week3

方科晨

2024 年 3 月 24 日

Problem. 1

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 1.1$
$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = 0.8$
$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = 0.6853$

Problem. 3

由于 $\|\cdot\|$ 为向量范数，则有：**正定性** $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p = \|Px\| \ge 0$ ，且有 $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \|Px\| = 0 \Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **正其次性** $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_p = \|\alpha Px\| = |\alpha|\cdot\|Px\| = |\alpha|\cdot\|x\|_p$ **三角不等式** $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x+y\|_p = \|P(x+y)\| = \|Px+Py\| \le \|Px\| + \|Py\| = \|x\|_p + \|y\|_p$

综上，$\|\cdot\|_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上向量的一种范数。

Problem. 4

由矩阵范数的性质可知，$\text{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_p \ge \|AA^{-1}\|_\infty = \|I_n\|_\infty = 1$ ，同时，当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时，可以求得 $\|A\|_\infty = 2, \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2}$ 因此取到了 cond 的最小值 1 。当 $\lambda = -\frac{2}{3}$ 时同理，故得证。

Problem. 6

$\mathrm{cond}(AB) = \|AB\| \cdot \|(AB)^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| = (\|A\| \cdot \|A^{-1}\|) \cdot (\|B\| \cdot \|B^{-1}\|) = \mathrm{cond}(A) \cdot \mathrm{cond}(B)$ ，得证。

Problem. 7

不妨设 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 则由高斯消元法的过程可得，$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j} * a_{i1}}{a_{11}}, \forall i \geq 2, j \geq 2$ ，又由于 A 为对称阵，故 $a_{1j} = a_{j1}, a_{i1} = a_{1i}$ 。由此两式不难得出 $b_{ij} = b_{ji}, \forall i \geq 2, j \geq 2$ ，故 A_2 为对称阵。

Problem. 11

从最后一行往上，设当前为第 i 行，通过一次除法可算出解 x_i ，之后，对于第 $j \in [1, i-1]$ 行，把 (j, i) 消成 0 ，通过一次乘法一次除法，从 b_j 中减去相应的值。综上，乘除法次数共为 $n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$ 次

Problem. 12

(A) $A = LU$ 其中，$L = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $C = LU$ 其中，$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$