2) E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (-2,0,-1) \\ g(0,1,1) = (-1,h,0) \\ g(0,1,0) = (0,-1,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per g.

TROVIAMO LA MATRICE. metodo standard

$$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = (-2,0,-1) \to g(e_1) = (-2,0,-1) - (0,-1,0) = (-2,1,-1) \\ g(e_2) + g(e_3) = (-1,h,0) \to g(e_3) = (-1,h,0) - (0,-1,0) = (-1,h+1,0) \\ g(e_2) = (0,-1,0) \end{cases}$$

$$M(g) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & h+1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico

$$\begin{pmatrix} -2-T & 0 & -1 \\ 1 & -1-T & h+1 \\ -1 & 0 & 0-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2-T & 0 & -1 \\ 1 & -1-T & h+1 \\ -1 & 0 & -T \end{pmatrix} \quad \det = 0$$

$$\det = (-2-T)(-1-T)(-T) - (-1-T) = 0$$

$$(-1-T)[(-2-T)(-T) - 1] = 0$$

$$(-1-T)[2T + T^2 - 1] = 0$$

$-1-T=0 \to T=-1 \quad m_{-1}=1$

$T^2+2T-1=0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$-1+\sqrt{2} \quad m_{-1+\sqrt{2}}=1$

$-1-\sqrt{2} \quad m_{-1-\sqrt{2}}=1$

$m_{-1} = 1 \to g_{-1} = 1$

$m_{-1+\sqrt{2}} = 1 \to g_{-1+\sqrt{2}} = 1$

$m_{-1-\sqrt{2}} = 1 \to g_{-1-\sqrt{2}} = 1$

$\Rightarrow$ g È SEMPLICE $\forall h \in \mathbb{R}$

Cerco gli autovettori vedendo gli autospazi:

V_{-1}, $V_{-1-\sqrt{2}}$, $V_{-1+\sqrt{2}}$.

$$V_{-1} = \dim \ker (g_{-1}) \to \begin{pmatrix} -2-(-1) & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1) & h+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & h+1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ x + (h+1) z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z + (h+1) z = 0 \to (h+2) z = 0 \\ x = z \to x = 0 \end{cases} \quad \forall y$$

$\vec{u}_1 = (0, 1, 0)$ 1° AUTOVETTORE

$$V_{-1-\sqrt{2}} = \dim \ker g_{-1-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2-(-1-\sqrt{2}) & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1-\sqrt{2}) & h+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1-\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & h+1 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOMMA × DIFFER.

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{2})x - z = 0 \\ x + \sqrt{2}y + (h+1)z = 0 \\ -x + (1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})z - z = 0 \to (\sqrt{2}^2 - (1)^2)z - z = 0 = 0 = 0 \\ x = (1+\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$((\sqrt{2})^2 - (1)^2)z - z = 0 \to$$
$$(2-1)z - z = 0$$
$$z - z = 0$$

continuo sistema qui

$$\begin{cases} 0=0 \\ x+\sqrt{2}y+(h+1)z=0 \\ x=(1+\sqrt{2})z \end{cases} \quad \begin{cases} (1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}y+(h+1)z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -- \\ (2+h+\sqrt{2})z+\sqrt{2}y=0 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{\sqrt{2}}y=\dfrac{(-2-h-\sqrt{2})z}{\sqrt{2}} \\ x=(1+\sqrt{2})z \end{cases} \quad \forall z$$

$$V_{-1-\sqrt{2}} = \left(1+\sqrt{2}z,\ \frac{-2-h-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}z,\ z\right)$$

$$\mu_2 = \left(1+\sqrt{2},\ \frac{-2-h-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ 1\right)$$ 2° AUTOVETTORE

$$V_{-1+\sqrt{2}} = \dim \operatorname{Ker} g_{-1+\sqrt{2}} \quad \begin{pmatrix} -2-(-1+\sqrt{2}) & 0 & -1 \\ 1 & -1-(-1+\sqrt{2}) & h+1 \\ -1 & 0 & 0-(-1+\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & h+1 \\ -1 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{2})x-z=0 \\ x-(-\sqrt{2})y+(h+1)z=0 \\ -x+(1-\sqrt{2})z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})z-z=0 \\ \sim \quad -- \quad \sim \\ x=(1-\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2}^2-1^2)z-z=0 \\ \dots \\ x=\dots \end{cases} \quad \begin{cases} (2-1)z-z=0 \\ -- \\ x=\dots \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \quad \forall z \\ (1-\sqrt{2})z-(-\sqrt{2})y+(h+1)z=0 \\ x=(1-\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2}+h+1)z+\sqrt{2}y=0 \\ x=\dots \quad \forall z \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-\sqrt{2}+h)z+\sqrt{2}y=0 \\ x=(1-\sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\,y=\left(\frac{\sqrt{2}-2-h}{\sqrt{2}}\right)z \qquad V_{1+\sqrt{2}}=\left((1-\sqrt{2})z,\ \frac{\sqrt{2}-2-h}{\sqrt{2}}z,\ z\right)$$

$$x=(1-\sqrt{2})z \qquad \forall z$$

$$\underline{u}_3=\left((1-\sqrt{2})z,\ \frac{\sqrt{2}-2-h}{\sqrt{2}}z,\ 1\right)$$ 3° AUTOVETTORE

BASE DI AUTOVETTORI $=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3\}$ SOLUZIONE

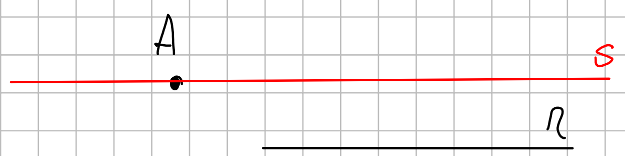
31-01-22

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato un punto $A = (-2, 0, -1)$ e una retta

$$r: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare la retta s passante per A e parallela alla retta r e il piano π passante per A ed ortogonale alla retta s.



$\bar{V}_s = \bar{V}_r$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ t=0 \end{cases} \qquad \forall z \qquad P_\infty = (-z, -z, z, 0)$$

$$\quad '' = (-1, -1, 1, 0)$$

$$\bar{V}_r = (-1, -1, 0) \qquad A = (-2, 0, -1)$$

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{0}$$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{-1} = \frac{y-0}{-1} \\ \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x-2=-y \\ z+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad s$$

$\pi \perp s$ PER A

$$v_\pi = \bar{v}_s \qquad v_\pi = (\underset{a}{-1}, \underset{b}{-1}, \underset{c}{0}) \qquad A = (\underset{x}{-2}, \underset{y}{0}, \underset{z}{-1})$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(-1)(-2) + (-1)(0) + (0)(-1) + d = 0$$

$$2 - 0 - 0 + d = 0 \qquad -x - by - 2 = 0$$

$$d = -2 \qquad x + y + 2 = 0 \ (\pi)$$

2) Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + (h-1)y^2 - 2x + (h-2)y = 0.$$

calcolando in particolare i punti base e le coniche spezzate.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h-1 & \frac{h-2}{2} \\ -1 & \frac{h-2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -\left[\left(\frac{h-2}{2}\right)^2 + (h-1)\right] = -\left[\frac{(h-2)^2}{4} + h - 1\right]$$
$$= -\left[\frac{h^2+4-4h}{4} + h - 1\right] =$$
$$= \left[\frac{h^2 + \cancel{4} \cancel{-4h} + \cancel{4h} \cancel{-4}}{4}\right] =$$
$$= -\frac{h^2}{4}$$

$|B| = 0$

$-\frac{h^2}{4} = 0 \qquad h^2 = 0 \qquad \boxed{\text{Per } h=0}$ coniche spezzate

sost. h nel fascio

$$x^2 + (h-1)y^2 - 2x + (h-2)y = 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h-1 & \frac{h-2}{2} \\ -1 & \frac{h-2}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det_{2\times 2} = -1 \qquad \rho = 2 \qquad$ QUALI RETTE distinte?

$x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$

$(x+y)(x-y) - 2x - 2y = 0$

$(x+y)(x-y) - 2(x+y)$

$(x+y)(x-y-2) = 0 \qquad \cap \begin{cases} x+y = 0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

$h \neq 0 \rightarrow \det B \neq 0$ quindi $|A|$ $h \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h-1 & \frac{h-2}{2} \\ -1 & \frac{h-2}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

$|A| = h-1$

$|A| > 0$ ellisse, $h-1>0$ $h>1$

$|A| < 0$ iperboli, $h<1$

$|A| = 0$ $h=1$ PARABOLA

$h=1$ parabola $\beta Y^2 = 2\gamma X$ $\quad h=1$ $|A| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T_r A = \beta = 1 + 0 = 1$

$$\gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{T_r A}} \Rightarrow \gamma = +\sqrt{\frac{-\frac{-h^2}{4}}{1}} = +\sqrt{\frac{h^2}{4}} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{Y^2 = X}$ parabola $Y^2 - X = 0$

$$\boxed{r\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}}$$

Punti base?

$x^2 + (h-1)y^2 - 2x + (h-2)y = 0.$

$x^2 + hy^2 - y^2 - 2x + hy - 2y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x - 2y + hy^2 + hy = 0$

$x^2 - y^2 - 2x - 2y + h(y^2+y) = 0$

$y^2 + y = 0 \quad \nexists \mathbb{R}$ La seconda generatrice del fascio non soddisfa i requisiti

Vado a prendere la parabola che si ha per h=1

$$x^2 + (h-1)y^2 - 2x + (h-2)y = 0.$$

$x^2 - 2x - y = 0$ PARABOLA

$r: (x+y)(x-y-2) = 0$

$$\begin{cases} (x+y)(x-y-2) = 0 \\ x^2 - 2x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y) = 0 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x + x^2 - 2x = 0 \\ y = . \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \boxed{A = (0,0)} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \boxed{B = (1,-1)}$$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 2x - x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow 9 - 8 = 1 \qquad y = -1$$

$$\frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C(2,0) \\ D(1,-1) \end{array}}$$

$A = (0,0)$
$B = (1,-1)$
$C = (2,0)$
$D = (1,-1)$

$A = (0,0)$
$B \equiv D = (1,-1)$
$C = (2,0)$

$\begin{cases} \text{1 punto doppio} \\ \text{2 DISTINTI} \end{cases}$

Coniche tangenti.

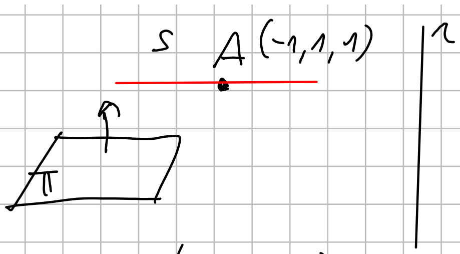
È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati il punto $A = (-1, 1, 1)$, la retta

$$r: \begin{cases} x + 3z = 2 \\ y + 2z - 1 = 0, \end{cases}$$

e il piano $\pi: \; x + y - z - 1 = 0$. Determinare la retta s passante per A, parallela al piano π e perpendicolare alla retta r. Verificare che r e s sono sghembe.

21 02 2022



$\bar{u}_\pi = (1, 1, -1)$ $\quad s: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

$\begin{cases} \bar{V}_s \perp \bar{U}_\pi \\ \bar{V}_s \perp \bar{V}_r \end{cases}$ $\quad \bar{V}_r$? $\quad \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3z \\ y = -2z \\ t = 0 \end{cases} \forall z$

$P_\infty(-3\cancel{z}, -2\cancel{z}, \cancel{z}, 0) \rightsquigarrow \bar{V}_r = (-3, -2, 1)$

PROD. scalare $= 0$

$\begin{cases} \bar{V}_s \perp \bar{U}_\pi \\ \bar{V}_s \perp \bar{V}_r \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \bar{V}_s \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ \bar{V}_s \cdot (-3, -2, 1) = 0 \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} (l, m, n) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ (l, m, n) \cdot (-3, -2, -1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} l + m - n = 0 \\ -3l - 2m - n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = l + m \\ -3l - 2m - l - m = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = \_\_\_ \\ -4l - 3m = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -\frac{3}{4}m + m \\ 4l = -3m \end{cases}$

$\begin{cases} n = \dfrac{-3 + 4}{4} m \\ l = -\frac{3}{4} m \end{cases}$ $\begin{cases} n = -\frac{7}{4} m \\ l = -\frac{3}{4} m \end{cases}$ $\quad \bar{V}_s = \left(-\frac{3}{4}\cancel{m}, \cancel{m}, -\frac{7}{4}\cancel{m}\right)$

$\bar{V}_s = (\underset{l}{-3}, \underset{m}{4}, \underset{n}{-7})$

$(-1, 1, 1) = A$ $\quad \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-7}$

$\begin{cases} \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 4 = -3y + 3 \\ 7y - 7 = 4z - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ 7y - 4z - 3 = 0 \end{cases}$ s

r e s SGHEMBE?

$r = \begin{cases} x + 3z = 2 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \text{noto} \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

Se det ≠ 0 allora sghembe.

1° colonna

$a_{11} A_{11} + a_{31} A_{31} = 4 \cdot 24 = 96$ (Rette sghembe)

($a_{11} = 1$, $A_{11} = 0$, $a_{31} = 4$, $A_{31} = 24$)

1
$24 \cdot 4 = 96$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + [-9 - [3 - 12]] =$
$= -9 - 3 + 12 = 0$

$37 - 21 = 16$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -21 + 8 - [-9 - 28]$
$-21 + 8 + 9 + 28 = 24$

2) Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$hx^2 + hy^2 + 2xy + 2x + 2hy = 0.$$

calcolando, in particolare, i suoi punti base e le coniche spezzate.

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 1 & h & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}$$

$\det B = h + h - [h^3 + h]$

$2h - h^3 - h = h - h^3$

$|B| = 0$

$h^3 - h = 0$

$h(h^2 - 1) = 0$ → $h = 0$, $h = \pm 1$

$\boxed{h = 0}$ $hx^2 + hy^2 + 2xy + 2x + 2hy = 0.$

$2xy + 2x = 0$

$2x(y+1) = 0$ → $\cancel{2}x = 0$, $y + 1 = 0$ Γ_1

$h = 1$ $\underbrace{x^2 + y^2 + 2xy}_{} + 2x + 2y = 0$

$(x+y)^2 + 2x + 2y$

$(x+y)^2 + 2(x+y)$ $(x+y)(x+y+2) = 0$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$ Γ_2

$$\begin{cases} 2x(y+1)=0 \\ (x+y)(x+y+2)=0 \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} 2x=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y+1=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} y+1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} 2x=0 \\ x+y=0 \end{cases} = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad A=(0,0)$$

$$2)\ \begin{cases} 2x=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \qquad B=(0,-2)$$

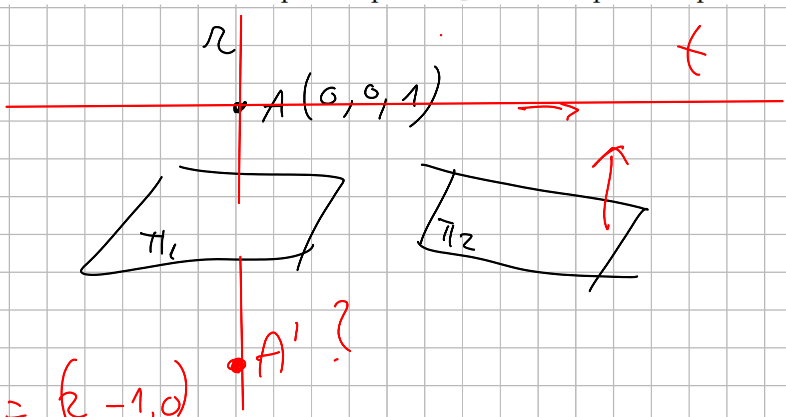
$$3)\ \begin{cases} y+1=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \qquad C=(1,-1)$$

$$4\ \begin{cases} y+1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x-1+2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \qquad D=(-1,-1)$$

4 punti DISTINTI CASO 1

1) Sono dati il punto $A = (0,0,1)$ e i piani $\pi_1 : 2x - y + 3 = 0$ e $\pi_2 : \ x + y - z - 3 = 0$. Determinare il punto A' simmetrico di A rispetto al piano π_1 e la retta t passante per A e ortogonale π_2.

14 Aprile 2022



$\bar{v}_{\pi_1} = (2,-1,0)$

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{0} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{2} = -y \\ \cancel{-y = \dfrac{z-1}{0}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} r \\ \\ \pi_1 \end{array} \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \\ 2(2y) - y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \\ 4y - \cancel{y} + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \cancel{3}y = \dfrac{-3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad H = (\underset{x_H}{\overset{\shortparallel}{-2}}, \underset{y_H}{\overset{\shortparallel}{-1}}, \underset{z_H}{\overset{\shortparallel}{1}})$$

$$-2 = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow x = -4$$

$$-1 = \frac{0 + y}{2} \rightarrow y = -2$$

$$A = (0,0,1) \qquad 1 = \frac{1 + z}{2} \rightarrow z = 1$$

$$A' = (-4, -2, 1)$$

t che passa per A e $\perp$ π_2

$$\bar{u}_{\pi_2} = (1,1,-1) \qquad A = (0,0,1)$$

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1} \qquad t: \begin{cases} x = y \\ y = -z - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad (t)$$

2) E' assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + hy^2 + 2hxy + hx - hy = 0.$$

Studiare l'iperbole equilatera del fascio determinando una forma ridotta, centro, assi, vertici e asintoti.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h \\ h & h & -\frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B = (h)\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right) + \left(\frac{1}{2}h\right)(h)\left(-\frac{1}{2}h\right) - \left[\left(-\frac{1}{2}h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2(h)\right]$

$\det B = h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right) + \left(\frac{1}{2}h\right)(h)\left(-\frac{1}{2}h\right) - \left(-\frac{1}{2}h\right)^2 - \left(\frac{1}{2}h\right)^2(h) =$

$h\left(-\frac{1}{4}h^2\right) + \left(-\frac{1}{4}h^2\right)(h) - \frac{1}{4}h^2 - \left(\frac{1}{4}h^2\right)(h)$

$\boxed{h\left(-\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}h - \frac{1}{4}h^2\right)} \neq 0 \qquad h \neq 0$

$\det B$

$-\frac{3}{\cancel{4}}h^2 - \frac{1}{\cancel{4}}h \neq 0 \qquad 3h^2 + h \neq 0$

$h(3h+1) \neq 0 \qquad h \neq 0 \qquad 3h \neq -\frac{1}{3}$

Iperbole per $h \neq 0$ e $h \neq -\frac{1}{3}$

Equilatera per $\mathrm{Tr}A = 0 \qquad 1 + h = 0 \qquad h = -1 \to$ EQUILATERA

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & h \end{pmatrix}$

$\det A = h - h^2$

$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$

$\gamma = \frac{h\left(-\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}h - \frac{1}{4}h^2\right)}{h - h^2}$

$h = -1 \quad = \frac{-1\left(-\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\right)}{-2} = \frac{-\left(-\frac{2}{4}\right)}{-2} = -\frac{\frac{2}{4}}{-2} = \frac{\cancel{2}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$= -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$\gamma = \frac{1}{4}$

α, β sol. del. P.C(A)

$$\begin{pmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & -1-T \end{pmatrix}$$

$\det = (1-T)(-1-T) - 1 = 0$

$(-T+1)(-T-1) - 1$

$1-T=1 \quad T=0$

$-1-T=1 \quad T=-1$

$T^2 - 1 - 1 = 0$

$T^2 - 2 = 0 \qquad T = \pm\sqrt{2}$

$T = \sqrt{2} \quad \alpha$

$T = -\sqrt{2} \quad \beta$

$\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 = \frac{1}{4}$

MATRICE IPERBOLE EQUILATERO

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}h & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_c - y_c - \frac{1}{2} = 0 \\ -x_c - y_c + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_c = x_c - \frac{1}{2} \\ -x_c - x_c + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_c = x_c - \frac{1}{2} \\ -2x_c + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_c = \dots \\ 2x_c - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \cancel{2}x_c = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y_c = 0 \\ x_c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ASSI $\qquad m_1 = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

$y - y_c = m_1 (x - x_c)$

$y = 1-\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = 1-\sqrt{2}x - \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$m_1 = -\frac{1-\sqrt{2}}{-1}$

$m_1 = -\left(-1+\sqrt{2}\right) = 1-\sqrt{2}$

$2y = 2 - 2\sqrt{2}x$

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

$2\sqrt{2}x + 2y - 2 = 0$

Asse 2

$y - 0 = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}x + \frac{1}{2-2\sqrt{2}}$

$\frac{1}{1-\sqrt{2}}x - y - \frac{1}{2-2\sqrt{2}} = 0$ ASSE 2

$x^2 + hy^2 + 2hxy + hx - hy = 0.$

Vertici. Iperbole $h = -1 = x^2 - y^2 - 2xy - x + y = 0$

$\begin{cases} \text{Iperbole} \\ \text{ASSE } 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{iperbole} \\ \text{Asse } 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy - x + y = 0 \\ 2\sqrt{2}x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

ASINTOTI

$y = \pm \frac{b}{a} x$

FORMULE DI PASSAGGIO.

$P_0 \to P_\infty$

$\boxed{x = \frac{x'}{t'}}$ $\boxed{y = \frac{y'}{t'}}$

COND. ORTOGONALITA'

$\bar{V}_1 = (l_1, m_1, n_1)$
$\bar{V}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $\boxed{\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = 0}$

$\begin{cases} r_1 \perp \pi_1 \\ r_2 \perp \pi_2 \end{cases}$ DOPPIA COND.

COND. PARALLELISMO

$\bar{V}_1 = (l_1, m_1, n_1)$
$\bar{V}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $\boxed{\bar{V}_1 = \lambda \bar{V}_2} \to \bar{V}_1 = (\lambda l_2, \lambda m_2, \lambda n_2)$

RETTA → PARAM. DIRETTORI

$r: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} a'x+b'y+c't'=0 \\ t'=0 \end{cases} \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow P_\infty(x, y, z, t)$

$\bar{V}_r = (x, y, z)$

RETTA r

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$

PASSA PER $\boxed{P_0 = (x_0, y_0, z_0)}$

PIANO π $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

$\bar{V}_r = (l, m, n)$ / $\bar{V}_\pi = (a, b, c)$

Angolo fra 2 rette =

$$\frac{\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \cos\alpha$$

→ SCALARE

dist. Punto-PIANO

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

PUNTO SIMMETRICO

Medio

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$\quad\quad x_M \quad\quad y_M \quad\quad z_M$

Piano contenente 2 rette r e s

- FASCIO DI RETTE CON ASSE LA 1° retta

$r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \ (\pi_1) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \ (\pi_2) \end{cases}$

$F = \pi_1 + K \cdot (\pi_2) = 0$

SODDISFA "S" — NON SODDISFA "r"

- Scelgo 1 Punto P_0 su s, $\boxed{P_0 \in s}$ e $\boxed{P_0 \notin r}$
  → risolvo sist. di s e trovo 1 Inc. lib
  → Do 1 valore e verifico le condizioni
- Impongo il passaggio del fascio per P_0 e trovo K.
- Sost. K nell'eq. del fascio.

2 rette sghembe $\det \neq 0$

$r: \begin{cases} z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

TUTTO AL I MEMBRO

$$\det_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} s \end{matrix} = \dots$$

coniche spezzate e punti Base

Servono almeno 2 coniche spezzate Γ_1, Γ_2

$\Gamma_1 = \det B = 0$ (TABELLA)

Γ_2 = Prendo il fascio, raccolgo K e i termini con la K comune mi danno Γ_2.

Γ_2 = è spezzata? (RACCOGLIM., PROD. NOTEVOLE)

Punti Base $\begin{cases} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{cases} \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ $B_1(\ ,\ ) \dots$ $B_2(\ ,\ ) \dots$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}, \text{i}$$

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$ Conica

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 & x/2 \\ xy/2 & a_{22} & y/2 \\ x/2 & y/2 & a_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 \\ xy/2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$|B|$, $\rho(B)$, $|A|$, $TrA = a_{11} + a_{22}$

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

- Vedo se si spezza se è prod. notevole, se posso raccogliere.

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

→ Altrimenti faccio la matrice dell'equaz. trovata e RIVEDO LA TABELLA

CONICHE $|B| \neq 0$

IPERBOLE/ELLISSE

FORMA RIDOTTA 1.

$$\boxed{\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma}$$

$$\gamma = \frac{-\det B}{\det A}$$

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma, \det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$$P_A(T) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{pmatrix} = 0 \to\ = 0 < \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

CENTRO

$$\begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 & x/2 \\ xy/2 & a_{22} & y/2 \\ \cancel{x/2} & \cancel{y/2} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. xy)

$$m_1 = \frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$$

ASSE 1: $y - y_c = m_1(x - x_c)$
ASSE 2: $y - y_c = -\frac{1}{m}(x - x_c)$

ASSI se $a_{12} = 0$ (term xy)

ASSE 1: $x = x_c$
ASSE 2: $y = y_c$

VERTICI ELLISSE (4)

$V_1, V_3 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 1} \end{cases}$ / $V_2, V_4 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 2} \end{cases}$

VERTICI IPERBOLE

$\begin{cases} \text{ASSE 1} \\ \text{fascio} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \text{ASSE 2} \\ \text{fascio} \end{cases}$

Uno dei 2 non ha soluzioni.

PARABOLA

FORMA RIDOTTA 2.

$$\boxed{\beta Y^2 = 2\gamma X}$$

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$$

$\beta = ?$ $\gamma = ?$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2, \det A = 0$ Da cui

$$\boxed{\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

CENTRO PARABOLA $\nexists$

ASSE PARABOLA, è UNICO
NON SI CALCOLA IN GENERALE

ASSE PARABOLA SOLO SE E' PARALLELO ALL'ASSE Y

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $x = x_V$ vertice

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

ASSE PARABOLA SOLO SE E' PARALLELO ALL'ASSE X

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $y = y_V$ vertice

$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$$1x^2 + 1y^2 + ax + by + c = 0$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

1) Data una retta nello spazio, determinare i parametri direttori e scriverla come intersezione tra due piani:

$a)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = z-2$

$b)\ \frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$

$c)\ \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} = z-2$

$d)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4}$

$$a)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = z-2 \qquad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$r: \begin{cases} y+1=0 \\ \frac{x-2}{2} = z-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1=0 \\ \frac{x-2}{\cancel{2}} = 2z-4 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y+1=0} & \pi_1 \\ x-2-2z+4 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \boxed{x-2z+2=0} & \pi_2 \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$$

$$\bar{V}_r = (\underset{l}{2}, \underset{m}{0}, \underset{n}{1})$$

$$b)\ \frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z \qquad \bar{V}_r = (2,2,1)$$

$$r: \begin{cases} \frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-1 = y-1 \\ y-1 = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=0 & (\pi_1) \\ y-2z-1=0 & (\pi_2) \end{cases} \quad \boxed{\pi_1 \cap \pi_2}$$

$$c)\ \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} = z-2 \qquad \bar{V}_r = (0,0,1) \qquad 1°,3° \quad 2°,3$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} \\ \frac{y+1}{0} = z-2 \end{cases} \begin{cases} 0=0 \\ y+1=0 \end{cases} \begin{cases} 0=0 \\ y=-1 \end{cases} \Bigg\| \begin{cases} \frac{x-2}{0} = z-2 \\ \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} \frac{x-2}{0} = z-2 \\ \frac{y+1}{0} = z-2 \end{array} \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$d)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4} \qquad \boxed{\bar{V}_r = (2,4,4)}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} \\ \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-8 = 2y+2 \\ y+1 = 4z \end{cases} \quad \begin{cases} \overset{2}{\cancel{4}}x - \cancel{2}y \underset{5}{\cancel{-8-2}} = 0 \to \boxed{2x-y-5=0} & (\pi_1) \\ \boxed{y+1-4z=0} & (\pi_2) \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$$

2) Data una retta e un piano, stabilire se la retta r è contenuta nel piano π:

a) $r : \begin{cases} 2y - z &= -1 \\ x - y &= -3 \end{cases}, \pi : x + y - z - 2 = 0$

b) $r : \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ x + y + z &= -2 \end{cases}, \pi : 2x + y + z - 4 = 0$

P. GENERICO DI r OPP. SISTEMA.

P. GENERICO

$\begin{cases} 2y - z = -1 \\ x - y = -3 \end{cases} \begin{cases} z = 2y + 1 \\ x = y - 3 \end{cases} \quad \forall y$

P. generico sulla retta $(\underset{x}{y-3}, \underset{y}{y}, \underset{z}{2y+1}) \to (-2, 1, 3)$

Sost. nel piano $\pi : x + y - z - 2 = 0$

$-2 + 1 - 3 - 2 = 0$

$-1 - 3 - 2 = 0$

$-6 = 0$ ASSURDO $\quad r \not\subset \pi$

La retta non è contenuta nel piano!

b) $r : \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ x + y + z &= -2 \end{cases}, \pi : 2x + y + z - 4 = 0$

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases} \begin{cases} x = z + y \\ z + y + y + z = -2 \end{cases} \begin{cases} x = \dots \\ 2y + 2z = -2 \end{cases} \{ y + z = -1 \begin{cases} x = z + y \\ z = -1 - y \end{cases} \forall y$

P. generico $= (z + y,\ y,\ -1 - y) \ \forall z$

$\to (-1, 1, -2)$

Sost. nel piano

$2(-1) + 1 - 2 - 4 = 0$

$-2 + 1 - 2 - 4 = 0$

$-7 = 0$ ASSURDO $\quad r \not\subset \pi$

3) Dato un punto fissato $P_0 = (1,1,-1)$, determinare la retta passante per P_0 e avente parametri direttori (5,0,5).

RETTA $= \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{5}$$

$r_1 \begin{cases} y-1=0 \\ \frac{x-1}{5} = \frac{z+1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ x-1=z+1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{y=1 \ (\pi_1)} \\ \boxed{x-z-2=0 \ (\pi_2)} \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$

4) Date le seguente rette e i seguenti piani, trovare i parametri direttori di ciascuno:

a) $r_1 : \begin{cases} x+y & = 2 \\ x+y+z & = 2 \end{cases}; r_2 : \begin{cases} 2x-3z+1 & = 0 \\ x-y+2z-1 & = 0 \end{cases}; r_3 \begin{cases} x & = 0 \\ y & = z-3 \end{cases}$

b) $\pi_1 : 2x+y-3z+1=0; \pi_2 : x-z=0; \pi_3 : x+y+4=0$

$r_1 : \begin{cases} x+y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

omogenizzo

$\begin{cases} x'+y' = \cancel{2}t' \\ x'+y'+z' = \cancel{2}t' \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'=-y' \\ \cancel{-y'}+\cancel{y'}+z'=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x'=-y' \\ z'=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \forall y'$

Vettore generico $= (\underbrace{-y', y', 0}_{\text{P.d.}}, 0)$

$\bar{v}_{r_1} = (-1, 1, 0)$

$r_2 : \begin{cases} 2x-3z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{OMOG.}} \begin{cases} 2x'-3z'+\cancel{t'}=0 \\ x'-y'+2z'\cancel{-t'}=0 \\ t'=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x' - 3z' = 0 \\ x' - y' + 2z' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2}x' = \frac{3}{2}z' \\ -\frac{3}{2}z' - y' + 2z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \dots \\ \frac{1}{2}z' = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}z' \\ y = \frac{1}{2}z' \end{cases} \quad \forall z$$

$\bar{V}$ generico $= \left(\frac{3}{2}z', \frac{1}{2}z', z'\right)$

$$\boxed{\bar{V}_{r_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{OMOG}} \begin{cases} x' = 0 \\ y' = z' - \cancel{3t'} \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = z' \\ t' = 0 \end{cases}$$

Vett. generico $= (0, z, z, 0)$ $\forall z$

$\bar{V}_{r_3} = (0, 1, 1)$

---

b) $\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0; \pi_2 : x - z = 0; \pi_3 : x + y + 4 = 0$

PIANO. $ax + by + cz + d = 0$ $\quad V_\pi = (a, b, c)$

$\bar{V}_{\pi_1} = (2, 1, -3)$ $\quad \bar{V}_{\pi_2} = (1, 0, -1)$ $\quad \bar{V}_{\pi_3} = (1, 1, 0)$

---

5) Dato un punto P_0e una retta r, determinare la retta s passante per P_0 e parallela alla retta r e una retta t passante per P_0e ortogonale alla retta s:

a) dato $P_0 = (2, -2, 0), r : \begin{cases} x + y &= 2 \\ x - z &= 3 \end{cases}$

b) dato $P_0 = (1, 0, -3), r : \begin{cases} 2x + y &= -3 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases}$

$s: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ $\quad P_0 = (2, -2, 0)$

SOST. $\dfrac{x-2}{l} = \dfrac{y+2}{m} = \dfrac{z-0}{n}$ $\quad V = (l, m, n)$??

$s // r$ quindi $\bar{V}_s = V_r$. TROVO $\bar{V}_r$. OMOGENIZZO.

$$r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2t \\ x - z = 3t \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

Vett. generico $= (x, -x, x, 0)$

$\bar{V}_r = (1,-1,1) \longrightarrow$ diventa $\boxed{\bar{V}_s = (1,-1,1)}$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-0}{1} \longrightarrow x-2 = -y-2 = z$$

$$s: \begin{cases} x-\cancel{2} = -y-\cancel{2} \\ -y-2 = z \end{cases} \begin{cases} x+y=0 & (\pi_1) \\ z+y+2=0 & (\pi_2) \end{cases}$$

$s: \pi_1 \cap \pi_2$

$t \perp \boxed{s}$ passante per P_0

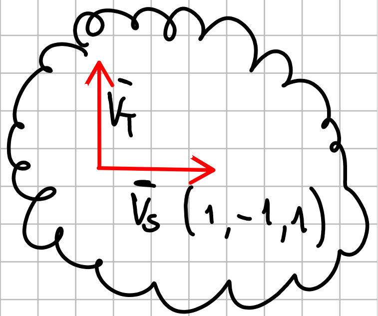
$$\boxed{t = \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}} \qquad \boxed{P_0 = (2,-2,0)}$$

$\bar{V}_s = (1,-1,1)$ $\qquad \bar{V}_s \cdot \bar{V}_t = 0$ $\qquad \bar{V}_s = (l,m,n)$

$V_t = (l',m',n')$

$$\boxed{(l,m,n)\cdot(l',m',n')=0}$$

$$(1,-1,1)\cdot(l',m',n')=0$$

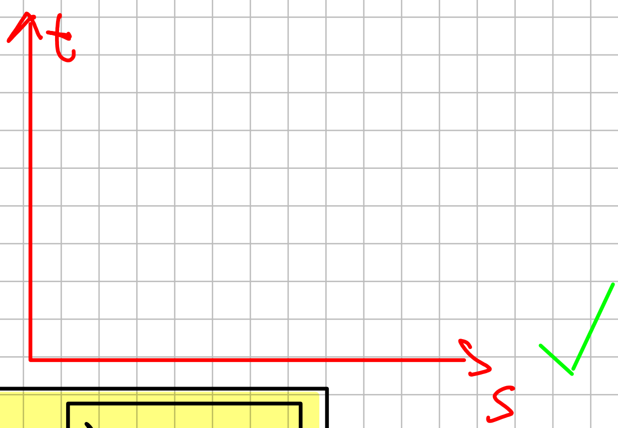


$$t = \frac{x-2}{l'} = \frac{y+2}{m'} = \frac{z-0}{n'} \qquad \bar{V}_t \perp \bar{V}_s$$

$$\boxed{l' - m' + n' = 0}$$

$l = 1,\ m = 1,\ n = 1$

$$1l' - 1m' + 1n' = 0$$



$$l' = m' - n'$$

$$\boxed{t = \frac{x-2}{m'-n'} = \frac{y+2}{m'} = \frac{z-0}{n'} \qquad \boxed{\forall\, m', n'}}$$

Infinite rette ortogonali nello spazio!

$\boxed{\text{Un } \bar{V}_t = (1,1,0),\ \bar{V}_t \text{ generico} = (m'-n', m', n')}$

b) dato $P_0 = (1,0,-3), r: \begin{cases} 2x+y &= -3 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$

s: per P_0 $//r$?

$\bar{V}_s = \bar{V}_r$

Omogenizzo

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ 2x-2x+z=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$

$\bar{V}_r = (x, -2x, 0)$

$\bar{V}_r = (1,-2,0)$

$\boxed{\bar{V}_s = (1,-2,0)}$

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ $\quad x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=-3,\ l=1,\ m=-2,\ n=0$

$\Rightarrow x-1 = \frac{y-0}{-2} = \frac{z+3}{0}$

$s: \begin{cases} x-1 = \frac{y}{-2} \\ x-1 = \frac{z+3}{0} \end{cases} \begin{cases} -2x+2 = y \\ z=-3 \end{cases} \begin{cases} 2x+y-2=0 & \pi_1 \\ z+3=0 & \pi_2 \end{cases}$ s:

6) Dato un punto P_0e un piano π, determinare il piano $\pi_{||}$ passante per P_0 e parallela al piano π

a) dato $P_0 = (0,2,0), \pi: x+y=0$

$\bar{V}_r^{(\pi)} = (1,1,0)$ $\quad \bar{V}_{r//} = (1,1,0)$

$\pi_{//} = ax+by+cz+d=0$

$x+y+0+d=0$ $\quad x=0,\ y=2,\ d=?$

$P_0 = (0,2,0)$

$0+2+0+d=0$

$2+d=0 \quad d=-2$

$\boxed{x+y-2=0}$

$\boxed{\pi_{//}^{(\pi_1)} \text{ che passa per } P_0.}$

b) dato $P_0 = (1,1,-3)$, $\pi : 2x+2y+2z$

$\bar{V}_\pi = (2,2,2) \to (1,1,1)$

$\bar{V}_{\pi_{//}} = (1,1,1)$

EQ. PIANO.

$ax+by+cz+d=0$

$x+y+z+d=0 \to$ impongo il passaggio per P_0.

$1+1-3+d=0$

$d=3-2=1$ $\boxed{x+y+z+1=0}$ $\pi_{//}$

7) Data una retta r un punto P_0 e un piano π, determinare la retta t_1 passante per P_0, ortogonale al piano π e il piano $\pi_\perp$ passante per P_0, ortogonale alla retta r

7a) Data una retta $r : \begin{cases} x-y+z & = 0 \\ x+y+z-2 & = 0 \end{cases}$, $P_0 = (0,0,1)$, $\pi : x+3y-1=0$

7b) Data una retta $r : \begin{cases} y+z & = 0 \\ 3x-z-1 & = 0 \end{cases}$, $P_0 = (1,-1,1)$, $\pi : x+y-z=0$

t_1 per P_0 e $\perp \pi$ retta. $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$

$\bar{V}_\pi = (1,3,0)$ è // a $\bar{V}_t = (1,3,0)$

$t_1: \boxed{\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{3} = \dfrac{z-1}{0}}$

$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 0 & (\pi_1) \\ z-1=0 & (\pi_2) \end{cases}$

$\pi_\perp$ per P_0 $\perp r$ $\bar{V}_{\pi_\perp} = \bar{V}_r$

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=\cancel{2}\,t\ 0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-z \\ y-\cancel{z}+y\cancel{+z}=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-z \\ 2y=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$

Vettore direttivo di r generico $= (-z, 0, z)$ $\forall z$

$\bar{V}_r = (-1,0,1)$

P_0 era $(0,0,1)$ e $\pi_\perp$ è

$\pi_\perp \quad ax+by+cz+d=0$

$-x+z+d=0 \rightsquigarrow$ Passa per $P_0 \to -0+1+d=0$

$\hookrightarrow d=-1$

Eq. $\pi_\perp = -x+z-1=0$

$\hookrightarrow \boxed{x-z+1=0}$

7b) Data una retta $r : \begin{cases} y+z &= 0 \\ 3x-z-1 &= 0 \end{cases}, P_0 = (1,-1,1), \pi : x+y-z=0$

t_1 per P_0 e $\perp \pi$ $\qquad$ retta. $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$

$\bar{V}_\pi = (1,1,-1) \iff \bar{V}_{t_1} = (1,1,-1)$

$t: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$

$\begin{cases} x-1 = y+1 \\ y+1 = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-2=0 \\ -y\cancel{-1}-z\cancel{+1}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x-y-2 \overset{t:}{=} 0 \\ y+z=0 \end{matrix}} \end{cases}$

$\pi_\perp \perp r$ passa per P_0.

$\bar{V}_{\pi_\perp} = \bar{V}_r$

$\begin{cases} y+z=0 \\ 3x-z-\cancel{1}t=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z \\ z=3x \\ t=0 \end{cases} \forall x \quad P_\infty = (x, -z, 3x, 0)$

$\bar{V}_{\pi_\perp} = (\underset{a}{1}, \underset{b}{-3}, \underset{c}{3})$

PIANO. $\quad ax+by+cz+d=0$

$x-3y+3z+d=0$ $\quad$ Passa per $P_0(1,-1,1)$

$1+3+3+d=0$

$d=-7$

$\boxed{\text{PIANO } \pi_\perp = x-3y+3z-7=0}$

8) Date due rette r_1, r_2 e un punto P_0, determinare la retta t che passa per P_0 ed è ortogonale ad entrambe le rette

8a) $r_1 : \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} y+z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}, P_0 = (1, 0, -3)$

8b) $r_1 : \begin{cases} x-z &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, P_0 = (0, 0, 3)$

t per P_0 $\perp$ r_1 e r_2 $\quad \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-0}{m} = \frac{z+3}{n}$$

$t \perp r_1 \qquad \overline{V}_{r_1} = ?$

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y=1 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=x+y \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=x+2x \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=3x \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \forall x \qquad P_\infty = (x, 2x, 3x, 0)$

$\overline{V}_{r_1} = (1, 2, 3)$

$r_2: \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=-y \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad P_\infty = (0, y, -y, 0)$

$\overline{V}_{r_2} = (0, 1, -1)$

$\begin{cases} V_t \perp V_{r_1} \to \text{PROD SCALARE} = 0 \\ V_t \perp V_{r_2} \to \text{PROD SCALARE} = 0 \end{cases}$

$(l, m, n) \cdot (1, 2, 3) = 0 \to l + 2m + 3n = 0$

$(l, m, n) \cdot (0, 1, -1) = 0 \to 0l + m - n = 0$

$\begin{cases} l+2m+3n=0 \\ m-n=0 \end{cases} \begin{cases} l+2n+3n=0 \\ m=n \end{cases} \begin{cases} l=-5n \\ m=n \end{cases} \forall n$

$\overline{V}_t = (-5n, n, n) \to (-5, 1, 1)$

$t: \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z+3}{1}$

$t: \begin{cases} \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-0}{1} \\ \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z+3}{1} \end{cases} \begin{cases} x-1=-5y \\ y-z-3=0 \end{cases} \begin{cases} x+5y-1=0 & (\pi_1) \\ y-z-3=0 & (\pi_2) \end{cases}$

Classificare le seguenti coniche:

1) $2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0$
2) $x^2 - y^2 - 6xy + 2x - 4y = 0$
3) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$
4) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$
5) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 4 = 0$

1) $2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$|B| = 4 - [-8 + \frac{9}{2}] = 4 + 8 - \frac{9}{2} = \frac{8+16-9}{2} = \frac{15}{2}$

$|B| \neq 0$

Invece se risulta det $B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se det $A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se det $A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se det $A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$|A| = -2 - [4] = -2 - 4 = -6$ $\quad |A| < 0$, $\boxed{\text{IPERBOLE}}$

$TrA = 2 - 1 = 1$, $\boxed{\text{non equilatera.}}$

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I): \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

det $B = -\alpha\beta\gamma$, det $A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$P_A(T) = \det \begin{vmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{vmatrix} = 0 \to \dots = 0 < \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

FORMA CANONICA

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = \frac{\frac{15}{2}}{-6} = +\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{12}_{4}}$

$\gamma = \frac{5}{4}$

$$\boxed{\alpha X^2 + \beta Y^2 = \frac{5}{4}}$$

Cerco α, β.

$A = \begin{pmatrix} 2-T & -2 \\ -2 & -1-T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2-T & -2 \\ -2 & -1-T \end{pmatrix}$

$|A_T| = 0 \to (2-T)(-1-T) - 4 = 0 \to -2 - 2T + T + T^2 - 4 = 0$

$-6 - T + T^2 = 0 \qquad T^2 - T - 6 = 0$

$b^2 - 4ac \to 1 - 4(-6) = 25$

$T_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = 3 & T_1 = \alpha \\ \dfrac{1-5}{2} = -2 & T_1 = \beta \end{cases}$

$$\boxed{3X^2 - 2Y^2 = \frac{5}{4}}$$

CENTRO

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ \cancel{0} & \cancel{-\frac{3}{2}} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 2x_c - 2y_c = 0 \\ -2x_c - y_c - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2}x_c = \cancel{2}y_c \\ -2y_c - y_c - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_c = y_c \\ -3y_c = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_c = y_c \\ \cancel{3}y_c = -\frac{\cancel{3}^{1}}{6_2} \end{cases}$

$C = (y_c, y_c) \to C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ASSI

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. xy)

$m_1 = -\dfrac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

ASSE 1 $= y - y_c = m_1(x - x_c)$

ASSE 2 $= y - y_c = -\dfrac{1}{m}(x - x_c)$

ASSI se $a_{12} = 0$ (term xy)

ASSE 1 $= x = x_c$

ASSE 2 $= y = y_c$

$a_{12} \neq 0 \qquad m_1 = -\dfrac{2-3}{-2} = -\dfrac{-1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

ASSE 1 $= y - y_c = m_1(x - x_c)$

ASSE 2 $= y - y_c = -\dfrac{1}{m_1}(x - x_c)$

ASSE 1 $= y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$y + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x = 0 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4}$

$\boxed{y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0}$

ASSE 2 $= y + \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$y + \frac{1}{2} = 2x + 1 \to y + \frac{1}{2} - 1 - 2x = 0$

$\boxed{y - 2x - \frac{1}{2} = 0}$

VERTICI IPERBOLE

$\begin{cases} \text{ASSE 1} \\ \text{fascio} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \text{ASSE 2} \\ \text{fascio} \end{cases}$

Uno dei 2 non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0 \\ y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)x - \boxed{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2} - 3\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

1° $2x^2 + (2x + 3)x - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} + \frac{3}{4}x\right) + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - 2 = 0$

$$2x^2 + 2x^2 + 3x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - 2 = 0$$

$$\frac{15}{\cancel{4}}x^2 + \frac{15}{\cancel{4}}x - \frac{5}{\cancel{16}_4} = 0$$

$$15x^2 + 15x - \frac{5}{4} = 0 \rightarrow 5x^2 + 5x - \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{20}_4}$$

$$5x^2 + 5x - \frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{20}}{10}$$

$$25 - \cancel{4}\left(5 \cdot \frac{1}{\cancel{4}}\right)$$

$$25 - 5 = 20$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{20}}{10} = \frac{-\cancel{5}^1}{\cancel{10}_2} + \frac{\sqrt{20}}{10}$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{10}_5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{20}}{10} = \frac{-5}{10} - \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{10}_5}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{-5 - 2\sqrt{5}}{10} \quad x_2}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-5 + 2\sqrt{5}}{10}}$$

2 SISTEMI

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10}\right) - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{20} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{20}_{4}} - \dfrac{\cancel{2}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{20}_{10}} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} - \dfrac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{4}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$ vertice$_1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-5+2\sqrt{5}}{10}\right) - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{-5+2\sqrt{5}}{20} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{20}_{4}} + \dfrac{\cancel{2}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{20}_{10}} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} - \dfrac{3}{4} \end{cases} \begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{4}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$ vertice$_2$

$$V_1 = \left(\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10}, \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$V_2 = \left(\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10}, -\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$$

Studiare i seguenti fasci di coniche:

1) $hx^2 + hy^2 + 4hxy + 6x + 1 = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

2) $x^2 + kxy + (1-k)y^2 + ky - 1 = 0, \forall k \in \mathbb{R}$

3) $x^2 + 2(h-1)xy + y^2 + 2hx = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

4) $(1+\lambda)x^2 + xy - 2(1+\lambda)x + \lambda = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

5) $(1+h)x^2 + y^2 - hy - 1 - h = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x-2y, -x, -x+(h+3)z)$ $h \in \mathbb{R}$

Im f. Ker f.

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3 \end{pmatrix}$$

$|M(f)| = -(2(h+3)) = -(2h+6)$

$-2h-6 \neq 0$ per $\rho = 3$

$+2h \neq \frac{-6}{2}$ $\boxed{h \neq -3}$

$\dim \operatorname{Im} f = 3$, $\dim \operatorname{Ker} f = n - \rho = 0$

non è suriettiva e iniettiva, endomorfismo

Eq. cart. $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ se $h \neq -3$

Eq. cart. $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\}$ $\boxed{\text{se } h \neq -3}$

$\boxed{h = -3}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rho < 2$

$\rho = 2$ $\det = -2$ (2×2)

$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$ $\dim \operatorname{Ker} = 3 - 2 = 1$

Eq. cart. Im f. $\operatorname{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$ per mantenere $\rho = 2$

$\det = 2y - (-2z) = 0$

$2y + \cancel{2}z = 0$

$\boxed{y} = -z \quad \forall x, z$

$\boxed{\{h=-3\}}$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{y=-z}\} \quad \forall x, z.$

$\text{Base } \mathrm{Im} f = \{(x, -z, z)\} \rightarrow \{(1,0,0), (0,-1,1)\}$

Eq. Ker f. $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x-2y=0 \\ -x=0 \\ -x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0-2y=0 \\ x=0 \\ \cancel{x=0} \end{cases} \quad \begin{cases} -\cancel{2}y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ \forall z \end{cases}$

$\boxed{\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=0\} \quad \forall z \quad \text{se } h=-3}$

$\boxed{\text{Base } \mathrm{Ker} f = \{(0,0,z)\} \rightarrow (0,0,1)}$

DIAGONALIZZABILE per quale h?

$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3 \end{pmatrix} = \text{POL. CAR.}$

$\begin{pmatrix} -1-T & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3-T \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0$

$-[2\underbrace{(h+3-T)}]$

$= -[2h+6-2T]$

$= -\cancel{2}h - \cancel{6}^{3} + \cancel{2}T = 0$

$= \overline{-h-3} + T = 0 \rightarrow T = h+3$

$T = h+3 \qquad m_{h+3} = 1 \rightsquigarrow g_{h+3} = 1 \quad f$ è semplice

Posso solo controllare per $h=-3$

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-T & -2 & 0 \\ -1 & -T & 0 \\ -1 & 0 & -T \end{pmatrix}$$

$$T^2(-1-T) - [-2T]$$

$$T^2(-1-T) + 2T = 0$$

$$T[T(-1-T)+2] = 0$$

$$T = 0$$

$$-T - T^2 + 2 = 0$$

$$\to T^2 + T - 2 = 0 \qquad 1 - 4(-2) \qquad \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$1 + 8 = 9$$

$T=0,\ T=1,\ T=-2$

$$\left.\begin{matrix} m_0 = 1 & g_0 = 1 \\ m_1 = 1 & g_1 = 1 \\ m_{-2} = 1 & g_{-2} = 1 \end{matrix}\right\}$$ f è semplice e diagonalizzabile $\forall h$

STUDIARE FASCIO DI coniche.

$$x^2 + hy^2 + 2hxy + hx - hy = 0$$

$$|B| = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h \\ h & h & -\frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & h \\ h & h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h \end{matrix}$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\left[\left(\frac{1}{2}h\right)^2+h\left(\frac{1}{2}h\right)^2\right]=$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\left(\frac{1}{2}h\right)^2-h\left(\frac{1}{2}h\right)^2$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}h^3=$$

$$h\left(-\frac{1}{4}h^2\right)+\left(\frac{1}{2}h^2\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}h^3$$

$$\cancel{-\frac{1}{4}h^3}+\cancel{\frac{1}{4}h^3}-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3=$$ (PHOTO MATH)

$$h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\right)\neq 0$$

$$h^2\neq 0 \rightarrow \boxed{h\neq 0}$$

$$-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\neq 0 \rightarrow -\frac{3}{\cancel{4}}h\neq\frac{1}{\cancel{4}} \Rightarrow -3h\neq 1 = \boxed{h\neq-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h \\ h & h & -\frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix}=B \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & h \\ h & h \end{vmatrix}$$

Invece se risulta $\det B\neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A>0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA\cdot\det B<0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA\cdot\det B>0$.
  Infine se $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A=0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A<0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A)=0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$$h-h^2<0 \qquad h^2-h=0 \qquad h(h-1)=0$$

$$h=0 \qquad h=1$$

$$\begin{cases} h<0 & h>1 \\ h\neq 0 & h\neq\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$T_rA=0$$

$$1+h=0$$

$$\boxed{h=-1}$$ ok ✓

$$\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$$

$$\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=\frac{h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\right)}{1+h}=\frac{-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3}{1+h}$$

$$=-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3\cdot\frac{1}{1+h}=1+h\cdot\left(-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3\right)=$$

NON SO

$A=(0,0,1)$ PIANO $\pi_1: 2x-y+3=0$ $\pi_2: x+y-z-3=0$

$A'=?$ simm. di A, rispetto a π_1. $\bar{v}_{\pi_1}=(2,-1,3)$

retta t che passa per A $\perp$ π_2

$\bar{v}_{\pi_2}=(1,1,-1)$

DIST. PUNTO-PIANO

π_1 $2x-y+3=0$ $A=(0,0,1)$

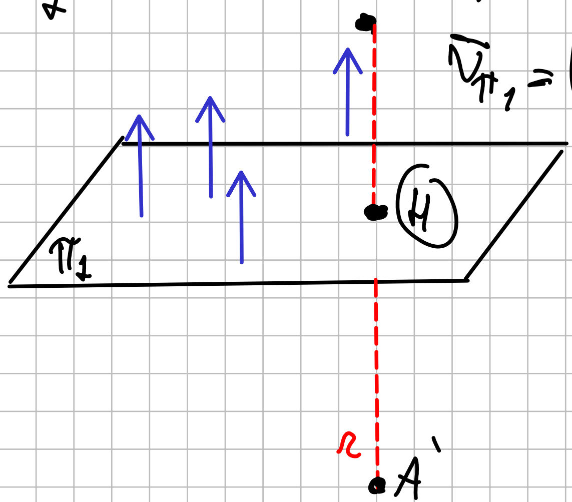
$$\overline{PH}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\overline{P_0H}=\frac{|0+0+3|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\overline{P_0H}=\frac{3}{\sqrt{14}}\rightarrow\frac{3\sqrt{14}}{14}$$

retta che passa per A, $\perp$ π_1

$A\ (0,0,1)$

$\bar{v}_{\pi_1}=(2,-1,0)$



$$r: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$: \frac{x-0}{l}=\frac{y-0}{m}=\frac{z-1}{n}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x=-y\\ -y=\frac{z-1}{0}\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}x=-2y\\ z-1=0\end{cases}\quad z=1$$

Punto Intersezione r e π_1

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0\\ -3y-z+1=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}\quad\begin{cases}\dots\\ -6x-9-z+1=0\\ y=2x+3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+2x+3=0\\ -6x-8-z=0\rightarrow z=-6x-8\\ \dots\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x+3=0 \\ \dots - \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{2}x=-3 \quad 5x=-6 \quad x=-\frac{6}{5} \\ z=-6\left(-\frac{6}{5}\right)-8 \Rightarrow z=\frac{36}{5}-8 \quad \boxed{z}=\frac{36-40}{5}=\boxed{-\frac{4}{5}} \\ y=2\left(-\frac{6}{5}\right)+3 \quad y=\frac{-12}{5}+3 \quad \frac{-12+15}{5}=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$H=\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

punto medio $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$$\frac{A+A'}{2}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$A=(x_A, y_A, z_A) \quad x_A=0,\ y_A=0,\ z_A=1 \qquad A'=(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$$

PUNTO MEDIO $M=\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \qquad 2x_M=x_A+x_{A'}$$

$$x_{A'}=2x_M-x_A \qquad x_{A'}=2\left(-\frac{6}{5}\right)-0$$

$$x_{A'}=-\frac{12}{5}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \longrightarrow y_{A'}=2y_M-y_A \qquad y_{A'}=\frac{6}{5}$$

$$z_M=\frac{z_A+z_{A'}}{2} \longrightarrow z_{A'}=2z_M-z_A \qquad z_{A'}=-\frac{8}{5}-1=\frac{-8-5}{5}=-\frac{13}{5}$$

$$A' \text{ simmetrico}=\left(-\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{13}{5}\right)$$

Inversa

A invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$\exists A^{-1}$, $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

$\downarrow$ Binet

$\boxed{\begin{matrix}|A| \\ \neq \\ 0\end{matrix}} \cdot |A^{-1}| = 1$
$\qquad\qquad \neq 0$

$\hookrightarrow$ c.v.d.

$\det A \neq 0 \longrightarrow A$ è invertibile

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^{T}$ dove $A \cdot A^{-1} = I$

$\frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^{T} \cdot A = I$

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{A_{11} \cdot a_{11} + A_{21} \cdot a_{21}}_{\text{per Laplace}}^{\det A} & \overbrace{A_{11} \cdot a_{12} + A_{21} \cdot a_{22}}^{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A è invertibile c.v.d

Rouchè-Capelli n.1

Sist. DET. $\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A,B)$

$\Longrightarrow$

NOTAZIONE

$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

In generale $\left\{ \begin{array}{l} \dim W \leq \dim V \\ W \subseteq V \end{array} \right. \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(A,B)$

PER IPOTESI Sist. DET. quindi $\exists$ n-upla $S = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$$\underbrace{\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}}_{C_1 \quad C_2 \quad C_n \quad B}$$

Scrivo in forma SEMICOMPATTA

$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n = B$ allora B è C.L. delle $C_1 \dots C_n$.

Quindi V era $V = (\underbrace{C_1 \dots C_n}_{W}, \underbrace{\cancel{B}}_{C.L.})$ $\qquad V = W \Rightarrow \rho(A,B) = \rho(A)$ c.v.d.

$\Longleftarrow \rho(A) = \rho(A,B) \Longrightarrow$ Sist. DET.

NOTAZ. $V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

Per ipotesi $\rho(A) = \rho(A,B)$ quindi $\dim V = \dim W$ ma c'è B di diverso
B deve essere C.L. delle colonne.

$B = C_1\alpha + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n$ con $S: (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ Per definizione che è soluzione

c.v.d.

Teorema che usa Steiniz

Tutte le basi hanno lo stesso num. di vettori

Prendo 2 Basi, B_1 e B_2

$$B_1 \begin{cases} \text{Generatori} \\ L.I. \end{cases} \qquad B_2 \begin{cases} \text{Generatori} \\ L.I. \end{cases}$$

dove $B_1 = \{v_1 \dots v_n\}$, $B_2 = \{v_1 \dots v_p\}$

1) Per Steiniz $n \geq p$
2) " " $p \geq n$

solo $n = p$ c.v.d.

$\underset{B_1}{n} = \underset{B_2}{p}$

Cramer

SIST. DET $\iff \det A \neq 0$ e $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$

$\Longrightarrow$ Per R.C. n_2 ho 1 soluz., cioè $\infty^{n-\rho} = \infty^0$

$n - \rho = 0 \to n = \rho$ (RANGO MAX, $\det A \neq 0$) c.v.d.

$\Longleftarrow$ $\det A \neq 0 \to$ sist. determinato (SOL. UNICA)

Unicità soluz. Ne prendo 2, S_1 e S_2

sist. lineare $= A \cdot X = B \to \begin{cases} A \cdot S_1 = B \\ A \cdot S_2 = B \end{cases}$ (con X: S_1, S_2)

$A \cdot S_1 = A \cdot S_2$ per ipotesi $\det A \neq 0$, quindi $\exists A^{-1}$

$\cancel{A^{-1} A} \cdot S_1 = \cancel{A^{-1} \cdot A} \cdot S_2$ $\quad S_1 = S_2$ c.v.d.

Da $A \cdot X = B \to \cancel{A^{-1} \cdot A} \cdot \boxed{X = A^{-1} B}$

dove $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^T \cdot B$ $\quad \det A \neq 0$

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} b_2} \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix} = \det B_i \quad \text{dove } B_i = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|B_1|}{|A|} \\ \frac{|B_2|}{|A|} \end{pmatrix} \quad x_i = \frac{|B_i|}{|A|} \quad \text{c.v.d.}$$

Teorema sul nucleo e iniettività

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\ker f \{\underline{0}\}$

$\Longrightarrow$ Considero $\underline{v} \in \ker f$ e DIMOSTRO che $v = \underline{0}$

$\exists v \in \ker f \mid \begin{cases} \cdot f(v) = 0 \\ \text{ma } \cdot f(\underline{0}) = 0 \end{cases}$ solo se $\underline{v} = 0$ c.v.d.

$\ker f \{\underline{0}\} \longrightarrow f$ iniettiva

$\exists v \in \ker f : f(v) = \underline{0}$

Prendo 2 Imf uguali. $f(v_1) = \underline{0}$ $\quad f(v_2) = \underline{0}$

$$f(v_1) = f(v_2) \longrightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \xrightarrow[\text{linearità}]{} f(v_1 - v_2) = 0$$

Per ipotesi $\ker f \{\underline{0}\}$ quindi $v_1 - v_2 = \underline{0}$ cioè $v_1 = v_2$, iniettiva c.v.d.

TEO: Se $f : V \to V$ e λ è autovalore allora $V_\lambda = Ker f_\lambda$ (DIM)

$V_\lambda = Ker f_\lambda$ dove $f_\lambda = f(v) - \lambda v$

$V_\lambda \subseteq Ker f$

$\forall v \in V_\lambda \; f(v) = \lambda v \rightarrow \underbrace{f(v) - \lambda v}_{f_\lambda} = 0 \rightarrow f_\lambda(v) = 0$

$\rightarrow v \in Ker f_\lambda$ c.v.d

$Ker f_\lambda \subseteq V_\lambda$

$\forall v \in Ker f_\lambda \rightarrow f_\lambda(v) = 0 \quad f(v) - \lambda v = 0$

$\Downarrow$

$f(v) = \lambda v$ cioè $v \in V_\lambda$ c.v.d.

Immagine (DIM che è sottospazio

$\forall w \in Im f \quad w_1 + w_2 \in Im f$.

$w_1, w_2 \in Im f \rightarrow \exists v_{1,2} \in V \mid f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$

$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \in Im f$?

linearità $f(v_1 + v_2) \in Im f$

// proviene dalla somma ✓

$\forall w \in Im f, \forall a \in K, \; a \cdot w \in Im f$!

$w \in Im f = \exists v \in V \mid f(v) = w$

$a \cdot w = a \cdot f(v) \xrightarrow{LIN.} f(a \cdot v) \in Im f$ proviene da V

Nucleo (DIM che è sottospazio

$\forall v \in \ker f \quad v_1 + v_2 \in \ker f.$

$v_1, v_2 \in \ker f = f(v_1) = 0$ e $f(v_2) = 0$

sommo membro a membro

$f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 \rightarrow f(v_1 + v_2) = 0$ la somma finisce in 0.

c.v.d.

$\forall v \in \ker f, \forall a \in K \quad a \cdot v \in \ker f$

$v \in \ker f \rightarrow f(v) = \underline{0}$

$a \cdot v = a \cdot f(v) = a \cdot 0 \xrightarrow{\text{LIN.}} f(av) = 0$ il PROD. finisce in $\underline{0}$.

c.v.d.

FORMULARIO

È assegnato l'endomorfismo tale che:

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(1,0,1) = (-2, h, 0) \\ f(0,1,1) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(e_1)+f(e_3) = (-2, h, 0) \\ f(e_2)+f(e_3) = (0, h-1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = \dots \\ f(e_2) = \dots \\ f(e_3) = \dots \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

I MODO

Dato l'endomorfismo $f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$

coeff.

$$f(e_1) = (0^x, h+1^x, 0^x)$$
$$f(e_2) = (h^y, h^y, -1^y)$$
$$f(e_3) = (0^z, -1^z, -h^z)$$

II MODO

colonne 3, righe 4

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

SEMPLICITÀ

SOLUZIONI POLINOMIO CARATTERISTICO

$\det M(f_{-T}) = 0 \Rightarrow$ DET. $\begin{vmatrix} \dots -T & \dots & \dots \\ \dots & \dots -T & \dots \\ \dots & \dots & \dots -T \end{vmatrix} = 0$

matrice

AUTOVALORI

$T = \dots \; m_T = \dots$
$T = \dots \; m_T = \dots$
$T = \dots \; m_T = \dots$

Se $m_\lambda = 1$ allora $g_\lambda = 1$ $(0 < g_\lambda \leq m_\lambda)$

Se $m_\lambda > 1$ allora calcolo $g_\lambda = \dim V_\lambda = \dim(\ker f_\lambda)$

Se $m_\lambda = g_\lambda$, f è semplice e diagonalizzabile.

Se un AUTOVALORE "T" ha il parametro "h" si devono fare le condizioni e vedere quando gli autovalori sono diversi fra loro

$\boxed{1° \neq 2°, \; 2° \neq 3°, \; 3° \neq 1°}$

MATR. DIAGONALE, ha solo gli autovalori sulla diagonale.

MATR. DIAGONALIZZANTE, ha gli autovettori (in ordine) in colonna

STUDIO Imf + Kerf

Iniettiva = $\boxed{\dim \ker f = 0}$ / Suriettiva = $\boxed{\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Im} f}$

$\dim \operatorname{Im} f = \rho(A)$

ISOMORFISMO → Suriettiva + iniettiva

Eq. cart. Imf, dove $\operatorname{Im} f = \{(C_1 \dots C_n)\}$ $\begin{array}{c} C_1 \to \\ \vdots \\ C_n \to \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

(dettate dal determinante)

Eq. cart. Kerf. → $A \cdot \bar{X} = 0$ → SISTEMA

→ se $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 1}$, allora $\boxed{\operatorname{Im} f = \{(C_2)\}}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Da qui possiamo pure ricavare la legge

$$f(x,y,z,t) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x + (h-1)z, (h-1)y, 2z, hy + ht)$$

II° METODO PER TROVARE LA CONTROIMMAGINE USANDO LA RIDUZIONE DELLA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\text{MATR. COMPLETA} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{h-1}^{\neq 0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h & 1 \end{array}\right)$$

M(g) — VETTORE DI CUI VOGLIO LA CONTROIMMAGINE

***** condizione $h \neq 1$

$R_4 \to R_4 - \frac{h}{h-1} R$

$0 \to R_4$

$$\begin{cases} x = 1 \\ hy + hz = 1 \\ (\cancel{h-1})_{\neq 0}\, y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ hz = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = 1/h \qquad g^{-1}(1,1,0,0) = \{(1, 0, 1/h)\}$$

*****

LEVO LE CONDIZ. NELLA MATRICE $h = 1$

$\{$ etc...

Una MATRICE ridotta per riga non può fornire una BASE

$\boxed{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^3$

$$M(f)\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im} f$, $\ker f$. $h \in \mathbb{R}$

$\rho = ?$

$$(h)(h-1) - h - [-h] = (h)(h-1) \cancel{-h} \cancel{+h} \neq 0$$

$\boxed{h \neq 0}$ e $h-1 \neq 0 \to \boxed{h \neq 1}$

$\rho = 3 \to \boxed{\dim \mathrm{Im} f = 3} \to \dim \ker f = \overset{3}{n} - \overset{3}{\rho} = 0$

f è iniettiva + suriettiva $\to$ ISOMORFISMO.

EQ. CART. IMMAGINE.

~~inc. libere sono 3~~

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \forall x,y,z \}}$$

NON C'È EQUAZIONE CARTESIANA.

Eq. cartesiana $\ker f$. è quella BANALE

$$\boxed{\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0 \}}$$

$h \neq 0, -1$

$\boxed{h = 0}$ $M(f)\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\rho < 3}$

$\boxed{\det = -1}$ $\rho = 2$ $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \ker f = 1$

f non è iniettiva e non è suriettiva

Eq. cart. Imf. dove $\mathrm{Im}f = \{C_2, C_3\}$

$$\begin{array}{r} C_2 \to \\ C_3 \to \\ xyz \to \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \to -x-y-[z-x]$$

$$\cancel{-x}-y-z\cancel{+x}$$

$$-y-z=0$$

$$-y=z \qquad y=-z \ \forall x,z$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Im}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=-z\} \ \forall x,z. \\ \text{Base } \mathrm{Im}f = \{(1,0,0),(0,-1,1)\} \end{array}}$$

Eq. cart. Kerf.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \qquad \forall x$$

$h=0$

$$\boxed{\mathrm{Ker}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\} \ \forall x}$$

Base $\mathrm{Ker}f = \{(1,0,0)\}$

$\boxed{h=-1}$

$$M(f) \begin{vmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det = 2+1-[1] = 3-1=2$$

$\rho=3$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im}f = 3 \\ \dim \mathrm{Ker}f = 0 \end{array}\right\} \text{ISOMORFISMO}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}}$$

$$\boxed{\text{Base } \operatorname{Im} f = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}}$$

$$h = -1$$

$$\boxed{\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}}$$

SEMPLICITA' con $h=0$

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{vmatrix}$$

$$(-T)(1-T)(-1-T) - [T]$$

$$\to (-T)(1-T)(-1-T) - T = 0 \to -T(T^2-1) - T$$

$$T^3 = 0 \qquad m_0 = 3 \qquad \boxed{0 < g_\lambda \leq m_\lambda}$$

g_0 DA CALCOLARE

$$V_0 = \boxed{\dim \ker f_0} = \ker \begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-0 & 1 \\ 0 & -1 & -1-0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \end{cases} \qquad \forall x \qquad \dim \ker f_0 = 1$$

$$\boxed{\dim \ker f_0 = g_0}$$

$$\boxed{m_0 = 3 \qquad g_0 = 1} \qquad \boxed{m_0 \neq g_0}$$

$\boxed{f \text{ NON E' SEMPLICE}}$

La MATRICE ASSOCIATA $M(f)$ non e' DIAGONALIZZABILE

ESAME 22/02/21 ALGEBRA

I

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

INIZIO

RIDUCO O NO?

RIDUCO

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{se } h \neq -1}$

$R_3 = R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho = 2$

$\boxed{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \ker f = n - \rho = 3 - 2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \{(C_1, C_2)\}$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 1 & h+1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \det = 0$$

$(h+1)^2 z = 0$

$\cancel{(h+1)} z = 0$ $\quad z = 0 \quad \forall x, y$

$\boxed{\text{Eq. cart.}}$

$$\boxed{\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{z=0}\} \quad \forall x, y}$$

$\ker f = AX = 0$, $h \neq -1$

$$M_{RIDOTTA} \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \ker f = 1$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ (h+1)y + (h+1)z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{(h+1)}x = \dfrac{-y-hz}{h+1} \\ \cancel{(h+1)}y = \dfrac{(-h-1)z}{h+1} \end{cases} \quad \forall z$$

$$\boxed{\ker f = \left\{ \left(\frac{-y-hz}{h+1}, \frac{-h-1\,z}{h+1}, z \right) \right. \quad \forall z}$$

Eq. cart. ker f.

Tolgo la condizione, quindi $h = -1$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$\rho < 2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$

$\rho = 1$, scelgo a_{12}, cioè $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = 1$

$\hookrightarrow \dim \ker f = n - \rho = 2$

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{ (C_2) \} = \operatorname{Im} f = \{ (1, 0, 1) \}}$$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y-z=0\\ 0=0\\ \cancel{y-z=0}\end{cases} \qquad \{y=z \quad \forall x,z$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\ker f=\{(x,z,z)\}\\ \text{Base } \ker f=\{(1,0,0),(0,1,1)\}\end{array}}$$

Per $h=-1$, $M(f)$ è DIAGONALIZZABILE? Avevo

PUNTO 2

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \text{Polinomio caratter.}$$

$$\begin{pmatrix}0-T & 1 & -1\\ 0 & -T & 0\\ 0 & 1 & -1-T\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-T & 1 & -T\\ 0 & -T & 0\\ 0 & 1 & -1-T\end{pmatrix} = (-T)^2(-1-T)=0$$

$(-T)^2=0 \to T=0 \qquad m_0=2 \to g_0$ da calc.

$-1-T=0 \to T=-1 \qquad m_{-1}=1 \quad g_{-1}=1$ ok ✓

$$V_0=\operatorname{Ker} f_0=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\ 0\\ 0\end{matrix}$$

$$\begin{cases} y-z=0\\ 0=0\\ \cancel{y-z=0}\end{cases} \qquad \{y=z \quad \forall x,z$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\ker f=\{(x,z,z)\}\\ \text{Base } \ker f=\{(1,0,0),(0,1,1)\}\end{array}}$$

$$\boxed{\dim\ker f_0=2 \qquad m_0=2 \qquad g_0=2}$$

f è SEMPLICE. La matrice è diagonalizzabile.

MAT-DIAG.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}T & 0 & 0\\ 0 & T & 0\\ 0 & 0 & T\end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZANTE

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

AUTOSPAZIO $V_{-1} = \ker f_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 & -1 \\ 0 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 1 & -1-(-1) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \ker$$

0

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ \cancel{y=0} \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ - - - \end{cases} \quad \underline{x} = z \quad \forall z$$

1

$\ker = \{(z, 0, z)\}$ AUTOVETTORE

$$\overset{u_1}{(1,0,0)}, \overset{u_2}{(0,1,1)} \qquad u_3 = (1,0,1)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ MATRICE DIAGONALIZZANTE}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Prova d'esame

E' dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (0, y+hz, hx+hy+z)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per f.

$$M(f) = \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 0 \quad \rho < 3$$

$\rho(M(f)) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ h & h \end{vmatrix} = -h \to \boxed{h \neq 0}$ Condizione

$\to \dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

Equaz. cartesiana Imf. dove $\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow -xh = 0 \quad \text{per mantenere } \rho < 3$$

$x = 0 \quad \forall y, z$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x = 0\} \to \mathrm{Im} f = (0, y, z)$

Base $\mathrm{Im} f = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ con $h \neq 0$

STUDIO Kerf.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{0=0} \\ y + hz = 0 \\ hx + hy + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx + h(-hz) + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx - h^2 z + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hx + (-h^2+1)z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ \cancel{h}x = \underbrace{(h^2-1)z}_{h} \end{cases} \quad \forall z \quad h \neq 0$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{h^2-1}{h} z, \ y = -hz\}$$

$$\text{Base } \ker f = \{(\frac{h^2-1}{h}, -h, 1)\}$$

Tolgo la condizione, $h=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = 2 \quad \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$$\dim \ker f = 3 - 2 = 1$$

$$\operatorname{Im} f = \{C_2, C_3\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad x = 0 \quad \forall y, z.$$

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \quad h=0$$

$$\text{Base } \operatorname{Im} f = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$$

STUDIO $\ker f$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

$$\text{Base } \ker f = \{(1,0,0)\} \text{ con } h=0$$

Semplicità e base di autovettori

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{pmatrix} \to \text{Polin. Caratteristico.}$$

$$\begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-T) - [(h^2)(-T)] = 0$$

$$= (1-T)^2(-T) + h^2 T = 0$$

$$(-T)(1-T)^2 + h^2 T = 0$$

$$T(1-T)^2 - h^2 T = T[(1-T)^2 - h^2] = 0$$

"diff. di quadrati"

$$[((1-T)+h)((1-T)-h)]T = 0$$

$$((1-T)+h)((1-T)-h) = 0 \quad \vee \quad \boxed{T=0}$$

$$(1-T)+h = 0 \qquad 1-T+h=0 \to \boxed{T=1+h}$$

$$(1-T)-h = 0 \qquad 1-T-h=0 \to \boxed{T=1-h}$$

AUTOVALORI
1° $T=0$ $\quad m_0 = 1 \longrightarrow g_0 = 1$
2° $T=1+h$ $\quad m_{1+h} = 1 \longrightarrow g_{1+h} = 1$
3° $T=1-h$ $\quad m_{1-h} = 1 \longrightarrow g_{1-h} = 1$

} f è semplice

ho il parametro "h". se i 3 autovalori sono distinti fra loro allora f è semplice. Quando sono distinti?

1° ≠ 2	2° ≠ 3°	3° ≠ 1°
$0 \neq 1+h$	$1+h \neq 1-h$	$1-h \neq 0$
$\boxed{h \neq -1}$	$2h \neq 0$	$\boxed{h \neq 1}$
	$\boxed{h \neq 0}$	

CONDIZIONI

Se $h \neq 1, -1, 0$ f è semplice, quindi diagonalizzabile
Cosa succede se tolgo le condizioni?

STUDIO PER $h=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1$$

$\rho = 2$

STUDIO SEMPLICITA'
Polin. caratt. l'avevo calcolato prima con h.

$$[((1-T)+\underbrace{h}_{=0})(1-T)-\underbrace{h}_{=0}]\,T = 0$$

$1-T=0 \to T=1$
$1-T=0 \to T=1$ $\Big\}$ $m_1 = 2 \to g_1$ DA CALCOLARE
$T=0 \to T=0 \to m_0 = 1 \to g_0 = 1$ ok ✓

$$V_1 = \dim \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ \forall y \\ \forall z \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = (0, y, z)$ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$
2 inc. libere

$m_1 = \dim \operatorname{Ker} f_1 = 2$

$$\boxed{f \text{ è semplice}, A \text{ è diagonalizzabile}}$$

STUDIO $h=1$

$$\left[\left((1-T)+\underset{1}{h}\right)\left((1-T)-\underset{1}{h}\right)\right]T=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2-T=0 \to T=2$, $m_2=1 \to g_2=1$ ok ✓

$$\left.\begin{matrix} -T=0 \\ T=0 \end{matrix}\right\} m_0=2 \to g_0 \text{ da calcolare}$$

$$V_0=\ker f_0=\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{0=0}$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \begin{cases} y=-z \\ x-\cancel{z}+\cancel{z}=0 \end{cases} \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \quad \forall z$$

$V_0=\{(0,-z,z)\}$ $\quad \dim V_0=1$

f non è semplice
A non è diagonalizzabile

STUDIO PER $h=-1$

$$\left[\left((1-T)+\underset{-1}{h}\right)\left((1-T)-\underset{-1}{h}\right)\right]T=0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -T=0 \\ T=0 \end{matrix}\right\} m_0=2 \quad g_0=\text{DA calcolare}$$

$2-T=0 \to T=2$, $m_2=1$, $g_2=1$ ok ✓

$$V_0 = \ker f_0 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y-z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ -x-\cancel{z}+\cancel{z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} \quad \forall z$$

$V_0 = \{(0,z,z)\}$ $\dim V_0 = 1 \neq m_0 = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ non è semplice} \\ A \text{ non è diagonalizzabile} \end{array}}$$

BASE DI AUTOVETTORI. RICAVO DALL'AUTOSPAZIO quando f è semplice

f è semplice quando $h \neq 0,1,-1$ e $h=0$

Per $h \neq 0,1,-1$ avevo gli autovalori

$((1-T)+h)((1-T)-h)=0 \quad \vee \quad \boxed{T=0}$ $\quad m_0=1$

$(1-T)+h=0 \quad 1-T+h=0 \to \boxed{T=1+h}$ $\quad m_{1+h}=1$

$(1-T)-h=0 \quad 1-T-h=0 \to \boxed{T=1-h}$ $\quad m_{1-h}=1$

Calcolo gli autospazi, che sono 3

I AUTOSPAZIO $\quad V_0 = \ker f_0$

$$\begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & h \\ h & h & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker \to$

$$\begin{cases} \cancel{0=0} \\ y-hz=0 \\ hx+hy-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ hx+h(hz)-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ hx+(h^2-1)z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = hz \\ \cancel{h}x = -\dfrac{(h^2-1)z}{h} \end{cases} \quad \forall z$$

$$V_0 = \left\{\left(-\frac{h^2-1}{h}z,\ hz,\ z\right)\right\}$$

$$u_1 = \left(-\frac{h^2-1}{h},\ h,\ 1\right) \quad \text{AUTOVETTORE 1}$$

Cerco il 2° AUTOSPAZIO

$$V_{1+h} = \ker f_{1+h}$$

$$\ker\begin{pmatrix} 0-(1+h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1+h) & h \\ h & h & 1-(1+h) \end{pmatrix}$$

Promemoria

$\boxed{T=0}$ ✓ $\quad m_0 = 1$

$\boxed{T=1+h}$ $\quad m_{1+h} = 1$

$\boxed{T=1-h}$ $\quad m_{1-h} = 1$

$$\begin{pmatrix} -1-h & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ h & h & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono con $\boxed{h \neq 1, -1, 0}$

$$\begin{cases} \cancel{(-1-h)}\,x = 0 \\ -hy + hz = 0 \\ hx + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{h}z = \cancel{h}y \quad = z = y \\ 0 + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ hz - hz = 0 \end{cases} \quad \forall y$$

$$V_{1+h} = \{(0, y, y)\} \quad \text{AUTOVETTORE n° 2}$$

$$u_2 = (0, 1, 1)$$

Cerco il 3° AUTOSPAZIO di $T = 1-h$

$$V_{1-h} = \ker f_{1-h} = \ker\begin{pmatrix} 0-(1-h) & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1-h) & h \\ h & h & 1-(1-h) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1+h & 0 & 0 \\ 0 & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{(-1+h)}x = 0 \\ hy + hz = 0 \\ hx + hy + hz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{hy} = \frac{-hz}{h} = y = -z \\ \cancel{hx} \quad \cancel{-hz + hz} = 0 \quad 0 = 0 \end{cases} \qquad \forall z$$

$$V_{1-h} = \{(0, -z, z)\}$$

$u_3 = (0, -1, 1)$ AUTOVETTORE 3

Base AUTOVETTORI $= \{u_1, u_2, u_3\}$

MATRICE DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} \top & - & - \\ - & \top & - \\ - & - & \top \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALIZZANTE P

$$P = \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} \frac{-h^2-1}{h} & 0 & 0 \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = \left(\frac{-h^2-1}{h}, h, 1\right)$ AUTOVETTORE 1

$u_2 = 0, 1, 1$ AUTOVETTORE 2

$u_3 = (0, -1, 1)$ AUTOVETTORE 3

E' dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

PUNTO 1

TROVIAMO LA MATRICE.

$f(e_1) = (0, h+1, 0)$
$f(e_2) = (h, h, -1)$
$f(e_3) = (0, -1, -h)$

PARTENZA

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

$\dim \mathrm{Im} f = \rho\, M(f)$

$\det_{3\times3} = -[(h)(h+1)(-h)] = (-h)(h+1)(h) \neq 0$

$-h \neq 0 \qquad h \neq 0 \qquad h+1 \neq 0$

$\boxed{h \neq 0} \qquad \boxed{h \neq -1}$

COND

$\rho(M(f)) = 3$

Per $h \neq 0, -1$ $\rho M(f) = 3$, quindi $\dim \mathrm{Im} f = 3$.

$\dim \mathrm{Ker} f = \underset{\mathbb{R}^3}{n} - \underset{3}{\rho} = 0$

3 incognite libere.

Eq. cartesiana di Imf non c'è perche' vale $\forall x, y, z$.

Eq. cartesiane Kerf è quella banale: $x = y = z = 0$

f è un isomorfismo $<$ suriettiva $\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f \stackrel{m}{=} \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathrm{Im} f \cong \mathbb{R}^3$; iniettiva $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0$

Togo le condizioni

$\boxed{h=0}$

PARTENZA

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$\rho \overset{?}{=} 2$ vedo le 2×2 e vedo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Downarrow$

$\rho = 2$, $\dim \operatorname{Im} f = 2 \rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$

Eq. cartesiane $\operatorname{Im} f$ dove $\operatorname{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{array}{l} C_1 \rightarrow \\ C_2 \rightarrow \\ x,y,z \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$-x = 0$

$\hookrightarrow x = 0$ $\forall z$ $\forall y$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \rightarrow \operatorname{Im} f = \{(0,y,z)\} \\ \text{Base } \operatorname{Im} f = \{(0,1,0), (0,0,1)\} \ \boxed{\text{PER } h=0} \end{array}}$$ R.

Eq. cartesiane $\operatorname{Ker} f$ $(\dim \operatorname{Ker} f = 1)$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \shortparallel$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1$ inc. libera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Sistema

$$\begin{cases} \cancel{0=0} \\ x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \forall z.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, y = 0\} \\ \text{Base } \operatorname{Ker} f = \{(1,0,1)\} \ \boxed{\text{PER } h=0} \end{array}}$$ R.

Tolgo la II condizione $\boxed{h=-1}$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3 \text{ (colonna nulla)}$$

$\rho \overset{?}{=} 2$, vedo le 2x2 e vedo $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\rho = 2$ per $h=-1$

$\dim \operatorname{Im} f = 2 \to \dim \operatorname{Ker} f = 3-2 = 1$

Eq. cart. $\operatorname{Im} f$, dove $\operatorname{Im} f = \{(C_2, C_3)\}$

$$\begin{array}{r} C_1 \to \\ C_2 \to \\ x,y,z \to \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \det = 0 \text{ affinché } \rho \text{ sia } 2$$

$\det \to z - x - (-y + x) = 0$

$= z - x + y - x = 0 \to -2x + z + y = 0 \to z = 2x - y$

B.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per } h=-1,\ \operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x-y\}\ \forall x,y \\ \text{Base } \operatorname{Im} f = \{(1,0,2),(0,1,0)\} \end{array}}$$

Eq. cartesiane $\operatorname{Ker} f$. con $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \overline{X} = \underline{0}$$

Sistema

$$\begin{cases} -y=0 \\ -y-z=0 \\ \cancel{-y-z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ -(0)-z=0 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ \forall x \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per } h=-1,\ \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0, z=0\}\ \forall x \\ \text{Base } \operatorname{Ker} f = \{(1,0,0)\} \end{array}}$$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

PUNTO 2

PARTENZA

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq 0}$ CONDIZIONE

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + \cancel{h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dots \\ (h+1)x + 1 - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x = hz - 1 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{hz-1}{h+1} \\ hz = -\frac{1}{h} - 3 \to \frac{-1-3h}{h} \end{cases}$$

$$\to z = \frac{-1-3h^2}{h^2}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{hz-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h^2}{h^2} \right) \text{ con } h \neq 0$$

Con $h=0$ h_0 $\begin{cases} hy = 1 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 1 \\ \end{cases}$ Sist. impossib. $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

DA CANCELLARE → PROVO CRAMER

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq 0}$

RIDUCO

$R_2 = R_2 - \frac{h}{h} R_1$

$R_3 = R_3 + \frac{1}{h} R_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq -1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

MATRICE RIDOTTA

Riprovo sistema

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x - z = 0 \\ -hz = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x - z \Rightarrow \quad x = \frac{z}{h+1} \\ z = -\frac{3}{h} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{z}{h+1}, \frac{1}{h}, -\frac{3}{h} \right)$$

$$\frac{z}{h+1} \to \frac{-\frac{3}{h}}{h+1} \qquad -\frac{3}{h} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3}{h^2+h}$$

DA CONTROLLARE

PARTENZA

$$M(g)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$$-[(-h)(h)(h+1)]$$

$$-[(-h^2)(h+1)]$$

$$\boxed{\begin{matrix} h \neq 0 \\ h \neq -1 \end{matrix}}$$

$$-[-h^3-h^2]$$

$$\boxed{h^3+h^2} \quad \det A \neq 0$$

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} \qquad y = \frac{|B_2|}{|A|} \qquad z = \frac{|B_3|}{|A|}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 3 & -1 & -h \end{vmatrix} = -h^2 - 3h - [1] = \boxed{\frac{-h^2-3h-1}{h^3+h^2} = x}$$

PARTENZA

$$M(g)\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \neq 0$$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + \cancel{h}\left(\frac{1}{\cancel{h}}\right) - z = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$h+1 \neq 0 \quad \boxed{h \neq -1}$$

$$\begin{cases} \dots \\ (h+1)x + 1 - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \begin{cases} y = 1/h \\ \cancel{(h+1)}x = \frac{z-1}{h+1} \\ hz = -\frac{1}{h} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ \\ hz = \dfrac{-1-3h}{h} \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ z = \dfrac{-1-3h}{h^2} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h}{h^2} \right) \text{ con } \boxed{h \neq -1, 0}$$

$$\frac{\frac{-1-3h}{h^2} - 1}{h+1} = \frac{\frac{-1-3h-h^2}{h^2}}{h+1}$$

$$\frac{-1-3h-h^2}{h+1} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3h^2-3h-1}{h^2+2h+2}$$

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

dim Imf. } el. generico + BAS.

dim Kerf. }

eq. cartesiane Imf, Kerf.

CERCO $M(f)$ SIAMO IN $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(e_1) = (0, h+1, 0)$
$f(e_2) = (h, h, -1)$
$f(e_3) = (0, -1, -h)$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \quad \rho = 3$$

MATRICE MAIN!

$|M(f)| = (-h)(h)(h+1) \neq 0$

dim Imf $= 3 \to$ dim Kerf $= n - \rho \to 3 - 3 = 0$, la f e' suriettiva e iniettiva

dim Kerf $= 0$; dim Imf $=$ dim $\mathbb{R}^3$

$-h = 0$ / $h \neq 0$ / $h+1 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{h \neq 0}$ e $\boxed{h \neq -1}$

CONDIZIONI

Cerco eq. Cartesiane Imf

↳ DATO CHE dim Imf = dim $\mathbb{R}^3$, non ci sono equazioni cart.

(dim Imf = 3 inc. libere)

Quindi eq. cart. Imf $= \forall x, y, z$.

Eq. cart. Kerf $\to x = y = z = 0$ perche' dim Kerf $= 0$, l'equaz. cart. e' banale

Tolgo condizione $\to h = 0$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \to M(f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rho(M(f)) < 3$$

$\neq 0$

$\det(M(f)) = -1$ con $h = 0 \Longrightarrow \rho(M(f)) = 2$, dim Imf $= 2 = \rho$

dim Kerf $= 3 - 2 = 1$ ($3 = \dim \mathbb{R}^3$)

$\boxed{\text{se } h = 0}$

$$z - x - (-y + x) = 0$$

$$z - \cancel{x} + y - \cancel{x} = 0$$

$$-2x + y + z = 0 \rightarrow y = 2x - z$$

Eq. cart. Im f $\quad y = 2x - z \quad \forall x, z.$ $\boxed{\text{se } h = -1}$

Eq. cart. Ker f.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

Eq. cart. Ker f. $\quad y = 0, \; z = 0 \quad \forall x$ $\boxed{\text{con } h = -1}$

Calcolo controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Con } h \neq 0}$ CONDIZIONE

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + h\left(\frac{1}{h}\right) - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{h}$$

$$(h+1)x + 1 - z = 0 \rightarrow \cancel{(h+1)}x = \frac{z-1}{h+1}$$

$$hz = -\frac{1}{h} - 3 \rightarrow \cancel{h}z = \frac{-1 - 3h}{h^2}$$

Con $h \neq 0$, $\quad f^{-1}(1, 0, 3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h}{h^2}\right)$

Tolgo la condizione, $h = 0$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{0y = 1} \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad \text{SIST. IMPOSS.}$$

Per $h = 0$, $f^{-1}(1, 0, 3) = \emptyset$

$u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori
$u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$
e l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} f(u_1) & = (1,0,0,0) \\ f(u_2) & = (h,0,2,0) \\ f(u_3) & = (0,h-1,0,h) \\ f(u_4) & = (0,0,0,h) \end{cases}$$

con h parametro reale.

- Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$.

TROVO LA MATRICE CON $f(e_1)$ ...

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,0,0,0) \\ f(e_1) + f(e_3) = (h,0,2,0) \\ f(e_2) = (0,h-1,0,h) \\ f(e_4) = (0,0,0,h) \end{cases}$$

$\to f(e_3) = (h,0,2,0) - (1,0,0,0) =$
$= (h-1, 0, 2, 0)$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad \dots$

$$M(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

MATRICE PRINCIPALE DI f

CALCOLO Dim Imf. $\quad \dim Im f = \rho(A)$

VEDO SE $DET_{4\times4} \neq 0$

↳ LAPLACE n°1

$\det M(f) = a_{11} \cdot A_{11}$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 0 & h \end{vmatrix} \to 2(h-1)(h) \neq 0$$

$2h(h-1) \neq 0$

$2h \neq 0 \qquad h-1 \neq 0$

$h \neq 0 \qquad h \neq 1$

CONDIZIONI

$\det M(f) = 1 \cdot 2h(h-1) = 2h(h-1) \neq 0$

$\rho(M(f)) = 4$

$\dim Im f = 4 \longrightarrow \dim Ker f = \overset{4}{n} - \overset{4}{\rho} = 0 \to Ker\{0\}$

NON CI SONO EQ. CARTESIANE PER Imf → non ci sono inc. dipendenti

EQ. CARTESIANA Imf = $\forall x,y,z,t$ se $h \neq 1,0$

EQ. CARTESIANA Ker$f$ è banale = $x=0, y=0, z=0, t=0$ se $h \neq 0,1$

TOLGO CONDIZIONE $h \neq 0, \to \boxed{h=0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cancel{h}-1 & 0 \\ 0 & \cancel{h}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cancel{h} & 0 & \cancel{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Im f = \rho \qquad \rho = 4?$ vediamo la 4x4, colonna nulla

Vedo le 3X3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \neq 0 \quad \dim \operatorname{Im} f = 3$$

$$\dim \ker f = \underset{4}{n} - \underset{3}{\rho} = 1$$

EQ. CARTESIANA IMMAGINE f

$$\begin{array}{c} c_1 \rightarrow \\ c_2 \rightarrow \\ \\ c_3 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$\det = 0$ per $\rho = 3$

$$\det = a_{44} \cdot A_{44} \rightarrow -2t = 0 \rightarrow \boxed{t=0}$$

$$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Eq. CART. $\operatorname{Im} f \rightarrow \boxed{t=0}$ con $h=0$

CALCOLO eq. cart. $\ker f$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \rightarrow z = 0 \\ 0 \cancel{=} 0 \quad \forall t \end{cases}$$

$$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x=0, y=0, z=0\} \ \forall t \text{ con } h=0$$

TOLGO LA CONDIZIONE $h \neq 1 \rightarrow h = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho < 4 \text{ (riga nulla)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rho = 3 = \dim \operatorname{Im} f$$

$$\dim \ker f = \underset{4}{n} - \underset{3}{\rho} = 1$$

EQ. CART. Im f

$$\begin{array}{l} c_1 \Rightarrow \\ c_2 \Rightarrow \\ c_3 \Rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$$ per mantenere $\rho = 3$

$$\det = a_{24} \cdot A_{24} \rightarrow A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ x & y & t \end{vmatrix} = -(2y) = -2y$$

$$\det = 1 \cdot (-2y) = 0$$

$$-2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0}$$

EQ. CART. Im f $\rightarrow y = 0$ con $h = 1$

Calcolo eq. cart. Ker f.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ - \\ z = 0 \\ y = -t \end{array} \quad \forall t$$

EQ. CART. Ker f $\Rightarrow x = 0, y = -t, z = 0 \ \forall t$, con $h = 1$

BASE Ker f $= (0, -1, 0, 1)$

- Detta $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

$$i(x, y, z) = (x, y, 0, z)$$

studiare l'applicazione lineare

$$g = f \circ i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

e determinare $g^{-1}(1, 0, 0, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

← 2° PARTE

$i(x, y, z) = x, y, 0, z$

BASE CANONICA

$i = (1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$

$i = (0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$

$i = (0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$

$$\underset{M(i)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}} \times \underset{M(f)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$M(g)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix}$$

$g = f \circ i$

$\text{Im} f$, $\ker f$, iniettiva / suriett

$\text{Im} f \downarrow$ BASE, $\ker f \downarrow$ BASE

$h \neq 1 \qquad R_4 = R_4 - \frac{h}{h-1} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \qquad \rho = 3$$

$\dim \text{Im} f = 3$

$\dim \ker f = \underset{4}{n} - \rho =$

$g^{-1}(1,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cancel{(h-1)}y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ hy + hz = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \\ 0 + hz = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{h} \end{cases} \qquad g^{-1}\left(1, 0, \frac{1}{h}\right)$$

$h \neq 0$

$h = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \\ (0-1)y = 0 \\ \\ 0y + 0z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{x} = 1 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \\ \boxed{0 = 1} \end{cases} \quad \text{sist. IMPOSSIBILE}$$

R. Per $h \neq 0$, $g^{-1}(1,0,0,1) = \left(1, 0, \frac{1}{h}\right)$

Per $h = 0$, $g^{-1}(1,0,0,1) = \emptyset$

1. È assegnato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} 1° \quad f(1,1,1) = (-1, 2h-1, -1) \\ 2° \quad f(1,0,1) = (-2, h, 0) \\ 3° \quad f(0,1,1) = (0, h-1, -1) \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

Studiare la SEMPLICITÀ di f nei casi $h=0$ e $h=1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori

$$\begin{cases} 1° \quad f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (-1, 2h-1, -1) \\ 2° \quad f(e_1) + f(e_3) = (-2, h, 0) \\ 3° \quad f(e_2) + f(e_3) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$$(-2, h, 0) + f(e_2) = (-1, 2h-1, -1)$$

$$1° \quad f(e_2) = (-1, 2h-1, -1) + (2, -h, 0) = (1, h-1, -1)$$

$$3° \quad f(e_3) = (0, h-1, -1) - (1, h-1, -1) = (-1, 0, 0)$$

$$2° \quad f(e_1) = (-2, h, 0) - (-1, 0, 0) = (-1, h, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

STUDIO LA SEMPLICITÀ $m_\lambda = g_\lambda$ in caso di $h=0$ e $h=1$

I CASO: $h=0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix}$$

con $h=0$

Calcolo il Polinomio caratteristico

$\det(P - TI) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix} \qquad \det = (-1-T)^2(-T) = 0$$

$(-1-T)^2 = 0 \rightarrow T = -1 \quad m_1 = 2 \Rightarrow$ DA CALCOLARE $g_1 = ?$

$-T = 0 \rightarrow T = 0 \quad m_0 = 1 \rightarrow g_0 = 1$ ✓ FATTO

$$\boxed{0 < g_1 \leq m_1}$$

Calcolo autospazio $V_{-1} = \ker f_{-1} = \begin{pmatrix} -1+1 & 1 & -1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = z \\ \underbrace{\forall x, z}_{\text{2 inc. libere}} \end{cases} \Rightarrow V_{-1} \{ (x, z, z) \}$$

$$\Downarrow$$

$$\dim V_{-1} = 2 = g_{-1} = m_{-1}$$

Risposta 1: Per $h=0$ f è semplice

Se è semplice, esiste una base, quindi AUTOVETTORI

$$V_{-1} = \begin{cases} u_1 (1,0,0) \\ u_2 (0,1,1) \end{cases}$$

$$V_0 = \ker f_0 = \begin{pmatrix} -1-0 & 1 & -1 \\ 0 & -1-0 & 0 \\ 0 & -1 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \\ \cancel{-y = 0} \end{cases} \begin{cases} -x + 0 - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} -x = z \Rightarrow x = -z \quad \forall z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_0 = \{ (-z, 0, z) \} \xrightarrow{\text{BASE}} u_3 (-1, 0, 1)$$

Autovettori per $h=0$ $\mathcal{U} \{ (1,0,0), (0,1,1) (-1,0,1) \}$

II CASO $\to h = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo il Pol. Car.

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & 0-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix}$$

$$\det = (-T)^2(-1-T) + 1 + T = 0$$

$$= -(1+T)(T)^2 + (1+T) = 0$$

$$= (1+T)[(-T)^2 + 1] = 0 \to \begin{cases} 1+T = 0 \Rightarrow T = -1 \quad m_{-1} = 2 \\ -T^2 + 1 = 0 \Rightarrow T = 1 \quad m_1 = 1 \end{cases}$$

DA CALC. V_{-1}

$$= T^2 = 1 \quad \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$g_1 = 1$ ok

$$V_{-1} = \ker f_{-1} \to \begin{pmatrix} -1-(-1) & 1 & -1 \\ 1 & 0+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ x = -y \\ \cancel{-z + z = 0} \end{cases} \quad \forall z \Rightarrow V_{-1} = \{-y, z, \underset{\text{libera}}{z}\}$$

$$\dim V_{-1} = g_{-1} = 1 \neq m_{-1}^{\nearrow 2}$$

f non è semplice

2

2. Dato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da
$$g(x,y,z) = (-1x + y,\ hx + hy + 1z,\ 2x + hz)$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare $g^{-1}(0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

"LA CONTROIMMAGINE DI (0,1,0)"

$$g(x,y,z) = (-x+y,\ hx+hy+z,\ 2x+hz) \qquad g^{-1}(0,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = (-1, h, 2) \\ f(e_2) = (1, h, 0) \\ f(e_3) = (0, 1, h) \end{array}\right\} \to M(g) \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \{ \underline{v} \in V \,/\, f(v) = (0,1,0) \}$$

$$M(g) \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ hx + hy + z = 1 \\ 2x + hz = 0 \end{cases}$$

SISTEMA 3x3

CRAMER

$\det A \neq 0$

$$\frac{\det B_1}{\det A} \Big/ \frac{\det B_2}{\det A} \Big/ \frac{|B_3|}{|A|}$$

$$\det M(g) = -h^2 + 2 - h^2 = -2h^2 + 2 = 2(-h^2+1) \neq 0$$

$$-h^2 + 1 \neq 0 \to -h^2 \neq -1 \quad h^2 \neq 1 \begin{cases} h \neq 1 \\ h \neq -1 \end{cases}$$

sist. determinato

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = -(h) \Rightarrow x = -\frac{h}{2(-h^2+1)}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix} = -h \Rightarrow y = \frac{-h}{2(-h^2+1)}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(-h^2+1)} = -\frac{1}{(-h^2+1)}$$

RISULTATO con condizione

$$\boxed{g^{-1} = \left\{ -\frac{h}{2(1-h^2)},\ \frac{-h}{2(1-h^2)},\ -\frac{1}{(1-h^2)} \right\} \quad \text{con } h \neq \pm 1}$$

Tolgo la condizione $h \neq \pm 1$

$\boxed{h = 1}$

$$M(g)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{h}\,1 & \cancel{h}\,1 & 1 \\ 2 & 6 & \cancel{h}\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big| \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det M(g) \neq 0$? (per CRAMER)

$|M(g)| = -1 + 2 - (1) = 0$ NO CRAMER.

SISTEMA $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\cancel{x} + \cancel{x} + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 1 \\ x + y - 2x \Rightarrow -x + y = 1 \rightarrow y = x + 1 \\ z = -2x \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

Tolgo la condizione $h \neq -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \cancel{h}\,-1 & \cancel{h}\,-1 & 1 \\ 2 & 6 & \cancel{h}\,-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$? $\rightarrow -1 + 2 - (1) = 0$ NO SOLUZIONI

Per $h \neq \pm 1$, $g^{-1} = \left\{ \underset{x}{-\frac{h}{2(1-h^2)}}, \underset{y}{\frac{-h}{2(1-h^2)}}, \underset{z}{-\frac{1}{(1-h^2)}} \right\}$

Per $h = 1, -1$, $g^{-1} = \emptyset$

TUTTO IL PROGRAMMA

($\exists$ se quadrata e $detA \neq 0$)

A è invertibile <-> detA != 0

DIM ->

$\exists A^{-1}$ $\quad |A \cdot A^{-1}| = |I|$

Binet $\rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, con $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| \neq 0$

$\hookrightarrow$ c.v.d

DIM <- $\quad detA \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A_{ij}^{T}$ $\qquad A \cdot A^{-1} = I$

$A \cdot \frac{1}{det} \cdot A_{ij}^{T} = I$ allora A è invertibile

$$\frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = I \ ?$$

$2\times2 \qquad 2\times2$

$$\frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} \overbrace{A_{11} \cdot a_{11} + A_{21} \cdot a_{21}}^{detA} & \overbrace{A_{11} \cdot a_{12} + A_{21} \cdot a_{22}}^{=0} \\ \underbrace{A_{12} \cdot a_{11} \cdot A_{22} \cdot a_{21}}_{=0} & \underbrace{A_{12} \cdot a_{12} + A_{22} a_{22}}_{=detA} \end{pmatrix}$$

Laplace n_1

La Place n_2

$$\frac{1}{detA} \begin{pmatrix} detA & 0 \\ 0 & detA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow I.$$

A è invertibile. c.v.d.

STEINIZ

Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori

Prendiamo due basi: $\quad B_1 = \{v_1 \dots v_n\} \quad B_2 : \{v_1 \dots v_p\}$

$B_1 = \begin{cases} \text{GENERATORI} \\ \text{L.I.} \end{cases}$ $\qquad B_2 = \begin{cases} \text{GENERATORI} \\ \text{L.I.} \end{cases}$

$\Big\{$ Per Steiniz allora n>=p

Per Steiniz allora p=>n $\Big\}$ $\quad n = p$, con n di B_1 e p di B_2 $\quad$ c.v.d.

Rouchè Capelli 1
Sistema determinato <-> r(A) = r(A,B)

DIM $\Longrightarrow$ NOTAZIONE.

$$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n).$$

generalmente

ma se $\begin{cases} \cdot \dim W \le \dim V \\ \cdot W \subseteq V \end{cases}$ allora $W \le V$

cioè $\rho(A) \le \rho(A,B)$.

Per ipotesi il sist. è determinato, quindi $\exists\, S = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_n \end{cases}$$

$C_1 \qquad C_n \qquad B$

$C_1\alpha_1 + \dots C_n\alpha_n = B$

B diventa c.l. delle colonne

$V = \{\underbrace{C_1 \dots C_n}_{W}, \cancel{B}\} \rightarrow V = W$

$r(A) = r(A,B)$ c.v.d.

DIM. $r(A) = r(A,B)$

$$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n).$$

L'unica diversità è la B. Per essere uguali, appunto, B deve essere C.L delle colonne

$B = C_1\alpha_1 + \dots + C_n\alpha_n$ con $S = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ che è soluzione per definizione

c.v.d.

Il sistema è determinato se e solo se il detA != 0 e la soluzione è data da:
x_i= |Bi|/|A|

$\rightarrow$ sist. det.

Per R. C. n_2 allora $n-\rho=0$

$n=\rho$ = rango max = $\det \neq 0$ c.v.d.

$\leftarrow$ $\det A \neq 0$ + soluzioni

Dimostriamo l'unicità della soluzione

Prese S_1 e S_2. Il sist è $A \cdot X = B$

quindi $A \cdot S_1 = B$, $A \cdot S_2 = B$ $\quad \cancel{A^{-1}} \cancel{A} \cdot S_1 = \cancel{A^{-1}} \cancel{A} \cdot S_2$ $\quad$ Per ipotesi $\det A \neq 0$, quindi $\exists A^{-1}$

$S_1 = S_2$ c.v.d.

dimostro che detA!=0 + la coda del teorema (soluzioni)

Se $\det A \neq 0$ allora $\cancel{A^{-1}} A \cdot X = A^{-1} B \rightarrow X = A^{-1} B$

$\exists A^{-1}$

dove $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^T \cdot B$

$$x = \frac{1}{\det B} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} /\det B \\ \backslash \det B \end{matrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{|B_i|}{|A|} \quad \text{c.v.d.}$$

Imf è sottospazio

2 vettori $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f \rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$.

$\exists v_1$ e v_2 $\mid f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.

$f(v_1) + f(v_2) \underset{\text{linearità}}{=} f(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} f$ $\quad$ L'immagine proviene dalla somma

Preso $w_1 \rightarrow a \cdot w_1 \in \operatorname{Im} f$ $\quad a \in K$.

$\exists v_1 \mid f(v_1) = w_1$, $a \cdot f(v_1) \underset{\text{linearità}}{=} f(a \cdot v)$ $\quad$ L'immagine proviene dal prodotto esterno

$\operatorname{Im} f$ è SOTTOSPAZIO.

Kerf è sottospazio

$v_1, v_2 \in Kerf \rightarrow v_1 + v_2 \in Kerf?$

$v_1 \in Kerf = f(v_1) = 0$ e $f(v_2) = 0$

$f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0$

$f(v_1 + v_2) = 0$ La somma finisce in 0, quindi fa parte di Kerf

$v \in Kerf, \ a \in K, \ a \cdot v \in Kerf?$

$v \in Kerf = f(v) = 0$

$a \cdot f(v) = 0 \quad f(a \cdot v) = 0$ Il prodotto esterno finisce in 0, quindi appartiene al Kerf

KERF E' SOTTOSPAZIO

Teorema sul nucleo e iniettività

f è iniettiva <-> Kerf{0}

$\exists v \in Kerf \mid \cdot f(v) = 0$
$\cdot f(0) = 0$ solo se $v = 0$

c.v.d.

$Kerf = \{0\}$

Prendo 2 Imf uguali $f(v_1) = f(v_2)$

$f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2) = 0 \quad \exists v_1 - v_2 \in Kerf.$

Ma per ipotesi $Kerf = \{0\}$, quindi $v_1 - v_2 = 0$

$v_1 = v_2$ c.v.d.

$\downarrow$

iniettiva

Se f: V->V e lambra autovalore allora Vlambda=Kerflambda

$$V_\lambda = \mathrm{Ker} f_\lambda$$

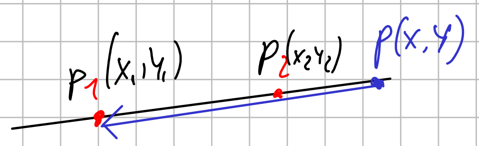
$$v \in V_\lambda \rightarrow f(v) = \lambda v \qquad \underbrace{f(v) - \lambda v}_{f_\lambda(v)} = 0 \qquad f_\lambda(v) = 0 \in \mathrm{Ker} f \quad \text{c.v.d.}$$

$$v \in \mathrm{Ker} f_\lambda \rightarrow f_\lambda(v) = 0 \rightarrow f(v) - \lambda v = 0 \qquad f(v) = \lambda v \in V_\lambda \quad \text{c.v.d.}$$

GEOMETRIA 3 TEORIE

Per due punti passa una e una sola retta, la sua equazione è: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

nel PIANO



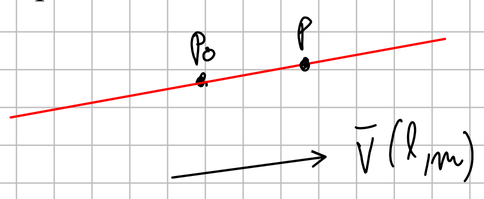
$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\overline{PP_1} = (x - x_1, y - y_1)$$

I due segmenti sono paralleli, quindi:

$$\overline{PP_1} = \lambda(\overline{P_1P_2})$$
$$(x - x_1, y - y_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \lambda = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{c.v.d.}$$

Dato un punto e un vettore, esiste una e una sola retta passante per il punto e parallela al vettore



$$\overline{PP_0} = (x - x_0, y - y_0)$$

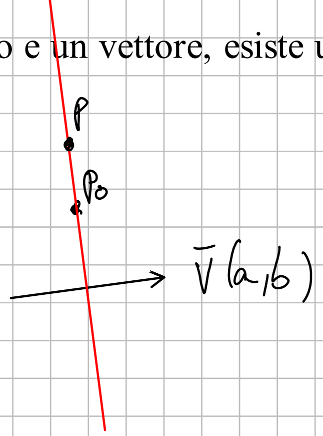
È // a v

$$\overline{PP_0} \parallel \bar{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0) = \lambda(l, m)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda l \\ y - y_0 = \lambda m \end{cases} \qquad \lambda = \frac{x - x_0}{l} \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{m} \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad \text{c.v.d.}$$

Dato un punto e un vettore, esiste una e una sola retta passante per il punto e ortogonale al vettore



$$\overline{PP_0} = (x - x_0, y - y_0)$$
$$v = (a, b)$$
$$\overline{PP_0} \perp v$$
$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$ax \underbrace{-ax_0 + by - by_0}_{c} = 0$$
$$ax + by + c = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

$$m = \frac{a}{b} \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{b}y = -\frac{a}{b}x \\ t = 0 \end{cases} \qquad P' = \left(\cancel{x}, \frac{a}{b}\cancel{x}, 0\right)$$

$$P_z = \left(1, -\frac{a}{b}\right) \rightarrow \text{coeff. angolare}$$

Condizione di parallelismo/ortogonalità fra 2 vettori v1 e v2

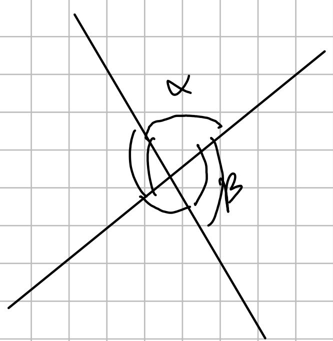
dati $v = (l, m)$ e $v' = (l', m')$

PARALLELI se $v = \lambda v' \rightarrow (l, m) = \lambda(l', m')$ $\begin{cases} l = \lambda l' \\ m = \lambda m' \end{cases}$ $\lambda = \frac{l}{l'}$ $\lambda = \frac{m}{m'}$

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} \quad \text{c.v.d.}$$

ORTOGONALI $v \cdot v' = 0$ $(l, m) \cdot (l', m') = 0$

$$ll' + mm' = 0 \quad \text{c.v.d.}$$



complementari

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\underline{v} \cdot \underline{v'} = |v| \cdot |v'| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}'}{|v| \cdot |v'|}$$

$$\cos\alpha = \frac{(l, m) \cdot (l', m')}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2}\sqrt{l'^2 + m'^2}}$$

Distanza fra 2 punti $A=(x_1,y_1)$ $B=(x_2,y_2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Punto medio

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Distanza punto-retta

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=d$$

Fascio di rette (la 2 generatrice non c'è nel fascio)

$$\lambda r_1+\mu r_2=0$$

Lavorare con 2 parametri è difficile
Pertanto si passa ad un parametro
solo, ricordando che $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

Pongo $\lambda\neq 0$

$$\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}r_1+\underbrace{\boxed{\frac{\mu}{\lambda}}}_{k}r_2=0 \qquad r_1+kr_2=0$$

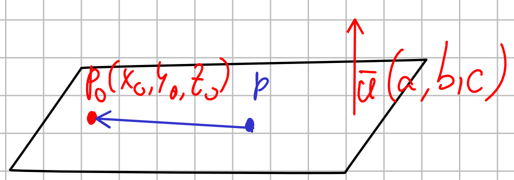
Retta nello spazio (differenza con retta su piano)

Vale ancora che per 2 punti passa una e una sola retta $\frac{x-x_0}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1}=\frac{z-z_0}{z_2-z_1}$

e che dato un punto e un vettore, esiste una e una sola retta parallela al vettore $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

Piano (ax+by+cz+d=0 e u=(a,b,c) +DIM)

$ax+by+cz+d=0$ ha vettore dir. $\bar{u}=(a,b,c)$



$$\overline{PP_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

$$\overline{PP_0}\perp\bar{u}$$

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(a,b,c)=0$$

$$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$

d

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{c.v.d.}$$

Piano passante per 3 punti (sistema lineare)

Si impone il passaggio del piano per i 3 punti

$$\begin{cases} ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d=0 \end{cases}$$

3 eq. 4 inc. 1 inc. libera = d

$$\begin{cases} a = 1d \\ b = 2d \\ c = 3d \end{cases}$$

Sono proporzionali

divido per d

$ax+by+cz+d=0$

$$\cancel{d}x + 2\cancel{d}y + 3\cancel{d}z + \cancel{d} = 0$$

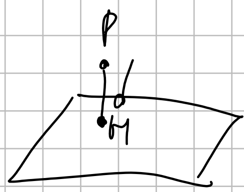
$$x + 2y + 3z + 1 = 0 \quad (\pi)$$

Date 2 rette nello spazio, quando sono parallele?

Piano contenente 2 rette r1 e r2.

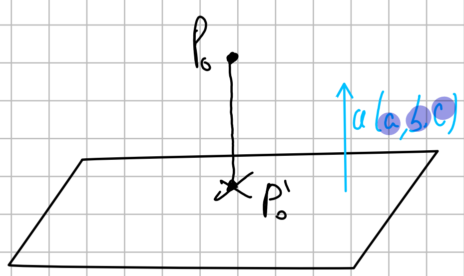
Fascio di piani che ha come asse la r1-
Punto generico su r2 MA NON su r1-
Impongo il passaggio del fascio sul punto generico-
Trovo K-
Sostituisco K nel fascio e trovo il piano

Distanza punto-piano (formula)



$$\overline{PH} = d = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Proiezione ortogonale di un punto P0 sul piano



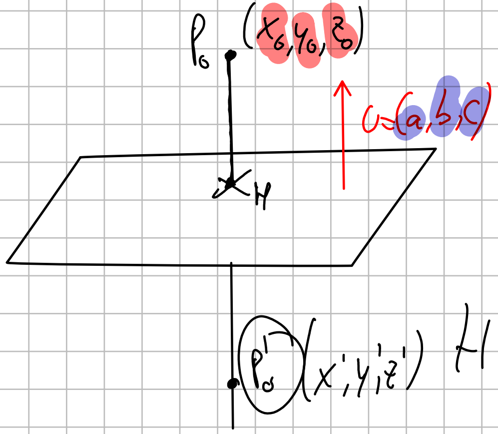
Si prende l'equazione della retta passante per P0 ortogonale al piano

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x-x_0}{\cancel{l}\ a} = \frac{y-y_0}{\cancel{m}\ b} = \frac{z-z_0}{\cancel{n}\ c}$$

Intersezione piano retta e trovo il punto H (proiezione ortogonale di P

Punto simmetrico rispetto al piano



$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l=a} = \dfrac{y-y_0}{m=b} = \dfrac{z-z_0}{n=c} \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \to H(x_H, y_H, z_H)$$

$P_0'(x';y';z')$ H è punto medio fra P_0P_0'

$\boxed{\text{elementi noti}}$

$$H = \left(\frac{x_0+x'}{2}, \frac{y_0+y'}{2}, \frac{z_0+z'}{2}\right)$$

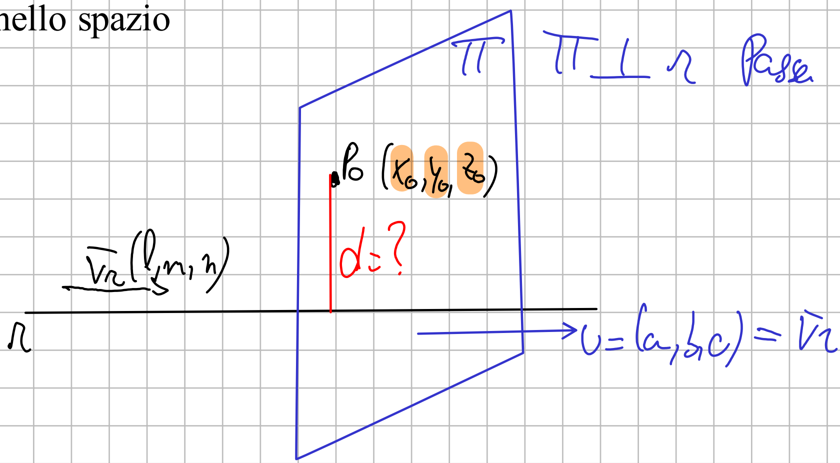
$$\underset{\text{noto}}{\underline{x_H}} \qquad \underset{\text{noto}}{\underline{y_H}} \qquad \underset{\text{noto}}{\underline{z_H}}$$

$$\frac{\boxed{x_0}+x'}{2} = \boxed{x_H} \to x' = \dots$$

$$\frac{y_0+y'}{2} = \boxed{y_H} \to y' = \dots$$

$$\frac{\boxed{z_0}+z'}{2} = \boxed{z_H} \to z' = \dots$$

Distanza punto-retta nello spazio



$$a\boxed{x}+b\boxed{y}+c\boxed{z}+d=0 \quad (a=l,\ b=m,\ c=n) \to d = \dots \to \text{eq. del piano}$$

$$\begin{cases}\pi \\ r\end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases} \to H \to \text{DIST. fra 2 punti } P_0H$$

$$d = \sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2+(z_H-z_0)^2}$$

CONICHE EQUAZIONE

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y=0$$

$$B=\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 & y/2 \\ \frac{x}{2} & & \text{noto} \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 \end{pmatrix}$$

$\det B$, $\det A$, $\rho(B)$, $Tr A = a_{11}+a_{22}$

$\det B = 0$

La conica si spezza in 2 rette

distinte se $\rho(B)=2$

coincidenti se $\rho(B)=1$

$\det B \neq 0$

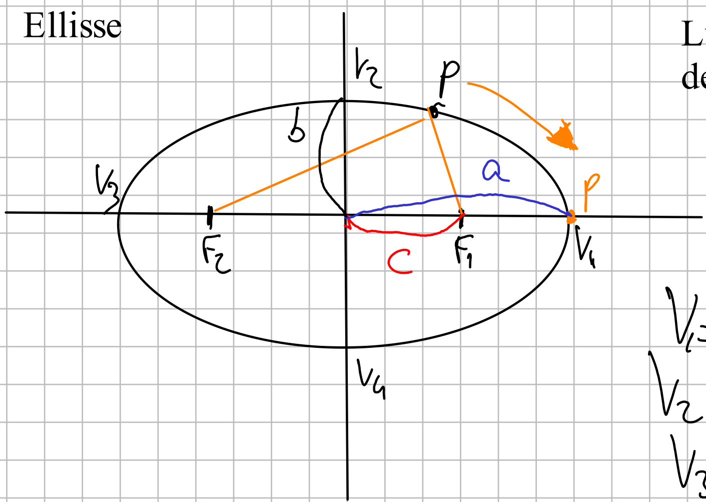
La conica è irriducibile e si valuta detA

- $\det A>0$ ellisse

  se $TrA\cdot|B|<0$ reale, se $TrA\cdot|B|>0$ immaginaria

  se $a_{12}=0$ e $a_{11}=a_{22}\neq 0$ circonferenza
- $\det A<0$ iperbole, EQUILATERA se $TrA=0$
- $\det =0$ parabola . .

Ellisse



Luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=cost. \to 2a$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$V_1=(a,0)$
$V_2=(0,b)$
$V_3=(-a,0)$
$V_4=(0,-b)$
$c=\sqrt{a^2-b^2}$

$F_1(c,0)$
$F_2(-c,0)$

$e=\frac{c}{a}<1$ sempre

V_1V_3 { ellisse, Asse 1

V_2V_4 { ellisse, Asse 2

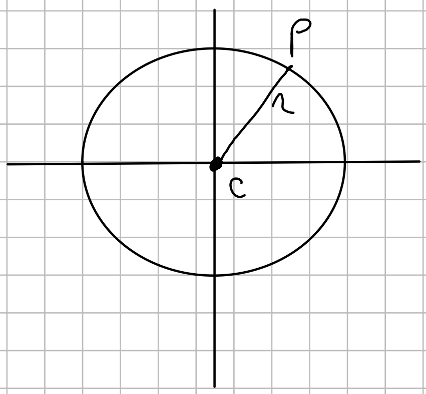
Semiasse maggiore a
asse maggiore $2a$
Semiasse minore b
asse minore $2b$

se $a>b$

SE $a<b \rightsquigarrow c=\sqrt{b^2-a^2}$

L'ellisse ha i punti improri complessi e coniugati essendo che è una curva chiusa

CIRCONFERENZA



E' il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto Centro

$\overline{PC} = \text{cost.}$

2° FORMA

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$\exists \rightarrow a_{12}=0$

$a_{11}=a_{22}\neq 0$

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}+a_{13}x+a_{23}y$

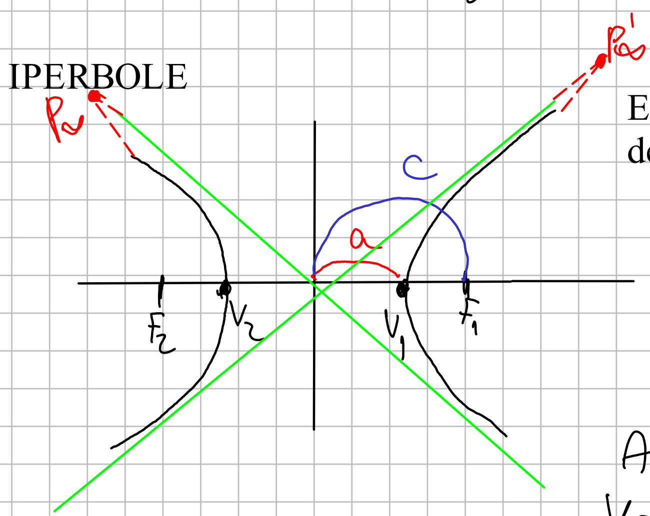
$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

$\text{Raggio}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$

1° FORMA

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

IPERBOLE



E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi

$V_1=(a,0)$

$V_2=(-a,0)$

$e=\frac{c}{a}>1$

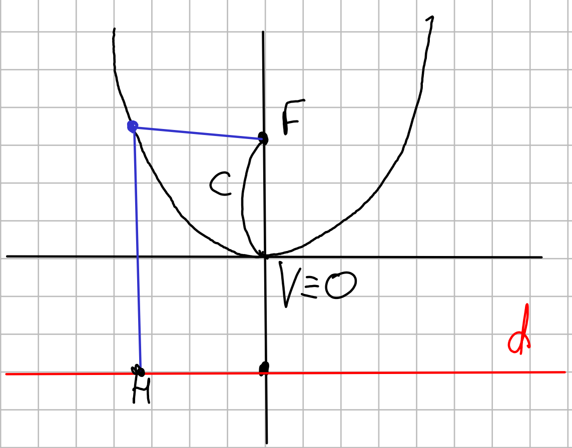
ASINTOTI

$y=\pm\frac{b}{a}x$

Ha 2 punti impropri detti punti di tangenza P_∞ e P'_∞

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

PARABOLA



E' il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice

$\overline{PF}=\overline{PH}$

$y=ax^2$

oppure se ruotata

$x=ay^2 \rightarrow ay^2=x \rightarrow y^2=\frac{1}{a}x$

$\boxed{y=2px}$ FORMA CANONICA

Non ha centro di simmetria

ASSI CASI PARTICOLARI

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $x = x_v$

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

OPP

C_s $x = ay^2 + by + c$ ASSE $y = y_v$

$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

FASCIO DI CONICHE

C_1 e C_2

$\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$

Lavorare con 2 parametri è difficile
Pertanto si passa ad un parametro solo
ricordando che $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

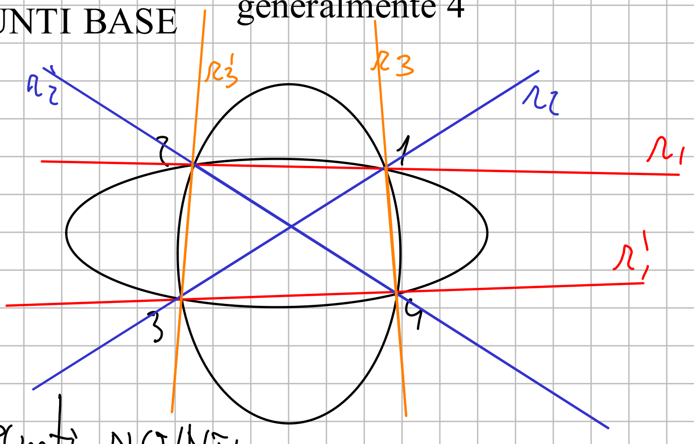
Pongo $\lambda \neq 0$

$\frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} C_1 + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{K} C_2$

$C_1 + k C_2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

PUNTI BASE generalmente 4

1)



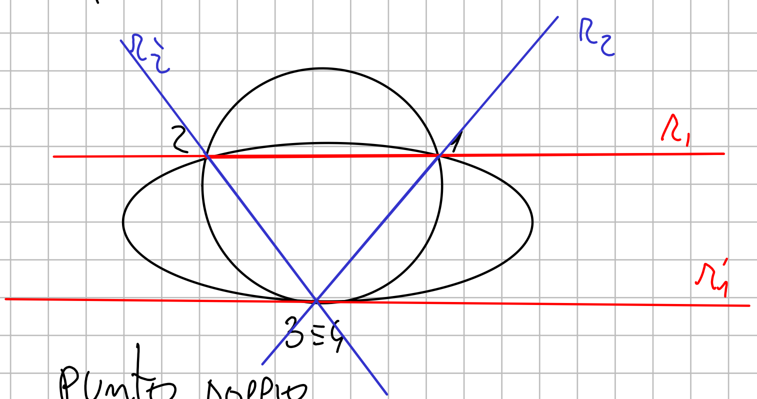
$\Gamma_1 = r_1 \cdot r_1'$

$\Gamma_2 = r_2 \cdot r_2'$

$\Gamma_3 = r_3 \cdot r_3'$

4 punti distinti

2)



$\Gamma_1 = r_1 \cdot r_1'$

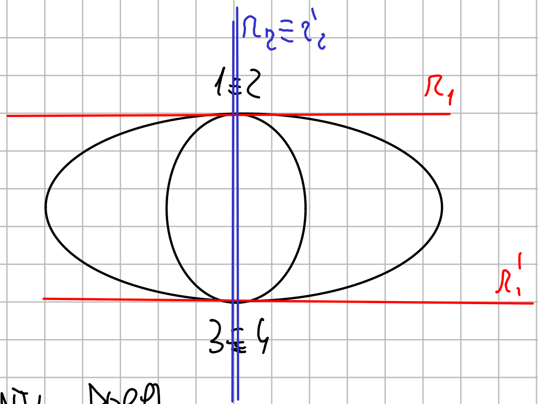
$\Gamma_2 = r_2 \cdot r_2'$

$\Gamma_3 \equiv \Gamma_2$

Punto doppio

Coniche tangenti

3)



$\Gamma_1 = r_1 \cdot r_1'$

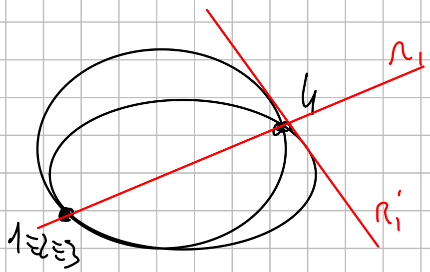
$\Gamma_2 = (r_2)^2$

$\Gamma_3 = \Gamma_2$

2 PUNTI DOPPI

Coniche BITANGENTI

4)



$\Gamma_1 = r_1 \cdot r_1'$

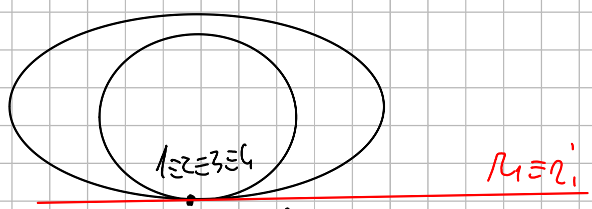
$\Gamma_2 \equiv \Gamma_1$

$\Gamma_3 \equiv \Gamma_2$

PUNTO TRIPLO

coniche che si osculano

5)



$\Gamma_1 = (r_1)^2$

$\Gamma_2 \equiv \Gamma_1$

$\Gamma_3 \equiv \Gamma_2$

Punto quadruplo

coniche che si iperosculano

Studio di coniche (forme ridotte, vertici, centro,assi)

ELLISSE/IPERBOLE

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$$

$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$ $\quad$ α e β sono le sol del P.C.(A)

Centro $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C = (x_c, y_c)$

PARABOLA

$$\beta Y^2 = 2\gamma X$$

$Tr A = \beta$

$\gamma = \pm\sqrt{\frac{|B|}{Tr A}}$

No centro

ASSI solo se sono $\parallel$ A $\vec{x}$ o $\vec{y}$

$y = ax^2 + bx + c$

$x = x_v$ $\quad$ $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

ASSI $m_1 = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

① $y - y_C = m(x - x_C)$

② $y - y_C = -\frac{1}{m}(x - x_C)$

Vertici. $\begin{cases} \text{Conica} \\ \text{asse}_1 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Conica} \\ \text{Asse}_2 \end{cases}$

Se è iperbole uno dei 2 sistemi ha soluzioni $\in \mathbb{C}$

$x = ay^2 + by^2 + c$

$y = y_V$ $V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

E' dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

Imf $\quad \rho = ? \quad \det_{3\times3} = -[(-h^2)(h+1)]$

$\det_{3\times3} = -(-h^3 - h^2) = h^3 + h^2 = h^2(h+1)$

Per $\rho = 3$ $\det \neq 0 \to h^2(h+1) \neq 0$ $\begin{cases} h^2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{h \neq 0} \\ h+1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{h \neq -1} \end{cases}$

$\dim \mathrm{Im} f = 3 \to \dim \mathrm{Ker} f = n - \rho = 0$

f è ISOMORFISMO

↳ NO EQ. CART. Imf in quanto $\forall x, y, z$.
↳ EQ. CART. Kerf. BANALI: $x = y = z = 0$
$\Big\}$ se $h \neq 0, -1$

Tolgo 1 condiz.

$h = 0$ $\quad M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rho = ?$ $\quad \boxed{\det_{2\times2} = -1}$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

$\det = -x = 0 \rightarrow x = 0$ (eq. cart. Imf se $h=0$)

Ker$f$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \forall z$$

$\text{Ker}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z,\ y = 0\}$ se $h=0$

Tolgo le 2 cond. $h = -1$

$$M(f)\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\rho(M_f) < 3$

$\det_{2\times 2} = 1 \quad \rho = 2$

$\dim \text{Im}f = 2 \quad \dim \text{Ker}f = 3 - 2 = 1$

$$\text{Im}f = \{C_2, C_3\} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$ $\det = 0$ per avere $\rho < 3$

$z - x - (-y + x) = 0$

$z - x + y - x = 0 \quad z - 2x + y = 0 \quad \cancel{2}x = \frac{z+y}{2}$

$\text{Im}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{z+y}{2}\}$ se $h = -1$

Ker$f$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 0 - z = 0 \\ 0 + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

$\text{Ker}f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$ se $h = -1$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$h \neq 0$ $\quad$ $h+1 \neq 0 \to h \neq -1$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ \cancel{(h+1)}x = \frac{z - hy}{(h+1)} \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1/h \\ x = \frac{z - \cancel{h}\left(\frac{1}{\cancel{h}}\right)}{h+1} \\ \cancel{3h}z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ x = \frac{-\frac{1}{3h^2} - 1}{h+1} \\ z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{-1-3h^2}{3h^2} \cdot \frac{1}{h+1} \\ z = \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{-1-3h^2}{3h^3+3h^2} \\ z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{-1-3h^2}{3h^3+3h^2}, \frac{1}{h}, \frac{1}{3h^2} \right) \text{ se } h \neq 0, -1$$

Tolgo $h \neq 0$, $h = 0$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \{ 0 = 1 \quad \text{sist. Imposs.}$$

se $h = 0$, $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

Tolgo $h \neq -1$, $h = -1$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ \cancel{(h+1)}x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 1 \\ -y - z = 0 \\ -y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ \\ -1 = 3 \end{cases} \quad \text{ASSURDO}$$

se $h = -1$, $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date due rette

$$r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}, s: \begin{cases} 3x+3y-5z+5=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

determinare il piano π contenente le due rette.

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2+2y^2+2(k-2)xy+2y=0,\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

Piano che ha 2 rette, r ed s.

FASCIO = $\boxed{\pi_1 + k\pi_2 = 0}$ ASSE = r

$$\underbrace{(x+y-z+1)}_{\pi_1} + k\underbrace{(z-1)}_{\pi_2} = 0$$

Prendo P_0 su s.. $P_0 \in s \wedge P_0 \notin r$

TROVO. P. generico s

$$\begin{cases} 3x+3y-5z+5=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \begin{cases} 3(3z)+3y-5z+5=0 \\ x=3z \end{cases} \begin{cases} 9z+3y-5z+5=0 \\ x=3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4z+3y+5=0 \\ x=3z \end{cases} \begin{cases} \cancel{3}y = \frac{-4z+5}{3} \\ x=3z \end{cases}$$

$$P_s \text{ GENERICO} = \left(3z, \frac{-4z+5}{3}, z\right) \forall z$$

$$P_0 \text{ scelto} \overset{z=0}{=} \left(0, \frac{5}{3}, 0\right) \quad P_0 \in s$$

$P_0 \notin r$? Verifico $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \begin{cases} 0+\frac{5}{3}-0+1=0 \\ \boxed{0-1=0} \end{cases}$ ASSURDO $\rightarrow \boxed{P_0 \notin r}$. ✓

Pass. del fascio per P_0.

$$(x+y-z+1)+k(z-1)=0 \Rightarrow 0+\frac{5}{3}-0+1+k(-1)=0$$

$$\frac{5}{3}+1-k=0 \rightarrow \frac{5+3}{3}=k \rightarrow k=\frac{8}{3}$$

$$(x+y-z+1)+k(z-1)=0 \rightarrow (x+y-z+1)+\frac{8}{3}z-\frac{8}{3}=0 \quad \text{R.}$$

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

$$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = -[k] = |B| = -k$$

2 CASI $|B| = 0$, $|B| \neq 0$

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

$k = 0$, conica si spezza in 2 rette,

$$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\rho(B) = 2$ rette distinte.

Prendo il fascio e metto $k = 0$ $\quad kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$

$$\cancel{0x^2} + 2y^2 + 2(0-2)xy + 2y = 0$$
$$2y^2 - \cancel{4}_2 xy + 2y = 0$$
$$y^2 - 2xy + y = 0$$
$$y(y - 2x + 1) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 & r_1 \\ y - 2x + 1 = 0 & r_2 \end{cases} \quad \text{se } k = 0$$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

2 condizione. $k \neq 0$, $|B| \neq 0$. Allora.

$$A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix} \to \det A = 2k - [(k-2)^2]$$
$$= 2k - (k^2 + 4 - 4k)$$
$$= 2k - k^2 - 4 + 4k = -k^2 + 6k - 4$$

CASO a). $|A| > 0$, $-k^2 + 6k - 4 > 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k^2 - 6k + 4 < 0}$$

$K^2 - 6K + 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(4) = 36 - 16 = 20$

$K_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$ — $\boxed{K_1 = \frac{6+\sqrt{20}}{2}}$, $\boxed{K_2 = \frac{6-\sqrt{20}}{2}}$

se $k < \frac{6-\sqrt{20}}{2}$ e $k > \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è ELLISSE

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$
  allora si tratta di iperbole equilatera

Cerco la circonferenza.

$$A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = a_{12} \neq 0 \quad (k \neq 0, \text{ok})$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ k - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \quad \text{ok}$$

Prendo fascio e metto k per eq. della circ.

$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$

$\cancel{2}x^2 + \cancel{2}y^2 + \cancel{2}y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + y = 0$ — $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$C = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$r = \sqrt{0^2 + \frac{1}{4} - 0} = r = \frac{1}{2}$

caso b) $|A| = 0$. K già calcolati.

se $k = \frac{6-\sqrt{20}}{2}$ e $K = \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è PARABOLA

caso c) $|A| < 0$, K già calcolati.

se $\frac{6-\sqrt{20}}{2} < K < \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è IPERBOLE

$TrA = 0$? $K+2 = 0$? $K = 2$ NO. NON EQUILATERA

22 febbraio 21

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$\det M(f) = (h+1)^2(h) + (h+1)^2 - [(h+1)^2 + (h+1)^2(h)]$

$\cancel{(h+1)^2(h)} + \cancel{(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2(h)} = 0 \quad \forall h$

$\rho(M(f)) < 3$ $\quad \begin{vmatrix} h+1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{vmatrix} = (h+1)^2$ $\quad h^2+1+2h \neq 0$

$(h+1)^2 \neq 0 \to h \neq -1$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 \quad \dim \ker f = 3-2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$ $\quad \begin{vmatrix} h+1 & 0 & h+1 \\ 1 & h+1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

$(h+1)^2 z + (h+1)y - [(h+1)y + (h+1)^2 x] = 0$

$(h+1)^2 z + \cancel{(h+1)y} - \cancel{(h+1)y} - (h+1)^2 x = 0$

$\cancel{(h+1)^2} z = \cancel{(h+1)^2} x \quad z = x \quad \forall x, y$ $\quad h \neq -1$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x\}$ se $\boxed{h \neq -1}$

$\ker f \to \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ (h+1)y + (h+1)z = 0 \\ \cancel{(h+1)x + y + hz = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{(h+1)}x = \dfrac{-hz-y}{(h+1)} \\ \cancel{(h+1)}y = -\cancel{(h+1)}z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-h)z}{(h+1)} \\ y = -z \end{cases} \quad \forall z$$

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{(1-h)z}{(h+1)},\ y = -z\} \text{ se } h \neq -1$$

$\boxed{h = -1}$

$$M(f) \begin{pmatrix} \cancel{h+1} & 1 & \cancel{h}^{-1} \\ 0 & \cancel{h+1} & \cancel{h+1} \\ \cancel{h+1} & 1 & \cancel{h}_{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rho < 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ , \rho < 2 \quad \rho = 1$$

$\dim \operatorname{Im} f = 1 \quad \dim \ker f = 2$

$\operatorname{Im} f = \{(C_2\} \to \operatorname{Im} f = \{(1,0,1)\}$ se $h = -1$ Eq. cart !!

$$\ker f: \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{y - z = 0 \quad \{y = z \quad \forall x, z$

$\ker f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$ se $h = -1$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0-T & 1 & -1 \\ 0 & 0-T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} \quad \det = 0$$

$(-T)^2(-1-T)=0$ $\begin{cases} -T^2=0 & T^2=0 \rightarrow T=0 \quad m_0=2 \quad g_0=? \\ -1-T=0 & \rightarrow T=-1 \quad m_{-1}=1 \quad g_{-1}=1 \text{ ok } \checkmark \end{cases}$

$g_0=\dim V_0=\operatorname{Ker} f_0=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0-0 & 1 & -1 \\ 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kerf_0 già fatto. Aveva $\dim \operatorname{Ker} f=2=g_0 \overset{?}{=} m_0$
f è SEMPLICE e $M(f)$ è diagonalizzabile per $h=-1$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r:\begin{cases} z=0 \\ y+z-1=0, \end{cases} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

stabilire se sono sghembe. Determinare inoltre il piano π contenente la retta r e passante per $A=(1,0,-1)$.

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2+ky^2-2kxy+2x+2y+2=0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k=1$.

r, s sghembe?
$\det \neq 0$?

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & z & \text{noto} \\ \hline r & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 & 1 & -1 \\ s & 1 & -1 & 1 & -1 \\ s & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} = M$$

$\det = a_{13}\cdot A_{13}$

$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0-1+2-(1)$

$-1+2-1=0$

$\det=0\cdot 1=0$ $\quad$ $\det=0$ RETTE NON SGHEMBE

$\rightarrow \pi$ che contiene r che passa per $A=(\underset{x}{1},\underset{y}{0},\underset{z}{-1})$

$F \Rightarrow z+k(y+z-1)=0$
fascio

$-1 + k(0 - 1 - 1) = 0$

$-1 + 0 - k - k = 0$

$-2k - 1 = 0 \to \cancel{2}k = -\frac{1}{2}$

$k = -\frac{1}{2}$

Sost. nel fascio

$z + \frac{1}{2}(y + z - 1) = 0$

$2z + \frac{1}{\cancel{2}}y + \frac{1}{\cancel{2}}z - \frac{1}{\cancel{2}} = 0$

$3z + y - 1 = 0 \to y + 3z - 1 = 0$ PIANO π che passa per A.

π contiene r?

P. generico di $r \to \begin{cases} z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y + 0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \forall x$

P. generico $= (x, 1, 0)$

Un punto a caso $\to x = 1 \to P_0 = (1, 1, 0)$

P_0 soddisfa π?

$y - 3z - 1 = 0 \to 1 - 1 = 0$ ✓ ok

Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k = 1$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ -k & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$

$\to \det B \neq 0$? $\det = \cancel{2k} - \cancel{k} - \cancel{k} - [2k^2 + 1 + k]$

$-2k^2 - 1 - k = 0$

$2k^2 + k + 1 = 0 \quad 1 - 4(2) = 1 - 8 = -7 \quad \nexists k : \det B = 0$

CASO 2. $\det B \neq 0$ $\forall k$

Vedo. A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ $\boxed{\det A = k-1}$

3 CASI. $|A| < 0 \rightarrow k-1 < 0 \rightarrow k < 1$

Se $k < 1$, allora $|A| < 0$, ho iperboli

$|A| > 0$, $k > 1$ allora ho ellissi

$|A| = 0$, $k = 1$ allora ho la parabola

Forma canonica parabola, 2° forma

$\boxed{\beta Y^2 = 2\gamma X}$

$|B|$

$-2k^2 - 1 - k$

$\rightarrow -2 - 1 - 1 = -4$

$\beta = \text{Tr} A \rightarrow k+1 = \beta \xrightarrow{k=1} \beta = 2$

$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{\text{Tr} A}} = \pm\sqrt{-\frac{-4}{2}} = \pm\sqrt{2}$

$\boxed{2Y^2 = 2\sqrt{2}X}$ FORMA CANONICA PARABOLA.

BONUS

Per $k > 1$ avevo ellissi. Reali o Immaginarie?

$\text{Tr} A \cdot \det B > 0$ è immaginaria.

$(k+1) \cdot (-2k^2 - 1 - k) < 0$?

$-2k^3 - k - k^2 - 2k^2 - 1 - k < 0$?

$k > 1$

$-2k^3 - 3k^2 - 2k - 1 < 0$

$2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 < 0 \rightarrow k\left(2k^2 + 3k + 2 + \frac{1}{k}\right) < 0$

$k<0$ (No) (condizione)

$$2k^2+3k+2+\frac{1}{k}<0 \quad (\text{MAI})$$

Ho ellissi reali.

Per $\boxed{k<1}$ ho iperboli. Equilatere? $\mathrm{Tr}\,A=0$?

$k+1=0 \rightarrow k=-1$ è equilatera?

Per $k=-1$ l'iperbole è equilatera

$\boxed{k=-1 \text{ e } k<1 \text{ sono condizioni compatibili}}$

E' assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x-y, -x+hz, x+z, -x+hy)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(1,0,0,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (-2,0,-1) \\ g(0,1,1) = (-1,h,0) \\ g(0,1,0) = (0,-1,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per g.

$f(e_1) = (1,-1,1,-1)$
$f(e_2) = (-1,0,0,h)$
$f(e_3) = (0,1,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & h & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -x+z=0 \\ x+z=0 \\ -x+hy=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y \\ -y+z=0 \to z=y \\ y+y=0 \to y=0 \\ -y=0 \end{cases} \qquad x=y=z=0$$

$$M(f) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & h & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$