Prova com consulta. Duração: 2h00m. Exame Época de Recurso

Nome do estudante: .... **Nº**..................

Informação aos estudantes: A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos! Anotações serão permitidas apenas nestes materiais! Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo ou acesso à Internet (tablets, portáteis, etc). Telemóveis deverão permanecer **DESLIGADOS** durante a duração do exame. Deve responder às questões em folhas separadas (uma folha para cada questão).

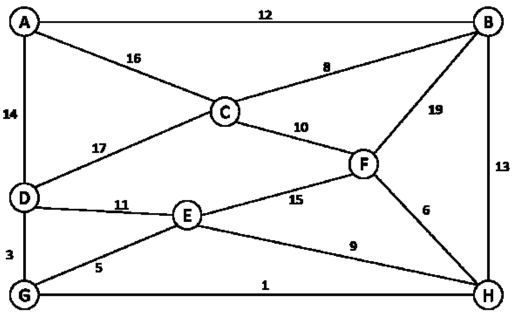
1. [**4 valores**] Considere S uma sequência de números naturais, por exemplo {8, 2, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 3, 1}. Pretende-se determinar o número mínimo de subsequências (de elementos contíguos) tal que cada subsequência se inicia e termina com o mesmo número.

No exemplo apresentado, o número mínimo é 4, e as subsequências são ({8}, {2,6,7,1,2}, {3,4,5,4,5,3}, {1}).

a) [1,5 valor] Implemente (em C++ ou pseudo-código) uma solução para o problema, usando um algoritmo ganancioso e explique. Indique a sua complexidade temporal. Justifique.

b) [2,5 valores] Formalize uma solução para o problema, usando programação dinâmica. Implemente (em C++ ou pseudo-código) essa solução e explique. Indique a sua complexidade temporal. Justifique.

2. [**3 valores**] Considere o grafo pesado e não dirigido, apresentado na figura abaixo. Os pesos das arestas são valores inteiros, *w*, sendo 0 < *w* < 20.



a) [1.5 valores] Indique a sequência de arestas da árvore de expansão mínima, na ordem pela qual são consideradas, quando se aplica o algoritmo de Prim. Justifique. Considere **A** o vértice inicial.

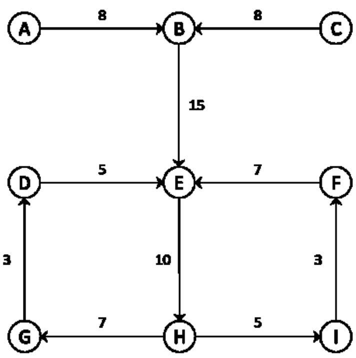
b) [1.5 valores] Uma nova aresta **C-E** é adicionada ao grafo. Para que a nova aresta **C-E** pertença à árvore de expansão mínima, qual a gama de valores possível para o peso desta aresta? Explique.

3. **[3 valores]** Considere o grafo da questão anterior, que representa um mapa, onde os vértices identificam locais de interesse paisagístico ou histórico e as arestas apresentam a distância entre os locais.

   a) [1.5 valores] O Sr. Santos está de férias no hotel localizado em **A** e pretende visitar alguns locais de interesse nos dias em que estará aí hospedado, pelo que lhe interessa conhecer os caminhos mais curtos com origem em **A**. Aplicando o algoritmo de Dijkstra, apresente os valores de distância em cada vértice do grafo à medida que estes são processados. Qual o caminho mais curto de **A** a **H**?

   b) [1.5 valores] O Sr. Santos quer agora efetuar um passeio até ao local **H**, visitando o menor número de locais diferentes, pois a passagem por cada local obriga ao pagamento de uma taxa. Descreva, em pseudo-código, um algoritmo eficiente, para ajudar o Sr. Santos a planear o seu passeio. Qual a complexidade temporal do algoritmo? Justifique.

4. **[3 valores]** Um sistema de rega foi projetado com a configuração da figura abaixo, em que as capacidades das tubulações são indicadas pelos valores inteiros, apresentados próximos das respectivas arestas. Há duas bombas a alimentarem o sistema de rega a uma taxa (litros/hora) constante, localizadas nos vértices A e C, da rede. Aspersores foram colocados nos vértices D, F, G, e I. Responda às alíneas seguintes, justificando adequadamente a resposta dada.



   a) [1 valor] Qual o fluxo máximo a alimentar todo o sistema de rega?

   b) [2 valores] Qual será o fluxo a passar pela tubulação E->H, se for instalado um aspersor no vérticie E?

5. **[3 valores]** Considere que a distância evolutiva entre dois genes é medida pelo número mínimo de mutações que permitem transformar um gene no outro. Segundo este conceito, responda adequadamente às perguntas seguintes, justificando a sua resposta.

a) [1,5 valores] Qual a distância evolutiva entre os dois genes, a seguir:

XPTO: A G G T A C T A C C C C A
OPTX: A A G G A C A C C C C A

b) [1,5 valores] Defina a função-prefixo para utilização do algoritmo de Knuth-Morris-Pratt para a procura do gene G T G C C numa sequência de ADN.

6. **[4 valores]** Na teoria dos grafos, um *clique* de um grafo não dirigido é um subconjunto dos seus vértices, tal que, para quaisquer pares de vértices *u* e *v* neste subconjunto, existe uma aresta do grafo que liga os vértices *u* e *v*. Mais formalmente, dado um grafo não dirigido **G**=(**V**, **E**), um subconjunto $\mathbf{V_C} \subseteq \mathbf{V}$ é um *clique* do grafo **G** se, e se somente, $\forall\, u, v \in \mathbf{V_C}$ então (u, v) $\in$ **E**.

Considerando o problema exposto, responda às seguintes questões:

a) [1 valor] Reformule o problema do *clique*, *C*, em grafos não dirigidos, como um problema de decisão.

b) [3 valores] Verifique se há uma solução eficiente para este problema, explicando sucintamente os passos do processo utilizado.

<u>Sugestão:</u> Caso necessário, poderá utilizar as seguintes definições de problemas NP-completo, bem como considerar outros problemas da classe NP-completo que conheça.

<u>Coloração de grafos</u> (*Graph coloring, GC*): Dado um grafo **G**=(**V**, **E**), colorir o grafo **G** é definir rótulos (ou cores) para todos os vértices de **G** de forma a que não haja dois vértices $i \in \mathbf{V}$ e $j \in \mathbf{V}$, para toda aresta $\{i, j\} \in \mathbf{E}$, tal que *i* e *j* compartilhem o mesmo rótulo (ou cor); ou seja, *color*(*i*) ≠ *color*(*j*).

<u>Conjunto Independente</u> (*Independent Set Problem, IS*): Dado um grafo **G**=(**V**, **E**), encontrar um conjunto independente dos vértices de **G** é encontrar um subconjunto $\mathbf{V_I} \subseteq \mathbf{V}$, tal que não há dois vértices $i, j \in \mathbf{V}$ que partilham uma aresta em **E**.

Bom Exame!