FORMULARIO

È assegnato l'$\boxed{\text{endomorfismo}}$ tale che:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(1,0,1) = (-2, h, 0) \\ f(0,1,1) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (-1, 2h-1, -1)$
$f(e_1)+f(e_3) = (-2, h, 0)$
$f(e_2)+f(e_3) = (0, h-1, -1)$
$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = \dots \\ f(e_2) = \dots \\ f(e_3) = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

I MODO

Dato l'endomorfismo $f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$

$f(e_1) = (0, h+1, 0)$ (coeff.)
$f(e_2) = (h, h, -1)$
$f(e_3) = (0, -1, -h)$

II MODO

colonne 3, righe 4

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$\boxed{\text{STUDIO } \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f}$

Iniettiva $\Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Ker} f = 0}$ / Suriettiva $\Rightarrow \boxed{\dim \mathbb{R}^m = \dim \mathrm{Im} f}$

$\dim \mathrm{Im} f = \rho(A)$

ISOMORFISMO ↳ suriettiva + iniettiva

Eq. cart. $\mathrm{Im} f$, dove $\mathrm{Im} f = \{(C_1 \dots C_n)\}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ ($C_1 \to$, $C_n \to$) (dettate dal determinante)

Eq. cart. $\mathrm{Ker} f \to A \cdot \bar{X} = 0 \to$ SISTEMA

$\to$ se $\boxed{\dim \mathrm{Im} f = 1}$, allora $\boxed{\mathrm{Im} f = \{(C_2)\}}$

SEMPLICITÀ

SOLUZIONI POLINOMIO CARATTERISTICO

$\det M(f_{-T}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \dots -T & \dots & \dots \\ \dots & \dots -T & \dots \\ \dots & \dots & \dots -T \end{vmatrix} = 0$ (matrice, DET.) $\Rightarrow$ AUTOVALORI $\begin{cases} T = \dots m_T = \dots \\ T = \dots m_T = \dots \\ T = \dots m_T = \dots \end{cases}$

Se $m_\lambda = 1$ allora $g_\lambda = 1$ $(0 < g_\lambda \le m_\lambda)$

Se $m_\lambda > 1$ allora calcolo $g_\lambda = \dim V_\lambda = \dim(\mathrm{Ker} f_\lambda)$

Se $m_\lambda = g_\lambda$, f è semplice e diagonalizzabile.

↳ Se un AUTOVALORE "T" ha il parametro "h" si devono fare le condizioni e vedere quando gli autovalori sono diversi fra loro

$\boxed{1° \neq 2°,\ 2° \neq 3°,\ 3° \neq 1°}$

MATR. DIAGONALE, ha solo gli autovalori sulla diagonale.
MATR. DIAGONALIZZANTE, ha gli autovettori (in ordine) in colonna

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Da qui possiamo pure ricavare la legge

$$f(x,y,z,t) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x + (h-1)z,\ (h-1)y,\ 2z,\ hy + ht)$$

II° METODO PER TROVARE LA CONTROIMMAGINE USANDO LA RIDUZIONE DELLA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\text{MATR. COMPLETA} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{h-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$h-1 \neq 0$

$\underbrace{}_{M(g)}$ $\underbrace{}_{\text{VETTORE DI CUI VOGLIO LA CONTROIMMAGINE}}$

***** condizione $h \neq 1$

$R_4 \to R_4 - \frac{h}{h-1} R$

$R_4 \to R_4$

$$\begin{cases} x = 1 \\ hy + hz = 1 \\ (\underbrace{h-1}_{\neq 0})y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ hz = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = 1/h \qquad g^{-1}(1,1,0,0) = \{(1, 0, 1/h)\}$$

LEVO LE CONDIZ. NELLA MATRICE $h = 1$

$\{$ etc...

Una MATRICE ridotta per riga non può fornire una BASE

$\boxed{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^3$

$$M(f)\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im} f$, $\ker f$. $h \in \mathbb{R}$

$\rho = ?$

$$(h)(h-1) - h - [-h] = (h)(h-1) \cancel{-h} \cancel{+h} \neq 0$$

$\boxed{h \neq 0}$ e $h-1 \neq 0 \to \boxed{h \neq 1}$

$\rho = 3 \to \boxed{\dim \mathrm{Im} f = 3} \to \dim \ker f = \overset{3}{n} - \overset{3}{\rho} = 0$

f è iniettiva + suriettiva $\to$ ISOMORFISMO.

EQ. CART. IMMAGINE.

~~inc. libere sono 3~~

$\boxed{\mathrm{Im} f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \forall x, y, z \}}$

NON C'È EQUAZIONE CARTESIANA.

Eq. cartesiana $\ker f$. è quella BANALE

$\boxed{\ker f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0 \}}$

$h \neq 0, -1$

$\boxed{h = 0}$ $M(f)\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\rho < 3}$

$\boxed{\det = -1}$ $\rho = 2$ $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \ker f = 1$

f non è iniettiva e non è suriettiva

Eq. cart. Imf. dove $\mathrm{Im}f = \{C_2, C_3\}$

$$\begin{array}{r} C_2 \to \\ C_3 \to \\ xyz \to \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \to \begin{array}{l} -x-y-[z-x] \\ \cancel{-x}-y-z\cancel{+x} \\ -y-z=0 \\ -y=z \end{array}$$

$y=-z \ \forall x,z$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Im}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=-z\} \ \forall x,z. \\ \text{Base } \mathrm{Im}f = \{(1,0,0),(0,-1,1)\} \end{array}}$$

Eq. cart. Kerf.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y+z=0 \\ \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{-y}-\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{z}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \qquad \forall x$$

$h=0$

$$\boxed{\mathrm{Ker}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\} \ \forall x}$$

Base $\mathrm{Ker}f = \{(1,0,0)\}$

$\boxed{h=-1}$

$$M(f) \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det = 2+1-[1] = 3-1=2$$

$\rho=3$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im}f = 3 \\ \dim \mathrm{Ker}f = 0 \end{array}\right\} \text{ISOMORFISMO}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}}$$

$$\boxed{\text{Base } \operatorname{Im} f = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}}$$

$h = -1$

$$\boxed{\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}}$$

SEMPLICITA' con $h = 0$

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{vmatrix}$$

$$(-T)(1-T)(-1-T) - [T]$$

$$\to (-T)(1-T)(-1-T) - T = 0 \to -T(T^2-1) - T$$

$$T^3 = 0 \qquad m_0 = 3 \qquad \boxed{0 < g_\lambda \leq m_\lambda}$$

g_0 DA CALCOLARE

$$V_0 = \boxed{\dim \ker f_0} = \ker \begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & -1 & -1-0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \qquad \forall x \qquad \dim \ker f_0 = 1$$

$$\boxed{\dim \ker f_0 = g_0}$$

$$\boxed{m_0 = 3 \qquad g_0 = 1} \qquad \boxed{m_0 \neq g_0}$$

$\boxed{f \text{ NON E' SEMPLICE}}$

La MATRICE ASSOCIATA $M(f)$ non e' DIAGONALIZZABILE

ESAME 22/02/21 ALGEBRA

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

INIZIO

RIDUCO O NO?

RIDUCO

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \quad R_3 = R_3 - R_1$$

$\boxed{\text{se } h \neq -1}$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho = 2$

$\boxed{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f = n - \rho = 3 - 2 = 1$

$\operatorname{Im} f = \{(C_1, C_2)\}$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 1 & h+1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \det = 0$$

$\boxed{\text{Eq. cart.}}$

$(h+1)^2 z = 0$

$\cancel{(h+1)^2} z = 0 \quad z = 0 \quad \forall x, y$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{z=0}\} \quad \forall x, y}$$

$\ker f = AX = 0$, $h \neq -1$

$$M_{RIDOTTA}\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \ker f = 1$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ (h+1)y + (h+1)z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{(h+1)}x = \dfrac{-y-hz}{h+1} \\ \cancel{(h+1)}y = \dfrac{(-h-1)z}{h+1} \end{cases} \quad \forall z$$

$$\boxed{\ker f = \left\{ \left(\boxed{\dfrac{-y-hz}{h+1}, \dfrac{-h-1\,z}{h+1}}, z \right) \right. \quad \forall z}$$

Eq. cart. ker f.

Togle la condizione, quindi $h = -1$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$\rho < 2$ perchè $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$

$\rho = 1$, scelgo a_{12}, cioè $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = 1$

$\hookrightarrow \dim \ker f = n - \rho = 2$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{ (C_2) \} = \operatorname{Im} f = \{ (1, 0, 1) \}}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ \cancel{y - z = 0} \end{cases} \qquad \{ y = z \quad \forall x, z$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \ker f = \{(x, z, z)\} \\ \text{Base } \ker f = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\} \end{array}}$$

Per $h = -1$, $M(f)$ è DIAGONALIZZABILE? Avevo

PUNTO 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Polinomio caratter.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 - T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -T & 1 & -T \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = (-T)^2 (-1-T) = 0$$

$(-T)^2 = 0 \rightarrow T = 0$ $\quad m_0 = 2 \rightarrow g_0$ da calc.

$-1-T = 0 \rightarrow T = -1$ $\quad m_{-1} = 1 \quad g_{-1} = 1$ ok ✓

$$V_0 = \ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ \cancel{y - z = 0} \end{cases} \qquad \{ y = z \quad \forall x, z$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \ker f = \{(x, z, z)\} \\ \text{Base } \ker f = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\} \end{array}}$$

$$\boxed{\dim \ker f_0 = 2 \qquad m_0 = 2 \qquad g_0 = 2}$$

MAT-DIAG.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f è SEMPLICE. La matrice è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZANTE

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

AUTOSPAZIO $V_{-1} = \ker f_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 & -1 \\ 0 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 1 & -1-(-1) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \ker$$

$$0$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ \cancel{y=0} \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ --- \end{cases} \quad \underline{x} = z \quad \forall z$$

$$①$$

$\ker = \{(z, 0, z)\}$ AUTOVETTORE

$\overset{u_1}{(1,0,0)}, \overset{u_2}{(0,1,1)}$ $\quad u_3 = (1,0,1)$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ MATRICE DIAGONALIZZANTE}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prova d'esame

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (0, y + hz, hx + hy + z)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per f.

$$M(f) = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \end{array}$$
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 0 \quad \rho < 3$$

$\rho(M(f)) = 2$ perché $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ h & h \end{vmatrix} = -h \to \boxed{h \neq 0}$ Condizione

$\to \dim \operatorname{Im} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$

Equaz. cartesiana Imf. dove $\operatorname{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow -xh = 0 \text{ per mantenere } \rho < 3$$

$x = 0 \quad \forall y, z$

$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x = 0\} \to \operatorname{Im} f = (0, y, z)$

Base $\operatorname{Im} f = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ con $h \neq 0$

STUDIO Kerf.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{0 = 0} \\ y + hz = 0 \\ hx + hy + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx + h(-hz) + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx - h^2 z + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hx + (-h^2+1)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -hz \\ \cancel{h}x = \underbrace{(h^2-1)z}_{h} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall z \\ h \neq 0 \end{matrix}$$

$$\ker f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{h^2-1}{h} z ,\ y = -hz \right\}$$

$$\text{Base } \ker f = \left\{ \left(\frac{h^2-1}{h}, -h, 1 \right) \right\}$$

Tolgo la condizione, $h = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = 2 \qquad \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$$\dim \ker f = 3 - 2 = 1$$

$$\operatorname{Im} f = \{ C_2, C_3 \}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ \forall y, z. \end{matrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \} \quad h = 0$$

$$\text{Base } \operatorname{Im} f = \{ (0,1,0), (0,0,1) \}$$

STUDIO $\ker f$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0 \}$$

$$\text{Base } \ker f = \{ (1,0,0) \} \quad \text{con } h = 0$$

Semplicità e base di autovettori

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{pmatrix} \to \text{Polin. Caratteristico.}$$

$$\begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-T) - [(h^2)(-T)] = 0$$

$$= (1-T)^2(-T) + h^2T = 0$$

$$(-T)(1-T)^2 + h^2T = 0$$

$$T(1-T)^2 - h^2T = T[(1-T)^2 - h^2] = 0$$

"diff. di quadrati"

$$[((1-T)+h)((1-T)-h)]T = 0$$

$$((1-T)+h)((1-T)-h) = 0 \quad \vee \quad \boxed{T=0}$$

$$(1-T)+h=0 \qquad 1-T+h=0 \to \boxed{T=1+h}$$

$$(1-T)-h=0 \qquad 1-T-h=0 \to \boxed{T=1-h}$$

AUTOVALORI

1° $T=0$ $\quad m_0 = 1 \longrightarrow g_0 = 1$

2° $T=1+h$ $\quad m_{1+h} = 1 \longrightarrow g_{1+h} = 1$

3° $T=1-h$ $\quad m_{1-h} = 1 \longrightarrow g_{1-h} = 1$

$\}$ f è semplice

ho il parametro "h". se i 3 autovalori sono distinti fra loro allora f è semplice. Quando sono distinti?

1° ≠ 2	2° ≠ 3°	3° ≠ 1°
$0 \neq 1+h$	$1+h \neq 1-h$	$1-h \neq 0$
$\boxed{h \neq -1}$	$2h \neq 0$	$\boxed{h \neq 1}$
	$\boxed{h \neq 0}$	

CONDIZIONI

Se $h \neq 1,-1,0$ f è semplice, quindi diagonalizzabile

Cosa succede se tolgo le condizioni?

STUDIO PER $h=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1 \quad \rho = 2$$

STUDIO SEMPLICITÀ

Polin. caratt. l'avevo calcolato prima con h.

$$[((1-T)+\underset{\overset{\|}{0}}{h})(1-T)-\underset{\overset{\|}{0}}{h}]T = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-T=0 \rightarrow T=1 \\ 1-T=0 \rightarrow T=1 \end{array}\right\} m_1 = 2 \rightarrow g_1 \text{ DA CALCOLARE}$$

$T=0 \rightarrow \quad T=0 \rightarrow m_0 = 1 \rightarrow g_0 = 1$ ok ✓

$$V_1 = \dim \operatorname{Ker} f_1 \rightarrow \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ \forall y \\ \forall z \end{cases} \qquad \operatorname{Ker} f = (0,y,z) \quad \dim \operatorname{Ker} f = 2$$

2 inc. libere

$m_1 = \dim \operatorname{Ker} f_1 = 2$

$$\boxed{f \text{ è semplice, } A \text{ è diagonalizzabile}}$$

STUDIO $h=1$

$$\left[\left((1-T)+\underset{1}{h}\right)\left[(1-t)-\underset{1}{h}\right]\right]T=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2-T=0 \to T=2,\ m_2=1 \to g_2=1$ ok ✓

$\left.\begin{matrix}-T=0 \\ T=0\end{matrix}\right\} m_0=2 \to g_0$ da calcolare

$$V_0=\ker f_0=\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{0=0}$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z \\ x-\cancel{z}+\cancel{z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \quad \forall z$$

$V_0=\{(0,-z,z)\}$ $\quad \dim V_0=1$

$$\boxed{\begin{matrix} f \text{ non è semplice} \\ A \text{ non è diagonalizzabile} \end{matrix}}$$

STUDIO PER $h=-1$

$$\left[\left((1-T)+\underset{-1}{h}\right)\left[(1-t)-\underset{-1}{h}\right]\right]T=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix}-T=0 \\ T=0\end{matrix}\right\} m_0=2 \quad g_0=$ DA calcolare

$2-T=0 \to T=2,\ m_2=1,\ g_2=1$ ok ✓

$$V_0 = \ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y-z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ -x\cancel{-z}+\cancel{z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} \quad \forall z$$

$$V_0 = \{(0,z,z)\} \quad \dim V_0 = 1 \neq m_0 = 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ non è semplice} \\ A \text{ non è diagonalizzabile} \end{array}}$$

BASE DI AUTOVETTORI. RICAVO DALL'AUTOSPAZIO quando f è semplice

f è semplice quando $h \neq 0, 1, -1$ e $h = 0$

Per $h \neq 0, 1, -1$ avevo gli autovalori

$$((1-T)+h)((1-T)-h)=0 \quad \vee \quad \boxed{T=0} \qquad m_0 = 1$$

$$(1-T)+h=0 \qquad 1-T+h=0 \rightarrow \boxed{T=1+h} \qquad m_{1+h}=1$$

$$(1-T)-h=0 \qquad 1-T-h=0 \rightarrow \boxed{T=1-h} \qquad m_{1-h}=1$$

Calcolo gli autospazi, che sono 3

I AUTOSPAZIO $\quad V_0 = \ker f_0$

$$\begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & h \\ h & h & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker \rightarrow$

$$\begin{cases} \cancel{0=0} \\ y-hz=0 \\ hx+hy-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ hx+h(hz)-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ hx+(h^2-1)z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = hz \\ \cancel{h}x = -\dfrac{(h^2-1)z}{h} \end{cases} \quad \forall z$$

$$\boxed{V_0 = \left\{\left(-\frac{h^2-1}{h}z,\ hz,\ z\right)\right\}}$$

$$\boxed{u_1 = \left(-\frac{h^2-1}{h},\ h,\ 1\right) \quad \text{AUTOVETTORE 1}}$$

Cerco il 2° AUTOSPAZIO

Promemoria

$\boxed{T=0}$ ✓ $\quad m_0 = 1$

$\boxed{T=1+h}$ $\quad m_{1+h} = 1$

$\boxed{T=1-h}$ $\quad m_{1-h} = 1$

$$V_{1+h} = \ker f_{1+h}$$

$$\ker\begin{pmatrix} 0-(1+h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1+h) & h \\ h & h & 1-(1+h) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1-h & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ h & h & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono con $\boxed{h \neq 1, -1, 0}$

$$\begin{cases} \cancel{(-1-h)}x = 0 \\ -hy + hz = 0 \\ hx + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{h}z = \cancel{h}y \quad = z = y \\ 0 + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ hz - hz = 0 \end{cases} \quad \forall y$$

$$V_{1+h} = \{(0, y, y)\} \quad \text{AUTOVETTORE n° 2}$$

$$\boxed{u_2 = (0, 1, 1)}$$

Cerco il 3° AUTOSPAZIO di $T = 1-h$

$$V_{1-h} = \ker f_{1-h} = \ker\begin{pmatrix} 0-(1-h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1-h) & h \\ h & h & 1-(1-h) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1+h & 0 & 0 \\ 0 & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{(-1+h)}x=0 \\ hy+hz=0 \\ hx+hy+hz=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ \cancel{h}y=\frac{-hz}{h}=y=-z \\ \cancel{hx}\ \cancel{-hz+hz}=0 \quad 0=0 \end{cases} \quad \forall z$$

$$V_{1-h}=\{(0,-z,z)\}$$

$u_3=(0,-1,1)$ AUTOVETTORE 3

Base AUTOVETTORI $=\{u_1,u_2,u_3\}$

MATRICE DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} I & - & - \\ - & I & - \\ - & - & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALIZZANTE P

$$P=\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\begin{pmatrix} \frac{-h^2-1}{h} & 0 & 0 \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u_1=\left(\frac{-h^2-1}{h},h,1\right)$ AUTOVETTORE 1

$u_2=0,1,1$ AUTOVETTORE 2

$u_3=(0,-1,1)$ AUTOVETTORE 3

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

PUNTO 1

TROVIAMO LA MATRICE.

$f(e_1) = (0, h+1, 0)$

$f(e_2) = (h, h, -1)$

$f(e_3) = (0, -1, -h)$

PARTENZA

$$M(f) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \end{array}$$

$\dim \mathrm{Im} f = \rho\, M(f)$

$\det_{3\times 3} = -[(h)(h+1)(-h)] = (-h)(h+1)(h) \neq 0$

$-h \neq 0$ $\quad h \neq 0$ $\quad h+1 \neq 0$

COND

$\boxed{h \neq 0}$ $\quad \boxed{h \neq -1}$

$\rho(M(f)) = 3$

Per $h \neq 0, -1$ $\quad \rho M(f) = 3$, quindi $\dim \mathrm{Im} f = 3$.

$\dim \mathrm{Ker} f = \underset{\underset{\mathbb{R}^3}{\parallel}}{n} - \underset{\underset{3}{\parallel}}{\rho} = 0$

Eq. cartesiana di Imf non c'è perche' vale $\underbrace{\forall x, y, z}_{\text{3 incognite libere.}}$

Eq. cartesiana Kerf. e' quella banale: $x = y = z = 0$

f e' un isomorfismo
- suriettiva $\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \overset{m}{=} \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$
- iniettiva $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0$

Tolgo le condizioni

$\boxed{h=0}$

PARTENZA

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$\rho \overset{?}{=} 2$ vedo le 2x2 e vedo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Downarrow$

$\rho = 2$, $\dim \mathrm{Im} f = 2 \rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 3-2 = 1$

Eq. cartesiane $\mathrm{Im} f$ dove $\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{array}{r} C_1 \rightarrow \\ C_2 \rightarrow \\ x,y,z \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$-x = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \quad \forall z \quad \forall y$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \rightarrow \mathrm{Im} f = \{(0,y,z)\}$

Base $\mathrm{Im} f = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ $\boxed{\text{PER } h=0}$

R.

Eq. cartesiane $\mathrm{Ker} f$ $(\dim \mathrm{Ker} f = 1$
$\Vert$
1 inc. libera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Sistema

$$\begin{cases} \cancel{0=0} \\ x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \forall z.$$

R.

$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, y = 0\}$

Base $\mathrm{Ker} f = \{(1,0,1)\}$ $\boxed{\text{PER } h=0}$

Tolgo la II condizione $\boxed{h=-1}$

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3 \text{ (colonna nulla)}$$

$\overset{?}{\rho =} 2$, vedo le 2×2 e vedo $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\rho = 2$ per $h=-1$

$\dim \operatorname{Im} f = 2 \to \dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$

Eq. cart. $\operatorname{Im} f$, dove $\operatorname{Im} f = \{(C_2, C_3)\}$

$$\begin{array}{c} C_1 \to \\ C_2 \to \\ x,y,z \to \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \det = 0 \text{ affinché } \rho \text{ sia } 2$$

$\det \to z - x - (-y + x) = 0$ $\quad z = 2x - y$

$= z - x + y - x = 0 \to -2x + z + y = 0$

B.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per } h=-1, \operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x - y\} \ \forall x,y \\ \text{Base } \operatorname{Im} f = \{(1,0,2),(0,1,0)\} \end{array}}$$

Eq. cartesiane $\operatorname{Ker} f$. con $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \overline{X} = 0$$

Sistema

$$\begin{cases} -y=0 \\ -y-z=0 \\ \cancel{-y-z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ -(0)-z=0 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ \forall x \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per } h=-1,\ \ker f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0,\ z=0\}\ \forall x \\ \text{Base } \ker f=\{(1,0,0)\} \end{array}}$$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

PUNTO 2

PARTENZA

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{h\neq 0}$ CONDIZIONE

$$\begin{cases} hy=1 \\ (h+1)x+hy-hz=0 \\ -y-hz=3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{h} \\ (h+1)x+\cancel{h}\cdot\frac{1}{\cancel{h}}-hz=0 \\ -y-hz=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dots \\ (h+1)x+1-hz=0 \\ -y-hz=3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{h} \\ (h+1)x=hz-1 \\ -\frac{1}{h}-hz=3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dots \\ x=\frac{hz-1}{h+1} \\ hz=-\frac{1}{h}-3 \to \frac{-1-3h}{h} \end{cases}$$

$$z=\frac{-1-3h^2}{h^2}$$

$$f^{-1}(1,0,3)=\left(\frac{hz-1}{h+1},\ \frac{1}{h},\ \frac{-1-3h^2}{h^2}\right) \text{ con } h\neq 0$$

Con $h=0$ ho $\begin{cases} hy=1 \\ \vdots \end{cases}$ $\begin{cases} 0=1 \\ \ \end{cases}$ Sist. impossib. $f^{-1}(1,0,3)=\emptyset$

DA CANCELLARE. → PROVO CRAMER

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq 0}$

RIDUCO

$R_2 = R_2 - \frac{h}{h} R_1$

$R_3 = R_3 + \frac{1}{h} R_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq -1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MATRICE RIDOTTA

Riprovo sistema

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x - z = 0 \\ -hz = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x - z \Rightarrow \quad x = \frac{z}{h+1} \\ z = -\frac{3}{h} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{z}{h+1}, \frac{1}{h}, -\frac{3}{h} \right)$$

$$\frac{z}{h+1} \to \frac{-\frac{3}{h}}{h+1} \qquad -\frac{3}{h} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3}{h^2+h}$$

DA CONTROLLARE

PARTENZA

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$$-[(-h)(h)(h+1)]$$

$$-[(-h^2)(h+1)]$$

$$\boxed{\begin{matrix} h \neq 0 \\ h \neq -1 \end{matrix}}$$

$$-[-h^3-h^2]$$

$$\boxed{h^3+h^2} \quad \det A \neq 0$$

$$x=\frac{|B_1|}{|A|} \qquad y=\frac{|B_2|}{|A|} \qquad z=\frac{|B_3|}{|A|}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 3 & -1 & -h \end{vmatrix} = -h^2 - 3h - [1] =$$

$$\boxed{\frac{-h^2-3h-1}{h^3+h^2} = x}$$

PARTENZA

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \neq 0$$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + \cancel{h}\left(\frac{1}{\cancel{h}}\right) - z = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$h+1 \neq 0 \quad \boxed{h \neq -1}$$

$$\begin{cases} \dots \\ (h+1)x + 1 - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1/h \\ \cancel{(h+1)}x = \frac{z-1}{h+1} \\ hz = -\frac{1}{h} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ hz = \dfrac{-1-3h}{h} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sim\sim\sim \\ \sim\sim\sim \\ z = \dfrac{-1-3h}{h^2} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h}{h^2}\right) \text{ con } \boxed{h \neq -1, 0}$$

$$\frac{\frac{-1-3h}{h^2}-1}{h+1} = \frac{\frac{-1-3h-h^2}{h^2}}{h+1}$$

$$\frac{-1-3h-h^2}{h+1} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3h^2-3h-1}{h^2+2h+2}$$

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$.

dim Imf. el. generico + BAS, dim Kerf.

eq. cartesiane Imf, Kerf.

CERCO $M(f)$ SIAMO IN $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(e_1) = (0, h+1, 0)$
$f(e_2) = (h, h, -1)$
$f(e_3) = (0, -1, -h)$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \quad \rho = 3$$

MATRICE MAIN!

$|M(f)| = (-h)(h)(h+1) \neq 0$

$\dim \mathrm{Im} f = 3 \to \dim \mathrm{Ker} f = n - \rho \to 3 - 3 = 0$, la f e' suriettiva e iniettiva

$\dim \mathrm{Ker} f = 0$; $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$

$-h = 0$ / $h \neq 0$ / $h+1 \neq 0 \implies \boxed{h \neq 0}$ e $\boxed{h \neq -1}$

CONDIZIONI

Cerco eq. Cartesiane Imf

DATO CHE $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$, non ci sono equazioni cart.

$\dim \mathrm{Im} f$ = 3 inc. libere

Quindi eq. cart. Imf $= \forall x, y, z$.

Eq. cart. Kerf $\to x = y = z = 0$ perché $\dim \mathrm{Ker} f = 0$, l'equaz. cart. e' banale

Tolgo condizione $\to h = 0$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \to M(f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rho(M(f)) < 3$$

$\neq 0$

$\det(M(f)) = -1$ con $h = 0 \implies \rho(M(f)) = 2$, $\dim \mathrm{Im} f = 2$ ρ

$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{se } h = 0}$

$z - x - (-y + x) = 0$

$z - \cancel{x} + y - \cancel{x} = 0$

$-2x + y + z = 0 \rightarrow y = 2x - z$

Eq. cart. Im f $y = 2x - z \quad \forall x, z.$ $\boxed{\text{se } h = -1}$

Eq. cart Ker f.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

Eq. cart Ker f. $y = 0,\ z = 0 \quad \forall x$ $\boxed{\text{con } h = -1}$

Calcolo controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Con } h \neq 0}$ CONDIZIONE

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + h\left(\frac{1}{h}\right) - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases}$$

$y = \frac{1}{h}$

$(h+1)x + 1 - z = 0 \rightarrow \cancel{(h+1)}x = \frac{z-1}{h+1}$

$hz = -\frac{1}{h} - 3 \rightarrow \cancel{h}z = \frac{-1-3h}{h^2}$

Con $h \neq 0$, $f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h}{h^2}\right)$

Tolgo la condizione, $h = 0$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{0y = 1} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$ SIST. IMPOSS.

Per $h = 0$, $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

$u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori
$u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$
e l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} f(u_1) &= (1,0,0,0) \\ f(u_2) &= (h,0,2,0) \\ f(u_3) &= (0,h-1,0,h) \\ f(u_4) &= (0,0,0,h) \end{cases}$$

con h parametro reale.

- Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$.

TROVO LA MATRICE CON $f(e_1)$ ...

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,0,0,0) \\ f(e_1) + f(e_3) = (h,0,2,0) \\ f(e_2) = (0,h-1,0,h) \\ f(e_4) = (0,0,0,h) \end{cases} \to f(e_3) = (h,0,2,0) - (1,0,0,0) = (h-1,0,2,0)$$

$$\begin{array}{ccccc} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & \dots \\ M(f) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \end{array}$$

MATRICE PRINCIPALE DI f

CALCOLO Dim Imf. $\quad \dim Imf = \rho(A)$

VEDO SE $DET_{4\times4} \neq 0$

↳ LAPLACE n°1

$$\det M(f) = a_{11} \cdot A_{11}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 0 & h \end{vmatrix} \to 2(h-1)(h) \neq 0$$

$$2h(h-1) \neq 0$$

$2h \neq 0 \qquad h-1 \neq 0$

$h \neq 0 \qquad h \neq 1$

CONDIZIONI

$$\det M(f) = 1 \cdot 2h(h-1) = 2h(h-1) \neq 0$$

$$\rho(M(f)) = 4$$

$\dim Imf = 4 \longrightarrow \dim Ker f = \overset{4}{n} - \overset{4}{\rho} = 0 \to Ker\{0\}$

NON CI SONO EQ. CARTESIANE PER $Imf \to$ non ci sono inc. dipendenti

EQ. CARTESIANA $Imf = \forall x,y,z,t$ se $h \neq 1,0$

EQ. CARTESIANA $Kerf$ è banale $= x=0, y=0, z=0, t=0$ se $h \neq 0,1$

TOLGO CONDIZIONE $h \neq 0, \to \boxed{h=0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{h}^{0}-1 & 0 \\ 0 & \cancel{0h}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0^{0} \\ 0 & \cancel{h}\,0 & 0 & \cancel{h}^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Imf = \rho \qquad \rho = 4?$ vediamo la 4×4, colonna nulla

Vedo le 3x3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \neq 0 \quad \dim \operatorname{Im} f = 3$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = \underset{4}{n} - \underset{3}{\rho} = 1$$

EQ. CARTESIANA IMMAGINE f

$$\begin{array}{l} c_1 \rightarrow \\ c_2 \rightarrow \\ \\ c_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$\det = 0$ per $\rho = 3$

$$\det = a_{44} \cdot A_{44} \rightarrow -2t = 0 \rightarrow \boxed{t = 0}$$

$$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Eq. CART. $\operatorname{Im} f \rightarrow \boxed{t = 0}$ con $h = 0$

CALCOLO eq. cart. $\operatorname{Ker} f$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \rightarrow z = 0 \\ \cancel{0 = 0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \} \ \forall t \text{ con } h = 0$$

TOLGO LA CONDIZIONE $h \neq 1 \rightarrow h = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{h}^{1} - 1 & 0 \\ 0 & \cancel{h}^{1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cancel{h}^{1} & 0 & \cancel{h}^{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho < 4 \text{ (riga nulla)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rho = 3 = \dim \operatorname{Im} f$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = \underset{4}{n} - \underset{3}{\rho} = 1$$

EQ. CART. Im f

$$\begin{array}{l} c_1 \Rightarrow \\ c_2 \Rightarrow \\ c_3 \Rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per mantenere } \rho = 3$$

$$\det = a_{24} \cdot A_{24} \rightarrow A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(2y) = -2y$$

$$\det = 1 \cdot (-2y) = 0$$

$$-2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0}$$

EQ. CART. Im f $\rightarrow y = 0$ con $h = 1$

Calcolo eq. cart. Ker f.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ - \\ z = 0 \\ y = -t \end{array} \quad \forall t$$

EQ. CART. Ker f $\Rightarrow x = 0, y = -t, z = 0 \ \forall t$, con $h = 1$

BASE Ker f $= (0, -1, 0, 1)$

- Detta $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

$$i(x, y, z) = (x, y, 0, z)$$

studiare l'applicazione lineare

$$g = f \circ i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

e determinare $g^{-1}(1, 0, 0, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$\leftarrow$ 2° PARTE

$i(x, y, z) = x, y, 0, z$

BASE CANONICA

$i = (1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$

$i = (0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$

$i = (0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{cc} M(i) & M(f) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix}$$

$g = f \circ i$

$\mathrm{Im} f$, $\ker f$, iniettiva / suriett

$\Downarrow$ BASE $\quad \Downarrow$ BASE

$h \neq 1 \qquad R_4 = R_4 - \frac{h}{h-1} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \qquad \rho = 3 \qquad \begin{aligned} &\dim \mathrm{Im} f = 3 \\ &\dim \ker f = \underset{4}{n} - \rho = \end{aligned}$$

$g^{-1}(1,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cancel{(h-1)} y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ hy + hz = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \\ 0 + hz = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{h} \end{cases} \qquad g^{-1}\left(1, 0, \frac{1}{h}\right)$$

$h \neq 0$

$h = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \\ (0-1) y = 0 \\ \\ 0y + 0z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \\ \boxed{0 = 1} \end{cases}$$ sist. IMPOSSIBILE

R. Per $h \neq 0$, $g^{-1}(1,0,0,1) = \left(1, 0, \frac{1}{h}\right)$

Per $h = 0$, $g^{-1}(1,0,0,1) = \emptyset$

1. È assegnato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$1° \begin{cases} f(1,1,1) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(1,0,1) = (-2, h, 0) \\ f(0,1,1) = (0, h-1, -1) \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

(2°, 3° indicano la seconda e la terza equazione.)

Studiare la SEMPLICITÀ di f nei casi $h=0$ e $h=1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori

$$\begin{cases} 1° \quad f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (-1, 2h-1, -1) \\ 2° \quad f(e_1)+f(e_3) = (-2, h, 0) \\ 3° \quad f(e_2)+f(e_3) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$$(-2, h, 0) + f(e_2) = (-1, 2h-1, -1)$$

$$1° \quad f(e_2) = (-1, 2h-1, -1) + (2, -h, 0) = (1, h-1, -1)$$

$$3° \quad f(e_3) = (0, h-1, -1) - (1, h-1, -1) = (-1, 0, 0)$$

$$2° \quad f(e_1) = (-2, h, 0) - (-1, 0, 0) = (-1, h, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

STUDIO LA SEMPLICITÀ $m_\lambda = g_\lambda$ in caso di $h=0$ e $h=1$

I CASO: $h=0$

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix}$$

con $h=0$

Calcolo il Polinomio caratteristico $\det(P-TI)=0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix} \quad \det = (-1-T)^2(-T) = 0$$

$(-1-T)^2 = 0 \to T = -1 \quad m_1 = 2 \Rightarrow$ DA CALCOLARE $g_1 = ?$

$-T = 0 \to T = 0 \quad m_0 = 1 \to g_0 = 1$ ✓ FATTO

$$\boxed{0 < g_1 \leq m_1}$$

Calcolo autospazio $V_{-1} = \ker f_{-1} = \begin{pmatrix} -1+1 & 1 & -1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = z \\ \underbrace{\forall x, z}_{\text{2 inc. libere}} \end{cases} \Rightarrow V_{-1} \{(x, z, z)\}$$

$\Downarrow$

$$\dim V_{-1} = 2 = g_{-1} = m_{-1}$$

Risposta 1: Per $h=0$ f è semplice

Se è semplice, esiste una base, quindi AUTOVETTORI

$$V_{-1} = \begin{cases} u_1 \ (1,0,0) \\ u_2 \ (0,1,1) \end{cases}$$

$$V_0 = \ker f_0 = \begin{pmatrix} -1-0 & 1 & -1 \\ 0 & -1-0 & 0 \\ 0 & -1 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \\ \cancel{-y = 0} \end{cases} \begin{cases} -x + 0 - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} -x = z \Rightarrow x = -z \quad \forall z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \{(-z, 0, z)\} \xrightarrow{\text{BASE}} u_3 \ (-1, 0, 1)$$

Autovettori per $h=0$ $u \{(1,0,0), (0,1,1) (-1,0,1)\}$

II CASO $\rightarrow h = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo il Pol. Car.

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & 0-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix}$$

$$\det = (-T)^2(-1-T)+1+T = 0$$

$$= -(1+T)(T)^2+(1+T)=0$$

$$= (1+T)[(-T)^2+1] = 0 \rightarrow$$

$1+T=0 \Rightarrow T=-1$ $\quad m_{-1}=2$ DA CALC. V_{-1}

$-T^2+1=0 \Rightarrow T=1$ $\quad m_1 = 1$

$= T^2 = 1$: $+1$, -1

$\Downarrow$

$g_1 = 1$ OK

$$V_{-1} = \ker f_{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1-(-1) & 1 & -1 \\ 1 & 0+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ x=-y \\ \cancel{-z+z=0} \end{cases} \quad \forall z \Rightarrow V_{-1} = \{-y, z, z\}$$

libera

$$\dim V_{-1} = g_{-1} = 1 \neq m_{-1} = 2$$

f non è semplice

(2)

2. Dato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x,y,z) = (-1x+y, hx+hy+1z, 2x+hz)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare $g^{-1}(0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

"LA CONTROIMMAGINE DI (0,1,0)"

$$g(x,y,z) = (-x+y, hx+hy+z, 2x+hz) \quad g^{-1}(0,1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= (-1,h,2) \\ f(e_2) &= (1,h,0) \\ f(e_3) &= (0,1,h) \end{aligned}\right\} \to M(g) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix} \end{array}$$

$$g^{-1} = \{ \underline{v} \in V \,/\, f(v) = (0,1,0) \}$$

$$M(g) \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ hx+hy+z=1 \\ 2x+hz=0 \end{cases}$$

SISTEMA 3x3

CRAMER

$\det A \neq 0$

$$\frac{\det B_1}{\det A} \Big/ \frac{\det B_2}{\det A} \Big/ \frac{|B_3|}{|A|}$$

$$\det M(g) = -h^2+2-h^2 = -2h^2+2 = 2(-h^2+1) \neq 0$$

$$-h^2+1 \neq 0 \to -h^2 \neq -1 \quad h^2 \neq 1 \begin{cases} h \neq 1 \\ h \neq -1 \end{cases}$$

sist. determinato

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = -(h) \Rightarrow x = -\frac{h}{2(-h^2+1)}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix} = -h \Rightarrow y = -\frac{h}{2(-h^2+1)}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(-h^2+1)} = -\frac{1}{(-h^2+1)}$$

RISULTATO con condizione

$$\boxed{g^{-1} = \left\{ -\frac{h}{2(1-h^2)}, -\frac{h}{2(1-h^2)}, -\frac{1}{(1-h^2)} \right\} \quad \text{con } h \neq \pm 1}$$

Tolgo la condizione $h \neq \pm 1$

$\boxed{h = 1}$

$$M(g)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{h}\,1 & \cancel{h}\,1 & 1 \\ 2 & 6 & \cancel{h}\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det M(g) \neq 0$? (per CRAMER)

$|M(g)| = -1 + 2 - (1) = 0$ NO CRAMER.

SISTEMA $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y+z=1 \\ 2x+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\cancel{x}+\cancel{x}+1=0 \Rightarrow 0=1 \\ x+y-2x \Rightarrow -x+y=1 \rightarrow y = x+1 \\ z = -2x \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

Tolgo la condizione $h \neq -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{h}\,-1 & \cancel{h}\,-1 & 1 \\ 2 & 6 & \cancel{h}\,-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$? $\rightarrow -1 + 2 - (1) = 0$ NO SOLUZIONI

Per $h \neq \pm 1$, $g^{-1} = \left\{ \underset{x}{\underset{\shortparallel}{-\frac{h}{2(1-h^2)}}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{\frac{-h}{2(1-h^2)}}}, \underset{z}{\underset{\shortparallel}{-\frac{1}{(1-h^2)}}} \right\}$

Per $h = 1, -1$, $g^{-1} = \emptyset$