HW4

方科晨

2024 年 3 月 30 日

Problem1. 原 LP 可写为以下形式:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \begin{pmatrix} 0 & e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\
& \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0
\end{aligned}
$$

则可得对偶形式 LP 为:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & b^T z \\
\text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} A^T \\ I \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Problem2.

(a) 可以构造对偶形式:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & y \\
\text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

基有两种取法，且 y 的取值分别为 $2,-4$ 。可求得最优值为 2 ，最优解为 $y=2$

(b) 由于 $-1\cdot y \geq -4$ 不取等号，故关于 $x_2 \geq 0$ 的限制取等号，即 $x_2=0$ ，又 $y \geq 0$ 不取等号，故 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 1$ 的限制取等号，故可以求得 $x_1=1, x_2=0$ ，此时 LP 的值也为 2 ，故为最优解。

(c) 即对偶问题变成了如下形式：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad y \\ &\text{subject to} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad\quad y \geq 0 \end{aligned}$$

则可求得当 $c_1 > 4$ 时对偶问题没有可行解，则原问题要么没有可行解，要么最优值为无穷大。又原问题有可行解，故原问题的最优值无穷大。

Problem3.

(a) 选定的基为 x_1, x_3 对应的矩阵列，且有 $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，故有 $b_1 = 2$ 。可求得对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\text{subject to} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

(b) 由于 $x_1 > 0, x_3 > 0$ ，故有 $y_1 + y_2 = 5, 6y_1 + 2y_2 = 21$ 可解得 $y_1 = \frac{11}{4}, y_2 = \frac{9}{4}$ ，最优值为 $\frac{31}{4}$

Problem4.

可得对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& y_1 \text{ free }, y_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

由第一第二个限制可得对偶问题无解，故原问题无解或 unbounded。又由于 $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 2)$ 为原问题可行解，故原问题 unbounded。

Problem5.

可得对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y_1 - 3y_2 - 5y_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -4 \\
& y_1 - 6y_2 + 4y_3 = -5 \\
& 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq -7 \\
& -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1 \\
& y_1 \geq 1, y_2 \leq -3, y_3 \text{ free}
\end{aligned}
$$

Problem6.

可得对偶问题为:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2y_1 - 7y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 = 10 \\ & y_2 \le 7 \\ & -6y_1 + 5y_2 \le 30 \\ & y_1 - y_2 \le 2 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

将第一个限制和其他三个限制中的一个组合取等可解得三组解: $(y_1, y_2) = (3,7), (\frac{20}{11}, \frac{90}{11}), (6,4)$ ，其中可行解为 $(3,7), (6,4)$ ，故求得对偶问题最优解为 $(3,7)$ ，最优值为 -55 。由于在第三、第四个限制中不取等，故有 $x_3 = x_4 = 0$ 。且 $y_1, y_2 > 0$ 故有原问题的两个限制取等，故解得 $x_1 = -2, x_2 = -5$ ，且最优值同样为 -55 。

Problem7.

(a) 不妨令乘以实数 μ 之后的 A, b 分别为 A_a, b_a 。令原问题 LP 的最优解为 x^* 。令 LP_a 为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A_a x = b_a \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

则 x^* 依然为该问题的最优解，因为限制不变，目标函数不变。考虑该问题的对偶问题 LD_a ：

$$\begin{aligned} \max \quad & b_a^T y \\ \text{s.t.} \quad & A_a^T y \le c \end{aligned}$$

因为 A_a 是 A 的第 k 列乘以 μ ，则 $y_a^* = (y_1^*, \cdots, y_{k-1}^*, \frac{1}{\mu} y_k^*, y_{k+1}^*, \cdots, y_m^*)$ 为该问题的可行解。又由于 $b_a^T y_a^* = \sum_{i=1}^m b_{ai} y_{ai}^* = \sum_{i \ne k} b_i y_i^* + (\mu b_i)(\frac{1}{\mu} y_i^*) = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = c^T x^*$ 为 LP_a 的最优值，所以 y_a^* 为 LD_a 的最优解。

(b) 设新问题为 LP_b ，相应的对偶问题为 LD_b 。由于线性方程组之间的等价转化，不难发现 x^* 依然是 LP_b 的最优解。令进行行变换后的 A, b 分别为 A_b, b_b 。有 LP_b ：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A_b x = b_b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

以及对偶问题 LD_b ：

$$\begin{aligned} \max \quad & b_b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A_b^T y \leq c \end{aligned}$$

由于 $(A_b)_r = A_r + \mu A_k$ （为行向量），令 $y_b^* = (y_1^*, \cdots, y_k^* - \mu y_r^*, \cdots y_m^*)$ ，则有 $A_b^T y_b^* = \sum_{i=1}^m (A_b)_i y_{bi}^* = \sum_{i \neq k,r} A_i y_i^* + (A_b)_r y_{br}^* + (A_b)_k y_{bk}^* = \sum_{i \neq k,r} A_i y_i^* + (A_r + \mu A_k) y_r^* + A_k (y_k^* - \mu y_r^*) = \sum_{i=1}^m A_i y_i^* \leq c$ ，故 y_b^* 为 LD_b 的可行解。同时 $b_b^T y_b^* == \sum_{i=1}^m (b_b)_i y_{bi}^* = \sum_{i \neq k,r} b_i y_i^* + (b_b)_r y_{br}^* + (b_b)_k y_{bk}^* = \sum_{i \neq k,r} b_i y_i^* + (b_r + \mu b_k) y_r^* + b_k (y_k^* - \mu y_r^*) = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = b^T y^* = c^T x^*$ 为 LP_b 的最优值，故 y_b^* 为 LD_b 的最优解。

Problem8.

(a) 由于 $\|x - c\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i - c_i|$ 故原问题转化为如下的 LP：

$$\begin{aligned} \min \quad & d \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & -d \cdot e \leq x - c \leq d \cdot e \end{aligned}$$

进一步可转化为:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} \\
\text{s.t} \quad & \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} \leq b \\
& \begin{pmatrix} I & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} \geq c \\
& \begin{pmatrix} I & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} \leq c
\end{aligned}
$$

其中 e 为全 1 向量

(b) 由上面的形式可写出如下对偶问题:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} b^T & c^T & c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{3n} \end{pmatrix} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T & I & I \\ 0 & e^T & -e^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& y_1, \cdots, y_n \leq 0, y_{n+1}, \cdots, y_{2n} \geq 0, y_{2n+1}, \cdots, y_{3n} \leq 0
\end{aligned}
$$

令 $y^T = (y_1, \cdots, y_n), z^T = (z_1, \cdots, z_n) = (y_{n+1} + y_{2n+1}, \cdots, y_{2n} + y_{3n}), w^T = (w_1, \cdots, w_n) = (y_{n+1} - y_{2n+1}, \cdots, y_{2n} - y_{3n})$ ，则该对偶问题可以写成:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} b^T & c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& y \leq 0, z \text{ free }, w \geq 0
\end{aligned}
$$

不难发现 w 无用，故可简化为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} b^T & c^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\
\text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
& y \leq 0, z \text{ free}
\end{aligned}
$$

(c) 由于 $c \notin \mathcal{P}$ ，因此两问题的最优值均大于 0 ，即 $b^T y + c^T z > 0 \Leftrightarrow c^T z > -b^T y$ 。由约束可得 $-A^T y = z$ 。对于 $\forall x, Ax \leq b$ 都有 $z^T x = (-A^T y)^T x = -y^T Ax \leq -y^T b$ ，因为 $-y \geq 0$ 且 $Ax \leq b$。即 $x^T z \leq -b^T y$ 。因此可以将 c 和 $\mathcal{P}$ 中的点按照与 z 的点积来进行 separate。