,l) \tag{1}$$

- Každý monom nahradíme novou proměnnou: $\ell_y(x^\alpha) = y_\alpha$
- Semidefinitní problém (dimenze $\binom{n+2r}{n}$) pro stupeň relaxace $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_r^* = \min_{y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_{2r}^n}} \ & \mathrm{vec}(f)^\top y \\ \text{s.t.} \quad y_{0\dots0} &= 1 \\ M_r(y) &\succeq 0 \\ M_{r-\left\lceil\frac{\deg(g_i)}{2}\right\rceil}(g_i y) &\succeq 0 \quad (i = 1,\dots,k) \\ \mathrm{vec}(h)^\top y &= 0 \quad \forall h \in \left\{h_j x^\alpha \mid j = 1,\dots,l, |\alpha| \leq 2r - \deg(h_j)\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

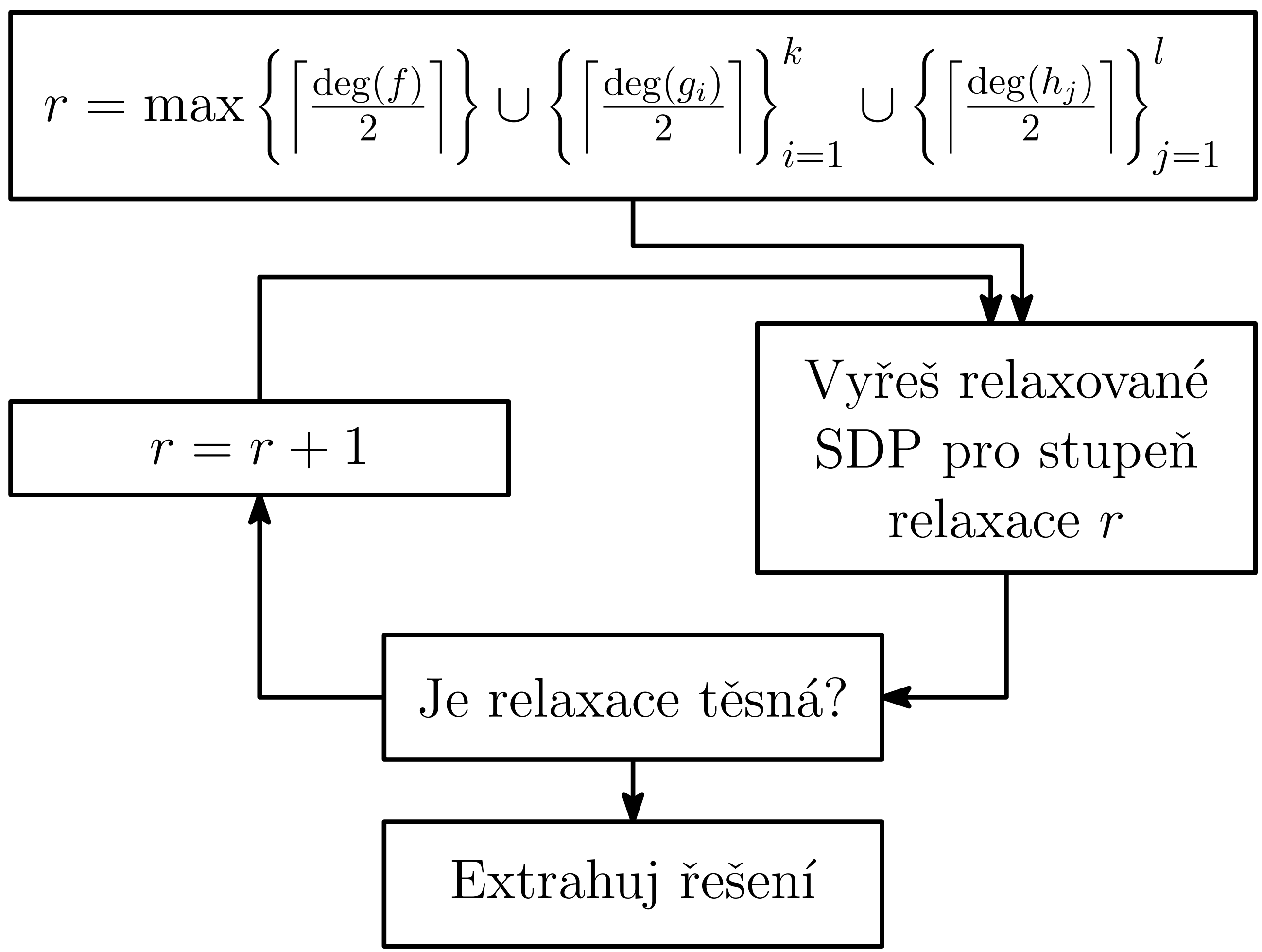
- Konvergence zajištěna

$$p_r^* \leq p_{r+1}^* \leq p^* \qquad \lim_{r\to+\infty} p_r^* = p^* \tag{4}$$

[4] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments.

Metoda momentů [5]

- Řešíme relaxované SDP pro rostoucí relaxační stupeň r
- Existuje test, zda je daná relaxace těsná
- Výpočet řešení přes vlastní vektory multiplikativní matice



[5] J. B. Lasserre, M. Laurent, and P. Rostalski. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals.

Implementace

- Balíček Polyopt
  - programovací jazyk Python
  - implementace momentové metody
  - implementace vlastního nástroje na řešení semidefinitních problémů: algoritmus vnitřních bodů s využitím bariérové funkce, dle [8]
- Implementace momentové metody v MATLABu
  - využití nastoje MOSEK [7] na řešení semidefinitních problémů
  - využití toolboxu YALMIP [6] jako interface

[6] Johan Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB.
[7] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28).
[8] Y. Nesterov. Introductory lectures on convex optimization: A basic course.

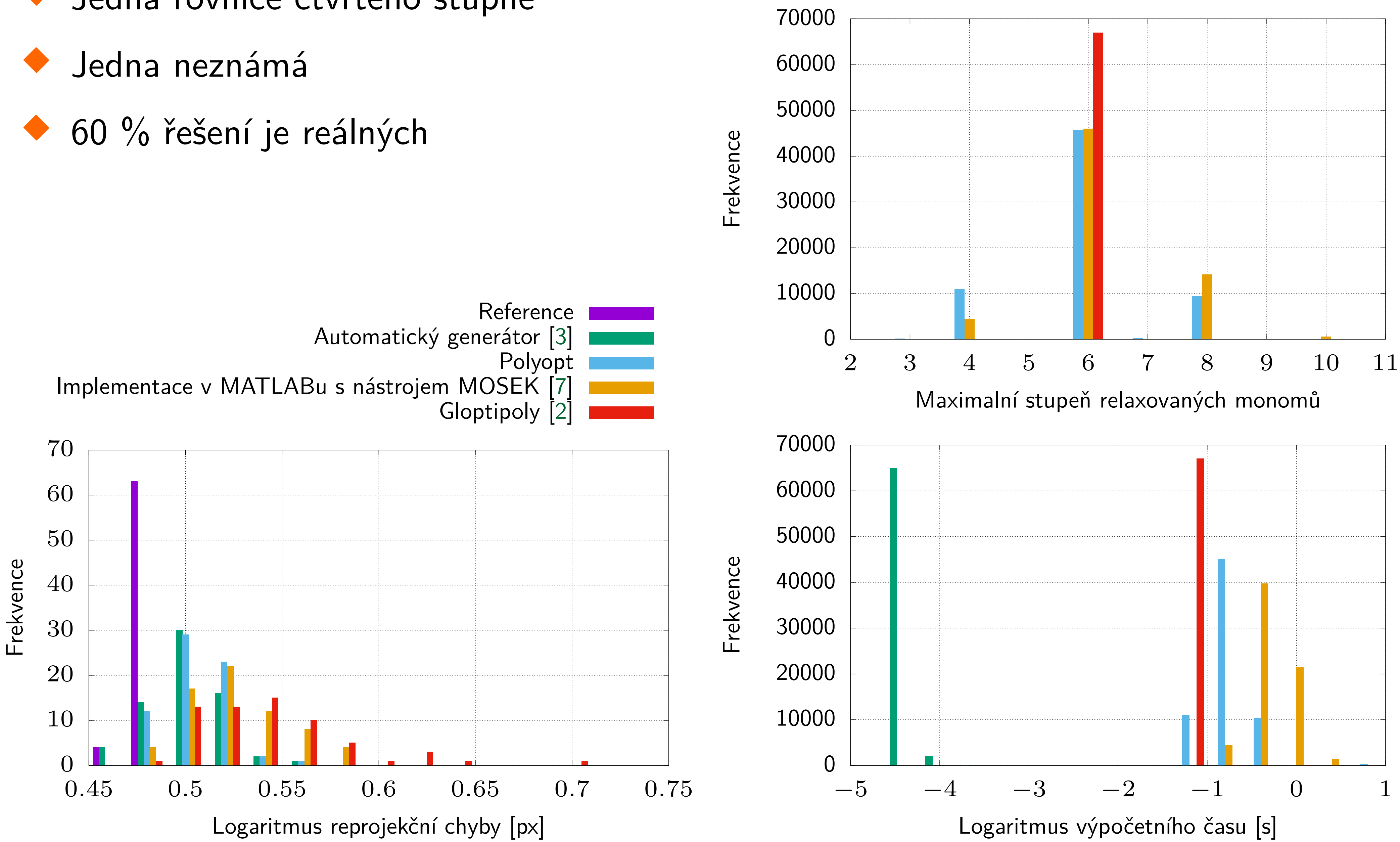
Experimenty

- Řešení polynomiálních rovnic
- Aplikace na minimálních problémech z geometrie počítačového vidění
  - Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)
  - Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)
- Testování na reálné 3D scéně
  - robustně zrekonstruovaná
  - 67 kamer, 145 001 bodů v prostoru
- Porovnání různých implementací
  - čistě algebraické řešení vygenerované Automatickým generátorem [3]
  - balíček Polyopt
  - implementace v MATLABu s využitím nástroje MOSEK [7]
  - optimalizační nástroj Gloptipoly [2]

[2] D. Henrion, J. B. Lasserre, and J. Löfberg. Gloptipoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming.
[3] Z. Kukelova, M. Bujnak, T. Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers.
[7] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28).

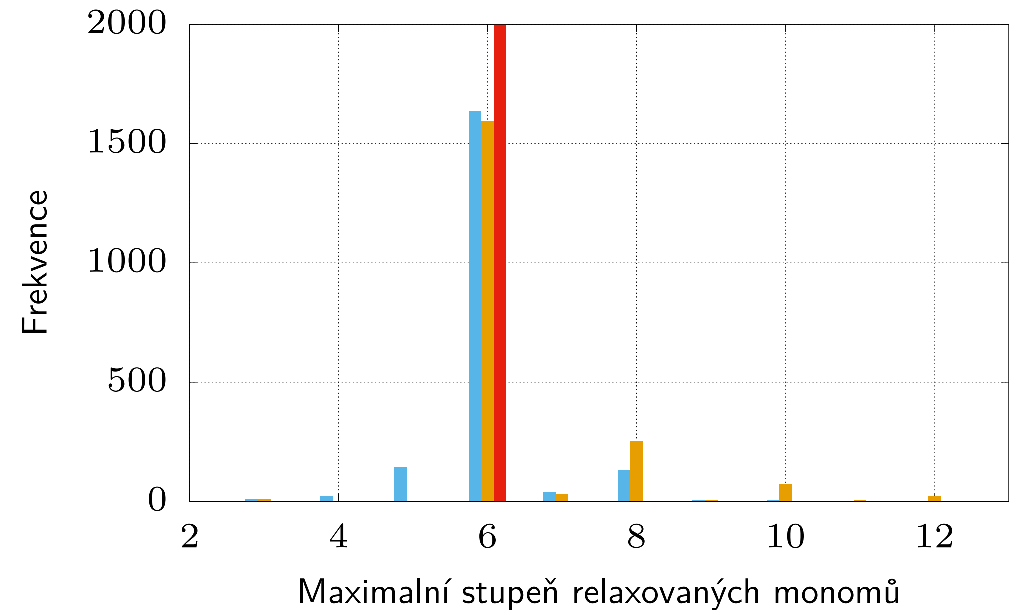
Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)

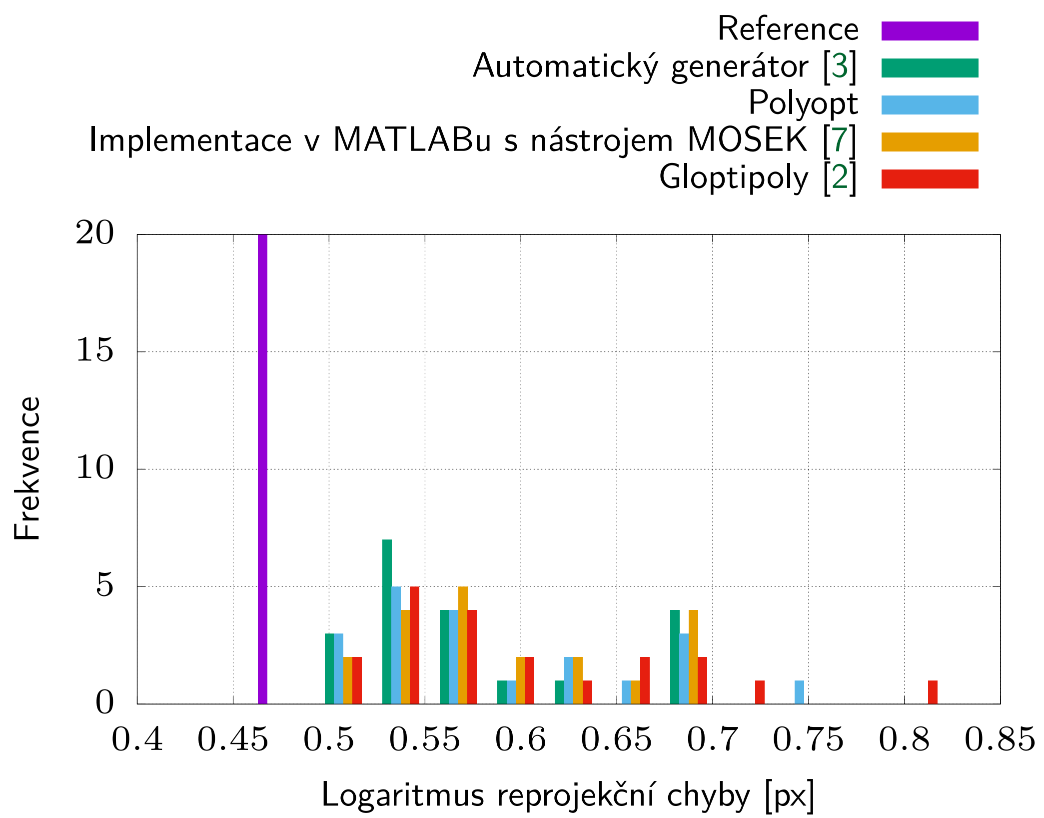
- Jedna rovnice čtvrtého stupně
- Jedna neznámá
- 60 % řešení je reálných

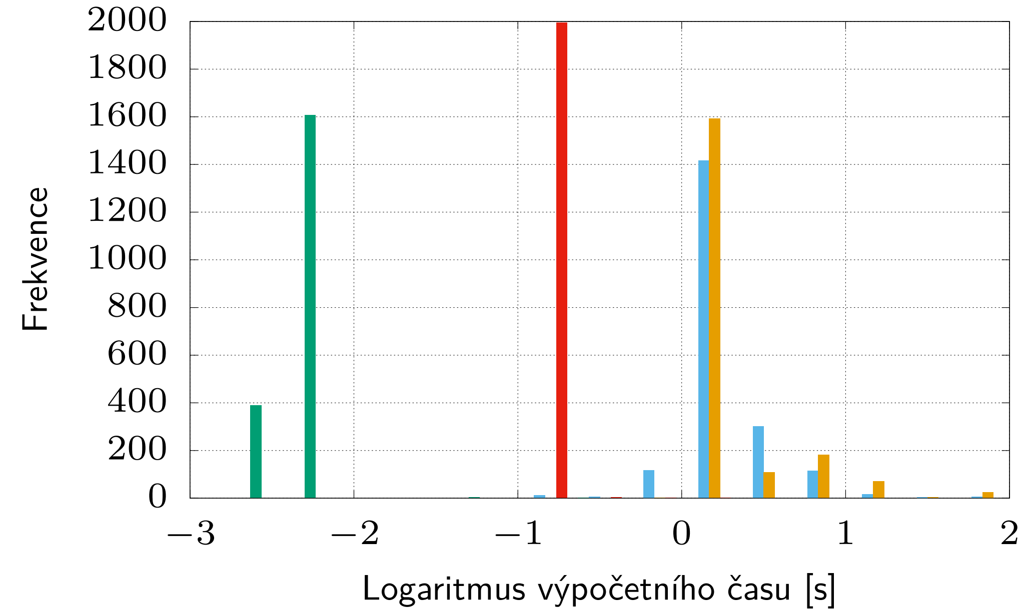


Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)

- Devět rovnic třetího stupně
- Čtyři neznámé
- 48 % řešení je reálných







Shrnutí

- Implementovali jsme nástroj na řešení semidefinitních problémů v Pythonu
- Implementovali jsme metodu momentů v Pythonu a MATLABu
- Porovnali jsme rychlost a stabilitu se současnými nástroji
  - stabilita odpovídá algebraickým metodám
  - nemůže konkurovat algebraickým metodám v rychlosti

Děkuji za pozornost

Použitá literatura

[1] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f_4). Journal of pure and applied algebra, 139(1–3):61–88, July 1999.

[2] Didier Henrion, Jean-Bernard Lasserre, and Johan Löfberg. Gloptipoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming. Optimization Methods Software, 24(4–5):761–779, August 2009.

[3] Zuzana Kukelova, Martin Bujnak, and Tomas Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers. In Proceedings of The 10th European Conference on Computer Vision, ECCV 2008, October 12–18 2008.

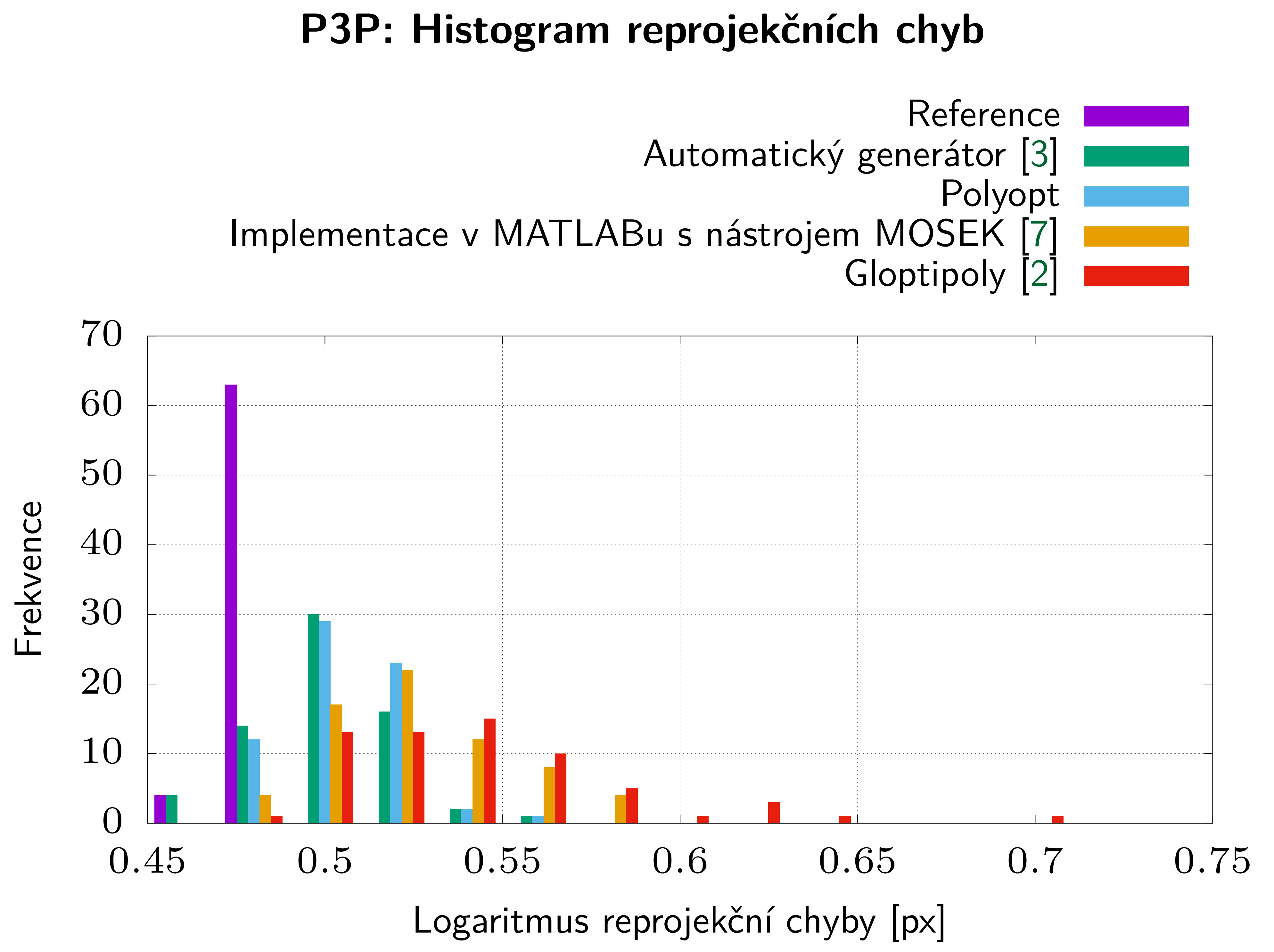
[4] Jean B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization, 11:796–817, 2001.

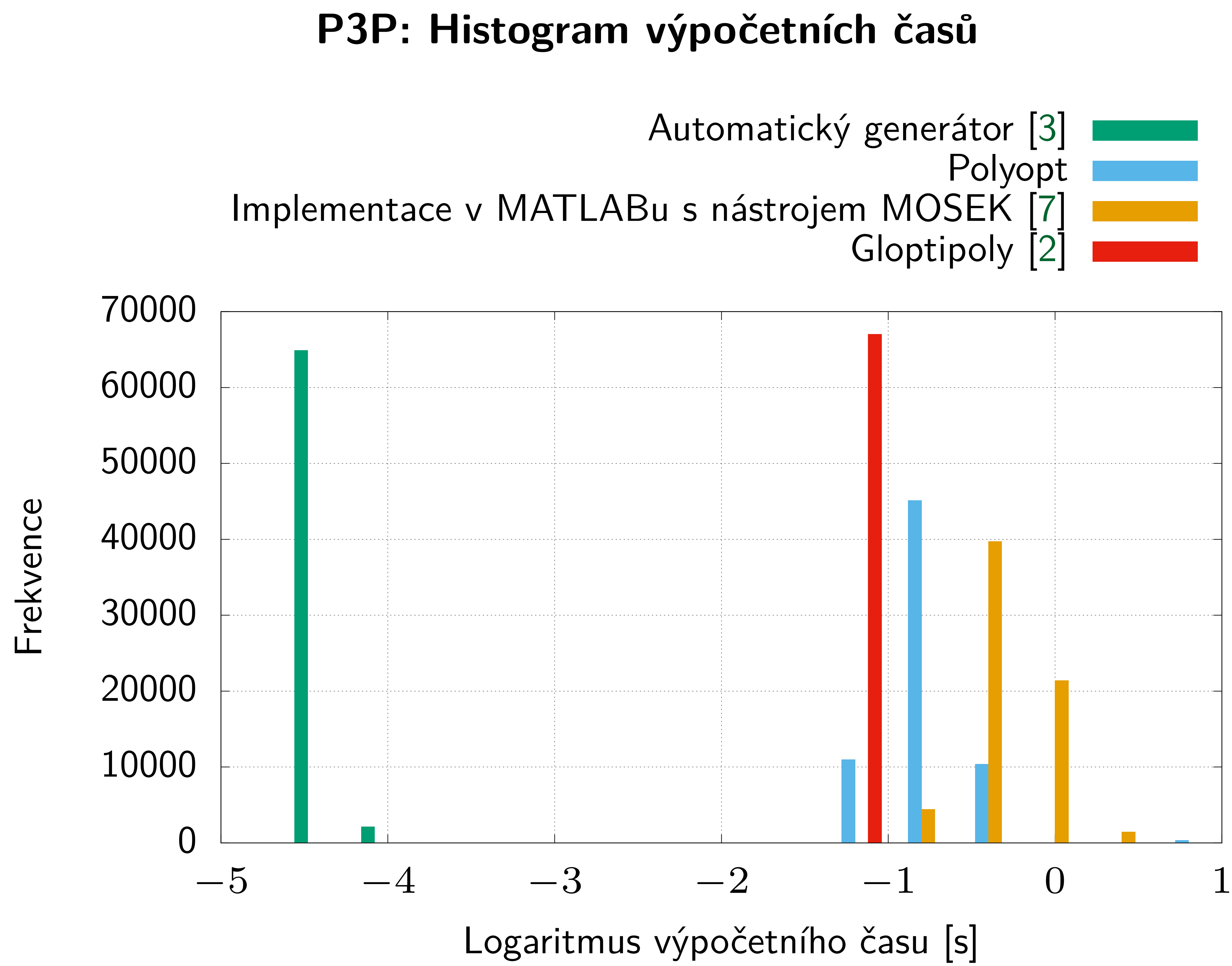
[5] Jean Bernard Lasserre, Monique Laurent, and Philipp Rostalski. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals. Foundations of Computational Mathematics, 8(5):607–647, October 2008.

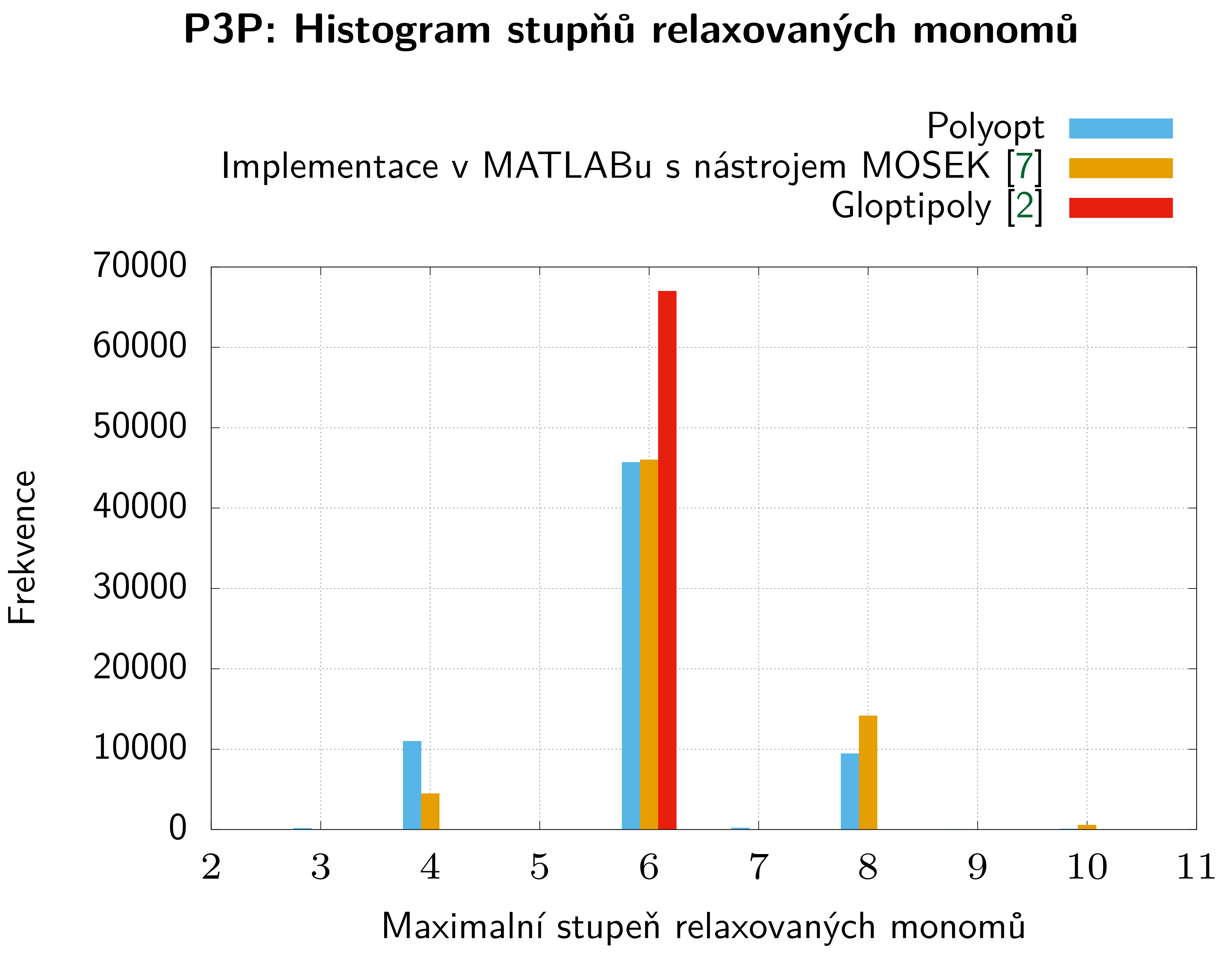
[6] Johan Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004.

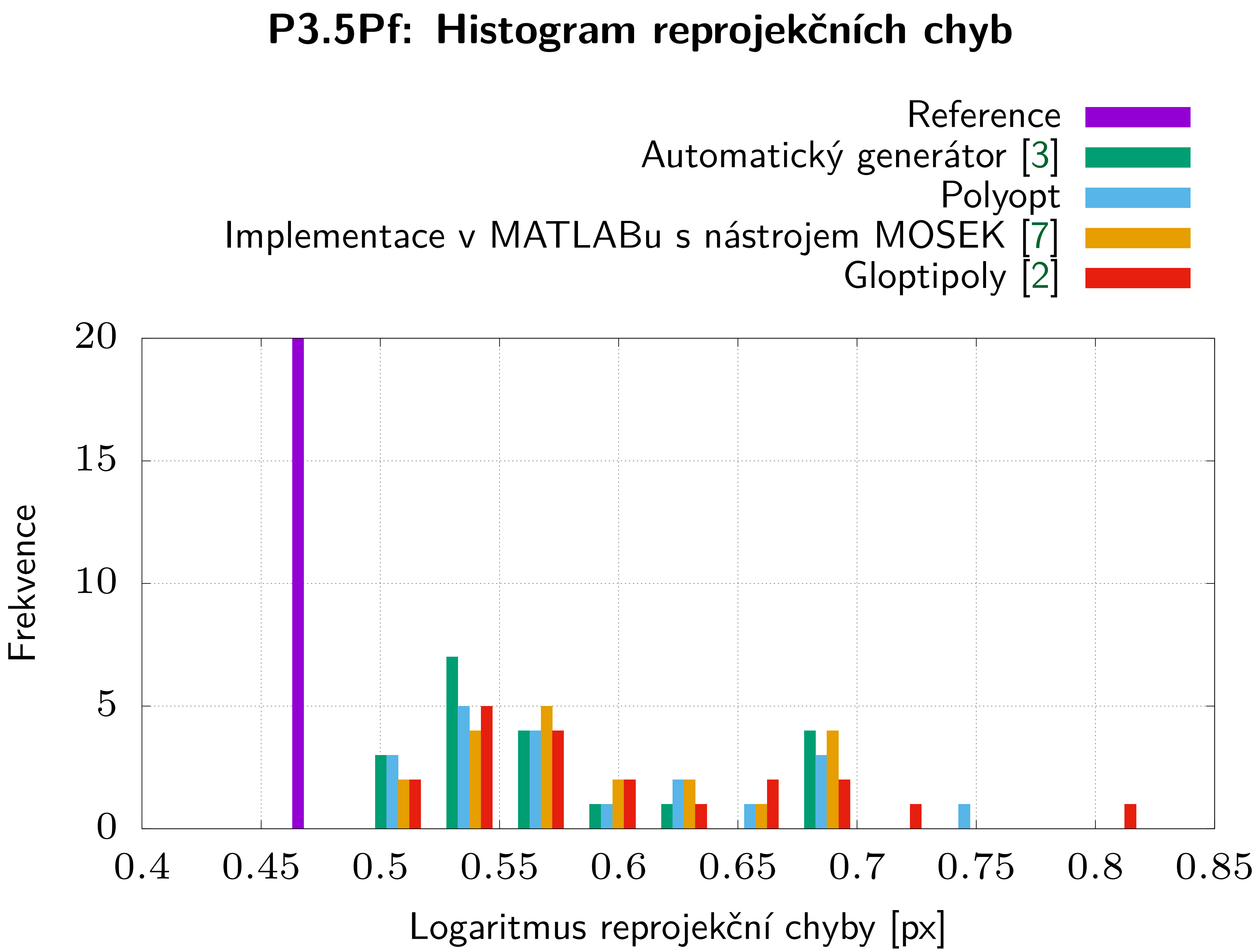
[7] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28), 2015. `http://docs.mosek.com/7.1/toolbox/index.html` [Online; accessed 2017-04-25].

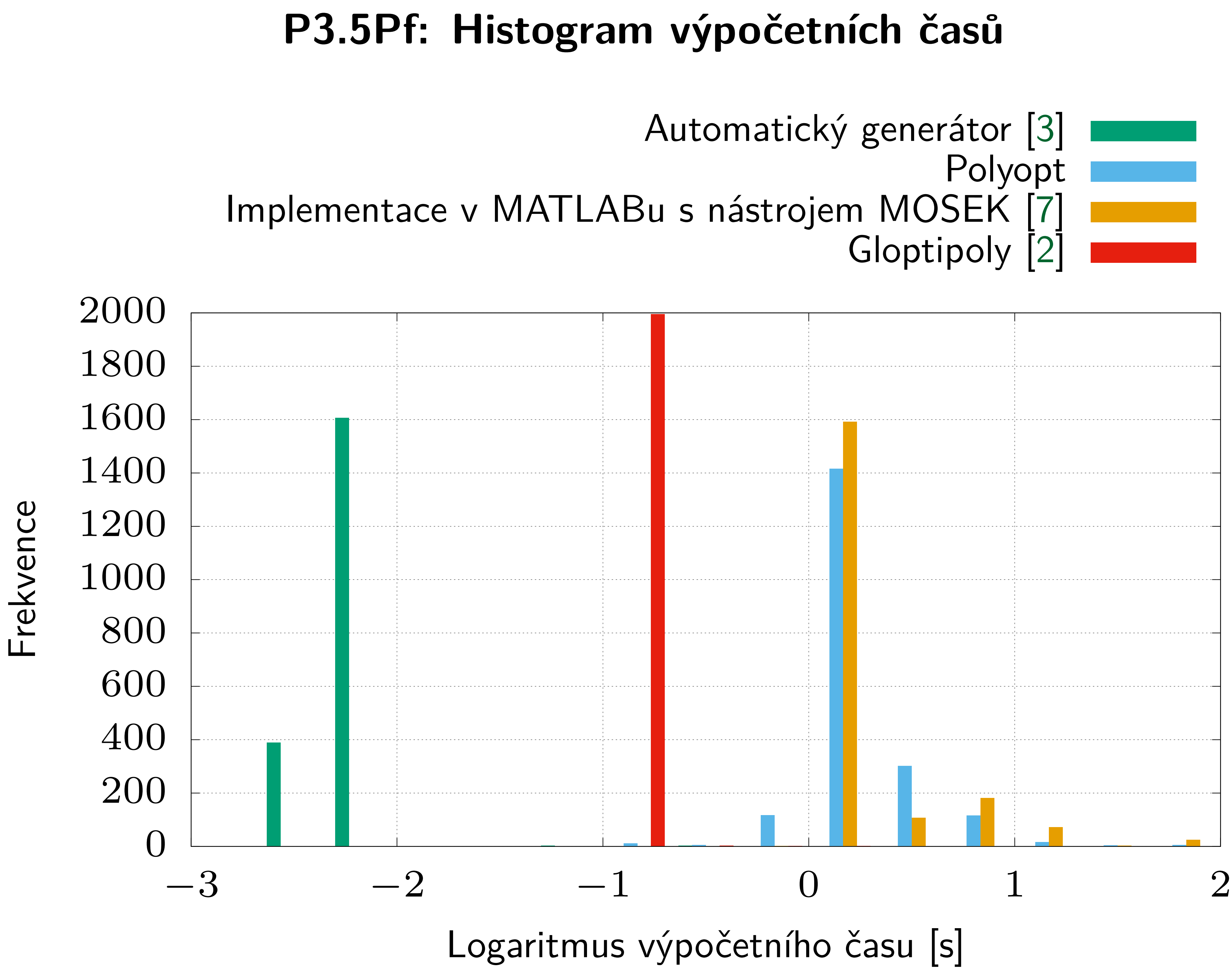
[8] Yurii Nesterov. Introductory lectures on convex optimization : A basic course. Springer, 2004.

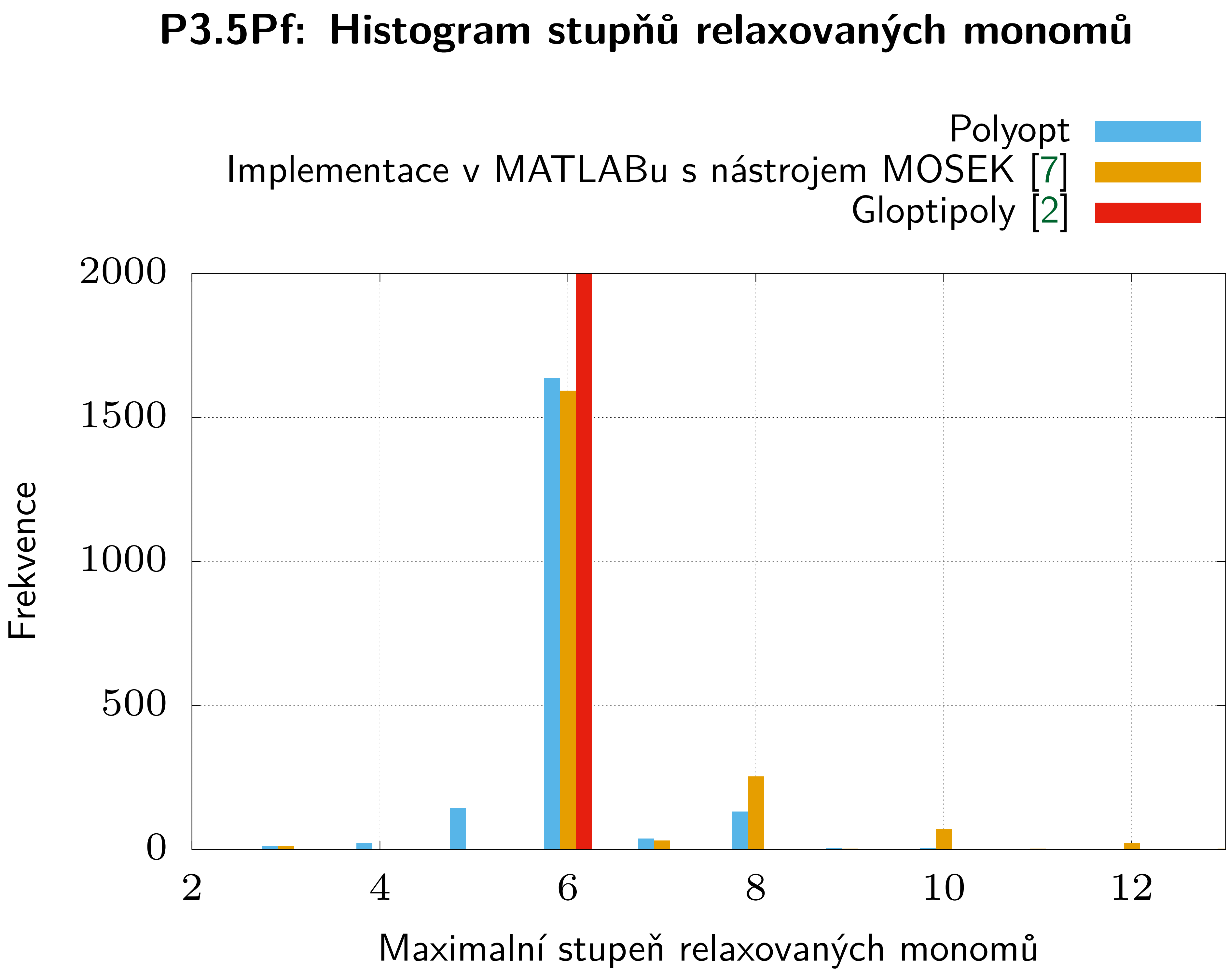

P3P: Histogram reprojekčních chyb
Reference
Automatický generátor [3]
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
0
10
20
30
40
50
60
70
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
Logaritmus reprojekční chyby [px]

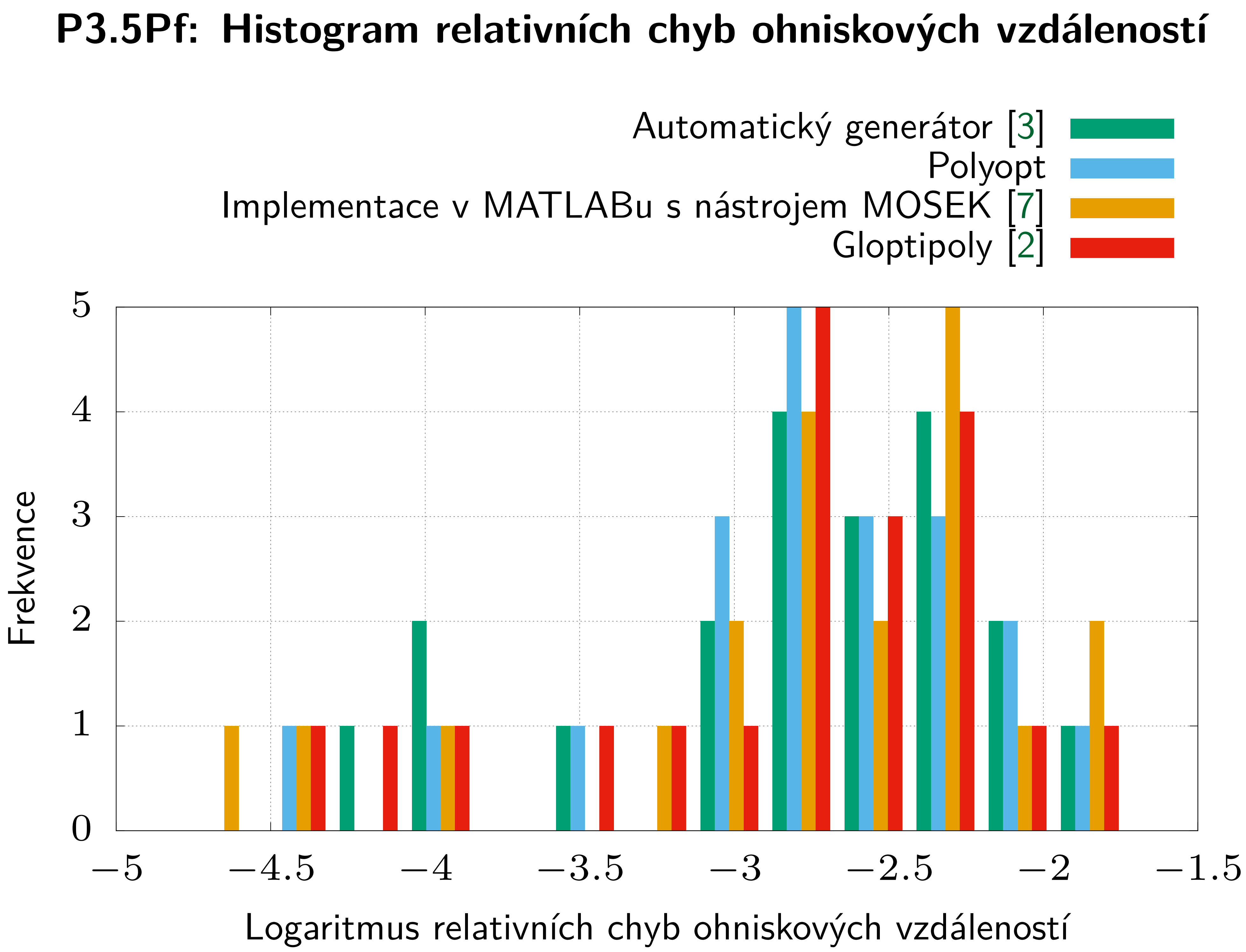

P3P: Histogram výpočetních časů
Automatický generátor [3]
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
Logaritmus výpočetního času [s]


P3P: Histogram stupňů relaxovaných monomů
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Maximalní stupeň relaxovaných monomů


P3.5Pf: Histogram reprojekčních chyb
Reference
Automatický generátor [3]
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
0
5
10
15
20
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
Logaritmus reprojekční chyby [px]


P3.5Pf: Histogram výpočetních časů
Automatický generátor [3]
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
−3
−2
−1
0
1
2
Frekvence
Logaritmus výpočetního času [s]


P3.5Pf: Histogram stupňů relaxovaných monomů
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
2000
1500
1000
500
0
2
4
6
8
10
12
Maximalní stupeň relaxovaných monomů


P3.5Pf: Histogram relativních chyb ohniskových vzdáleností
Automatický generátor [3]
Polyopt
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7]
Gloptipoly [2]
Frekvence
0
1
2
3
4
5
−5
−4.5
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
Logaritmus relativních chyb ohniskových vzdáleností