سیستم های فازی

دکتر کیوان معقولی

مراجع

* 1 - A course in fuzzy system and Control , Li-xin Wang, Prentice Hall, 1997
* 2- Fuzzy and Neuro-fuzzy systems in medicine, H.N. Teodorescu, A. Kandel, LC.Jain, CRC Press,1998
* 3-1st course on fuzzy theory and Applications, kwang H. lee, 2005 springer
* 4- Fuzzy logic a practical approach, F.Martin , MC Neill , EL.Thro, Academic Press, 1994.
* 5- Fuzzy set Theory Foundations is Applications, G.K.Klir, U.H .ST.Chair, Prentice Hall 1997
* 6- Fuzzy Engineering, Prentice Hall, 1997
* 7- Fuzzy Logic with engineering Applications, MCGrawHill, 1995
* 8- Fuzzy logic intelligence, control and information, Prentice Hall, 1991
* 9- Fuzzy Modeling, paradigms and practice, Kluwer, Academic Publ., 1996
* 10- Fuzzy logic A modern perspective, IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, J.Yen, Vol. II, No. 1, 1999.
* 11- The Birth and Evolution of Fuzzy logic , Int. Journal on General systems, L.A.Zadeh, Vol. 17, 1990, PP.95-105

رئوس مطالب

* مقدمه‌ای بر مجموعه‌های فازی
* ریاضیات فازی (تعاریف ، عملیات فازی ، ارتباط‌های فازی و متغیرهای کلامی ، متغیرهای فازی ، ارتباط بین متغیر در منطق فازی و یا گزاره‌های شرطی و ساختارهای فازی برای قواعد کلاسی)
* منطق فازی ، استدلال‌های تقریبی
* فازی کننده و بی فازی کننده‌ها
*
* میان ترم
* طراحی سیستم‌های فازی
* کاربردهای منطق فازی و کنترل سیستم
* کاربردهای منطق فازی در پردازش سیگنال‌ها
* سیستم‌های ترکیبی فازی با عصبی و ژنتیک

ارزیابی

* میان ترم ۲-۴ نمره
* سمینار ۴- ۶ نمره
* مابقی پایان ترم

مقدمه‌ای بر مجموعه‌های فازی

* مجموعه اعداد اول را در نظر بگیرید این مجموعه از مجموعه مرجع اعداد طبیعی برگرفته شده است :
* مرجع X = {1, 2, 3, 4 , … }
* اعداد اول A= {2, 3, 5,… }
* A= {(1,0),(2,1),(3,1),(4,0),(5,1),… }

$$(x, \mu_A(x))$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

* تابع عضویت Membership function
* مجموعه غیر فازی ، مجموعه قطعی ، مجموعه ترد crisp
* مثال: مجموعه افراد قد بلند

{(180,1),(185,1),(175,0.8),(170,0.6),(150,0.1),(140,0)}

مجموعه‌های فازی

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}, \mu$$

* Crisp: ={0,1}
* Fuzzy: =[0,1]

* مثال: مجموعه اعداد کوچک در مجموعه اعداد طبیعی
* A={(0,1),(1,0.8),(2,0.6),(3,0.4),(4,0.2)}
* طریقه دیگر نمایش:

$$A = \frac{1}{0} + \frac{0.8}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.2}{4}$$

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x} \qquad A = \Sigma \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

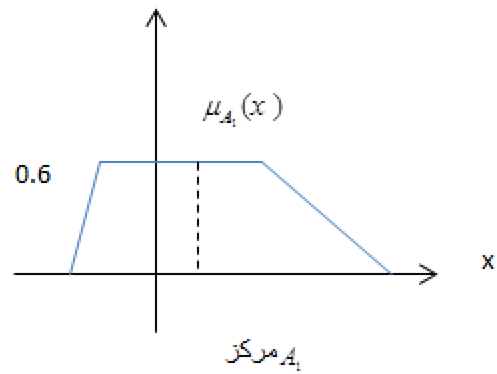
ریاضیات فازی:
تعاریف مقدماتی

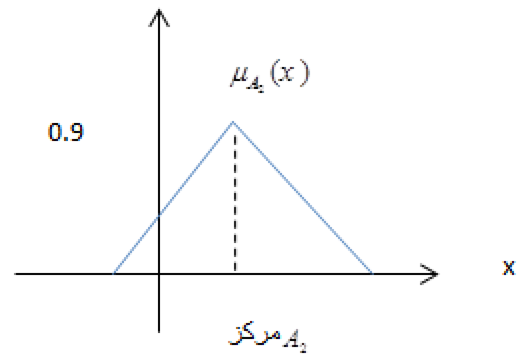
* **تکیه‌گاه (support) یک مجموعه فازی:**
* مجموعه‌ای است غیر فازی و از کلیه نقاطی تشکیل می‌شود که مقدار تابع عضویت از صفر بزرگتر است.

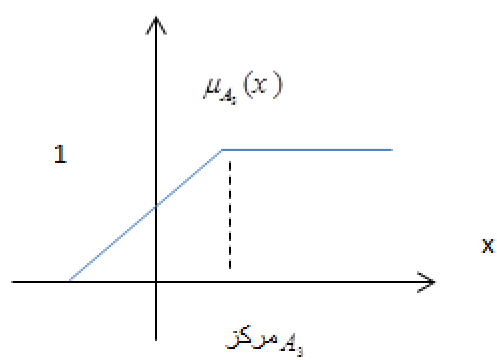
$$\sup port(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}$$

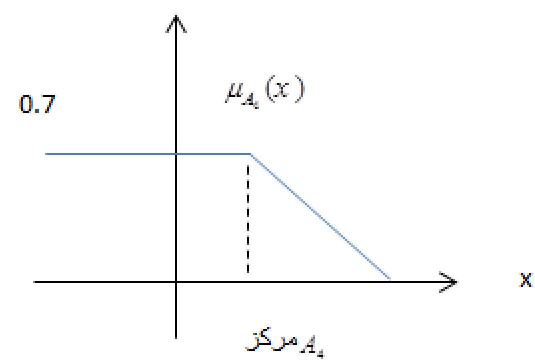
* اگر تکیه‌گاه یک مجموعه فازی تهی باشد آن مجموعه فازی تهی خواهد بود.
* **نقطه تقاطع (crossover) :**
* نقطه‌ای از مرجع است که در آن نقطه مقدار تابع عضویت برابر ۰/۵ است.

* مجموعه فازی تکین Fuzzy singleton:
* یک زیر مجموعه فازی که تکیه‌گاه آن فقط از یک نقطه مجموعه مرجع تشکیل شده باشد.
* مرکز center :
* مقدار متوسط همه نقاطی که تابع عضویت در آن نقاط دارای مقدار ماکزیمم است به شرطی که متوسط، محدود باشد.
* اگر مقدار متوسط نامحدود مثبت (یا منفی) باشد مرکز به عنوان کوچکترین (و یا بزرگترین) نقطه‌ای است که در آن تابع عضویت ماکزیمم می‌شود.


$\mu_{A_1}(x)$
0.6
x
مرکز A_1


$\mu_{A_2}(x)$
0.9
x
مرکز A_2


$\mu_{A_3}(x)$
1
x
مرکز A_3

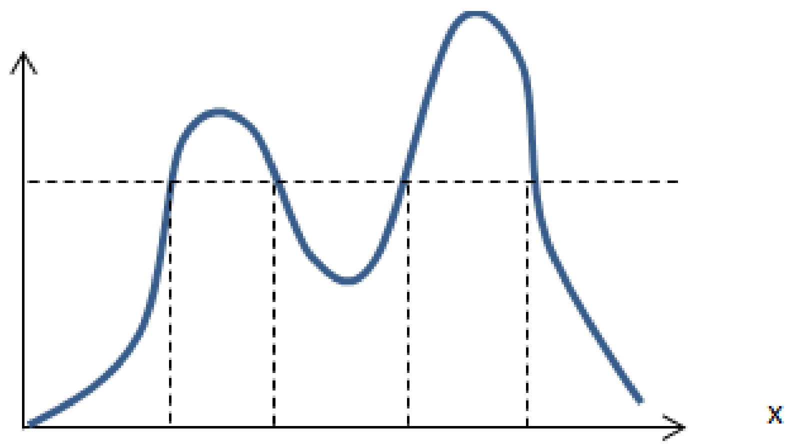

$\mu_{A_4}(x)$
0.7
x
مرکز A_4

* **ارتفاع (Height):** بیشترین مقدار تابع عضویت
* **مجموعه نرمال:** مجموعه‌ای است فازی که ارتفاع آن یک باشد در غیر این صورت به آن مجموعه فازی subnormal گویند.
* **برش α از یک مجموعه فازی (α cut of a fuz.set) :**
* یک مجموعه غیر فازی یا ترد است که شامل عناصری می‌شود که مقدار تابع عضویت آن‌ها بزرگتر یا مساوی α می‌باشد.

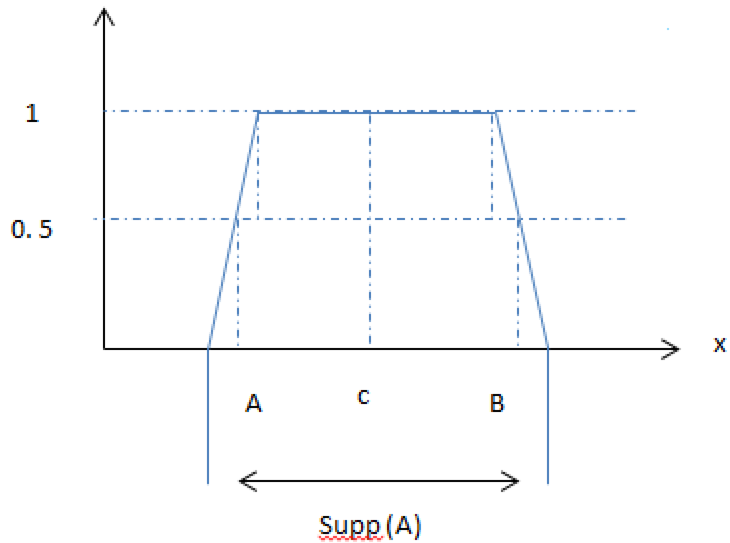
$$A_\alpha = \{x \in a \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

α =0.8

0.8 cut of A



* هسته یک مجموعه فازی (core):
* مجموعه تمام المان‌های از x است که $\mu_A(x)=1$ است.



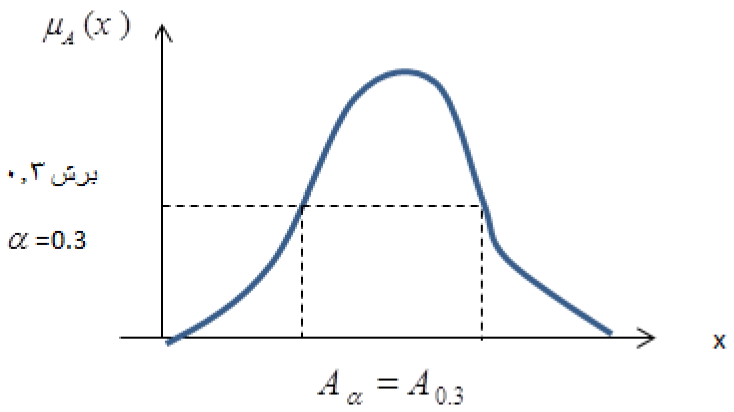
C: center

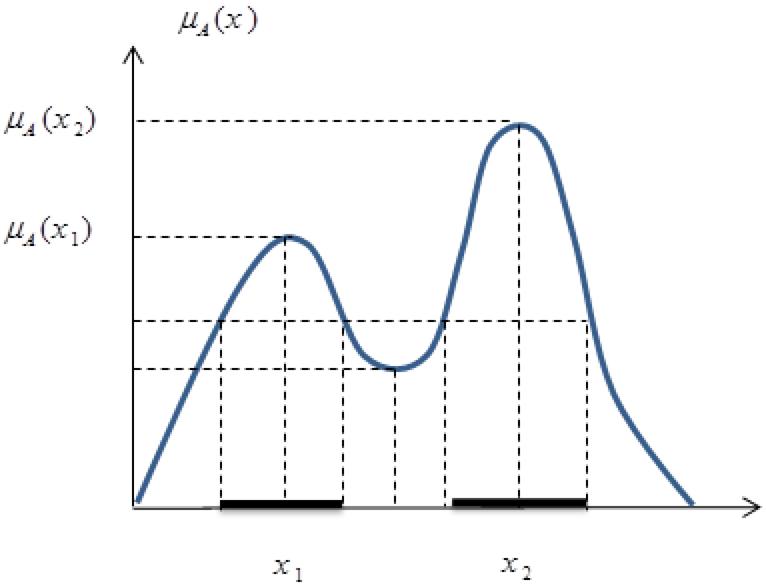
Height=1 $\longrightarrow$ normal

(A,B)=crossover point =0.5

* **مجموعه فازی محدب (Convex):**
* مجموعه فازی A را محدب گویند اگر و فقط اگر هر برش α از آن محدب باشد.
* تعریف مجموعه محدب در حالت غیر فازی :

$$x_1, x_2 \in A \leftrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A \qquad \lambda \in [0,1]$$

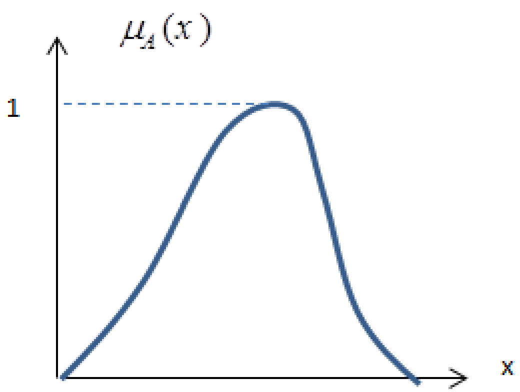

$\mu_A(x)$
برش ۰,۳
$\alpha = 0.3$
x
$A_\alpha = A_{0.3}$

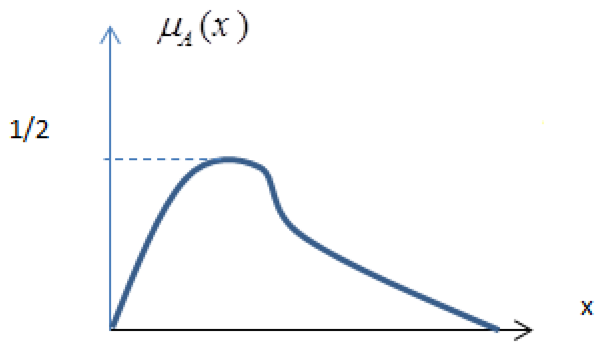

$\mu_A(x)$
$\mu_A(x_2)$
$\mu_A(x_1)$
x_1
x_2

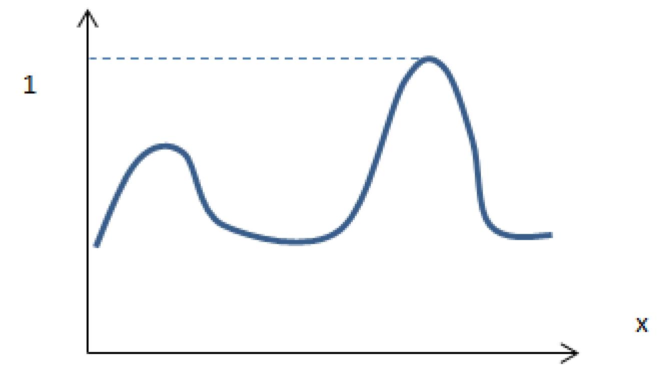
* تعریف مجموعه محدب در فازی :

$$\forall x_1, x_2 \in X \;, \forall \lambda \in [0,1]$$

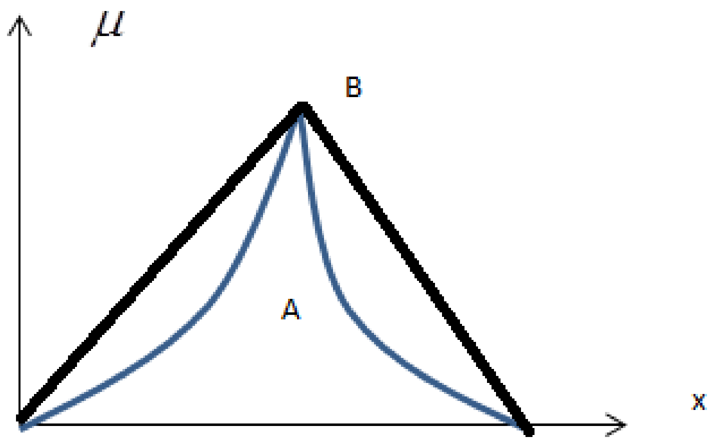
$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$







* **عدد فازی :**
* یک زیر مجموعه فازی از یک مجموعه مرجع پیوسته را که محدب و نرمال باشد را یک عدد فازی می‌گویند.
* **مجموعه فازی تام (complete):**
* مجموعه فازی A را روی مرجع X تام گویند اگر و فقط اگر برای هر x های مجموعه مرجع مقدار تابع عضویت یک باشد.(یعنی مجموعه فازی با مجموعه مرجع یکسان باشد با تابع عضویت ۱)
* **زیر مجموعه :**
* مجموعه فازی A را زیر مجموعه B گوییم ($A \subset B$) اگر و فقط اگر:
* $\forall x \in X \,, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$



$$A \subset B$$

* **تساوی دو مجموعه (A=B)**
* دو مجموعه فازی را مساوی گویند اگر و فقط اگر :

$$\forall x \in X \ , \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

عملیات بر روی مجموعه های فازی

* **متمم نگاری یا complementation :**
* اپراتور و یا عملگر آن را با c نمایش می‌دهند.

$$c:[0,1] \to [0,1]$$

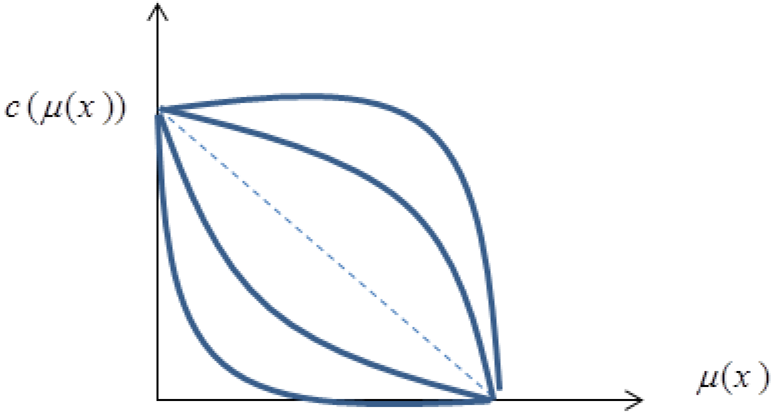
$$c[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

* شرط اول :

$$c(0) = 1, c(1) = 0$$

* شرط دوم :

$$a,b \in [0,1] \quad if \quad a < b \quad then \quad C(a) \geq C(b) \qquad b = \mu_B(x) \qquad a = \mu_A(x)$$



$c(\mu(x))$
$\mu(x)$

* تابع متمم کلاس ساجینو (sugeno):

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \qquad , \qquad \lambda \in (-1,\infty)$$

* مثال : مجموعه مرجع x و مجموعه فازی A را در نظر بگیرید و مجموعه فازی متمم A را در کلاس sugeno با $\lambda = 0$ به دست آورید.

$$x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad , \quad A = \{\frac{0.5}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.7}{x_4}\} \qquad \bar{A} = \{\frac{1}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.3}{x_4}\}$$

* تابع متمم کلاس Yager:

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}} \quad , \qquad w \in (0, \infty)$$

* اشتراک دو مجموعه فازی:

$$\forall x \in X \ : \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

* اجتماع دو مجموعه فازی :

$$\forall x \in X \ : \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

* جمع مقید (Bonded):

$$A \oplus B = \int_x \frac{[1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(x))]}{x}$$

* تفریق مقید یا محصور شده :

$$A \ominus B = \int_x \frac{0 \vee (\mu_A(x) - \mu_B(x))}{x}$$

$$very \quad A = A^2 = \int_x \frac{\mu_A{}^2(x)}{x}$$

$$More \quad or \quad less \quad A = A^{0.5} = \int_x \frac{\mu_A{}^{0.5}(x)}{x}$$

$$Not \quad very \quad A = \int_x \frac{1 - \mu_A{}^2(x)}{x}$$

$$Not \; More \quad or \quad less \quad A = \int_x \frac{1 - \mu_A{}^{0.5}(x)}{x}$$

* خواص عملگرهای $\cap, \cup, -, +$:
* خاصیت اول :

$$\begin{cases} A \cap \bar{A} \neq \phi \\ A \cup \bar{A} \neq M \end{cases}$$

* مثال :
*

$$\bar{A} = \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{1}{x_4} \qquad A = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} \qquad M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$A \cap \bar{A} = \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} \neq \phi$$

$$A \cup \bar{A} = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{1}{x_4} \neq M$$

* خاصیت دوم : جابجایی :

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

* خاصیت سوم : شرکت پذیری :

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

* خاصیت چهارم : توزیع پذیری :

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

* خاصیت پنجم : دمورگان :

$$\begin{cases} \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \oplus B} = \bar{A} \ominus \bar{B} \\ \overline{A \ominus B} = \bar{A} \oplus \bar{B} \end{cases}$$

* **نرم‌های S و T : (T-norm, S-norm)**
* هر دو توابعی هستند از $[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$
* $S = union = Co \quad norm = S_{norm} = \vee$
* اجتماع حالت خاصی از S_{norm} است.

$$T = Inter\ section = T_{norm} = \wedge$$

* اشتراک حالت خاصی از T_{norm} است.

* خواص :
* الف) شرایط مرزی Boundary Condition

$$\begin{cases} T(0,0)=0, \;\; T(x,1)=T(1,x)=x \\ S(1,1)=1, \;\; S(x,0)=S(0,x)=x \end{cases}$$

* ب)غیر کاهشی Non Decreasing Condition

$$if \quad x_1 \le x_2, y_1 \le y_2 \rightarrow T(x_1,y_1) \le T(x_2,y_2), S(x_1,y_1) \le S(x_2,y_2)$$

* ج)جابجایی commutative condition

$$\begin{cases} T(x_1,y_1)=T(y_1,x_1) \\ S(x_1,y_1)=S(y_1,x_1) \end{cases}$$

* د)شرکت پذیری Associative Condition

$$\begin{cases} T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z)) \\ S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z)) \end{cases}$$

* معرفی متداولترین S_{norm} و T_{norm} ها :
* کلاس Dombi :

$$\begin{cases} S_{\lambda}(a,b)=\dfrac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}]^{\frac{-1}{\lambda}}}, \lambda\in(0,\infty) \\ T_{\lambda}(a,b)=\dfrac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^{\lambda}+(\frac{1}{b}-1)^{\lambda}]^{\frac{1}{\lambda}}} \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} S_{\lambda}(a,b)=Max(a,b), \lim_{\lambda\to\infty} T_{\lambda}(a,b)=Min(a,b)$$

* کلاس Dubios :

$$\begin{cases} T_\alpha(a,b) = \dfrac{ab}{Max\,(a,b,\alpha)} \\ S_\alpha(a,b) = \dfrac{a+b-ab-Min(a,b,1-\alpha)}{Max\,(1-a,1-b,\alpha)} \end{cases}$$

$$\alpha \in [0,1]$$

* کلاس yager :

$$\begin{cases} S_w(a,b) = Min[1,(a^w + b^w)^{\frac{1}{w}}], w \in (0,\infty) \\ T_w(a,b) = 1 - Min[1,((1-a)^w + (1-b)^w)^{\frac{1}{w}}] \end{cases}$$

$$\lim_{w\to\infty} S_w(a,b) = Max\,(a,b), \lim_{w\to\infty} T_w(a,b) = Min(a,b)$$

* zadeh : زاده

$$\begin{cases} T(x,y) = Min(x,y) \\ S(x,y) = Max(x,y) \end{cases}$$

* Arithmetic : جبری

$$\begin{cases} T_{ap}(x,y) = x.y \\ S_{as}(x,y) = x \oplus y = x + y - xy \end{cases}$$

* :Drastic

$$T_{dp} \begin{cases} x & , \ y = 1 \\ y & , \ x = 1 \\ 0 & , \ x,y < 1 \end{cases} \qquad S_{ds} \begin{cases} x & , \ y = 0 \\ y & , \ x = 0 \\ 0 & , \ x,y > 0 \end{cases}$$

* انیشتن **Einstein:**

$$\lim_{\lambda \to 0} S_{\lambda}(a,b) = S_{ds}(a,b)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} T_{\lambda}(a,b) = T_{dp}(a,b)$$

$$\lim_{w \to 0} S_{w}(a,b) = S_{ds}(a,b)$$

$$\begin{cases} S_{ES}(a,b) = \dfrac{a+b}{1+ab} \\ T_{EP}(a,b) = \dfrac{ab}{2-(a+b-ab)} \end{cases}$$

* **Hamacher:**

$$\begin{cases} T_{hp}(a,b)=\dfrac{ab}{a+b-ab} \\ S_{hs}(a,b)=\dfrac{a+b-2ab}{1-ab} \end{cases}$$

* می‌توان نشان داد که Min بزرگترین T-norm و Drastic product کوچکترین T-norm است و همچنین Max کوچکترین S-norm و Drastic Sum بزرگترین S-norm است.

$$T_{dp}(a,b)\le T(a,b)\le Min(a,b)$$

$$Max(a,b)\le S(a,b)\le S_{ds}$$

* اگر رابطه هایی از S-norm ، T-norm و compliment در فرمول زیر صدق نمایند تشکیل یک کلاس همبسته را می‌دهند.

$$C[S(a,b)] = T[c(a), c(b)]$$

* اپراتورهای متوسط گیری : Averaging operators

Minimum	$\frac{a+b}{2}$	Maximum
Drastic Product	Fuzzy and|Fuzzy OR	Drastic Sum
Einstein Product	Max-Min averages	Einstein Sum
Algebraic product	$۰ \longleftarrow \lambda \longrightarrow ۱$	Algebraic Sum
Dombi T-norm	Generalized means	Dombi S-norm
$0 \longleftarrow \lambda \longrightarrow \infty$	$-\infty \longleftarrow \alpha \longrightarrow +\infty$	$\infty \longleftarrow \lambda \longrightarrow ۰$
Yeager T-norm		Yager S-norm
$0 \longleftarrow w \longrightarrow \infty$		$\infty \longleftarrow w \longrightarrow ۰$
Intersection operators	Averaging operators	Union operators

$T_{dp}(a,b)$ $Min(a,b)$ $Max(a,b)$ $S_{ds}(a,b)$

* اپراتورهای متوسطگیری را با υ نمایش می‌دهند و نگاشتی به صورت زیر است.

$$\upsilon : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

* **Min-Max average:**

$$\upsilon_{\lambda}(a,b) = \lambda \text{ Max (a,b) } + (1-\lambda) \text{ Min (a,b)} \quad , \lambda \in [0,1]$$

* **Generalized means:**

$$\upsilon_{\alpha}(a,b) = \left(\frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} , \alpha \in R , \alpha \neq 0$$

- :Fuzzy AND

$$\upsilon_p(a,b) = pMin(a,b) + (1-p)\frac{(a+b)}{2}, p \in [0,1]$$

- :Fuzzy OR

$$\upsilon_\wp(a,b) = \wp Max(a,b) + (1-\wp)\frac{(a+b)}{2}, \wp \in [0,1]$$

* **ضرب کارتزین چند مجموعه فازی:**
* ضرب کارتزین n مجموعه فازی یک مجموعه فازی در فضای n بعدی حاصلضرب کارتزین مجموعه‌های غیر فازی و مرجع می‌باشد.

$$x_1, x_2, ..., x_n \to x_1 \times x_2 \times ... \times x_n$$

$$A_1, A_2, ..., A_n \to A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

$$\mu(x_1, x_2, ..., x_n) = Min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n))$$

* و یا:

$$\mu_{A_1}(x_1) \times \mu_{A_2}(x_2) \times ... \times \mu_{A_n}(x_n)$$

* مثال : فرض کنید.

$$y=\{y_1,y_2\},X=\{x_1,x_2,x_3\},A=\frac{0.3}{x_1}+\frac{1}{x_3},B=\frac{0.5}{y_1}+\frac{0.3}{y_2}$$

$$R=\left\{\frac{0.3}{(x_1,y_1)},\frac{0.3}{(x_1,y_2)},\frac{0.5}{(x_3,y_1)},\frac{0.3}{(x_3,y_2)}\right\}$$

$$R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3\\ 0 & 0\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

* رابطه‌های فازی (Fuzzy Relations):
* مجموعه‌های مرجع x={x} و Y={y} را در نظر بگیرید. یک رابطه فازی از $X \xrightarrow{R} Y$ یک زیر مجموعه فازی روی حاصلضرب دکارتی Xو Yاست.

$$R(x,y) \subset x \times y$$

$$R = \int_{x \times y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mu_Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n) \right\}$$

* مثال : Relation و یا رابطه خیلی دور بودن را در شهرها در نظر بگیرید و دو مجموعه زیر را فرض کنید.

* U= {سانفرانسیسکو، هنگ کنگ ، توکیو}
* V= {هنگ کنگ ، بوستن}

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{c} SF \\ H.K \\ Tok \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 1 & 0 \\ 0.95 & 0.1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \text{Bost} & \text{H.K.} \end{array} \end{array}$$

* مثال: V=U=R (مجموعه اعداد حقیقی) و ارتباط x تقریباً با y برابر است.

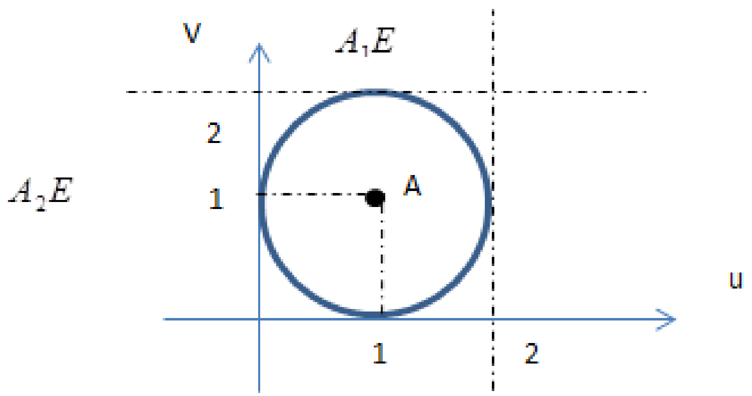
$$\mu_{AE}(x,y)=e^{-(x-y)^2}$$

* رابطه خیلی بزرگتر:

$$\mu_{ML}(x,y)=\frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$$

* Projections & cylindrical Extensions:

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$$



* **تعریف** : اگر Q یک ارتباط فازی در $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ باشد و $\{i_1,\ldots,i_k\}$ یک زیر مجموعه از {1,2,...,n} باشد. تصویر Q برروی $u_{i_1} \times \ldots \times u_{i_k}$ یک رابطه فازی Q_p در $u_{i_1} \times \ldots \times u_{i_k}$ می‌باشد که توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد.

$$\mu_{Q_p}(u_{i_1} \times \ldots \times u_{i_k}) = \underset{u_{j1} \in U_{j1},\ldots u_{j(n-k)} \in U_{j(n-k)}}{Max} \mu_Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

که $\{u_{j_1} \times u_{j_2} \times \ldots \times u_{j_k}\}$ متمم $\{u_{i_1} \times \ldots \times u_{i_k}\}$ نسبت به $\{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n\}$ می‌باشد.

* در حالت خاص دو بعدی داریم: $\mu_Q(x) = Max_{y \in v}\, \mu_Q(x,y)$
* **مثال** : ارتباط فازی شهرهای مثال قبل را در نظر بگیرید و تصویر رابطه فازی ماتریس بیان شده بر روی U و V مجموعه‌های فازی زیر می‌باشد.

$$\begin{array}{c} SF \\ H.K \\ Tok \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 1 & 0 \\ 0.95 & 0.1 \end{bmatrix} \\ \text{Bost} \quad \text{H.K.} \end{array}$$

$$Q_1 = \frac{0.9}{S.F} + \frac{1}{H.K} + \frac{0.95}{ToK}$$

$$Q_2 = \frac{1}{BoS} + \frac{0.9}{H.K}$$

* **مثال :** تصویر های AE که با رابطه $\mu_{AE}(x,y)=e^{-(x-y)^2}$ بر روی U و V تعریف شده‌اند مجموعه‌های فازی زیر را دارا می‌باشند :

$$AE_1=\int_U Max_{y\in V}\frac{e^{-(x-y)2}}{x}=\int_V\frac{1}{x} \qquad AE_2=\int_V Max_{x\in U}\frac{e^{-(x-y)^2}}{y}=\int_V\frac{1}{y}$$

* **تعریف :** اگر Q_p یک ارتباط فازی در $u_{i_1}\times\ldots\times u_{i_k}$ و $\{i_1,\ldots,i_k\}$ یک زیر مجموعه از {1,2,…,n} باشد گسترش سیلندری Q_p به $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ یک ارتباط فازی Q_{PE} در $u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{Q_{PE}}(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\mu_Q(u_{i_1}\times\ldots\times u_{i_k})$$

* **مثال :** تصویرهای مثال قبلی را در نظر بگیرید . گسترش سیلندری این دو تصویر به صورتهای زیر می‌باشد:

$$Q_{1E}=\frac{0.9}{(SF,BoS)}+\frac{0.9}{(SF,HK)}+\frac{1}{(HK,BoS)}+\frac{1}{(HK,HK)}+\frac{0.95}{(ToK,BoS)}+\frac{0.95}{(ToK,HK)}$$

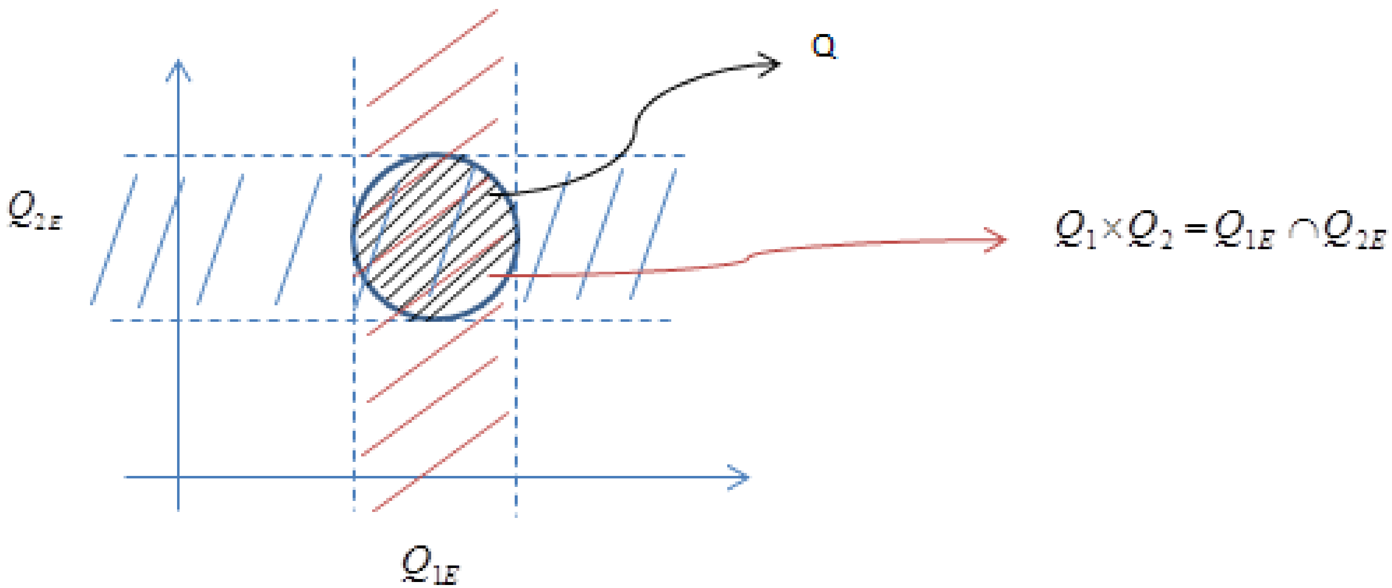
$$Q_{2E}=\frac{1}{(SF,BoS)}+\frac{1}{(HK,BoS)}+\frac{1}{(ToK,BoS)}+\frac{0.9}{(SF,HK)}+\frac{0.9}{(HK,HK)}+\frac{0.9}{(ToK,HK)}$$

* و به طور مشابه برای گسترش سیلندری AE_1 و AE_2 معرفی شده و در مثال قبلی به U*V داریم :

$$AE_{1E}=\int_{u\times v}\frac{1}{(x,y)}=u\times v \qquad AE_{2E}=\int_{u\times v}\frac{1}{(x,y)}=u\times v$$

* **حاصلضرب کارتزین مجموعه فازی :**
* اگر $A_1,\ldots,A_n$ مجموعه‌های فازی در $u_1,\ldots,u_n$ باشند حاصلضرب کارتزین $A_1,\ldots,A_n$ که با $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ نمایش داده می‌شود یک رابطه فازی در $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ می‌باشد که تابع عضویت آن به وسیله رابطه زیر تعریف می‌گردد : $\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) * \mu_{A_2}(u_2) * \ldots * \mu_{A_n}(u_n)$
* که * هر نوع Tnorm می‌باشد.
* نکته : اگر Q یک رابطه فازی در $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ باشد و $Q_1,\ldots,Q_n$ تصاویرشان بر روی $u_1,\ldots,u_n$ باشد در این صورت :

$$Q \subset Q_1 \times \ldots \times Q_n$$


Q
Q_{2E}
Q_{1E}
$Q_1 \times Q_2 = Q_{1E} \cap Q_{2E}$

* **ترکیب روابط فازی :**
* تعریف ترکیب روابط در حوزه crisp:
* اگر $P(u,v)$ و $Q(v,w)$ دو رابطه crisp در فضای مشترک v باشند ترکیب روابط p و Q که با PoQ نمایش داده می‌شود یک رابطه در $u \times w$ می‌باشد به نحویکه $(x,z) \in PoQ$ اگر و تنها اگر حداقل یک y متعلق به v وجود داشته باشد به نحویکه $(x,y) \in P$ و $(y,z) \in Q$ باشند.
* تعریف : PoQ یک ترکیب از P(u,v) و Q(v,w) می‌باشد اگر و تنها اگر :

$$\mu_{PoQ}(x,z) = Max_{y \in v}\, t[\mu_p(x,y), \mu_Q(y,z)]$$

* که $(x,z) \in u \times w$ هر نقطه‌ای در فضای مربوطه می‌باشد.

* ترکیب سوپ-استار (Sup-Star):

$$PoQ = \int_{u \times w} Sup_v [T(p(u,v), Q(v,w))] / (x,z)$$

* حالت های خاص ولی عمومی این ترکیب:
* Max-Min Composition:

$$\mu_{PoQ}(x,z) = Max_{y \in v} Min[\mu_p(x,y), \mu_Q(y,z)]$$

* Max-Product Composition:

$$\mu_{PoQ}(x,z) = Max_{y \in v} [\mu_p(x,y) . \mu_Q(y,z)]$$

* مثال:

$$p(x,y)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 1 & 0\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix} \qquad Q(y,z)=\begin{bmatrix}0.95 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

* Max-Min:

$$PoQ(x,z)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 0.95 & 0.1\\ 0.95 & 0.1\end{bmatrix}$$

* Max-Product:

$$PoQ(x,z)=\begin{bmatrix}0.285 & 0.81\\ 0.95 & 0.1\\ 0.9075 & 0.095\end{bmatrix}$$

* مثال : با تعاریف AE و ML قبلی :

$$\mu_{AEoML}(x,z) = Max_{y\in R}\left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}\right]$$

* **خواص ترکیب :**

۱- شرکت پذیری :

Ro(SoV)=(RoS)oV

۲- توزیع پذیری:

Ro(SUV)=(RoS)U(RoV)

* توزیع پذیری ترکیب بر روی اشتراک همیشه برقرار نیست.

۳- یکنوایی:

$$S \subseteq T \Rightarrow RoS \subseteq RoT$$

اصل توسعه : Extension Principle

اصل توسعه باعث می‌شود که دامنه یک تابع از حوزه نقاط crisp در U به فضای فازی در U تبدیل گردد.اگر $f: U \to V$ یک تابع از مجموعه crisp ، U به مجموعه crisp، V باشد و مجموعه فازی A در U تعریف شده باشد و هدف تعیین مجموعه فازی $B = f(A)$ در V باشد در صورتیکه تابع f یک به یک در نظر گرفته شود داریم :

$$\mu_B(y) = \mu_A\left[f^{-1}(y)\right], y \in V$$

* اگر تابع f یک به یک نباشد :

$$\mu_B(y) = Max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), y \in V$$

مثال : رابطه فازی small تعریف شده در U به شکل زیر است :

U={1,2,… ,10}

$$small : \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5}$$

رابطه فازی حاصل از اصل توسعه تابع $f(x) = x^2$ را به صورت $small^2$ زیر بیان می‌کنیم:

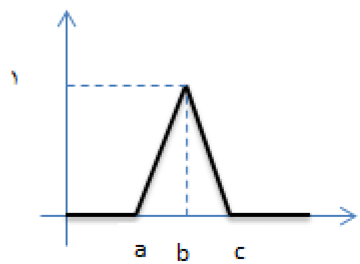
$$small^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{9} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.4}{25}$$

Very small = $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.64}{3} + \frac{0.36}{4} + \frac{0.16}{5}$

* چند نمونه معروف از توابع عضویت (Membership function)

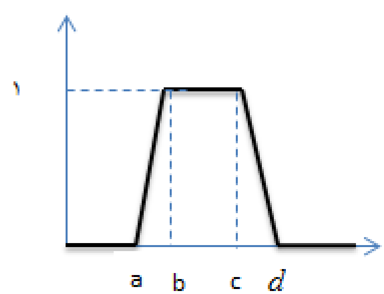
-Triangular MFمثلثی

$$Trn(x:a,b,c)\begin{cases}0 & ,if \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,if \quad a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & ,if \quad b\le x\le c\\ 0 & ,if \quad x>c\end{cases}$$



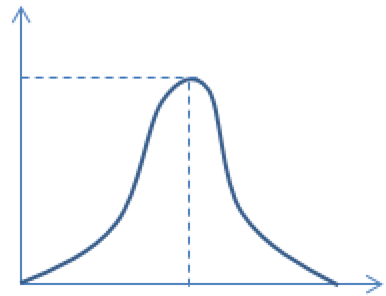
-Trapezoidal MFذوزنقه‌ای

$$Trp(x:a,b,c,d)\begin{cases}0 & ,if \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,if \quad a\le x<b\\ 1 & ,if \quad b\le x<c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & ,if \quad c\le x<d\\ 0 & ,if \quad x\ge d\end{cases}$$



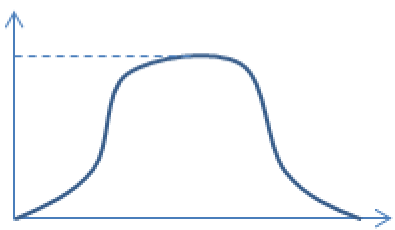
-**Gaussian MF** گوسین

$$gsn(x:a,\delta) = \exp\left[\frac{-(x-a)^2}{\delta^2}\right]$$



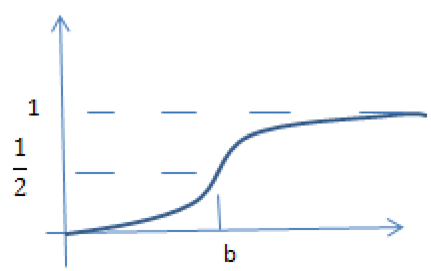
-**Bell-Shaped MF**

$$B\|(x:a,b,\delta) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-\delta}{a}\right|^{2b}}$$



-Sigmoidal MF

$$sgm(x:a,b) = \frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}$$



* متغیرهای کلامی وقواعد فازی :
* Linguistic variable and Fuzzy IF-Then Rules
* تعریف: اگریک متغیر بتواند کلمات زبان طبیعی را به عنوان مقدار اختیار کند متغیر زبانی نامیده می‌شود که این کلمات با مجموعه‌های فازی در حوزه مورد بحث مشخص می‌شوند.
* مهمترین وظیفه متغیرهای کلامی محیا ساختن یک ابزار سیستماتیک جهت تشخیص و توصیف فرآیندهای پیچیده و یا بد تعریف است.در واقع با حرکت از متغیرهای کمی معمول در ریاضیات به سمت متغیرهای زبانی قابلیت شناخت کیفی سیستمهای پیچیده فیزیکی را که توصیف کمی و دقیق آنها ممکن نیست (و یا بسیار مشکل است)پیدا می‌شود.

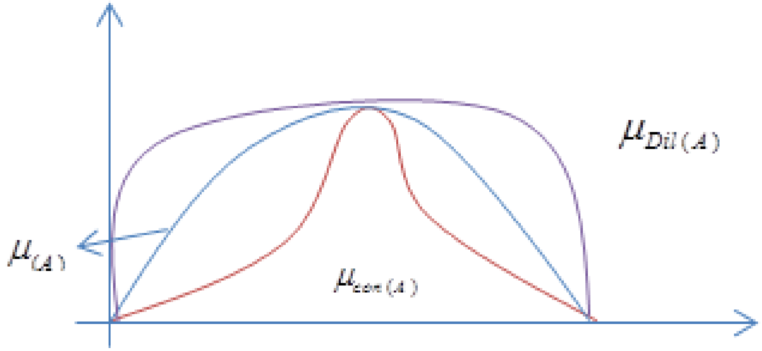
* یک متغیر زبانی یا کلامی به وسیله یک پنج‌تایی مرتب (x ,T(x),U,G,M) معرفی می‌گردد که x است متغیر است (مانند خطا و سرعت ، درجه حرارت ، فشار ، ....) . T(x)مجموعه مقادیر زبانی است که x می‌تواند اختیار کند. (مانند بزرگ ، کوچک، جوان ، پیر،...). U مجموعه مرجعی است که این مقادیر [x,T(x)] بر روی آنها تعریف می‌گردد. M معنایی است که در ذهن شخصی خبره برای تعریف و بیان تابع عضویت بکار می‌رود. و G بیانگر عملگرها بر روی متغیرها و تولید متغیرهای جدید می‌باشد.

* عملگر تمرکز : Concentration

$$\mu_{con(A)}(u) = \mu_A^2(u), con(A) \subset A$$

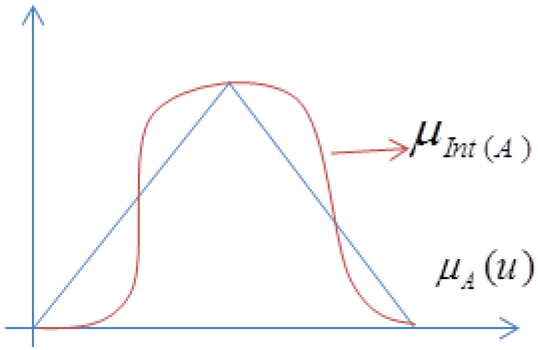
* عملگر اتساع :Dilation

$$\mu_{Dil(A)}(u) = \mu_A^{\frac{1}{2}}(u), A \subset Dil(A)$$



* عملگر Contrast Intersification:

$$\mu_{Int(A)}(u)=\begin{cases}2(\mu_A(u))^2, \mu_A(u)\in[0,\frac{1}{2}]\\ 1-2(1-\mu_A(u))^2, o.w\end{cases}$$



* عملگر Not:

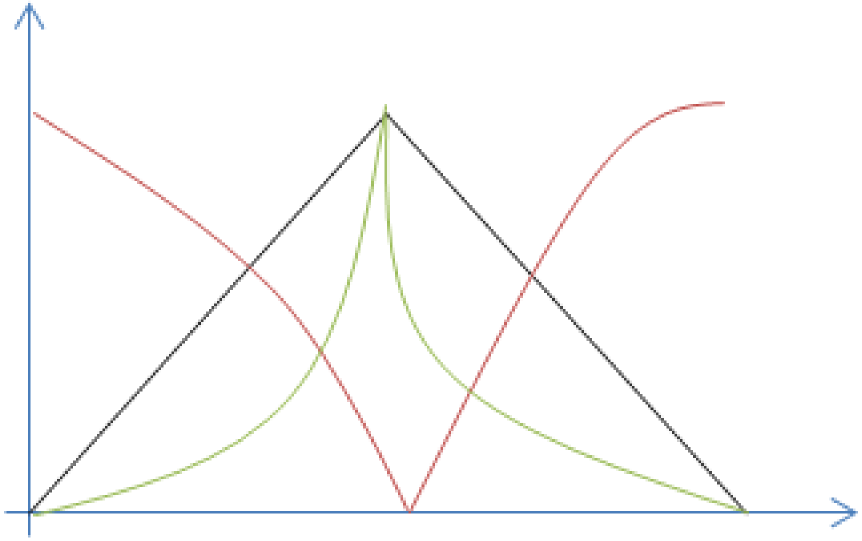
$$\mu_{Not\,(A)}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

* عملگر Plus:

$$\mu_{Plus\,(A)}(u) = (\mu_A(u))^{1.25}$$

* عملگر slightly:

$$Slightly\,(A) = Int\,(Plus\,(A)\,and \quad Not \quad very \quad A)$$



* مثال : اگر مجموعه مرجع u={1,2,3,..5} فرض گردد و مجموعه فازی small بر روی آن بصورت زیر تعریف گردد خواهیم داشت:

$$small = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5}$$

$$very \quad small = \frac{1}{1} + \frac{0.64}{2} + \frac{0.36}{3} + \frac{0.16}{4} + \frac{0.04}{5}$$

$$very \quad very \quad small = very\,(very \quad small\,) = \frac{1}{1} + \frac{0.4096}{2} + \frac{0.1296}{3} + \frac{0.0256}{4} + \frac{0.0016}{5}$$

More or less small= $\frac{1}{1} + \frac{0.8999}{2} + \frac{0.7746}{3} + \frac{0.6325}{4} + \frac{0.4472}{5}$

* نحوه ارتباط مابین متغیرها در منطق فازی (گزاره های شرطی):
* If <Fuzzy Proposition> Then <Fuzzy Proposition>
* انواع Fuzzy Proposition:
* - Atomic Fuzzy Proposition

X is A

* - Compound Fuzzy Proposition

X is S or x is not M

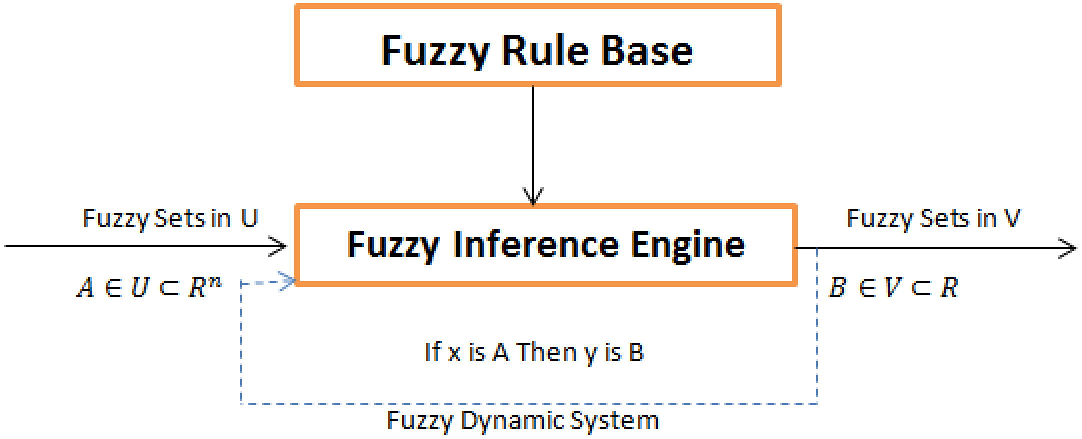
* مثال:

FP=(x is S and x is not F) or x is M

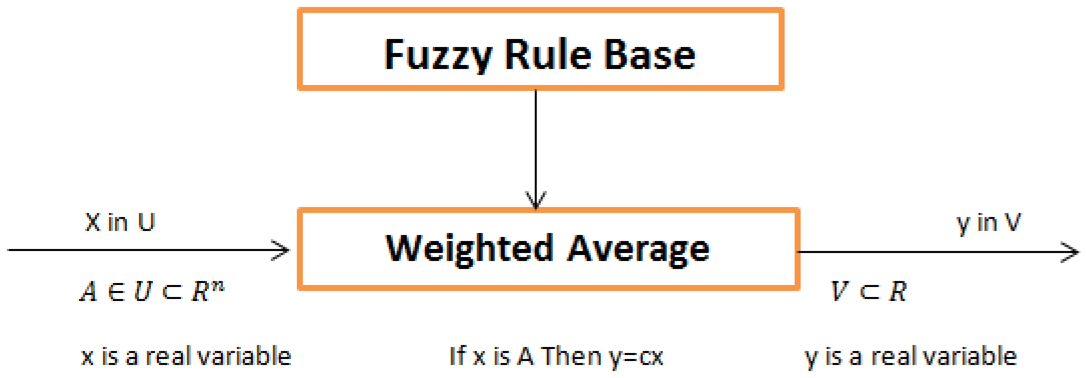
$$\mu_{FP}(x_1,x_2,x_3)=S\{T[\mu_S(x_1),C(\mu_F(x_2))],\mu_M(x_3)\}$$

Fuzzy Systems

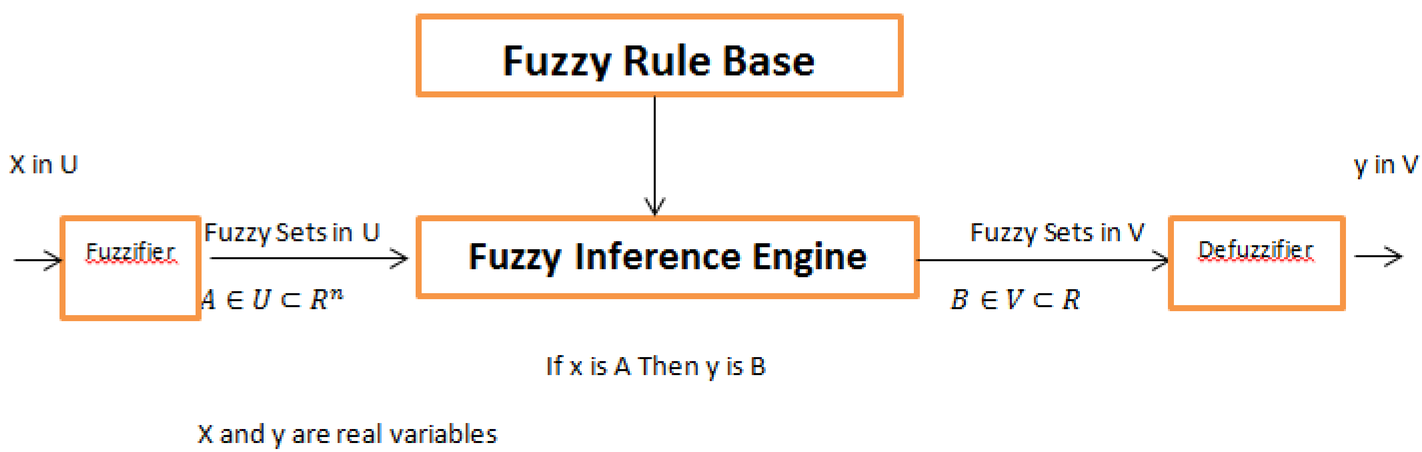
Pure Fuzzy Systems



(Takagi-Sugeno-Kang) TSK Fuzzy Systems



Fuzzy Systems with Fuzzifier and Defuzzifier



* تفسیر و بازنمایی قواعد شرطی فازی
* $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$
* $p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \bar{p}$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

* استلزام دنیس ریچر (D): Dienes-Rescher Implication

در این استلزام از روابط پایه برای V و Not استفاده می شود.

$$a \to b \equiv (1-a) \vee b = Max[1-a, b]$$

$$\mu_{Q_D}(x,y) = Max[1-\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)]$$

* استلزام لوکاشویز (L): Lukasiewicz Implication

در این استلزام از Yager S-norm با w=1 برای V

و تابع مکمل پایه برای Not استفاده می شود.

$$a \to b \equiv Min[1,1-a+b]$$

$$\mu_{Q_L}(x,y) = Min[1,1-\mu_{FP_1}(x) + \mu_{FP_2}(y)]$$

* استلزام زاده (Z) Zadeh Implication:

$$a \rightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee \bar{a}$$

$$\mu_{Q_Z}(x,y) = Max[Min\left(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right), 1 - \mu_{FP_1}(x)]$$

* استلزام گودل (G) Godel Implication:

$$\mu_{Q_G}(x,y) = \begin{cases} 1 & , If\ \mu_{FP_1}(x) \leq \mu_{FP_2}(y) \\ \mu_{FP_2}(y) & Otherwise \end{cases}$$

* استلزام ممدانی Mamdani Implications:

$$\mu_{Q_{MM}}(x,y) = Min\left(\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y)\right)$$

یا

$$\mu_{Q_{MP}}(x,y) = \mu_{FP_1}(x).\,\mu_{FP_2}(y)$$

* **منطق فازی و استدلال تقریبی**

Fuzzy Logic and Approximate Reasoning

دو مزیت عمده منطق فازی: ۱- بکارگیری متغیر زبانی ۲- استفاده از استدلال تقریبی

چنانچه منطق کلاسیک را علم اصول و قواعد استدلال رسمی در نظر بگیریم، منطق فازی علم استدلال تقریبی است که منطق کلاسیک حد آن است. به عبارت دیگر منطق فازی تعمیم منطق کلاسیک است، همانطور که مجموعه فازی تعمیم مجموعه های متعارف است. اساسا استدلال تقریبی فرآیندی است که یک نتیجه غیردقیق ممکن از مجموعه ای از فرض های اولیه غیر دقیق استنتاج می گردد.
اگر گزاره ای منطقی همیشه درست باشد یک Tautology نامیده می شود و اگر همیشه نادرست باشد Contradiction نامیده می شود.

* برای تصمیم گیری و یا استنتاج می توان از Tautology های مختلف استفاده نمود. هر Tautology که برای تصمیم گیری استفاده می گردد یک قاعده استنتاج نامیده می شود (Inference Rule) سه نمونه متداول در منطق کلاسیک و سپس تعمیم آن در منطق فازی معرفی می گردد:

۱- قیاس رفع مقدم و یا Modus Ponens:

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

$p \to q$

p Premise 1: x is A

Premise 2: If x is A Then y is B

q Conclusion: y is B

۲- قیاس رفع موخر یا Modus Tollens:

$$(\bar{q} \wedge (p \to q)) \to \bar{p}$$

$p \to q$

$\sim q$

$\sim p$

Premise 1: y is not B

Premise 2: If x is A Then y is B

Conclusion: x is not A

$$(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$$

۳- Hypothetical Syllogim:

$$\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$$

Premise 1: If x is A Then y is B

Premise 2: If y is B Then z is C

Conclusion: If x is A Then z is C

۱- Generalized Modus Ponens (G.M.P.):

Premise 1: If x is A Then y is B

Premise 2: x is A’

Conclusion: y is B’

که A’، B’، A و B مجموعه های فازی متفاوت می باشند.

	x is A' (Premise 1)	y is B' (Conclusion)
criterion p1	x is A	y is B
criterion p2	x is very A	y is very B
criterion p3	x is very A	y is B
criterion p4	x is more or less A	y is more or less B
criterion p5	x is more or less A	y is B
criterion p6	x is not A	y is unknown
criterion p7	x is not A	y is not B

۲-Generalized Modus Tollens (G.M.T.) :

Premise 1:	y is B’
Premise 2:	If x is A Then y is B
Conclusion:	x is A’

۳- Generalized Hypothetical Syllogism (G.H.S.):

Premise 1: If x is A Then y is B

Premise 2: If y is B' Then z is C

Conclusion: If x is A Then z is C'

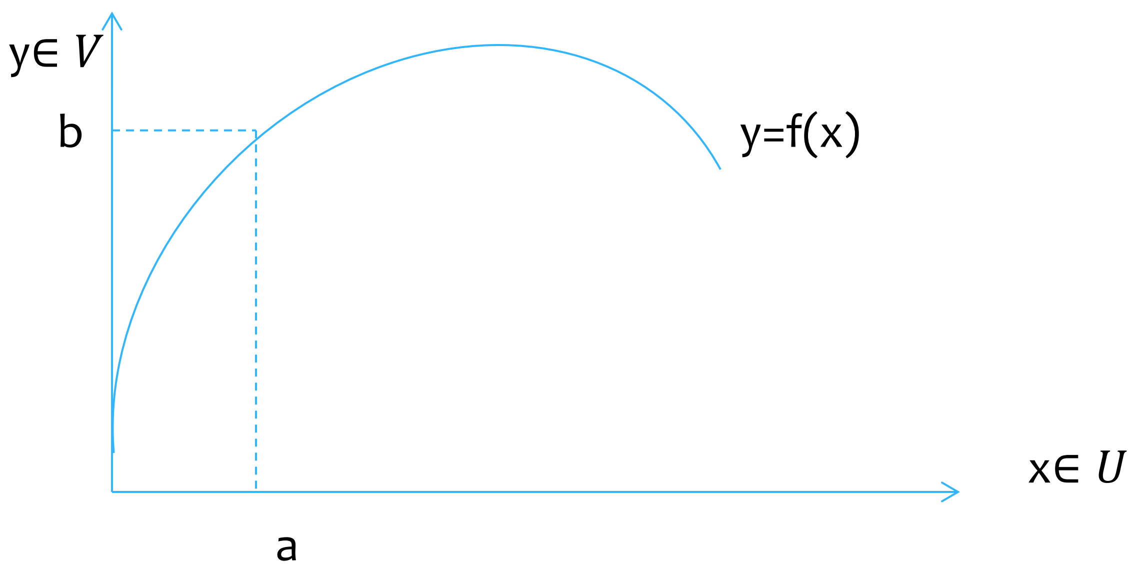
مثال:

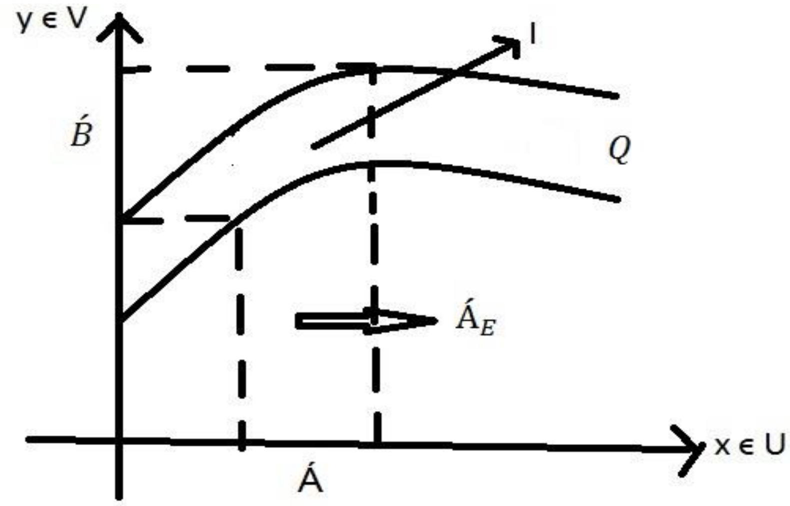
(Premise 2): y is very B, (Conclusion): Z is more or less C

* استنتاج های فوق در منطق کلاسیک گزاره های همیشه درست را ایجاد می کنند ولی در منطق فازی لزومی بر همیشه درست بودن آنها به دلیل عدم قطعیت وجود ندارد پس حالت و یا بیان Intuitive Criteria و یا Approximate Reasoning و یا استدلال تقریبی به کار می رود.

* قواعد ترکیبی استنتاج

(The Compositional Rule of Inference)





y ∈ V
I
B́
Q
Á_E
x ∈ U
Á

* پس اگر $\mu_{\acute{A}}(x)$ و $\mu_Q(x,y)$ معلوم باشند:

$$\mu_{\acute{A}_E}(x,y) = \mu_{\acute{A}}(x)$$
$$\mu_{\acute{A}_E \cap Q}(x,y) = t\left[\mu_{\acute{A}_E}(x,y) \text{و} \mu_Q(x,y)\right] = t[\mu_{\acute{A}}(x,y), \mu_{Q}(x,y)]$$
$$\mu_{\acute{B}}(y) = \underset{x \in U}{Sup}\, t\left[\mu_{\acute{A}}(x), \mu_{Q}(x,y)\right] = \underset{x \in U}{Sup}\, [\mu_{\acute{A}}(x) * \mu_{Q}(x,y)]$$

رابطه فوق را قاعده ترکیبی استنتاجی و یا Sup-Star Composition می نامند

* برای سه قاعده استنتاج رایج G.M.P، G.M.T و G.H.S داریم:

$$\text{G.M.P}: \mu_{\acute{B}}(y) = \underset{x \in U}{Sup}\ t[\mu_{\acute{A}}(x), \mu_{A\to B}(x,y)]$$

$$\text{G.M.T}: \mu_{\acute{A}}(x) = \underset{y \in V}{Sup}\ t[\mu_{\acute{B}}(y), \mu_{A\to B}(x,y)]$$

$$\text{G.H.S}: \mu_{A\to \acute{C}}(x,z) = \underset{y \in V}{Sup}\ t[\mu_{A\to B}(x,y), \mu_{\acute{B}\to C}(y,z)]$$

* مثال : اگر برای Tnorm از Min استفاده شود و برای استلزام از استلزام حاصلضرب ممدانی استفاده گردد و برای قاعده استنتاج از G.M.P. استفاده گردد ، برای هر یک از حالتهای زیر حاصل استنتاج را بدست آورید.

در تمامی حالتها فرض گردد $Sup[\mu_A(x)]=1$ (یعنی مجموعه فازی A نرمال است).

(الف) $A^{'}=A$

$$\mu_{B'}(y)=\sup_{x\in U}\{Min[\mu_A(x),\mu_A(x)\mu_B(y)]\}=Sup_{x\in U}[\mu_A(x)\mu_B(y)]=\mu_B(y)$$

ب) $A^{'} = Very A$

$$\mu_{B^{'}}(y) = Sup_{x \in U}\{Min[\mu_A{}^2(x), \mu_A(x)\mu_B(y)]\}$$

از آنجایی که $Sup_{x \in U}[\mu_A(x)] = 1$ و x هر مقداری را در U اخذ می‌کند
بنابراین برای هر $y \in V$ وجود دارد $x \in U$ که $\mu_A(x) \geq \mu_B(y)$ بنابراین :

$$\mu_{B^{'}}(y) = Sup_{x \in U}[\mu_A(x)\mu_B(y)] = \mu_B(y)$$

ج) $\acute{A} = More\ or\ Less\ A$

$$\mu_A{}^{\frac{1}{2}}(x) \geq \mu_A(x) \geq \mu_A(x)\mu_B(x) \Rightarrow \mu_{B^{'}}(y) = Sup_{x \in U}\{Min[\mu_A{}^{\frac{1}{2}}(x), \mu_A(x)\mu_B(y)]\} = \mu_B(y)$$

د) $A' = \bar{A}$

$$\mu_{B'}(y) = Sup_{x \in U}\{Min[1-\mu_A(x), \mu_A(x)\mu_B(y)]\}$$

از آنجایی که برای $Y \in V$ مشخصی ، تابع $\mu_A(x)\mu_B(y)$ یک تابع افزایشی بر حسب $\mu_A(x)$ است ولی تابع $1-\mu_A(x)$ یک تابع کاهشی از $\mu_A(x)$ است موقعی اتفاق می‌افتد که $1-\mu_A(x) = \mu_A(x)\mu_B(y)$ ، پس :

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\mu_B(y)} \Rightarrow \mu_{B'}(y) = \frac{\mu_B(y)}{1+\mu_B(y)}$$

* با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌گردد که استنتاج تحت شرایط مطرح شده Min]، حاصلضرب ممدانی و [.G.M.P برای جدول مثال قبل تنها فرضیه های P_5,P_3,P_1 را جوابگوست ولی شرایط فرضیه‌های P_7,P_6,P_4,P_2 را برآورده نمی‌نماید.

مثال : مجموعه‌های فازی A, B زیر را در نظر بگیرید :

A=[0,0.2,0.5,1,0.3,0]

B=[0.1 , 0.2 , 0.4 , 0.7, 1]

* استلزام ممدانی

$$\mu_{A\to B}(x,y)=Min(\mu_A(x),\mu_B(y))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.7 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{'}=\bar{A}=[1,0.8,0.5,0,0.7,1]$$

G.M.P. ; Tnorm= Min :

$$\mu_{B'}(y) = Sup_x Min[\mu_A - (x), \mu_{A\to B}(x,y)] = Sup_x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.5]$$

* **استدلال تقریبی بر اساس میزان شباهت :**
* در این روش چندین قاعده وجود دارد و در هر وضعیت همه قاعده ها فعال نمی شود بلکه قاعده‌ای فعال می‌گردد که میزان شباهت P و P' از یک آستانه بیشتر شود و نتیجه فعال شدن آن تغییر و یا اصلاح q به نحوی است که q' اصلاح شده q متناسب با همان میزان شباهت اصلاح گردد .

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p' \qquad\quad} \\ \therefore \quad q' \end{array}$$

$k = SM(p, p') > k_0 \rightarrow$ قاعده فعال می‌گردد

* میزان شباهت را می‌توان از روی فاصله یا میزان فاصله بیان نمود.

$$SM = (1 + DM)^{-1}$$

* DM : Distance Measure

$$DM = 0 \Rightarrow SM = 1, 0 \le DM \le \infty \Rightarrow 0 \le SM \le 1$$

* یکی از DM ها میزان ناسازگاری است :

$$D(A,B) = 1 - Sup_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x)$$

* یکی دیگر از DMها فاصله اقلیدسی است:

$$D(A,B) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

*

* مرحله بعد از تعریف DM مرحله تطبیق الگو است بدین معنی که SM همه قاعده ها را محاسبه می‌کنیم و میزان شباهت مشاهده با مقدم قاعده j ام را محاسبه می‌کنیم.

$$Kj = SM(P', P_j) > K_0 \Rightarrow$$ قاعده فعال می‌گردد

مرحله بعد تابع اصلاحی می‌باشد که به فرم‌های مختلف می‌باشد.

یکی از تابعهای اصلاحی فرم بیشتر یا کمتر است (More or less)

$$Q'_j = Min\{1, \frac{Q_j}{SM}\} = Min\{1, Q_j(1+DM)\}$$

* یکی دیگر فرم کاهش مقدار عضویت است .

Membership value reduction

$$Q'_j = Q_j . SM$$

استدلال تقریبی بر اساس روش تطبیق الگو مبتنی بر اندازه زیر مجموعه بودن

$$P_i \Rightarrow Q_i \equiv P^c{}_i \cup Q_i$$

$$f(p_x) = \sum \mu_P(x), P' \subset P, S(P', P) = \frac{f(P' \cap P)}{f(p')} \Rightarrow S_j(P', P_j) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mu_{P' \cap P_j}(x)}{\sum_{i=1}^{m} \mu_{P'}(x)}$$

$$R^* = \{R_j \mid S_j \geq K_0, J = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mu_{Q'_j}(y) = \mu_{Q'_1}(y) \oplus \mu_{Q'_2}(y) \oplus \ldots \oplus \mu_{Q'_n}(y)$$

$$a \oplus b \equiv \begin{cases} a \vee b = Max(a, b) \\ \text{یا} \\ a \wedge b = Min(a, b) \end{cases}$$

* **سیستم های فازی و خواص آنـها**
* پایگاه قواعد فازی (Fuzzy Rule Base)

پایگاه قواعد فازی مجموعه ای از قواعد IF-THEN با فرم عمومی زیر است.

$$Ru^{(e)} \quad If \quad x_1 \quad is \quad A^e{}_1 \quad and \ldots and \quad x_n \quad is \quad A^e{}_n, Then \quad y \quad is \quad B^e$$

به فرم عمومی قواعد بصورت فوق فرم کانونیکال Canonical fuzzy IF-THEN rules می‌گویند

که A_i^e, B^e مجموعه‌های فازی در $V \subset R, U_i \subset R$ می‌باشد و $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in U$ و $y \in V$ ورودی و خروجی در قالب متغیرهای زبانی برای سیستم فازی می‌باشد.

* **خواص مجموعه قواعد :**

۱- کامل بودن قواعد :

یک مجموعه قواعد فازی IF-THEN یک مجموعه قواعد کامل است (complete) اگر برای هر $x \in U$ حداقل یک قاعده در مجموعه قواعد فازی وجود داشته باشد بنام $R_u^{(e)}$ به نحویکه :

$$\mu_{A^e_i}(x_i) \neq 0 \quad for \quad all \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

۲- سازگاری (Consistent)

مجموعه قواعد شرط فازی دارای سازگاری می‌باشد اگر هیچ نوع قاعده‌هایی وجود نداشته باشد که دارای مقدم یکسان و تالی‌های متفاوت باشد.

۳- پیوستگی (Continuous)

یک مجموعه از قواعد فازی IF-THEN پیوسته است اگر برای هر قاعده با قواعد همسایه آن اشتراک قسمت تالی آنها تهی نباشد .

* **هسته استنتاج فازی و یا موتور استنتاج فازی**

Fuzzy Inference Engine

اگر پایگاه قواعد شامل تنها یک قاعده باشد می‌توان از استنتاج G.M.P استفاده نمود.

ولی اگر پایگاه قواعد بیش از یک قاعده داشته باشد:

استنتاج بر مبنای ترکیب Composition based Inference

استنتاج بر مبنای قواعد مجزا Individual – rule based inference

* استنتاج بر مبنای ترکیب Composition based Inference

۱- در دیدگاه اول هر قاعده در بیان دارای شرایط کاملاً مستقل می‌باشد.

۲- دیدگاه دوم بیان می‌کند که قواعد در بیان خود دارای ارتباط بسیار قوی می‌باشد.

$R_u^{(\ell)}$ یک رابطه فازی بیانگر یک قاعده IF-THEN است

$$R_u^{(\ell)} = A_1^{\ell} \times \ldots \times A_n^{\ell} \rightarrow B^{\ell}$$

$A_1^{\ell} \times \ldots \times A_n^{\ell}$ یک رابطه فازی در $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ می‌باشد که توسط رابطه زیر بیان می شود :

$$\mu_{A_1^{\ell} \times \ldots \times A_n^{\ell}}(x_1, \ldots, A_n) = \mu_{A_1^{\ell}}(x_1) * \ldots * \mu_{A_n^{\ell}}(x_n)$$

که * هر نوع Tnorm می‌تواند باشد.

Mamadani Combination

$$Q_M = \bigcup_{i=1}^{M} R_u{}^{(\ell)}$$

$$\mu_{Q_M}(x,y) = \mu_{R_u{}^{(1)}}(x,y) + \ldots + \mu_{R_u{}^{(M)}}(x,y)$$

Godel Combination

$$Q_G = \bigcap_{e=1}^{M} R_u(\ell)$$

$$\mu_{Q_G}(x,y) = \mu_{R_u{}^{(1)}}(x,y) * \ldots * \mu_{R_u{}^{(M)}}(x,y)$$

* : Mamadani Combination

$$\mu_{B'}(y) = Sup_{x \in U} t[\mu_{A'}(x), \mu_{Q_M}(x, y)]$$

* : Godel Combination

$$\mu_{B'}(y) = Sup_{x \in U} t[\mu_{A'}(x), \mu_{Q_G}(x, y)]$$

* استنتاج بر مبنای قواعد مجزا

Individual Rule Based Inference

$$\mu_{B'}(y) = Sup_{x \in U} t[\mu_{A'}(x), \mu_{R_u^{(\ell)}}(x, y)]$$

For : l=1,2,… ,M

خروجی نهایی موتور استنتاج فازی ترکیب M مجموعه فازی $\{B'_1, \ldots, B'_M\}$ به یکی از دو صورت زیر است :

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) \dot{+} \ldots \dot{+} \mu_{B'_M}(y)$$

یا:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) * \ldots * \mu_{B'_M}(y)$$

* سوال این است که کدام نوع از انواع فوق را باید در یک مسئله انتخاب نمود. معیارهای زیر پاسخ این سوال است :

۱- مبنای نگرش : اگر بعنوان نمونه قواعد از شخص خبره گرفته شده باشد مبنای نگرش شخص خبره از استقلال قواعد و یا اشتراک آنها می‌تواند معیار انتخاب گردد .

۲- هزینه محاسباتی

۳- خواص ویژه برخی از انتخابها در کاربردی خاص می‌تواند مورد نظر قرار گیرد.

* معرفی برخی از موتورهای استنتاج رایج :
* موتور استنتاج حاصلضرب : Produce Inference Engine

در این موتور استنتاج از استنتاج بر مبنای قواعد مجزا همراه با ترکیب union ، حاصلضرب ممدانی استلزام و حاصلضرب جبری جهت Tnorm استفاده می‌شود و جهت Snorm از Max استفاده می‌شود.
بنابراین داریم :

$$\mu_{B'}(y) = Max_{\ell=1}^{M}[Sup_{x \in U}(\mu_{A'}(x)\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{\ell}}(x_i)\mu_{B^{\ell}}(y))]$$

* موتور استنتاج مینیمم Minimum Inference Engine

در این موتور استنتاج جهت استنتاج از استنتاج بر مبنای قواعد مجزا با ترکیب union ، استلزام مینیمم ممدانی و اپراتور Min جهت انجام Tnorm و Max جهت انجام Snorm استفاده می‌شود. پس داریم :

$$\mu_{B'}(y) = Max_{\ell=1}^{M}[Sup_{x \in U} Min(\mu_{A'}(x), \mu_{A_1^\ell}(x_1), \ldots, \mu_{A_n^\ell}(x_n), \mu_{B^\ell}(y))]$$

* موتور استنتاج لوکاشویز Lukasiewicz Inference Engine

در این موتور استنتاج از استنتاج بر مبنای قواعد مجزا با ترکیب Intersection ، استلزام لوکاشویز ، اپراتور Min برای Tnorm استفاده می‌شود.

$$\mu_{B'}(y) = Min_{\ell=1}^{M}[Sup_{x \in U} Min(\mu_{A'}(x), \mu_{R_u^{(\ell)}}(x, y))]$$

$$= Min_{\ell=1}^{M}[Sup_{x \in U} Min[\mu_{A'}(x), \min(1, 1 - Min_{i=1}^{n}(\mu_{A_i^{\ell}}(x_i) + \mu_{B^{\ell}}(y)))]$$

$$= Min_{\ell=1}^{M}[Sup_{x \in U} Min[\mu_{A'}(x), 1 - Min_{i=1}^{n}(\mu_{A_i^{\ell}}(x_i)) + \mu_{B^{\ell}}(y)]]$$

* موتور استنتاج زاده Zadeh Inference Engine

در این موتور استنتاج از استنتاج بر مبنای قواعد مجزا با ترکیب Intersection ، استلزام زاده و اپراتور Min برای Tnorm استفاده می‌شود. پس :

$$\mu_{B'}(y) = Min_{\ell=1}^{M}\{Sup_{x\in U} Min[\mu_{A'}(x), Max(Min(\mu_{A_1^\ell}(x_1),\dots,\mu_{A_n^\ell}(x_n)),\mu_{B^\ell}(y), 1-Min_{i=1}^{n}(\mu_{A_i^\ell}(x_i)))]\}$$

* موتور استنتاج دنیس – ریچر Dienes – Rescher Inference Engine

در این موتور از استنتاج زاده الگو گرفته شده است ، یعنی تمامی شرایط مشابه استنتاج زاده است به غیر از جایگزینی استلزام دنیس-ریچر به جای استلزام زاده که در این موتور صورت می‌پذیرد . پس داریم :

$$\mu_{B'}(y) = Min_{\ell=1}^{M}\{Sup_{x \in U} Min[\mu_{A'}(x), Max(1 - Min_{i=1}^{n}(\mu_{A_i^\ell}(x_i), \mu_{B^\ell}(y))]\}$$

* نحوه استنتاج برای سیستمهای چند متغیره :

If x is A_1 and y is B_1 THEN z is C_1 and w is D_1

If x is A_2 and y is B_2 THEN z is C_2 and w is D_2

$$\frac{obs \quad x \quad is \quad A' \; and \quad y \quad is \quad B'}{\therefore \;\; concl: z \quad is \quad c' \; and \quad w \quad is \quad d'}$$

* روش اول: سیستم فوق را به سیستمهای تک خروجی تقسیم می‌کنیم :

If x is A_1 and y is B_1 THEN z is C_1

Also

If x is A_1 and y is B_1 THEN w is D_1

* روش دوم: R=R1OR2

$$R_1 = (A_1 \times B_1 \times C_1) \cup (A_2 \times B_2 \times C_2)$$

$$R_2 = (A_1 \times B_1 \times d_1) \cup (A_2 \times B_2 \times d_2)$$

$$(A' \times B') \circ [(A_1 \times B_1 \times C_1 \times d_1) \cup (A_2 \times B_2 \times C_2 \times d_2)] = C' \times d'$$

فازی کننده‌ها و بی فازی کننده‌ها Fuzzifiers and Defuzzifiers

* فازی کننده Fuzzifiers

فازی کننده نگاشتی از نقاط اعداد حقیقی $x^* \in U \subset R^n$ به یک مجموعه فازی A' در U می‌باشد.

خصوصیات فازی کننده:

۱- کاهش نویز

۲- کاهش حجم محاسبات در موتور استنتاج

۳- مقدار تابع عضویت بزرگ را در x^* ایجاد نماید .

* فازی کننده تکین Singleton Fuzzifier

باعث نگاشت $x^* \in U$ به یک مجموعه فازی A' در U بصورت تکین و به شکل زیر می‌شود :

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x = x^* \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

* فازی کننده گوسین Gaussian Fuzzifier

$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} * \ldots * e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}$$

* a_i ها پارامترهای مثبت می‌باشند و Tnorm (*) عمدتاً حاصلضرب جبری و یا Min اختیار می‌گردد.

* فازی کننده مثلثی Triangular FuzziFier

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} (1-\frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}) * \cdots * (1-\frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}) if \quad |x_i - x_i^*| \le b_i, i = 1, \dots, n \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

b_i یک پارامتر مثبت است و عمدتاً Tnorm(*) بصورت حاصلضرب جبری یا Min مورد استفاده قرار می‌گیرد.

* اگر توابع عضویت موجود در قواعد نیز گوسین و مثلثی (متناظر با فازی کننده ها) باشند، عمل ساده سازی را انجام می دهند.

* **بی‌فازی کننده‌ها Defuzzifiers**

بی فازی کننده بصورت نگاشتی است از مجموعه فازی B' در $V \subset R$ [خروجی موتور استنتاجی فازی] به یک نقطه crisp $y^* \in V$.

خصوصیات بی فازی کننده ها:

۱- معقول بودن Plausibility: نقطه y* بایستی به نحوی بهترین بازنمایی را برای B' داشته باشد. مثلاً می‌تواند وسط مجموعه پشتیبان B' باشد و یا دارای بالاترین درجه عضویت در B' باشد.

۲- سادگی محاسبات Computational Simplicity

۳- پیوستگی Continuity : تغییرات کوچک در B' نباید تغییرات بزرگی را در y* ایجاد نماید.

Center of gravity or center of Area Defuzzifier (CoR) :

Y* در اینحالت به عنوان مرکز ناحیه ای است که توسط تابع عضویت B' پوشانده شده است ، یعنی :

$$y^* = \frac{\int_v y\, \mu_{B'}(y)\,dy}{\int_v \mu_{B'}(y)\,dy}$$

Indexed center of gravity defuzzifier *

$$y^* = \frac{\int_{v_\alpha} y\,\mu_{B'}(y)dy}{\int_{v_\alpha} \mu_{B'}(y)dy}$$

$$V_\alpha = \{y \in V \mid \mu_{B'}(y) \geq \alpha\}$$

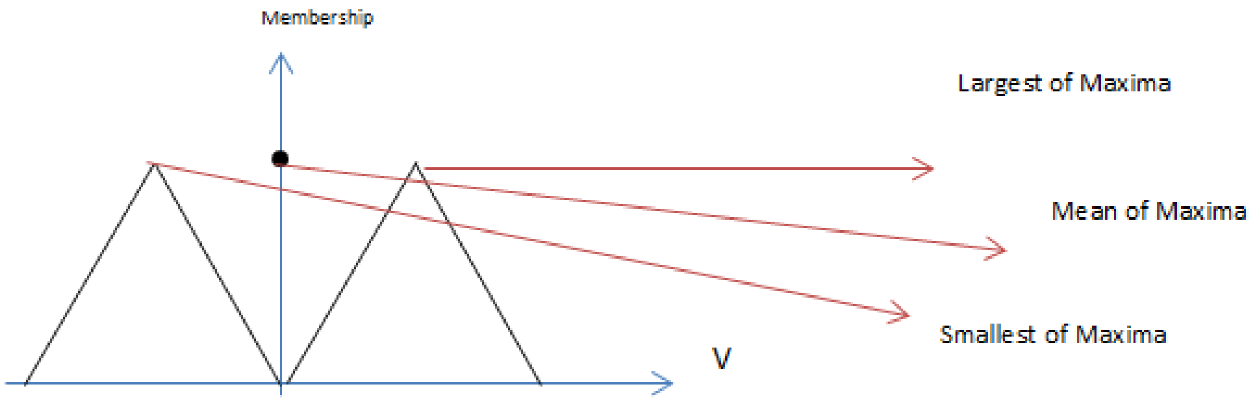
* : Center Average Defuzzifier

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^{M} \bar{y}^i w_i}{\sum_{i=1}^{M} w_i}$$

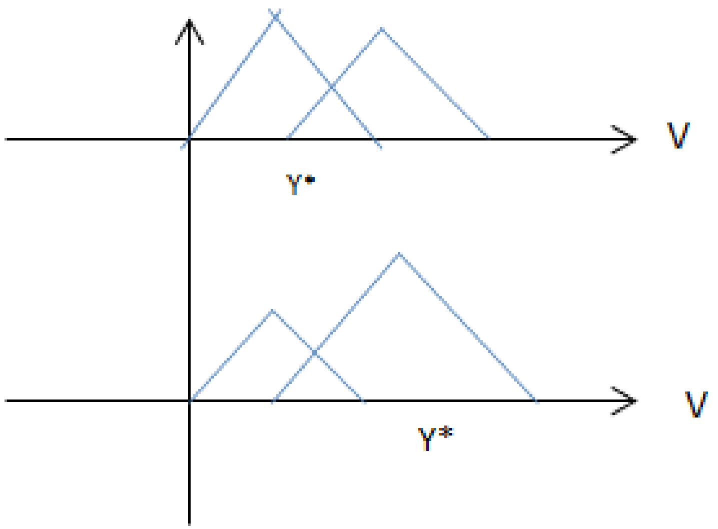
* : Maximum Defuzzifier

$$hgt(B') = \{y \in V \mid \mu_{B'}(y) = Sup_{y \in V}\, \mu_{B'}(y)\}$$

* Y* =any point in hgt(B')


Membership
Largest of Maxima
Mean of Maxima
Smallest of Maxima
V

* مشکل پیوستگی



	Center of gravity	Center average	Maximum
Plausibility	yes	yes	yes
Computational simplicity	no	yes	yes
continuity	yes	yes	no

خصوصیات تقریبی سیستمهای فازی

بنابراین برای یافتن یک سیستم فازی بهینه optimal fuzzy sys باید دید که از رابطه غیر خطی $g(x):U \subset R^n \to R$ چه اطلاعاتی در دسترس می‌باشد . حالتهای زیر می‌تواند موجود باشد :

۱- فرمول آنالیتیکی g(x) شناخته شده است .

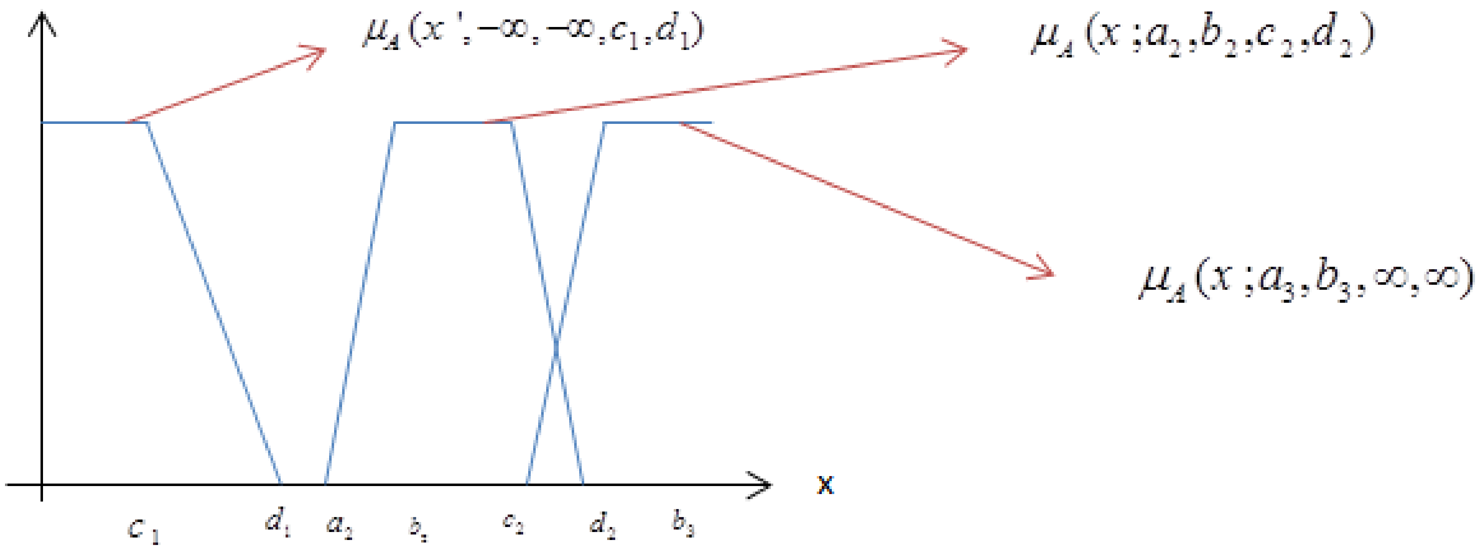
۲- فرمول آنالیتیکی g(x)ناشناخته است اما برای هر $x \in U$ می‌توان g(x) تعیین شود[g(x) مانند یک جعبه سیاه است ولی رفتار آن در ایجاد ورودی و خروجی قابل دسترسی است]

۳- فرمول آنالیتیکی g(x) ناشناخته است و تنها تعداد محدودی از زوجهای ورودی و خروجی$(x^j, g(x^j))$ در دسترس است که $x^j \in U$ به دلخواه تعیین نشده‌اند.

* Pseudu_Trapezoid Membership : یک تابع عضویت پیوسته در R است اگر $[a,d] \subset R$:

$$\mu_A(x;a,b,c,d,H)=\begin{cases} I(x),x\in[a,b] \\ H \quad ,x\in[b,c] \\ D(x),x\in[c,d] \\ 0 \quad ,x\in R-(a,d) \end{cases} \qquad \begin{cases} a\le b\le c\le d \\ a<d,0<H\le 1 \\ 0\le I(x)\le 1 \\ 0\le D(x)\le 1 \end{cases}$$

* I(x) یک تابع غیر کاهشی در [a,b) و D(x) یک تابع غیر افزایشی در [c,d) است و در حالت نرمال H=1



$\mu_A(x;-\infty,-\infty,c_1,d_1)$
$\mu_A(x;a_2,b_2,c_2,d_2)$
$\mu_A(x;a_3,b_3,\infty,\infty)$
x
c_1
d_1
a_2
b_2
c_2
d_2
b_3

* حالتهای خاص :
* $I(x)=\frac{x-a}{b-a}, D(x)=\frac{x-d}{c-d} \Rightarrow$ Trapezoid Membership functions
* Triangular Membership Functions با D(x) , I(x) بالا b=c ,

$$a=\infty, b=c=\bar{x}, d=\infty, I(x)=D(x)=\exp(-(\frac{x-\bar{x}}{\sigma})^2) \Rightarrow Gaussian \quad Memberal$$

* **تعاریف :**
* **مجموعه های فازی کامل یا تام Completeness of fuzzy sets**

مجموعه‌های فازی $A^1, A^2, \ldots, A^n$ $w \subset R$ کامل نامیده می شود اگر
برای هر $x \in W$ وجود داشته باشد A^j که در آن $\mu_{A^j}(x) > 0$.

* **مجموعه فازی سازگار Consistency of fuzzy sets**

مجموعه‌های فازی $A^1, A^2, \ldots, A^n$ $w \subset R$ بر روی W سازگار است اگر $\mu_{A^j}(x) = 1$
برای برخی از $x \in W$ وجود داشته باشد بیانگر این است که:

$$\mu_{A^i}(x) = 0 \quad for \quad all \quad i \neq j$$

* مجموعه High از مجموعه فازی **High set of Fuzzy set :**

مجموعه high از یک مجموعه فازی A در $w \subset R$ یک زیر مجموعه در w است که توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$hgh(A) = \{x \in w \,|\, \mu_A(x) = Sup_{x' \in w} \mu_A(x')\}$$

مثلاً اگر A یک مجموعه نرمال با تابع عضویت psedu_Trapezoid باشد:

$$\mu_A(x; a, b, c, d) \qquad\qquad hgt(A) = [b, c]$$

* مرتبه مابین مجموعه های فازی **Order Between fuzzy sets**
* برای دو مجموعه فازی A و B در $R \subset w$ بیان می‌گردد که $A > B$ است اگر $hgh(A) > hgh(B)$ (یعنی اگر $x \in hgh(A)$ و $x' \in hgh(B)$ پس $x > x'$)

* **چند خاصیت برای مجموعه‌های فازی با تابع عضویت pseudu_Trapezoid :**

۱- اگر $A^1, A^2, \ldots, A^n$ سازگار و نرمال در $w \subset R$ با توابع عضویت Pseudo_Teapezoid به فرم زیر باشند:

$$\mu_{A^i}(x; a_i, b_i, c_i, d_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

یک ترتیبی از این مجموعه‌های فازی به صورت:

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} of \ \{1, 2, \ldots, N\}$$

وجود دارد به نحویکه :

$$A^{i_1} < A^{i_2} < \ldots < A^{i_N}$$

۲- اگر مجموعه‌های فازی $A^1, A^2, \ldots, A^n$ در $w \subset R$ نرمال، سازگار و تام باشند و دارای توابع عضویت pseudu_Trapezoid به فرم:

$$\mu_{A^i}(x; a_i, b_i, c_i, d_i)$$

باشند. اگر:

$$A^1 < A^2 < \ldots < A^n$$

سپس برای i=1,2,…,N-1 :

$$c_i \le a_{i+1} < d_i \le b_{i+1}$$

طراحی سیستم فازی

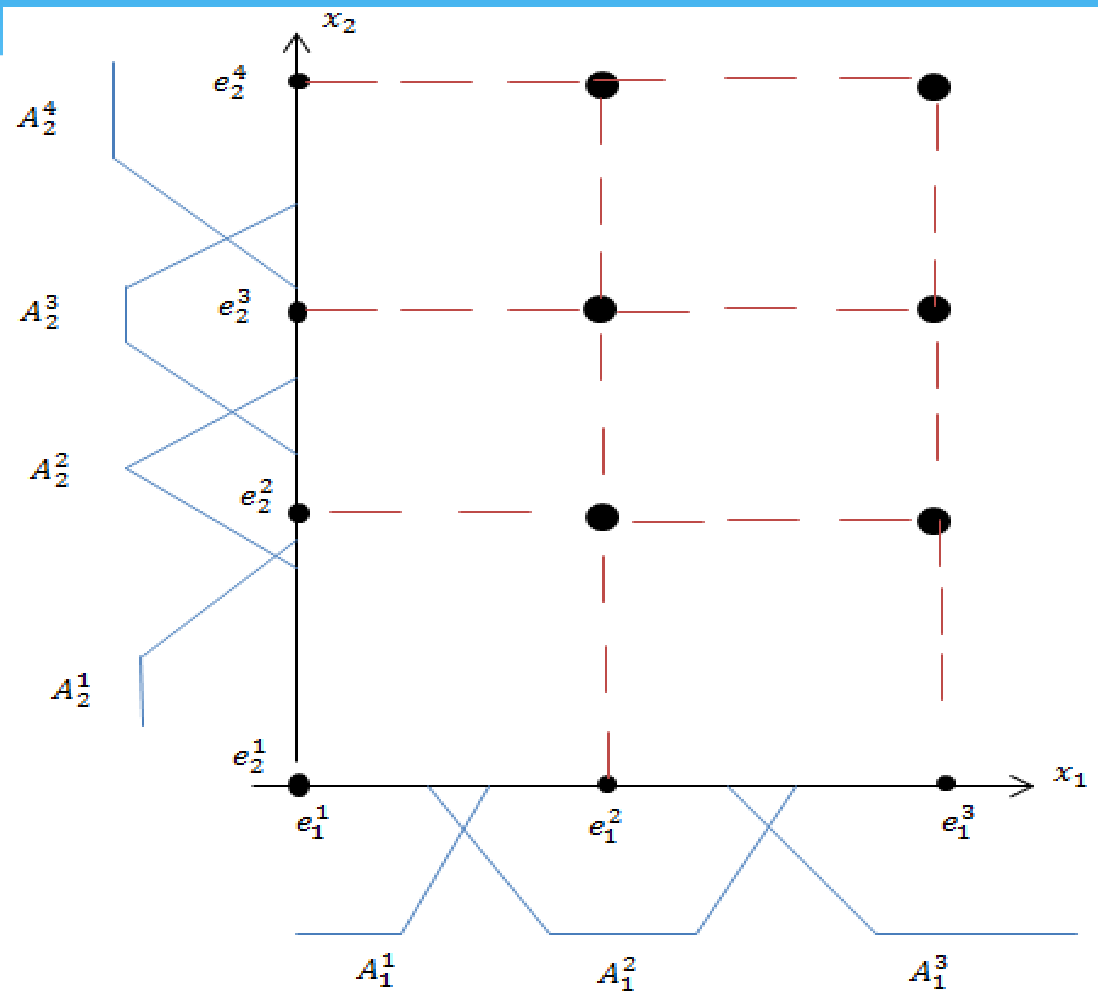
* طراحی را برای سادگی در حالت ۲ ورودی بررسی می‌کنیم ولی قابل تعمیم به n ورودی است . پس مسئله به این صورت است که g(x) یک تابع بر روی مجموعه $U=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]\in R^2$ می‌باشد که رابطه تحلیلی آن موجود نمی‌باشد. ولی برای هر x مقدار g(x) در دسترس است . هدف طراحی یک سیستم فازی جهت تخمین و یا تقریب g(x) است :
* قدم اول : $(i=1,2)N_i$ مجموعه فازی $A_i^1,A_i^2,...,A_i^{N_i}$ در $[\alpha_i,\beta_i]$ را بصورت نرمال ، سازگار و کامل با تابع عضویتهای Pesudu_Trapezoid:

$$\mu_{A_i'}(x'_i,a_i^1,b_i^1,c_i^1,d_i^1),...,\mu_{A_i^{N_i}}(x'_i,a_i^{N_i},b_i^{N_i},c_i^{N_i},d_i^{N_i})$$

* و $A_i^{\ 1}, A_i^{\ 2}, ..., A_i^{\ N_i}$ با $a_i^{\ 1} = b_i^{\ 1} = \alpha_i$ و $c_i^{\ N_i} = d_i^{\ N_i} = \beta_i$ را در نظر بگیرید.
* تعریف کنید $e_1^{\ N_1} = \beta_1, e_1^{\ 1} = \alpha_1$ و $e_1^{\ j} = \frac{1}{2}(b_1^{\ j} + c_1^{\ j})$ for j=2,3,…, N_1-1 به طریق مشابه برای بعد دوم :

$$e_2^{\ 1} = \alpha_2, e_2^{\ N_2} = \beta_2, \quad e_2^j = \frac{1}{2}(b_2^j + c_2^j) \quad for \quad j = 2, 3, \ldots, N_2 - 1$$

* (شکل زیر مثالی از فوق با $\beta_1 = \beta_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, N_2 = 4, N_1 = 3$ را نمایش می‌دهد.)


x_2
e_2^4
A_2^4
e_2^3
A_2^3
A_2^2
e_2^2
A_2^1
e_2^1
x_1
e_1^1
e_1^2
e_1^3
A_1^1
A_1^2
A_1^3

* قدم دوم : یک پایگاه قواعد IF-THEN فازی شامل $M = N_1 \times N_2$ قاعده به فرم زیر تشکیل دهید :

$$R_u^{i_1 i_2} : IF \quad x_i \quad is \quad A_1^{i_1} \quad and \quad x_2 \quad is \quad A_2^{i_2}, THEN \quad y \quad is \quad B^{i_1 i_2}$$

* که $i_1 = 1, 2, ..., N_1$ و $i_2 = 1, 2, ..., N_2$ و مرکز مجموعه فازی $B^{i_1 i_2}$ که با $\bar{y}^{i_1 i_2}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر نشان داده می‌شود :

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$$

* قدم سوم : یک سیستم فازی f(x) از روی $N_1 \times N_2$ قاعده با استفاده از موتور استنتاج حاصلضرب ، فازی کننده singleton و بی فازی کننده center Average بصورت زیر طراحی نمایید :

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} (\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2))}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2))}$$

* که مجموعه های فازی $A_i^1, \ldots, A_i^{N_i}$ کامل می‌باشند و در هر نقطه $x \in U$ وجود دارد i_1, i_2 ای که $\mu_{A_1^{i_1}}(x_1) \mu_{A_2^{i_2}}(x_2) \neq 0$ (پس مخرج صفر نمی‌گردد)

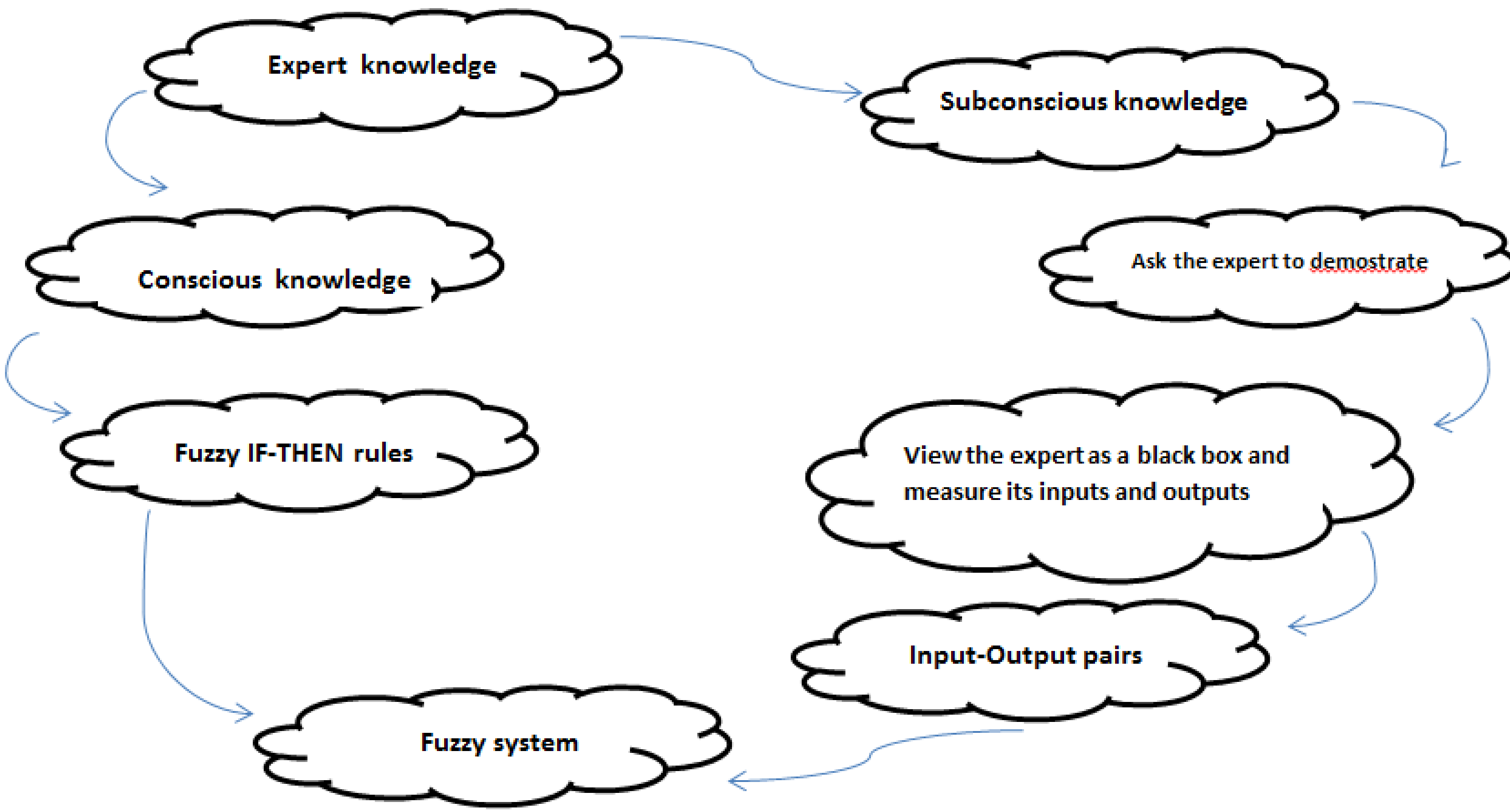
* بزرگترین مسئله‌ای که در اینجا وجود دارد مسئله curse of dimensionality است به عبارت دیگر برای هر بعد N مجموعه فازی در فضای n بعدی تعریف گردد و تعداد قاعده ها N^n بصورت نمایی با افزایش بعد افزایش می‌یابد .
* نکته آخر این است که برای طراحی فوق باید مقادیر g(x) را در $x=(e_1^{i_1},e_2^{i_2})$ بدانیم $i_1=1,2,...,N_1$ و $i_2=1,2,...,N_2$ و چون این نقطه می‌توانند بصورت اختیاری در U اختیار گردند پس باید تمامی مقادیر g(x) را برای تمامی $x\in U$ بدانیم.

* **طراحی حالت سوم سیستمهای فازی :**
* در طراحی سیستمهای فازی هدف ارائه دانش انسانی به دو صورت قابل دستیابی است :

۱- Conscious : در قالب کلمات قابل بیان است

۲- Subconscious : در قالب کلمات قابل بیان نیست مانند توانایی یک راننده ماهر در وضعیتهای بسیار خطرناک که اگر بتواند در قالب کلمات بیان کند بصورت جامعی دانش ارائه نمی‌گردد.

* در حالت اول فوق به راحتی می‌توان با پرسش و پاسخ از شخص خبره قوانین IT-THEN را بیان نمود و سیستم را طراحی کرد و در حالت دوم از شخص خبره در وضعیتهای خاص سوال می‌گردد و شخص دانش خود را در آن وضعیتها [در تمامی وضعیتهای ممکن] بیان می‌کند پش شخص خبره مثل یک black box   است که تنها مجموعه ای از زوجهای ورودی و خروجی [در تمامی آنها] از آن در اختیار است و باید سیستم فازی را بر مبنای این زوجها طراحی نمود : (در حالت علمی اکثراً با این صورت است)


Expert knowledge
Subconscious knowledge
Conscious knowledge
Ask the expert to demostrate
Fuzzy IF-THEN rules
View the expert as a black box and measure its inputs and outputs
Input-Output pairs
Fuzzy system

* طراحی سیستم‌های فازی بر اساس جدول مشاهده

Design of fuzzy systems using a table look-up scheme

فرض کنید مجموعه زوجهای مرتب زیر در دسترس می‌باشد

$$(x_0^P; y_0^P), P = 1, 2, \ldots, N$$

$$y_0^P \in V = [\alpha_y, \delta_y] \subset R, \quad x_0^P \in U = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n] \subset R^n$$

* قدم اول : تعریف مجموعه‌های فازی به منظور پوشش فضاهای ورودی و خروجی

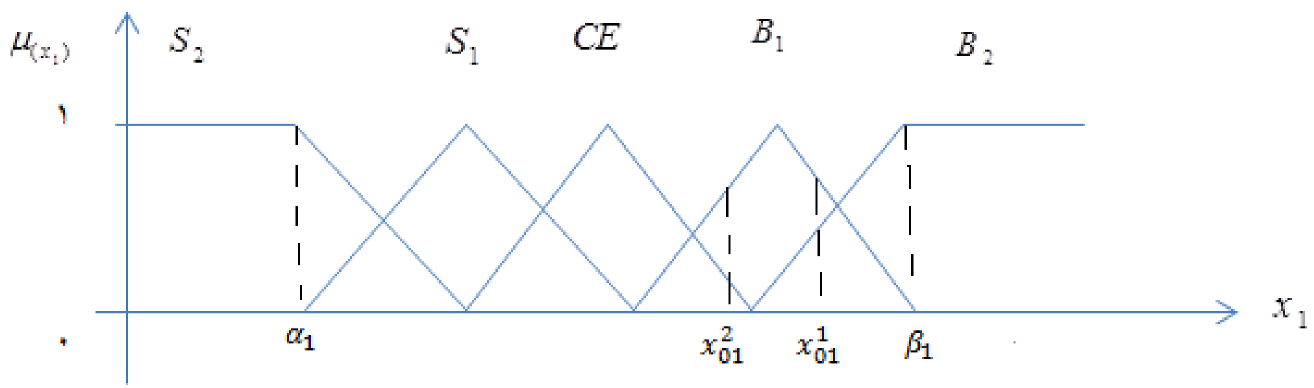
برای هر $[\alpha_i, \beta_i], i = 1, 2, \ldots, n$ به تعداد N_i مجموعه فازی $A_i^j (j = 1, 2, \ldots, N_i)$ تعریف نمایید که در $[\alpha_i, \beta_i]$ کامل باشند به عبارتی دیگر برای هر $x_i \in [\alpha_i, \beta_i]$ وجود داشته باشد A_i^j به نحویکه $\mu_{A_i^j}(x_i) \neq 0$ ، برای مثال می‌توان $\mu_{A_i^j}(x_i)$ را بصورت یک سری توابع عضویت Pseudu_Trapezoid تعریف نمود .

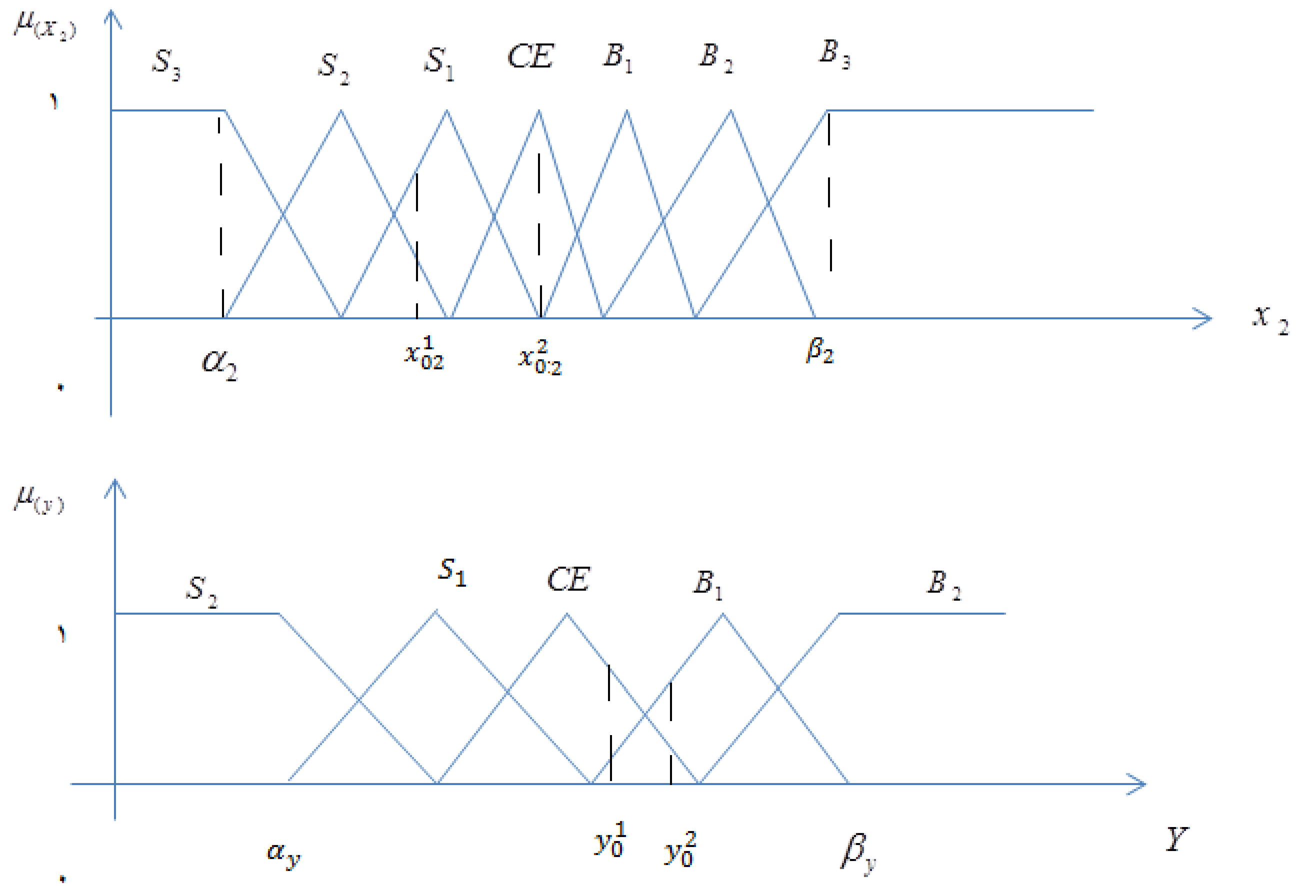
$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}(x_i; a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j) \qquad \begin{cases} a_i^1 = b_i^1 = \alpha_i, \quad c_i^j = a_i^{j+1} < b_i^{j+1} = d_i^j \; (j = 1, 2, \ldots, N_i - 1) \\ c_i^{N_i} = d_i^{N_i} = \beta_i \end{cases}$$

* بطور مشابه N_y مجموعه فازی B^j $(j=1,2,...,N_y)$ که در $[\alpha_y,\beta_y]$ کامل می‌باشند تعریف کنید .
* همچنین به عنوان مثال میتوان $\mu_{B^j}(y)$ را بصورت یک سری توابع عضویت Pseudu_Trapezoid تعریف نمود که :

$$\mu_{B^j}(y)=\mu_{B^j}(y;a^j,b^j,c^j,d^j) \quad \begin{cases} a^1=b^1=a_y, \; c^j=a^{j+1}<b^{j+1}=d^j \, (j=1,2,...,N_y-1) \\ c^{N_y}=d^{N_y}=\beta_y \end{cases}$$

* بطور نمونه برای $N_y = 5, N_2 = 7, N_1 = 5, n = 2$ در شکل زیر بصورت مثلثی توابع تعریف شده‌اند.





$\mu_{(x_2)}$
S_3
S_2
S_1
CE
B_1
B_2
B_3
۱
۰
α_2
x_{02}^1
x_{02}^2
β_2
x_2
$\mu_{(y)}$
S_2
S_1
CE
B_1
B_2
۱
۰
α_y
y_0^1
y_0^2
β_y
Y

* قدم دوم : برای هر زوج ورودی وخروجی یک قاعده را ایجاد نمایید.

برای هر یک از زوجهای ورودی-خروجی $(x_{01}^{p},...,x_{0n}^{p};y_{0}^{p})$ مقادیر تابع عضویت $x_{0i}^{p}(i=1,2,...,n)$ را در مجموعه‌های فازی $A_{i}^{j}(j=1,2,...,N_{i})$ و مقادیر تابع عضویت y_{0}^{p} را در مجموعه‌های فازی $B^{e}(e=1,2,...,N_{y})$ بدست آورید.

حال برای هر زوج ورودی-خروجی قاعده ای را بنویسید که ورودیها و خروجیها به مجموعه های فازی خاصی تعلق یابند به نحویکه مقدار تابع عضویت هر یک از ابعاد ورودی و یا خروجی در آنها ماکزیمم باشد.

$$\begin{cases} A_i^{j*} & \text{مجموعه فازی منتخب ورودیها Such that } \mu_{A_i^{j*}}(x_{0i}^{p}) \geq \mu_{A_i^{j}}(x_{0i}^{p}) \quad for \quad j = 1, 2, \ldots, N_i \\ B^{e*} & \text{مجموعه فازی منتخب خروجی Such that } \mu_{B^{e*}}(y_0^{p}) \geq \mu_{B^{e}}(y_0^{p}) \quad for \quad e = 1, 2, \ldots, N_y \end{cases}$$

$$If \quad x_1 \quad is \quad A_1^{J*} \quad and \quad \ldots and \quad x_n \quad is \quad A_n^{j*}, Then \quad y \quad is \quad B^{e*}$$

* در مثال ارائه شده در شکل قبل مثلاً برای مشاهده اول و دوم دو قاعده زیر را داریم :

$$If \quad x_1 \quad is \quad B_1 \quad and \quad x_2 \quad is \quad S_1, Then \quad y \quad is \quad CE$$

$$If \quad x_1 \quad is \quad B_1 \quad and \quad x_2 \quad is \quad CE, Then \quad y \quad is \quad B_1$$

* قدم سوم : اختصاص درجه‌ای از به هر یک از قواعد تولید شده توسط قدم دوم (احتمال تداخل و همپوشانی conflict).

$$D(rule) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{j*}}(x_{0i}^{p})\mu_{B^{e*}}(y_{0}^{p})$$

* به درجه فوق می‌توان میزان اطمینان (Reliability) به این قاعده را نیز اضافه ستفاده نمود. بعنوان مثال اگر زوج ورودی-خروجی $(x_0^p;y_0^p)$ دارای درجه اطمینان(Reliable Degree) μ^pباشد ($\mu^p \in [0,1]$) درجه قاعده بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$D(rule) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{j*}}(x_{0i}^{p})\mu_{B^{e*}}(y_{0}^{p})\mu^{p}$$

* قدم چهارم : ایجاد پایگاه قواعد فازی
* مجموعه قواعد فازی شامل سه مجموعه قواعد زیر می‌باشند.
* قواعدی که در قدم دوم ایجاد شده‌اند و هیچ‌گونه conflict با سایر قواعد ندارند.
* قاعده ای که دارای درجه ماکزیمم در سری قواعد دارای conflict می‌باشد.
* قواعد زبانی برگرفته از شخص خبره در حوزه دانشهای conscious

X_2

S_3					
S_2					
S_1					
CE					
B_1					
B_2					
	S_2	S_1	CE	B_1	B_2

X_1

* قدم پنجم : ایجاد سیستم فازی بر اساس پایگاه قوانین فازی

هر یک از ساختارهای سیستم فازی متداول که قبلاً بحث شده بعنوان نمونه می‌تواند در این قسمت استفاده شود مثلاً .product Inference Eng ، singleton fuzzifier ، center average Defuzzifier.

ممکن است این روش منتهی به یک پایگاه قواعد فازی کامل (complete) نگردد به عبارت دیگر ممکن است خانه‌ای خالی بماند و قاعده ای نداشته باشد. جهت complete کردن می‌توان به عنوان یک ایده قواعدی به صورت Interpolate از قواعد همسایه در خانه‌های خالی ایجاد نمود.

* دو فاکتور محدود کننده تعداد قواعد می‌باشد که یکی N (تعداد زوجهای ورودی و خروجی) و دیگری $\prod_{i=1}^{n} N_i$ که تمام ترکیبهای ممکن مجموعه‌های فازی تعریف شده برای متغیرهای ورودی است و ممکن است $\prod_{i=1}^{n} N_i$ در مواردی خیلی بزرگ گردد . اگر ابعاد n زیاد گردد از طرفی به دلیل conflict ممکن است تعداد قواعد از N بسیار کمتر گردد پس تعداد قوانین نهایی از هر دو محدود کننده N و $\prod_{i=1}^{n} N_i$ میتواند بسیار کمتر باشد.
* کاربرد LookUpTable: Time Series Prediction و Nonlinear Controlمانند Truck Backaer_uppercore.

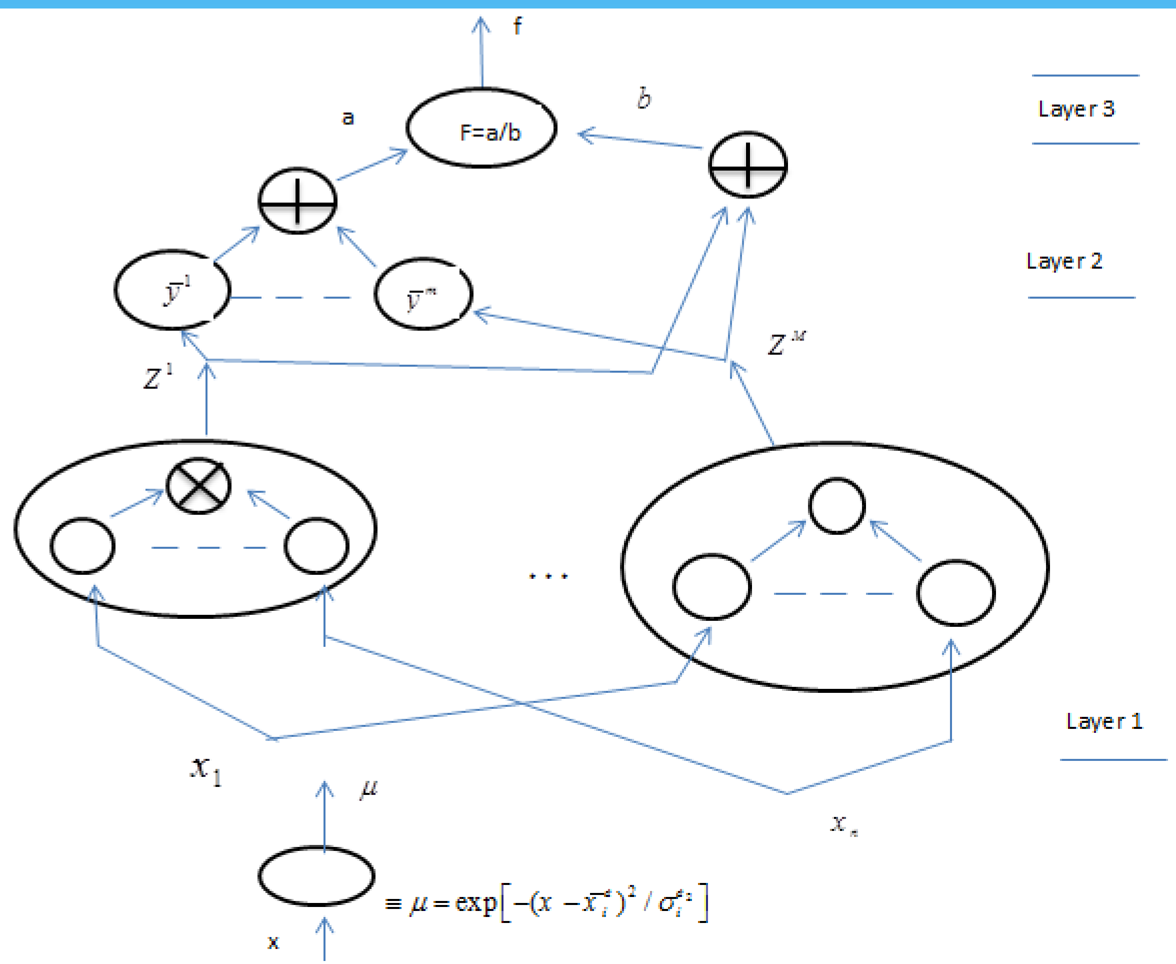
* **طراحی سیستم‌های فازی به کمک آموزش به صورت کاهش گرادیان Gradient Descent Training :**

در طراحی سیستم‌های فازی به کمک جدول مشاهده LookUpTable توابع عضویت ثابت بوده‌اند و وابسته به مقادیر زوج ورودی – خروجی نبوده‌اند و این می‌تواند یک عیب باشد در اینجا هدف تعیین توابع عضویت بصورت بهینه از روی زوجهای ورودی – خروج می‌باشد.

یک معماری ثابت برای سیستم فازی با هسته استنتاج حاصلضرب ، فازی کننده تکین ، بی‌فازی کننده متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی در نظر گرفته می‌شود سپس برخی پارامترهای متغیر در این ساختار در نظر گرفته می شود و این پارامترها بصورت بهینه تنظیم می شوند.

$$f(x)=\frac{\sum_{e=1}^{M}\bar{y}^{e}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^{e}}{\sigma_i^{e}}\right)^2\right)\right]}{\sum_{e=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^{e}}{\sigma_i^{e}}\right)^2\right)\right]}$$

* که M ثابت است ولی $\bar{y}^{e}$ ، $\bar{x}_i^{e}$ ، σ_i^{e} پارامترهای آزاد هستند.


f
a
F=a/b
b
Layer 3
Layer 2
Layer 1
$\bar{y}^1$
$\bar{y}^m$
Z^1
Z^M
. . .
x_1
μ
x_n
x
$\equiv \mu = \exp\left[-(x - \bar{x}_i^{\ell})^2 / \sigma_i^{\ell 2}\right]$

* ساختار مشخص است ولی سیستم فازی طراحی نشده است و هدف از طراحی یافتن $\bar{y}^e$، $\bar{x}_i^e$، σ_i^eمی‌باشند. همانطور که قبلاً دیده شد این طراحی باید بر مبنای زوجهای ورودی-خروجی صورت پذیرد و به نحوی باشد که f(x) بدست آمده دارای خطای تطبیق مینیمم باشد:

$$e^p = \frac{1}{2}\left[f(x_0^p) - y_0^p\right]^2$$

* از این به بعد جهت سادگی برای نمایش e^p، $f(x_0^p)$ و y_0^pاز e ، f و y استفاده می‌شود .

* از الگوریتم کاهش گرادیان برای تعیین پارامترها استفاده می‌شود . مثلاً برای محاسبه $\bar{y}^e$ از فرمول و الگوریتم زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{y}^e(q+1) = \bar{y}^e(q) - \alpha \frac{\partial e}{\partial \bar{y}^e}\Big|_q \qquad , \begin{array}{l} e = 1, 2, \ldots, M \; , q = 0, 1, 2, \ldots \\ \alpha = Cons\tan tStepsize \end{array}$$

* اگر با رفتن q به سمت بینهایت $\bar{y}^e(q)$ همگرا گردد در مرحله همگرایی (مقدار همگرا شده = $\bar{y}^e(q)$) داریم $\frac{\partial e}{\partial \bar{y}^e} = 0$ یعنی $\bar{y}^e(q)$یک مینیمم محلی از e می‌باشد

* f=a/b

$$a = \sum_{e=1}^{M} (\bar{y}^e z^e) \qquad b = \sum_{e=1}^{M} (z^e) \qquad z^e = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^e}{\sigma_i^e}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \bar{y}^e} = (f - y)\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \bar{y}^e} = (f - y)\frac{1}{b} z^e$$

* قانون آموزش برای $\bar{y}^e$:

$$\bar{y}^e(q+1) = \bar{y}^e(q) - \alpha \frac{f - y}{b} z^e \qquad for: e = 1, 2, \ldots, M \quad and \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

* به طریق مشابه
* قانون آموزش برای $\bar{x}_i^e$:

$$\bar{x}_i^e(q+1) = \bar{x}_i^e(q) - \alpha \frac{f-y}{b}(\bar{y}(q)-f)z^e \frac{2(x_{0i}^p - \bar{x}_i^e(q))}{\sigma_i^{e2}(q)}$$

$$for: e = 1, 2, \ldots, M \quad and \quad q = 0, 1, 2, \ldots \quad and\ i = 1, 2, \ldots, n$$

* قانون آموزش برای σ_i^e :

$$\sigma_i^e(q+1) = \sigma_i^e(q) - \alpha \frac{\partial e}{\partial \sigma_i^e}\Big|_q = \sigma_i^e(q) - \alpha \frac{f-y}{b}(\bar{y}^e(q)-f)z^e \frac{2(x_{0i}^p - \bar{x}_i^e(q))^2}{\sigma_i^{e3}(q)}$$

$$for: e = 1, 2, \ldots, M \quad and \quad q = 0, 1, 2, \ldots \quad and\ i = 1, 2, \ldots, n$$

* مراحل طراحی :
* گام اول : سیستم را با معماری داده شده با M مشخص طراحی کنید. هرچه M بزرگتر باشد صحت تقریب بهتر است ولی پارامترها بیشتر و در نتیجه هزینه محاسبات بالاتر می‌رود .
* مقادیر ابتدایی پارامترها $\sigma_i^e(0)$ ، $\bar{x}_i^e(0)$ و $\bar{y}^e(0)$ را تعریف کنید .
* این پارامترهای ابتدایی می‌تواند بر طبق قواعد زبانی شخص خبره تعیین گردد و یا به نحوی تعیین گردند که توابع عضویت مربوطه بطور یکنواختی فضاهای ورودی و خروجی را بپوشاند.

* گام دوم : برای زوجهای داده موجود ...,p=1,2 و (x_0^p, y_0^p) در مرحله qام آموزش ...,q=0,1,2 ، x_0^pرا به ورودی داده و خروجی لایه‌ها را محاسبه نمایید :

$$z^e = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^e}{\sigma_i^e}\right)^2\right) \qquad b = \sum_{e=1}^{M} Z^e, a = \sum_{e=1}^{M} \bar{y}^e(q) z^e, f = a/b$$

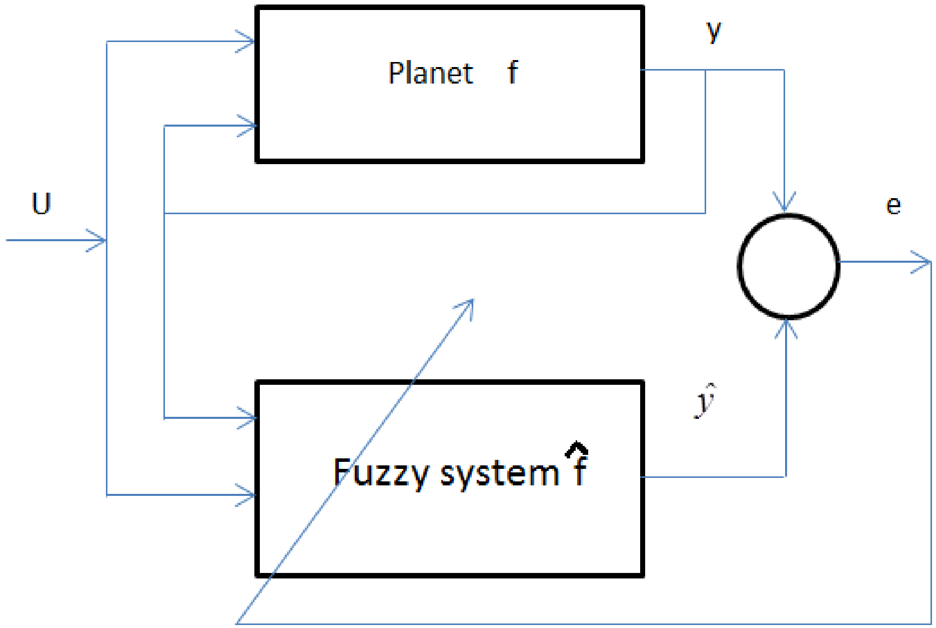
* گام سوم : با توجه به مقادیر بدست آمده در گام دوم برای مرحله qام پارامترها را با فرمولهای آموزشی برای مرحله (q+1)ام بدست آورید.

* گام چهارم : با رفتن به مرحله دوم طراحی را تکرار نمایید. با توجه به q=q+1 تا جائیکه خطا $\left| f - y_0^p \right|$ کمتر از عدد ε تعریف شده گردد و یا q به یک عدد از قبل تعیین شده ای برسد.
* گام پنجم : با رفتن به مرحله دوم طراحی را تکرار نمایید با توجه به p=p+1 به عبارت دیگر پارامترها را با زوج ورودی و خروجی بعدی $(x_0^{p+1}; y_0^{p+1})$ بهینه نمایید.

* گام ششم : اگر تمایل داشته باشید و امکان آن نیز وجود داشته باشد با قرار دادن p-1 مجدداً مراحل ۲ تا ۵ تکرار شود تا سیستم مطلوب حاصل گردد. برای کاربردهای کنترل روی خط on-line و یاDynamic system Identification این گام ممکن نیست زیرا نمونه‌های ورودی یکی یکی در زمانهای واقعی اعمال می‌گردد ولی مثلاً در کاربردهای شناسائی الگو Pattern Recognition به دلیل اینکه زوجهای ورودی و خروجی به صورت off-line موجود است این گام مطلوب است.

* انتخاب شرایط اولیه در نتایج بسیار مهم است ولی مزیت سیستمهای فازی نسبت به سایر سیستمها در این است که این پارامترها مفهوم فیزیکی و مطلوب دارند و انتخاب بهینه اولیه آنها ممکن تر می‌باشد.

مثال کاربردی : No Linear Dynamic System Identification



* طراحی یک سیستم فازی با استفاده از Recursive Least Squares
* در روش آموزش ، کاهش گرادیان خطا بصورت نقطه به نقطه محاسبه و مینیمم می‌شد ولی در این روش هدف مینیمم نمودن مجموع تمامی خطاها تا نمونه pام می‌باشد. به عبارت دیگر سیستم فازی طوری طراحی می‌گردد که $J_p = \sum_{j=1}^{p}\left[f(x_0^j) - y_0^j\right]^2$ مینیمم گردد .

* **مراحل طراحی :**
* گام اول : فرض کنید که $U=[\alpha_1,\beta_1]\times\ldots\times[\alpha_n,\beta_n]\subset R^n$. برای هر $[\alpha_i,\beta_i]$ که i=1,2,…,n می‌باشد N_i مجموعه فازی $A_i^{e_i}\ (e_i=1,2,\ldots,N_i)$ تعریف می‌گردد که در بازه $[\alpha_i,\beta_i]$ کامل باشند. مثلاً می‌توان $A_i^{e_i}$ را مجموعه‌های فازی شبه ذوزنقه‌ای به صورت زیر تعریف نمود :

$$\mu_{A_i^{e_i}}(x_i)=\mu_{A_i^{e_i}}(x_i;a_i^{e_i},b_i^{e_i},c_i^{e_i},d_i^{e_i})$$

$$a_i'=b_i'=\alpha_i, c_i^j\le a_i^{j+1}<d_i^j\le b_i^{j+1}\quad for\quad j=1,2,\ldots,N_i-1\ , c_i^{N_i}=d_i^{N_i}=\beta_i$$

* گام دوم : سیستم فازی را از $\prod_{i=1}^{n} N_i$ قاعده IF-THEN فازی بصورت زیر تشکیل دهید :

$$If \quad x_1 \quad is \quad A_1^{e_1} \quad and \ldots and\ x_n\ is \quad A_n^{e_n}, Then \quad y \quad is \quad B^{e_1 \ldots e_n}$$

$$e_i = 1, 2, \ldots, N_i \quad and\ i = 1, 2, \ldots, n$$

* و $B^{e_1 \ldots e_n}$ هر مجموعه فازی با مرکز $\bar{y}^{e_1 \ldots e_n}$ است. که می‌تواند آزادانه تغییر نماید.
* اختصاصاً از سیستم فازی با موتور استنتاج حاصلضرب ، فازی کننده تکین و بی فازی کننده متوسط مراکز استفاده می‌شود.

$$f(x)=\frac{\sum_{e_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{e_n=1}^{N_n}\bar{y}^{e_1\ldots e_n}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{e_i}}(x_i)\right]}{\sum_{e_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{e_n=1}^{N_n}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{e_i}}(x_i)\right]}$$

* که $\bar{y}^{e_1\ldots e_n}$متغیر است و باید طراحی شود و$A_i^{e_i}$ در گام اول طراحی شده است . پارامترهای آزاد $\bar{y}^{e_1\ldots e_n}$ را در یک بردار با ابعاد $\prod_{i=1}^{n}N_i$بصورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\theta=(\bar{y}^{1\ldots1},\ldots,\bar{y}^{N_1 1\ldots1},\bar{y}^{121\ldots1},\ldots,\bar{y}^{1N_2 1\ldots1},\ldots,\bar{y}^{N_2\ldots N_n},\ldots,\bar{y}^{N_1 N_2\ldots N_n})^T$$

* و رابطه قبل را بصورت زیر می‌توان نوشت :

$$f(x) = b^T(x)\theta$$

$$b(x) = \left(b^{1\ldots1}(x),\ldots,b^{N_1 1\ldots1}(x),b^{121\ldots1}(x),\ldots,b^{N_1 21\ldots1}(x),\ldots,b^{1N_2\ldots N_n}(x),\ldots,b^{N_1 N_2\ldots N_n}(x)\right)^T$$

$$b^{e_1\ldots e_n}(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{e_i}}(x_i)}{\sum_{e_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{e_n=1}^{N_n}\left[\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^{e_i}}(x_i)\right]}$$

* گام سوم : $\theta(0)$ یا مقادیر ابتدایی پارامترهای θ را انتخاب نمایید. این انتخاب می‌تواند یا با قواعد ارائه شده توسط شخص خبره باشد که قسمت IF این قواعد با IF قوانین فوق همخوانی داشته است و در این صورت می‌توان $\bar{y}^{e_1e_2...e_n}(0)$ را مرکز قسمت THEN مجموعه‌های فازی در این قواعد زبانی در نظر گرفت و یا $\theta(0)$ را بطور اختیاری انتخاب نمود (مثلاً $\theta(0)=0$ و یا بطور یکنواخت بر روی فضای V در نظر بگیرید)
* گام چهارم : مقدار θ را برای p=1,2,... ، با استفاده از الگوریتم‌های بازگشتی کمترین مربع خطا زیر محاسبه نمایید :

$$\theta(p) = \theta(p-1) + K(p)[y_0^p - b^T(x_0^p)\theta(p-1)]$$

$$K(p) = P(p-1)b(x_0^p)[b^T P(p-1)b(x_0^p)+1]^{-1}$$

$$P(p) = P(p-1) - P(p-1)b(x_0^p)[b^T_{(x_0^p)} P(p-1)b(x_0^p)+1]^{-1} b^T(x_0^p)P(p-1)$$

* که $\theta(0)$درگام سوم اختیار شده و $P(0) = \sigma I$ که σیک ثابت بزرگ است روابط فوق باعث بدست آمدن θ ای (اثبات در کتاب موجود می‌باشد) بهینه می‌گردد که ایجاد کننده حداقل مربع خطا است .
* کاربرد : equalization of nonlinear communication channels

طراحی سیستمهای فازی با استفاده از خوشه‌بندی (clustering)

* در طراحی های قبلی روشی سیستماتیک جهت تعیین تعداد قواعد وجود نداشته است .
* انتخاب بهینه قواعد یکی از فاکتورهای مهم است زیرا باعث ازدیاد بی‌مورد قواعد و در نتیجه پیچیده‌تر شدن سیستم فازی می‌گردد. از طرفی کمبود قواعد (تعداد کم) باعث ایجاد سیستم فازی با قدرت بسیار کم می‌گردد.
* در این روش هدف تعیین بهینه تعداد قواعد از روی زوجهای ورودی-خروجی است.

* با گروه‌بندی زوجهای ورودی-خروجی در درون خوشه‌هایی و انتخاب یک قاعده برای هر خوشه به هدف اصلی نائل می‌گردیم .
* روند کار بدین صورت است که در ابتدا یک سیستم فازی بهینه در تطبیق وروديها و خروجيها با صحت دلخواهی طراحی می‌گردد (اگر تعداد ورودی-خروجی کم باشد چنین سیستم بهینه‌ای مفید است) سپس با کمک الگوریتم خوشه بندی نزدیکترین همسایه (Nearest neighborhood clustering Algorithm) زوجهای ورودی-خروجی را خوشه بندی می‌کنیم. (خوشه‌ها به صورت زوجهای ورودی-خروجی دیده می‌شوند) و از سیستم فازی بهینه در تطبیق آنها استفاده می‌شوند.

* یک سیستم فازی بهینه **An optimal Fuzzy System**
* فرض کنید که N زوج ورودی-خروجی $(x_0^e;y_0^e)$ موجود است که l=1,2,…,N و N عدد کوچکی است (مثلاً ۲۰) .
* هدف طراحی یک سیستم فازی بهینه جهت تطبیق این ورودیها و خروجیها با صحت مطلوبی می‌باشد به عبارت دیگر برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده باید :

$$\left| f(x_0^e) - y_0^e \right| < \varepsilon \quad for \quad all \quad e = 1,2,\ldots,N$$

* این سیستم فازی بهینه بصورت زیر ساخته می‌شود :

$$f(x)=\frac{\sum_{e=1}^{N} y_0^e \exp\left(-\frac{\left|x-x_0^e\right|^2}{\sigma^2}\right)}{\sum_{e=1}^{N} \exp\left(-\frac{\left|x-x_0^e\right|^2}{\sigma^2}\right)}$$

* سیستم فوق دارای N قاعده با $\mu_{A_i^e}(x_i)=\exp\left(-\frac{\left|x-x_0^e\right|^2}{\sigma^2}\right)$ و مرکز B^e برابر با y_0^e و موتور استنتاج حاصلضرب فازی کننده تکین و بی فازی کننده متوسط مراکز است . با تنظیم مناسب پارامتر σ می‌توان به سیستم فازی بهینه ای جهت تطبیق وروديها-خروجیها با صحت مورد نظر رسید.

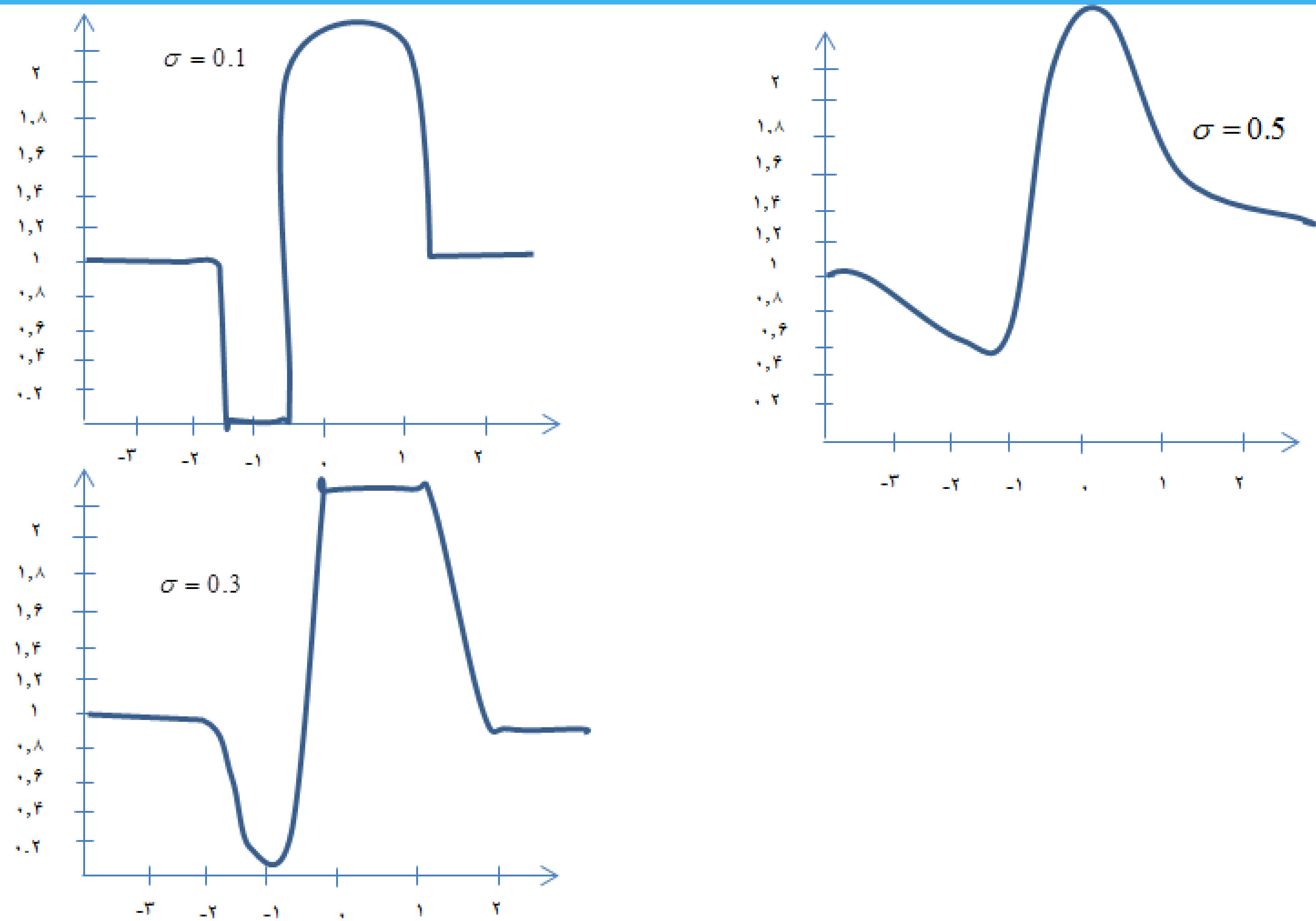
* تئوری : برای $\varepsilon > 0$ اختیاری، وجود دارد $\sigma^* > 0$ به نحویکه سیستم فازی معرفی شده در فوق با $\sigma = \sigma^*$ دارای خاصیت زیر باشد :

$$\left|f(x_0^l) - y_0^l\right| < \varepsilon \quad for \quad all \quad l = 1, 2, \ldots, N$$

* اگر σ کوچک باشد باعث کوچک شدن خطای تطبیق $\left|f(x_0^l) - y_0^l\right|$ می‌گردد ولی f(x) دارای نرمی کمتر می‌گردد (less Smooth) و اگر f(x) دارای نرمی کمتری باشد ممکن است برای داده‌هایی که در مجموعه آموزشی وجود نداشته اند به خوبی جوابگو نباشد .

* از طرفی مشکل تعمیم (مشکل generalization) وجود دارد پس σ باید به نحوی بهینه تعیین گردد که بالانسی مابین تطبیق و تعمیم ایجاد گردد.
* مثال : فرض کنید دارای ۵ زوج ورودی و خروجی بصورت زیر می‌باشیم :

$$(-2,+1),(-1,0),(0,2),(1,2),(2,1)=(x_0^l;y_0^l)$$ و L=1,2,...,5


$\sigma = 0.1$
$\sigma = 0.3$
$\sigma = 0.5$
۲
۱,۸
۱,۶
۱,۴
۱,۲
۱
۰,۸
۰,۶
۰,۴
۰,۲
-۳
-۲
-۱
۰
۱
۲

* **طراحی سیستمهای فازی توسط خوشه بندی**
* قدم اول : با اولین زوج ورودی – خروجی $(x_0^1;y_0^1)$ کار را شروع نمایید . مرکز یک خوشه (x_c^1) را در x_0^1 در نظر بگیرید و $A^1(1)=y_0^1$ و $B^1(1)=1$ و یک شعاع rرا انتخاب کنید.
* قدم دوم : فرض کنید که k امین زوج ورودی و خروجی را در اختیار دارید $(x_0^k;y_0^k)$ که k=2,3,... و دارای M خوشه با مراکز $x_c^1,x_c^2,...,x_c^M$ هستید. فاصله x_0^k را با این M مرکز محاسبه کنید $\left|x_0^k-x_c^l\right|,l=1,2,...,M$ و کوچکترین آن را $\left|x_0^k-x_c^{l_k}\right|$ در نظر بگیرید این خوشه $x_c^{l_k}$ نزدیکترین خوشه به نمونه x_0^k است . سپس :

* (الف) اگر $\left| x_0^k - x_c^{l_k} \right| > r$ در نتیجه x_0^k را به عنوان یک مرکز جدید خوشه $x_c^{M+1} = x_0^k$ در نظر بگیرید و $A^{M+1}(k) = y_0^k$ و $B^{M+1}(k) = 1$ و مقادیر قبلی B و A حفظ گردند، یعنی :

$$A^l(k) = A^l(k-1), B^l(k) = B^l(k-1) \quad for \quad l = 1,2,...,M$$

* (ب) اگر $\left| x_0^k - x_c^{l_k} \right| \le r$:

$$A^{l_k}(k) = A^{l_k}(k-1) + y_0^k$$

$$B^{l_k}(K) = B^{L_k}(k-1) + 1$$

,

$$A^l(k) = A^l(k-1), B^l(k) = B^l(k-1), for: l = 1,2,...,M \quad with \quad l \neq l_k$$

* قدم سوم : اگر x_0^k یک خوشه جدید را ایجاد نکرده است سیستم فازی طراحی شده بر مبنای k ورودی-خروجی $(x_0^j ; y_0^j)$ و j=1,2,...,k بصورت زیر است :

$$f_k(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} A^l(k) \exp\left(-\frac{\left|x - x_c^l\right|^2}{\sigma}\right)}{\sum_{l=1}^{M} B^l(k) \exp\left(-\frac{\left|x - x_c^l\right|^2}{\sigma}\right)}$$

* اگر x_0^k یک خوشه جدید را نمایش می دهد سیستم فازی طراحی شده به شکل زیر است :

$$f_k(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M+1} A^l(k)\exp\left(-\frac{\left|x-x_c^l\right|^2}{\sigma}\right)}{\sum_{l=1}^{M+1} B^l(k)\exp\left(-\frac{\left|x-x_c^l\right|^2}{\sigma}\right)}$$

* گام چهارم : تکرار از گام دوم با k=k+1 .
* تعداد زوجهای ورودی-خروجی در خوشه lام . پس از k عدد زوج ورودی-خروجی استفاده شده = $B^{l}(k)$
* مجموع مقادیر خروجی زوجهای ورودی-خروجی در k امین خوشه = $A^{l}(k)$
* بنابراین تعداد قوانین حاصل به دو فاکتور وابسته است : ۱- نحوه توزیع داده‌های ورودی ۲- شعاع r
* شعاع r میزان پیچیدگی سیستم فازی طراحی شده را بیان می‌کند :
* شعاع r کمتر، خوشه‌های بیشتر، سیستم فازی قویتر و پیچیدگی بیشتر
* شعاع r بیشتر، خوشه‌های کمتر، سیستم فازی ضعیفتر و پیچیدگی کمتر

* سیستم حاصل از خوشه بندی در مقیاس با سیستم فازی بهینه (یک قاعده برای هر ورودی-خروجی) دارای خطای تطبیق بیشتر می‌باشد ولی تعداد قاعده های کمتری دارد پس اگر تعداد ورودی-خروجی کم باشد سیستم فازی بهینه ارجحتر است ولی اگر زیاد شود بدلیل اینکه تعداد قاعده ها بسیار زیاد می‌شود سیستم خوشه بندی هر چند خطای تطبیق بیشتر دارد، ارجحتر می‌باشد.

* اگر سیستم فازی در حال مدل نمودن یک سیستم با خصوصیات متغیر و یا قابل تغییر است بدلیل اینکه $A^{l}(k)$ و $B^{l}(k)$ بصورت تکراری محاسبه می‌شوند می‌توان یک فاکتور فراموشی (ε) را به روابط اضافه نمود :

$$A^{l}(k)=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}A^{l_k}(k-1)+\frac{1}{\varepsilon}y_0^{k}$$

$$B^{l}(k)=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}B^{l_k}(k-1)+\frac{1}{\varepsilon}$$

$$A^{l}(k)=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}A^{l}(k-1)$$

$$B^{l}(k)=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}B^{l}(k-1)$$

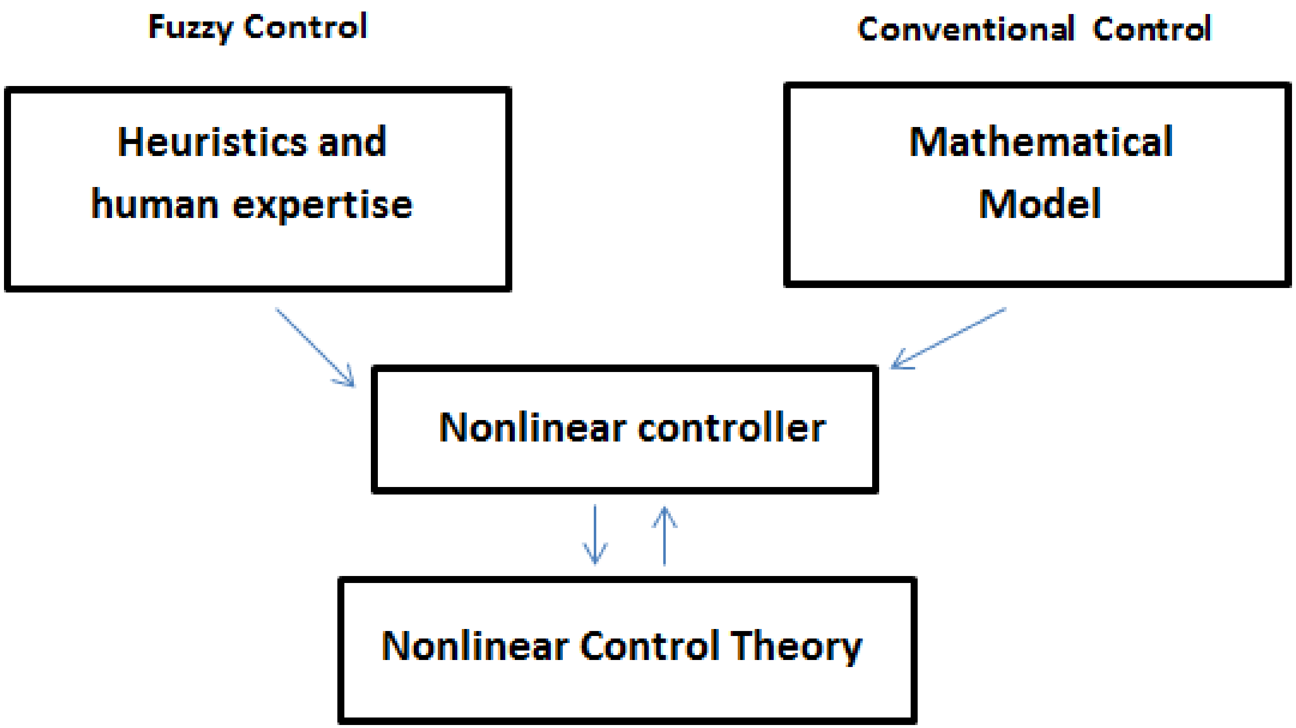
* که ε به عنوان نمونه می‌تواند بصورت ثابت زمانی یک تابع نمایی کاهشی فرض گردد. به عبارت دیگر برای $B^l(k)$ اگر زمان به اندازه کافی می‌گذشت بدون اینکه خوشه خاصی بهینه گردد این خوشه باید حذف گردد [$B^l(k)$ از یک آستانه کمتر می‌شود پس حذف گردد] .
* کاربرد : Adaptive control of Nonlinear system

کنترل کننده‌های فازی Fuzzy Controller

* Fuzzy Controller:
  ۱- Nonadaptive fuzzy control
  ۲- Adaptive fuzzy control
* Nonadap. : ساختار و پارامترهای کنترل کننده فازی ثابت می‌باشند و در طول عملکرد زمان حقیقی (Real-Time) تغییر نمی‌کنند . ساده‌تر است ولی نیاز به دانش مدل فرآیند یا قوانین موجود بیشتر است.
* Adaptive : ساختار یا (و) پارامترهای کنترل کننده فازی در طول عملکرد زمان حقیقی تغییر می‌کنند ، بسیار گرانتر است ولی دانش کمتری نیاز دارد و می‌تواند عملکرد بهتری را نیز بدنبال داشته باشد.

* **مقیاس کنترل کننده‌های فازی و کنترل‌کننده‌های متداول :**
* شباهتها :
* مسائل یکسانی را حل می‌کنند (مسائل کنترلی) ، بنابراین بحثهای یکسانی را مانند stability (پایداری) و performance را دنبال می‌کنند.
* بدلیل مطالعه بحثهای یکسان مانند همگرایی ، پایداری و ... ، برای سیستمهای یکسان ابزارهای ریاضی بکار رفته جهت آنالیز سیستمهای کنترل طراحی شده یکسان می‌باشند.

* تفاوتها :
* کنترلهای متداول با مدل ریاضی فرآیند شروع می‌نمایند و کنترلر برای مدل مذکور طراحی می‌گردد ولی کنترلر فازی با دانش فرد خبره شروع می‌کند (در قالب قواعد فازی IF-Then) و کنترلرها با سنتز این قواعد مورد طراحی قرار می‌گیرند. بنابراین دانش پایه در این دو نگرش متفاوت است ولی در کنترلرهای پیشرفته فازی Advance Fuzzy Controller از هر دو دانش در ابتدا بهره می‌جوید.


Fuzzy Control
Conventional Control
Heuristics and human expertise
Mathematical Model
Nonlinear controller
Nonlinear Control Theory

* روش‌های طراحی کنترلر فازی:

۱- روش سعی و خطا (Trial-and-Error)

۲- روش تئوری (Theoretical)

* در روش سعی و خطا مجموعه‌ای از قواعد برگرفته از دانشهای تجربی (مثلاً operating Manual) جمع‌آوری می‌گردد و همچنین با مجموعه‌ای از سوالات دقیق این قواعد IF-THEN کامل شده و در مرحله تست این کنترلر فازی اگر عملکرد مناسب نبود قواعد تنظیم می‌شوند و یا مرحله‌های فوق تکرار می‌گردند.
* در روش Theoretical : ساختار و پارامترهای کنترلر فازی طوری طراحی می‌گردند که برخی از شرایط عملکردی را اختیار نماید(مانند پایداری).
* در طراحی کنترلر فازی برخی از سیستمها، ترکیب دو روش فوق الزامی به نظر می‌رسد تا به یک کنترلر بهینه دست یابیم.

* **روش طراحی سیستمهای کنترل فازی بر مبنای سعی و خطا :**
* قدم اول : سیستم واقعی را آنالیز کنید و متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل را تعیین کنید. متغیرهای حالت ویژگیهای کلیدی سیستم می‌باشند و متغیرهای کنترل بر روی حالت سیستم تاثیرگذار می باشند.
* متغیر حالت ورودی کنترلر و متغیر کنترلی، خروجی کنترلر فازی است. در این گام Domain عملکرد کنترلر فازی تعیین می‌گردد.
* گام دوم : قاعده های IF-THEN فازی را که متغیرهای حالت را به متغیرهای کنترلی ارتباط می‌دهد استخراج نمایید.
* این قواعد می‌توانند از مراجعی مانند operating manualو یا مجموعه کامل پرسشها از شخص خبره استخراج کردد.

* گام سوم : این قواعد فازی IF-THEN را در یک سیستم فازی دخالت داده و ساختار خاص را در یک سیستم closed –loop به عنوان کنترلر بکار ببرید. اگر نتیجه مناسب نبود تنظیم‌های خاص و یا طراحی مجدد به طریق سعی و خطا صورت پذیرد تا نهایتاً نتیجه مناسب گردد.

* **کنترل فازی سیستمهای خطی**
* در حالت کنترل فازی با سعی و خطا مدلی از سیستم تحت کنترل ارائه نمی‌گردید و توسط دانشهای موجود قواعد IF-THEN ارائه می‌شد. اگر برخی از شرایط (مانند پایداری) مورد نظر قرار گیرد حتماً باید مدلی ریاضی از فرآیند تحت کنترل ارائه گردد و از آنالیزهای ریاضی در طراحی کنترلر بهره جست . در این قسمت با توجه به پایداری طراحی صورت می‌پذیرد.

* **کنترل کننده پایدار فازی بر اساس سیستمهای تک ورودی- تک خروجی**

دو کلاس مختلف پایداری وجود دارد :

۱- پایداری لیاپانوف Lyapunor Stability

۲- پایداری ورودی-خروجی Input-Output Stability

* در پایداری لیاپانوف : یک سیستم خود تحریک (Autonomous System) را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\dot{x}(t) = g[x(t)] \qquad x \in R^n, g(x) = n \times 1$$

فرض کنید : g(0)=0 پس x=0 نقطه تعادل سیستم است.

تعریف پایداری لیاپانوف : نقطه تعادل x=0 پایدار نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به نحویکه $\|x(0)\| < \delta$ بیانگر این باشد که $\|x(t)\| < \varepsilon$ است برای هر $t \geq 0$.

* در صورتی در حالت مجانبی پایدار است (Asymptotically Stable) اگر پایدار باشد و علاوه بر آن وجود داشته باشد $\delta'>0$ به نحویکه $\|x(0)\|<\delta'$ بیانگر این باشد که $x(t)\rightarrow 0$ اگر $t\rightarrow\infty$.
* در صورتی نقطه تعادل x=0 به صورت نمایی پایدار است (exponentially Stable) اگر اعداد مثبت α,λ,r وجود داشته باشد به نحویکه

$$\|x(t)\|\leq\alpha\|x(0)\|e^{-\lambda t}\quad for\quad all\quad t\geq 0\quad and\quad \|x(0)\|\leq r$$

* اگر پایداری نمایی و مجانبی برای همه مقادیر و حالتهای اولیه x(0) برقرار باشد نقطه تعادل x=0 را پایدار نمایی کلی (globally exponential stable) و یا پایدار مجانبی کلی (globally Asymptotically Stable) می‌نامند.
* در حالت پایداری ورودی-خروجی هر سیستمی که ورودی $u(t) \in R^r$ را به خروجی $g(t) \in R^m$ نگاشت می‌کند را مورد نظر قرار می‌دهیم.

* تعریف پایداری ورودی-خروجی (Input-Output Stability) :

فرض کنید که L_p^n مجموعه‌ای از تمامی توابع برداری

$$g(t)=(g_1(t),...,g_n(t))^T \ :[0,\infty]\rightarrow R^n$$

باشد به نحویکه :

$$\|g\|_p=(\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_p^2)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

که

$$\|g_i\|_p=(\int_0^{\infty}|g_i(t)|^p\,dt)^{\frac{1}{p}},\, p\in[1,\infty] and \ \|g_i\|_{\infty}=Sup_{t\in[0,\infty)}|g_i(t)|$$

* یک سیستم با ورودی $u(t)\in R^r$ و خروجی $y(t)\in R^m$ را پایدار L_p (L_p -Stable) گویند اگر :

$$u(t)\in L_p^r \quad implies \quad y(t)\in L_p^m \qquad\qquad p\in[0,\infty]$$

* در حالت خاص یک سیستم بصورت L_∞ پایدار است (یا Bounded-Input-Bounded-Output) اگر $u(t)\in L_\infty^r$ بیانگر $y(t)\in L_\infty^M$ باشد.

* فرض می‌کنیم که فرآیند تحت کنترل دارای یک ورودی و یک خروجی (SISO)(Single Input-Single Output) ، غیر متغیر با زمان و خطی (LTI) با مدل متغیرهای حالت زیر باشد:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

* که $u \in R$ کنترل ، $y \in R$ خروجی و $x \in R^n$ بردار حالت می‌باشد. سیستم فوق کنترلر پذیر است (Controllable) اگر :

$$rank\,[b \quad Ab \ldots. A^{n-1}b] = n$$

* سیستم فوق مشاهده‌پذیر است (Observable) اگر :

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

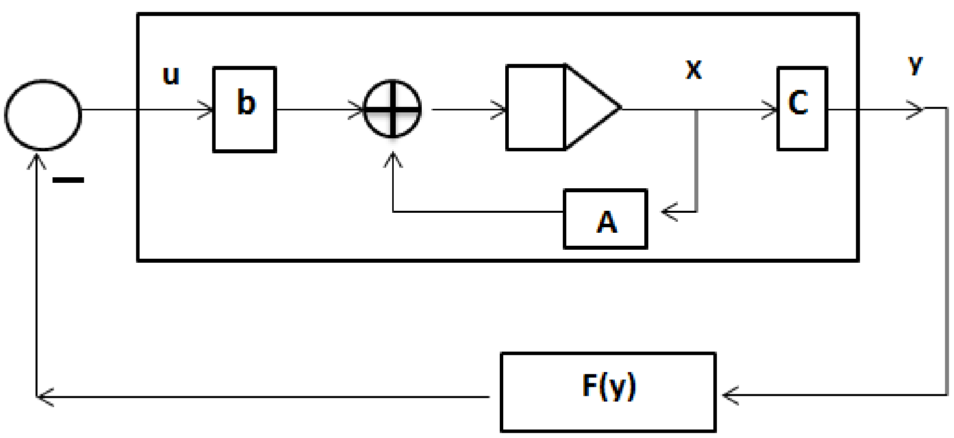
* تابع تبدیل سیستم $h(s) = c(SI - A)^{-1}$ را Strictly Positive Real گویند ، اگر :

$$\inf_{w \in R} \ \mathrm{Re}[h(jw)] > 0$$

* **سیستم‌های کنترل فازی با پایداری نمایی**
* فرض کنید که کنترل $u(t)$ توسط یک سیستم فازی با ورودی $y(t)$ به شکل زیر انجام می‌پذیرد :

$$u(t) = -f\,[y(t)]$$

Process under Control



Fuzzy Controller

* سیستم کنترل حلقه بسته فوق را در نظر بگیرید و فرض کنید :

الف) همه مقادیر ویژه A (Eigenvalues of A) در سمت چپ صفحه مختلط قرار دارند .

ب) سیستم تحت کنترل ، کنترل‌پذیر و قابل مشاهده است .

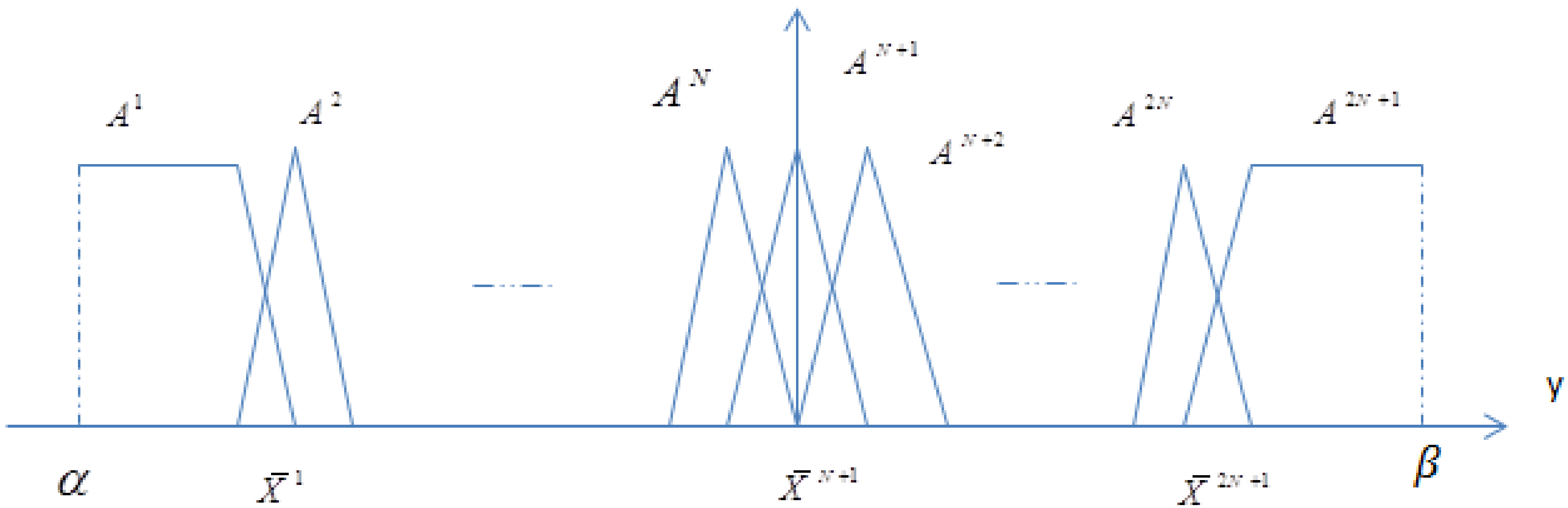
ج) تابع تبدیل سیستم تحت کنترل Strictly Positive Real است.

* اگر تابع غیر خطی f شرایط زیر را برآورده کند :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \quad and \\ yf(y) \geq 0, \forall y \in R \end{cases}$$

* سپس نقطه تعادل x=0 از سیستم حلقه بسته فوق بصورت نمایی پایدار کلی است.(Globally Exponentially Stable)

* **طراحی یک سیستم کنترل کننده پایدار فازی :**
* قدم اول : فرض کنید که خروجی y(t) مقادیری در بازه
* $R \supset [\alpha, \beta] = U$ را به خود اختصاص می‌دهد.
* (2N+1) مجموعه فازی A^e را در U به نحوی تعریف کنید که نرمال، سازگار و کامل با توابع عضویت مثلثی باشند.


A^1
A^2
A^N
A^{N+1}
A^{N+2}
A^{2N}
A^{2N+1}
y
α
$\bar{X}^1$
$\bar{X}^{N+1}$
$\bar{X}^{2N+1}$
β

N مجموعه فازی $A^1,...,A^N$ برای پوشش منطقه منفی $[\alpha,0)$ و بقیه N مجموعه فازی $A^{N+2},...,A^{2N+1}$ ، جهت پوشش منطقه مثبت $(0,\beta]$ نظر گرفته می‌شود و مرکز $\bar{x}^{N+1}$ مجموعه فازی A^{N+1} را برابر صفر می‌گیریم.

* قدم دوم : قاعده IF-Then فازی را به شکل زیر در نظر بگیرید :

$$If \quad y \quad is \quad A^l, Then \quad u \quad is \quad B^l$$

که :

L=1,2,… ,2N+1

$\bar{y}^l$ مراکز مجموعه‌های فازی B^l به نحوی انتخاب می‌شوند که:

$$\bar{y}^l \begin{cases} \leq 0 \quad for \quad l=1,\ldots,N \\ =0 \quad for \quad l=N+1 \\ \geq 0 \quad for \quad l=N+2,\ldots,2N+1 \end{cases}$$

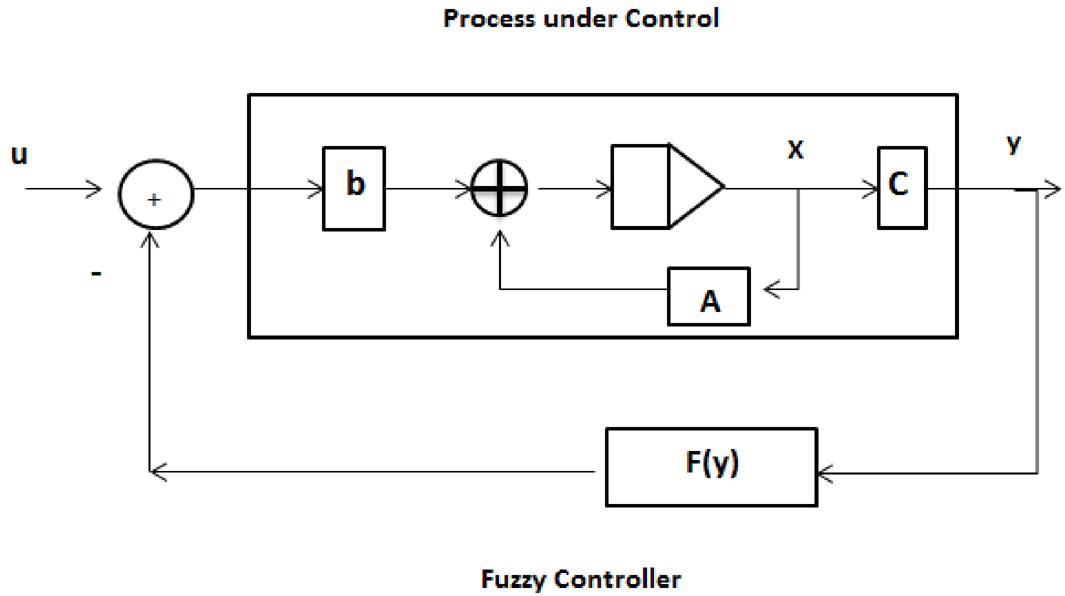
گام سوم : کنترلر فازی را از $(2N+1)$ قاعده فازی فوق با استفاده از موتور استنتاج حاصلضرب فازی کننده تکین و بی فازی کننده متوسط مراکز طراحی نمایید :

$$u = -f(y) = -\frac{\sum_{l=1}^{2N+1} \bar{y}\mu_A l^{(y)}}{\sum_{l=1}^{2N+1} \mu_A l^{(y)}}$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که سیستم فازی تحت شرایط فوق یک کنترل کننده پایدار نمایی globally می‌باشد ، زیرا کافیست نشان دهیم f(0)=0 و

$$yf(y) \geq 0 for \quad all \quad y \in R$$

* سیستمهای کنترل فازی با پایداری ورودی- خروجی



* قضیه : سیستم فوق را در نظر بگیرید و فرض کنید که کنترلر غیر خطی f(y) پیوسته بصورت کلی و لیپشیتز باشد. یعنی:

(Globally Lipchitz Continuous)

$$|f(y_1) - f(y_2)| \le \alpha |y_1 - y_2|, \forall y_1, y_2 \in R$$

(برای ثابتهای مشخصی از α)

* اگر سیستم مدار باز بصورت unforced یعنی $\dot{x}=Ax$ پایدار بصورت globally exponentially باشد [و یا به عبارت دیگر مقادیر ویژه A در سمت چپ صفحه مختلط باشد] سپس مدار فوق که به صورت (forced closed-loop) می‌باشد دارای پایداری بصورت Lp برای همه مقادیر $p\in[1,\infty]$ می‌باشد ادعا می‌کنیم که سیستم فازی طراحی شده در سه گام قبل شرط پیوستگی فوق را دارا می‌باشد.
* قضیه : کنترلر فازی f(y) معرفی شده پیوسته ، محدود و تکه ای خطی می‌باشد.

* **کنترل فازی سیستمهای غیرخطی با کمک کنترل لغزان (Sliding Control)**

کنترل مدلغزان روشی بسیار قوی در کنترل سیستمهای غیرخطی با عدم قطعیت می‌باشد و برای مدلهایی که عدم قطعیت دارند و اغتشاشاتی در پارامترها وجود دارد یک کنترل کننده پایدار است (robust) به شرط آنکه حدود عدم قطعیتها و اغتشاشها معلوم باشد. این نوع کنترل و کنترل‌کننده فازی شباهتهای بسیار زیادی به یکدیگر دارند.

اصول اولیه کنترل مدلغزان

یک سیستم غیرخطی SISO را بصورت زیر در نظر بگیرید :

$$x^{(n)} = f(x) + u$$

$u \in R = Control \quad input$ $\qquad x \in R = outPut$ $\qquad \mathbf{x} = (x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})^T \in R^n = stateVector$

$$f(x) = \hat{f}(x) + \Delta f(x), \left|\Delta f(x)\right| \leq F(x)$$

$\Delta f(x)$ناشناخته است ولی $\hat{f}(x)$ و F(x) شناخته شده‌اند پس عدم قطعیت f(x) توسط تابع شناخته شده‌ای از x محدود شده است.

* هدف از کنترل تعیین یک فیدبک کنترلی u=u(x) است به نحویکه حالت x سیستم مداربسته از حالت مطلوبی مانند $X_d=(x,x_d^0,\dots,x_d^{(n-1)})^T$ پیروی نماید به نحویکه خطای تبدیل نمودن زیر به صفر همگرا گردد :

$$\bar{e}=x-x_d=(e,\dot{e},\dots,e^{(n-1)})^T$$

ایده باید کنترل مدلغزان بصورت زیر است. یک تابع اسکالر بصورت زیر را در نظر بگیرید :

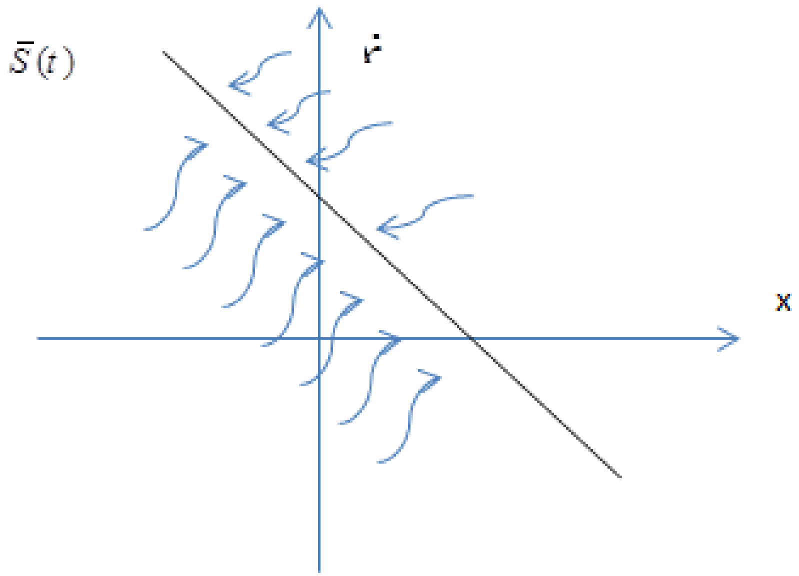
$$S(x,t)=(\frac{d}{dt}+\lambda)^{n-1}e=e^{(n-1)}+C_{n-1}^{1}\lambda e^{(n-2)}+C_{n-1}^{2}\lambda^{2}e^{(n-3)}+\dots+\lambda^{n-1}e$$

λ یک ثابت مثبت است.

* $S(X,t)=0$ یک سطح متغیر با زمان $\bar{S}(t)$ را در فضای حالت R^n نمایش می‌دهد. برای مثال اگر n=2 باشد ، سطح $\bar{S}(t)$ بصورت زیر است:

$$S(x,t)=\dot{e}+\lambda e=\dot{x}+\lambda x-\dot{x}_d-\lambda x_d=0$$

* که در صفحه $(x,\dot{x})$ یک خط مستقیم به شکل زیر است.



Sliding Surface in two-dimensional Phase Plane

* چون $\dot{X}_d$ و X_d معمولاً یک سری توابع متغیر با زمان می‌باشد . پس $\bar{S}(t)$ نیز متغیر با زمان است.
* اگر حالت اولیه X(0) برابر مقدار اولیه حالت مطلوب $X_d(0)$ باشد یعنی $\bar{e}(0)=0$ پس از روابط قبل مشاهده می‌گردد که اگر بردار حالت X روی سطح $\bar{S}(t)$ برای تمامی زمانهای $t \geq 0$ باقی بماند خواهیم داشت:

$$\bar{e}(t) = 0 for \quad all \quad t \geq 0$$

* علاوه بر این $S(X,t)=0$ بیانگر یک معادله خطی و دیفرانسیلی است که برای شرایط اولیه $\bar{e}(0)=0$ می‌تواند دارای پاسخ همیشگی $\bar{e}(t)=0$ می‌باشد. بنابراین مسئله کنترل به این مساله برمی‌گردد که ما سعی کنیم که تابع اسکالر $S(X,t)$ را همواره در صفر نگهداریم.
* برای رسیدن به چنین هدفی ورودی کنترلی u را به نحوی انتخاب می‌کنیم که :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \le -\eta|s|$$

η یک ثابت مثبت می‌باشد.

* شرط فوق را شرط لغزان می‌نامند (Sliding Condition) شرط لغزان تضمین می‌کند که اگر x بر روی سطح $\bar{S}(t)$ نباشد $|S(x,t)|$ کاهش یابد و بدین ترتیب حرکت بردار حالت به سمت این سطح رخ می‌دهد.
* $\bar{S}(t)$را سطح لغزان (Sliding Surface) می‌نامند و اگر سیستم بر روی سطح باشد بیان می‌گردد که سیستم در حالت لغزان است (Sliding Mode) و سیستمی کنترلی که رابطه فوق را تضمین کند کنترل کننده مدلغزان و یا کنترل کننده لغزان نامیده می‌شود (Sliding Mode Control Or Sliding Control) . قضیه زیر خلاصه‌ای از مطالب فوق است :

* قضیه :

سیستم غیر خطی $x^{(n)} = f(x) + u$ را در نظر بگیرید و $S(x,t)$ را مانند رابطه قبل در نظر بگیرید. اگر بتوان کنترلر u را طراحی نمود به نحویکه شرط لغزان $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta^2 \le -\eta|s|$ برقرار باشد ، خواهیم داشت :

(الف) بردار حالت در زمان محدودی به سطح لغزان $\bar{S}(t)$ خواهد رسید.

(ب) اگر بردار حالت بر روی سطح لغزان باشد بر روی آن باقی خواهد ماند.

(ج) اگر بردار حالت بر روی سطح لغزان باقی بماند خطای تعقیب $\bar{e}(t)$ به صفر همگرا می‌گردد.

* مثال : برای سیستم مرتبه دوم : (n=2)

$$\ddot{x} = f(x) + u$$

$$S(x,t) = \dot{e} + \lambda e = \dot{x} + \lambda e - \dot{x}_d - \lambda x_d$$

$$S\dot{S} \le \eta |s| \Rightarrow S(\ddot{x} + \lambda \dot{x} - \ddot{x}_d - \lambda \dot{x}_d) \le -\eta |s|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S[f(x) + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{e}] \le -\eta |s| \\ u = -\hat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - k(x,\dot{x}) Sgn(s)^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$Sgn(s)[f(x) - \hat{f}(x) - K(x,\dot{x}) Sgn(s)] \le -\eta \Rightarrow \quad K(x,\dot{x}) \ge \eta + Sgn(s)[\Delta f(x)] \Rightarrow$$

$$K(x,\dot{x}) = \eta + F(x)$$

* آنالیز کنترلر فازی بر مبنای اصول کنترل مدلغزان

مسئله در حالت n=2 بررسی می‌گردد ولی قابل تعمیم به درجات بالاتر است.

فرض کنید که کنترلر u را به صورت فازی طراحی نموده‌ایم . داریم : $u = u_{Fuzz}(x)$

قضیه : سیستم غیر خطی $\ddot{x} = f(x) + u$ را در نظر بگیرید که دارای کنترلر فازی $u = u_{Fuzz}(x)$ است که شرایط زیر را ارضا می‌نماید.

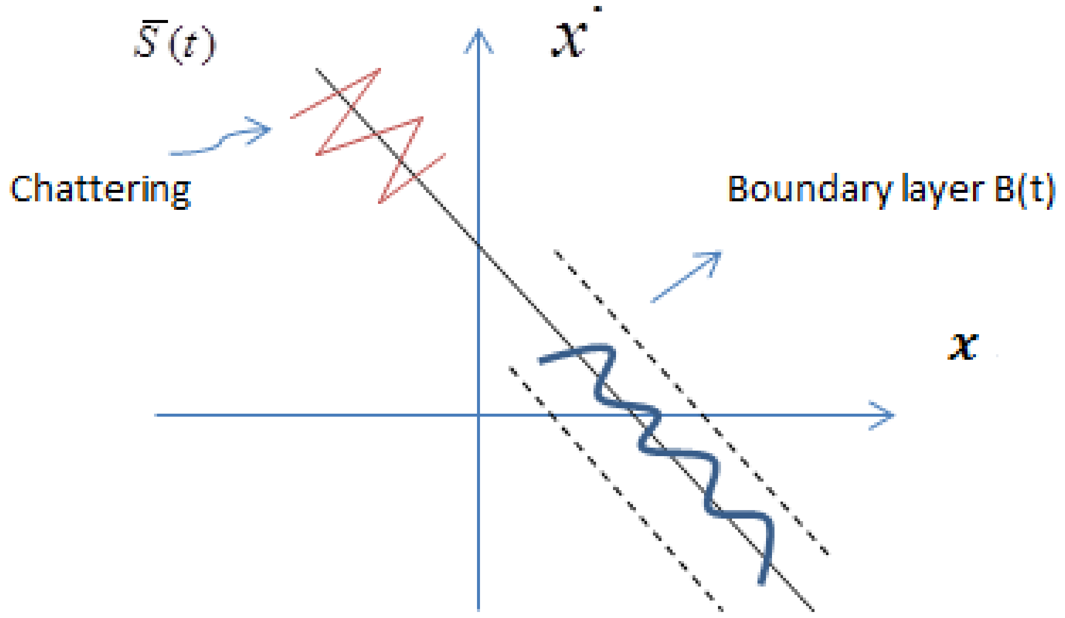
$$u_{Fuzz}(x) \le -\eta - [f(x) + \lambda\dot{e} - \ddot{x}_d], if \quad Sgn(s) > 0$$

$$u_{Fuzz}(x) \le \eta - [f(x) + \lambda\dot{e} - \ddot{x}_d], if \quad Sgn(s) < 0$$

که λ و η ثابتهای مثبت هستند و $s = \dot{e} + \lambda e$ می‌توان ثابت نمود که خطای تعقیب زیر به صفر همگرا می‌باشد.

$$\bar{e} = (x - x_d, \dot{x} - \dot{x}_d)^T$$

* **طراحی کنترلر فازی به عنوان کنترلر مدلغزان :**
* روشهای فوق برای طراحی کنترل فازی یک سری شرطهای غیر پیوسته‌ای است و باعث chattering در حول سطح لغزان می‌گردد (شکل صفحه بعد) بنابراین از لحاظ آنالیتیکه و تحلیلی فقط مناسب می‌باشند و برای طراحی از روشی دیگر استفاده می شود.
* کنترل سوئیچینگ جالب و مناسب نمی‌باشد زیرا فعالیت کنترلی بالایی را طلب می‌کند و ممکن است دینامیکهای فرکانس بالایی را تحریک نمایند



$\bar{S}(t)$
$x^{\cdot}$
Chattering
Boundary layer B(t)
x

* یک راهکار برای حذف chattering ارائه یک همسایگی بصورت boundary Layer در اطراف سطح لغزان بصورت زیر می‌باشد :

$$B(t) = \{x : |S(x,t)| \leq \varphi\}$$

بدین ترتیب کنترل بصورت پیوسته‌ای در لایه حاشیه‌ای تغییر می‌کند.

φ را ضخامت لایه حاشیه‌ای [thickness of boundary layer] می‌نامند و $\varepsilon = \frac{\varphi}{\lambda^{n-1}}$ را پهنای لایه حاشیه‌ای گویند (width of boundary layer)

*

* قضیه : اگر شرط لغزان $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^{2} \le -\eta|s|$ در خارج از لایه حاشیه‌ای B(t) برقرار باشد می‌توان تضمین نمود که پس از مدت زمان محدودی خواهیم داشت : $|e(t)| \le \varepsilon$
* یعنی بجای آنکه شرط لغزان $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^{2} \le -\eta|s|$ را همواره در نظر بگیریم تنها موقعی لحاظ می‌کنیم که X(t) خارج از B(t) باشد به عبارت دیگر بجای تعقیب شرایط $\bar{e}(t) = 0$ شرط $|e(t)| \le \varepsilon$ دنبال می‌گردد به عبارت دیگر یک کنترل نرم صورت می‌پذیرد.

مثلاً برای حالت خاص سیستم مرتبه دوم قانون کنترل به شکل زیر می‌شود:

$$u = -\hat{f}(x) + \ddot{x}d - \lambda\dot{e} - k(x,\dot{x})sat(s/\varphi)$$

که تابع اشباع $Sat(s/\varphi)$ بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$Sat(s/\varphi) = \begin{cases} -1 & if \quad s/\varphi \le -1 \\ s/\varphi & if \quad -1 < s/\varphi \le 1 \\ 1 & if \quad s/\varphi > 1 \end{cases}$$

که تابع فوق در صورتی که $s/\varphi > 1$ باشد یعنی خارج از لایه حاشیه‌ای باشد تبدیل به $Sat(s/\varphi) = Sgn(S)$ می‌گردد.

* برای دقت داده شده ε باید φ و λ را به نحوی تعیین نمودکه دقت مورد نظر $\varepsilon = \varphi / \lambda^{n-1}$ برآورده شود.
* قضیه : سیستم غیر خطی $\ddot{x} = f(x) + u$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که u یک کنترلر فازی u_{Fuzz} است ، که :

$$u_{Fuzz}(x) = -\hat{f}(x) + \ddot{x}_d - \lambda\dot{e} - [\eta + F(x)]sat(s/\varphi)$$

می‌توان نشان داد که پس از زمان محدودی خطای تعقیب $e(t) = x(t) - x_d(t)$ از ε کوچکتر یا مساوی است.

* **طراحی :**
* گام اول : محدوده مورد نظر e و $\dot{e}$ را تعیین کنید. به عبارت دیگر حدود $[\alpha_1,\beta_1]$ و $[\alpha_2,\beta_2]$را طوری تعیین کنید که

$$\bar{e}=(e,\dot{e})^T \in U=[\alpha_1,\delta_1]\times[\alpha_2,\delta_2]$$

* گام دوم : $g(e,\dot{e})=-\hat{f}(x)+\dot{x}_d-\lambda\dot{e}-[\eta+F(x)]sat(s/\varphi)$ مقادیر

$g(e,\dot{e})$ را بعنوان g در طراحی سیستم فازی با جدول مشاهده (lookUpTable) در نظر گرفته و مراحل طراحی با جدول مشاهده را طی کنید. $(g=\bar{y})$

* **ساختار کنترل کننده خود سازمانده بصورت فازی (Self-Organized)**

در این حالت از یک plant هیچگونه اطلاعاتی و در نتیجه قاعده‌ای نداریم و خودش می‌خواهد قواعد را بیان کند. کنترل کننده‌های فازی خود سازمانده در واقع تکامل یافته کنترل کننده‌های فازی رایج می‌باشند که قادر ند به تدریج و با توجه به خطاهای قبلی خود و کیفیت کنترل خود را بهبود ببخشند.

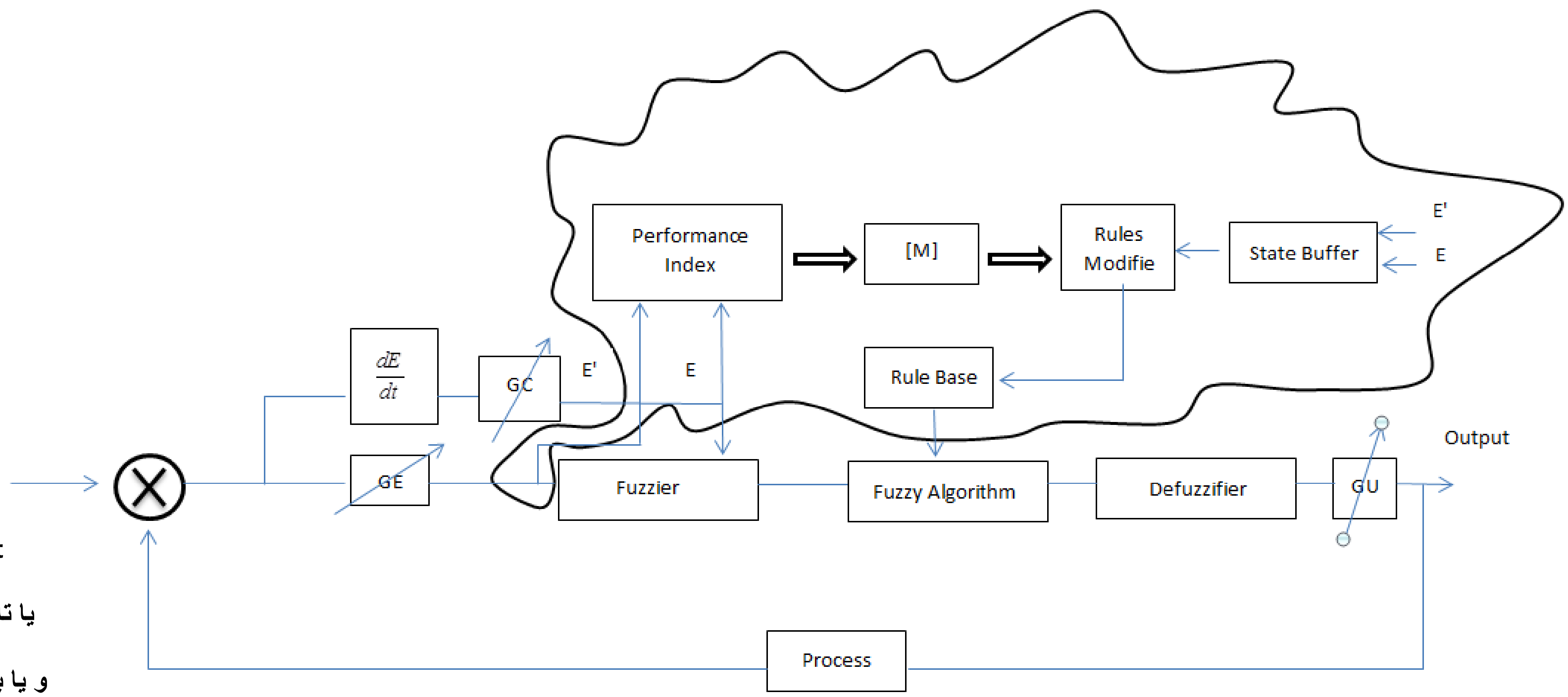
* به طور خلاصه می‌توان گفت که در موارد زیر کاربرد کنترل‌کننده‌های فازی خود سازمانده ضرورت دارند:

(الف) تعریف سیستم به طور کیفی نیز نادقیق است

(ب) کاربر انسانی نیز به طور دقیق قادر به بیان و انتقال تجربه و مهارت خود(به صورت قواعد اگر – آنگاه) نمی‌باشد.

(ج) سیستم دارای تغییرات شدید نسبت به زمان است ، بدین معنی که ساختار سیستم در طول زمان تغییر می‌کند.

* **به کاربردن این روش نتایج زیر را در بر دارد :**
* عدم نیاز به مدل فرآیند هرچند ناقص یا کیفی
* توانایی تطابق با تغییرات شدید و کلی سیستم
* عدم حساسیت به مقادیر اولیه تابع عضویت و قواعد
* عدم حساسیت به استراتژی کنترل فازی بکار رفته



Set point

یا تابع Tracking

و یا به طور کلی هدف

* بطور خلاصه نحوه عملکرد یک کنترل‌کننده فازی خود سازمانده به شرح زیر است :
* همزمان با ایجاد خروجی (پس از اعمال ورودی کنترلی) کارایی سیستم محاسبه می‌شود با توجه به اندیس کارایی محاسبه شده عملکرد کنترل‌کننده تغییر می‌کند. کارایی نسبت به انحراف از خروجی دلخواه سنجیده می‌شود و اندیس کارایی (یا اندیس عدم کارایی) نقش یک امتیاز یا پاداش را برای سیستم ایفاد می‌کند . هرچه اندیس کارایی بزرگتر باشد نشان‌دهنده خطای بیشتر و نیاز به تصحیح بیشتر است.

* تاخیر (M) بسیار مهم است و باید دید که این خروجی نتیجه کدام ورودی[یا کدام قاعده] می‌باشد و اصطلاح روی چه قاعده‌ای باید صورت پذیرد.
* بلوک اندیس کارایی با استفاده از قواعد منطق فازی و یک ماتریس زبانی که مجموعه‌های فازی ورودی را به یک مجموعه فازی کارایی نسبت می‌دهند اندیس کارایی را محاسبه می‌کند.

جدول کارایی اندیس

Change-In-Error / Error							
NB	NB	NB	NB	NM	MM	NS	ZO
NM		.		.		.	
NS		.		.		.	
NO	NB	NM	NS	ZO	ZO	PM	PB
PO	NB	NM	ZO	ZO	PS	PM	PB
PS		.		.		.	
PM		.		.		.	
PB		.		.		.	

* **روش تعیین و تصحیح قواعد :**
* فرض کنید در لحظه KT خطا و سرعت متغیر خطا و خروجی کنترل‌کننده به ترتیب e(KT)، r(KT) ، u(KT) باشد . (بدلیل تاخیر اکنون رابطه‌ای بین آنها نیست)
* در لحظه KT مقدار تنبیه یا پاداش بدست آمده برابر است با $P_i(kT)$ که از جدول صفحه قبل بدست می‌آید.
* اگر خروجی کنترل‌کننده در m نمونه قبل بیشترین اثر را روی حالت فعلی داشته باشد در این صورت خروجی کنترل ناشی از ورودی e(KT-mT) ، و r(KT-mT) باید برابر باشد $u(KT-mT)+P_i(KT)$ تا کنترل بصورت مناسبی صورت پذیرد.
* $E[KT-mT]\&\ \ R[KT-mT]\rightarrow U(KT-mT)$

که

$E[KT-mT]=F_z(e(KT-mT))$

* کلیه قواعدی را که در ایجاد خروجی m نمونه قبل نقش اساسی داشته‌اند را حذف می‌کنیم.

* **Fuzzy C-Means Algorithm**
* در عملیات خوشه بندی نحوه اختصاص دادن اطلاعات به یک خوشه خاص می‌تواند به صورت فازی باشد تا crisp بدین معنی که می‌توان تعلق یک اطلاعات را به یک خوشه بصورت مطلق در نظر نگرفت و یک نمونه به چند خوشه تعلق یابد منتهی با میزان عضویتهای متفاوت که این اولین دلیل برای استفاده از مدلهای فازی در بازشناسی الگو می‌باشد. دلیل دوم این است که استفاده از مدلهای فازی می‌تواند در محاسبات کامپیوتری بسیار راحتتر باشند . زیرا محاسبات غیر فازی جستجوبزرگی را در فضای بسیار عظیم می‌طلبد.

Hard and Fuzzy C-partitions

فرض کنید که یک مجموعه‌ای از اطلاعات $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ داده شده است که $X_i \in R^p$ ، مجموعه $P(X)$ یک مجموعه از تمام زیر مجموعه‌های X می‌باشد . یک Hard c-Partitions از X عبارتست از خانواده $\{A_i \in P(x); 1 \le i \le c\}$ به نحویکه:

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{l} A_i = x \\ A_i \cap A_j = \phi \quad for \quad 1 \le i \ne j \le c \end{cases}$$

هر A_i به عنوان یک خوشه می‌باشد به نحویکه $\{A_1, ..., A_c\}$ باعث دسته‌بندی X به C خوشه می‌گردد.

* دسته بندی سخت طبق تابع خصوصیات (عضویت) اجزاء x_k در A_i بصورت زیر بدست می‌آید :

$$u_{ik} = \begin{cases} 1 \quad , \quad x_k \in A_i \\ 0 \quad , \quad x_k \notin A_i \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_k \in X , A_i \in P(x), i = 1, 2, \ldots, c \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

* به عبارت دیگر u_{ik} باید سه شرط زیر را همزمان داشته باشند :

$$u_{ik} \in \{0,1\}, \ \ 1 \le i \le c, \ \ 1 \le k \le n$$

$$\sum_{i=1}^{c} u_{ik} = 1 \quad , \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad 0 < \sum_{k=1}^{n} u_{ik} < n \quad , \forall i \in \{1, 2, \ldots, c\}$$

* تعریف : اگر $X=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ یک مجموعه دلخواه باشد و V_{cn} مجموعه‌ای از ماتریس های حقیقی $c\times n$ به نام $U=[u_{ik}]$ و c یک عدد صحیح $2\leq c<n$ فرض گردد سپس دسته‌بندی سخت c در فضای x به صورت مجموعه زیر تعریف می‌گردد.

$M_c=\{U\in V_{cn}\,|$ سه شرط فوق صحیح باشد $\}$

* مثال :

$$\{x_1 = Ford, x_2 = Toyota, x_3 = Chrysler\} = X$$

$$if \;: c = 2 \Rightarrow$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* مشکل: فضای M_c می‌تواند بسیار بزرگ باشد :

$$|M_c| = \frac{1}{C\,!}\left[\sum_{j=1}^{c}\binom{c}{j}(-1)^{c-j}\, j^{\,n}\right]$$

$|M_c| =$ The number of distinct ways to partitions x into c nonempty subsets

بدلیل حجم بالا امکان تقسیم بندی بهینه بسیار سخت می‌گردد. ولی اگر u_{ik} یک متغیر پیوسته باشد می‌توان از برخی از توابع مشخص نسبت به آن مشتق گرفت و توسط این مشتق‌ها می‌توان بهترین جهات جستجو را یافت و نهایتاً به بهینه‌ترین تقسیم‌بندی رسید.

Fuzzy c-partition

X ، V_{cn} و C را مانند قبل در نظر بگیرید تقسیم‌بندی c فازی از فضای X عبارتست از مجموعه :

$$M_{fc} = \{U \in V_{cn} \mid u_{ik} \in [0,1], 1 \le i \le c, 1 \le k \le c, \sum_{i=1}^{c} u_{ik} = 1 (\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\})\}$$

u_{ik} عبارتست از مقدار تابع عضویت x_k نسبت به خوشه A_i

برای مثال قبل:

$$U = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0.9 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$

* مسئله فعلی این است که بهینه‌ترین تقسیم‌بندی فضا توسط M_c یا M_{Fc} چیست ؟ اگر از روش های مختلف نام ببریم ، داریم :
* Hierarchical Methods: توسط merging و splitting خوشه‌های جدیدی بر مبنای برخی از معیارهای شباهت ایجاد می‌گردد.
* Graph-Theoretic Methods : X : بصورت مجموعه‌ای از گره‌ها که توسط لبه هایی که بر مبنای معیار شباهت به هم متصل شده‌اند فرض می‌گردد. معیار خوشه‌بندی اندازه‌گیری میزان اتصال بین گروههایی از گره‌ها می باشد.
* Objective function Methods: یک تابع objective جهت اندازه‌گیری مطلوب است. خوشه‌بندی برای هر c معرفی می‌گرددو مینیمم محله این تابع بهینه‌ترین خوشه‌بندی را ارائه می‌دهد.

* در ادامه از متد سوم استفاده می‌شود که :

Objective function=Over all within-group sum of Squared errors

$$J_w(u,v)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}u_{ik}\left\|X_k-V_i\right\|^2$$

$$U=[u_{ik}]\in M_c \quad or \quad M_{fc},V=(v_1,..v_c)$$

v_i مرکز خوشه A_i به شکل زیر تعریف می‌گردد :

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{ik} x_k}{\sum_{k=1}^{n} u_{ik}}$$

فرض می‌کنیم $x_k, v_i \in R^p$ اگر U یک تقسیم‌بندی c سخت باشد. تابع فوق بصورت زیر قابل بیان است

$$J_w(u,v) = \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{x_k \in A_i} \left\| X_k - V_i \right\|^2 \right)$$

Hard C-Means Algorithm

قدم اول : فرض کنید که n نقطه اطلاعاتی داده شده است $x=\{x_1,\dots,x_n\}$ که $x_i \in R^p$ ، عدد c را تعیین کنید به نحویکه $2 \le c < n$ و مقداردهی اولیه برای $U^{(0)} \in M_c$ داشته باشید.

قدم دوم : در تکرار l ام که $l=0,1,2,\dots$ می‌باشد بردارهای c-mean زیر را محاسبه کنید :

$$v_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k u_{ik}^{(l)}}{\sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{(l)}} \qquad [u_{ik}^{(l)}]=U^{(l)}, i=1,2,\dots,c$$

* قدم سوم : مقدار $U^{(l)}$ را به مقدار $U^{(l+1)} = [u_{ik}^{(l+1)}]$ به روز کنید :

$$u_{ik}^{(l+1)} = \begin{cases} 1 & \left\| X_k - V_i^{(l)} \right\| = Min_{1 \le j \le c} \left(\left\| X_k - V_j^{(l)} \right\| \right) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

* قدم چهارم : $U^{(l)}$ را با $U^{(l+1)}$ مقایسه کنید : اگر $\left\| U^{(e+1)} - U^{(e)} \right\| < \varepsilon$ برای ثابتهای کوچک ε روند را متوقف کنید در غیر این صورت $l = l + 1$ و به گام دوم بروید.

Fuzzy C-mean Algorithm

در این الگوریتم هدف پیدا نمودن $U = [u_{ik}] \in M_{fc}$, $v = (v_1, \ldots, v_c)$

که $v_i \in R^p$ است به نحویکه :

$$J_m(u,v) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c} (u_{ik})^m \left\| X_k - V_i \right\|^2$$

مینیمم گرددکه $m \in (1, \infty)$ ثابت می‌باشد.

* قضیه : فرض کنید $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $x_i \in R^p$ یک مجموعه‌ای از اطلاعات داده شده باشد عدد c و m را بصورت دلخواه و ثابت تعیین کنید $c \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ و $m \in (1, \infty)$ فرض کنید که :

$$\|x_k - v_i\| \neq 0 \begin{cases} for \quad all \quad 1 \le k \le n \\ for \quad all \quad 1 \le i \le C \end{cases}$$

* سپس $U = [u_{ik}]$ و $V = (v_1, \dots, v_c)$ یک مینیمم محلی برای $J_m(U, V)$ است اگر و تنها اگر :

$$u_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{c} \left(\frac{\left\| x_k - v_i \right\|}{\left\| x_k - v_j \right\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}}, \quad 1 \le i \le c, \quad 1 \le k \le n$$

$$V_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} (u_{ik})^m x_k}{\sum_{k=1}^{n} (u_{ik})^m}, 1 \le i \le c$$

* الگوریتم Fuzzy C-means :

قدم اول : برای مجموعه اطلاعات داده شده $X=\{x_1,\dots,x_n\}, x_i \in R^p$ عدد c و m را ثابت و به دلخواه اختیار نمایید $m \in (1,\infty), C \in \{2,3,\dots,n-1\}$ و
مقدار u را مقداردهی ابتدایی کنید $U^{(0)} \in M_{fc}$

قدم دوم : در تکرار l ام، $l=0,1,2,\dots$ بردار متوسط c را محاسبه کنید :

$$V_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (u_{ik}{}^{(l)})^m x_k}{\sum_{k=1}^{n} (u_{ik}{}^{(l)})^m}, 1 \le i \le c$$

* قدم سوم : مقادیر U را از $U^{(l)}=[u_{ik}{}^{(l)}]$ به $U^{(l+1)}=[u_{ik}{}^{(l+1)}]$ به روز نمایید:

$$u_{ik}{}^{(l+1)}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{\left\|x_k-v_i{}^{(l)}\right\|}{\left\|x_k-v_j{}^{(l)}\right\|}\right)^{\frac{2}{m-1}}},\ 1\le i\le c,\ 1\le k\le n$$

* قدم چهارم : اگر $\left\|U^{(e+1)}-U^{(e)}\right\|<\varepsilon$ فرآیند متوقف گردد در غیر این صورت l=l+1 و به گام دوم بروید.

سیستمهای فازی – عصبی

Advantage:	Neural Network	Fuzzy
	1-learning Methods	1-Fuzzy information
	2-Association decrease یادآوری و تعمیم حافظه که باعث fuzzy Entropy می‌گردد	2- processing Method -Fuzzy rule representation -Membership function Treatment -Fuzzy set Treatment & etc.
	3-paralellism	

Weak point:	1-knowledge Representation and high speed learning are difficult	1-learning is difficult
	2- Extracting knowledge from Network is difficult	2-Fuzziness is increased at Inference

* دو راه حل وجود دارد :

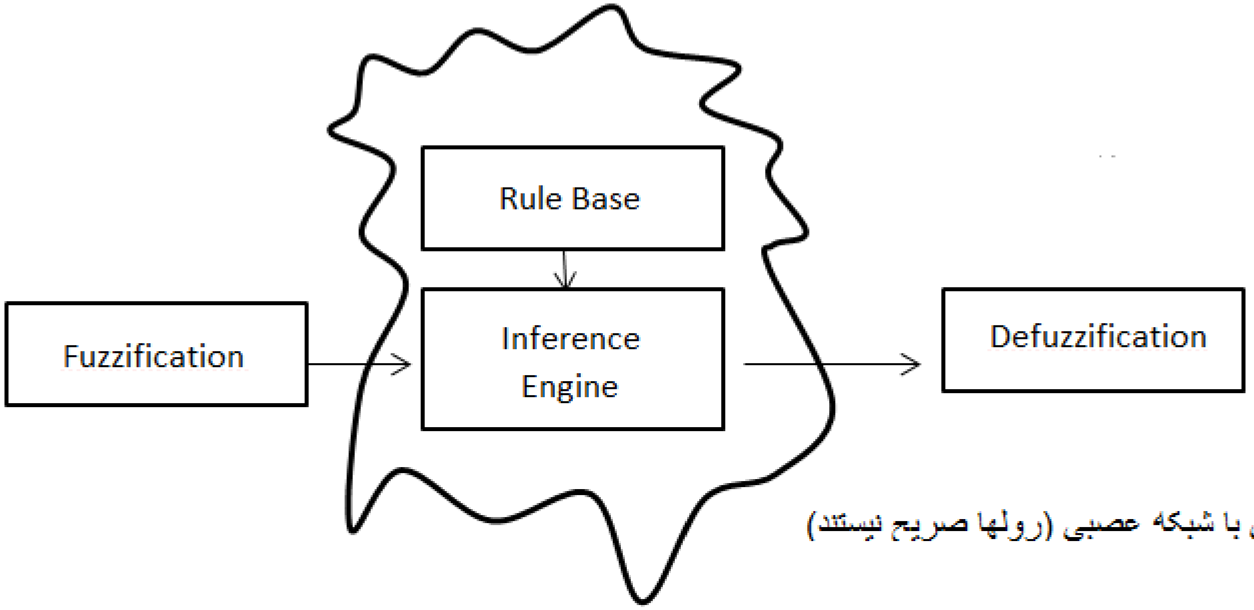
۱ – اصلاح فازی به کمک شبکه عصبی

۲- اصلاح شبکه عصبی به کمک فازی (مثلاً ضریب یادگیری ، استخراج اطلاعات ، دادن اطلاعات و ...)

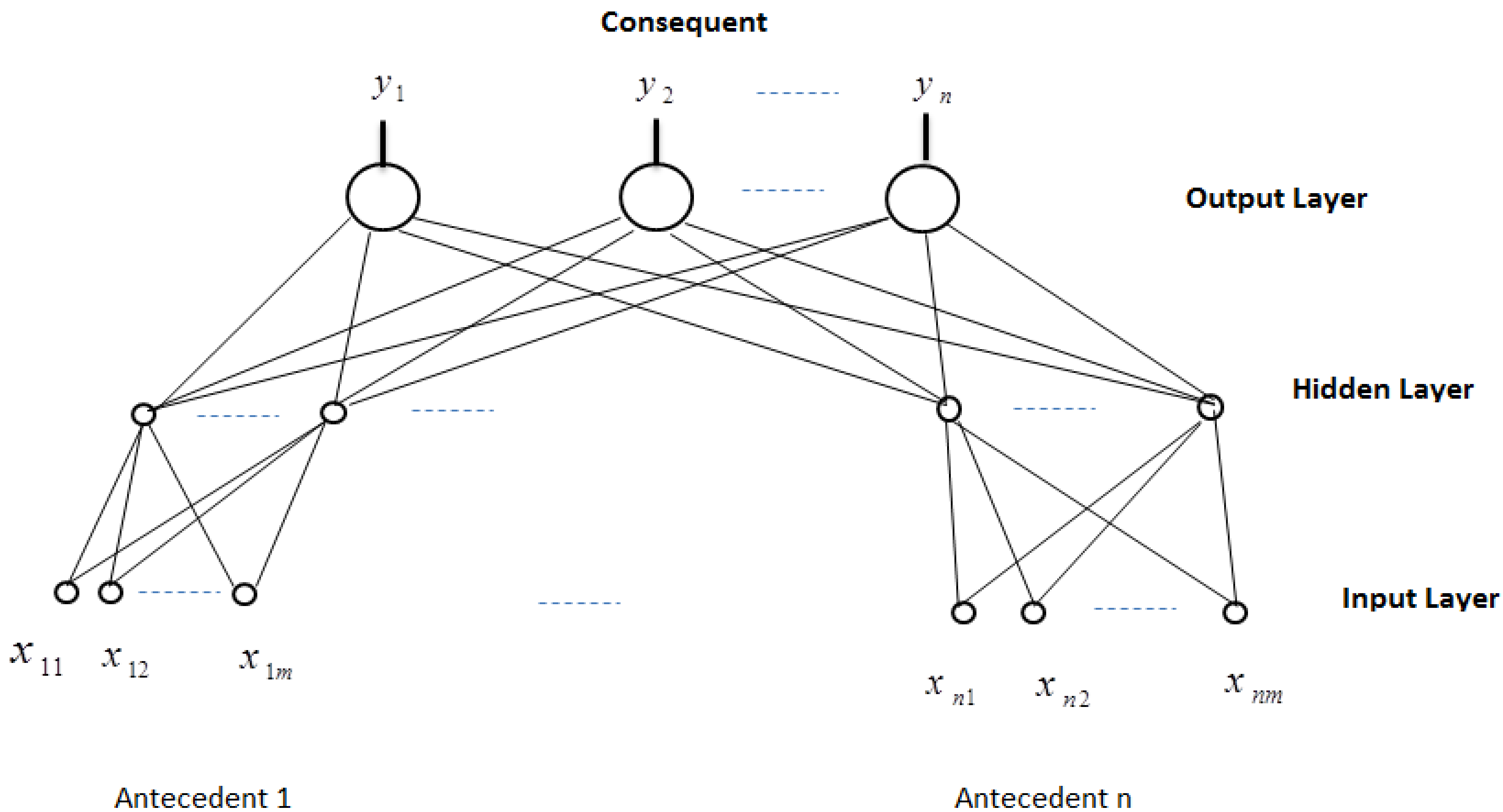
روشهای استفاده از شبکه عصبی جهت اصلاح ساختار فازی

* بخشهایی از یک سیستم فازی را نظیر ساخت مقدم ، هسته استنتاجی ، ساخت تالی و ... را به شبکه عصبی واگذار می‌کنیم. این شبکه‌ها عبارتند از : MLP ، RBF ، BAM و هاپفیلد و همینگ و ...
* ساختارهای فازی برای شبکه‌های عصبی ارائه می‌شود در این ساختارها نرونها فازی بوده و در هر لایه وظیفه خاصی را از یک ساختار فازی ارائه می‌کنند مثلاً یک نرون توابع عضویت مقدم را تحقق می‌بخشد و یک نرون دیگر عمل نتیجه‌گیری را صورت می‌بخشد. این ساختارها از یادگیری مناسب با وضعیت خود بهره می‌جویند که می‌توان از روشهای کاهش گرادیان یا LMS نام برد. ساختارهایی نظیر ANFIS ، Min-Max فازی ، Fuzzy ART ، Fuzzy ART Map ، ANNF و ... در این دسته‌اند.

* **آموزش قوانین شرطی فازی به شبکه MLP :**



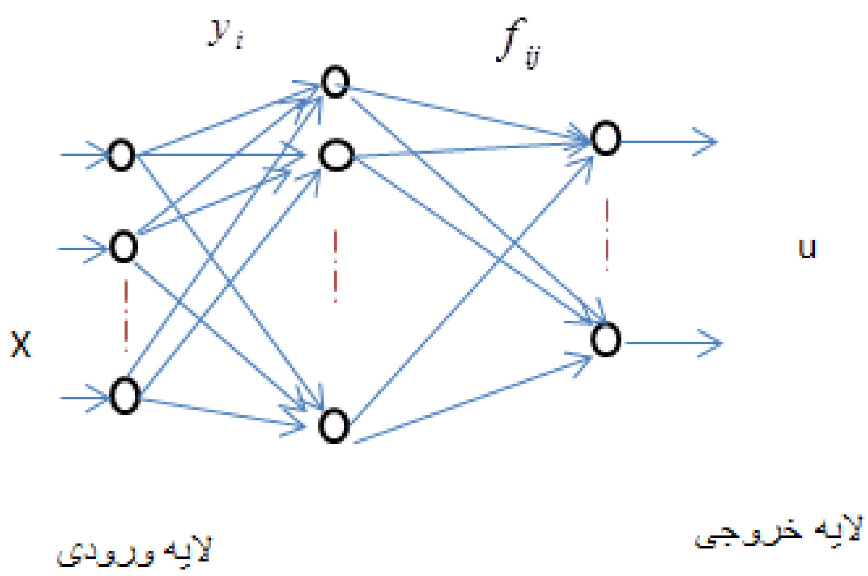
جایگذاری با شبکه عصبی (رولها صریح نیستند)


Consequent
y_1
y_2
y_n
Output Layer
Hidden Layer
Input Layer
x_{11}
x_{12}
x_{1m}
x_{n1}
x_{n2}
x_{nm}
Antecedent 1
Antecedent n

* نکات :
* معمولاً تعداد گره‌های لایه میانی را حداقل دو برابر تعداد قاعده ها می‌گیرند.
* انتخاب مقادیر اولیه کوچکتر برای وزنهای اتصالات در آغاز الگوریتم یادگیری خطای کوچکتری ایجاد می‌کند و همین سرعت یادگیری را به سرعت افزایش می‌دهد، احتمال افتادن در مینیمم موضعی نیز کاهش می‌یابد.
* در تحقق استنتاج با شبکه عصبی، شبکه بخوبی قادر است که عمل تعمیم را انجام دهد بطوریکه برای حالتهایی که هیچ قاعده ای وجود نداشته است توانسته است مقادیر مناسبی را قرار دهد.

* افزایش تعداد لایه‌های میانی و همچنین تعداد سلولهای این لایه سرعت یادگیری را به نحو چشم‌گیری افزایش می‌دهد.
* مانند هر شبکه دیگری می‌توان بایاس دلخواهی داشت.

- **استنتاج فازی با شبکه RBF :**
- شبکه RBF به صورت Feed forward می‌باشد و دارای سه لایه می‌باشد.
- در لایه اول ورودیها از تابعی بنام φ عبور می‌کنند که این تابع باید متقارن و دو طرفه باشد که معمولاً تابع گوسی انتخاب می‌شود.



$$y_i = \varphi\left[\frac{\left\| x - c_i \right\|}{\sigma_i^2}\right], u_j = \sum_{i=1}^{m} f_{ij}\, y_i$$

* ابتدا خوشه بندی ورودی (مثلاً نزدیکترین همسایه) صورت می‌پذیرد و بدین ترتیب معیارهایی از c_i و σ_i ایجاد می‌شود . c_i مراکز خوشه‌ها می‌باشد و σ_i از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N_j}\left(\sum_{x \in \theta_j} (x - c_j)^T (x - c_j)\right)$$

$N_j = j$ تعداد اعضای خوشه

* سپس با (الگوریتم پس انتشار خطا در روش گرادیان معمولی) ضرایب f_{ij} آموزش داده می‌شود پس ساختار RBF دقیقاً معلوم است : تعداد گره‌های ورودی = ابعاد ورودی*تعداد گره‌های میانی = تعدادکلاسترها * تعداد گره‌های خروجی = تعداد خروجی
* اثبات شده که یک RBF می‌تواند درست مساوی یک سیستم فازی باشد، در حقیقت شبکه RBF حالت خاصی از یک سیستم فازی است به دلیل‌های زیر شرایط رفتار به سیستم فازی و شبکه RBF :

۱- تعداد قواعد فازی برابر تعداد نرونهای لایه پنهان شبکه RBF است.

۲- خروجی قواعد فازی (قسمت تالی) یک عدد ثابت باشد.

۳- توابع عضویت فازی هر قاعده یک تابع گوسی ، با عرض یکسان انتخاب شود(در حالت کلی در سیستمهای فازی می‌تواند غیر یکسان باشند)

۴- عملگر عطفی انتخاب شده برای محاسبه ترکیب عطفی دو گزاره در قسمت مقدم قواعد فازی ضرب باشد.

۵- خروجی شبکه فازی بطور یکسان نرمالیزه شوند. y_iها در حقیقت μ_i (مقدار تابع عضویت ورودی i ام می‌باشد)و خروجی کل $u = \frac{\sum y_i u_i}{\sum y_i}$ می‌باشد.

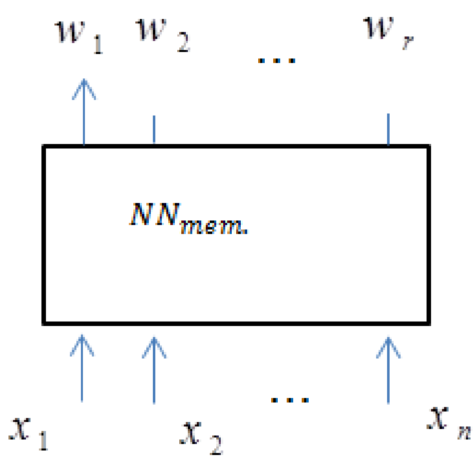
* **ایجاد ساختار فازی با کمک MLP :**

۱- ابتدا کل داده‌ها به دو دسته آموزشی و تست تقسیم گردند.

۲- در بخش داده‌های آموزشی خوشه‌بندی با روشهای متداول صورت پذیرد.

۳- تقسیم بندی فازی فضای ورودی به وسیله شبکه عصبی صورت پذیرد. در این قسمت توسط شبکه عصبی تخمینی از توابع عضویت قواعد (نه هر یک از ابعاد ورودیها)صورت می‌پذیرد به عبارت دیگر مقدم قواعد فازی مورد شناسایی قرار می‌گیرند پس برای تک تک ورودیها تابع عضویت اختیار نمی‌گردد.

$w_1 \dots w_r$ مقدار تابع عضویت بخش مقدم قاعده اول تا rام می‌باشد و خود ورودیها نیز (بجای مقادیر تابع عضویت) به سیستم یا شبکه داده می‌شود به این ترتیب قسمت مقدم قواعد فازی توسط شبکه عصبی شناخته می‌شود.



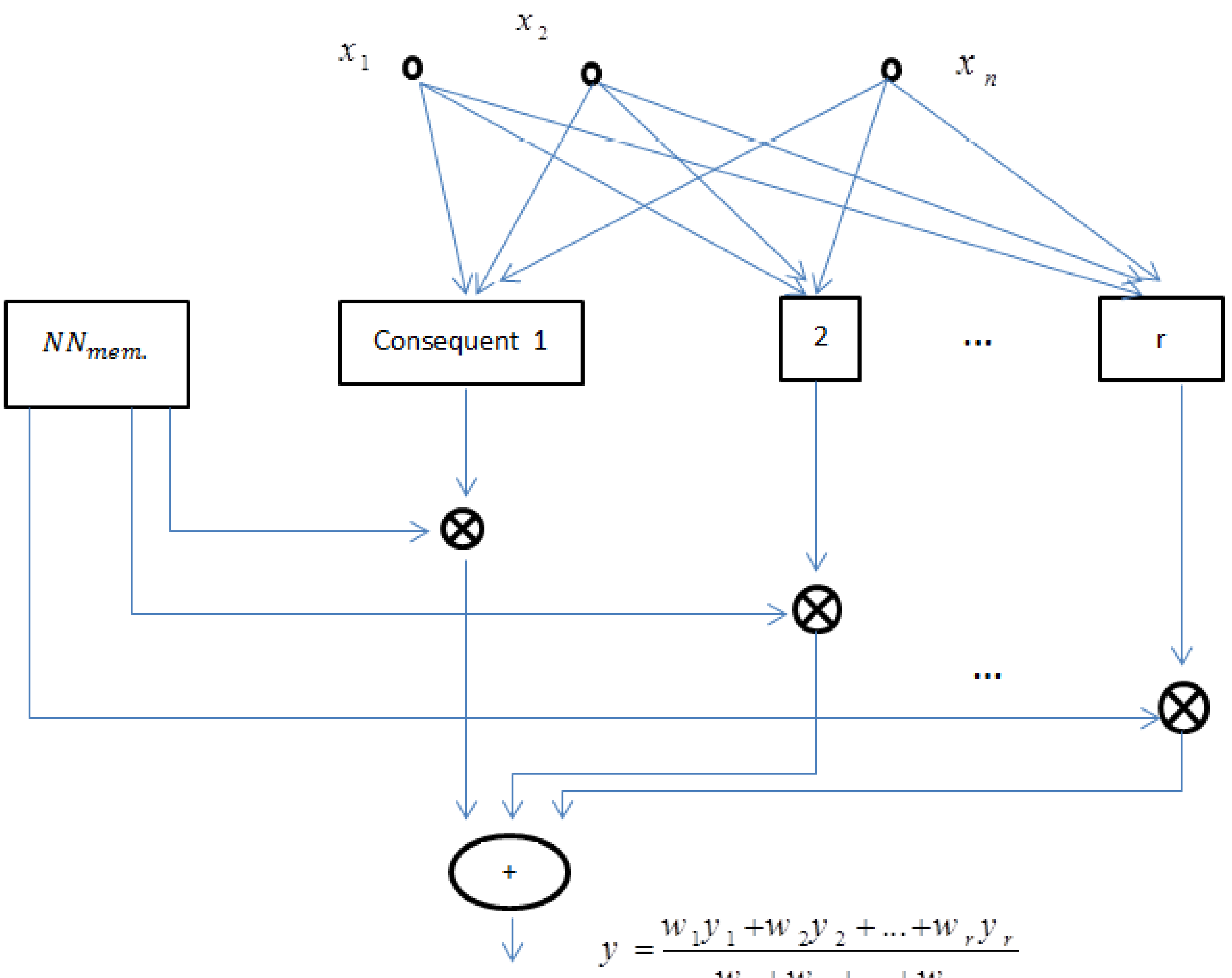
سیستم عصبی تخمین زننده بخش مقدم قواعد فازی

r-تعداد قواعد که از روی خوشه‌بندی حاصل شده است

w_i - تابع عضویت یا مقدار معلق ورودی به کلاس i ام

۴- طراحی قسمت تالی یا نتیجه برای هر تقسیم بندی فضای ورودی :

برای هر قاعده یا w یک شبکه عصبی می‌سازیم که ورودیها را به طور خالص دریافت نماید و خروجی آن خروجی قاعده مربوطه را بدهد [عمل خوشه بندی یا شناسایی هر خوشه توسط یک شبکه عصبی صورت پذیرد که این می‌تواند یک عیب نیز برشمرده شود، چون اگر تعداد قواعد زیاد شود تعداد این شبکه‌های عصبی و معماری سیستم بسیار زیادتر و پیچیده‌تر می‌شود]



$$y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \ldots + w_r y_r}{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}$$

* **شبکه عصبی- فازی تطبیقی (ANFIS)**

Adaptive Neuro – Fuzzy Inference systems

در این شبکه برای بیان قواعد از مدل ساجینو استفاده می‌شود.

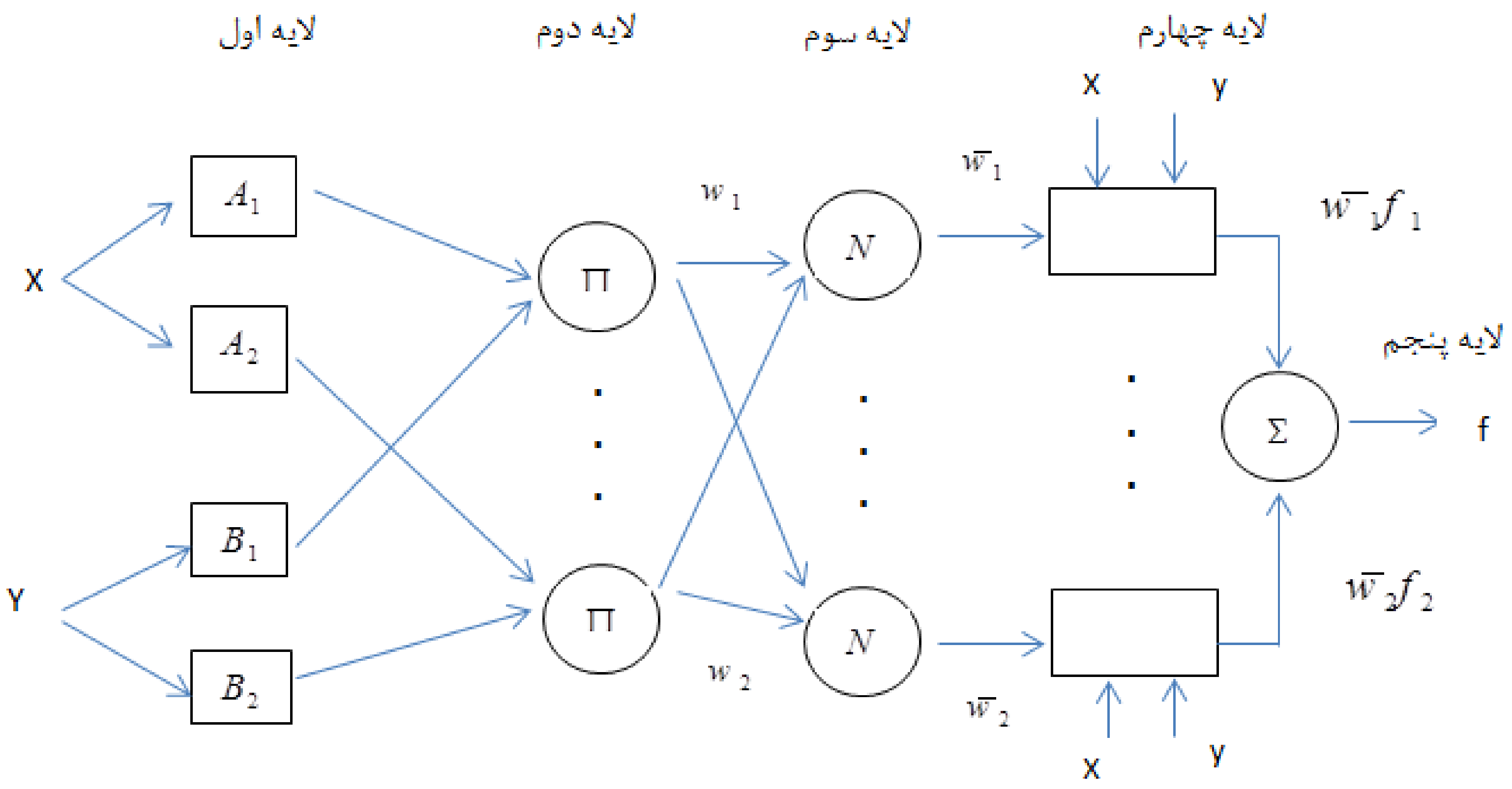
مدل مرتبه اول ساجینو :

Rule 1:

If x is A_1 and y is B_1 then $f_1 = p_1 x + q_1 y + r_1$

Rule 2:

If x is A_2 and y is B_2 then $f_2 = p_2 x + q_2 y + r_2$



لایه اول
لایه دوم
لایه سوم
لایه چهارم
لایه پنجم
X
Y
A_1
A_2
B_1
B_2
Π
Π
w_1
w_2
N
N
$\bar{w}_1$
$\bar{w}_2$
x
y
x
y
$\bar{w}_1 f_1$
$\bar{w}_2 f_2$
Σ
f

* در مربع لایه اول عمل تعیین تابع و مقدار عضویت مشاهده صورت می‌پذیرد تعداد گره‌های لایه اول برابر تعداد متغیرهای زبانی می‌باشد و مقادیر c_i ,b_i ,a_i قابل تنظیم می‌باشند.

$$\begin{cases} O_{1,i} = \mu_{A_i}(x) \\ O_{1,i} = \mu_{B_{i-2}}(y) \end{cases}$$

وقتی که i=1,2

وقتی که i=1,2

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c_i}{a_i}\right|^{2b_i}} : Bell-function \quad Membership$$

* در لایه دوم یک Tnorm بکار رفته است :

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{Ai}(x)\mu_{Bi}(y) \qquad i = 1,2$$

* تعداد گره‌های لایه سوم برابر تعداد قواعد است (مانند لایه دوم).

$$O_{3,i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, i = 1,2$$

* لایه چهارم یک گره Adaptive است و q و p و r قابل تنظیم می‌باشد :

$$O_{4,i} = \bar{w}_i f_i = w_i(p_i x + q_i y + r_i)$$

$$O_{5,i} = \sum_i \bar{w}_i f_i$$

* تنها شرط این است که تابع خروجی باید مشتق‌پذیر باشد ، زیرا برای محاسبه q و p و r لازم است که از آن مشتق گرفته شود.

* **الگوریتم ژنتیک و کاربرد آن در سیستمهای فازی :**

فرآیند پیشرفت در میان جانداران در طبیعت مشروط به چهار شرط زیر می‌باشد:

۱- هر موجود قادر به تولید مثل باشد.

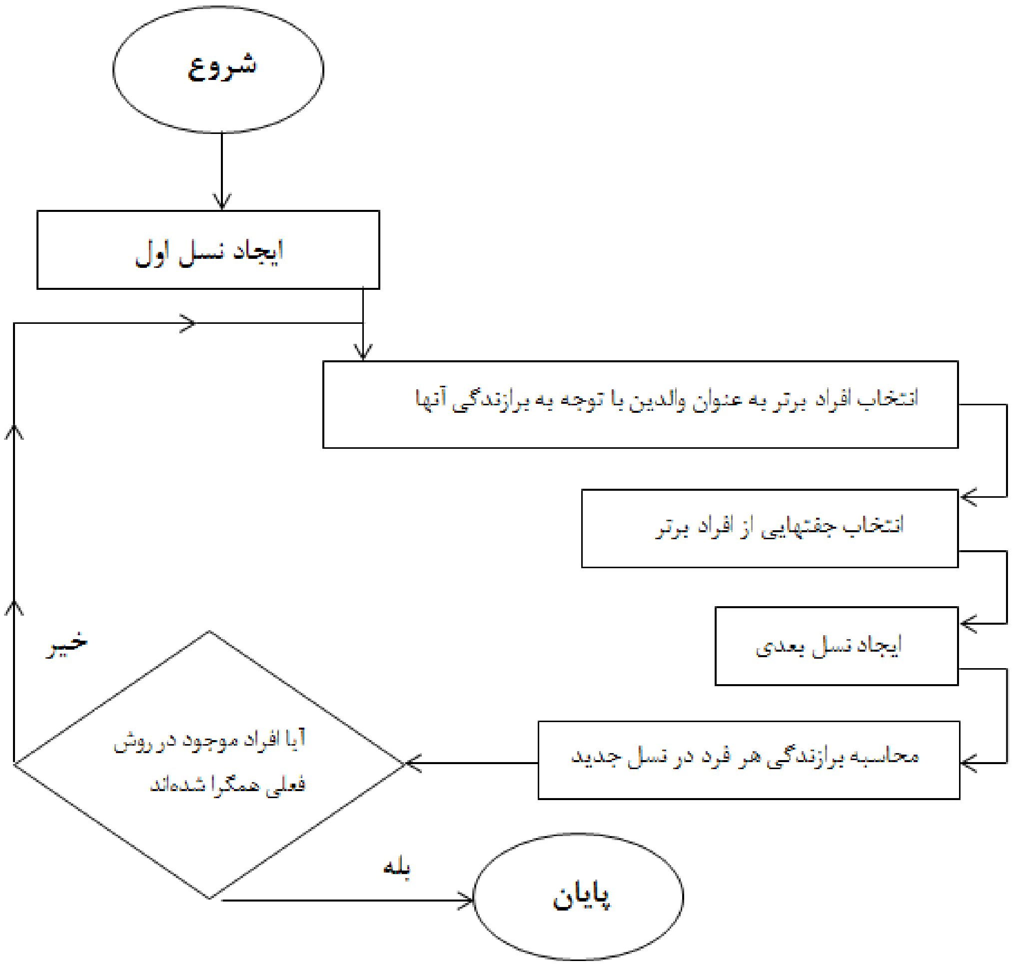
۲- جمعیتی از چنین موجوداتی که قادر به تولید مثل هستند وجود داشته باشد.

۳- در بین اعضای این جمعیت از نظر خواص تفاوتهایی وجود داشته باشد.

۴- اختلافات ساختاری و رفتاری بین اعضاء موجب ایجاد تفاوتهایی از نظر توانایی ادامه حیات در محیط زندگی می‌شود.

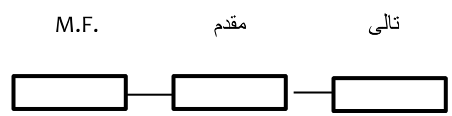
الگوریتم ژنتیک یک الگوریتم ریاضی است که بصورت موازی تحقق می‌یابد و مجموعه‌ای از اشیاء ریاضی که غالباً بصورت رشته‌ها از کاراکترها با طول ثابت هستند (کروموزوم) بر پایه نظریه تکامل داروین یعنی بقای نسل برتر ، با استفاده از اعمال مختلف ژنتیکی نسل جدید را ایجاد می‌کند که با توجه به معیاری که وجود دارد میانگین برتری اعضاء در مسیر جدید به نسل قبل بالاتر است.

بلوک دیاگرام ساختار یک سیستم الگوریتم ژنتیک:



* **اجزاء الگوریتم ژنتیک :**

۱- کدکردن پارامترها : می‌توان هر کروموزوم و یا هر فرد از هر نسل را بصورت خاصی کد کرد. مثلاً:



کروموزوم:

۲- کروموزوم : رشته‌ای از ژنهاست که بدنبال هم قرار گرفته‌اند ، هر کروموزوم هم از یک راه حل برای مسئله است و الگوریتم ژنتیک در پی یافتن بهترین کروموزوم است.

۳- جمعیت ژنتیکی و تعداد افراد جمعیت : فقط بخشی از کل جمعیت دارای جستجو انتخاب می‌کند. پس جمعیت ژنتیکی از کل جمعیت کمتر می‌گردد.

۴- تابع برازندگی : (Fitness function) این تعریف بسیار مهم است ، چرا که بر اساس این تابع کروموزومها باهم رقابت می‌کنند و کاملاً case Dependent می‌باشد.

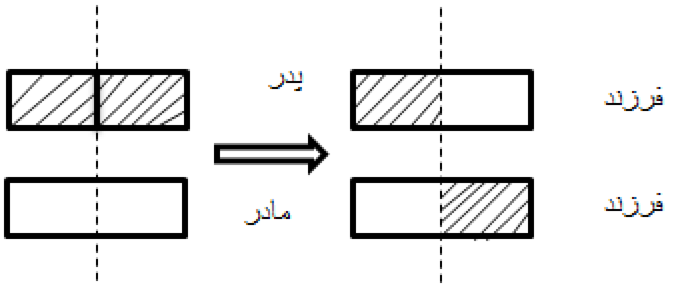
۵- عملگرهای ژنتیکی و روشهای تولید نسل بعدی : سه روش مختلف وجود دارد :

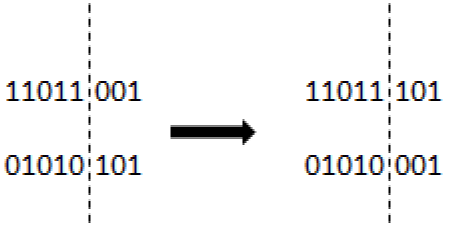
(الف) تولید مجدد (Reproduction) : به افرادی از نسل فعلی که دارای برتری است اجازه انتقال عیناً به نسل بعدی را می‌دهد.

(ب) تقاطع (Crossover) : به سه نوع صورت می‌پذیرد :

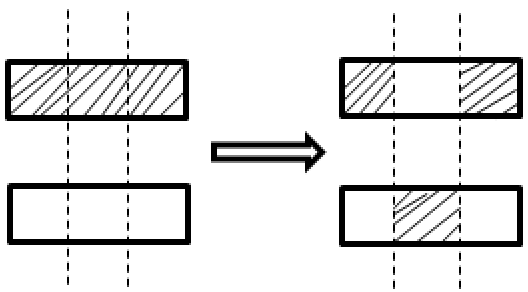
(I) تقاطع یک نقطه‌ای

* مثلاً :





* (II) تقاطع دو نقطه‌ای



(III) تقاطع یکنواخت

Crossover Mask:	10001110		
پدر :	11011001	⟹	11011001
مادر :	01010101		فرزند بعدی :01010101

(ج) جهش : یک کروموزوم انتخاب می‌شود و به طور تصادفی یک یا چند بیت آنرا تغییر می‌دهیم. جهش یک فرآیند ثانویه است و آنچه اصلی است تقطیع و باز تولید است.

* شرایط خاتمه در الگوریتم ژنتیک

در چهار حالت می‌توان الگوریتم ژنتیک را خاتمه داد:

۱- ایجاد حداکثر N نسل توسط الگوریتم ژنتیک

۲- گذشت زمان t از شروع اجرای الگوریتم ژنتیک

۳- ایجاد چند نسل متوالی به طوری که در این چند نسل هیچ کروموزوم بهتری ایجاد نشود.

۴- بزرگتر یا مساوی شدن برازندگی یکی از کروموزومهای ایجاد شده توسط الگوریتم ژنتیک از یک مقدار آستانه برازندگی.

* خلاصه‌ای از مراحل حل مسئله با الگوریتم ژنتیک :

۱- تعیین پارامترهای متغیر و کدکردن مناسب آنها به عبارت دیگر نمایش دقیق هر راه حل با یک کروموزوم

۲- تعریف تابع برازندگی مناسب

۳- مشخص کردن پارامترها و متغیرهای لازم برای کنترل الگوریتم ژنتیک

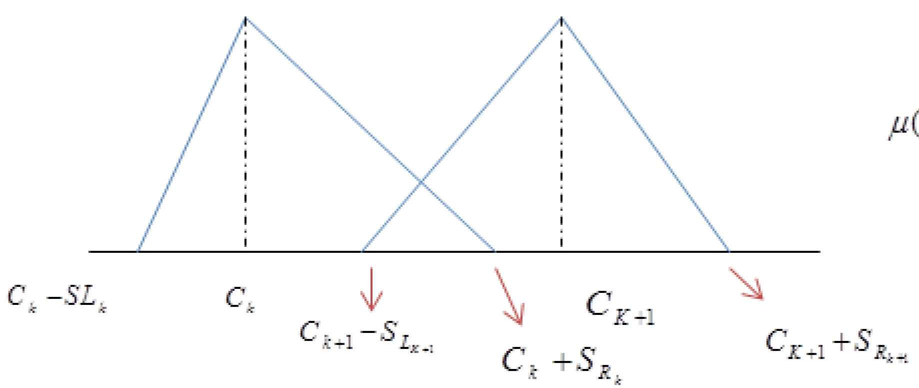
۴- انتخاب شرط خاتمه الگوریتم.

* مثال :

تعداد قواعد $\equiv$ ناحیه در فضای ورودی

$$\left.\begin{array}{l}\text{q ورودی} \\ \text{L متغیر زبانی برای هر ورودی}\end{array}\right\} \Rightarrow L^{q}$$

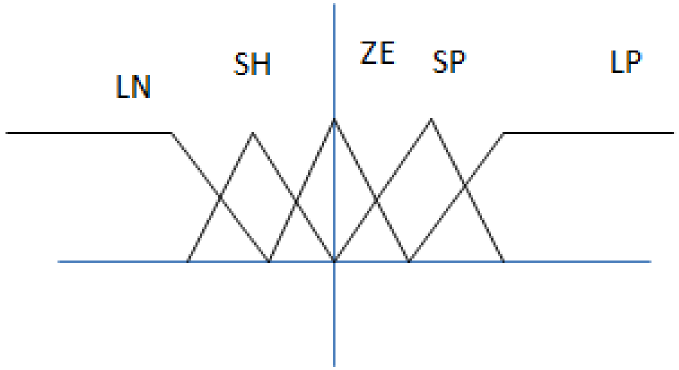
بطور نمونه :
$$\begin{cases} q=2 \quad (x,\bar{x}), L=5 \quad \Rightarrow \quad \text{۲۵ قاعده} \\ LN, SN, ZE, SP, LP \end{cases}$$



$$\mu(x) = \begin{cases} (-\dfrac{1}{SR})x + (1+\dfrac{c}{SR}), c \le x \le c_s \\ (\dfrac{1}{SL})x + (1-\dfrac{c}{SL}), c - SL < x \le c \\ 0 \qquad\qquad 0, w, \end{cases}$$

* اگر توابع عضویت ورودی‌ها را متقارن در نظر بگیریم (مثل شکل زیر) تعداد پارامترهایی که کل توابع عضویت را در فضای ورودی مشخص می‌کنند برابر است با :3q (l-1)*1/2

(1/2 به خاطر تقارن است)



برای نمونه مطرح شده : q=2 و L=5 داریم :

تعداد پارامترهای لازم = ۱۲

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= SR_{z\in R} \\ M_2 &= V_{sp} \\ M_3 &= SR_{sp} \\ M_4 &= SL_{sp} \\ M_5 &= V_{Lp} \\ M_6 &= SL_{Lp} \end{aligned}\right\} x \quad \text{برای} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} M_7 &= SR_{z\in R} \\ M_8 &= V_{sp} \\ M_9 &= SR_{sp} \\ M_{10} &= SL_{sp} \\ M_{11} &= V_{Lp} \\ M_{12} &= SL_{Lp} \end{aligned}\right\} \dot{x} \quad \text{برای}$$

* جدول زیر مقدار تابع عضویت مقدم قواعد را نشان می‌دهد.

x' \ x	LN	SN	ZE	SP	LP
LN	r_1	r_6	r_{11}	r_{10}^1	r_5^1
SN	r_2	r_7	r_{12}	r_9^1	r_4^1
ZE	r_3	r_8	$*^3$	r_8^1	r_3^1
SP	r_4	r_9	r_{12}^1	r_7^1	r_2^1
LP	r_5	r_{10}	r_{11}^1	r_6^1	r_1^1

با فرض تقارن : $r_i^1 = 6 - r_i$

مقدارr	۱	۲	۳	۴	۵
تابع عضویت خروجی	LN	SN	ZE	SP	LP

$$r_1 = 5 \text{ مثلاً اگر } \Rightarrow r_1^1 = 6-5=1 \Rightarrow \begin{matrix} r_2^5 \\ r_1^1 = 1 \end{matrix} \begin{cases} if \quad x \quad is \quad LN \quad and \quad \dot{x} \quad is \quad LN \quad Then \quad y \quad is \quad LP \\ if \quad x \quad is \quad Lp \quad and \quad \dot{x} \quad is \quad Lp \quad Then \quad y \quad is \quad LN \end{cases}$$

پس r_1 تا r_{12} را باید به صورت بهینه تعیین نمود پس ۱۲ پارامتر هم در این جا نیازمندیم.

تعداد توابع عضویت خروجی در جدول قبلی ۵ تا می‌باشد و در صورت وجود تقارن و بدلیل تک خروجی بودن تعداد پارامترهای لازم جهت تعیین توابع عضویت خروجی نیز ۶ عدد می‌باشد.

q=1, L=5 → 3q (L-1)*1/2=6

* پس می‌توان کروموزوم را متشکل از 30 ژن یا بیت زیر در نظر گرفت.

r_1	r_2	r_3	$...$	r_{11}	r_{12}	M_1	M_2	$\cdots$	M_{11}	M_{12}	N_1	N_2	$\cdots$	N_5