Będziemy się zajmować działaniami grup topologicznych na rozmaitościach, rozmaitościach z osobliwościami itp., a interesować nas będą grupy zwarte (raczej Liego) i algebraiczne, a w szczególności reduktywne, takie jak (wypisane w parach, zwarta w algebraicznej): $S^1 \subset \mathbb{C}^*, (S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n, SO(n) \subset SO(n,\mathbb{C}), O(n) \subset O(n,\mathbb{C}), U(n) \subset GL(n), SU(n) \subset SL(n), \ldots$.

Definicja 1. G algebraiczna jest *reduktywna*, jeśli istnieje $K \subset G$ zwarta (tj. Liego), która jest gęsta w topologii Zariskiego.

Przykład 2. $\mathbb{C}_+$ (z dodawaniem) nie jest reduktywna, podobnie jak grupa macierzy górnotrójkątnych.

Uwaga 3. Skądinąd znana jest klasyfikacja grup reduktywnych. Każda taka spójna grupa jest postaci $G = \tilde{G}\big/A$, gdzie $\tilde{G} = G_1 \times \ldots \times G_n \times T$; $T = (S^1)^n$ lub $T = (\mathbb{C}^*)^n$ w zależności od tego, czy G jest zwarta, czy algebraiczna; G_i to jednospójne grupy proste (tj. jedyne dzielniki normalne są dyskretne).

Wśród grup prostych istnieją 4 serie grup i 5 grup wyjątkowych: $SU(n) \subset SL(n); SO(2n) \subset SO(2n,\mathbb{C}); SO(2n+1) \subset SO(2n+1,\mathbb{C}); Sp(n) \subset Sp(n,\mathbb{C}); G_2; F_4; E_6, E_7, E_8$.

Twierdzenie (bez dowodu) 4. *Grupa zwarta bez podgrupy p-adycznej to grupa Liego.*

Uwaga 5. Jednospójne grupy Lie odpowiadają algebrom Lie.

Uwaga 6. Na grupie Lie mamy inwolucję Cartana (macierzowo $A \mapsto \bar{A}^T$) i dla grupy reduktywnej $K = G^\phi$ to podgrupa zwarta gęsta w topologii Zariskiego.

Cytat 7. To nie wynika z ogólnych faktów, to jest efekt przyrodniczy.

Cytat 8. To są konkretne rzeczy, to jest ZOO po prostu

Cytat 9. Torus, to jest torus.

Twierdzenie (bez dowodu) 10. *Każda grupa zwarta (reduktywna) ma maksymalny torus i wszystkie one są sprzężone. Ponadto sprzężenia torusa wypełniają grupę zwartą.*

Twierdzenie (bez dowodu) 11. *Dla G reduktywnej suma sprzężeń torusa jest gęsta w G.*

Tak się składa, że G działa na G/H przez przesunięcia.

Przykład 12. $\mathbb{P}^n = U(n+1)/(U(1) \times U(n)) = GL(n+1)/H$, gdzie H to macierze w których w pierwszej kolumnie tylko pierwszy wyraz jest niezerowy.

Możemy wziąć maksymalny torus G i zauważymy, że jego działanie na $\mathbb{P}^n$ ma punkty stałe, no i możemy sobie patrzeć na ilorazy przestrzeni przez działanie, w przypadku $\mathbb{P}^n$ dostaniemy n-sympleks.

Definicja 13 (działanie grupy)**.** To takie ciągłe przekształcenie $G \times X \to X$, że $(gh)x = g(hx)$.

Jest ono *przechodnie/tranzytywne*, jeśli $\forall_{x,y} \exists_g y = gx$.

Jest ono *wolne*, jeśli $gx = x \implies g = 1$.

Jego *orbita* przez x to $Gx = \{gx : g \in G\}$.

Jego *stabilizator/grupa izotropii* w x to $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Uwaga 14. Przekształcenie $G/G_x \to Gx$, $g \mapsto gx$, jest ciągłe, a jeśli G zwarta, to jest homeomorfizmem.

Twierdzenie (bez dowodu) 15. *G algebraiczna, działanie algebraiczne na rozmaitości algebraicznej, to $G/G_x \simeq Gx$ izomorficzne jako rozmaitości algebraiczne.*

Uwaga 16. Jeśli G przemienna, to stabilizatory na jednej orbicie są równe.

Definicja 17. $H \subset G$, to $X^H = \{x \in X : \forall_{h \in H} hx = x\}$.

Uwaga 18. $K \subset H$, to $X^K \supset X^H$.
$H \triangleleft G$, to G/H działa na X^H.

Twierdzenie 19. *X Hausdorffa, G zwarta, to X/G Hausdorffa oraz $X \to X/G$ jest właściwe domknięte.*

Lemat 20. *X Hausdorffa, to każde dwa zbiory $k_1, k_2 \subset X, k_1 \cap k_2 = \varnothing$ zwarte można rozdzielić.*

Definicja 21. Mówimy, że x i y mają takie same typy orbitowe, jeśli G_x i G_y są sprzężone.

Twierdzenie (bez dowodu) 22. *X zwarta rozmaitość, G zwarta grupa Lie, działanie gładkie, to istnieje skończenie wiele typów orbitowych.*

Definicja 23 (G-ekwiwariantne mapy)**.** G działa na X oraz Y, wtedy $\mathrm{Map}_G(X,Y) = \{f : X \to Y | \forall_g gf(x) = f(gx)\}$.

Uwaga 24. $f : G/H \to G/K$, G-ekwiwariantne f istnieje, to istnieje $g \in G$ takie, że $gHg^{-1} \subset K$ i wtedy $f(g'H) = gg'g^{-1}K$.

Stwierdzenie 25. $\mathrm{Map}_G(G/H, G/K) = (G/K)^H$.