Twierdzenie 1. *$G = GL_n(\mathbb{C})$ lub $G = U(n)$, wtedy przestrzeń klasyfikująca $BG = \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_N \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^N)$.*

Uniwersalna wiązka dla $U(n)$ to $\mathrm{Stief}_n^{ort}(\mathbb{C}^n)$ okłady ortonormalne, dla $GL_n(\mathbb{C})$ to $\mathrm{Stief}_n(\mathbb{C}^\infty)$ układy liniowo niezależne.

Wniosek 2. $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ domknięta (czyli Lie), wtedy BG ma model będący wstępującą sumą rozmaitości (bo $\mathrm{Stief}_n(\mathbb{C}^N)/G$ to rozmaitość).

Wniosek 3. $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ algebraiczna, to BG ma model będący wstępującą sumą rozmaitości algebraicznych.

Przykład 4. Niech $G = T = (\mathbb{C}^*)^n$.

$B\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^\infty$.

$B(G \times H) = BG \times BH$, czyli $B(\mathbb{C}^*)^n = (\mathbb{P}^\infty)^n$.

Z innej strony $ET = \mathrm{Stief}_n(\mathbb{C}^\infty)$, $BT = \mathrm{Stief}_n(\mathbb{C}^\infty)/T = \mathrm{Grass}_n^{split}(\mathbb{C}^\infty) = \{V \in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$ wraz z rozkładem $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n\} \to \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

Przykład 5. $BSL_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Stief}_n(\mathbb{C}^\infty)/SL_n(\mathbb{C}) = \{V \in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$ wraz z izomorfizmem $\varphi : \bigwedge^n V \to \mathbb{C}\} \to \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$

Przykład 6. $BSO_n(\mathbb{C}) = \{V \in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$ wraz z niezdegenerowaną formą kwadratową na $V\}$

Przykład 7. Niech G będzie grupą Borela, tj. macierzami górnotrójkątnymi, wtedy $BG = \{V \in \mathrm{Grass}_n(\mathbb{C}^\infty)$ wraz z filtracją $V_1 \subset \ldots \subset V_n = V\}$, czyli jest to tzw. częściowa rozmaitość flag.

Twierdzenie 8. *Jeśli $G \hookrightarrow H \xrightarrow{\pi} K$ ciąg dokładny grup, G normalna, to istnieje rozwłóknienie $BG \to BH \to BK$.*

Uwaga 9. G Lie zawiera torus, to BG nie może być skończenie wymiarowe.

Twierdzenie (bez dowodu) 10. *G spójna Lie, T maksymalny torus w G, $H^*(BG, \mathbb{Q}) = H^*(BT, \mathbb{Q})^W$, $W = NT/T$.*

Kohomologie ekwiwariantne

Chcemy je tak zdefiniować, by G-ekwiwariantna homotopijna równoważność $X \to Y$ indukowała izomorfizm na ekwiwariantnych kohomologiach.

Definicja 11. $H^*_G(X) = H^*(EG \times_G X)$

Uwaga 12. $H^*_{\underline{G}}(\underline{X})$ jest funktorem kontrawariantnym ze względu na X oraz kontrawariantnym ze względu na G.

Twierdzenie 13. *$f : X \to Y$, G-ekwiwariantna homotopijna równoważność indukuje izomorfizm $H^*_G(Y) \simeq H^*_G(X)$.*

Uwaga 14. $H^*_G(X)$ jest algebrą nad $H^*(BG)$.

Uwaga 15. $\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & EG \times_G X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X/G \\ & BG & \end{tikzcd}$ indukuje ciąg homomorfizmów $\begin{tikzcd} H^*(X/G) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\pi^*"'] & H^*_G(X) \arrow[r] & H^*(X) \end{tikzcd}$

Twierdzenie 16. *Jeśli G działa wolno na X, to $H^*(X/G) \to H^*(X)$ izomorfizm.*

Lemat 17. *G działa wolno, to włókna są ściągalne, czyli $EG \times_G X \simeq_{htp} X/G$.*

Stwierdzenie 18. Jeśli X' wolna G-przestrzeń, $X' \to X$ to G-ekwiwariantna homotopijna równoważność, to $H^*_G(X) = H^*(X'/G)$.