week2

方科晨

2024 年 3 月 11 日

1　第一章

Problem.　2

(3) $\mathrm{cond} = |\frac{[f(x+h)-f(x)]/f(x)}{((x+h)-x)/x}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}| = |\frac{x\cos x}{\sin x}|$

(4) 当 x 的取值在 $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 附近时，$\sin x$ 的值接近于 0 ，条件数大，该问题高度敏感。

Problem.　6

$\hat{y}_0$ 的误差 $e_0 = \sqrt{2} - 1.41$ ，由计算过程可以发现，$e_n = \hat{y}_n - y_n = (10\hat{y}_{n-1} - 1) - (10y_{n-1} - 1) = 10(\hat{y}_{n-1} - y_{n-1}) = 10e_{n-1}$ ，故有 $e_{10} = 10e_9 = \cdots = 10^{10}e_0 \approx 0.42136 \times 10^8$ ，不稳定。因为计算过程中误差会被逐渐放大。

Problem.　8

令 x 的扰动为 $\hat{x} - x = e_x$,则有条件数 $\mathrm{cond} = |\frac{[f(\hat{x},y)-f(x,y)]/f(x,y)}{((|\hat{x}|+|y|)-(|x|+|y|))/(|x|+|y|)}| = |\frac{f(\hat{x},y)-f(x,y)}{|\hat{x}|-|x|} \cdot \frac{|x|+|y|}{f(x,y)}|$ 。由于 ε 远小于 1 ，故 x 不会在 0 附近，因此 x 与 $\hat{x}$ 同号，故 $|\hat{x}| - |x| = |\hat{x} - x|$ 。

因此原式等于 $|\frac{f(\hat{x},y)-f(x,y)}{\hat{x}-x} \cdot \frac{|x|+|y|}{f(x,y)}| \approx |\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \cdot \frac{1}{\varepsilon}| = |1 \cdot \frac{1}{\varepsilon}| = \frac{1}{\varepsilon}$

说明当做减法时，若两个数非常接近，即 $\varepsilon \approx 1$ 时，减法的条件数很大，即非常敏感。这正说明了抵消现象，减法结果的相对变化量会变大，在精度不

变的情况下，有效数字减少。

Problem. 11

截断舍入：$(0.1)_{10} \approx (0.0001100)_2$ 最近舍入：$(0.1)_{10} \approx (0.0001101)_2$ IEEE 单精度浮点数二进制表示：00111101110011001100110011001101

2 第二章

Problem. 1

(1) x 不在 0 附近,则 $x^3-x^2-1=0 \Leftrightarrow x^3=x^2+1 \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{x^2}$,则有迭代公式 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k}$ 分析: 对于区间 $[1,2]$, 有 $|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}| \le |x_1-x_2|$ 故由定理可得，该迭代全局收敛

(2) x 不在 1 附近，则 $x^3-x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{x-1}$ ，则有迭代公式 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k}-1}$

(3) $x^3-x^2-1=0 \Leftrightarrow x^3=x^2+1$ ，则有迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$

通过 (1) 方法计算得 $x \approx 1.466$

Problem. 2

设 $x_1 < x_2$ ，由于 $0 < m \le f'(x) \le M$ ，因此 f 单调递增，故 $f(x_1) < f(x_2)$ 。且有 $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx \le \int_{x_1}^{x_2} Mdx = M(x_2-x_1)$ 令 $g(x)=x-\lambda f(x)$ ，故有 $|g(x_1)-g(x_2)|=|(x_1-x_2)-\lambda(f(x_1)-f(x_2))|=(x_2-x_1)+\lambda(f(x_2)-f(x_1)) \le (x_2-x_1)+\lambda M(x_2-x_1) < (x_2-x_1)+2(x_2-x_1) = 3|x_1-x_2|$ ，因此 g Lipschitz 连续，故收敛于根 x^*