Week 13

方科晨

December 26, 2023

1 Exercise 12

令 $C. = (\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \cdots)$ 和 $D. = (\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial} D_n \xrightarrow{\partial} D_{n-1} \longrightarrow \cdots)$ 是两个链复形，且 $f_\sharp, g_\sharp, h: C. \to D.$ 是链映射

1. 自反性：存在同态 $P: C_n \to D_{n+1}: \sigma \to 0, \forall n$，则有 $\partial P + P\partial = 0 = f_\sharp - f_\sharp$，即 $f_\sharp \sim f_\sharp$
2. 对称性：若存在同态 $P: C_n \to D_{n+1}, \forall n$ 使得 $\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$，则存在同态 $(-P): C_n \to D_{n+1}, \forall n$ 使得 $\partial(-P) + (-P)\partial = f_\sharp - g_\sharp$，即 $f_\sharp \sim g_\sharp \Rightarrow g_\sharp \sim f_\sharp$
3. 传递性：若存在同态 $P_1, P_2: C_n \to D_{n+1}, \forall n$ 使得 $\partial P_1 + P_1\partial = g_\sharp - f_\sharp$ 和 $\partial P_2 + P_2\partial = h_\sharp - g_\sharp$，则有$(P_1+P_2): C_n \to D_{n+1}, \forall n$ 满足 $\partial(P_1+P_2) + (P_1+P_2)\partial = h_\sharp - f_\sharp$，即 $f_\sharp \sim g_\sharp, g_\sharp \sim h_\sharp \Rightarrow f_\sharp \sim h_\sharp$

综上，链映射的同伦关系是等价关系

2 Exercise 15

1. "$\Rightarrow$": 如果 $C = 0$，则 $B = \ker(B \to C) = \mathrm{Im}(A \to B)$，则 $A \to B$ 为满射。同时 $0 = \mathrm{Im}(C \to D) = \ker(D \to E)$，故有 $D \to E$ 为单射
2. "$\Leftarrow$": 如果 $A \to B$ 为满射，$D \to E$ 为单射，则 $B = \mathrm{Im}(A \to B) = \ker(B \to C) \Rightarrow \mathrm{Im}(B \to C) \cong 0$ 和 $\mathrm{Im}(C \to D) = \ker(D \to E) = 0 \Rightarrow \ker(C \to D) \cong C$，又因为 $\mathrm{Im}(B \to C) = \ker(C \to D)$ 故 $C = 0$

对于 (X, A)，嵌入映射 $A \hookrightarrow X$ 诱导的长正合列 $\cdots \to H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \to \cdots \to H_0(X,A) \to 0$

1. "$\Rightarrow$": 如果 i_* 是同构，则 i_* 是单满射。由上述结论，$i_*: H_n(A) \to H_n(X)$ 满射且 $i_*: H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X)$ 单射，故 $H_n(X,A) = 0$
2. "$\Leftarrow$": 如果 $H_n(X,A) = 0, \forall n$ 由上述结论和 $H_n(X,A) = 0$ 可得 i_* 是满射，又由 $H_{n-1}(X,A) = 0$ 可得 i_* 是单射，故 i_* 是同构

3 Exercise 16

3.1 a

有正合列 $\cdots \to H_1(X,A) \xrightarrow{\partial} H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A) \xrightarrow{\partial} 0$。有 $H_0(X,A) = 0 \Leftrightarrow \ker\partial = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} j_* = 0 \Leftrightarrow \ker j_* = H_0(X) \Leftrightarrow \mathrm{Im} i_* = H_0(X)$ 即 $H_0(X,A) \Leftrightarrow i_*$ 是满射
令 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的道路连通分支，则有 $H_0(X) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_0(X_\alpha)$。又 $\{A \cap X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的道路连通分支（可能含有空集合），则 $H_0(A) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_0(A\cap X_\alpha)$
则有 $i_*: H_0(A) \to H_0(X)$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall\alpha \in I, i_*: H_0(A\cap X_\alpha) \to H_0(X_\alpha)$ 是满射
又有 $H_0(A\cap X_\alpha) \xrightarrow{i_*} H_0(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$，其中，若 i_* 满射，则 $A \cap X_\alpha \neq \varnothing$。若 $A \cap X_\alpha \neq \varnothing$，则 $i_* \circ \varepsilon: H_0(A\cap X_\alpha) \to \mathbb{Z}$ 是同构，则 i_* 是满射。故 $\forall\alpha \in I, i_*: H_0(A\cap X_\alpha) \to H_0(X\alpha)$ 是满射 $\Leftrightarrow A\cap X_\alpha \neq \varnothing$，故 $H_0(X,A) = 0$ iff A 与 X 的每个道路连通分支都有交

3.2 b

"$\Rightarrow$":
考虑正合列 $\cdots \to H_2(X,A) \xrightarrow{\partial} H_1(A) \xrightarrow{i_*} H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X,A) \xrightarrow{\partial} H_0(A) \to \cdots$ 。则由前一题可得，$H_1(X,A)=0$ 有 $i_*: H_1(A) \to H_1(X)$ 是满射和 $i_*: H_0(A) \to H_0(X)$ 是单射。
由于 $H_0(A)$ 是由 A 的所有连通分支中的圈生成的。假定 A_1, A_2 是 A 的两个道路连通分支，且都包含于某个 X 的道路连通分支 X_α ，令 a_1, a_2 为这两个道路连通分支的圈，则 $i(a_1), i(a_2): C_0(A) \to C_0(X_\alpha)$ ，又 X_α 为连通的，则有 $[i(a_1)] = [i(a_2)]$ 。又有 $i_*: H_0(A) \to H_0(X)$ 是单射，故 $[a_1]=[a_2]$ 。矛盾，故 X 的任意一个道路连通分支至多只包含 A 的一个道路连通分支。
"$\Leftarrow$":
首先可证，如果 X 的任意一个道路连通分支至多只包含 A 的一个道路连通分支，则有 $i_*: H_0(A) \to H_0(X)$ 为单射。
假设 i_* 不是单射，则 $\exists 0 \neq [a] \in H_0(A)$ 满足 $i_*([a])=0$ 。令 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的所有道路连通分支，令 a_α 是 A_α 中的圈。由 $H_0(A) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_0(A_\alpha)$ ，存在 $c_\alpha \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in I$ 使得 $[a] = \sum_{\alpha\in I} c_\alpha [a_\alpha]$ 。又因为 X 的任意一个道路连通分支至多只包含 A 的一个道路连通分支，故 $i_*([a_\alpha])$ 之间线性无关，又 $i_*([a])=0$ 所以有 $c_\alpha = 0, \forall \alpha \in I$ ，则有 $[a]=0$ ，矛盾。
因此 $i_*: H_0(A) \to H_0(X)$ 为单射。又由题设 $i_*: H_1(A) \to H_1(X)$ 为满射，由上题结论可得，$H_1(X,A) = 0$

4 Exercise 18

考虑长正合列 $\cdots \to H_n(\mathbb{Q}) \to H_n(\mathbb{R}) \to H_n(\mathbb{R},\mathbb{Q}) \to H_{n-1}(\mathbb{Q}) \to \cdots$
由于 $\mathbb{Q}$ 的连通分支为其中的每一个点，因此 $H_n(\mathbb{Q}) = \begin{cases} \oplus_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
由于 $\mathbb{R}$ 是单连通的，可收缩到一点，故 $H_n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$
代入到正合列中，则有 $0 \xrightarrow{j_*} H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial} H_0(\mathbb{Q}) \cong \oplus_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{Z}" \xrightarrow{i_*} H_0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \to 0$ ，由正合列可得 ∂ 为单射。由于 $\oplus_{q\in\mathbb{Q}}\mathbb{Z}$ 为自由Abel群，自由Abel群的子群是自由Abel群，故 $H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$ 为自由Abel群。
现考虑该群的基。 $C_n(\mathbb{R},\mathbb{Q}) = C_n(\mathbb{R})/C_n(\mathbb{Q})$
由于 ∂ 为单射，即 $\ker\partial = 0$ ，故 $\mathrm{Im}\partial \overset{h}{\cong} H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$ ，由正合列 $\ker i_* = \mathrm{Im}\partial \overset{h}{\cong} H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$ ，故只需考虑 i_* 的kernel
$i_*(1_q) = 1 \in \mathbb{Z}, 1_q \in \mathbb{Z}^q$ ，选取 $x_0 \in \mathbb{Q}$ 则 i_* 的kernel的基为 $1_x - 1_{x_0}, \forall x \in \mathbb{Q}$ ，则 $h(1_x - 1_{x_0}), \forall x \in \mathbb{Q}$ 为 $H_1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$ 的一组基

5 Exercise 26

引理 对任意拓扑空间 X ，一维同调群 $H_1(X)$ 是 X 的基本群的阿贝尔化
$X=[0,1], A = \{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1} \cup \{0\}$ ，则粘合空间 X/A 同胚于 Example 1.25 中的图示
由 Example 1.25 可得同态 $\rho = \otimes_{n\geq 1}\rho_n : \pi_1(X/A) \to \prod_\infty \mathbb{Z}$ 是满射。
由引理， $H_1(X/A)$ 是 $\pi_1(X/A)$ 的阿贝尔化。由于 $\prod_\infty \mathbb{Z}$ 是阿贝尔群，又 ρ 为同态，故 $\forall a,b \in \pi_1(X/A), [a]=[b] \in H_1(X/A) \cong \pi_1(X/A)/[\pi_1(X/A), \pi_1(X/A)]$ ，有 $\rho(a)=\rho(b)$ ，故令 $\rho_0 : H_1(X/A) \to \prod_\infty \mathbb{Z} : \rho_0([a]) = \rho(a)$ ，有 ρ_0 是良定义的。因此， $\mathrm{Im}\rho_0 = \mathrm{Im}\rho = \prod_\infty \mathbb{Z}$ 。由于 $\prod_\infty \mathbb{Z}$ 为不可数集且 ρ_0 满射，故 $H_1(X/A)$ 不可数
由正合列 $H_1(X) \to H_1(X,A) \to H_0(A)$ 其中，由于 X 可形变收缩至一点，故 $H_1(X)=0$ 。 $H_0(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ 为可数群，由 $H_1(X)=0$ 和正合可得 $H_1(X,A) \to H_0(A)$ 是单射，故 $H_1(X,A)$ 为可数群的子群，故可数
由于 $H_1(X/A)$ 不可数而 $\tilde{H}_1(X,A) = H_1(X,A)$ 可数，因此它们不同构

6 Exercise 27

6.1 a

令 $g = f|_A : A \to B$ ，由正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

图中，每一个同调群均为Abel群。同时，由于 f, g 都是同伦等价，所以诱导的 f_*, g_* 为同构。由5-lemma 可得， $\tilde{f}_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ 为同构

6.2 b

假设 $f : (D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n - \{0\})$ 是同伦等价，则存在 $(D^n, \overline{S^{n-1}}) \hookrightarrow (D^n, \overline{D^n - \{0\}})$ 的同伦等价。由于 $\overline{S^{n-1}} = S^{n-1}, \overline{D^n - \{0\}} = D^n$ ，即存在 $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n)$ 的同伦等价。但着意味着 S^{n-1} 和 D^n 是同伦等价的，矛盾。所以 f 不是同伦等价