

۱- مفاهیم Projection و Cylindrical Extension را در منطق فازی به طور کامل شرح دهید.

۲- دو رابطه فازی زیر را در نظر بگیرید و ترکیب $R_1 \circ R_2$ را به صورت Max_Produce محاسبه نمایید.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{ROQ}(x, z) = \text{Max}_{y \in V} \text{Produce}[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)]$$

۳- یک سیستم فازی با دو ورودی و یک خروجی از دو قانون زیر تشکیل شده است را در نظر بگیرید:

if x_1 is A_1 and x_2 is A_2 , Then y is A_1

if x_1 is A_2 and x_2 is A_1 , Then y is A_2

که A_1 و A_2 مجموعه‌های فازی در R با تعاریف تابع عضویت زیر می‌باشد.

$$\mu_{A_1}(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{if } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{A_2}(u) = \begin{cases} 1 - |u - 1| & \text{if } 0 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید که ورودی سیستم فازی $(x_1^*, x_2^*) = (0.3, 0.6)$ می‌باشد و از فازی کننده Singleton استفاده می‌شود. خروجی y^* سیستم فازی را تحت موتور استنتاج لوکاشویز و بی‌فازی کننده Center Average محاسبه کنید.

$$\text{Center Average بی‌فازی کننده } y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

$$\mu_{B'}(y) = \text{Min}_{l=1}^M \left\{ \text{Sup}_{x \in U} \text{Min} \left[\mu_{A'}(x), 1 - \text{Min}_{i=1}^n \left(\mu_{A'_i}(x_i) \right) + \mu_{B^l}(y) \right] \right\}$$

۴- فرض کنید که یک پایگاه قوانین فازی تنها از یک قاعده به فرم زیر تشکیل شده است:

if x_1 is A_1 and ... and x_n is A_n , Then y is B

$$\mu_B(y) = \exp(-y^2) \quad \text{که}$$

اگر ورودی سیستم فازی (A') یک Fuzzy Singleton به فرم زیر باشد:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع عضویت خروجی سیستم فازی $\mu_B(y)$ را در دو حالت زیر رسم کنید.

الف) Produce Inference Engine

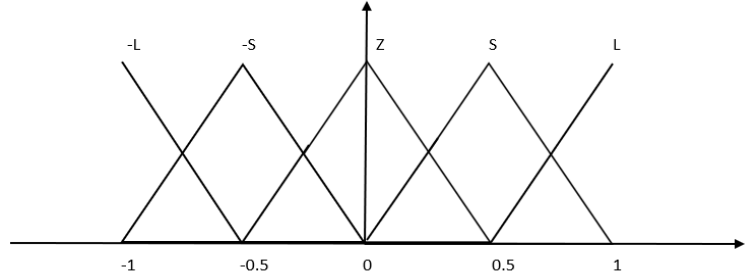
$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M \left[\sup_{x \in U} \left(\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

ب) Zadeh Inference Engine

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1}^M \left\{ \sup_{x \in U} \min \left[\mu_{A'}(x), \max \left(\min \left(\mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right), 1 - \min_{i=1}^n \left(\mu_{A_i^l}(x_i) \right) \right) \right] \right\}$$

۵- در یک سیستم کنترل فازی مجموعه‌های فازی مطابق شکل زیر برای e' و e در نظر گرفته شده است:

- Ru1: if e is Z and e' is Z Then u is Z
 Ru2: if e is Z and e' is $-S$ Then u is S
 Ru3: if e is S and e' is Z Then u is $-S$
 Ru4: if e is S and e' is $-S$ Then u is Z



مشاهده: $\mu_{A_i'}(e, e') = \begin{cases} 1 & e = 0.25, e' = -0.25 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

استلزام مورد استفاده لوکاشویز: $\mu_{Q_L}(x, y) = \min[1, 1 - \mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)]$

استنتاج مورد استفاده G.M.P: $\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \min [\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)]$

الف) مجموعه فازی حاصل از خروجی کنترلی را به روش استنتاج بر مبنای ترکیب قواعد به صورت‌های زیر بدست آورید.

1 – Mamadani Combination $Q_M = \bigcup_{l=1}^M R_u^{(l)}$

2 – Godel Combination $Q_G = \bigcap_{l=1}^M R_u^{(l)}$

ب) مجموعه فازی حاصل از خروجی کنترلی را به روش استنتاج بر مبنای قواعد مجزا به صورت‌های زیر بدست آورید.

1) $\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) \dot{+} \dots \dot{+} \mu_{B'_M}(y)$

2) $\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) * \dots * \mu_{B'_M}(y)$

از Max به جای Sup و اپراتورهای Union استفاده کنید و از Min به جای اپراتورهای Intersection استفاده نمایید.

۶- اگر Q یک رابطه فازی (Fuzzy Relations)، در $U \times U$ باشد، Q را Reflexive می‌نامند. اگر برای هر $u \in U$ داشته باشیم $\mu_Q(u, u) = 1$ نشان دهید که اگر Q یک رابطه Reflexive باشد آنگاه:

الف) QOQ نیز یک رابطه Reflexive است.

ب) $Q \subseteq QOQ$

ترکیب O را به صورت یک ترکیب $Max - Min$ در نظر بگیرید

$$\mu_{ROQ}(x, z) = \text{Max}_{y \in V} \text{Min}[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)]$$

۷- ثابت کنید که Intersection ما بین دو مجموعه فازی محدب، یک مجموعه فازی محدب است؟ درباره Union ما بین این دو مجموعه چه می توان گفت؟ جهت Intersection از Min و جهت Union از Max استفاده نمایید.

تعریف مجموعه محدب در فازی: $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]: \mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$

۸- مجموعه های U و V را به صورت $U = [x_1, x_2, x_3]$ و $V = [y_1, y_2]$ را با یک قانون $\text{if } x \text{ is } A, \text{ Then } y \text{ is } B$ که

$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.4}{x_3}$ و $B = \frac{0.6}{y_1} + \frac{0.7}{y_2}$ می باشد فرض نمایید یک رخداد $x \text{ is } A'$ را با $A' = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ تحت استنتاج G.M.P با نتیجه گیری $y \text{ is } B'$ را در نظر گرفته و تحت شرایط زیر B' را محاسبه نمایید.

الف) استلزام Dienes-Rescher

ب) استلزام Zadeh

یادآوری: (از Max به جای Sup استفاده شود). استنتاج G.M.P: $\mu_{B'}(y) = \text{Sup}_{x \in U} t[\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)]$

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \text{Max}[1 - \mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)] \quad \text{و} \quad \mu_{Q_Z}(x, y) = \text{Max}[\text{Min}(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)), 1 - \mu_{FP_1}(x)]$$

۹- در مسئله ۸ فرض نمایید که علاوه بر یک قانون فوق قانون دومی به صورت زیر موجود می باشد:

$\text{if } x \text{ is very } A, \text{ Then } y \text{ is } \text{Moer or less } B$

تمامی شرایط مسئله ۸ را در نظر گرفته و تنها از استلزام Dienes-Rescher تحت استنتاج G.M.P رخداد A' خروجی B' را در دو حالت زیر محاسبه نمایید.

الف) استنتاج بر مبنای ترکیب قواعد به صورتهای:

$$Q_G = \bigcap_{l=1}^M R_u^{(l)} \quad \text{۲- ترکیب گودل} \qquad Q_M = \bigcup_{l=1}^M R_u^{(l)} \quad \text{۱- ترکیب ممدانی}$$

ب) استنتاج بر مبنای قواعد مجزا به صورتهای:

$$1) \mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) \dot{+} \dots \dot{+} \mu_{B'_M}(y)$$

$$2) \mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) * \dots * \mu_{B'_M}(y)$$

از Max به جای Sup و Union و از Min به جای Intersection استفاده شود.

$$veryA = \int_x \frac{\mu_A^2(x)}{x} \quad \text{و} \quad More\ or\ less = \int_x \frac{\mu_A^{0.5}(x)}{x}$$

۱۰- در فضای n بعدی یک رابطه فازی می‌تواند دارای چند *Projection* متمایز باشد؟

۱۱- نشان دهید که برای هر رابطه مکمل می‌توان وضعیتی را بیان نمود که $C(a) = a$.

۱۲- دو مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید و فاصله فازی ما بین آنها را محاسبه کنید.

$$A = \{(1,0.5), (2,1), (3,0.3)\} \quad B = \{(2,0.4), (3,0.4), (4,1)\}$$

تعریف: در فضای x فاصله فازی $d(A,B)$ ، بین دو مجموعه فازی A و B طبق اصل توسعه به صورت یک مجموعه فازی به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\forall \delta \in R^+, \mu_{d(A,B)}(\delta) = \text{Max}_{\delta=d(A,B)} [\text{Min}(\mu_A(a), \mu_B(b))]$$

۱۳- دسته فازی توابع زیر را در نظر گرفته و انتگرال آنها در بازه *Crisp* معرفی شده X بدست آورید.

$$\tilde{f} = \{(f_1, 0.4), (f_2, 0.7), (f_3, 0.4)\}, \quad X = [1,2], \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x + 1$$

تعریف: فاصله غیر فازی $[a,b]$ را در نظر بگیرید. اگر یک تابع فازی با مقدار فازی $\tilde{f}(x)$ برای $x \in [a,b]$ تعریف شود مقدار انتگرال این تابع فازی $\tilde{I}(a,b)$ به صورت تابع فازی زیر قابل محاسبه است. (انتگرال بر روی بازه $[a,b]$ صورت گرفته است.)

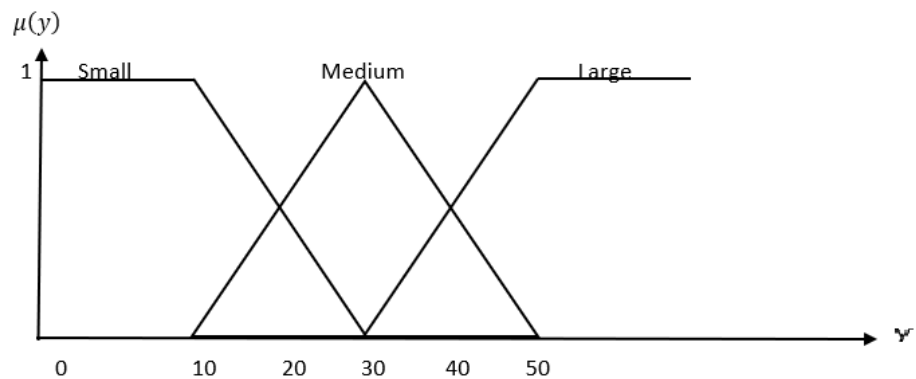
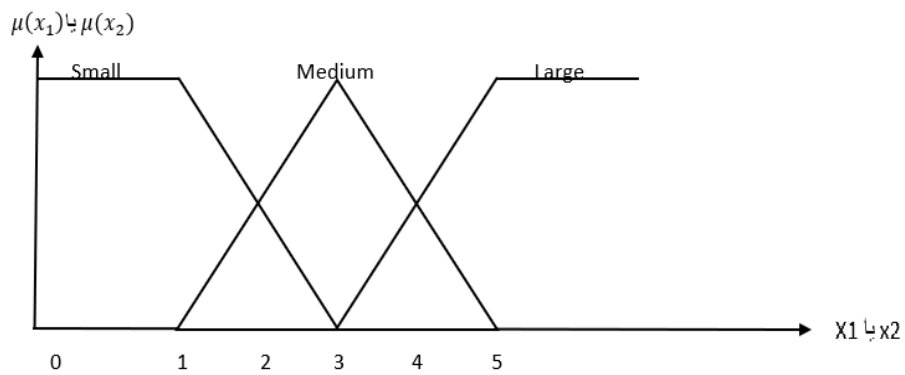
$$\tilde{I}(a,b) = \left\{ \left(\int_a^b f_{\alpha}^{-}(x) dx + \int_a^b f_{\alpha}^{+}(x) dx, \alpha \mid \alpha \in [0,1] \right) \right\}$$

که $f_{\alpha}^{-}, f_{\alpha}^{+}$ توابع α_cut متعلق به $\tilde{f}(x)$ می‌باشد و علامت جمع بکار رفته به معنی جمع جبری نمی‌باشد و معنای لحاظ کردن هر دو تابع $f_{\alpha}^{-}, f_{\alpha}^{+}$ در مجموعه نهایی است.

۱۴- روش‌های هایبرید در طراحی سیستم‌های هوشمند را توضیح دهید. چند مثال بزنید و مزیت‌های مورد انتظار در چنین روشی را به عنوان نمونه برای سیستم‌های نرو فازی بیان کنید. چند نمونه ساختاری متمایز از سیستم‌های نرو فازی می‌توان بیان نمود، شرح دهید.

۱۵- با توجه به تکنیک جدول مشاهده و داده‌های زیر مجموعه قوانینی کامل (*complete*)، سازگار (*consistent*) و پیوسته (*continuous*) ارائه نمایید و این خواص را برای این مجموعه قوانین اثبات نمایید.

توابع عضویت فضای ورودی (x_1, x_2) و فضای خروجی (y) در شکل‌های زیر نمایش داده شده است.



داده‌های مشاهده با فرمت (x_1, x_2, y) به شرح زیر می‌باشد.

$\{(1.25, 2.75, 10), (4.5, 3.5, 45), (2.5, 1.5, 25), (3.5, 5, 30), (1.25, 5, 30), (3.5, 4.5, 45),$
 $(5, 1.25, 30), (1.5, 4.5, 45), (5, 3, 50), (1.5, 2.5, 25), (1.5, 4.5, 45), (2.75, 1.25, 10)\}$
