

Semidefinitní programování v geometrii počítačového vidění

Pavel Trutman

Vedoucí práce: Ing. Tomáš Pajdla, Ph.D.



Centrum strojového vnímání
Katedra kybernetiky
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

- ◆ Motivace
- ◆ Metoda momentů a Lasserova hierarchie
- ◆ Implementace
- ◆ Experimenty
 - Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)
 - Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)
- ◆ Přínosy práce

Motivace

- ◆ Mnoho problémů v geometrii počítačového vidění vede na řešení soustav polynomiálních rovnic
- ◆ Tyto soustavy umíme řešit algebraicky (Algoritmus F_4 [1], Automatický generátor [3])
 - jsou vypočtena všechna komplexní řešení, nereálná jsou poté vyřazena
 - nevhodné na přeuročené soustavy na datech se šumem
- ◆ Aplikace metod z polynomiální optimalizace řeší tyto problémy
 - umíme najít pouze reálná řešení
 - do systému lze přidat polynomiální nerovnice
 - lze optimalizovat kritériální polynomiální funkci na prostoru řešení

[1] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f_4).

[3] Z. Kukelova, M. Bujnak, T. Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers.

Metoda momentů [5]

- ◆ Založena na Lasserrově hierarchii [4]
- ◆ Problém polynomiální optimalizace (nekonvexní)

$$\begin{aligned}
 p^* &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
 \text{s.t. } & g_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k) \\
 & h_j(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, l)
 \end{aligned} \tag{1}$$

- ◆ Každý monom nahradíme novou proměnnou: $\ell_y(x^\alpha) = y_\alpha$
- ◆ Semidefinitní problém nekonečné dimenze (konvexní)

$$\begin{aligned}
 p^* &= \min_{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}} \text{vec}(f)^\top y \\
 \text{s.t. } & y_{0\dots 0} = 1 \\
 & M(y) \succeq 0 \\
 & M(g_i y) \succeq 0 \quad (i = 1, \dots, k) \\
 & \text{vec}(h)^\top y = 0 \quad \forall h \in \langle h_1, \dots, h_l \rangle
 \end{aligned} \tag{2}$$

[4] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments.

[5] J. B. Lasserre, M. Laurent, and P. Rostalski. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals.

Metoda momentů [5]

- ◆ Založena na Lasserrově hierarchii [4]
- ◆ Problém polynomiální optimalizace (nekonvexní)

$$\begin{aligned}
 p^* &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
 \text{s.t. } & g_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, k) \\
 & h_j(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, l)
 \end{aligned} \tag{1}$$

- ◆ Každý monom nahradíme novou proměnnou: $\ell_y(x^\alpha) = y_\alpha$
- ◆ Semidefinitní problém dimenze $\binom{n+2r}{n}$ pro stupeň relaxace $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 p_r^* &= \min_{y \in \mathbb{R}^{\binom{n+2r}{n}}} \text{vec}(f)^\top y \\
 \text{s.t. } & y_{0\dots 0} = 1 \\
 & M_r(y) \succeq 0 \\
 & M_{r - \lceil \frac{\deg(g_i)}{2} \rceil}(g_i y) \succeq 0 \quad (i = 1, \dots, k) \\
 & \text{vec}(h)^\top y = 0 \quad \forall h \in \{h_j x^\alpha \mid j = 1, \dots, l, |\alpha| \leq 2r - \deg(h_j)\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

- ◆ Konvergence zajištěna

$$p_r^* \leq p_{r+1}^* \leq p^* \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} p_r^* = p^* \tag{4}$$

[4] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments.

[5] J. B. Lasserre, M. Laurent, and P. Rostalski. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals.

Implementace

◆ Balíček Polyopt

- programovací jazyk Python
- implementace momentové metody
- implementace vlastního nástroje na řešení semidefinitních problémů: algoritmus vnitřních bodů s využitím bariérové funkce, dle [8]

◆ Implementace momentové metody v MATLABu

- využití nástroje MOSEK [7] na řešení semidefinitních problémů
- využití toolboxu YALMIP [6] jako interface

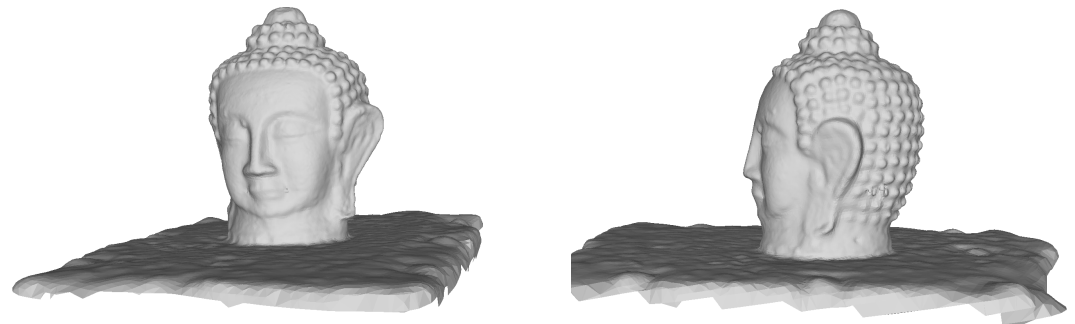
[6] Johan Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB.

[7] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28).

[8] Y. Nesterov. Introductory lectures on convex optimization: A basic course.

Experimenty

- ◆ Řešení soustav polynomiálních rovnic
- ◆ Aplikace na minimálních problémech z geometrie počítačového vidění
 - Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)
 - Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)
- ◆ Testování na reálné 3D scéně
 - robustně zrekonstruovaná
 - 67 kamer, 145 001 bodů v prostoru
- ◆ Porovnání různých implementací
 - čistě algebraické řešení vygenerované Automatickým generátorem [3]
 - balíček Polyopt
 - implementace v MATLABu s využitím nástroje MOSEK [7]
 - optimalizační nástroj Gloptipoly [2]








[2] D. Henrion, J. B. Lasserre, and J. Löfberg. Gloptipoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming.

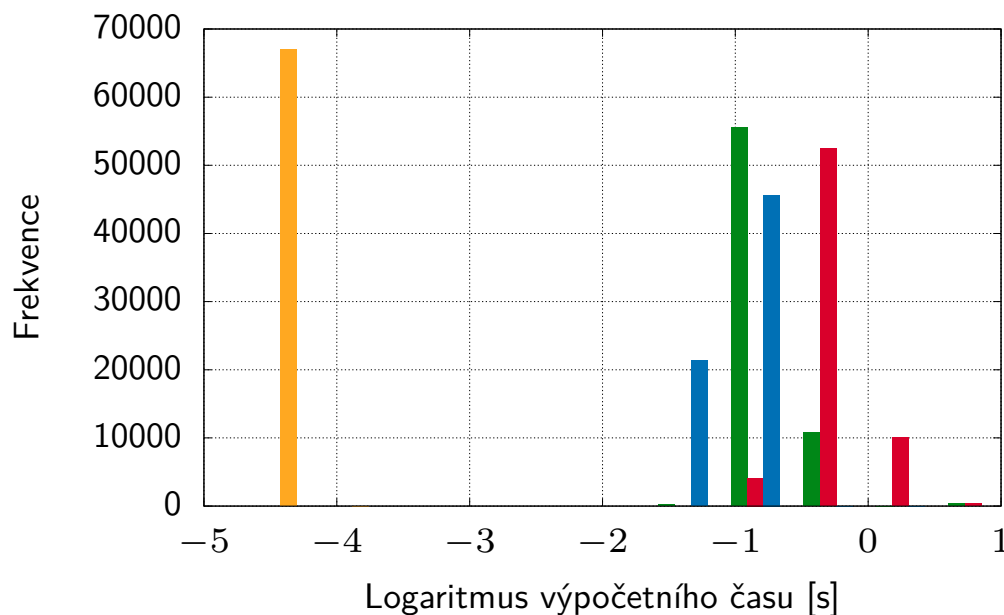
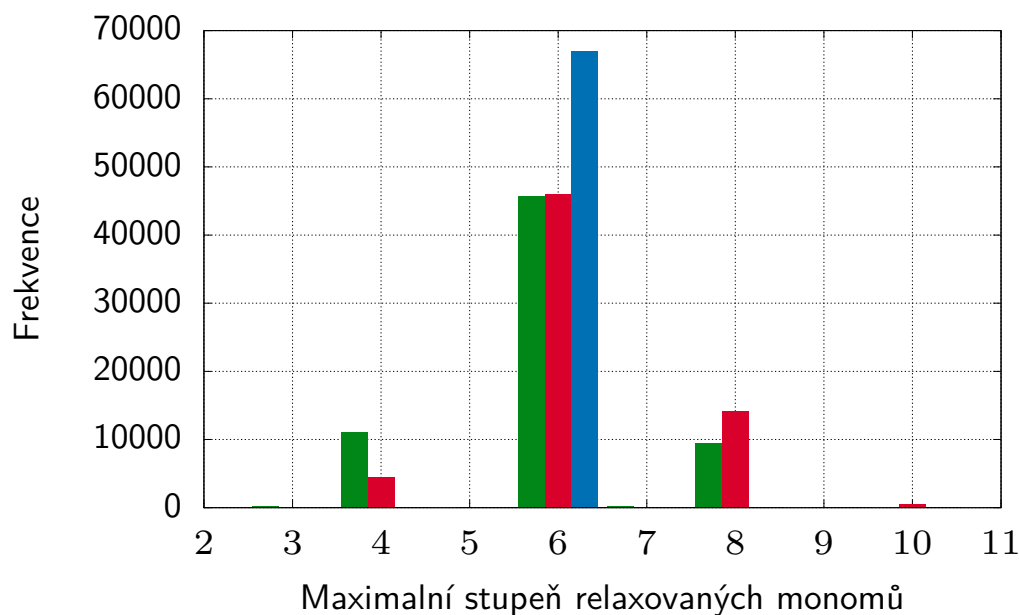
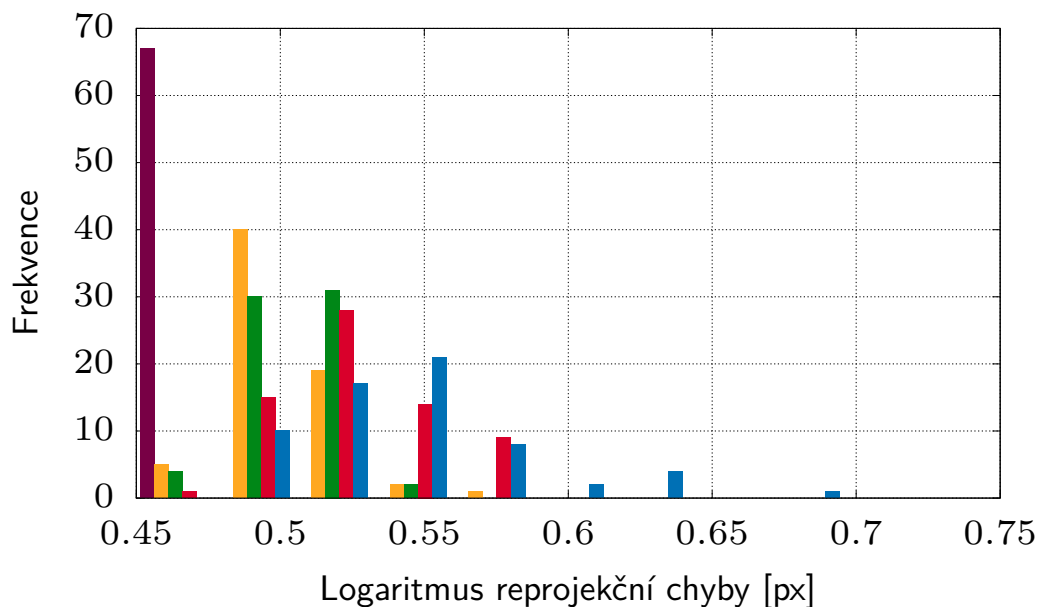
[3] Z. Kukelova, M. Bujnak, T. Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers.

[7] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28).

Poloha a orientace kalibrované kamery (P3P)

- ♦ Jedna rovnice čtvrtého stupně
- ♦ Jedna neznámá
- ♦ Vybrán nejlepší výsledek z 1000 různých konfigurací pro každou z 67 kamer (RANSAC-like)
- ♦ 60 % řešení je reálných

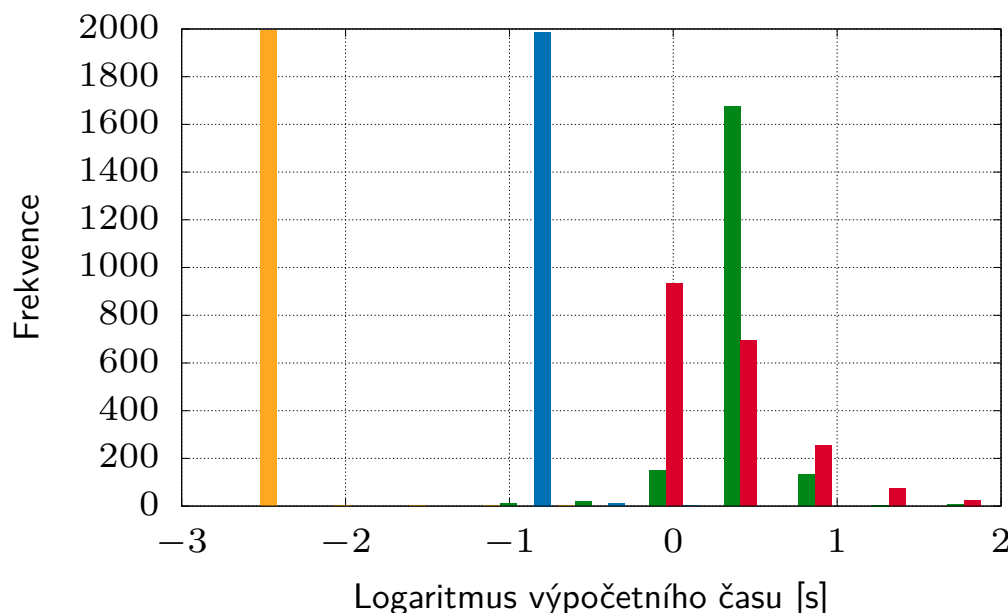
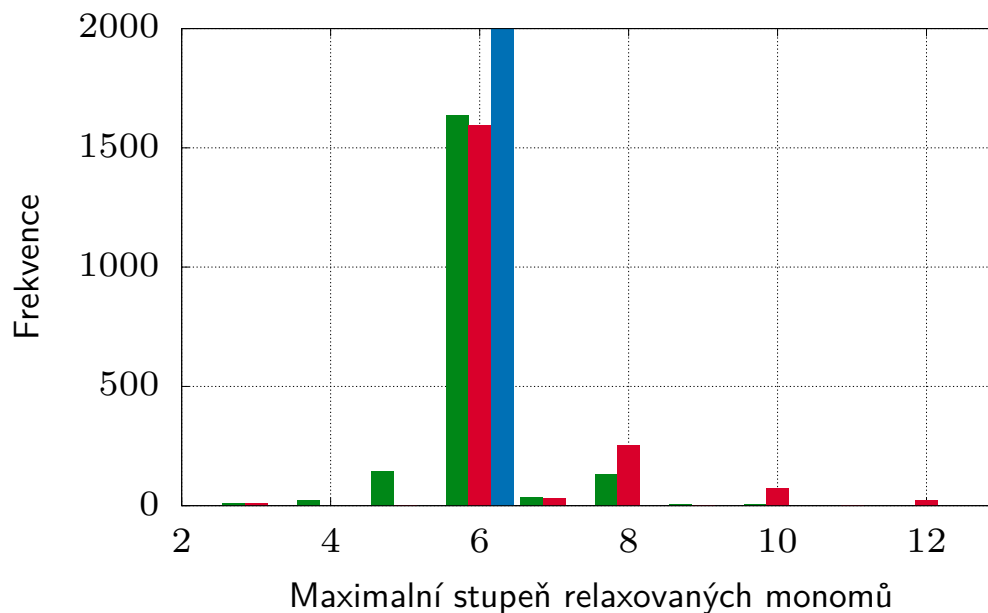
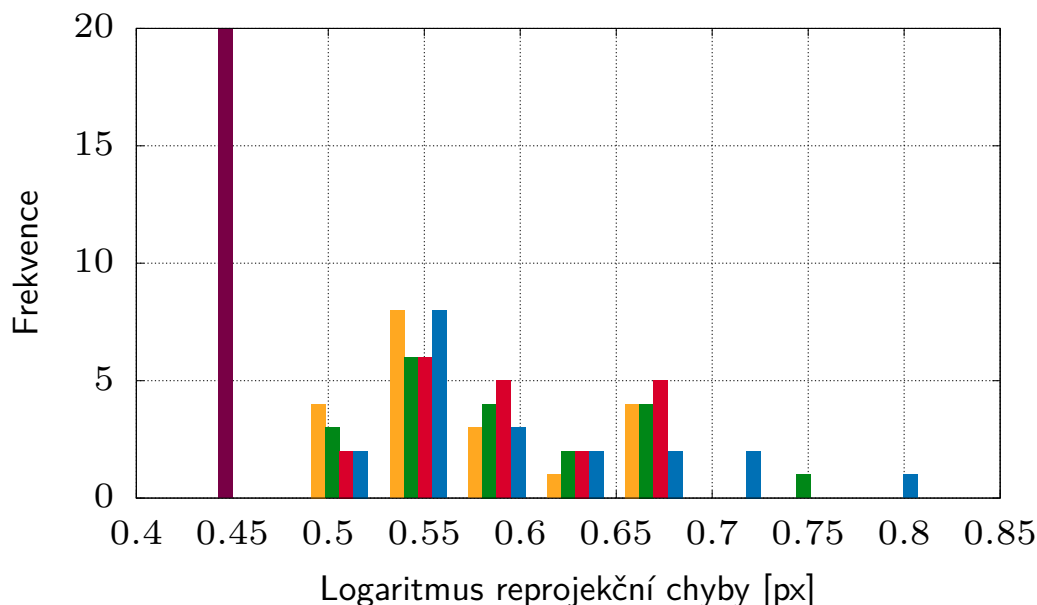
Reference 
Automatický generátor [3] 
Polyopt 
Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7] 
Gloptipoly [2] 



Poloha a orientace kalibrované kamery s neznámou ohniskovou vzdáleností (P3.5Pf)

- ◆ Devět rovnic třetího stupně
- ◆ Čtyři neznámé
- ◆ Vybrán nejlepší výsledek z 100 různých konfigurací pro každou z 20 vybraných kamer (RANSAC-like)
- ◆ 48 % řešení je reálných

Reference █
 Automatický generátor [3] █
 Polyopt █
 Implementace v MATLABu s nástrojem MOSEK [7] █
 Gloptipoly [2] █



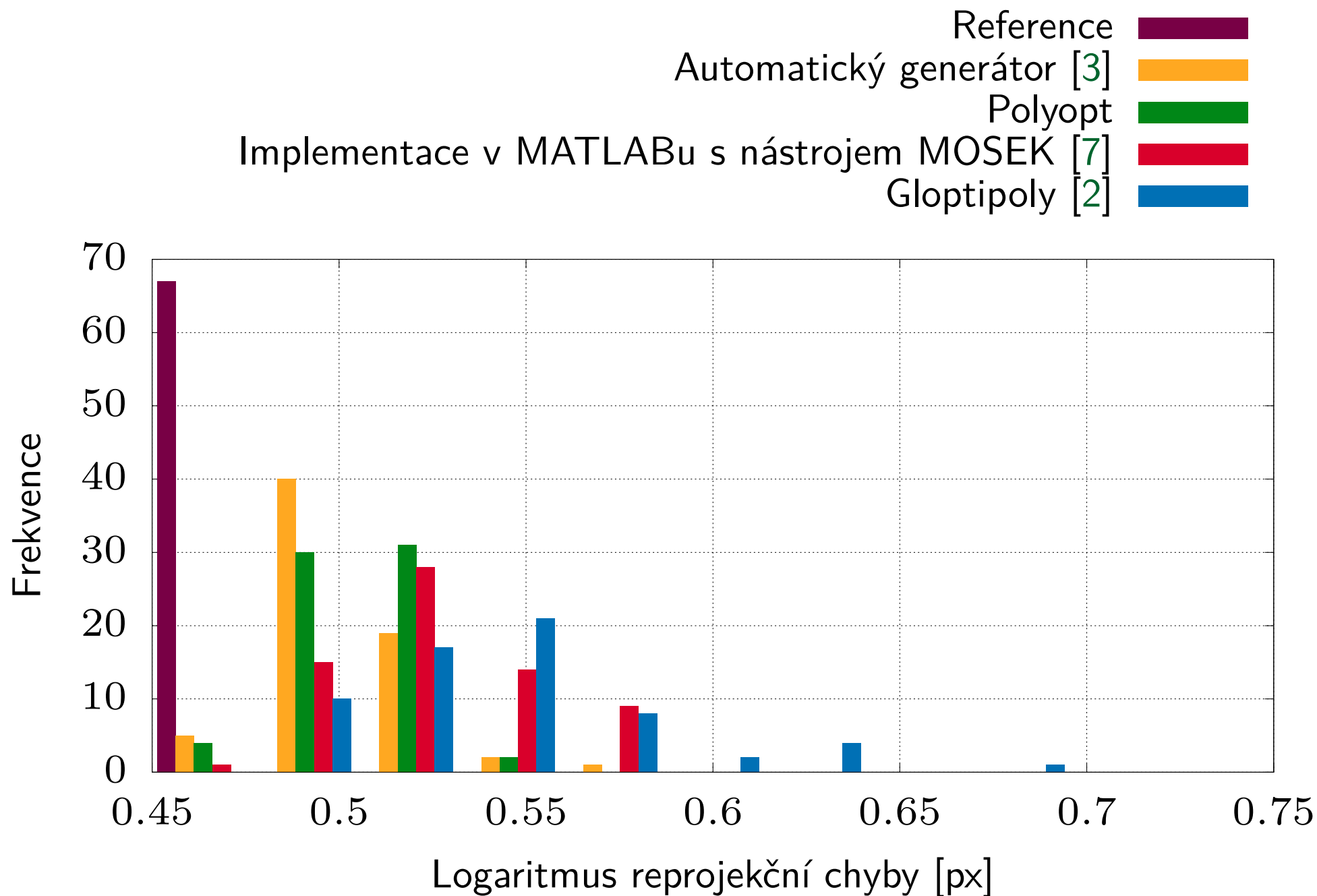
Přínosy práce

- ◆ Metoda momentů
 - porozumění metodě
 - implementace metody v Pythonu a MATLABu
 - použití metody na problémy z geometrie počítačového vidění
 - aplikace na úlohy z robotiky: řešení inverzní kinematické úlohy
- ◆ Nástroj na řešení semidefinitních problémů
 - implementace v Pythonu
 - porozumění typům semidefinitních problémů vznikajících využitím Lasserovy hierarchie
 - využití implementace v rámci formální verifikace algoritmů v konvexní optimalizaci, D. Henrion, LAAS–CNRS v Toulouse
- ◆ Srovnání implementace momentové metody se současnými nástroji
 - stabilita odpovídá algebraickým metodám
 - nemůže konkurovat algebraickým metodám v rychlosti

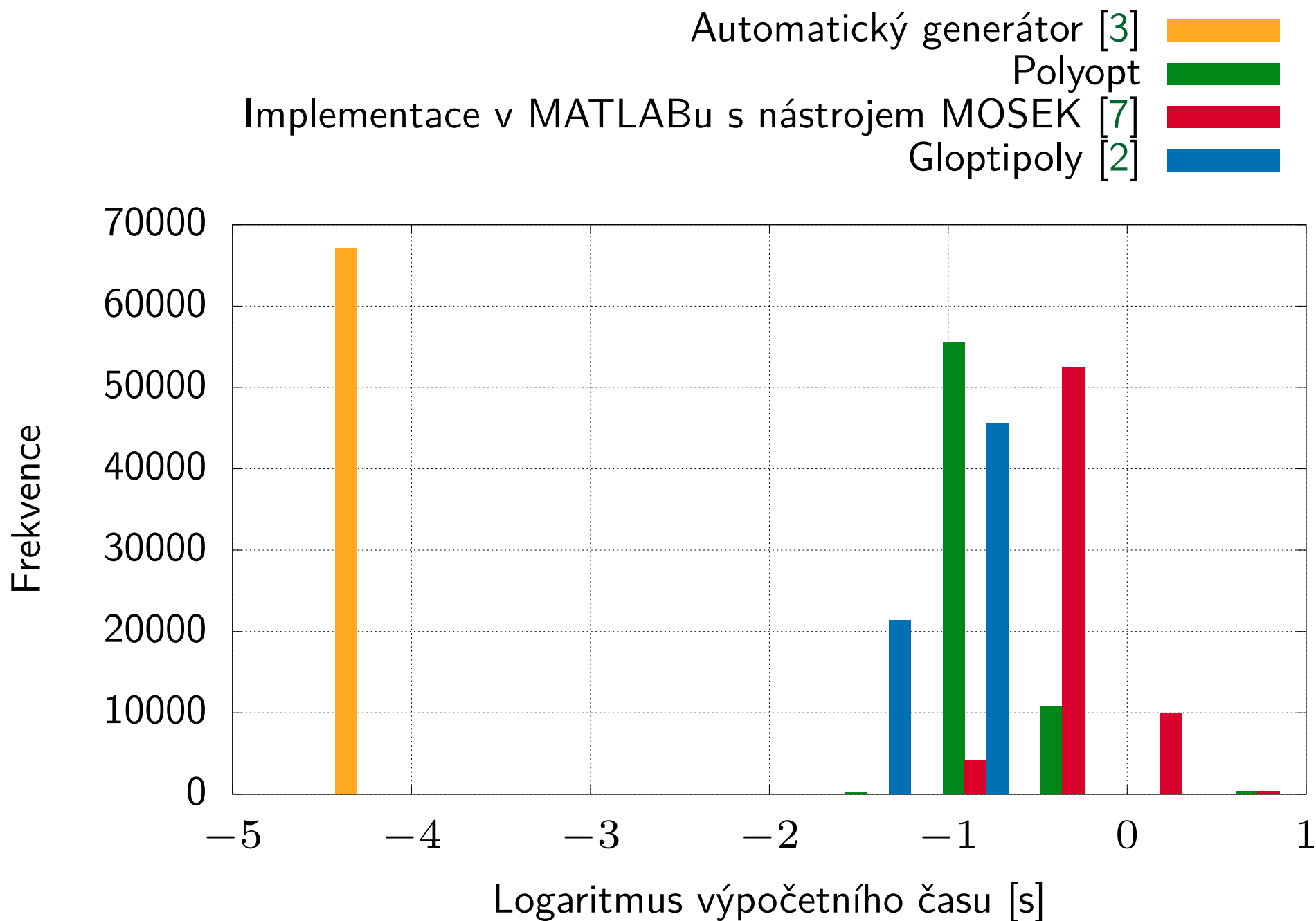
Použitá literatura

- [1] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f_4). *Journal of pure and applied algebra*, 139(1–3):61–88, July 1999.
- [2] Didier Henrion, Jean-Bernard Lasserre, and Johan Löfberg. Gloptipoly 3: Moments, optimization and semidefinite programming. *Optimization Methods Software*, 24(4–5):761–779, August 2009.
- [3] Zuzana Kukelova, Martin Bujnak, and Tomas Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers. In *Proceedings of The 10th European Conference on Computer Vision*, ECCV 2008, October 12–18 2008.
- [4] Jean B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization*, 11:796–817, 2001.
- [5] Jean Bernard Lasserre, Monique Laurent, and Philipp Rostalski. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals. *Foundations of Computational Mathematics*, 8(5):607–647, October 2008.
- [6] Johan Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [7] MOSEK ApS. *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28)*, 2015. <http://docs.mosek.com/7.1/toolbox/index.html> [Online; accessed 2017-04-25].
- [8] Yurii Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization : A basic course*. Springer, 2004.

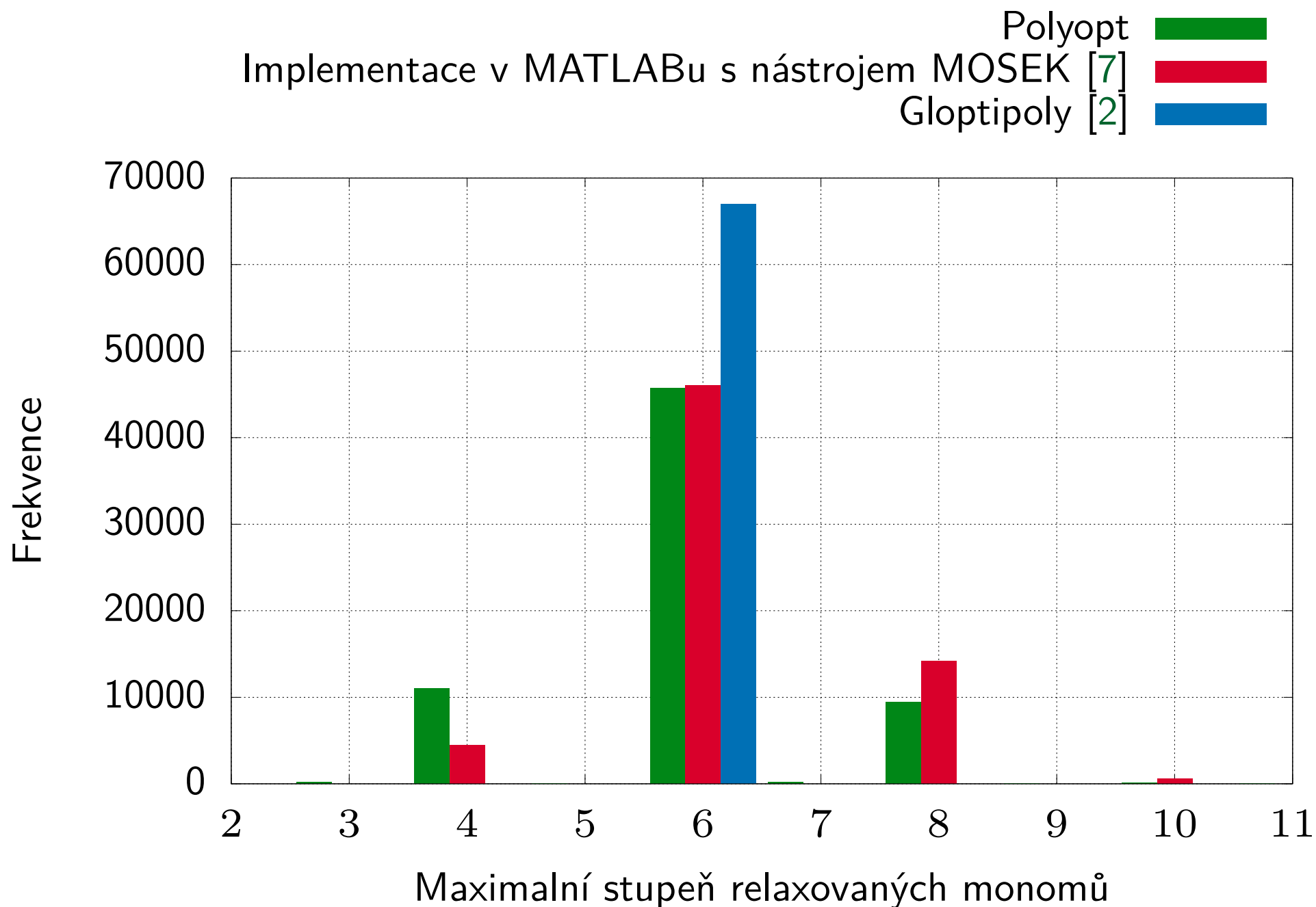
P3P: Histogram reprojekčních chyb



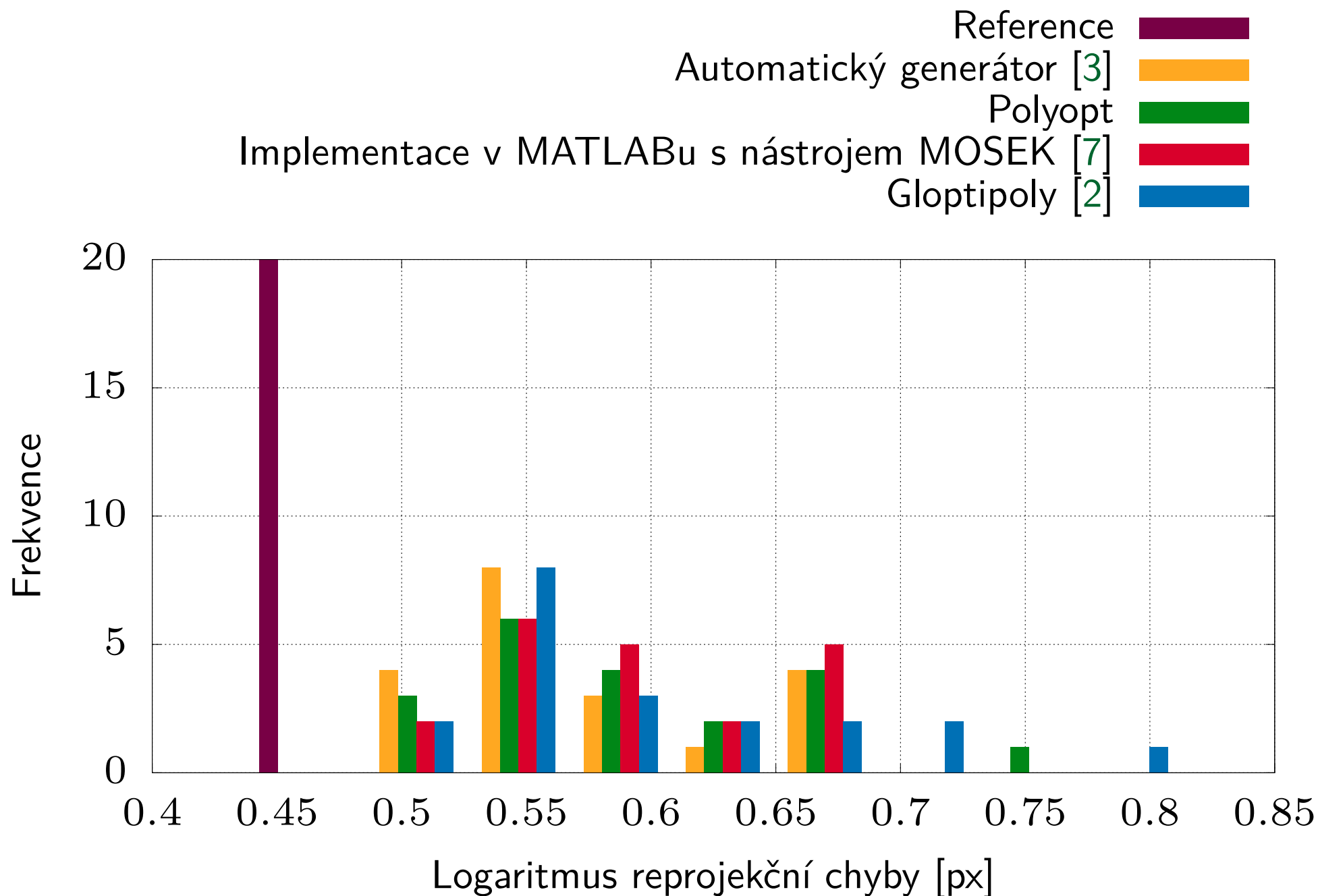
P3P: Histogram výpočetních časů



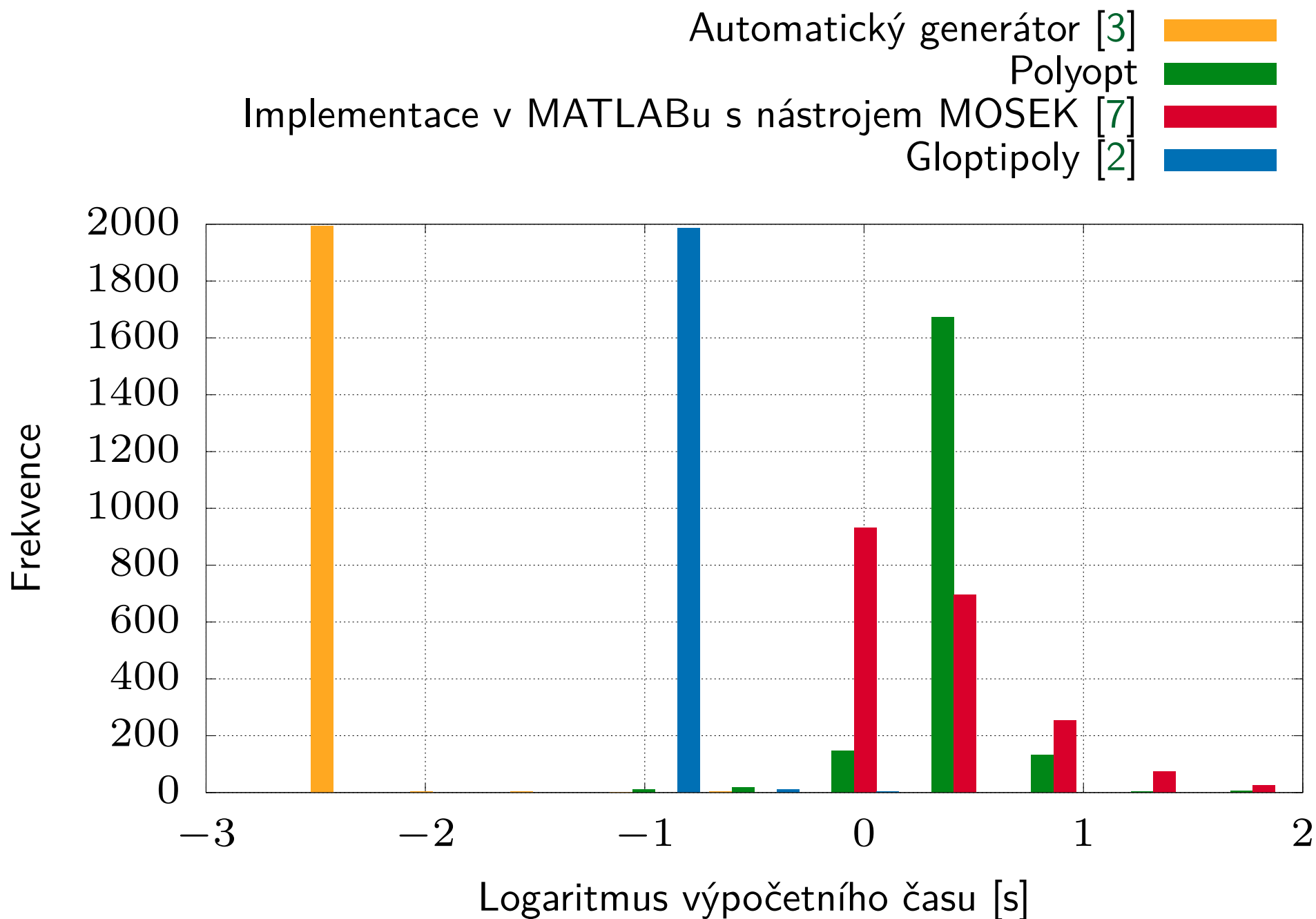
P3P: Histogram stupňů relaxovaných monomů



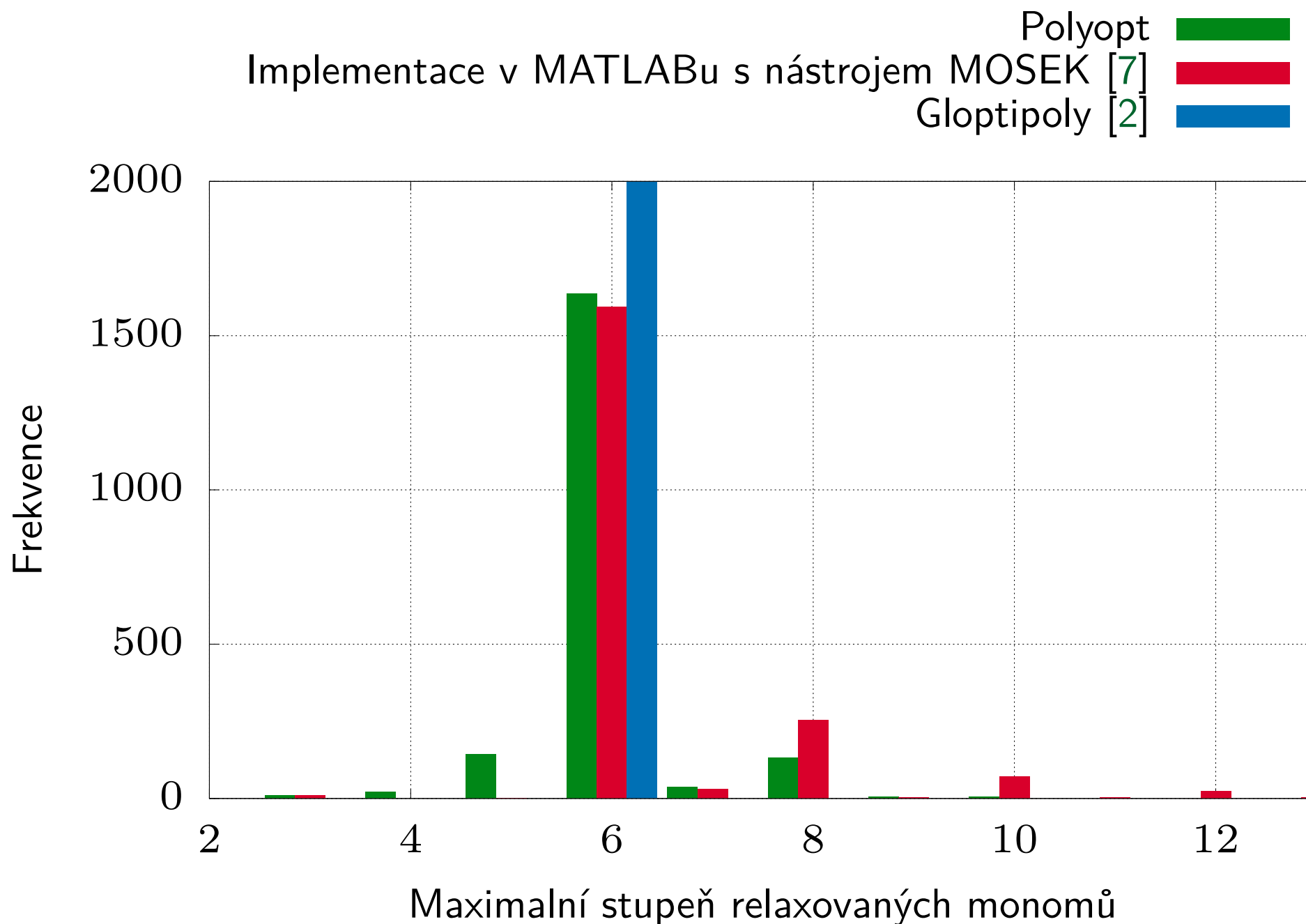
P3.5Pf: Histogram reprojekčních chyb



P3.5Pf: Histogram výpočetních časů



P3.5Pf: Histogram stupňů relaxovaných monomů



P3.5Pf: Histogram relativních chyb ohniskových vzdáleností

