22-12-2022

TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

Si può ottenere un risultato identico non utilizzando la convoluzione, ma la trasformata di Fourier nel seguente modo:

1. si calcola **la trasformata tramite convoluzione dell'immagine** e la **trasformata del kernel**.
2. Dopodiché si applica il **prodotto puntuale tra la trasformata dell'immagine e quella del kernel**.
3. Applico **l'antitrasformata** (*alla nuova matrice che si ottiene dopo il prodotto*)
4. Ottengo quello che in origine avrei ottenuto applicando la convoluzione con il kernel.

Formalmente si ha:

La convoluzione di due segnali nel dominio spaziale equivale all'antitrasformata del prodotto delle frequenze.

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

Quindi se l'operazione di convoluzione nel dominio spaziale è così definita:

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

La stessa operazione nel dominio delle frequenze diventa:

$$g(x,y)=F^{-1}\{F(u,v)H(u,v)\}$$

In altre parole...

Per il teorema di convoluzione potresti utilizzare la trasformata di Fourier sull'immagine e sul kernel. Dopodiché fai il prodotto puntale. Ottieni la matrice **G(u, v)** e, facendo l'anti-trasformata ottieni **g(x,y)** cioè l'immagine filtrata ottenuta con convoluzione.

> Mi conviene utilizzare questa procedura perché, nello spazio 1D, passo da una complessità (n^2) a $(n\ logn)$ quindi si **RIDUCE** la complessità.
> Questa differenza di complessità deriva dal fatto che l'operazione della **convoluzione** è **quadratica**, l'operazione della **trasformata è lineare**.
> Quindi conviene utilizzare le trasformate.

- Questo teorema si può dimostrare, ma non lo si fa.

> F^{-1} corrisponde all'*antitrasformata* (si dovrebbe mettere la F in corsivo).

PROBLEMI

1. Il kernel non ha dimensioni pari all'immagine, quindi non corrispondono;
    - Per risolvere questo problema basta considerare che **un impulso è circondato da zeri**
    - Il **kernel è la risposta all'impulso**.
    - Se si presenta sobel, fuori dalla matrice c'è zero.
    - Quindi nulla vieta **mettere un numero di zeri nel kernel che possa fare ottenere la stessa dimensione tra kernel e immagine**. A questo punto posso applicare la trasformata.
    - Non occupo spazio in memoria perché non devo memorizzare gli zeri del kernel perchè essi sono solo temporanei.

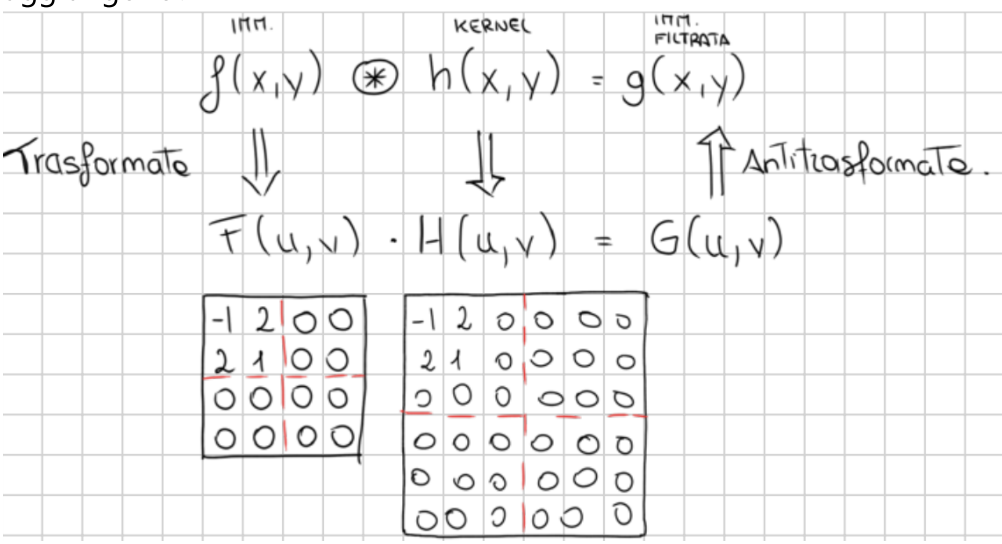
FILTRAGGIO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Il **kernel può anche essere molto più grande**, ma con maschere più piccole diviene più efficiente il calcolo nel dominio spaziale.
Inoltre se il **filtro ha dimensioni confrontabili con quelle dell'immagine** è più **EFFICIENTE** computazionalmente effettuare il filtraggio nel **dominio delle frequenze**.

> Se, ottimizzando, si ha motivo di credere che l'input abbia dimensioni limitate, allora non deve essere considerato il comportamento asintotico.

Applicazione:

Prima di applicare la trasformata, si aggiungono degli zeri nel kernel. Quanti se ne aggiungono?



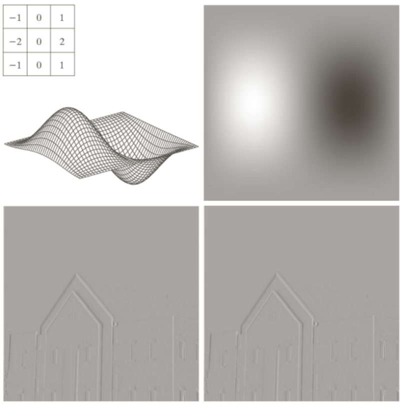
> Altrimenti basta aggiungere $\frac{dimensione\ dell'immagine\ -\ dimensionedelkernell}{2}$ zeri

Esempio con i numeri

Data un'immagine I 5x5 e il kernel K 3x3
Applicando la formula soprastante si ha che:

- dim(I) = 5; dim(K)=3
- Allora si aggiungono $\frac{5-3}{2} = 1$ colonne/righe di zeri
- Quindi una colonna a sinistra e una a destra, una riga sopra e una sotto

> Un'altra possibile opzione è quella di **mettere tutti gli zeri a destra e sotto** e poi si fa lo **shift(traslazione)**.
> *Funziona lo stesso* (è come quando abbiamo spostato il rettangolo) perché abbiamo un area in cui ci sono solo zeri



- L'immagine ha lo spettro come nella figura in alto a sinistra;
- L'immagine in alto a destra è la trasformata di Sobel_x e Sobel_y (una volta aggiunti gli zeri);
- Le due immagini sottostanti sono **identiche** perché la prima a sinistra si ottiene con la **convoluzione** e il **kernel**
- la seconda a destra si ottiene perché si ottiene con l'**antitrasformata** della trasformata dell'immagine $\times$ la trasformata del kernel.

Note:

- Se altero i coefficienti nel dominio di Fourier, come posso avere l'antitrasformata con dei numeri complessi?
  - Se ho dei numeri complessi nel dominio spaziale basta prendere solo la parte reale "buttando" quella immaginaria (**non si fa il modulo**).

FILTRI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

- E' possibile generare un filtro direttamente nel dominio delle frequenze?
- Esistono **diversi tipi di filtri** solo per il dominio delle frequenze:

1. filtri **PASSA-ALTO**;
2. filtro **PASSA-BASSO**;
3. filtro **PASSA-BANDA**.

Filtri passa-basso

Alterare tutte le frequenze che sono al di sopra di una certa frequenza e lascia uguali quelli delle basse frequenze (quelle sotto una certa soglia).
Si ha una riduzione della nitidezza, quindi si ha RIMOZIONE DEGLI EDGE.

Possiamo avere:

1. Filtro passa-basso **IDEALE**;
2. filtro passa-basso **BUTTERWORTH**;
3. filtro passa-basso **GAUSSIANO**.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$	$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Filtro ideale

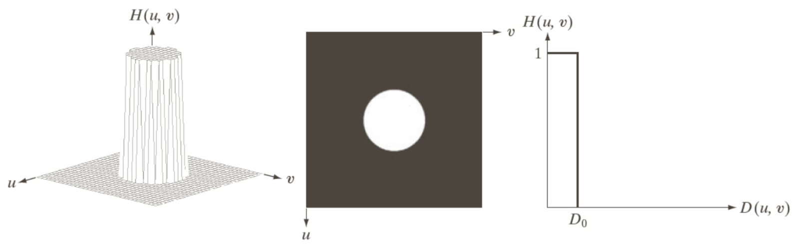
$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & if\ D(u,v) \le D_0 \\ 0 & if\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

Dove:

- $D(u,v)$ è la **distanza euclidea** dal **CENTRO** al pixel di posizione (u,v) del filtro (cioè dal **_centro della matrice_**)

$$D(u,v) = [(u - \frac{P}{2})^2 + (v - \frac{Q}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$$

- $D(0)$ è la frequenza sotto al quale voglio lasciare passare e sopra al quale voglio cambiare, cioè la **FREQUENZA DI TAGLIO**.
- P e Q sono le dimensioni
- $D(u,v)$ ha una forma circolare (con raggio pari a D_0) bianco e il resto è nero.



Esempio con i numeri:

Data l'immagine f di dimensioni $[100][100]$ la complessità è pari a $100 \times 100 = 10000$ (cioè $P \times Q$)

↓ trasformata ↓
F

- $D(u,v) = \sqrt{(0-50)^2 + (0-50)^2} = \sqrt{250+250} = \sqrt{5000} = 70,71$
  - $70,71$ è la massima distanza che si può ottenere dal centro della matrice.
- La frequenza di taglio $D_0 = 50$
- Applicando il filtro ideale si ottiene: $H(0,0) = 70 > D_0(50) \rightarrow 0$
- $H(30,30) = 28 \leq D_0(50) \rightarrow 1$
- Se D_0 fosse 70 allora avrei tutto bianco;
- $D(30,30) = \sqrt{(30-50)^2 + (30-50)^2} = 28$

> In questo caso si ha una situazione ideale perché sotto alla frequenza di taglio mantengo.

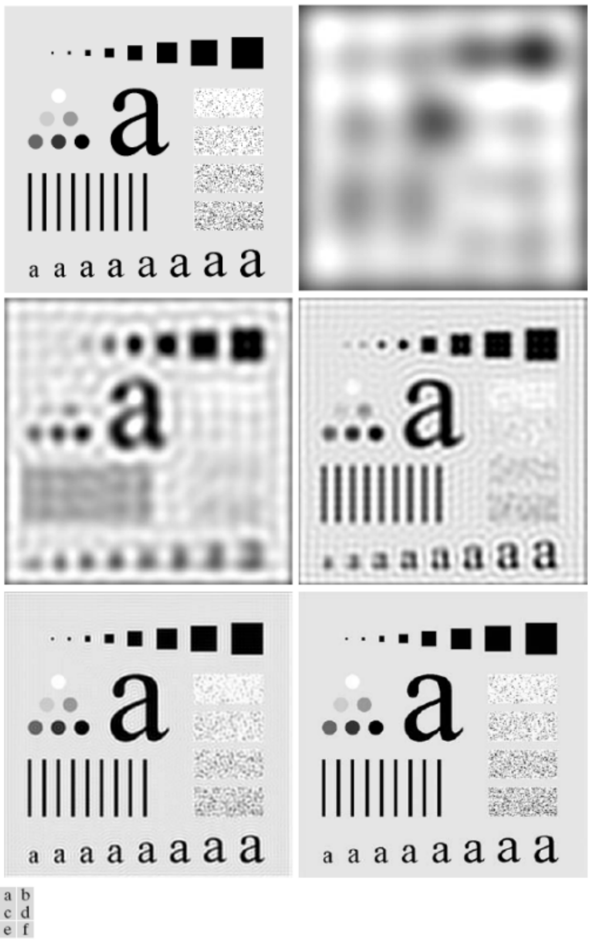
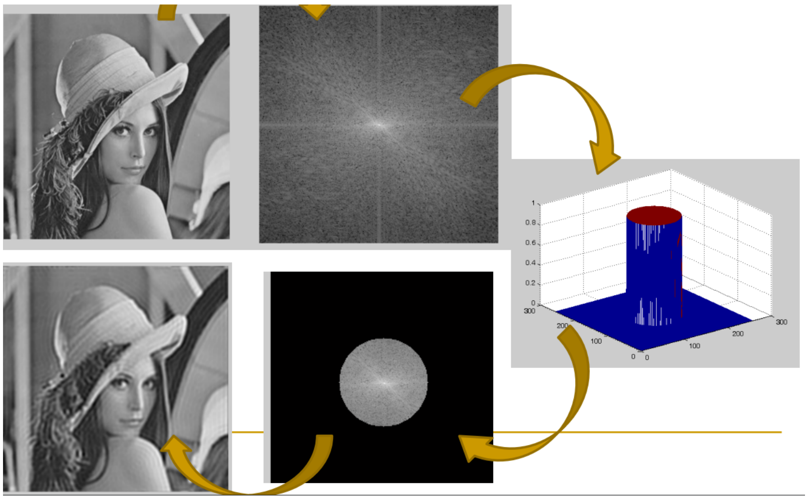


FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using ILPFs with cutoff frequencies set at radii values 10, 30, 60, 160, and 460, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.8% of the total, respectively.

Considerazioni

- Più è piccola la frequenza di taglio più il filtro passa basso butta roba (preserva una circonferenza piccola quindi solo pochi coefficienti possono essere "salvati").

- Con la **frequenza di taglio molto bassa** ho un'immagine **molto sfocata**. È un processo ideale, **MAI ricostruibile**.
- 
- Si sono create delle onde, il filtro passabasso ideale infatti è un impulso

Filtro passa-basso di Butterworth

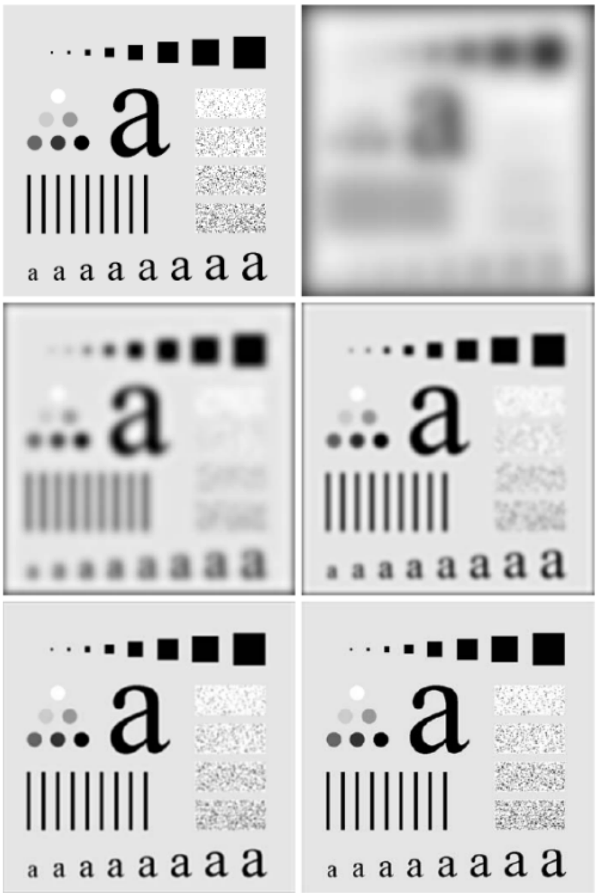
La funzione di trasferimento del filtro passa-basso di Butterworth di ordine n e frequenza di taglio D_0 è:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$

> Otteniamo anche valori che rappresentano il grigio.
> Il filtro **attenua le alte frequenze**, **abbassa quelle alte**.

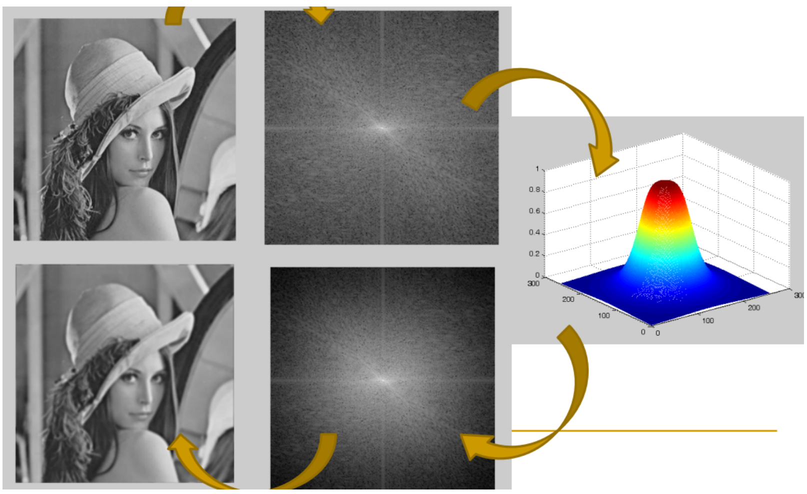
> C'è un graduale passaggio da uno a zero intorno alla frequenza di taglio.
> Vedo la velocità con cui avviene il passaggio da 1 a 0, questa rapidità la definisco con n

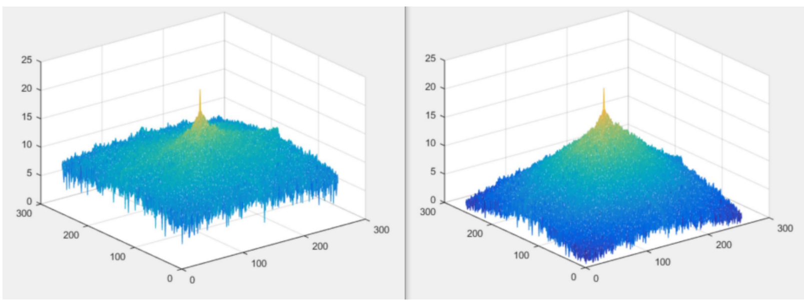
- con n < 1 è molto graduale, man mano che n aumenta diventa più ripida.
- Quando si è esattamente a distanza pari alla frequenza di taglio si ottiene sempre 0.5 ($\frac{1}{2}$).



a b
c d
e f

FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.42.



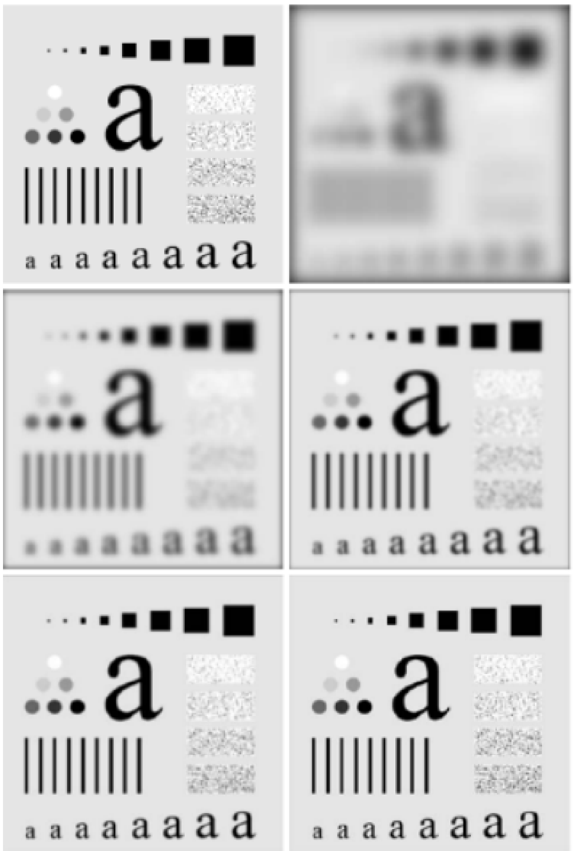


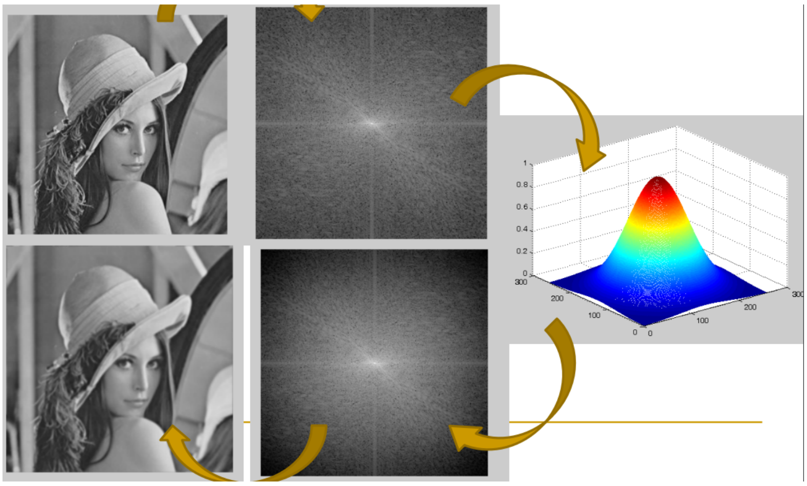
Filtro Gaussiano

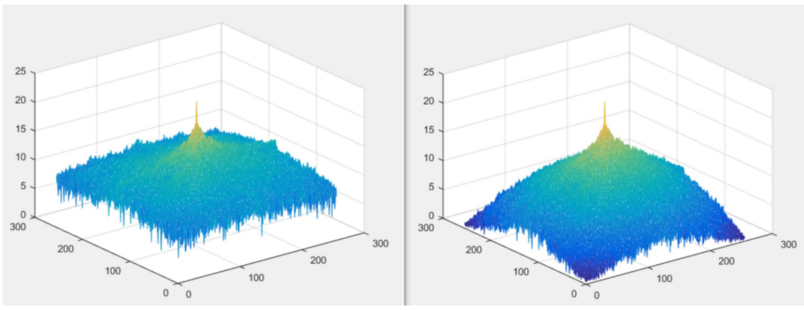
Il filtro Gaussiano è:

$$H(u,v) = e^{\frac{-D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

- Il modo in cui varia la ripidità di variazione tra 0 e 1 dipende esclusivamente da D_0.
- I filtri gaussiani hanno il grande vantaggio di avere come trasformata di Fourier ancora una gaussiana.





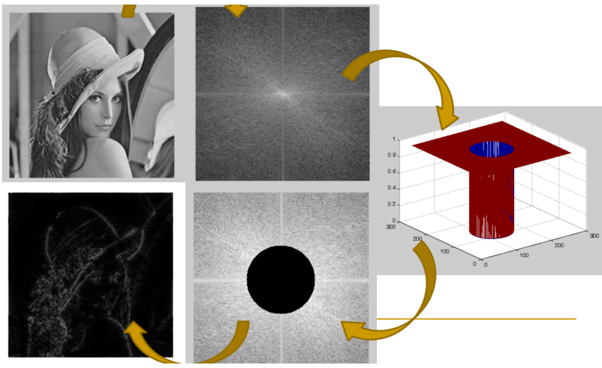


Filtri passa-alto

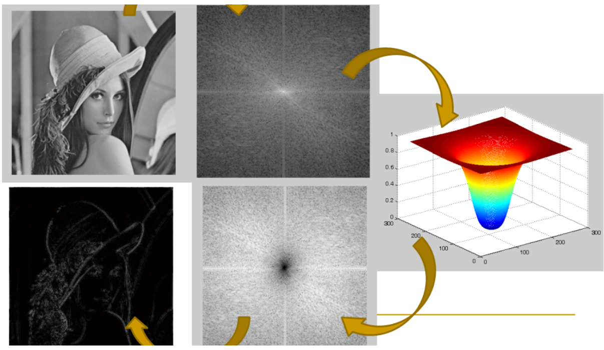
- I filtri passa alto sono identici, i risultati sono semplicemnte opposti.
  Infatti, seguendo le serie di slide successiva si ha:

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$	$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

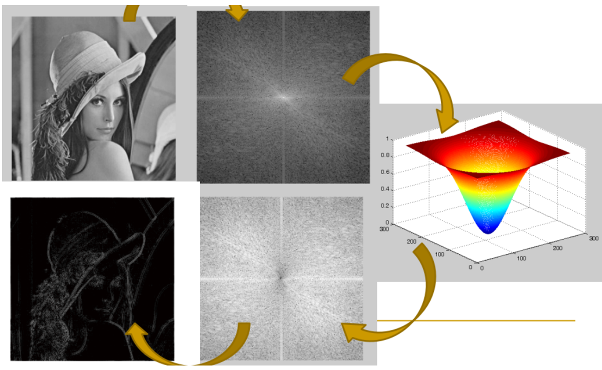
Ideale



Butterworth



Gaussiano



Filtri passa-banda

In questo caso si hanno le seguenti formule:

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + \left[\dfrac{DW}{D^2 - D_0^2}\right]^{2n}}$	$H(u,v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW}\right]^2}$

con W = **dimensione/ampiezzax della banda da attenuare/rigettare**

Praticamente sono filtri dove si decide, arbitrariamente quale banda mantenere e quale scartare in modo da attenuarne/alterarne alcune