Intorno di un punto

Intorno di un punto x_0 di raggio δ

$I_{x_0}(\delta) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$

$I_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x) \cup (x, x_0 + \delta)$

Massimo

$A \subset R$, M massimo di $A \iff M \in A \wedge M \geq a \quad \forall a \in A$

$M = \max A$

Minimo

$A \subset R$, m minimo di $A \iff m \in A \wedge m \leq a \quad \forall a \in A$

Unicità del massimo e del minimo

$M_1 = \max A$, $M_2 = \max A$, con $M_1 \neq M_2$

1a) $M_1 \in A$ 2a) $M_1 \geq a \ \forall a \in A$ 3a) se $M_2 \in A \to M_1 \geq M_2$

1b) $M_2 \in A$ 2b) $M_2 \geq a \ \forall a \in A$ 3b) se $M_1 \in A \to M_2 \geq M_1$

3a) e 3b) devono verificarsi contemporaneamente

$M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1 \to M_1 = M_2$

Maggiorante e minorante di un insieme

$A \subset \mathbb{R}$, L maggiorante di $A \iff L \geq a, \forall a \in A$

$A \subset \mathbb{R}$, l minorante di $A \iff l \leq a, \forall a \in A$

Estremi di un insieme numerico

$l_{sup} \in \mathbb{R}$ estremo superiore di A $l_{sup} = \sup(A)$, se l_{sup} è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A

$$l_{sup} = \sup(A) = \begin{cases} l_{sup} \geq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : l_{sup} - \varepsilon < a \end{cases}$$

l_{inf} estremo inferiore di A $\inf(A)$, minimo dell'insieme dei minoranti

$$l_{inf} = \inf(A) = \begin{cases} l_{inf} \leq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : l_{inf} + \varepsilon > a \end{cases}$$

PAG 28

Applicazione o funzione

Siano A e B due insiemi, si definisce funzione (app..) da A in B la terna (A, B, f), dove f è una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B, si scrive: $f: A \to B$

$A \xrightarrow{f} B$ $\quad x \to f(x) \quad\quad x \to y = f(x)$

A = dominio o insieme di definizione

B = codominio o insieme di arrivo

$x \in A$ var indip. o argomento

$y \in B$ var dip. o valore o immagine di x

Esempio $f: N \to N$ $\quad n \to 2n$ $\quad$ f. associa ad ogni $n \in N$ il suo doppio

Funzione iniettiva

$f: A \to B$ si dice iniettiva se:

$\forall x', x'' \in A, \; x' \neq x'' \to f(x') \neq f(x'')$

valori distinti della var indi. x corrisp. valori distinti di $f(x)$

Esempio $f: R \to R$ $\quad f(x) = x^3$

Funzione Suriettiva

$f: A \to B$ è suriettiva se $f(A) = B$ risulta che l'insieme immagine è B

Esempio $f: R \to R$ $\quad f(x) = x^3$

Funzione Biiettiva

$f: A \to B$ è biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva

Esempio $f: R \to R$ $\quad f(x) = x^3$

Funzioni pari, dispari e periodiche

$f: A \to B$, si dice che $f(x)$ è:

- pari se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$ Es $f(x) = x^2$
- dispari se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$ Es $f(x) = x$
- periodica di periodo T se $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in A$ Es $f(x) = \cos x$

Funzioni monotone

$f: A \to B$

$\forall x', x'' \in A$, $x' < x'' \to f(x') < f(x'')$ crescente $f(x) = x$ $R \to R$

$\forall x', x'' \in A$, $x' < x'' \to f(x') \leq f(x'')$ non decrescente $f(x) = 2x$ $R \to R$

$\forall x', x'' \in A$, $x' < x'' \to f(x') > f(x'')$ decrescente $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\forall x', x'' \in A$, $x' < x'' \to f(x') \geq f(x'')$ non decrescente

Funzioni limitate

$f: A \to B$ è:

limitata superiormente se: $\forall x \in A$, $\exists k \in R$: $f(x) \leq k$

limitata inferiormente se: $\forall x \in A$, $\exists m \in R$: $m \leq f(x)$

limitata se: $\forall x \in A$, $\exists k, m \in R$: $m \leq f(x) \leq k$

Punti di massimo e minimo assoluto

$f(x): A \to B$, $x_0 \in A$ è un punto di massimo assoluto se:

$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$

$x_0 \in A$ punto di minimo assoluto se:

$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A$

Punti di massimo e minimo relativi

$f: A \to B$

x_0 p. max relativo per f se: $\quad \exists I_\delta(x_0)$

$\exists I_\delta(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cup \{x_0\}$

x_0 p. min relativo per f se:

$\exists I_\delta(x_0) \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \cup \{x_0\}$

Composizione di funzioni

$f: X \to B \qquad g: B \to Z$

$y = f(x)$, $x \in X$, $y \in B$ e $z = g(y)$, $y \in B$, $z \in Z$

Se $Y \cap f(x) \neq \emptyset$ allora la arrivo considerare la f. composta:

$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

esterna

$\bar{X} = \{x \in X : f(x) = Y\}$

Funzioni trigonometriche

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Funzione inversa

$f: A \to B$, $f(A) = B$ f è biiettiva, esiste una sola funzione inversa: $f^{-1}: B \to A$ $y \to f^{-1}(y) = x$

tale che: $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

PAG 40

Successioni

$S_n: N \to R$

crescente: $\forall n_1, n_2 \in N$, $n_1 < n_2$ risulta $y_{n_1} < y_{n_2}$

non decrescente: $\forall n_1, n_2 \in N$ $n_1 < n_2$ risulta $y_{n_1} \leq y_{n_2}$

decrescente: $\forall n_1, n_2 \in N$ $n_1 < n_2$ risulta $y_{n_1} > y_{n_2}$

non crescente: $\forall n_1, n_2 \in N$ $n_1 < n_2$ risulta $y_{n_1} \geq y_{n_2}$

Punto di accumulazione

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ eventualmente non appartenente ad A

x_0 è punto di accumulazione per l'insieme A se comunque si prende un intorno di x_0 esso contiene almeno un punto $a \in A$

x_0 punto di accumulaz. se $\forall I_\delta(x_0),\ \exists a \in A \cap I_\delta(x_0)$

Si def. insieme derivato di $A \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme dei suoi punti d'accumulazione, si indica con A' o DA.

$A \subset \mathbb{R}$ limitato ed infinito ammette sempre almeno un punto di accumulazione

$A \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente (o sup.) ammette $-\infty$ ($+\infty$) come punto di accum.

Esempio

$A = \{ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

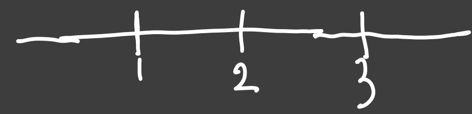
$\forall x \in A \rightarrow x \notin A'$

$x = 0$ p. di accum.

Dimostrazione: comunque si prende $I_\delta(0)$, tutti gli inf. elementi di A tali che $\frac{1}{n} < \delta$ appartengono al suddetto intorno

Limiti di successioni

$\{y_n\}_{n \in N}$ $\quad y_n : N \to R$ $\quad$ Dominio $N \subset R$ non-finito:

- non ammette punti di accumulaz. al finito 
- $+\infty$ punto di accum.

Quando $n \to +\infty$ possono verificarsi: se la una tra 1) e 2) è detta successione regolare
altrim. " irregolare

1) y_n tende al valore finito l
2) $y_n \to +\infty$ oppure $y_n \to -\infty$
3) y_n non tende ad un valore ma oscilla

Se y_n tende a l vuol dire che $n_1 < n_2$

$$|y_{n_2} - l| \leq |y_{n_1} - l|$$

la differenza $|y_n - l|$ diventa sempre più piccola all'aumentare dei valori di n.

Definizione Data una succ. numerica $\{y_n\}_{n \in N}$ a valori in R si dice che essa converge ad un limite finito l e si scrive:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = l$$

se

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in N : \forall n > \nu$ risulta $|y_n - l| < \varepsilon$

Esempio

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 3$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in N : \forall n > \nu$ risulta $|a_n - 3| < \varepsilon$

Definizione Data $\{y_n\}_{n \in N}$ si dice che diverge positivamente:

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty$$

se

$\forall K > 0, \exists \nu \in N : \forall n > \nu$ risulta $y_n > K$

Definizione $\{y_n\}_{n \in N}$ diverge negativamente:

$$\lim_{x \to +\infty} y_n = -\infty$$

se

$\forall K > 0\ \exists \nu \in N : \forall n > \nu$ risulta $y_n < -K$

Teoremi sui limiti di successione

Ogni successione regolare ha un unico limite

Dimostrazione

Supponiamo, per assurdo, che $\{y_n\}_{n \in N}$ ammette due limiti distinti $l_1 \neq l_2$, allora:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_1 \in N : \forall n > \nu_1$ risulta $|y_n - l_1| < \varepsilon$ ovvero $l_1 - \varepsilon < y_n < l_1 + \varepsilon$

$$-\varepsilon < y_n - l_1 < \varepsilon \longrightarrow l_1 - \varepsilon < y_n < \varepsilon + l_1$$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_2 \in N : \forall n > \nu_2$ risulta $|y_n - l_1| < \varepsilon$ ovvero $l_2 - \varepsilon < y_n < l_1 + \varepsilon$

fissato $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ le due relaz. precedenti valgono contemp. per ogni $\varepsilon > 0$, questo non è possibile per tutti i valori di ε tali che:

$$\varepsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Per ε minore della metà dei due limiti le due relaz. non valgono contemp.

$$|l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon| \cap |l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon| = \emptyset$$

y_n non può appartenere ad entrambi intervalli

Successioni estratte

Consideriamo num. naturali in ordine crescente

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

e sia

$$z_k = y_{n_k}$$

I numeri $\{z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots\}$ formano una successione estratta della successione $\{y_n\}$.

Esempio $a_n = n^2$

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

successione estratta a_{n_k} ha indici pari a $2k$
I termini della successione estratta di a_n sono:
$a_{n_k} = 4, 16, 36, \dots$

Se $\{y_n\}_{n \in N}$ ammette un limite finito o infinito, ogni succ. estratta ammette lo stesso limite

Ogni succ. convergente è un insieme num. limitato, $\exists h, k \in R$ tali che
$\exists \nu \in N: \forall n > \nu$ risulta $h \leq \lim_{n \to +\infty} y_n \leq k$

Teorema dei Carabinieri

$\{y_n\}_{n \in N}$, $\{y'_n\}_{n \in N}$, $\{y''_n\}_{n \in N}$ tre succ. numeriche tali che:
1) $\lim_{n \to +\infty} y'_n = \lim_{n \to +\infty} y''_n = l$

2) $y'_n \leq y_n \leq y''_n \quad \forall n \in N$
allora anche y_n converge allo stesso limite
$$\lim_{n \to +\infty} y_n = l$$

Teorema del confronto

$\{y_n\}_{n\in N}$, $\{y'_n\}_{n\in N}$ tali che:

$$\lim_{n\to+\infty} y'_n = +\infty \quad |-\infty|$$

ed inoltre

$\exists \nu \in N : y'_n \leq y_n \,,\ \forall n > \nu$

allora $\{y_n\}_{n\in N}$ è divergente positivamente (negat.)

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \quad |-\infty|$$

Teorema della permanenza del segno

$\{y_n\}_{n\in N}$, se risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l > 0 \quad |<0|$$

allora:

$\exists \nu \in N : \forall n > \nu \,,\ y_n > 0 \quad |<0|$

Criterio di convergenza di Cauchy

Cond necessaria e suff. affinché una successione $\{y_n\}_{n\in N}$ converga è che, comunque si assegni un numero reale $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un indice naturale ν tale che per ogni coppia di indici naturali m ed n maggiori di ν risulti:

$$|y_n - y_m| < \varepsilon$$

CNS affinché $\{y_n\}_{n\in N}$ sia convergente è che

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in N : \forall m, n \in N,\ m, n > \nu$ risulti: $|y_n - y_m| < \varepsilon$

Operazione sui limiti delle successioni

$\{y_n'\}_{n\in N}$ e $\{y_n''\}_{n\in N}$ e $c_1, c_2 \in R$ due costanti reali

$\{y_n\}_{n\in N}$ $\quad y_n = c_1 y_n' + c_2 y_n''$ si dice comb. lineare delle successioni

$\{y_n'\}_{n\in N}$ e $\{y_n''\}_{n\in N}$

Teorema se $\{y_n'\}$ e $\{y_n''\}$ sono convergenti allora anche $\{y_n\}$ è convergente e si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = c_1 \lim_{n\to+\infty} y_n' + c_2 \lim_{n\to+\infty} y_n''$$

PAG 45

Corollario

$\{y_n'\}$ e $\{y_n''\}$ due succ. convergenti, allora si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} c\, y_n' = c \lim_{n\to+\infty} y_n'$$

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n' + y_n'') = \lim_{n\to+\infty} y_n' + \lim_{n\to+\infty} y_n''$$

Definizione $\{y_n'\}$ e $\{y_n''\}$ due succ, la succ $\{u_n\}$

$u_n = y_n' \cdot y_n''$ si dice prodotto delle succ $\{y_n'\}$ e $\{y_n''\}$

Teorema se $\{y_n'\}$ e $\{y_n''\}$ sono convergenti anche $\{u_n\}$ è convergente

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} y_n' \quad \lim_{n\to+\infty} y_n''$$

PAG. 54 Limite delle funzioni

Limite per $x \to x_0$ Data $f: A \to B$ ed un suo punto di accumulazione $x_0 \in A'$:

1) f ammette un limite finito l_s, per x che tende a x_0 da sinistra (limite sinistro) e si scrive:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_s$$

se accade che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \,]x_0-\delta, x_0[\text{ risulta } |f(x) - l_s| < \varepsilon$$

2) " " " l_d " " " " " da destra (limite destro) " " " "

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_d$$

se accade che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \,]x_0, x_0+\delta[\text{ risulta } |f(x) - l_d| < \varepsilon$$

3) limite finito l per x che tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

oppure

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$

diverge positivam. (neg.)

4) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$

se accade che

$\forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$ risulta $f(x) > K \quad [f(x) < -K]$

5) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$

se accade che

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$ risulta $f(x) > K \quad [f(x) < -K]$

6) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $[-\infty]$

se accade reciprocamente

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulta $f(x) > K$

ovvero

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulta $f(x) < -K$

7) f. è infinitamente grande in x_0 e si scrive

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

se accade che

$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ risulta $f(x) > K$

Def. per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ PAG. 56

f. definita in un insieme non limitato $A \subseteq R$ diremo:

1) ammette limite finito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x}$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{x} : \forall x < \bar{x}$ risulta $|f(x) - l| < \varepsilon$

2) diverge positivamente

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x} \longrightarrow f(x) > K$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x < \bar{x} \longrightarrow f(x) > K$

3) diverge negativamente

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x} \longrightarrow f(x) < -K$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x < \bar{x} \longrightarrow f(x) < -K$

4) infinitamente grande

$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x} \longrightarrow f(x) > K$

$\lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty$ se $\forall K>0\ \exists \bar{x} : \forall x < \bar{x} \longrightarrow f(x) < -K$

Esempio PAG 56

$f(x) = c \quad c \in \mathbb{R} \quad D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} c = c \qquad \lim_{x \to +\infty} c = c \qquad \lim_{x \to -\infty} c = c$

Verifichiamo il primo caso

$|f(x)-c|<\varepsilon \to -\varepsilon < c-c < +\varepsilon \to -\varepsilon < \varepsilon$

è sempre vero $\forall_{\delta>0}$

$$\lim_{x\to+\infty} c = c$$

$\forall_{K>0}, \exists \bar{x} : \forall x > \bar{x} \to f(x) > K \qquad c > K$

Esempio PAG. 57

$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} \quad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \{-1,1\}$ si ha:

1) $\forall x<0 \quad \operatorname{sgn}(x) = -1$ $\qquad 0$ = punto di accumulaz.

2) $\forall x>0 \quad \operatorname{sgn}(x) = 1$

$$\lim_{x\to0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \lim_{x\to0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

la funzione non ammette limite $x \to x_0$

Operazioni sui limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m$$

1) limite comb. lineare $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ Vale:

$$\lim_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \lim_{x\to x_0} f(x) + c_2 \lim_{x\to x_0} g(x) = c_1 l + c_2 m$$

2) limite prodotto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l \cdot m$$

3) limite rapporto $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$$

4) limite funzione potenza (intera) $h(x) = f(x)^{\frac{m}{k}}$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\frac{m}{k}} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^{\frac{m}{k}} = [l]^{\frac{m}{k}}$$

$l > 0$ per n pari

$l \neq 0$ per n dispari

Continuità di una funzione PAG. 59

$A \subseteq R$, il punto $x_0 \in A$ è punto interno di A se esiste un intorno completo di x_0 costituito tutto da elementi di A se:

$$\exists \delta > 0 : A \cup I_\delta(x_0) = A$$

Continuità nel punto

f. definita in (a,b] è continua nel punto $x_0 \in]a,b[$ interno dell'intervallo (a,b), se accade che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Punto di frontiera

$A \subseteq R$, x_0 è punto di frontiera (o punto estremo) di A se comunque si prende un intorno completo di x_0 $I_\delta(x_0)$ esso contiene punti appartenenti ad A e punti non appartenenti ad A.

f. definita in $]a,b[$ opp. $[a,b)$ è continua nei punti di front. a,b dell'intervallo $]a,b[$, se accade che:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Continuità nell'intervallo PAG 60

f. def. in (a,b) opp. [a,b] è continua $\forall a \in (a,b)$ se:

$$\forall x^* \in]a,b[\rightarrow \lim_{x \to x^*} = f(x^*)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Operazioni tra funzioni continue PAG. 60

f e g posso definire le funz. comb. lineare, prodotto e rapporto.
c_1 e c_2 sono costanti reali, f e g continue in x_0 allora sono continue in x_0 anche:

1) $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$

2) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

3) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Teorema f. continua in A e in $x_0 \in A$ e sia $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ una succ. num. convergente in x_0:

$\lim_n f(x_n) = f(x_0)$ $\qquad$ $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$

Funzioni uniformemente continue

f. def. in (a,b) si dice unif. continua in (a,b) se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in (a,b),\; |x' - x''| < \delta$ risulta $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

valgono le seguenti proprietà:

1) una f. unif. cont. in (a,b) è anche continua in (a,b)

2) f. continua in un intervallo chiuso [a,b] è anche unif. continua.

3) f. cont. in un int. chiuso non limitato e convergente all'infinito è unif. continua.

4) f. unif. cont. in un int. aperto e limitato]a,b[può essere prolungata in una f. cont. nell'int. chiuso [a,b].

Proprietà funzioni continue PAG 61

Teorema perm. del segno se una f. def in (a,b) è continua e positiva/negativa in $x_0 \in (a,b)$, esiste un intorno x_0, $I_\delta(x_0)$ nel quale f. è ancora pos/neg.

Teorema di esistenza degli zeri: se f. def. in (a,b), se è continua in x_0 tale che, comunque si prende $I_\delta(x_0)$ essa assume sempre in tale intorno sia val. pos. che val. non pos. allora si ha $f(x_0) = 0$

Teorema di Weierstrass f. continua nell'int. chiuso e limitato [a,b] è sempre dotata di un minimo m e di un massimo M

Teorema $f(x)$ cont. nell'int. chiuso [a,b] assume tutti i valori nell'int. [m, M]

Punti di discontinuità delle funzioni

Sia f. def. in (a,b) e sia $c \in (a,b)$, se:

1) se $\nexists \lim_{x \to c} f(x)$

2) se pur essendo convergente, risulta: $\lim_{x \to c} f(c) \neq f(c)$

allora c è un punto singolare o di discontinuità della funzione $f(x)$

Punti di discontinuità eliminabile PAG. 62

1) Se $\lim_{x \to c} f(c) \neq f(c)$, basta def. la funz.

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \neq c \\ f(c) & x = c \end{cases}$$

2) Se f. è def. per $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ e $\lim_{x \to c} f(x) = L$

allora def. una nuova f. detta estensione continua o prolungamento per continuità

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in (a,b),\ x \neq c \\ L & x = c \end{cases}$$

Discontinuità di I specie PAG 62

f. def. in (a,b) e $c \in (a,b)$, la discont. è di I specie se la f. non ammette di limite in c, è ammette di lim destro e sinistro distinti:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 , \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2 \quad e \quad l_1 \neq l_2$$

Discontinuità di II specie

Se almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) non esistono per $x \to c$

Punto di infinito

c'è un punto di inf. della funzione se $f(x)$ è divergente a destra opp. a sinistra oppure da entrambi i lati.

Teorema I punti di discon. di una f. continua sono tutti di I specie

Teorema Se f. è una f. monotona nell'int. $[a,b)$ ed assume tutti i val compresi fra $f(a)$ e $f(b)$, allora $f(x)$ è continua $\forall x \in [a,b]$

Teorema Sia $a \in \mathbb{R}$ una costante reale, le f:

x^a, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$

sono continue in ogni int. limitato che non contenga punti in cui non sono definite

Esempio PAG 62

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \qquad D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Consideriamo nel punto $c = 1$ del D_f, si def:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{x+1} & \forall x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$F(x)$ è il prolungamento per continuità della funzione f per $x = 1$

Derivate delle funzioni PAG 65

f. def. in (a, b) e siano $x, x_0 \in (a, b)$, si pone:

1) incremento della funzione f: $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

2) inc. della var. ind. $\Delta x = x - x_0$

3) rapporto incrementale: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Si def. derivata della funz. f nel punto x_0, il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale al tendere $x \to x_0$, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ovvero

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se f. ammette derivata in x_0 allora si dice derivabile in x_0

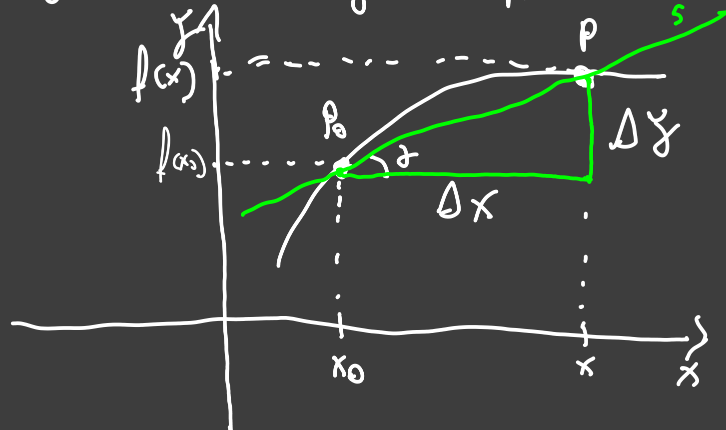
Se f. è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo, allora risulta definita una nuova funzione che chiameremo funzione derivata prima, si indica:

$Df(x)$, $f'(x)$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{df}{dx}$

Teorema PAG 66 Se f. è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0

Interpr. geometrica della derivata Δy e Δx sono i lati del triangolo rettangolo chiuso dall'ipotenusa P_0P, la lunghezza di un lato è uguale alla lunghezza dell'altro per la tangente dell'angolo α opposto al primo lato

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



Passando al limite $x \to x_0$ la retta secante su cui giace l'ipotenusa P_0P tende alla retta tangente alla curva $y=f(x)$, B angolo che tale retta tangente forma con l'asse delle x

$$\tan B = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Equaz. della retta s passante per i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$ si ottiene:

$$\frac{Y-f(x_0)}{f(x)-f(x_0)} = \frac{X-x_0}{x-x_0} \longrightarrow Y-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ponendo il limite $x \to x_0$ in entrambi i membri, si ottiene l'equaz. della retta tangente in x_0

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$

Punti angolosi e cuspidi PAG 67

x_0 appartenente a D_f è un punto angoloso se f. non è derivabile nel punto x_0 ed esistono finiti e distinti limiti destro e sinistro

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lambda' \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lambda'' \quad \text{con } \lambda' \neq \lambda''$$

$x_0 \in D_f$ è un punto cuspide o cuspide se f è non derivabile in x_0 e si verifica uno dei seguenti casi:

a) $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$$

oppure

b) $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$$

Differenziale

f. reale deriv. in (a, b), si considera la quantità

$$w = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} w = 0$$

$\Delta f = f'(x)\Delta x + w\Delta x$

Si def. differenziale della f. $y = f(x)$, si indica con dy o df la quantità $dy = df = f'(x)\Delta x$ da cui $\Delta f = df + w\Delta x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{1}{w} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{df}{w\Delta x} \right| = +\infty$$

Teorema di Lagrange PAG 70

Sia f. una funz. reale definita e continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora:

$\exists \xi \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$

Inter. geometrica la retta che unisce i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ forma con l'asse x un angolo α la cui tangente è

$$\tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

esiste una tangente alla curva $G_f = \{(x,y) : x \in [a,b], y = f(x)\}$ parallela alla retta che passa per gli estremi A e B, il punto di tangenza è $P = (\xi, f(\xi))$

Teorema di Rolle

Sia f funz. reale def. continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e sia $f(a)=f(b)$, allora:

$$\exists \varepsilon \in]a,b[: f'(\varepsilon)=0$$

Il teorema afferma che esiste almeno un punto ε, interno a $[a,b]$, in cui la derivata di f. sia nulla.

Se $f(a)=f(b)$ allora $\tan\alpha=0$

Teorema di Cauchy PAG. 70

Siano f e g funz. real. def. continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, se f' e g' si annullano contemporaneamente e $g(a)\neq g(b)$ allora:

$$\exists \varepsilon \in]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Primo teorema di De l'Hopital PAG 71

Siano f e g due funz. reali def. e derivabili in un inter. (a,b), sia $x_0 \in (a,b)$ tale che: $f(x_0)=g(x_0)$

sia: $g'(x)\neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

ed inoltre esiste il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora anche il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è ben determinato e vale la relazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

PAG 71 Estensione del primo teorema di De l'Hopital

f e g def. e derivabili in (a,b), continue per $x \neq x_0$ ed infinitesime per $x \to x_0$, se, infine:

$$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Secondo teorema di De l'Hopital PAG 72

f e g due funz. reali def. e derivabili in (a,b), $x \neq x_0$. Siano le funz. infinitamente grandi per $x \to x_0$, se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ e se esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale la seguente uguaglianza: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Forma $0 \cdot \infty$ PAG 72

Siano f e g due funz. reali def. e deriv. in (a,b), x_0 punto di accumulazione (finito o infinito) di (a,b), tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Considerata la funz. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ per la quale si ha: $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)}$$

Forma indeterminata $\infty - \infty$ PAG 72 | | | \ \ \ tali che:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e per le quali si intende studiare il

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$$

riscrivendo la differenza nella forma:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

Forme indeterminate che originano da $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ PAG 73

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ è lecito scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)}$$

si possono presentare in alcuni casi:

1) $\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$ per la continuità della f. exp si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = l$$

se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 $l = f(x_0)^{g(x_0)}$

2) $\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) = "0 \cdot \infty"$

Può presentarsi nei tre casi:

b1) $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \to \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} \to 0^0$

b2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \to \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} \to +\infty^0$

b3) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 \to \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} \to 1^\infty$

Si risolvono:

b1) $g(x) \ln f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oppure $g(x) \ln f(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}$

b2) $g(x) \ln f(x) = \dfrac{\ln f}{\frac{1}{g(x)}}$ oppure $g(x) \ln f(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}$

b3) $g(x) \ln f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Regola di De l'Hopital esempi calcolare $\lim_{x \to 0} x^a \ln x$, per $a > 0$

$$\lim_{x \to 0} 0^a \ln 0 = 0 \cdot -\infty$$

si può risolvere

$$\lim_{x \to 0} x^a \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-a}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^a}{a} = 0$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-a x^{-a-1}} = x^{-1} \cdot \frac{x^{a+1}}{-a} = -\frac{x^a}{a}$$

Asintoti dei diagrammi PAG 74

Si dice che una retta r di equaz. $y = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$ è un asintoto per il diagramma della funzione $f(x)$ se la distanza d tra la retta ed il punto del diagramma di ascissa x tende a 0 al tendere di x a $+\infty$. f. definita in un int. del tipo $(a, +\infty)$

Se f. è def. in $(-\infty, b)$ la retta di eq. $y = mx + n$ è un asintoto ,,,,, se la distanza d tra la retta ed il punto del diagramma di ascissa x tende a 0 al tendere di x a $-\infty$

Teorema PAG 74 CNS affinché la retta $y = mx + n$ sia asintoto per f. def in $(a, +\infty)$ $[(-\infty, b)]$ è che risulti

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0$$

da cui si ha che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right]$$

Il coef. angolare e/o il termine noto dell'asintoto sono dati da:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Casi particolari PAG 74

1) Asintoti obliqui: si ottengono nel caso $m \neq 0$

2) Asintoti orizzontali: per $m = 0$, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ allora l'asintoto è $y = n$ dove

$$n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

se $x \to +\infty$ A.O. destro   se $x \to -\infty$ A.O. sinistro

3) Asintoti verticali: la r $y = mx + n$ non può essere parallela all'asse y, non ci possono essere A.V. per $x \to \pm\infty$, f. ha un AV in x_0 se accade una o entrambe di queste cond:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

asintoto destro se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

asintoto sinistro se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Funzioni Crescenti e Decrescenti PAG 75

Una f. R di var R è crescente in $x_0 \in D_f$ se:

$\exists I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x+\delta[: \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\to f(x) < (\leq) f(x_0)$

e $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[\to f(x) > (\geq) f(x_0)$

Teorema PAG 75 f. R var R def. e der. in x_0 ha derivata prima positiva (negativa) in x_0

$f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ allora f. è crescente (decrescente) in x_0

Massimi e minimi di una funzione PAG 75

$x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo [minimo] relativo per una f. reale, def. in (a, b) se si può trovare un suo intorno nel quale si a, per ogni x dell'intorno, $f(x) \leq f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$

Si dice che x_0 è un punto di massimo [minimo] relativo proprio, se:

$\exists I_\delta : \forall x \in I_\delta \to f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$

Teorema PAG. 75 Sia f. una funz. R di var R, dotata di derivata seconda in $x_0 \in D_f$. , CN affinché x_0 sia massimo [minimo] relativo è che risulti:

$f'(x_0)=0$ ed $f''(x_0)\leq 0$ $[f''(x_0)\geq 0]$

Teorema PAG 76 Sia f. funz R. di var R, dotata di der. seconda in $x_0 \in D_f$. CS affinché f. in x_0 abbia un massimo [minimo] relativo è che risulti:

$f'(x_0)=0$ ed $f''(x_0)<0$ $[f''(x_0)>0]$

Teorema PAG 76 Sia f. funz R. di var R, dotata di der. seconda in $x_0 \in D_f$. Se $f''(x_0)\neq 0$ allora il diagramma di $f(x)$ volge nel punto x_0, la concavità ovvero la convessità nel verso dell'asse y secondo che sia rispettivamente $f''(x_0)>0$ ovvero $f''(x_0)<0$

$f''(x_0)>0$ $\cup$ convessa

$f''(x_0)<0$ $\cap$ concava

Teorema PAG 76 Sia f. funz R. di var R, dotata di der. seconda in $x_0 \in D_f$. CN affinché x_0 sia un punto di flesso del diagramma di $f(x)$ è che risulti $f''(x_0)=0$

Teorema PAG 76 Sia f. funz R. di var R, dotata di der. seconda in $x_0 \in D_f$. Se $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)\neq 0$ allora x_0 è un punto di flesso proprio del diagramma di $f(x)$