week5

方科晨

2024 年 3 月 31 日

Problem. 8

(1) 由于 A 为正定矩阵，故 $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Ax > 0$ ，因此，取 e_i 为第 i 维为 1 其余为 0 的向量，有 $e_i^T Ae_i = a_{ii} > 0$ ，故得证。

(2) 由于 $a_{11} > 0$ ，由上次作业，即本章第 7 题可得 A_2 为对称矩阵。令 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ，则 $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j} * a_{i1}}{a_{11}}, \forall i, j \geq 2$ 。对于任意的 $= (x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ，有

$$
\begin{aligned}
& \hat{x}^T A_2 \hat{x} \\
= \; & \textstyle\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n (a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}) x_i x_j \\
= \; & \textstyle\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} x_i x_j - \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} x_i x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} x_i x_j \\
= \; & \textstyle\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=2}^n a_{i1} x_i x_1 + \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j x_1 + a_{11} x_1 x_1 \\
= \; & \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j
\end{aligned}
$$

其中 $x_1 = -\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}x_j}{a_{11}} = -\sum_{i=2}^n \frac{a_{i1}x_i}{a_{11}}$,由于 A 是正定矩阵,所以 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0$ ，因此 A_2 为正定矩阵。

Problem. 13

如图

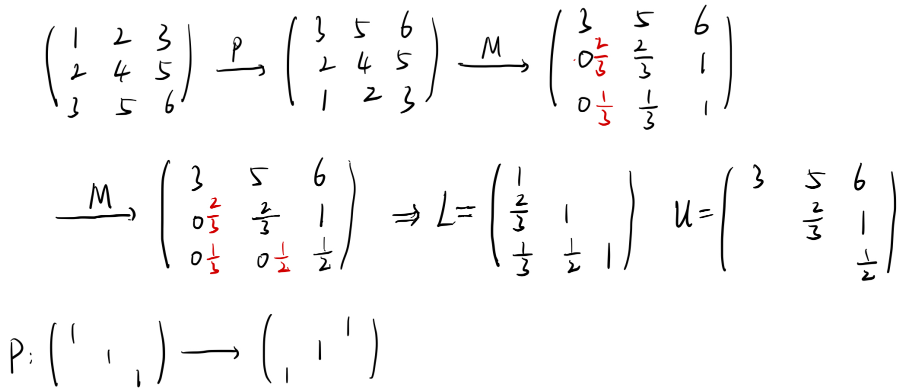

图 1: A

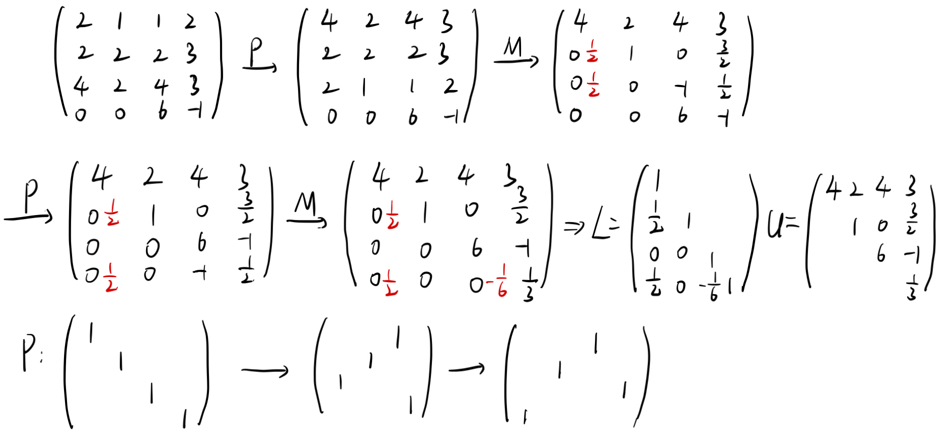

图 2: B

Problem. 14

先使用部分主元分解求得 $PB = LU, QC = RS$ ，然后原式 $x = B^{-1}(2A+I)(C^{-1}+A)b = U^{-1}L^{-1}P(2A+I)(S^{-1}R^{-1}Qb+Ab)$ 。从右往左看，Ab 直接计算可得，Qb 也直接计算可得，由于 R 为下三角阵，故求 $R^{-1}(QB)$ 从上往下求解便可，求解完后 $S^{-1}(R^{-1}Qb)$ 同理，然后两个向量相加，与 $(2A+I)$ 直接相乘，再与 P 相乘，然后与 L^{-1} 和 U^{-1} 相乘时同

理从上往下或从下往上求解便可。

Problem. 15

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{matrix} l_{21} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ l_{31} = 0 \end{matrix} \Rightarrow l_{22} = \frac{\sqrt{24}}{3} \Rightarrow l_{32} = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow l_{33} = \frac{\sqrt{42}}{4}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & & \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{24}}{3} & \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{42}}{4} \end{pmatrix}$$

图 3: A

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{41} & \cdots & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{41} \\ & \ddots & \vdots \\ & & l_{44} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = 2 \Rightarrow \begin{matrix} l_{21} = 1 \\ l_{31} = 2 \\ l_{41} = 1 \end{matrix} \Rightarrow l_{22} = 3 \Rightarrow \begin{matrix} l_{32} = 2 \\ l_{42} = 0 \end{matrix} \Rightarrow l_{33} = 1 \Rightarrow l_{43} = 3 \Rightarrow l_{44} = 3$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

图 4: B

如图

Problem. 16

i	a_i	b_i	c_i	m_i	f_i	x_i
1		2	-1		1	$\frac{5}{6}$
2	-1	$\cancel{2}\ \frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\cancel{0}\ \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	-1	$\cancel{2}\ \frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$\cancel{0}\ \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
4	-1	$\cancel{2}\ \frac{5}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$\cancel{0}\ \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
5	-1	$\cancel{2}\ \frac{6}{5}$		$-\frac{4}{5}$	$\cancel{0}\ \frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

如图

Problem. 18(1)

A 按列严格对角占优，即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$

不妨加强结论，证明对每一个主元做完所有的消元过程后，即从 A 消元成 $B = A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ ，我们有 A_2 仍然是列严格对角占优。那么原命题就显然成立。

由消元过程可得，$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j} * a_{i1}}{a_{11}}, \forall i, j \geq 2$ ，需要证明 $|b_{ii}| >$

$\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|b_{ij}|, \forall i \geq 2$ 。我们有如下推导：

$$
\begin{aligned}
& |b_{ii}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|b_{ij}| \\
= \;& |a_{ii} - \tfrac{a_{1i}a_{i1}}{a_{11}}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij} - \tfrac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}| \\
\geq \;& |a_{ii}| - |\tfrac{a_{1i}a_{i1}}{a_{11}}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}(|a_{ij}| + |\tfrac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}|) \quad \text{（第一个列严格对角占优，第二个绝对值不等式）} \\
= \;& |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}| - \textstyle\sum_{j=2}^{n}|\tfrac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}| \\
= \;& |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}| - |a_{i1}|\tfrac{\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|}{|a_{11}|} \\
> \;& |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j=2,j\neq i}^{n}|a_{ij}| - |a_{i1}| \quad \text{（由列严格对角占优）} \\
= \;& |a_{ii}| - \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}| \\
> \;& 0
\end{aligned}
$$

故加强命题得证，故原命题得证。