

利用噪声测量来估算基本物理常量（实验指南）

Jian Wei (危健)*

北京大学物理学院量子材料科学中心

(Dated: May 27, 2015)

Abstract

平时看起来的没有规律的噪声涨落，实际上可以反应一定的统计规律，因此“噪声”也可以是信号，这个实验的目的就是让同学们了解到一些典型的输运测量中的噪声对应于哪些物理规律，同时也对小信号测量以及相关的数据采集分析等等有一些切身体会。实验分两部分，第一部分我们先通过测量电阻上的热噪声来估算玻尔兹曼常数，第二部分通过测量光电二极管上的散粒噪声来估算电子的电荷。

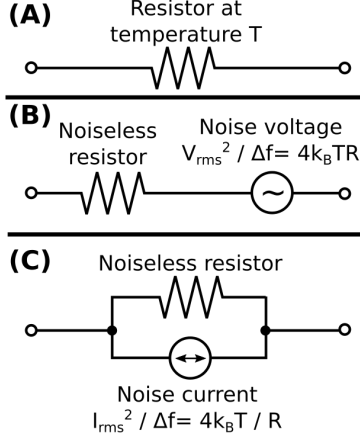


FIG. 1. 从wiki上下载的电噪声示意图。(B)(C)是两种噪声等效电路，把电阻上的热噪声等效成一个交流的电压或者电流源。

I. 原理

作为实验参考，这里仅仅给出一些简要的介绍，并给出相关的参考资料以便学生自己选择需要进一步学习哪些内容。有关热噪声可以参考wikipedia的相关条目(http://en.wikipedia.org/wiki/Johnson-Nyquist_noise)，原始文献可以参考Nyquist 和Johnson的1928年论文^{1,2}，MIT的Junior lab 有类似的实验Johnson noise and shot noise <http://web.mit.edu/8.13/www/JLExperiments/JLExp43.pdf>，Lab guide 也可以对照看一下。更系统的有van der Ziel 介绍各种电子噪声的书⁷。

热噪声(thermal noise, or Johnson noise, Nyquist noise)简单的来说和能量均分定理有关，深入的也可以联系到linear response theory and fluctuation-dissipation theorem。按照能量均分定理，在各个谐振子上面有 $k_B T/2$ 的能量，这里 T 是温度， k_B 是玻尔兹曼常数。对于电磁学来说，可以说是功率谱密度，就是在单位频率里面的功率是 $k_B T/2$ 。然后考虑到样品和探测线路之间的平衡是在两者阻抗一致的时候，那么就是 $\frac{V_n^2}{R} * 2 = \frac{k_B T}{2}$ ，因此电压涨落 $V_n^2 = 4k_B T R$ 。示意图如图1所示，如何把这个等效的噪声源引到测量系统里面在后面有介绍，测量方面相关的经典书籍是Motchenbacher and Connelly的书³。

除了热噪声，在电子线路中常见的还有散粒噪

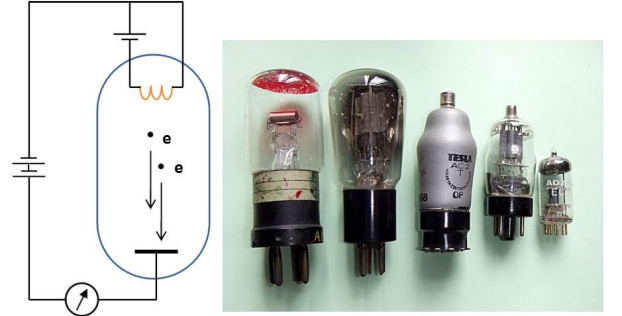


FIG. 2. 左边是真空管电路示意图，右边是从wiki上下载的真真空管的照片，包括从1918年的到60年代小型化的真空管。

声(shot noise)，可以参考wiki (http://en.wikipedia.org/wiki/Shot_noise)。其实散粒噪声比热噪声还发现得早一些，1918年Walter Schottky 就研究了真空管里面的散粒噪声，当时的真空管就类似与我们现在的白炽灯，靠加热灯丝使得电子容易发射出来，再通过电极在真空里面加速，可以参考wiki (http://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_tube)。shot noise 名字的来源就是认识到载流子所带的电荷是一份一份的。现在常见的放大器，晶体管三极管等等的信号噪声比也还是主要由散粒噪声决定的，可以参考Horowitz 的电子学的经典参考书⁴。真空管的示意图如图2所示。

真空管里面加电压热电子发射出来的过程，在电子电子之间没有相互影响的情况下(discrete particle nature)，满足泊松分布。这时候特征能量除了 $k_B T/2$ ，还有 eV ，对于隧穿势垒，如果没有非弹性碰撞，隧穿过去的电子能量还是 eV ，而如果中间有散射，最典型的情况比如声子等等，最后的能量就只能 $k_B T/2$ 了，所以热噪声和散粒噪声基本上代表两个极限情况，一个只取决于环境温度，一个只取决于结电压。对于一般的电阻，里面没有势垒，看到的是热噪声；而对于隧道结或者真空管（真空作为势垒），当 $eV \gg k_B T$ 的时候，就主要是散粒噪声。

泊松分布里面的涨落是和单位时间预计通过的平均粒子数目有关系的，假定 $I = eN$ ， N 是单位时间通过的粒子数，粒子数涨落就是 \sqrt{N} ，那么电流涨落 $I_n^2 \propto (e\sqrt{N})^2 = eI$ 。考虑到测量的是交流电压信号， R_{dc} 和 R_{ac} 可能不一样，电压涨落就是 $V_n^2 = I_n^2 R_{ac}^2$ 。更仔细的推导需要利用载流子的统计⁸，得到 $S_I = I_n^2 = 2eI \coth(eV/2k_B T)$ ，在 $eV \gg k_B T$ 的时候， $S_I = 2eI$ ，称为full shot noise。注意到这里出现了分立的电子电荷 e ，因此，测量散粒噪声可以估算电子这种基本粒子的

电量，当然，还可以用来估算一些载流子之间的关联，比如超泊松分布，分数电荷等等⁹。

由于真空管现在使用比较少也比较贵，而且相对来说电路也复杂一些（需要加热灯丝，加较高的栅极电压等等），因此实验上我们用的是光电二极管，利用小灯泡发光以及光电效应来激发出载流子，这些载流子通过势垒的时候，也产生电流散粒噪声。

II. 实验内容

A. 电阻热噪声测量

对于热噪声，如果只在室温测量，我们就是用一个铸铝做的密闭盒子，里面放了各种阻值的电阻，测量各个电阻的热噪声，就可以估算出 $k_B T$ ，根据室温大致可以估算 k_B 。如果能够变温的话，就可以得到 k_B 以及绝对零度和摄氏度的对应关系。具体测量的话，就是把样品两端的电压涨落用低噪声放大器放大后，用电脑采数卡采集，用程序把信号做傅里叶变换，得到功率谱密度(power spectral density, PSD)。

这其中有很多技术上面的细节，比如低噪声放大器自己的噪声如何和样品上的噪声区分开。要进一步了解的话可以参考Motchenbacher 关于噪声电路的书³。我们这里采用一种交叉关联的方法(cross-correlation)来把样品上的关联的噪声信号从两路同步采样通道里面提取出来，具体算法可以参考我2004年的一个小结^{5,6}以及我组里面一些本科生的课程论文和毕设论文¹⁰⁻¹³。

一个基本的概念是，任何测量设备本身也是有噪声的，对一般放大器来说，可以模型化为依赖于被测量负载的阻抗的电流噪声，和不依赖被测量负载阻抗的放大器本身的电压噪声。在考虑的时候，都是把这两种噪声折算到放大器前级，来和负载阻抗上的信号或者噪声来做比较的。我们实验中用到的电压放大器，是Ametek公司合并的原EG&G公司的Signal Recovery 系列的5186差分前置电压放大器，model 5186 low noise differential voltage amplifier。相关的参数可以看它的说明书，一般简单起见是展示为一个样品阻抗噪声等效温度图，noise figure contours，就是放大器对样品热噪声会增加多少。放大器电压噪声在低频处有一个 $1/f$ 抬起，电流噪声会在高频处抬起，所以一般是在中间的频段有最佳的噪声表现，就是放大器噪声等效成样品阻抗的附加热噪声最小。可以参考wiki (http://en.wikipedia.org/wiki/Noise_figure, http://en.wikipedia.org/wiki/Noise_temperature)，以及更系统的论述可以参考Motchenbacher 的书³。会看noise figure contours 是一个有用的技能，也是希望这次实验给大家留下的一个印象。

测量系统噪声因数，noise factor (NF) 的定义是：

$$NF = 10 \log_{10} F \quad (1)$$

$$F = \frac{T_0 + T_{sys}}{T_0} \quad (2)$$

其中 T_0 一般是室温290 K， T_{sys} 是系统附加的噪声。

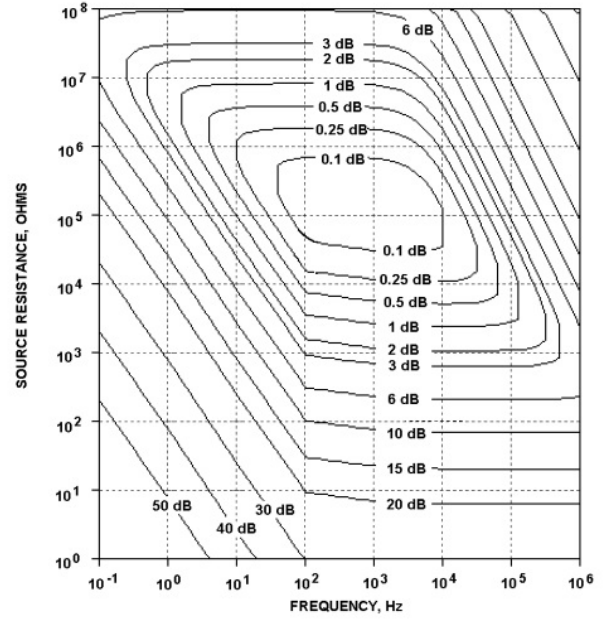


FIG. 3. 5186低噪声放大器的noise figure contours。

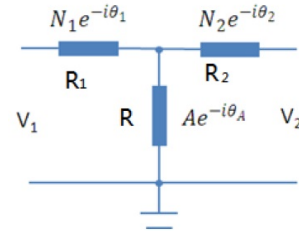


FIG. 4. cross-correlation 电路模型。

B. cross-correlation 测量

我们用的5186低噪声放大器的电压噪声最低大概是 $4 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，而热噪声对于 100Ω 电阻在室温下 $\sqrt{4k_B T R}$ 大概是 $1.3 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ ，所以如果只用一台5186测量，放大器本身的噪声比要测量的噪声还大，除非改变样品的温度来测量。但是如果有两台放大器，就可以类似四线法测量电阻能够把引线上的电阻去掉的方式，来减小放大器噪声的影响。

我们采用的就是cross-correlation（可能可以翻译成交叉相关性）测量，并且是数字化的方式。首先我们利用采数卡把两个通道的模拟信号(analog input)转换成数字信号，然后用傅立叶变换得到频域上的分量。这个方面可以看采数卡的说明书和相关介绍文档，也有专门的书籍比如经典的Oppenheim 的Digital Signal Processing¹⁴，或者在amazon可以查到的类似教科书中都有关于discrete Fourier transformation 的详细介绍。

转换成频谱后，我们看图4 的电路模型。在某个频率傅立叶变换得到的矢量对两个通道分别是：

$$\vec{v}_1 = Ae^{i\theta_A} + N_1 e^{i\theta_1} \quad (3)$$

$$\vec{v}_2 = Ae^{i\theta_A} + N_2 e^{i\theta_2} \quad (4)$$

其中 A 是样品上面待测量的（噪声）信号，而 N_1, N_2 分别是两个通道上测量系统附加的噪声。这里，我们暂且不考虑放大器电流噪声的影响，而只考虑放大器电压噪声，因此两个通道的噪声是不相关的，可以通过某种方式去掉。

我们把这其中一个矢量取复共轭，乘以另外一个矢量，得到：

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ &= A^2 + N_1 N_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + A N_1 e^{i(\theta_A - \theta_1)} \\ &\quad + A N_2 e^{i(\theta_2 - \theta_A)}\end{aligned}\quad (5)$$

其中后面三项的相角是随机的，因为不相关，所以如果做多次平均的话，理论上是可以逐渐消去的。于是剩下的实部就是样品上面噪声的大小 A 。也就是说我们希望这个随机项多次平均后要小于我们的要观测的信号：

$$\begin{aligned}N_1 N_2 \frac{\sum_n e^{i(\theta_2 - \theta_1)}}{n} &\ll A^2 \\ \overline{e^{i(\Delta\theta)}} &= \frac{\sum_n e^{i(\theta_2 - \theta_1)}}{n} \ll 1\end{aligned}\quad (6)$$

根据一般的随机过程的假定(independent identical distributed) 我们可以预计随机项随平均次数渐进于零的速度⁵。对于其中一项 $\text{Var}(e^{i(\Delta\theta)}) \propto 1/n$ ，如果考虑和 A 做比较，那么

$$\text{Var}(\sqrt{\Re \vec{v}}) \propto 1/\sqrt{n} \quad (7)$$

如果是标准方差：

$$\sigma_{\sqrt{\Re \vec{v}}} = \sqrt{\text{Var}(\sqrt{\Re \vec{v}})} \propto n^{-1/4} \quad (8)$$

也就是说要把放大器的 $4 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 减小10倍，需要平均10000次，可见这种方法还是比较耗时的。尤其是对于低频信号，每次采样也都需要较长时间才能做傅立叶变换，这里面还可能会有其他噪声进入。

对于我们要测量的热噪声和散粒噪声，由于都是白噪声，所以待测量的 A 对于各个频率是一样的，这种情况下我们可以把不同频率的cross-correlation 结果当作不同采样同一频率的结果来处理。如果每次测量利用1000个频率点，那么取样10次就可以达到平均10000个点的效果，这样就快多了。在真实情况下，我们需要选择外界干扰比较小的同时也在放大器工作范围内的频段。

C. 散粒噪声的测量

对于热噪声的测量，只需要把电阻盒两端的BNC接头接上一个“T”，然后分成两个通道接到差分放大器的输入。对于散粒噪声测量，需要一个简易的给小灯泡以及光电二极管供电的电路，放在屏蔽铝盒里面，见图5。其中小灯泡是用一个1.5V的电池供电，通过一个可调电阻可以改变光照强度。光电二极管是通过一个9V的铅酸蓄电池供电，或者通过一个外接数字电源供电，比如Keithley 2400 或者Agilent 2901A，但是用电源供电最好加一个隔地，避免引入额外的噪声。电池一般可以在噪声电路或者交流小信号电路看成是短路的。

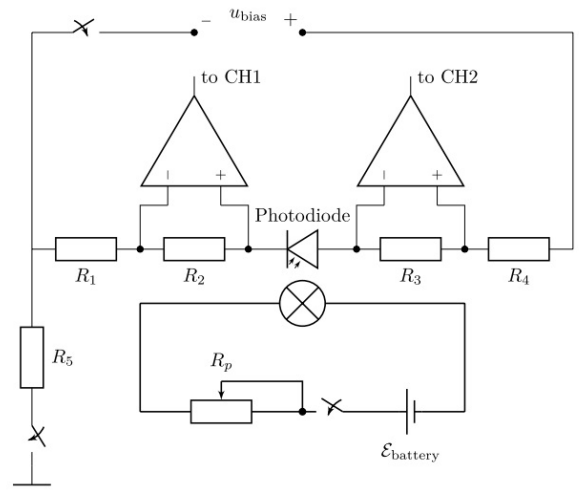


FIG. 5. 给小灯泡以及光电二极管供电的电路模型。

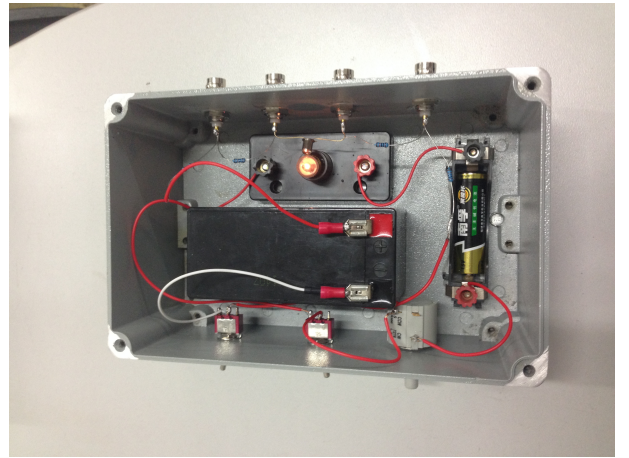


FIG. 6. 测量散粒噪声的铝盒内部照片，小灯泡已经点亮，光电二极管离得很近。

图5 也显示有两路信号，这是为了用cross-correlation 来消去 R_2 和 R_3 上面的热噪声，而得到相关的电流噪声。这里的一个近似是光电二极管的动态内阻足够大，这样大部分电流流经外接的电阻，我们才能够测量到接近于 $2eI$ 的电流噪声。图5 中 R_1 和 R_4 不是必需的，只是用来减弱一些干扰， R_5 是尝试接地看是否测量效果更好，主要是看外界耦合进去的噪声会有多大，这个在后来制作的盒子里面就去掉了。

实物图可以参看图6

D. 控温测量

对于热噪声，我们还可以用一个固定阻值电阻放在一个变温插杆里面，做室温到液氮温度的测量。除了确认热噪声对温度的依赖关系，还可以了解如何用电脑编程PID 来控温。这部分有待完善。

III. 实验安排

1. 预习相关文档，了解热噪声和散粒噪声的大致含义，理解算法，浏览测量仪器的说明书。
2. 大致看懂测量cross-correlation 的Labview 程序，了解各个参数设置，数据文件保存位置等等。鉴于以前来上近代物理实验的学生绝大部分对Labview 程序没有了解，这部分需要一定答疑讲解。
3. 测量室温下不同电阻的热噪声，估算 k_B 的大小，给出误差分析。
4. 测量光电二极管产生的散粒噪声，假定是full shot-noise，估算电荷 e 的大小，讨论误差来源。

IV. 致谢

感谢历年在我组里面的本科生，在做材料物理大实验或者毕设时候，不断的扩展，调试，更新这个测量系统，包括汤衍浩，向黎，刘晓萌，黎康梅，陈一，杨帆，周慧斌等等。文中图5 是杨帆帮助画的，给近代物理实验使用的电阻盒和散粒噪声测量盒是周慧斌制作的（图6 照片也是他拍摄），相关的电脑采数卡放大器是研究生刘亮负责的，一并致以感谢。也感谢北京大学基础实验教学条件提升改造工程的资助，以及荀坤老师的支持。

V. 开放问题

1. 测量光电二极管的电流电压曲线，得到动态电阻的大小，以便更好的估算散粒噪声。也可以考虑用锁相放大器测量 dI/dV 。
2. 可以做一个真空管的噪声测量电路。
3. 考虑在其他体系里面实现散粒噪声的测量，比如不是测量电子电荷而是其他的颗粒性参量，如磁通线带着磁通量子。
4. 一般测量的是噪声二阶谱，是否能够测量更高阶的噪声谱，对热噪声和散粒噪声是否会有不同。
5. 有时候样品阻抗太大，由于测量线路上面有杂散电容，会把频率较高的信号漏走，可否考虑共振电路来测量较高频率的噪声。
6. 电容是否有热噪声，怎么测量。
7. 如果不受仪器限制，热噪声最高能够到测量什么频率。

* weijian6791@pku.edu.cn

¹ H. Nyquist, *Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).

² J.B. Johnson, *Thermal Agitation of Electricity in Conductors*, Phys. Rev. **32**, 97 (1928).

³ C. D. Motchenbacher and J. A. Connelly, *Low-Noise Electronic System Design* (John Wiley & Sons, New York, 1993).

⁴ P. Horowitz, *The Art of Electronics* (Cambridge University, New York, 1989).

⁵ Jian Wei, *Fast convergence of white noise cross-correlation measurement archived by vector average in both frequency and time domain*, arXiv:physics/0405041v1, 2004.

⁶ Jian Wei, *Cross correlation measurements of thermal noise with cooled transformer*, Proc. of LT24, 850, 1663-1664 (2006).

⁷ Aldert van der Ziel, *Noise in solid state devices and circuits* (Wiley, 1986).

⁸ Y. M. Blanter and M. Buttiker, *Shot Noise in Mesoscopic Conductors*, Physics Reports, 336, 1166 (2000).

⁹ C. Beenakkar and C. Schönenberger, *Quantum shot noise*, Physics Today, 56(5):3742, 2003.

¹⁰ Yanhao Tang, *Design of Low Noise Preamplifier*, Jun. 2011, B.Sc., Peking University, in Chinese.

¹¹ Xiaomeng Liu and Kangmei Li, *Noise measurements and analyses*, Dec. 2011, course project, Peking University.

¹² Li Xiang, *Noise measurement and analysis in mesoscopic systems*, Jun. 2012, B.Sc., Peking University, in Chinese.

¹³ Yi Chen, *Spectral Analysis of Noise*, Dec. 2013, course project, Peking University.

¹⁴ A.V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing* (Prentice Hall, 1 edition, 1975).

* weijian6791@pku.edu.cn