HW5

方科晨

2024 年 4 月 6 日

Problem1.

(a) 令 Core 集合为 Z ，则 $\forall \hat{z}=(\hat{z}_1,\cdots,\hat{z}_n),\tilde{z}=(\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_n)\in Z$ ，对于任意 $\lambda\in[0,1]$ ，我们有 $\sum_{k\in K}(\lambda\hat{z}_k+(1-\lambda)\tilde{z}_k)=\lambda\sum_{k\in K}\hat{z}_k+(1-\lambda)\sum_{k\in K}\tilde{z}_k=\lambda V^K+(1-\lambda)V^K=V^K$ ，同时对于 $\forall S\subset K,\sum_{k\in S}(\lambda\hat{z}_k+(1-\lambda)\tilde{z}_k)\geq\lambda V^S+(1-\lambda)V^S=V^S$ ，所以 $\lambda\hat{z}+(1-\lambda)\tilde{z}\in Z$ ，所以 Z 是凸集合。

(b) 原问题为:

$$\begin{aligned}\max\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & A^Kx\leq b^K\\ & x\geq 0\end{aligned}$$

其中 A^K,b^K 的定义如题。则有相应的对偶问题:

$$\begin{aligned}\min\quad & (b^K)^Ty\\ \text{s.t.}\quad & (A^K)^Ty\geq c\\ & y\geq 0\end{aligned}$$

(c) 首先,根据题意有 $z_k=(b^{\{k\}})^Ty^*$,则有 $\sum_{k\in K}z_k=\sum_{k\in K}(b^{\{k\}})^Ty^*=(\sum_{k\in K}(b^{\{k\}})^T)y^*=(b^K)^Ty^*$ ，故满足第一个要求。

其次，对于 $\forall S \subset K$ ，我们可以构造一对对偶问题，即:

$$\begin{aligned} \min \quad & (b^S)^T y \\ \text{s.t.} \quad & (A^K)^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A^K x \leq b^S \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

则有 y^* 是前者的可行解，且 $\sum_{k\in S} z_k = \sum_{k\in S}(b^{\{k\}})^T y^* = (\sum_{k\in S}(b^{\{k\}})^T)y^* = (b^S)^T y^*$ 。根据弱对偶性，我们有 $(b^S)^T y^* \geq c^T x^*$ ，其中 x^* 是后者的最优解。同时，对于集合 S 我们有

$$\begin{aligned} V^S := \quad \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A^S x \leq b^S \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

根据 A^S 的定义，我们有 $A^K \leq A^S$ ，其中不等号是逐元素的。所以第三个问题的最优解是第二个问题的可行解，因此第二个问题的最优值要大于等于第三个问题的最优值，即 $V^S \leq c^T x^* \leq (b^S)^T y^* = \sum_{k\in S} z_k$ ，故满足第二个要求。综上，对应的 z 是在 Core 中。

(d) 不妨考虑只有两个 firm，其中一个的 A 矩阵元素全部为 $+\infty$ ，但资源全部为 1 ，另一个的 A 矩阵元素全部为 1 ，但资源全部为 0 。那么显然有它们单独生成时的最优解均为 0 ，且合作生产时的最优解大于 0 。因此，利润可以任意分配，均可比单独生产时优，即任意满足利润和的分配方案 z ，z 均属于 Core。

(e)

(e1) 合并后的资源向量为 $(6;7;5)$ 可以的到最优值为 22 最优解为 $x = (2;0;5)$ 。在这例中联盟会比单独生产更优，是因为单独生产时，由于

资源消耗矩阵的限制，有部分资源无法被用于生产，而联盟生产时，可以使资源得到更好的利用。

(e2) 大联盟的对偶问题即为:

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 7y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_3 \geq 2 \\ & y_2 + y_3 \geq 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

根据 Complementarity Slackness 可以解得最优解为 $y = (0, 1, 3)$ ，最优值为 22 。因此可以获得 Core 中的一个值 $z = b^{\{k\}} y^* = (11; 6; 5)$ 。若单独生产的话分别最优获利 $(10; 6; 5)$ ，合作生产更优。

Problem2.

(a) 对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\forall \lambda \in [0, 1]$ ，我们有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \sup_{c \in \mathcal{C}} c^T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \sup_{c \in \mathcal{C}} c^T \lambda x_1 + \sup_{c \in \mathcal{C}} c^T (1-\lambda) x_2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ ，故 f 是凸函数。

(b) 对偶问题为:

$$\begin{aligned} \min \quad & d^T g \\ \text{s.t.} \quad & F^T d = x \\ & d \geq 0 \end{aligned}$$

。由于原问题有有界最优解 $f(x)$ ，故对偶问题有可行解。同时对偶问题的最优值也有界，故两问题的最优值相等，故对偶问题的最优值为 $f(x)$ 。

(c) 根据原问题和题 **(b)** 中的表达式，我们可以得到如下线性规划问

题:

$$\begin{aligned} \min \quad & d^T g \\ \text{s.t.} \quad & F^T d = x \\ & Ax \geq b \\ & d \geq 0 \end{aligned}$$

(d) 当取 $\mathcal{C} = \{c_{nom}\}$ 时代入 (LP) ，解得最优值为 1.50167 ，相应的最优解为 $x_{nom} = \begin{pmatrix} 0.697723485248259 \\ -0.628510742007053 \\ 1.44824860085731 \\ -1.13155737580194 \\ 0.220200744406362 \\ -0.100098786198233 \\ 0.696493987316371 \\ 1.25967295928702 \\ -0.752296038240486 \\ -0.323781575854262 \end{pmatrix}$ 当 $\mathcal{C}$ 取题中的限制时，我们可以得到 $\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{R}^n | Fc \leq g\}$ ，其中 $F = \begin{pmatrix} I \\ -I \\ e^T \\ -e^T \end{pmatrix}$ 对应的 $g = \begin{pmatrix} 1.25c_{nom} \\ -0.75c_{nom} \\ 1.1e^T c_{nom} \\ -0.9e^T c_{nom} \end{pmatrix}$

将数据代入 **(c)** 中的线性规划中，可以得到最优值为 2.31342 ，最优解为

$$x = \begin{pmatrix} 0.109600364771020 \\ 0.0238609948380699 \\ 0.109600364897081 \\ 0.109600364787457 \\ 0.164556745013909 \\ 0.109600364587373 \\ 0.196988654381789 \\ 0.352020173406039 \\ 0.0157930690545938 \\ 0.118630037159758 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1.73478902340158 \\ 1.59911631040700 \\ 1.34782901038315 \\ 1.71217750954077 \\ 1.56740285179923 \\ 2.08973018957289 \\ 2.09529615163118 \\ 1.89242046530937 \\ 2.16076045455912 \\ 2.15095977515493 \\ -1.04087341404095 \\ -0.959469786244198 \\ -0.808697406229888 \\ -1.02730650572446 \\ -0.940441711079535 \\ -1.25383811374374 \\ -1.25717769097871 \\ -1.13545227918562 \\ -1.29645627273547 \\ -1.29057586509296 \\ 16.1484239327481 \\ -13.2123468540666 \end{pmatrix}$$

，可以发现后者的最优值要大于前者，这是因为后者的 $\mathcal{C}$ 的范围更大，最坏情况包含了前者的，即还有更多的可能性，故最坏情况下的最优值要更大。