week3

方科晨

2024 年 3 月 21 日

1 Chatper 2

Problem. 4

$f(x) = x^3 - a = 0$ ，则 $f(x)$ 的根即为 $\sqrt[3]{a}$ 。故有 Newton 迭代法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3 \cdot x_k^2}$ 。

考虑局部收敛性，$f(x)$ 在 $x^* = \sqrt[3]{a}$ 附近有连续二阶导数，故至少二阶收敛。考虑 $g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0$ ，故该牛顿法为二阶收敛。

Problem. 5

首先当 x 在 $\sqrt{a}$ 附近时，$x = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a} \Leftrightarrow 3x^3 + ax = x^3 + 3ax \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ，故改迭代方法的确是收敛于 $\sqrt{a}$

可求得 $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a} - \sqrt{a}}{(x_k-\sqrt{a})^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k(x_k^2+3a)-\sqrt{a}(3x_k^2+a)}{(x_k-\sqrt{a})^3(3x_k^2+a)} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^3 - 3\sqrt{a}x_k^2 + 3ax_k - a\sqrt{a}}{(x_k^3 - 3\sqrt{a}x_k^2 + 3ax_k - a\sqrt{a})(3x_k^2+a)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3x_k^2+a} = \frac{1}{4a}$ 为常数，故是三阶收敛的

Problem. 6

由 $\varphi' = \frac{ff''}{(f')^2}$ 直接计算 $\varphi'' = \frac{(ff'')'(f')^2 - ff''((f')^2)'}{(f')^4} = \frac{f'f'f'f'' + f'f'ff''' - 2ff'f''f''}{(f'^4)}$

，由于 $f'(x^*) \neq 0, f(x^*) = 0$ ，故有 $\varphi''(x^*) = \frac{(f'(x^*))^3 f''(x^*)}{(f'(x^*))^4} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$

Problem. 9

(1) $f(x) = x^3 - 3x - 1$, 则有 $f'(x) = 3x^2 - 3$, 牛顿迭代公式为 $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3}$ ，前几次迭代结果为 $x_0 = 2, x_1 = 1.8888888888888888, x_2 = 1.879451566951567$ 已符合精度要求。

(2) 直接按割线法计算公式，可求得前几次迭代结果为 $x_0 = 2.0, x_1 = 1.9, x_2 = 1.8810939357907253, x_3 = 1.8794110601699177$ 符合精度要求

2 Chatper 3

Problem. 2

由于 $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$,因此有 $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 \le \sum_{i=1}^n (\max_{1 \le i \le n} |x_i|) = n \max_{1 \le i \le n} |x_i| = n\|x\|_\infty$