Konstrukcje ekwiwariantne

Definicja 1 (skręcony produkt)**.** Niech G działa z prawej na X, z lewej na Y. Wtedy $X \times_G Y = X \times Y/\sim$, gdzie $(xg, y) \sim (x, gy)$, albo $= X \times Y/G$, gdzie $g(x, y) = (xg^{-1}, gy)$.

Definicja 2 (przestrzeń z indukowanym działaniem)**.** $H \subset G, X$ to H-przestrzeń, wtedy $G \times_H X$ to G-przestrzeń.

Uwaga 3. X lewa G-przestrzeń, prawa H-przestrzeń, Y lewa H-przestrzeń, to $X \times_H Y$ ma strukturę G-przestrzeni.

Definicja 4 (produkt włóknisty)**.**
$$\begin{tikzcd} Y \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$
, $Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$.

Jeśli X, Y, Z to G-przestrzenie, a odwzorowania sa ekwiwariantne, to $Y \times_X Z$ ma naturalne działanie.

Definicja 5 (przestrzeń indukowana)**.**
$$\begin{tikzcd} f^*X = Y \times_{X/G} X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X/G \end{tikzcd}$$

Definicja 6 (G-wiązki główne)**.** G działa na E z prawej, działanie jest wolne, a $E \to E/G = B$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem, to $E \to B$ to G-wiązka główna.

Twierdzenie (bez dowodu) 7. *E normalna, G zwarta, to $E \to E/G$ jest lokalnie trywialne.*

Definicja 8 (lokalnie trywialne rozwłóknienie)**.** $E \to B$ lokalnie trywialne rozwłóknienie, jeśli istnieje pokrycie U_i bazy B takie, że $E|_{U_i} = E \times_B U_i \approx U_i \times G$.

Uwaga 9. Zauważmy, że w takiej sytuacji jak wyżej,
$$\begin{tikzcd} E|_{U_i} \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & E|_{U_i \cap U_j} \arrow[dl] \arrow[dr] & & E|_{U_j} \arrow[ll, hook'] \arrow[d] \\ U_i \times G \arrow[r, hook] & (U_i \cap U_j) \times G \arrow[rr] & & (U_i \cap U_j) \times G & U_j \times G \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$
$$(u, g) \longmapsto (u, g_{ij} g)$$

Definicja 10 (kocykl definiujący)**.** *Kocykl definiujący* to $(i, j) \mapsto g_{i,j}$, gdzie $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$.

Stwierdzenie 11. $\{g_{ij}\}$ spełniają warunek kocyklu $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$.

Uwaga 12. Kocykl daje G-wiązkę.

Uwaga 13. $U_i \subset B$, $E|_{U_i}$ trywialna $\simeq U_i \times G$, to zamiana trywializacji $U_i \times G \to U_i \times G$ to po prostu $(u, g) \mapsto (u, h_i g)$, gdzie $h_i : U_i \to G$. Zmiana trywializacji na inną daje nowy kocykl $g'_{ij} = h_i^{-1} g_{ij} h_j$.

Stwierdzenie 14. Klasy izomorfizmu G-wiązek głównych odpowiadają granicy po pokryciach z kocykli podzielonych przez relację kobrzegowości, a to jest izomorficzne z $H^1(B, C(B, G))$, ale to wszystko tak na boku.

Definicja 15 (przekształcenie wiązek głównych)**.** G-niezmiennicze f,
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$
.

Stwierdzenie 16. Każde przekształcenie wiązek głównych jest izomorfizmem.

Lemat 17. *$E, F \to B \times I$ wiązki główne, B parazwarte, jeśli $E|_{B\times\{0\}} \simeq F|_{B\times\{0\}}$, to $E \simeq F$.*

W dowodzie powyższego założyliśmy, że B to CW-kompleks.

Wniosek 18.
$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$
, f^*E jest G-wiązką główną nad Y.

Twierdzenie 19. *$f \simeq g : Y \to X \implies f^*E \simeq g^*E$.*

Wniosek 20. Przyporządkowanie $X \mapsto$ zbiór klas izomorfizmu wiązek jest funktorem kontrawariantnym $hTop \to Set$.

Twierdzenie (bez dowodu) 21. *Ten funktor jest "prawie" reprezentowalny, tzn. istnieje przestrzeń BG (typu CW-kompleks, jeśli G Lie) taka, że klasy homotopii $[X, BG]$ = klasy izomorfizmu G-wiązek głównych dla zwartego CW-kompleksu X.*

Przykład 22. $BS^1 = \mathbb{CP}^\infty$
$BU(n) = \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_N \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^N)$

Lokalna struktura G-przestrzeni

Definicja 23 (tuba, slajs)**.** $x \in X$, *tubą* wokół orbity nazywamy stoczenie $U \supset Gx$ homeomorficzne z $G \times_{G_x} S$, gdzie $S \subset X, x \in S$ i S jest G_x-niezmiennicze. S nazywamy *slajsem.*

Twierdzenie 24 (Mostov, Wasserman)**.** *Jeśli X normalna, G zwarta Lie, to każda orbita ma tubę i slajs.*

Lemat 25. *Niech $V \to G/H$ wiązka wektorowa z działaniem G, która jest liniowa na włóknach (tj. G-*wiązka wektorowa*), wtedy istnieje reprezentacja grupy H na W taka, że $V \approx G \times_H W \to G/H$.*

Twierdzenie (bez dowodu) 26 (o otoczeniu tubularnym)**.** *$Y \subset X$ podrozmaitość zwarta, to istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $exp : NY \to X$ jest homeomorfizmem na wiązce dysków $D_\varepsilon \subset NY = TY^\perp \subset TX|_Y$.*