HW3

方科晨

2024 年 3 月 22 日

Problem1.

(a) 要最小化 $\|Ax-b\|_\infty = \max_i (Ax-b)_i$ ，则有线性规划如下：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c \\ \text{subject to} \quad & Ax - b \le c \cdot e \end{aligned}$$

其中 e 为全 1 向量。由于要最小化 c ，则限制条件中必有一维取等号，此时 $c = \|Ax-b\|_\infty$ ，故两者等价。

(b) 要最小化 $\|Ax-b\|_1 = \sum_i |Ax-b|_i$ 。我们有如下的线性规划：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_i (y_i + z_i) \\ \text{subject to} \quad & Ax - b = y - z \\ & y \ge 0 \\ & z \ge 0 \end{aligned}$$

不难发现这对于每一维来说 y_i, z_i 都是独立的。对于每一维 i 来说，有 $(Ax-b)_i = y_i - z_i$ ，假设 $y_i > 0, z_i > 0$ ，则存在一个 $0 < a \le \min(y_i, z_i)$ 使得 $y_i - a \ge 0, z_i - a \ge 0, (Ax-b)_i = (y_i - a) - (z_i - a)$ 满足限制条件，而且同时有 $(y_i - a) + (z_i - a) < y_i + z_i$ ，这样肯定不是最优解。故对于每一维 i ，都有 $y_i = 0, z_i = 0$ 中的一个成立，则只有两种情况 $y_i = 0, z_i = -(Ax-b)_i = |Ax-b|_i \ge 0$ 或者 $y_i = (Ax-b)_i = |Ax-b|_i \ge 0, z_i = 0$ ，则

$y_i + z_i = |Ax - b|_i$ 。那么 $\sum_i (y_i + z_i)$ 正是我们要求的 $\|Ax - b\|_1$ ，故两问题等价。

(c) 我们有以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_i (y_i + z_i) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x = y - z \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

等价性的证明同理于 **(b)** 。

Problem2.

(a) 令 $|x| = x_1 - x_2, |y| = x_3 - x_4$ ，转化后有如下标准型：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}, c = (1,1,1,1,0,0), A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) 令 $x = x_1, y = x_2 - x_3, z = x_4$ ，转化后有如下标准型：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix}, c = (3, -2, 2, 1, 0, 0, 0, 0), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Problem3.

(a) 如下图

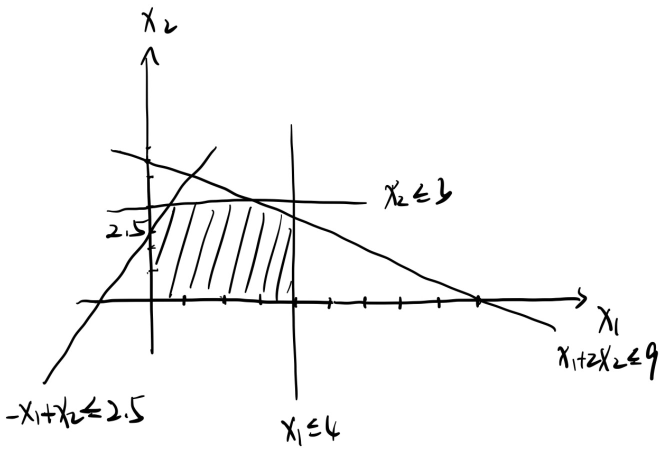

图 1:

(b) 转化为如下标准型:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_6\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}3\\5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}-1&1&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2.5\\9\\4\\3\end{pmatrix}$

(c) 由 **(a)** 中的图可以看出 extreme point 有 $(x_1,x_2)=(0,0),(4,0),(4,2.5),(3,3),(0.5,3),(0,2.5)$

(d) 最优解为 $(x_1,x_2)=(4,2.5)$ ，取到的最优值为 24.5

Problem4.

(a) 由于 $e^Tx=1\Leftrightarrow\sum_i x_i=1$ ，因此 $c^Tx=\sum_i c_ix_i\geq\sum_i(\min_i c_i)x_i=\min_i c_i\sum_i x_i=\min_i c_i$ 。令 $k=\arg\min_i c_i$ （有多个则任取一），则 $x_k=1,x_i=0,\forall i\neq k$ 时可以取到极值。

若限制改为 $e^Tx\leq 1$ ，则有 $c^Tx\geq\sum_i(\min_i c_i)x_i=\min_i c_i\sum_i x_i$ 。又由于有 $0\leq\sum_i x_i\leq 1$ ，故当 $\min_i c_i\geq 0$ 时，有 $c^Tx\geq\min_i c_i\sum_i x_i\geq 0$ ，当 $x_i=0,\forall i$ 时取到等号。当 $\min_i c_i<0$ 时，则有 $c^Tx\geq\min_i c_i\sum_i x_i\geq\min_i c_i$ ，令 $k=\arg\min_i c_i$ （有多个则任取一），当 $x_k=1,x_i=0,\forall i\neq k$ 时可以取到极值。

(b) 当 β 是 0 到 n 之间的整数时，不妨令 $c^T=(c_1,\cdots,c_n)$ 且 $c_{(1)},\cdots,c_{(n)}$ 为 c_i 从小到大排序后的值。那么有 $c^Tx\leq\sum_{i=1}^{\beta}c_{(i)}$。当排序后 c_i 的下标小于等于 β 时 $x_i=1$ ，否则 $x_i=0$

若限制改为 β 不是整数。则有 $c^Tx\leq\sum_{i=1}^{[\beta]}c_{(i)}+\{\beta\}c_{[\beta]+1}$ 。当排序后 c_i 的下标小于等于 $[\beta]$ 时 $x_i=1$ ，当 c_i 排序后下标为 $[\beta]+1$ 时 $x_i=\{\beta\}$ ，否则 $x_i=0$

若限制改为 $e^Tx\leq\beta$ ，那么有 $c^Tx\leq\sum_{i=1}^{\beta}\min(c_{(i)},0)$。当 $c_i<0$ 且排序后 c_i 的下标小于等于 β 时 $x_i=1$ ，否则 $x_i=0$

Problem5.

由 $Ax \le b$ 可转化成 $Ax+s=b$ ，则原来的条件 $Ax \le b, Cx=d$ 可转化为如下形式：

$$\begin{pmatrix} A & I_4 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix} A & I_4 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 为 5×8 的矩阵，秩为 5 。选取 $s_2 = s_3 = s_4 = 0$ ，可解得 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = s_1 = 1$ 为一个 feasible solution。故 $x^* = (1;1;1;1)$ 为一个 extreme point。

Problem6.

线性规划为标准型，其中有 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$，不难发现该矩阵行满秩。故存在最优的基解。

Problem7.

(a) 其中 (1) 等价于 $Ax > 0$ ，可以转化成 $-Ax + \alpha e \le 0, \alpha > 0$ ，由 Farkas's Lemma，有如下的 alternative system：$(A\ e)^T y = (0\ 1)^T, y \ge 0$ ，等价于 $A^T y = 0, y > 0$ 。故得证。

(b) 考虑如下两个线性规划：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad b^T y \\ &\text{subject to} \quad A^T y \leq x \end{aligned}$$

这两个线性规划互为对偶，并且如果两者都有最优解 x^*, y^* ，则存在 $c^T x^* = b^T y^*$ ，符合条件 $c^T x - b^T y \leq 0$ 。故该条件即等价于上面两个线性规划都有最优解。对于这两个线性规划的 alternative system：$A^T w \leq 0, b^T w > 0, A^T z = 0, z \geq 0, c^T w < 0$ ，如果题设条件成立，则两个规划均有解，则此条件不成立；如果此条件成立，则两个规划均无解，题设条件不成立，故为 alternative system。

Problem8.

使用 cvx 求得三个函数为 $f_{ls}(x) = 0.5755x + 4.1841, f_{l_1} = 0.9716x + 4.9459, f_{l_\infty} = -0.5249x + 3.9335$ 对应的三个图像依次如下：可以发现对于整体的趋势来说，l_1-norm 拟合得最好；l_2-norm 倾向于体现整体的趋势，但由于离群值带来的偏差是平方级别的，所以也会显示出部分离群值带来的影响；而 l_∞-norm 由于是取 max ，显著得受到离群值的影响。

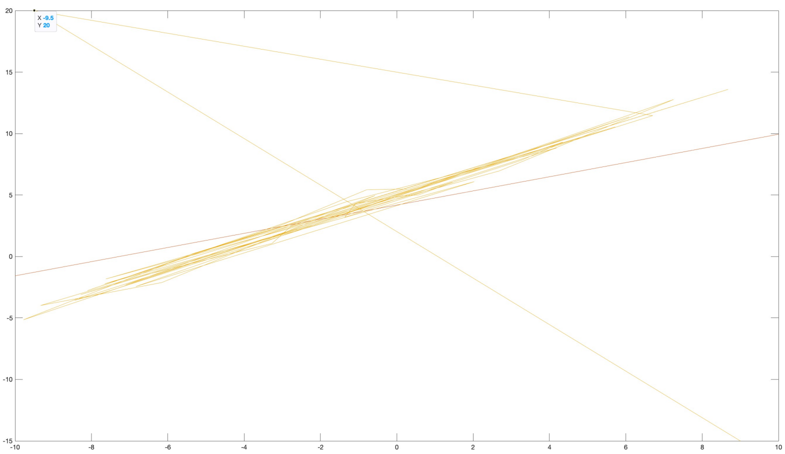

图 2: $f_{ls}(x)$

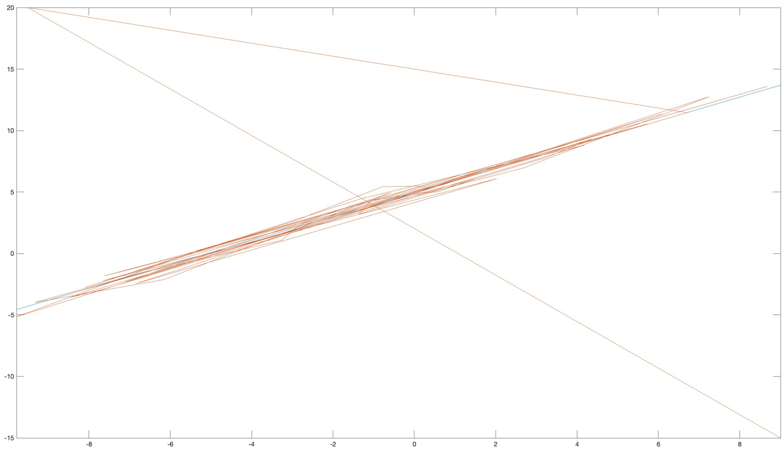

图 3: f_{l_1}

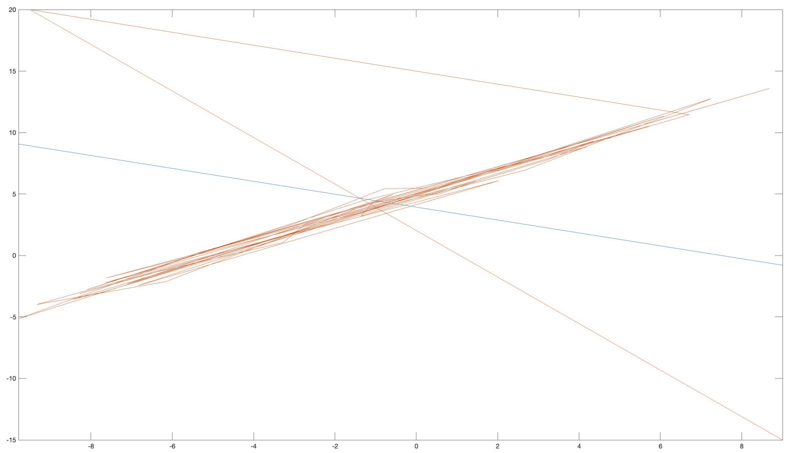

图 4: f_{l_∞}