

Phân tích thiết kế thực nghiệm

Đỗ Trọng Hợp

Khoa Khoa Học và Kỹ Thuật Thông Tin

Đại học Công Nghệ Thông Tin tp. Hồ Chí Minh

Completely Randomized Design with Multiple Treatment Factors (Thí nghiệm hoàn toàn ngẫu nhiên nhiều yếu tố)

- Nguyên tắc
 - Thí nghiệm dùng để kiểm tra ảnh hưởng của nhiều yếu tố chính
 - Mỗi treatment là một bộ (combination) các mức của các yếu tố chính và được gán ngẫu nhiên cho các đơn vị thí nghiệm
 - Mỗi treatment được áp dụng cho nhiều đơn vị thí nghiệm
- Ví dụ
 - Thí nghiệm ảnh hưởng của loại phân và lượng nước tưới lên năng suất bắp. Có 2 yếu tố chính là (1) loại phân và (2) lượng nước tưới. Yếu tố 1 có 3 mức A, B, C. Yếu tố 2 có 2 mức 100ml, 200ml. Các treatment trong thí nghiệm là 1 bộ loại phân và lượng nước tưới (A-100ml, A-200ml, B-100ml, B-200ml, C-100ml, C-200ml).
 - Thí nghiệm ảnh hưởng của mật độ thả, lượng protein trong thức ăn mỗi ngày, và nồng độ NH_3 trong nước lên tốc độ phát triển của cá. Mỗi treatment trong thí nghiệm là 1 bộ các mức của 3 yếu tố chính.

Completely Randomized Design with Multiple Treatment Factors

- Full factorial design (fully crossed design)
 - Là thí nghiệm mà tất cả các treatment có thể tạo ra được (mỗi treatment là một possible combination các mức của các yếu tố chính) đều được áp dụng lên các đơn vị thí nghiệm.
 - Ví dụ: Thí nghiệm ảnh hưởng mật độ thả (3 mức), lượng protein cho ăn (4 mức), và nồng độ NH_3 trong nước (2 mức) lên tốc độ phát triển của cá. Mỗi treatment trong thí nghiệm là 1 bộ các mức của 3 yếu tố chính. Có tổng cộng $3 \times 4 \times 2$ possible combination các mức của 3 yếu tố chính. Thí nghiệm full factorial design sẽ áp dụng tất cả 24 treatment cho các đơn vị thí nghiệm và thu thập kết quả.
- Fractional factorial design
 - Là thí nghiệm mà một tập con trong bộ tất cả các treatment có thể tạo ra được (trong full factorial design) được chọn cẩn thận để áp dụng lên các đơn vị thí nghiệm.
 - Ví dụ: Thí nghiệm ảnh hưởng của nhiệt độ và thời gian nướng lên độ giòn của bánh quy. Nhiệt độ có 3 mức (100, 200, 300 độ), và thời gian nướng có 4 mức là (10, 20, 30, 40 phút). Có tất cả 3×4 treatment có thể được tạo ra. Nhưng một số treatment như (100 độ - 10 phút) hoặc (300 độ - 40 phút) sẽ không được áp dụng vì ta biết chắc bánh sẽ không chín hoặc sẽ bị cháy. Do đó thí nghiệm chỉ chạy với 1 tập con các treatment trong tập 12 treatment.

Example 1 (Two qualitative factors): Poisons and antidotes

Thí nghiệm 3 loại thuốc độc I, II, III và 4 loại thuốc giải A, B, C, D. Tất cả 12 treatments (poison-antidote) được áp dụng ngẫu nhiên lên 48 con chuột. Mỗi treatment được áp dụng ngẫu nhiên cho 4 con chuột. Kết quả được đo lường là thời gian sống (lifetime) của mỗi con chuột sau khi tiêm thuốc.

Table 5.1 Animal Survival Times (in tenths of hour).

<i>Poison</i>	<i>Antidote</i>			
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
I	31	82	43	45
	45	110	45	71
	46	88	63	66
	43	72	76	62
II	36	92	44	56
	29	61	35	102
	40	49	31	71
	23	124	40	38
III	22	30	23	30
	21	37	25	36
	18	38	24	31
	23	29	22	33

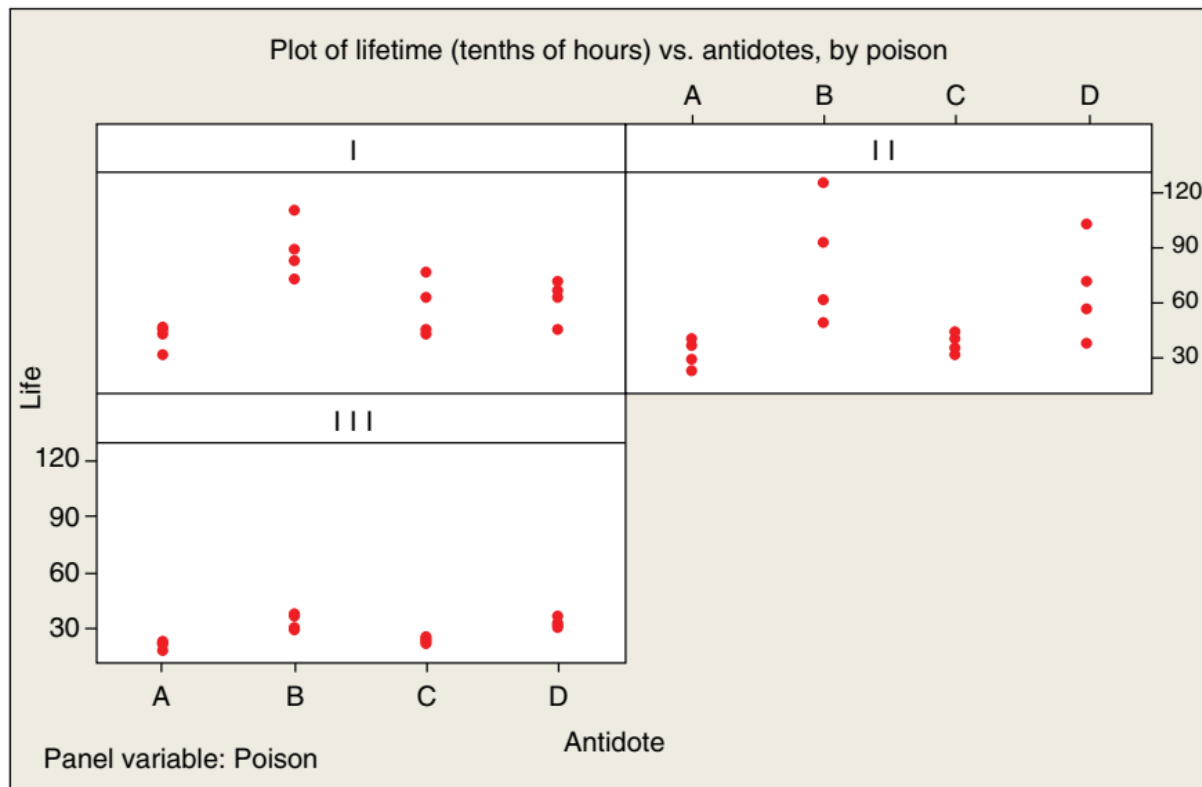


Figure 5.1 Data Plot: Poison—Antidote Experiment.

Nhận xét:

- Với cả 3 loại độc, thuốc giải B, D luôn cho kết quả tốt hơn
- Với cả 4 loại thuốc giải, loại độc III luôn cho kết quả xấu nhất
- Mỗi nhóm đều có biến thiên bên trong nhóm, và biến thiên này khác nhau khá rõ giữa các nhóm.
- Ta có thể chuyển đổi kết quả từ lifetime sang $1/\text{lifetime}$ (tạm gọi là death rate) với mục đích làm sự biến thiên bên trong mỗi nhóm tương tự nhau hơn

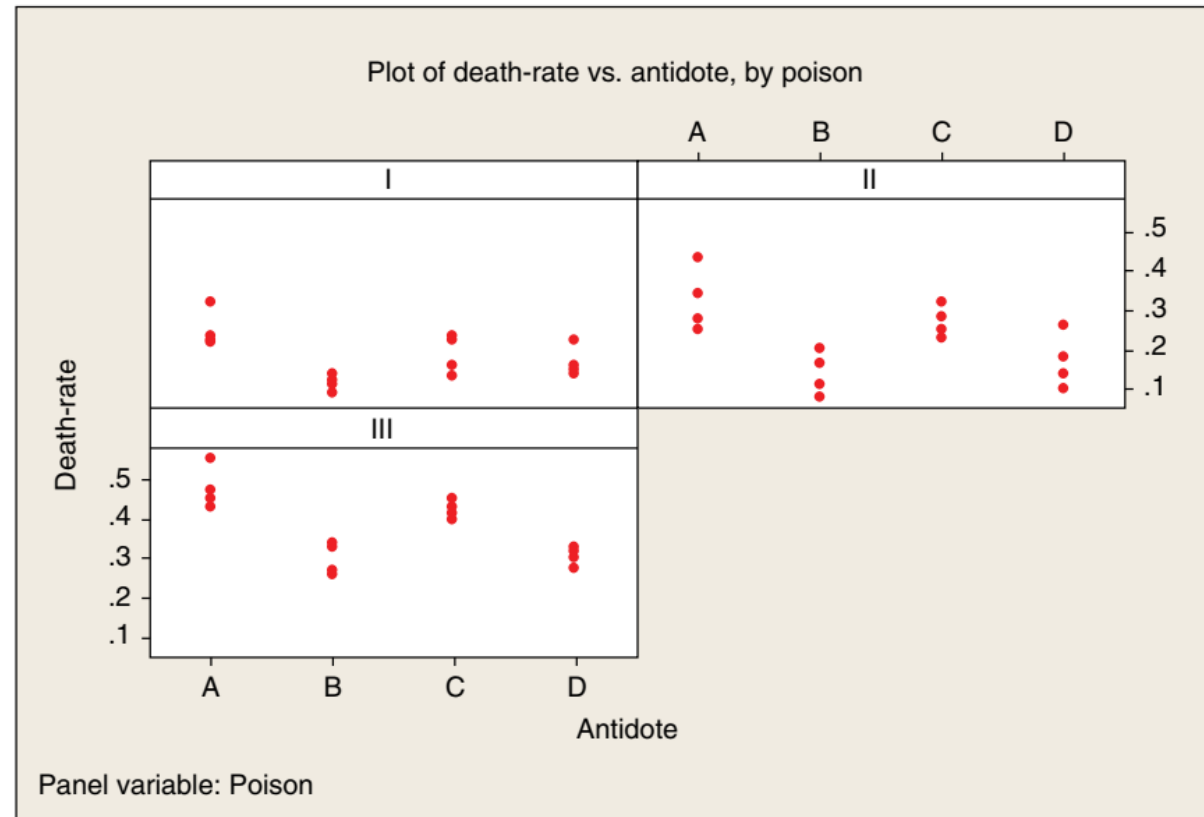


Figure 5.2 Plot of Death Rates versus Antidotes, by Poisons.

Câu hỏi: tác dụng của các loại độc và các loại thuốc giải có thật sự khác nhau không?

Table 5.2 Average Death Rates (units of hour⁻¹) by Poisons and Antidotes.

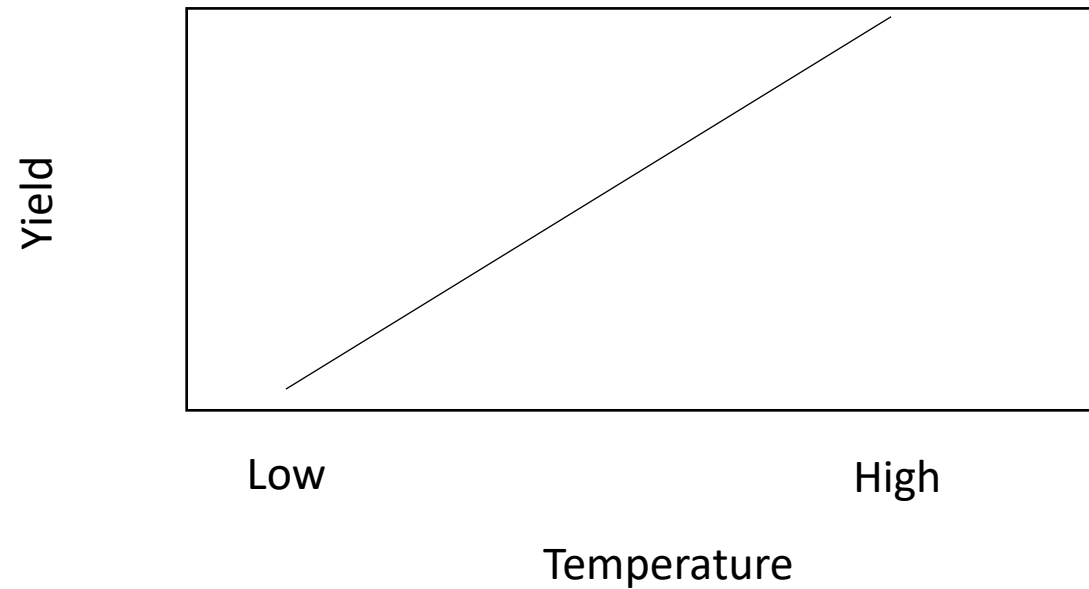
Average Death Rate		Antidote			
Poison	A	B	C	D	
I	.25	.12	.19	.17	
II	.33	.14	.27	.17	
III	.48	.30	.43	.31	
Average	.35	.19	.30	.22	

- Ta có thể dùng ANOVA phân tích kết quả như thí nghiệm 1 yếu tố với 12 treatment (df=11).
- Tuy nhiên, từ thiết kế factorial, ta có thể phân tích rõ ràng các loại biến thiên trong dữ liệu:
 - Biến thiên theo thuốc độc (df=2)
 - Biến thiên theo thuốc giải (df=3)
 - Biến thiên theo tương tác (interaction) giữa thuốc độc và thuốc giải (df=6)

Interaction plot

- Thí nghiệm ảnh hưởng của nhiệt độ nướng bánh quy lên sản lượng bánh quy đạt chuẩn ngon. Nhiệt độ có 2 mức Low và High. Thời gian nướng bánh được giữ cố định là 15 phút.

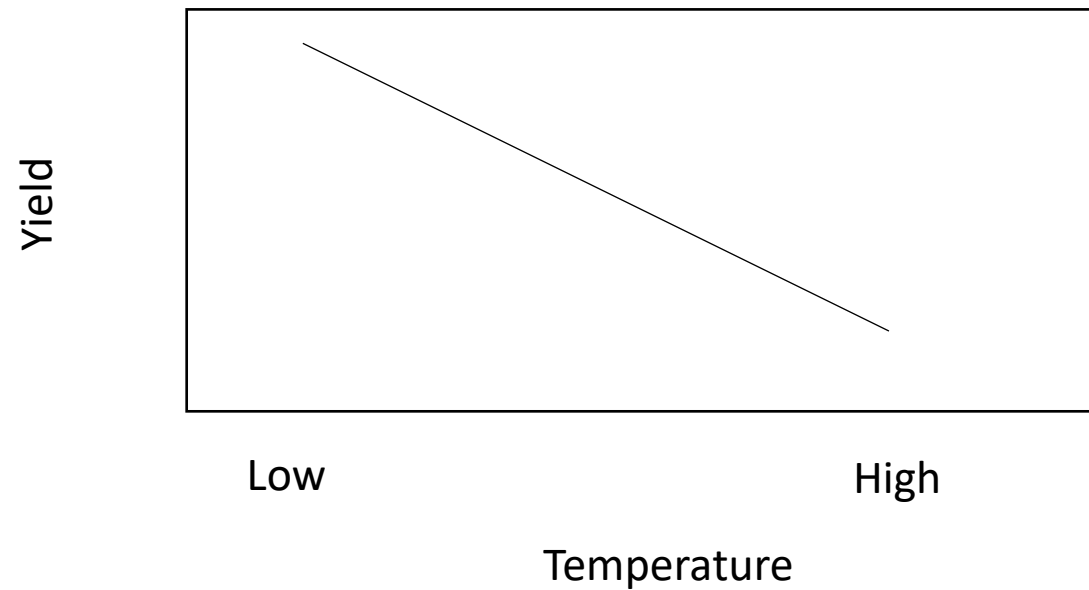
Effect of baking temperature on the yield of good cookies



Interaction plot

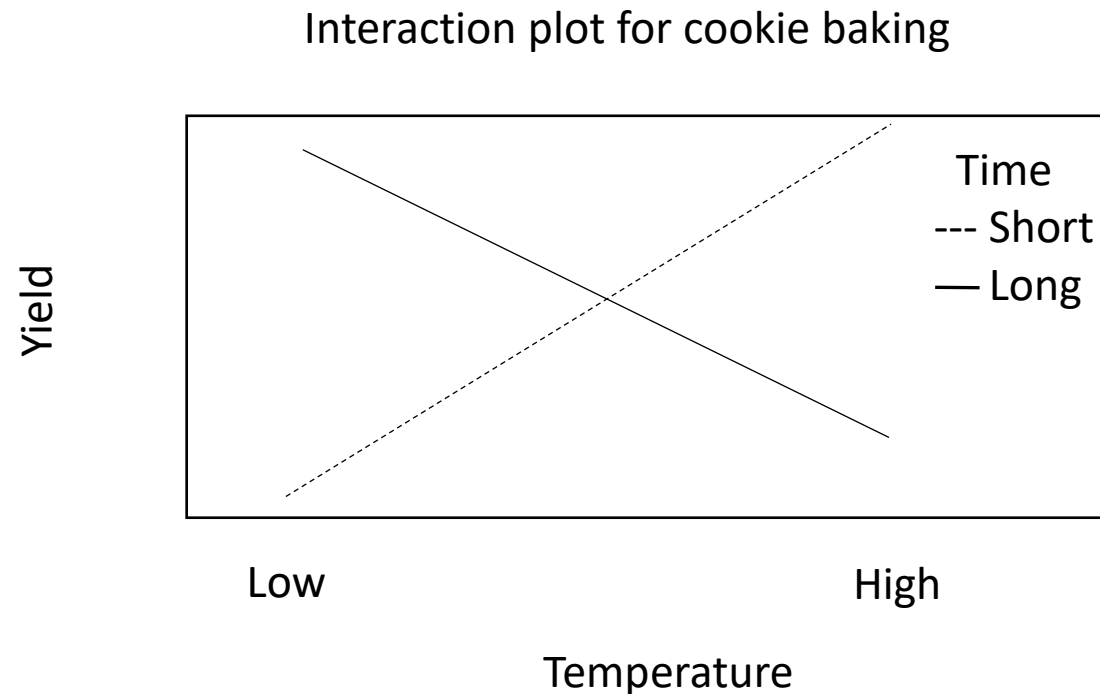
- Thí nghiệm ảnh hưởng của nhiệt độ nướng bánh quy lên sản lượng bánh quy đạt chuẩn ngon. Nhiệt độ có 2 mức Low và High. Thời gian nướng bánh được giữ cố định là 30 phút.

Effect of baking temperature on the yield of good cookies



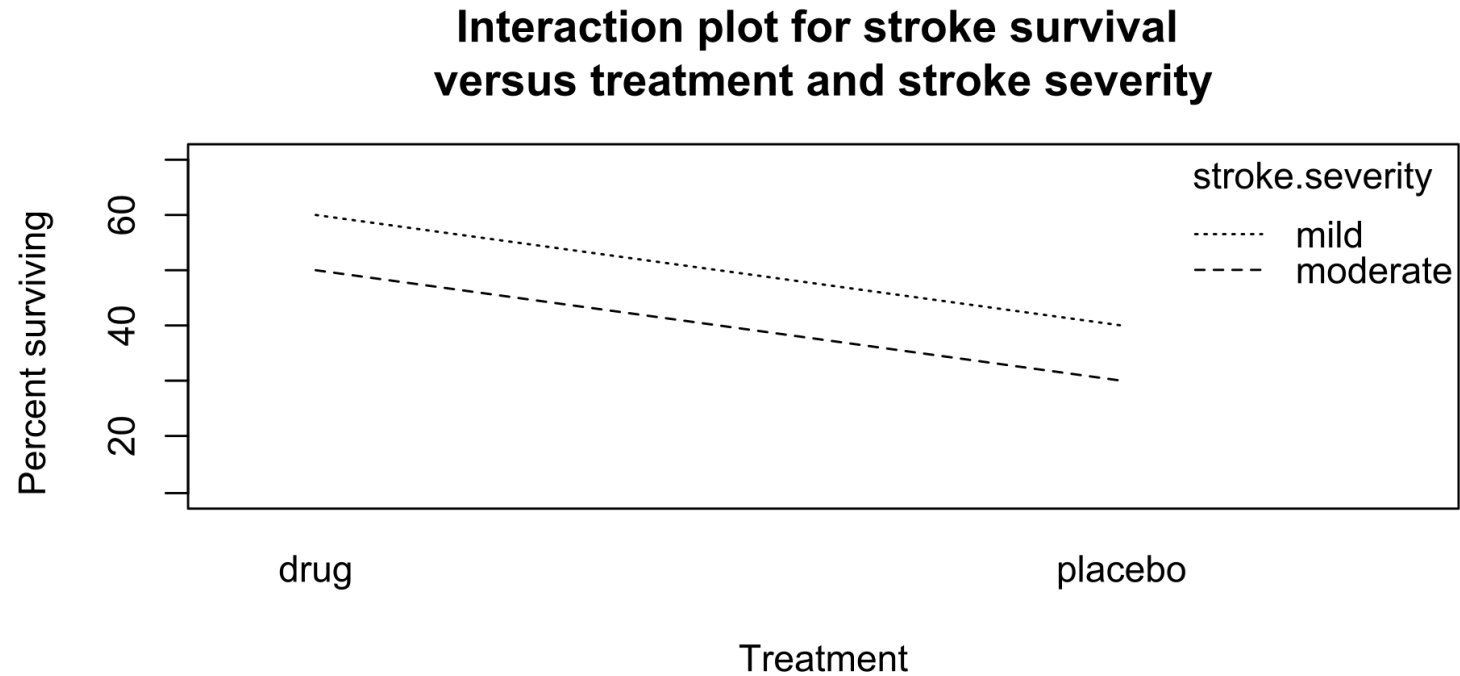
Interaction plot

- Thí nghiệm ảnh hưởng của nhiệt độ và thời gian nướng bánh quy lên sản lượng bánh quy đạt chuẩn ngon. Nhiệt độ có 2 mức Low và High. Thời gian nướng bánh có 2 mức Short và Long.
- Có sự tương tác giữa nhiệt độ và thời gian nướng vì ảnh hưởng của nhiệt độ lên sản lượng phụ thuộc vào thời gian nướng.

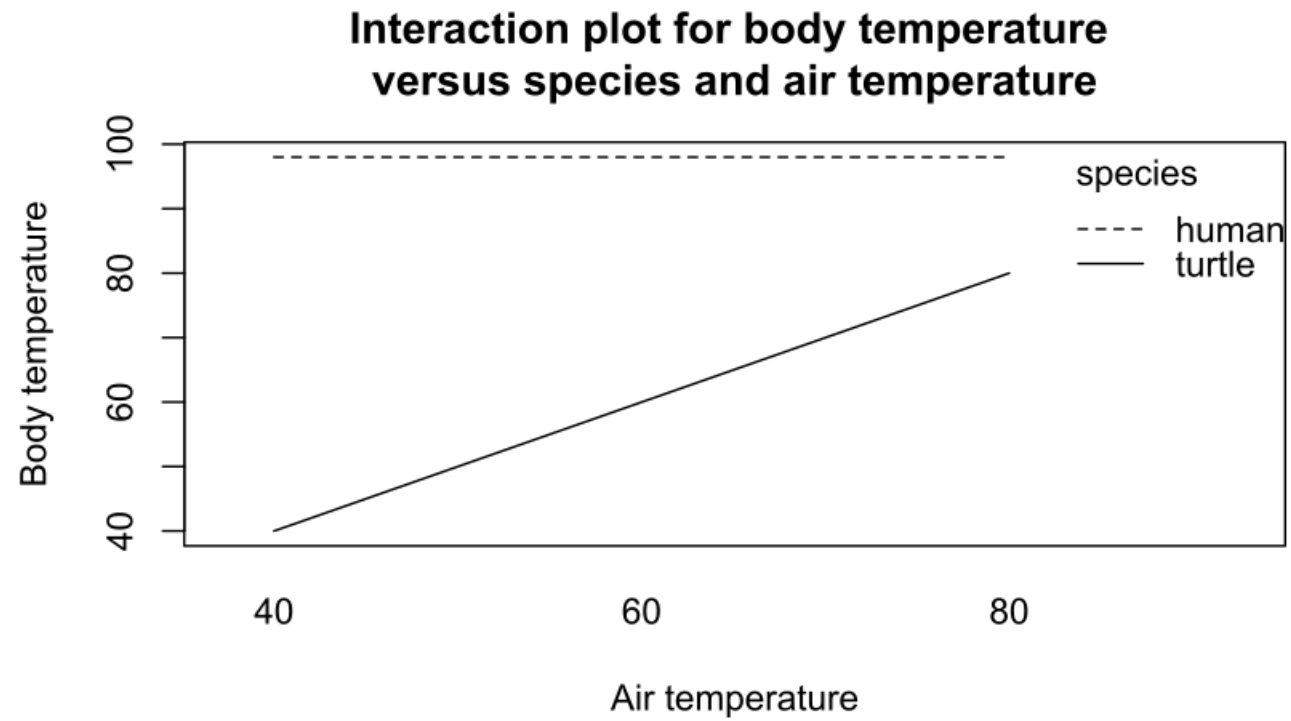


Interaction plot

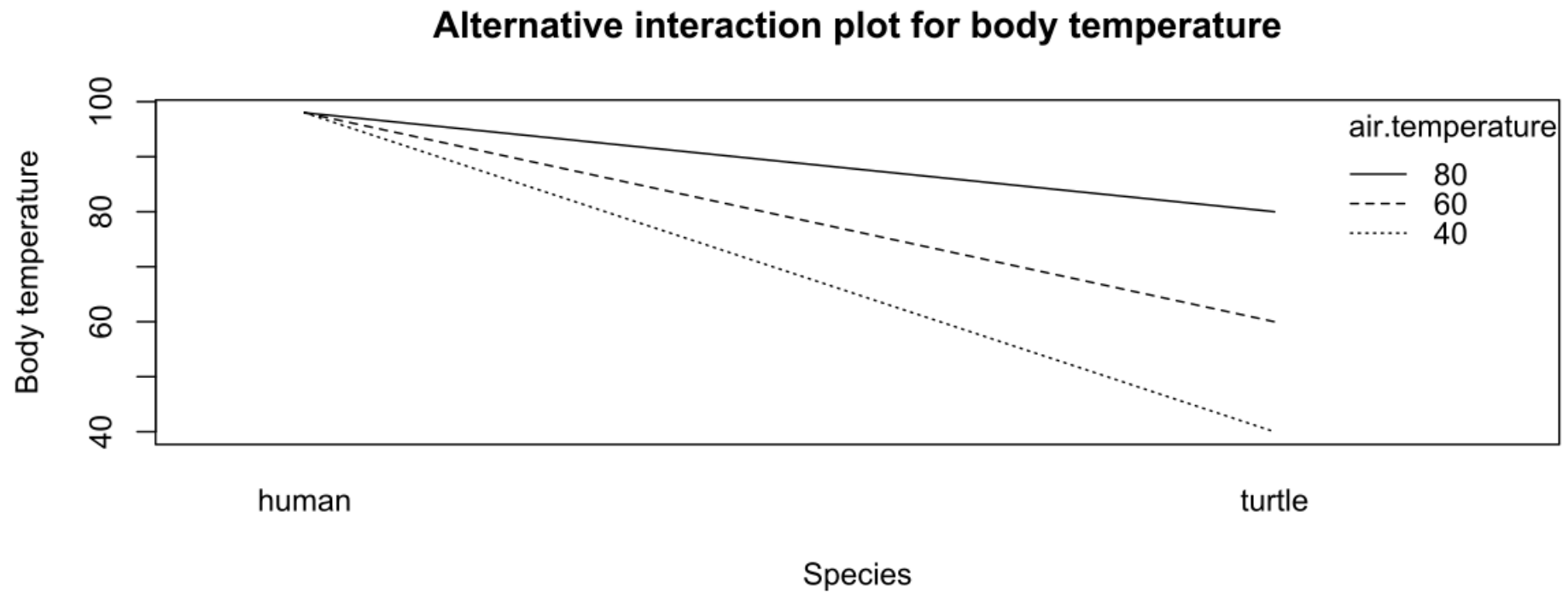
- Ảnh hưởng của thuốc lên tỷ lệ người sống sót sau đột quỵ không bị ảnh hưởng bởi độ nghiêm trọng của cơn đột quỵ (thể hiện qua hai đường song song).
- Suy ra không có tương tác giữa thuốc và độ nghiêm trọng của bệnh.



Interaction plot



Interaction plot



Interaction plot

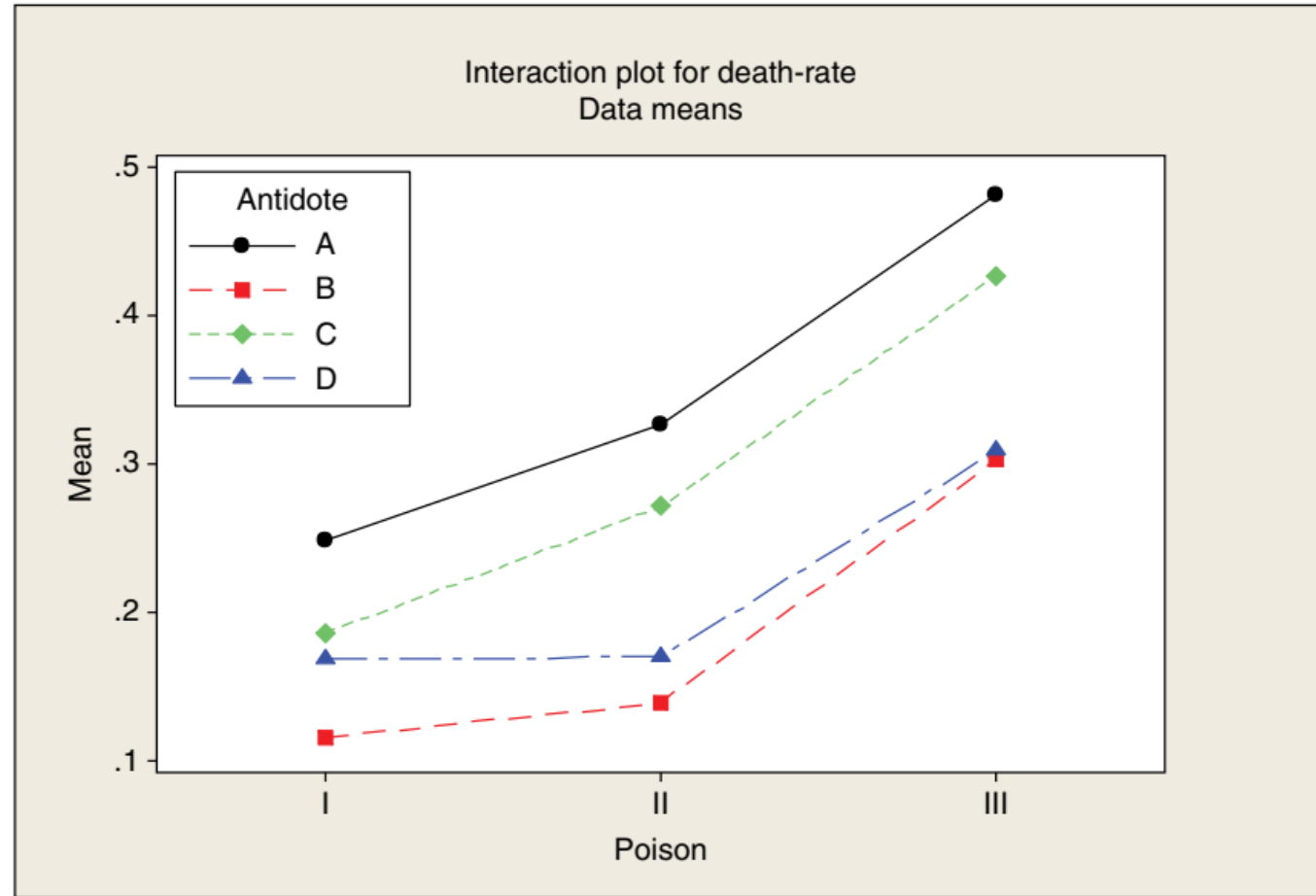


Figure 5.3 Interaction Plot. Average death rate versus poison, by antidote.

Interaction plot

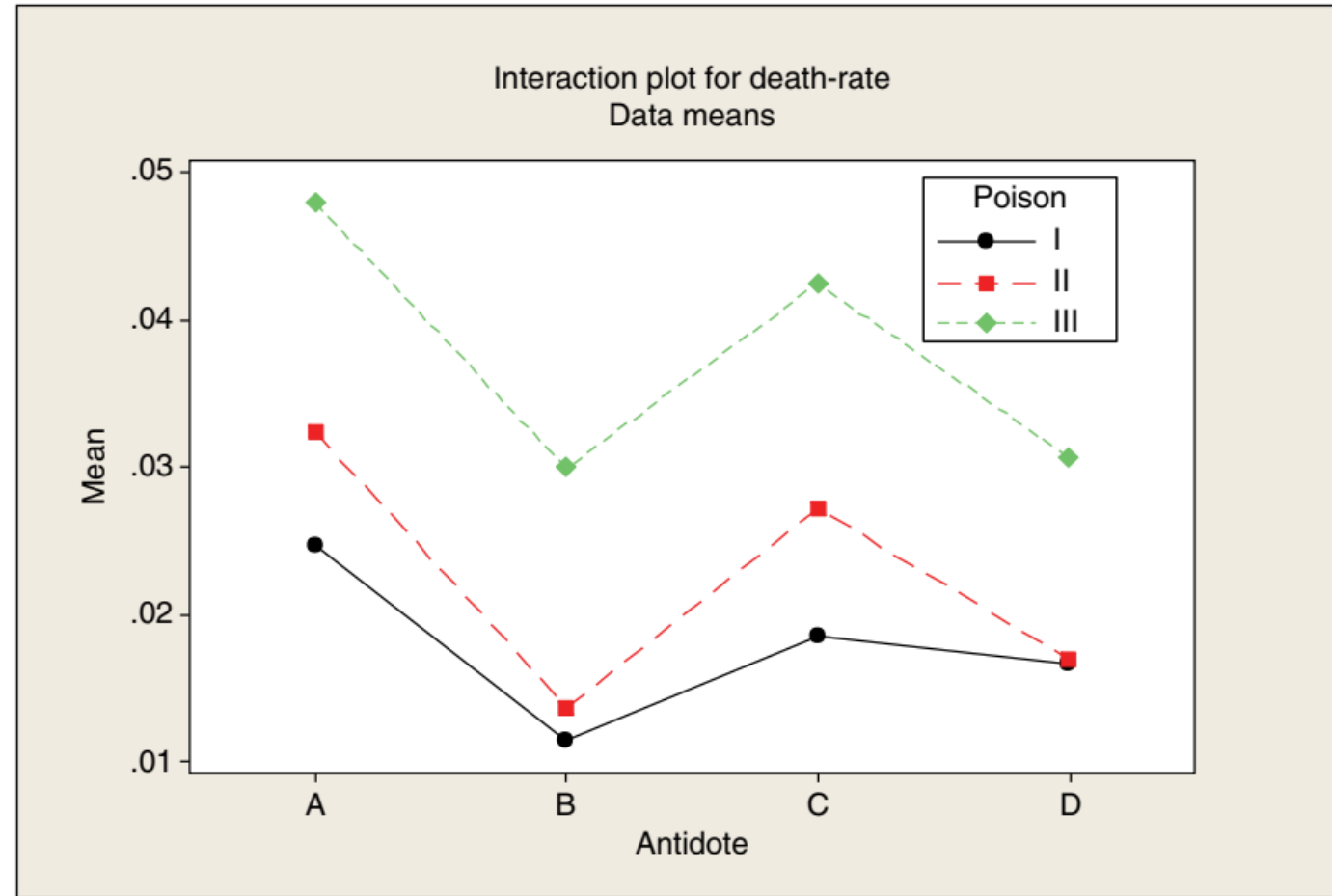


Figure 5.4 Interaction Plot. Average death rate versus antidote, by poison.

Ước lượng của ảnh hưởng (Estimation of effects)

- Effects của 1 yếu tố được định nghĩa là sự khác biệt giữa kết quả trung bình của yếu tố đó và kết quả trung bình toàn bộ dữ liệu

- Effect của yếu tố hàng i : $\alpha_i = \mu_i - \mu$ (ước lượng $a_i = \bar{x}_i - \bar{x}$)
- Effect của yếu tố cột j : $\beta_j = \mu_j - \mu$ (ước lượng $b_j = \bar{x}_j - \bar{x}$)

Poison I effect: $.18 - .26 = -.08$	A effect: $.35 - .26 = .09$
Poison II effect: $.23 - .26 = -.03$	B effect: $.19 - .26 = -.07$
Poison III effect: $.38 - .26 = .12$	C effect: $.29 - .26 = .03$
	D effect: $.22 - .26 = -.04$

- Effect của 1 interaction là effect của 2 yếu tố khi xuất hiện đồng thời:

- Effect của interaction ij : $\delta_{ij} = \mu_{ij} - \alpha_i - \beta_j - \mu = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu$

(ước lượng $d_{ij} = \bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}$)

Poison III - Anditode B effect: $.30 - .19 - .38 + .26 = .0008$

	A	B	C	D	
I	0,32	0,12	0,23	0,22	0,18
	0,22	0,09	0,22	0,14	
	0,22	0,11	0,16	0,15	
	0,23	0,14	0,13	0,16	
II	0,28	0,11	0,23	0,18	0,23
	0,34	0,16	0,29	0,10	
	0,25	0,20	0,32	0,14	
	0,43	0,08	0,25	0,26	
III	0,45	0,33	0,43	0,33	0,38
	0,48	0,27	0,40	0,28	
	0,56	0,26	0,42	0,32	
	0,43	0,34	0,45	0,30	
	0,35	0,19	0,29	0,22	0,26

	A	B	C	D	
I	.25	.12	.19	.17	.18
II	.33	.14	.27	.17	.23
III	.48	.30	.43	.31	.38
	.35	.19	.29	.22	.26

Ước lượng kết quả từ ước lượng các ảnh hưởng

- Kết quả thí nghiệm là tổng của mean chung, các ảnh hưởng và lỗi

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \varepsilon_{ijk} = x_{ijk} - \mu_{ij}$$

- Tương tự, kết quả của treatment ij là tổng các ước lượng:

$$x_{ijk} = \bar{x} + a_i + b_j + d_{ij} + e_{ijk} \quad e_{ijk} = x_{ijk} - \bar{x}_{ij}$$

- Ta có

$$\sum_j \sum_i \varepsilon_{ijk} = \sum_j \sum_i x_{ijk} - \mu_{ij} = 0 \quad \sum_j \sum_i e_{ijk} = \sum_j \sum_i x_{ijk} - \bar{x}_{ij} = 0$$

- Suy ra

$$\bar{x}_{ij} = \bar{x} + a_i + b_j + d_{ij}$$

- Như vậy nếu $d_{ij} = 0$ (không có interaction) thì

$$\mu^{\wedge}_{ij} = \bar{x} + a_i + b_j$$

	A	B	C	D	
I	0,32	0,12	0,23	0,22	0,18
	0,22	0,09	0,22	0,14	
	0,22	0,11	0,16	0,15	
	0,23	0,14	0,13	0,16	
II	0,28	0,11	0,23	0,18	0,23
	0,34	0,16	0,29	0,10	
	0,25	0,20	0,32	0,14	
	0,43	0,08	0,25	0,26	
III	0,45	0,33	0,43	0,33	0,38
	0,48	0,27	0,40	0,28	
	0,56	0,26	0,42	0,32	
	0,43	0,34	0,45	0,30	
	0,35	0,19	0,29	0,22	0,26

Two way ANOVA (kiểm định cho các ảnh hưởng)

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_W$$

	A	B	C	D	
I	0,32	0,12	0,23	0,22	0,18
	0,22	0,09	0,22	0,14	
	0,22	0,11	0,16	0,15	
	0,23	0,14	0,13	0,16	
II	0,28	0,11	0,23	0,18	0,23
	0,34	0,16	0,29	0,10	
	0,25	0,20	0,32	0,14	
	0,43	0,08	0,25	0,26	
III	0,45	0,33	0,43	0,33	0,38
	0,48	0,27	0,40	0,28	
	0,56	0,26	0,42	0,32	
	0,43	0,34	0,45	0,30	
	0,35	0,19	0,29	0,22	0,26

$SS_T = \sum_k \sum_j \sum_i (x_{ijk} - \bar{x})^2$	$df_T = n - 1$	$MS_T = SS_T / df_T$
$SS_A = mc \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$df_A = r - 1$	$MS_A = SS_A / df_A$
$SS_B = mr \sum_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$df_B = c - 1$	$MS_B = SS_B / df_B$
$SS_{AB} = m \sum_j \sum_i (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2$	$df_{AB} = (r - 1)(c - 1)$	$MS_{AB} = SS_{AB} / df_{AB}$
$SS_W = \sum_k \sum_j \sum_i (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$	$df_W = n - rc$	$MS_W = SS_W / df_W$

\bar{x} là trung bình toàn bộ kết quả

\bar{x}_i là trung bình dòng i với $1 \leq i \leq r$

\bar{x}_j là trung bình cột j với $1 \leq j \leq c$

\bar{x}_{ij} là trung bình cell ij

x_{ijk} là tất cả các kết quả trong 1 cell ij (nhận cùng 1 treatment)

Two way ANOVA (kiểm định cho các ảnh hưởng)

$SS_T = \sum_k \sum_j \sum_i (x_{ijk} - \bar{x})^2$	$df_T = n - 1$	$MS_T = SS_T/df_T$
$SS_A = mc \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$df_A = r - 1$	$MS_A = SS_A/df_A$
$SS_B = mr \sum_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$df_B = c - 1$	$MS_B = SS_B/df_B$
$SS_{AB} = m \sum_j \sum_i (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2$	$df_{AB} = (r - 1)(c - 1)$	$MS_{AB} = SS_{AB}/df_{AB}$
$SS_W = \sum_k \sum_j \sum_i (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2$	$df_W = n - rc$	$MS_W = SS_W/df_W$

Test Desired	Null Hypothesis H_0	Equivalent H_0	Statistical Test
Effect of factor A	$\mu_1 = \mu_i$ for all i	$\alpha_i = 0$ for all i	$\frac{MS_A}{MS_W} \sim F(df_A, df_W)$
Effect of factor B	$\mu_1 = \mu_j$ for all j	$\beta_j = 0$ for all j	$\frac{MS_B}{MS_W} \sim F(df_B, df_W)$
Effect of interaction of A and B		$\delta_{ij} = 0$ for all i, j	$\frac{MS_{AB}}{MS_W} \sim F(df_{AB}, df_W)$

- F-test kiểm định 3 giả thuyết không sau:
 - H_0 : mean của các mức của yếu tố 1 đều bằng nhau (tức là các ảnh hưởng α_i đều bằng 0)
 - H_0 : mean của các mức của yếu tố 2 đều bằng nhau (tức là các ảnh hưởng β_j đều bằng 0)
 - H_0 : không có tương tác giữa các nhóm (tức là các ảnh hưởng tương tác δ_{ij} đều bằng 0)

Two way ANOVA

Table 5.3 ANOVA for Death Rate.

Source	DF	SS	MS	F	P
Poison	2	.349	.174	72.6	.000
Antidote	3	.204	.068	28.3	.000
Interaction	6	.016	.0026	1.1	.39
Error	36	.086	.0024		
Total	47	.655			

- Giả thuyết không của F-test:
 - H0: mean các nhóm nhận Poison khác nhau đều bằng nhau
 - H0: mean các nhóm nhận Antidote khác nhau đều bằng nhau
 - H0: không có tương tác giữa Poison và Antidote
- F-value của interaction xấp xỉ 1 chứng tỏ sự biến thiên gây ra bởi interaction không thể phân biệt với biến thiên do lỗi (nhiều). Từ đó có thể kết luận không có interaction giữa poison và antidote.
- F-value của antidote và poison rất lớn (tương ứng p-value của chúng rất nhỏ) chứng tỏ sự biến thiên gây ra bởi hai yếu tố này là quan trọng (tức là có sự khác nhau giữa các antidote và giữa các poison).

Poison I effect: $.18 - .26 = -.08$
Poison II effect: $.23 - .26 = -.03$
Poison III effect: $.38 - .26 = .12$

A effect: $.35 - .26 = .09$
B effect: $.19 - .26 = -.07$
C effect: $.29 - .26 = .03$
D effect: $.22 - .26 = -.04$

Effect	A	B	C	D
I	-.0211	.0123	-.0263	.0350
II	.0102	-.0116	.0120	-.0106
III	.0109	-.0008	.0143	-.0244

So sánh 2 nhóm (antidote B vs antidote D)

	A	B	C	D	
I	0,32	0,12	0,23	0,22	0,18
	0,22	0,09	0,22	0,14	
	0,22	0,11	0,16	0,15	
	0,23	0,14	0,13	0,16	
II	0,28	0,11	0,23	0,18	0,23
	0,34	0,16	0,29	0,10	
	0,25	0,20	0,32	0,14	
	0,43	0,08	0,25	0,26	
III	0,45	0,33	0,43	0,33	0,38
	0,48	0,27	0,40	0,28	
	0,56	0,26	0,42	0,32	
	0,43	0,34	0,45	0,30	
	0,35	0,19	0,29	0,22	0,26

- $\bar{y}_B = 0.19$; $\bar{y}_D = 0.22$
- Để so sánh 2 nhóm, ta dùng t-test cho hiệu số $\text{diff} = \bar{y}_B - \bar{y}_D$

$$t = \frac{\bar{y}_B - \bar{y}_D}{SE(\text{diff})}$$

- Tính SE của diff
- Variance của \bar{y}_B và \bar{y}_D là $\sigma^2/12$ trong đó $\sigma^2 = \text{MSE}$
- Variance của diff là $2\sigma^2/12 = \sigma^2/6$

$$SE(\text{diff}) = \sqrt{\left(\frac{.0024}{6}\right)} = .02. \quad t = \frac{\bar{y}_B - \bar{y}_D}{SE(\text{diff})} = \frac{.19 - .22}{.02} = -1.5.$$

- Bậc tự do của SE là 36 \rightarrow p-value=0.07 (one tail) \rightarrow không có ý nghĩa thống kê

- Khoảng tin cậy 95%

$$(\bar{y}_B - \bar{y}_D) \pm t_{.025}(36) * SE = -.03 \pm 2.03(.02) = (-.07, .01)$$

Ước lượng của giá trị trung bình

- Đặt $\mu_{III,B,direct}^{\wedge}$ là ước lượng của $\mu_{III,B}$ (là kết quả của kết hợp poison III - antidote B) dựa trên $ybar_{III,B}$

$$\mu_{III,B,direct}^{\wedge} = ybar_{III,B} = (0.33+0.27+0.26+0.34)/4 = 0.3$$

- Khoảng tin cậy 95% của $\mu_{III,B}$
 - Variance của $ybar_{III,B}$ là $\sigma^2/n_{III,B}$ với $n_{III,B}=4$ là số replications của treatment (III,B)
 - S là ước lượng của σ . Ta có $S = \sqrt{MSE}$ với 36 bậc tự do
 - Suy ra $C.I_{\mu_{III,B,direct}} = ybar_{III,B} \pm t_{.025}(36) * \sqrt{MSE/4}$
 - $C.I_{\mu_{III,B}} = 0.30 \pm 2.028 * \sqrt{0.0024/4} = 0.30 \pm 0.05 = [0.25 ; 0.35]$

	A	B	C	D	
I	0,32	0,12	0,23	0,22	0,18
	0,22	0,09	0,22	0,14	
	0,22	0,11	0,16	0,15	
	0,23	0,14	0,13	0,16	
II	0,28	0,11	0,23	0,18	0,23
	0,34	0,16	0,29	0,10	
	0,25	0,20	0,32	0,14	
	0,43	0,08	0,25	0,26	
III	0,45	0,33	0,43	0,33	0,38
	0,48	0,27	0,40	0,28	
	0,56	0,26	0,42	0,32	
	0,43	0,34	0,45	0,30	
	0,35	0,19	0,29	0,22	0,26

	A	B	C	D	
I	.25	.12	.19	.17	.18
II	.33	.14	.27	.17	.23
III	.48	.30	.43	.31	.38
	.35	.19	.29	.22	.26

Ước lượng kết quả trung bình

- Đặt $\mu^{\text{III},B}$ là ước lượng của $\mu_{\text{III},B}$ (là kết quả của kết hợp poison III - antidote B) dựa trên toàn bộ dữ liệu

A effect: $.35 - .26 = .09$

B effect: $.19 - .26 = -.07$

C effect: $.29 - .26 = .03$

D effect: $.22 - .26 = -.04$

Poison I effect: $.18 - .26 = -.08$

Poison II effect: $.23 - .26 = -.03$

Poison III effect: $.38 - .26 = .12$

	A	B	C	D	
I	.25	.12	.19	.17	.18
II	.33	.14	.27	.17	.23
III	.48	.30	.43	.31	.38
	.35	.19	.29	.22	.26

- Do không có interaction giữa poison và antidote nên

$$\mu^{\text{III},B} = \bar{y} + \text{Poison III effect} + \text{B effect} = 0.26 + 0.12 - 0.07 = 0.31$$

- Khai triển ra rõ ràng:

$$\mu^{\text{III},B} = (\bar{y}_{\text{III}} - \bar{y}) + (\bar{y}_B - \bar{y}) + \bar{y} = \bar{y}_{\text{III}} - \bar{y} + \bar{y}_B$$

$$= (\bar{y}_{\text{III},A} + \bar{y}_{\text{III},B} + \bar{y}_{\text{III},C} + \bar{y}_{\text{III},D})/4 - \sum \sum y_{I \rightarrow \text{III}, A \rightarrow D} / 12 + (\bar{y}_{\text{I},B} + \bar{y}_{\text{II},B} + \bar{y}_{\text{III},B})/3$$

- $\mu^{\text{III},B}$ là weighted sum của bảng \bar{y}_{ij} (trên) với các hệ số w trong bảng (dưới)

weights in estimated mean death rate

Poison	Antidote			
	A	B	C	D
I	-1/12	1/4	-1/12	-1/12
II	-1/12	1/4	-1/12	-1/12
III	1/6	1/2	1/6	1/6

Khoảng tin cậy (của kết quả trung bình)

	A	B	C	D	
I	.25	.12	.19	.17	.18
II	.33	.14	.27	.17	.23
III	.48	.30	.43	.31	.38
	.35	.19	.29	.22	.26

Poison	Antidote			
	A	B	C	D
I	-1/12	1/4	-1/12	-1/12
II	-1/12	1/4	-1/12	-1/12
III	1/6	1/2	1/6	1/6

- Tất cả các \bar{y}_{ij} đều có cùng variance $\sigma^2/4$
- Variance của $\mu^{\wedge}_{III,B} = \sum w^2 * \sigma^2/4$ (tổng bình phương các weights nhân variance của mỗi \bar{y}_{ij})
- Variance của $\mu^{\wedge}_{III,B} = 1/2 * \sigma^2/4 = \sigma^2/8$ (với ước lượng của σ^2 là MSE)
- $SE(\mu^{\wedge}_{III,B}) = \sqrt{\left(\frac{.0024}{8}\right)} = .017$ với bậc tự do $df=36$ (là bậc tự do của MSE) $\rightarrow t_{.025}(36) = 2.028$
- $C.I_{\mu_{III,B}} = \mu^{\wedge}_{III,B} \pm 2.028 * 0.017 = 0.31 \pm 0.035 = [0.275 ; 0.345]$
- Nếu chỉ dựa trên $\bar{y}_{III,B}$, khoảng tin cậy (thiếu chính xác hơn) là $[0.25 ; 0.35]$

Ví dụ bảng hệ số

- Giả sử không có antidote D, kích thước bảng là 3x3
- $\mu^{\text{III},B} = \bar{y}_{\text{III}} - \bar{y} + \bar{y}_B = (\bar{y}_{\text{III},A} + \bar{y}_{\text{III},B} + \bar{y}_{\text{III},C})/3 + \sum \bar{y}_{I \rightarrow \text{III}, A \rightarrow C} / 9 + (\bar{y}_{\text{I},B} + \bar{y}_{\text{II},B} + \bar{y}_{\text{III},B})/3$
- $\mu^{\text{III},B}$ là weighted sum với bảng hệ số
- Tổng bình phương hệ số là $5/9 = 0.5555556$
- Variance của $\mu^{\text{III},B,\text{direct}} = 5/9 * \sigma^2/n_{\text{III},B}$

-1/9	2/9	-1/9
-1/9	2/9	-1/9
2/9	5/9	2/9

- Giả sử kích thước bảng y_{ij} là 4x4, bảng hệ số là
- Tổng bình phương hệ số là $7/16 = 0.4375$

-1/16	3/16	-1/16	-1/16
-1/16	3/16	-1/16	-1/16
3/16	7/16	3/16	3/16
-1/16	3/16	-1/16	-1/16

Những loại khoảng tin cậy khác

- Khoảng tin cậy 95% của giá trị mean $\mu_{III,B}$ (là **mean** các death rate của các con chuột nhận treatment (III,B))

$$C.I_{\mu_{III,B}} = 0.31 \pm 0.035 = [0.275 ; 0.345]$$

- Lặp thí nghiệm 100 lần thì có khoảng 95 lần thu được **mean** của treatment III,B nằm trong $[0.275 ; 0.345]$
 - Lặp thí nghiệm 100 lần thì có khoảng 97.5 lần thu được **mean** của treatment (III,B) ≥ 0.275
 - Lặp thí nghiệm 100 lần thì có khoảng 97.5 lần thu được **mean** của treatment (III,B) ≤ 0.375
- Câu hỏi

1. Mức giá trị nào sẽ lớn hơn death rate của 97.5% số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai ?

(Thời gian sống ngắn nhất của 97.5% số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai là bao nhiêu?)

2. Ít nhất bao nhiêu phần trăm số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai có death rate thấp hơn 0.4 ?

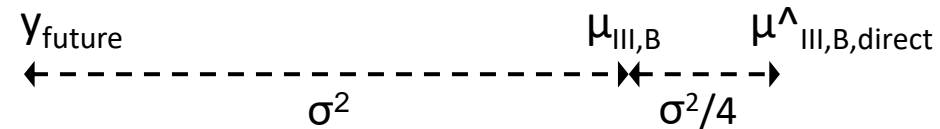
(Ít nhất bao nhiêu phần trăm số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai sẽ sống ít nhất 2.5h)

Khoảng tin cậy của một kết quả quan sát ở tương lai (Confidence interval on a future observation)

- Đặt y_{future} là death rate của một cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai.
- Dựa vào $\mu^{\wedge}_{\text{III,B,direct}} = \bar{y}_{\text{III,B}} = 0.3$, ta có thể đưa ra dự đoán điểm của y_{future} là 0.3
- Sai lệch của dự đoán này là $(y_{\text{future}} - \mu^{\wedge}_{\text{III,B,direct}})$ có biến thiên là tổng của 2 biến thiên:

- Biến thiên của y_{future} : σ^2

- Biến thiên của $\mu^{\wedge}_{\text{III,B,direct}}$: $\sigma^2/4$



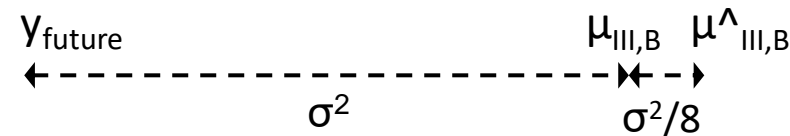
- Variance của sai lệch này là $\sigma^2(1+1/4)$
- $SE(y_{\text{future}} - \mu^{\wedge}_{\text{III,B,direct}}) = \sqrt{MSE * (1 + 1/4)} = \sqrt{0.0024 * 5/4} = 0.0548$
- Khoảng tin cậy 95% của dự đoán y_{future} (còn gọi là khoảng dự đoán - prediction interval):
- C.I. _{y_{future}} : $\mu^{\wedge}_{\text{III,B,direct}} \pm t_{.025}(36) * SE = 0.3 \pm 2.03 * 0.0548 = 0.3 \pm 0.1111 = [0.1889 ; 0.4111]$

Khoảng tin cậy của một kết quả quan sát ở tương lai (Confidence interval on a future observation)

- Dựa vào $\mu^{\wedge}_{III,B} = 0.3$, ta có thể đưa ra dự đoán điểm (**độ chính xác cao hơn**) của y_{future} là 0.31
- Sai lệch của dự đoán này là $(y_{\text{future}} - \mu^{\wedge}_{III,B})$ có biến thiên là tổng của 2 biến thiên:

- Biến thiên của y_{future} : σ^2

- Biến thiên của $\mu^{\wedge}_{III,B}$: $\sigma^2/8$



- Variance của sai lệch này là $\sigma^2(1+1/4)$
- $SE(y_{\text{future}} - \mu^{\wedge}_{III,B,\text{direct}}) = \sqrt{MSE * (1 + 1/8)} = \sqrt{0.0024 * 9/8} = 0.052$
- Khoảng tin cậy 95% của dự đoán y_{future} (còn gọi là khoảng dự đoán - prediction interval):
- C.I. _{y_{future}} : $\mu^{\wedge}_{III,B} \pm t_{.025}(36) * SE = 0.31 \pm 2.03 * 0.052 = 0.31 \pm 0.1054 = [0.2046; 0.4154]$

Khoảng tin cậy của một kết quả quan sát ở tương lai (Confidence interval on a future observation)

- Khoảng tin cậy 95% của dự đoán y_{future} (còn gọi là khoảng dự đoán - prediction interval):
- $C.I_{y_{\text{future}}}$: [0.2046; 0.4154]
- Ý nghĩa:
 - 95% cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai sẽ có death rate nằm trong khoảng [0.2046; 0.4154]
 - 95% cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai sẽ có thời gian sống nằm trong khoảng [2.4074; 4.8872] giờ
 - 97.5% cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai sẽ có death rate cao nhất là 0.4154
 - 97.5% cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai sẽ có thời gian sống ít nhất là 2.4074 giờ

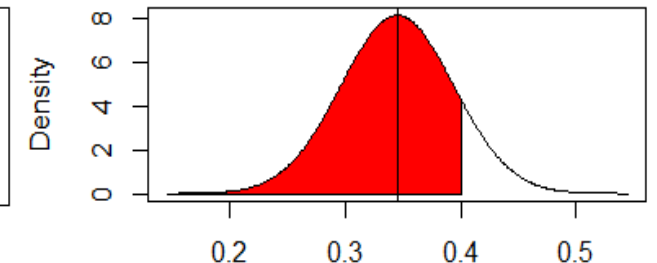
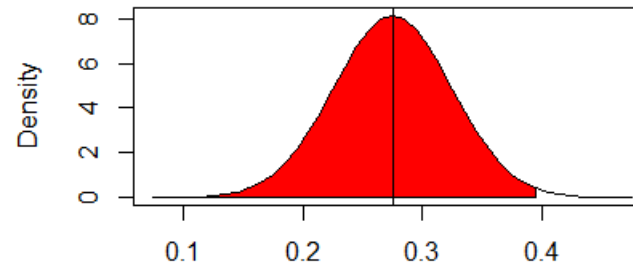
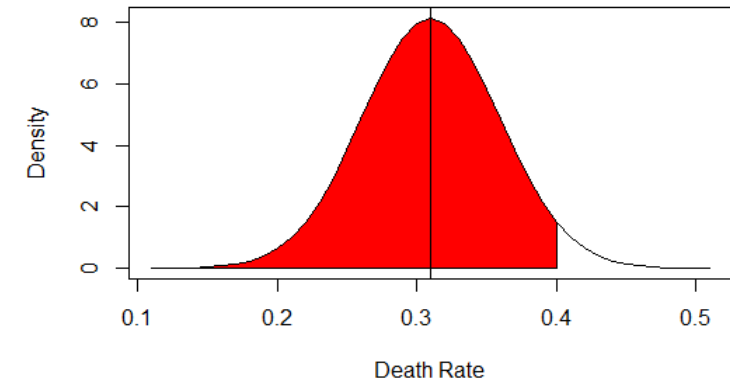
Khoảng tin cậy của tỷ lệ của một phân phối (Confidence interval on percentiles of a distribution)

- Câu hỏi: Ít nhất bao nhiêu % số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai có death rate thấp hơn 0.4?
- Quần thể các death rate của các cá thể chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai có phân phối chuẩn với mean $\mu_{III,B}$ và variance σ^2 . Ước lượng tốt nhất của mean và variance là $\mu_{III,B}^{\wedge} = 0.31$ và $\sigma^{\wedge 2} = \text{MSE} = 0.0024$
- Từ phân phối chuẩn với mean 0.31 và variance 0.0024, tính $P(\text{death rate} < 0.4) = 96.69\%$

`(pnorm(0.4, 0.31, sqrt(0.0024), lower.tail = TRUE) [1] 0.9669037)`

- Khoảng tin cậy 95% của $\mu_{III,B}^{\wedge}$ là $\begin{array}{ccc} 0.275 & 0.31 & 0.345 \\ \leftarrow \text{-----} | \text{-----} \rightarrow \end{array}$
- Tính lại $P(\text{death rate} < 0.4)$ với mean tại 0.275 và 0.345

- tại **0.275**, $P(\text{death rate} < 0.4) = 99.46\%$
- tại **0.345**, $P(\text{death rate} < 0.4) = 86.92\%$



* t-distribution với 36 df xấp xỉ normal distribution

Khoảng tin cậy của tỷ lệ của một phân phối (Confidence interval on percentiles of a distribution)

- Câu hỏi: Ít nhất bao nhiêu % số chuột nhận treatment (III,B) trong tương lai có death rate thấp hơn 0.4?
- Khoảng tin cậy 95% của $\mu_{III,B}$ là [0.275 ; 0.345]
- Tính $P(\text{death rate} < 0.4)$ với mean tại 0.275 và 0.345 được tỷ lệ tương ứng là 99.46% và 86.92%
- **Khoảng tin cậy 95% của tỷ lệ** chuột nhận (III,B) có death rate thấp hơn 0.4 là [86.92% ; 99.46%]
- Ý nghĩa:
 - Với mức tin cậy 95%, sẽ có từ 86.92% đến 99.46% chuột nhận treatment (III,B) có death rate thấp hơn 0.4
 - Với mức tin cậy 97.5%, sẽ có ít nhất 86.92% chuột nhận treatment (III,B) có death rate thấp hơn 0.4
 - Với mức tin cậy 97.5%, sẽ có ít nhất 86.92% chuột nhận treatment (III,B) có thời gian sống ít nhất 2.5h
 - Giả sử khách hàng tuyên bố chỉ mua thuốc giải III nếu có ít nhất 90% chuột nhận (III,B) sống lâu hơn 2.5h. Với kết quả trên, kết luận có mua hay không?

.csv file

	A	B	C	D
1	Poison	Antidote	Death_rate	
2	I	A	0.32	
3	I	A	0.22	
4	I	A	0.22	
5	I	A	0.23	
6	I	B	0.12	
7	I	B	0.09	
8	I	B	0.11	
9	I	B	0.14	
10	I	C	0.23	
11	I	C	0.22	
12	I	C	0.16	
13	I	C	0.13	
14	I	D	0.22	
15	I	D	0.14	
16	I	D	0.15	
17	I	D	0.16	
18	II	A	0.28	
19	II	A	0.34	
20	II	A	0.25	
21	II	A	0.43	
22	II	B	0.11	
23	II	B	0.16	
24	II	B	0.2	
25	II	B	0.08	
26	II	C	0.23	
27	II	C	0.29	
28	II	C	0.32	
29	II	C	0.25	
30	II	D	0.18	
31	II	D	0.1	
32	II	D	0.14	
33	II	D	0.26	
34	III	A	0.45	
35	III	A	0.48	
36	III	A	0.56	
37	III	A	0.43	
38	III	B	0.33	
39	III	B	0.27	
40	III	B	0.26	
41	III	B	0.34	
42	III	C	0.43	
43	III	C	0.4	
44	III	C	0.42	
45	III	C	0.45	
46	III	D	0.33	
47	III	D	0.28	
48	III	D	0.32	
49	III	D	0.3	
50				

Two way ANOVA in R

```
> my_data <- read.csv(file.choose(), head = TRUE, sep = ";")
```

```
> mean(my_data$Death_rate) [1] 0.2610417
```

```
> aggregate(my_data[, 3], list(my_data$Poison), mean)
```

```
Group.1      x
1      I 0.178750
2     II 0.226250
3    III 0.378125
```

```
> aggregate(my_data[, 3], list(my_data$Antidote), mean)
```

```
Group.1      x
1      A 0.3508333
2      B 0.1841667
3      C 0.2941667
4      D 0.2150000
```

```
> av <- aov(Death_rate ~ Poison*Antidote, data = my_data)
```

```
> summary(av)
```

```
              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Poison          2  0.3471   0.17353   75.287 1.37e-13 ***
Antidote         3  0.2063   0.06876   29.832 7.22e-10 ***
Poison:Antidote  6  0.0159   0.00266    1.153   0.353
Residuals       36  0.0830   0.00230
```


Two way ANOVA in R

```
> TukeyHSD(av)
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = Death_rate ~ Poison * Antidote, data = my_data)

$Poison
      diff      lwr      upr    p adj
II-I    0.047500 0.006011152 0.08898885 0.0218133
III-I   0.199375 0.157886152 0.24086385 0.0000000
III-II  0.151875 0.110386152 0.19336385 0.0000000

$Antidote
      diff      lwr      upr    p adj
B-A -0.16666667 -0.21945279 -0.113880547 0.0000000
C-A -0.05666667 -0.10945279 -0.003880547 0.0313874
D-A -0.13583333 -0.18861945 -0.083047213 0.0000002
C-B  0.11000000  0.05721388  0.162786120 0.0000133
D-B  0.03083333 -0.02195279  0.083619453 0.4062787
D-C -0.07916667 -0.13195279 -0.026380547 0.0014714
```

Example 2 (Two qualitative factors with interaction)

- Thí nghiệm ảnh hưởng của giống cây và loại phân bón
- Phân tích

```
> my_data <- read.csv(file.choose(), head = TRUE, sep = ";")
```

```
> mean(my_data$Yield) [1] 157.45
```

```
> aggregate(my_data[,3], list(my_data$Fertilizer), mean)
```

```
Group.1      x
1      A    146.05
2      B    152.10
3      C    174.20
```

```
> aggregate(my_data[,3], list(my_data$Crop), mean)
```

```
Group.1      x
1    Corn    156.2000
2    Rice    159.6667
3    Soy     167.4667
4    wheat    146.4667
```

```
> av <- aov(Yield ~ Fertilizer*Crop, data = my_data)
```

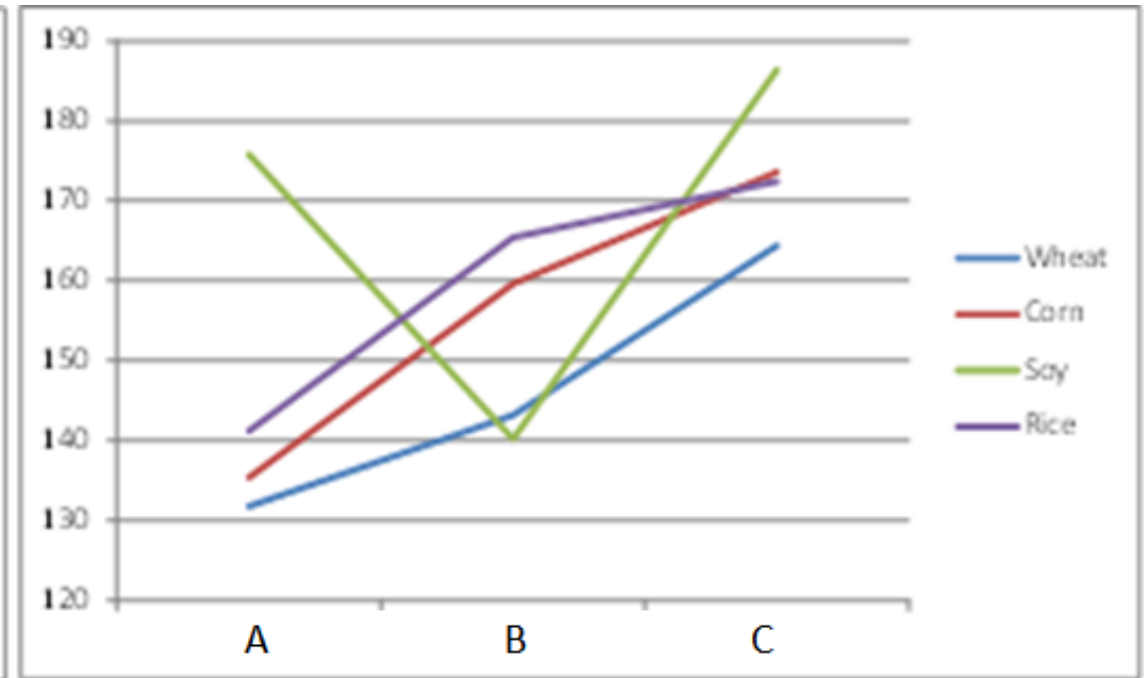
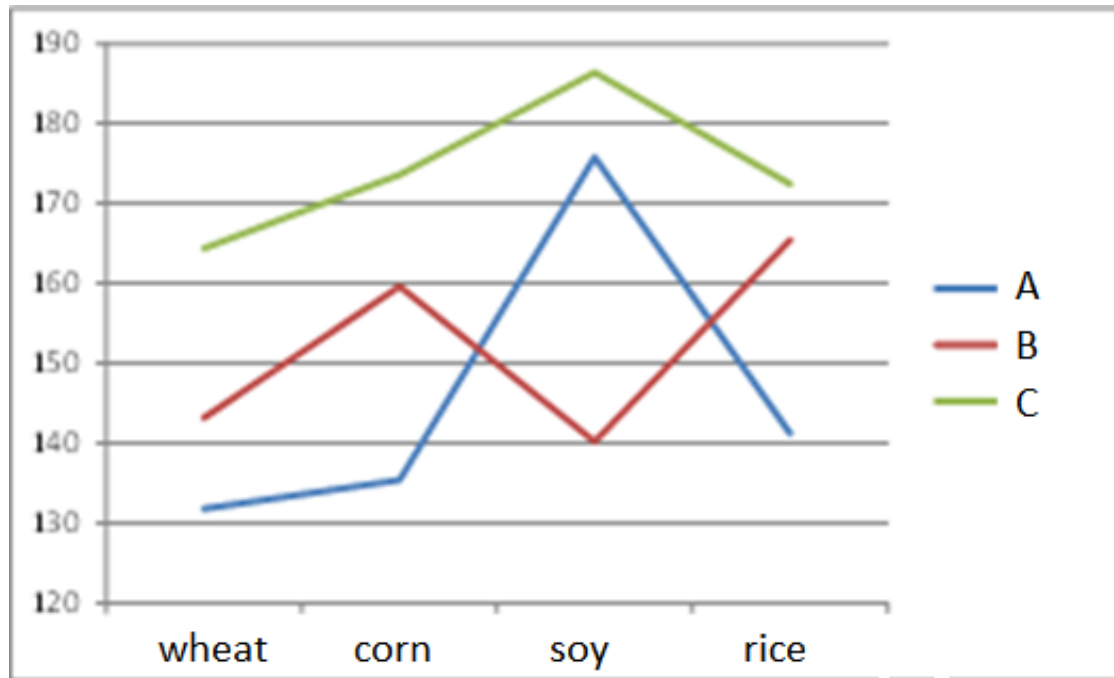
```
> summary(av)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
Fertilizer	2	8783	4391	9.933	0.000245	***
Crop	3	3412	1137	2.572	0.064944	.
Fertilizer:Crop	6	6226	1038	2.347	0.045555	*
Residuals	48	21220	442			

		Crop			
		Wheat	Corn	Soy	Rice
Fertilizer	A	123	128	166	151
		156	150	178	125
		112	174	187	117
		100	116	153	155
		168	109	195	158
	B	135	175	140	167
		130	132	145	183
		176	120	159	142
		120	187	131	167
		155	184	126	168
	C	156	186	185	175
		180	138	206	173
		147	178	188	154
		146	176	165	191
		193	190	188	169

	A	B	C	
1	Fertilizer	Crop	Yield	
2	A	Wheat	123	
3	A	Wheat	156	
4	A	Wheat	112	
5	A	Wheat	100	
6	A	Wheat	168	
7	A	Corn	128	
8	A	Corn	150	
9	A	Corn	174	
10	A	Corn	116	
11	A	Corn	109	
12	A	Soy	166	
13	A	Soy	178	
14	A	Soy	187	
15	A	Soy	153	
16	A	Soy	195	
17	A	Rice	151	
18	A	Rice	125	
19	A	Rice	117	
20	A	Rice	155	
21	A	Rice	158	
22	B	Wheat	135	
23	B	Wheat	130	
24	B	Wheat	176	
25	B	Wheat	120	
26	B	Wheat	155	
27	B	Corn	175	
28	B	Corn	132	
29	B	Corn	120	
30	B	Corn	187	
31	B	Corn	184	
32	B	Soy	140	
33	B	Soy	145	
34	B	Soy	159	
35	B	Soy	131	
36	B	Soy	126	
37	B	Rice	167	
38	B	Rice	183	
39	B	Rice	142	
40	B	Rice	167	
41	B	Rice	168	
42	C	Wheat	156	
43	C	Wheat	180	
44	C	Wheat	147	
45	C	Wheat	146	
46	C	Wheat	193	
47	C	Corn	186	
48	C	Corn	138	
49	C	Corn	178	
50	C	Corn	176	
51	C	Corn	190	
52	C	Soy	185	
53	C	Soy	206	
54	C	Soy	188	
55	C	Soy	165	
56	C	Soy	188	
57	C	Rice	175	
58	C	Rice	173	
59	C	Rice	154	
60	C	Rice	191	
61	C	Rice	169	

Interaction plot



Example 2 (Two qualitative factors with interaction)

- Các giả thuyết của F-test

- H_0 : không có ảnh hưởng của Fertilizer
- H_0 : không có ảnh hưởng của Crop
- H_0 : không có ảnh hưởng của tương tác giữa Fertilizer và Crop

- Kết luận:

- P-value của F-test cho ảnh hưởng của Fertilizer = 0.000245 < 0.05 -> bác bỏ H_0 (tức là kết luận Fertilizer có ảnh hưởng ở mức ý nghĩa 0.05)
- P-value của F-test cho ảnh hưởng của Crop = 0.065 > 0.05 -> không thể bác bỏ H_0 (tức là kết luận Crop không có ảnh hưởng ở mức ý nghĩa 0.05)
- P-value của F-test cho tương tác giữa Fertilizer và Crop = 0.046 < 0.05 -> bác bỏ H_0 (tức là kết luận có tương tác giữa 2 factor này ở mức ý nghĩa 0.05)

```
> av <- aov(Yield ~ Fertilizer*Crop,data = my_data)
> summary(av)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
Fertilizer	2	8783	4391	9.933	0.000245	***
Crop	3	3412	1137	2.572	0.064944	.
Fertilizer:Crop	6	6226	1038	2.347	0.045555	*
Residuals	48	21220	442			

Example 2 (Two qualitative factors with interaction)

- Ước lượng sản lượng trung bình của nhóm nhận treatment (A-Wheat)
- A effect = $146.05 - 157.45 = -11.45$
- Wheat effect = $146.4667 - 157.45 = -10.9833$
- A-Wheat effect = $131.8 - 146.05 - 146.4667 + 157.45 = -3.2667$
- Đặt $\mu^{\wedge}_{A,Wheat}$ là ước lượng của $\mu_{A,Wheat}$
- $\mu^{\wedge}_{A,Wheat} = 157.45 - 11.45 - 10.9833 - 3.2667 = 131.8 = \bar{y}_{A,Wheat}$
- Thực tế, khi $d_{ij} \neq 0$

$$\mu^{\wedge}_{ij} = \bar{x} + a_i + b_j + d_{ij} = \bar{x}_{ij}$$

- Do đó ta không thể tăng độ chính xác của các ước lượng giá trị trung bình như trường hợp không có interaction

```
> mean(my_data$Yield) [1] 157.45
```

```
> aggregate(my_data[,3],list(my_data$Fertilizer),mean)
  Group.1      x
1      A 146.05
2      B 152.10
3      C 174.20
```

```
> aggregate(my_data[,3],list(my_data$Crop),mean)
  Group.1      x
1   Corn 156.2000
2   Rice 159.6667
3   Soy 167.4667
4  wheat 146.4667
```

```
> aggregate(my_data[,3],list(my_data$Fertilizer,my_data$Crop),mean)
  Group.1 Group.2      x
1      A   Corn 135.4
2      B   Corn 159.6
3      C   Corn 173.6
4      A   Rice 141.2
5      B   Rice 165.4
6      C   Rice 172.4
7      A    Soy 175.8
8      B    Soy 140.2
9      C    Soy 186.4
10     A  wheat 131.8
11     B  wheat 143.2
12     C  wheat 164.4
```

Example 3 (Two quantitative factors): Ethanol blends and CO emissions

- Thí nghiệm ảnh hưởng của 2 yếu tố đến lượng khí thải CO
 - Ethanol concentration (x_1) : 0.1, 0.2, 0.3
 - Air-fuel ratio (x_2): 14, 15, 16
- Ethanol concentration là nồng độ ethanol trong hỗn hợp nhiên liệu ethanol-gasoline.
 - E5 tương ứng với $x_1 = 0.05$ (5%)
 - E10 tương ứng với $x_1 = 0.1$ (10%)
- Air-fuel ratio là tỷ lệ giữa không khí và nhiên liệu trong buồng đốt của động cơ

CO emissions		Air-fuel ratio		
		14	15	16
Ethanol concentration	0.1	61.8	67.4	66.2
		65.8	72	68.4
	0.2	78.5	80	65.5
		80.5	81.6	69.5
	0.3	89.9	74.6	58
		93.7	78	60

Example 3 (Two quantitative factors): Ethanol blends and CO emissions

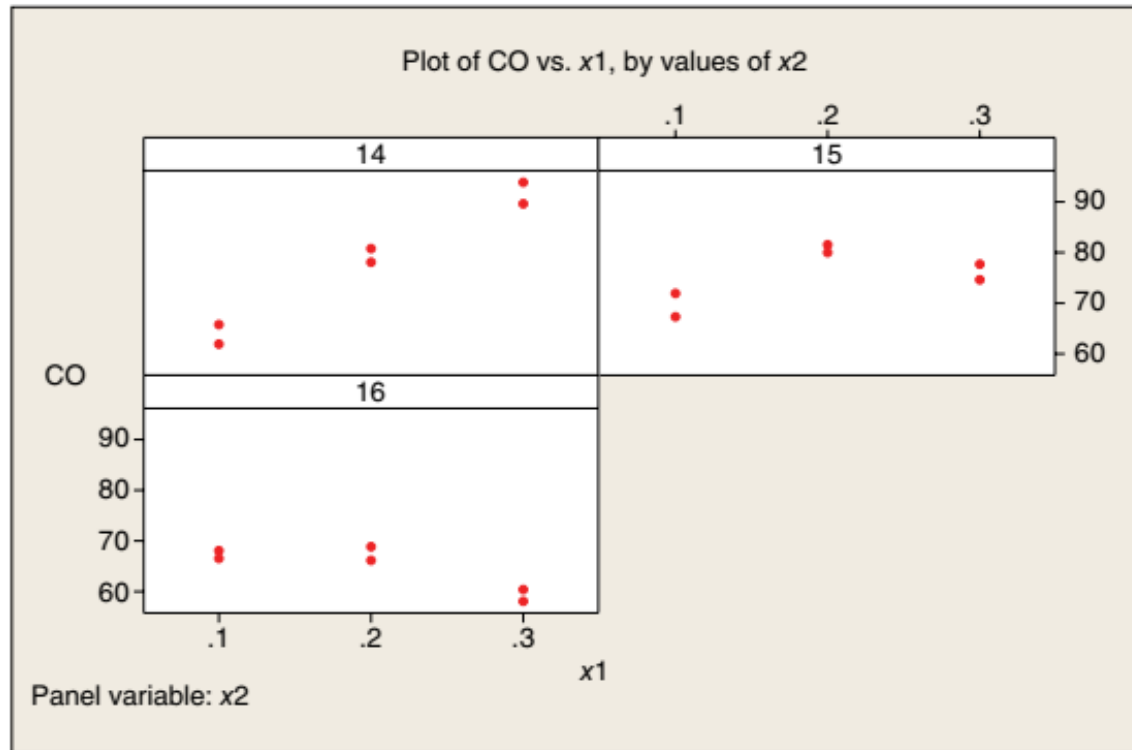


Figure 5.7 Plots of CO versus x_1 , by Values of x_2 .

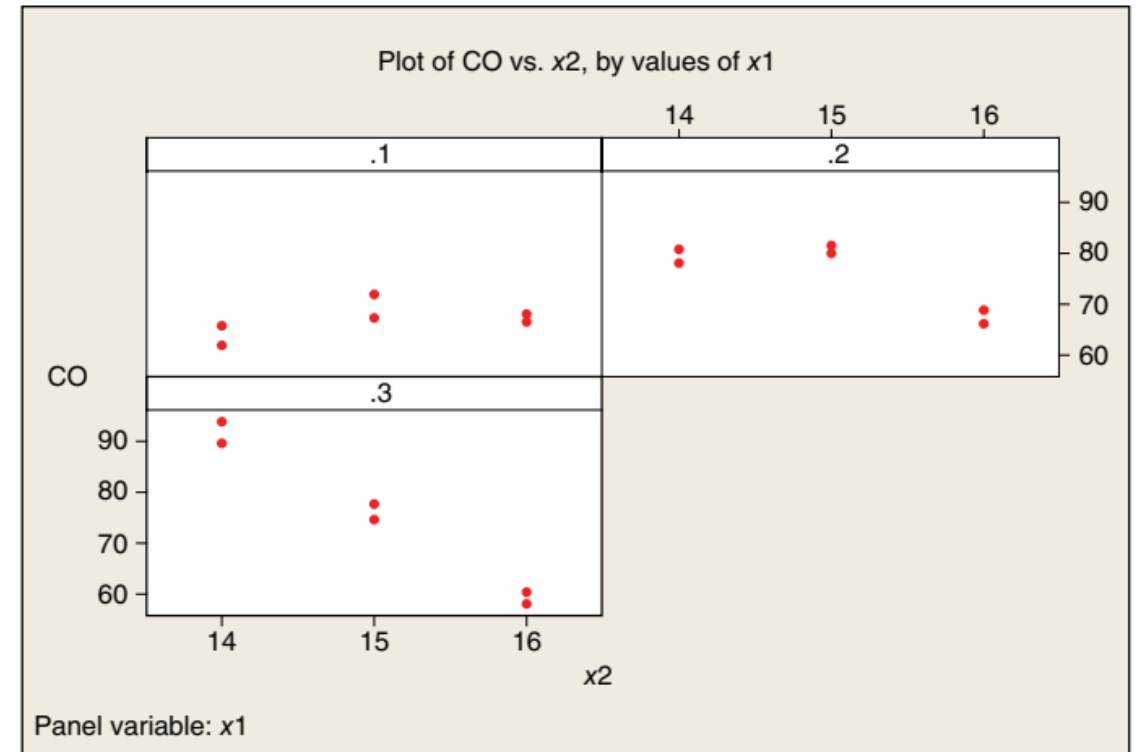


Figure 5.8 Plots of CO versus x_2 , by Values of x_1 .

Interaction plot

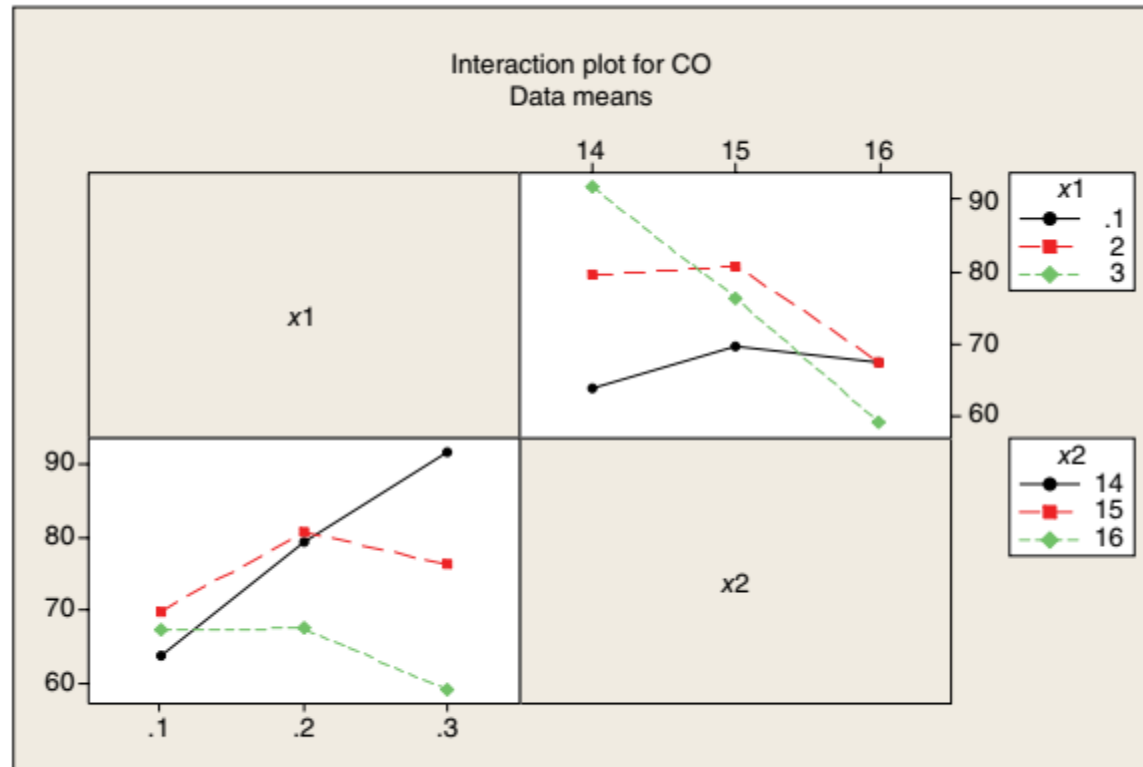


Figure 5.9 Interaction Plots for Ethanol Experiment.

Không nên dùng Interaction plot cho 2 hoặc nhiều hơn biến định lượng vì biểu đồ này thường không giúp ích để nhìn ra sự tương tác giữa các biến

Contour plot

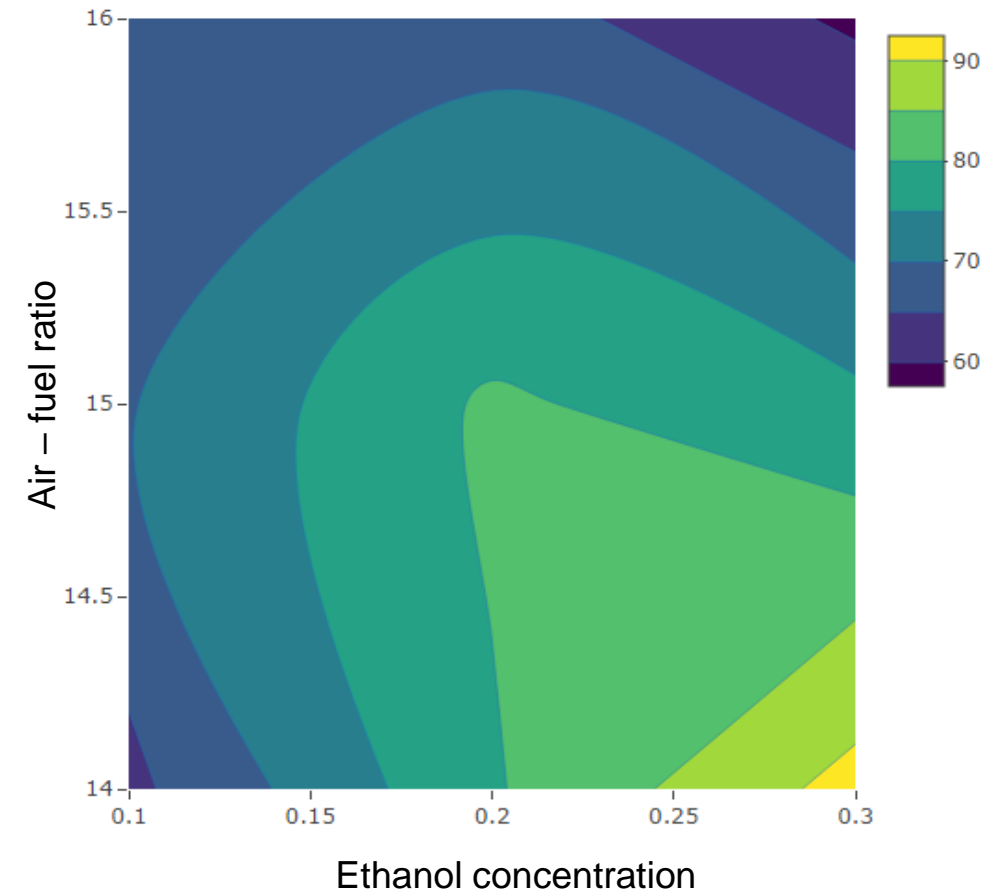
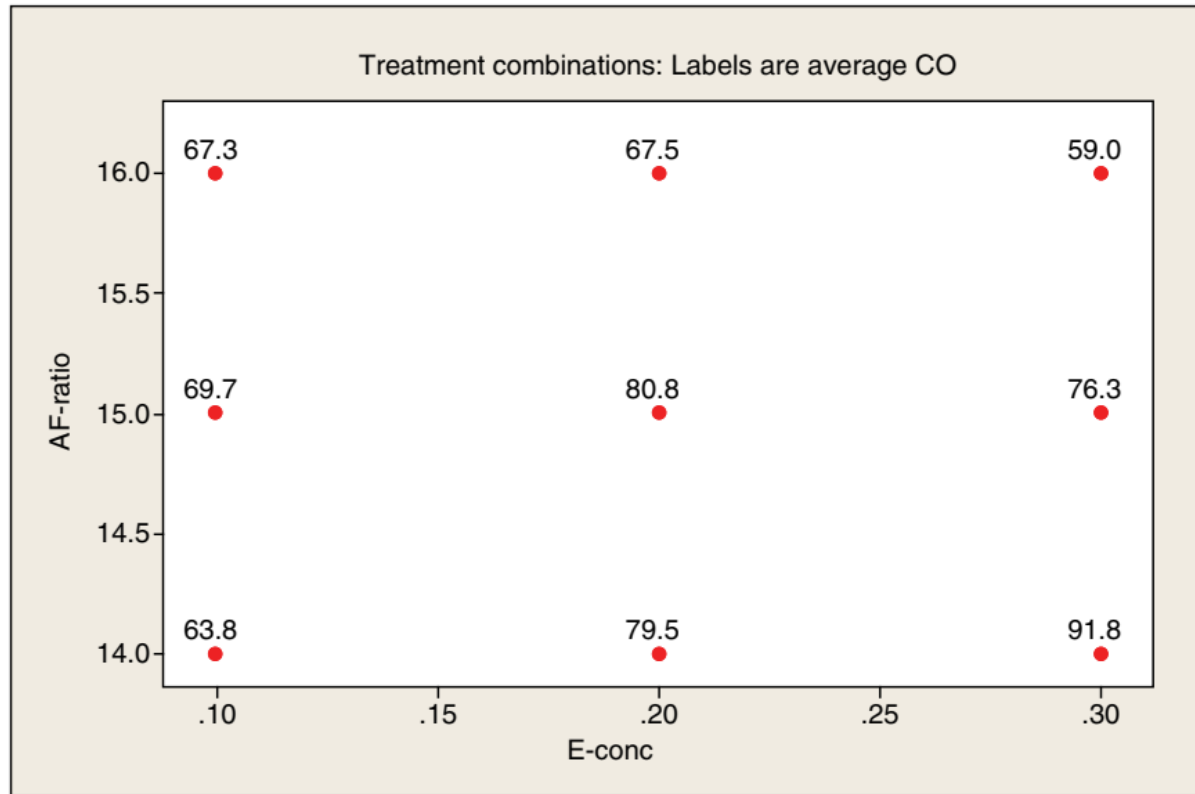


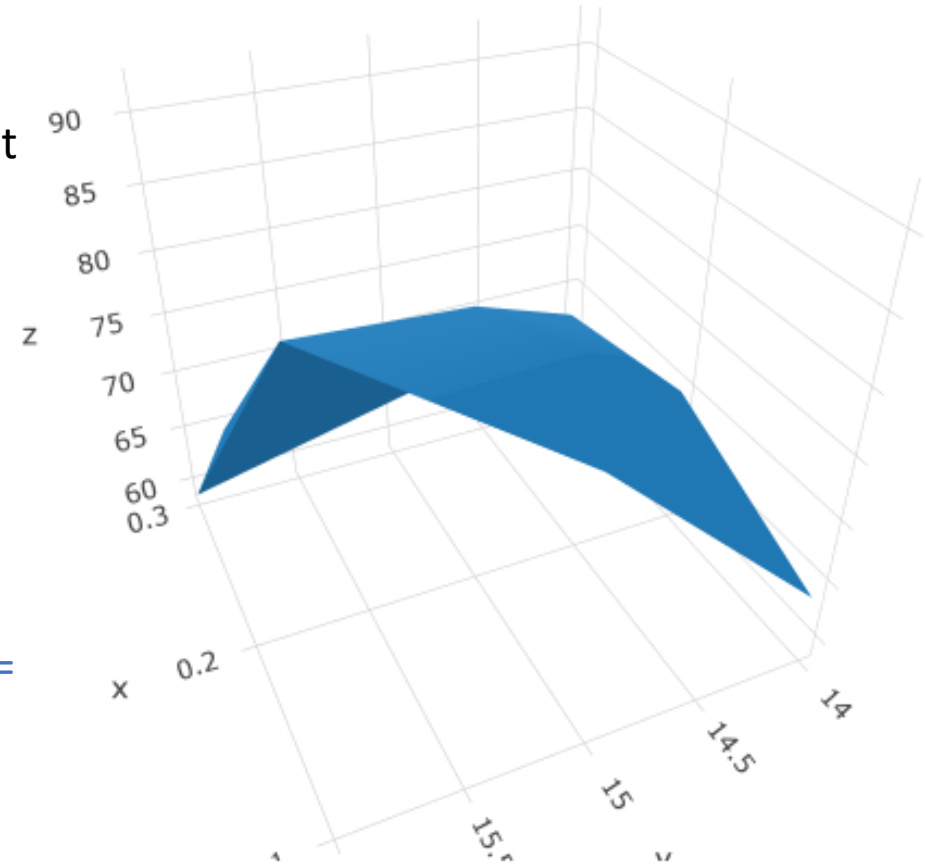
Figure 5.10 Average CO Emissions by x1, x2 Combinations.

```
plot_ly( x = c(0.1,0.2,0.3), y = c(14,15,16), z = matrix(c(63.8,69.7,67.3,79.5,80.8,67.5,91.8,76.3,59.0), nrow = 3, ncol = 3), type = "contour" )
```

Mesh plot

Mesh plot cho thấy mối quan hệ giữa CO và x1,x2 là một mặt cong

```
library(plotly)
xx = seq(0.1,0.3,0.1)
yy = seq(14,16,1)
zz = c(63.8,69.7,67.3,79.5,80.8,67.5,91.8,76.3,59.0)
plot_ly(x = rep(xx,length(yy)), y = rep(yy,each=length(xx)), z =
zz, type = 'mesh3d')
```



Regression analysis and ANOVA

- Phương trình tuyến tính 2 biến $CO = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ sẽ có dạng mặt phẳng (và các đường contour sẽ song song) nên chắc chắn sẽ không mô tả được ảnh hưởng của các yếu tố
- Một mô hình có dạng mặt cong (và các đường contour cong) là hàm bậc 2: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2$.
- Dùng phương pháp Least Square, các hệ số trên và p-value tương ứng có thể được xác định

The regression equation is				
$CO = -1046 + 1586 x_1 + 135 x_2 - 457 x_1\text{-sq} - 4.13 x_2\text{-sq} - 90.6 x_1x_2$				
$S = 2.53; DF = 12$				
Predictor	Coef	SE coef	T	P (2-tail)
Constant	-1046	284.8	-3.67	.003
x1	1586	143.3	11.07	.000
x2	135	37.9	3.56	.004
x1-sq	-457	126.3	-3.62	.003
x2-sq	-4.13	1.26	-3.27	.007
x1x2	-90.6	8.93	-10.15	.000

- $S = 2.53 = \sqrt{MSE}$ là độ lệch chuẩn của phần dư (Residual) $CO - CO^{\wedge}$ (tức là sai số giữa thực tế và ước lượng bởi mô hình hồi q
- P-value của các hệ số đều thấp chứng tỏ các hệ số này đều có ý nghĩa

ANOVA và lack of fit test cho mô hình hồi quy

Table 5.6 ANOVA for CO Quadratic Model.

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	5	1604.7	320.9	50.3	.000
Residual error	12	76.5	6.38		
Lack of fit	3	31.7	10.58	2.13	.17
Pure error	9	44.8	4.98		
Total	17	1681.2			

- Do mô hình hồi quy có 6 hệ số (kể cả Intercept) nên $DF=5$
- Residual error là phần sai lệch giữa kết quả hồi quy và kết quả thực tế. Do tổng số mẫu là 18 nên DF của Residual error là $18-1-5 = 12$. Variance của residual error là $MSE = 6.38$
- Pure error là sai lệch ngẫu nhiên bên trong mỗi nhóm nhận cùng treatment (x_1, x_2). DF của pure error = $n-k = 18 - 9 = 9$ (n là tổng số mẫu = 18 và k là số nhóm, tức là số treatment (x_1, x_2) = 9)
- Ta có $SS_{Lack\ of\ fit} = SS_{Residual\ error} - SS_{Pure\ error}$ và $DF_{Lack\ of\ fit} = DF_{Residual\ error} - DF_{Pure\ error}$
- H_0 : mô hình phù hợp (there is no lack of fit)
- Kết quả p-value của lack of fit = $0.17 > 0.05$ nên không thể bác bỏ H_0 (tức là kết luận mô hình phù hợp)

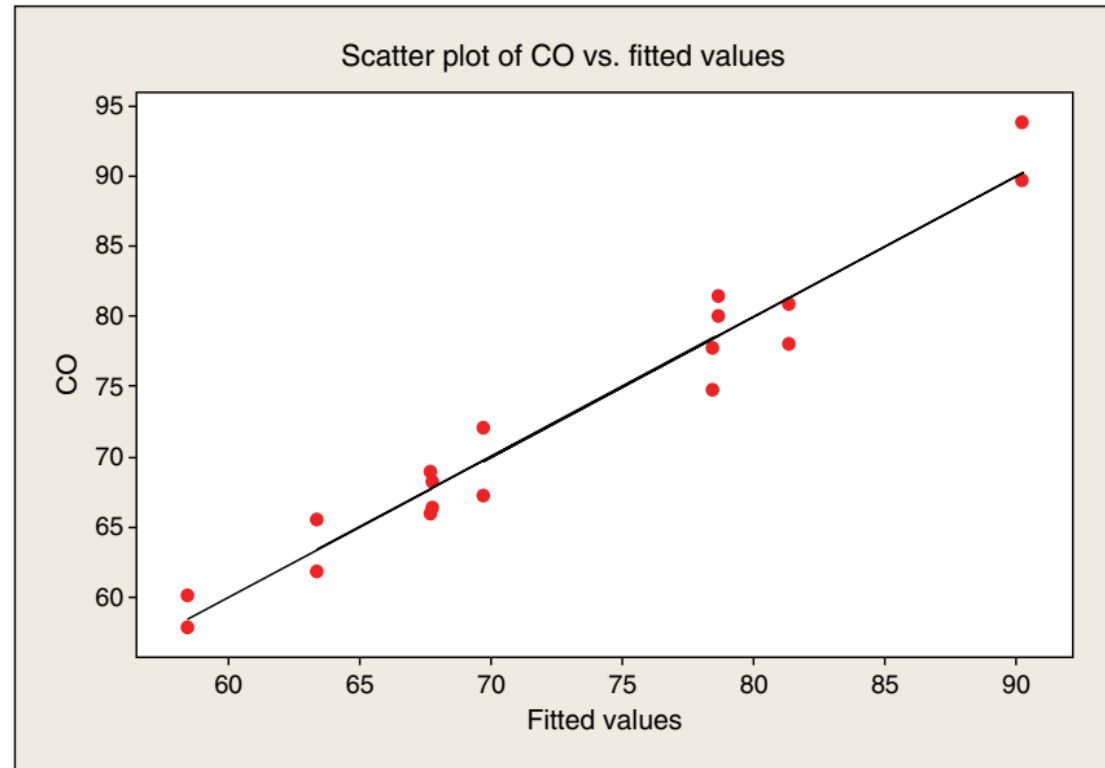


Figure 5.12 Scatter Plot of Observed CO Values versus Fitted Values.

- Nếu mô hình chính xác tuyệt đối ($CO = \text{Fitted values}$) thì các chấm đỏ sẽ nằm trên đường thẳng 45 độ ($y=x$)
- Nếu mô hình không phù hợp thì các chấm đỏ sẽ lệch khỏi đường thẳng 1 cách hệ thống
- Ở đây các chấm đỏ lệch một cách ngẫu nhiên quanh đường thẳng cũng chứng tỏ mô hình phù hợp

```
> my_data <- read.csv(file.choose(),head = TRUE , sep = ";")
```

```
>
> my_data
```

```
  x2 x1  CO
1  14 0.1 61.8
2  14 0.1 65.8
3  14 0.2 78.5
4  14 0.2 80.5
5  14 0.3 89.9
6  14 0.3 93.7
7  15 0.1 67.4
8  15 0.1 72.0
9  15 0.2 80.0
10 15 0.2 81.6
11 15 0.3 74.6
12 15 0.3 78.0
13 16 0.1 66.2
14 16 0.1 68.4
15 16 0.2 65.5
16 16 0.2 69.5
17 16 0.3 58.0
18 16 0.3 60.0
```

```
> pureErrorAnova(secondOrderRelation)
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: my_data$CO
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
my_data\$x1	1	230.56	230.56	43.8890	9.648e-05	***
my_data\$x2	1	568.56	568.56	108.2291	2.572e-06	***
I(my_data\$x1^2)	1	85.25	85.25	16.2286	0.002980	**
I(my_data\$x2^2)	1	67.79	67.79	12.9038	0.005819	**
I(my_data\$x1 * my_data\$x2)	1	658.84	658.84	125.4147	1.384e-06	***
Residuals	12	79.27	6.61			
Lack of fit	3	31.99	10.66	2.0299	0.180256	
Pure Error	9	47.28	5.25			

```
---
signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> secondOrderRelation <- lm(formula = my_data$CO ~ my_data$x1 + my_data$x2
+ I(my_data$x1^2) + I(my_data$x2^2) + I(my_data$x1*my_data$x2))
> summary(secondOrderRelation)
```

```
Call:
```

```
lm(formula = my_data$CO ~ my_data$x1 + my_data$x2 + I(my_data$x1^2) +
    I(my_data$x2^2) + I(my_data$x1 * my_data$x2))
```

```
Residuals:
```

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.8444 -1.5653 -0.3778  1.7743  3.4139
```

```
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	-1043.806	289.826	-3.601	0.00364	**
my_data\$x1	1589.750	145.864	10.899	1.40e-07	***
my_data\$x2	134.767	38.603	3.491	0.00445	**
I(my_data\$x1^2)	-461.667	128.510	-3.592	0.00370	**
I(my_data\$x2^2)	-4.117	1.285	-3.203	0.00758	**
I(my_data\$x1 * my_data\$x2)	-90.750	9.087	-9.987	3.63e-07	***

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

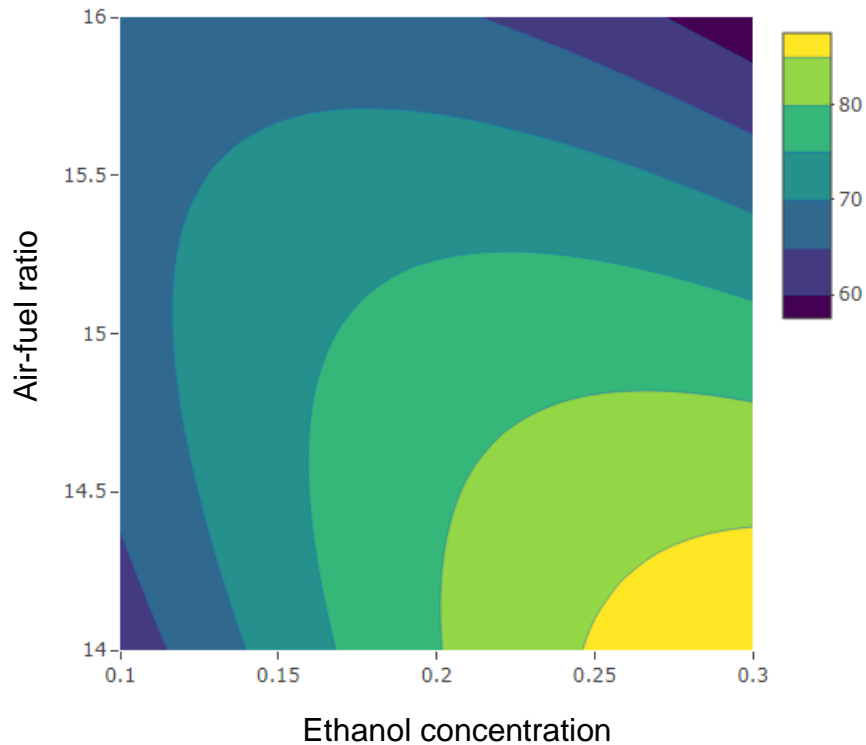
```
Residual standard error: 2.57 on 12 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.9531,    Adjusted R-squared:  0.9336
```

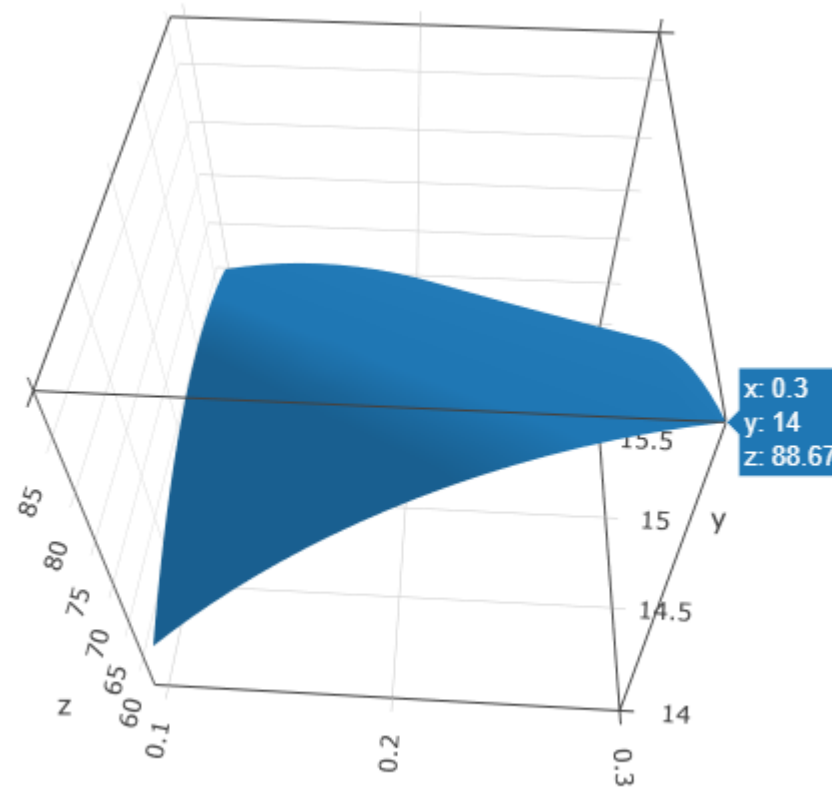
```
F-statistic: 48.78 on 5 and 12 DF,  p-value: 1.467e-07
```

Contour plot và mesh plot dùng giá trị từ mô hình hồi quy

```
CO <- function(x,y){-1046+1586*x+135*y-457*x^2-4.13*y^2-90.6*x*y}
xx = seq(0.1,0.3,0.01)
yy = seq(14,16,0.1)
zz <- outer(xx,yy, CO)
plot_ly( x = xx, y = yy, z=t(zz), type = "contour" )
```



```
plot_ly(x = rep(xx,length(yy)), y = rep(yy,each=length(xx)), z = as.vector(zz), type = 'mesh3d')
```



Thử mô hình tuyến tính

```
> linearRelation <- lm(formula = my_data$CO ~ my_data$x1 + my_data$x2)
> summary(linearRelation)
```

Call:

```
lm(formula = my_data$CO ~ my_data$x1 + my_data$x2)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-13.5556	-2.2889	0.7611	5.4861	9.5778

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	167.339	33.720	4.963	0.00017 ***
my_data\$x1	43.833	22.251	1.970	0.06759 .
my_data\$x2	-6.883	2.225	-3.094	0.00741 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7.708 on 15 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4728, Adjusted R-squared: 0.4025

F-statistic: 6.725 on 2 and 15 DF, p-value: 0.008222

```
> library(alr3)
```

Loading required package: car

Loading required package: carData

```
> pureErrorAnova(linearRelation)
```

Analysis of Variance Table

Response: my_data\$CO

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
my_data\$x1	1	230.56	230.56	43.889	9.648e-05 ***
my_data\$x2	1	568.56	568.56	108.229	2.572e-06 ***
Residuals	15	891.16	59.41		
Lack of fit	6	843.88	140.65	26.773	2.985e-05 ***
Pure Error	9	47.28	5.25		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

H0 của lack of fit test: mô hình phù hợp

P-value cho lack of fit < 0.05 -> bác bỏ H0 (tức là kết luận mô hình không phù hợp)

Special Case: Two-Level Factorial Experiments

- Mỗi yếu tố chỉ gồm 2 mức
- Do mỗi yếu tố chỉ có 2 mức, các yếu tố định tính có thể phân tích như yếu tố định lượng (dùng regression)
- Ví dụ 4: thí nghiệm tìm yếu tố ảnh hưởng đến tỷ lệ sản phẩm gốm bị vỡ. Có 4 yếu tố được thí nghiệm gồm

Cooling rate (R): slow and fast

Temperature (T): 2000 and 2060°F

Clay coefficient of expansion (C): low and high

Conveyor belt carrier (D): metal and rubberized



- Có $2^4 = 16$ (combination) treatments
- Mỗi treatment được thử với 1 mẻ gồm 100 bình gốm và tỷ lệ % bình vỡ được thu thập
- Như vậy mỗi treatment chỉ có 1 experiment unit. Tuy nhiên phân tích lý thuyết cho thấy sẽ không có các interaction giữa 3 hoặc 4 yếu tố nên có thể chấp nhận việc 1 experiment unit cho mỗi treatment.

Table 5.9 Pot Production Experimental Results.

<i>StdOrder</i>	R	T	C	D	<i>%Cracked</i>
1	-1	-1	-1	-1	14
2	1	-1	-1	-1	16
3	-1	1	-1	-1	8
4	1	1	-1	-1	22
5	-1	-1	1	-1	19
6	1	-1	1	-1	37
7	-1	1	1	-1	20
8	1	1	1	-1	38
9	-1	-1	-1	1	1
10	1	-1	-1	1	8
11	-1	1	-1	1	4
12	1	1	-1	1	10
13	-1	-1	1	1	12
14	1	-1	1	1	30
15	-1	1	1	1	13
16	1	1	1	1	30

Source: Reproduced with the permission of Stanford University Press, reproduced Table 4.7, p. 80, *Testing 1-2-3*, by Ledolter and Swersev (2007).

Do mỗi yếu tố chỉ có 2 mức nên các yếu tố (định tính hay định lượng) đều có thể được phân tích như kiểu định lượng để tìm hệ số regression

Regression analysis

Table 5.10 Main Effect and Two-Factor Interaction Variables in Regression Analysis.

R	T	C	D	RT	RC	RD	TC	TD	CD	%Cracked
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	14
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	16
-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	8
1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	22
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	19
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	37
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	20
1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	38
-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	8
-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	4
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	10
-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	12
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	30
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	30

Ở đây ta giả sử không có interaction giữa 3 hay 4 yếu tố nên ta chỉ phân tích interaction giữa 2 yếu tố

Regression analysis

- Phân tích cho thấy
- Nhiệt độ (T) không có ảnh hưởng
- Trong các interaction thì chỉ có interaction RC giữa tốc độ làm nguội (R) và tốc độ giãn nở của đất sét (C) là có ý nghĩa
- Trong các yếu tố chính thì C có ảnh hưởng lớn nhất, R có ảnh hưởng lớn thứ 2, và D (chất liệu của dụng cụ gắp) cũng có ảnh hưởng (thứ 3)

Table 5.11 Fitted Coefficients for a Full Four-Factor Model.

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	17.625	.64	27.6	.000
R	6.250	.64	9.8	.000
T	.500	.64	.78	.47
C	7.250	.64	11.3	.000
D	-4.125	.64	-6.5	.001
RT	.625	.64	.98	.37
RC	2.625	.64	4.1	.009
RD	-.250	.64	-.39	.71
TC	-.125	.64	-.20	.85
TD	.250	.64	.39	.71
CD	.500	.64	.78	.47

Regression analysis vs Effect analysis

Table 5.12 Effects and Regression Coefficients for Flower Pot Experiment.

<i>Term</i>	<i>Effect</i>	<i>Coef</i>
Constant		17.625
<i>R</i>	12.50	6.250
<i>T</i>	1.00	.500
<i>C</i>	14.50	7.250
<i>D</i>	-8.25	-4.125
<i>R</i> * <i>T</i>	1.25	.625
<i>R</i> * <i>C</i>	5.25	2.625
<i>R</i> * <i>D</i>	-.50	-.250
<i>T</i> * <i>C</i>	-.25	-.125
<i>T</i> * <i>D</i>	.50	.250
<i>C</i> * <i>D</i>	1.00	.500
<i>R</i> * <i>T</i> * <i>C</i>	-1.50	-.750
<i>R</i> * <i>T</i> * <i>D</i>	-1.75	-.875
<i>R</i> * <i>C</i> * <i>D</i>	.25	.125
<i>T</i> * <i>C</i> * <i>D</i>	-.75	-.375
<i>R</i> * <i>T</i> * <i>C</i> * <i>D</i>	1.50	.750

- Các yếu tố có 2 mức nên ta có thể phân tích theo cả kiểu phân tích ảnh hưởng (cho các yếu tố định lượng) và phân tích hồi quy (cho các yếu tố định tính)

Regression analysis vs Effect analysis

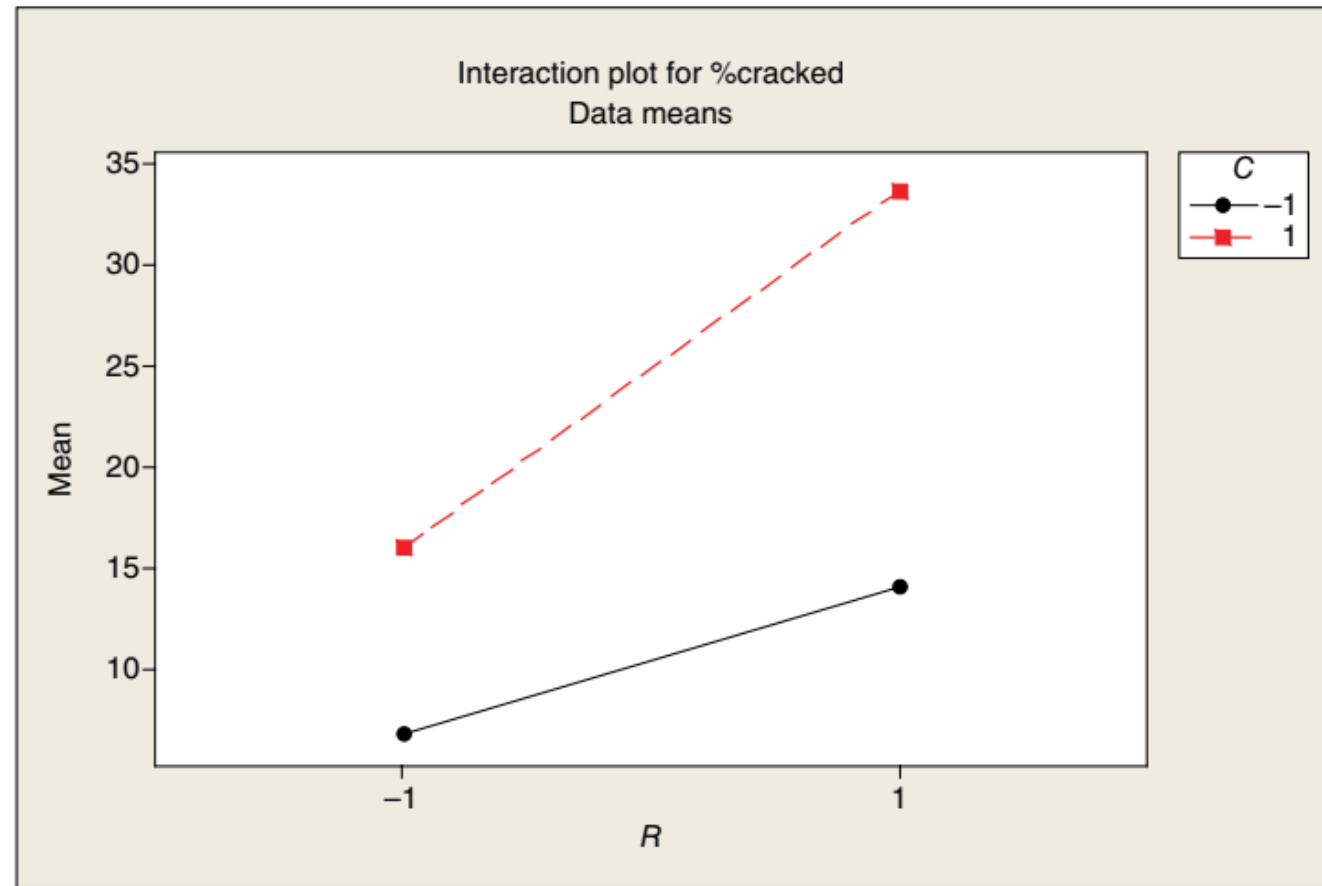
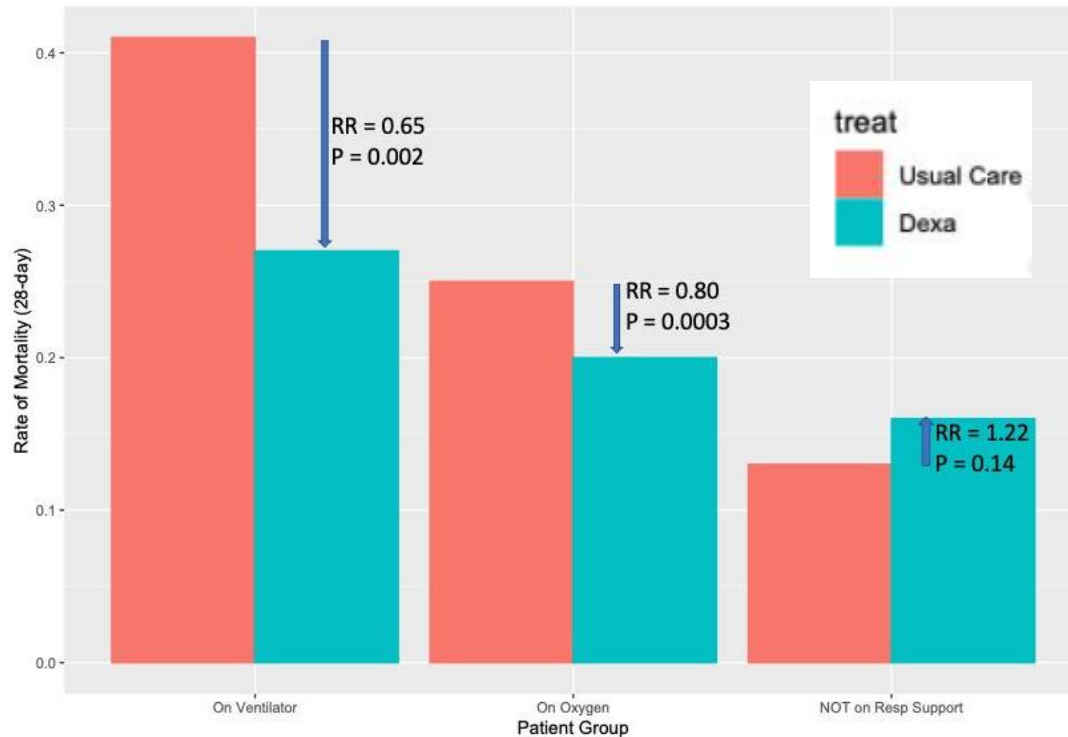


Figure 5.14 Interaction Plot for Factors *R* and *C*.

Nghiên cứu thử nghiệm 6 loại thuốc, với mỗi thuốc dùng cho một nhóm bệnh nhân COVID 19 như sau:

- Nhóm Lopinavir-Ritonavir (dùng điều trị bệnh nhân HIV);
- Nhóm dexamethasone (6 mg mỗi ngày trong 10 ngày);
- Hydroxychloroquine (thuốc điều trị sốt rét);
- Azithromycin (thuốc kháng sinh);
- Tocilizumab (thuốc kháng viêm);
- Convalescent plasma (hiểu nôm na là thay huyết tương).



Nhóm nghiên cứu so sánh nguy cơ tử vong của nhóm dexamethasone (2014) và nhóm "usual care" (tức 5 nhóm còn lại, tổng cộng 4321 người).

Kết quả:

(a) Ở bệnh nhân thở máy: so với nhóm "usual care", tỉ lệ tử vong ở nhóm dexamethasone thấp hơn 35%. Nói theo ngôn ngữ dịch tễ học, tỉ số nguy cơ [risk ratio] là 0.65, khoảng tin cậy 95% [KTC95]: 0.48 đến 0.96; P = 0.0021.

(b) Ở bệnh nhân phải dùng oxygen: dexamethasone giảm nguy cơ tử vong 20% (RR: 0.80; KTC95: 0.48 đến 0.88; P = 0.0003).

(c) Ở bệnh nhân KHÔNG cần hỗ trợ hô hấp (respiratory support, chưa rõ là can thiệp gì): dexamethasone tăng nguy cơ tử vong 22% (RR: 1.22; P = 0.14), nhưng kết quả không có ý nghĩa thống kê.