# HW1

方科晨

2024 年 3 月 9 日

**Problem1.**

**a)** 设香草、薄荷、巧克力冰淇凌的量分别为 $x_1, x_2, x_3$ 加仑，令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$

令

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1.5 & 0.5 & 2 & 4 \\ 3.5 & 1 & 1.5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 250 \\ 480 \\ 960 \end{pmatrix}$$

由题意可得，即为求解以下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 80 \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{3} x_i - \boldsymbol{x}A\boldsymbol{b} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}A \leq c^T \\ & x_1 \geq 50 \end{aligned}$$

**b)** 使用 cvx 带入求解计算可得最大利润为 10500.6 ，其中解 $\boldsymbol{x} = (50.0000, 103.3333, 98.8889)$

**Problem2.** 令 neighborhood $i$ 到 school $j$ ，grade 为 $g$ 的学生数量为 $x_{ijg}$ 则为求解如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_i \sum_j \sum_g x_{ijg} * d_{ij} \\ \text{subject to} \quad & \textstyle\sum_i x_{ijg} \le C_{jg}, \forall j, g \\ & \textstyle\sum_j x_{ijg} = S_{ig}, \forall i, g \end{aligned}$$

**Problem3.**

**a)** 如果使用期望回报来求，则变为求解如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \pi^T \boldsymbol{x} - w \cdot \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{q} \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为离散概率分布，其余与原题设一致

**b)** 使用 cvx 可以求得最大期望获利为 2.25 ，
解为 $\boldsymbol{x}^T = (10.0000, 5.0000, 10.0000, 5.0000, 5.0000)$

**Problem4.** 设 $\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots x_{12})$ ，其中 $x_i$ 表示第 $i$ 个月生产的数量，则原问题转化为如下规划问题:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_{k=1}^{12} x_i^2 + s \cdot \sum_{i=1}^{12} (\sum_{k=1}^{i} x_i - \sum_{k=1}^{i} d_i) \\ \text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{k=1}^{i} x_i \ge \sum_{k=1}^{i} d_i, \forall i \\ & x_i \le r, \forall i \end{aligned}$$

**Problem5.** 由题意可得 $\mu = 1.2, V = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，且设每股

在该两资产中分配的比率为 $\boldsymbol{x}$ ，则有规划问题：如下

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{x}^T V \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} \geq \mu \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

将该规划问题用 cvx 求解可得最小的风险方差为 0.714286 ，解为 $\boldsymbol{x}^T = (0.5714, 0.4286)$

**Problem6.** 将每条边在出去的点出 $-1$ ,进入的点处 $+1$ ,编号 O,A,B,C,D 从 $1 \sim 5$ ，同时给边编号 $1 \sim 7$，令矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**a)** 令每条边被使用的次数为 $\boldsymbol{x}^T = (x_1 \cdots x_7)$ （可以大于 1 ，但肯定不是最优解)，则变为求解如下规划问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^T A = \boldsymbol{d}^T \end{aligned}$$

**b)** 与上同理，为如下规划问题：

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \textstyle\prod_{i=1}^7 c_i^{x_i} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}^T A = \boldsymbol{d}^T \end{aligned}$$

**Problem7.**

**1.** 代入 cvx 求解便可得最优值为 1 ,解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0.0000, 0.5000, 0.5000)$

**2.** 代入 cvx 求解便可得最优值为 1.26795 ，解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0.2679, 0.3660, 0.3660)$

**3.** 代入 cvx 求解便可得最优值为 1 ，解为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$