Marco Bramanti

Esercitazioni di
Analisi Matematica 1

SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

Immagine di copertina
pagine del quaderno di esercizi di Analisi di mio padre,
matricola al Politecnico di Milano nel 1943

ISBN 978-88-7488-444-5

Società Editrice Esculapio s.r.l.
Via Terracini, 30 – 40131 Bologna
www.editrice-esculapio.com – info@editrice-esculapio.it

Impaginazione: Carlotta Lenzi, Laura Tondelli
Stampato da: LI.PE - Litografia Persicetana (BO)
Printed in Italy

SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

Ai miei studenti

Prefazione

Questo testo raccoglie esercizi adatti a corsi di Analisi Matematica 1 per la laurea in Ingegneria o affini. Si tratta perlopiù di esercizi che ho utilizzato per i temi d'esame di questi corsi negli ultimi dieci anni al Politecnico di Milano. L'impostazione seguita è quella del libro di testo:

Bramanti-Pagani-Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2008, nel seguito indicato con **[BPS1]**.

Gli esercizi sono raggruppati per argomenti, secondo capitoli che seguono la stessa scansione del libro di testo; ogni capitolo è suddiviso in paragrafi (numerati) e sezioni (contrassegnate da lettere). Le soluzioni degli esercizi sono riportate alla fine di ciascun *paragrafo*.

Degli esercizi contrassegnati con ★ è fornito lo svolgimento completo; di tutti gli altri sono fornite le soluzioni, in modo che lo studente possa sempre controllare la correttezza del proprio operato.

Rispetto al mio precedente "Esercizi di calcolo infinitesimale e algebra lineare", questo testo si differenzia, oltre che per il maggior numero di esercizi, per il taglio, che vuole essere simile a quello di un percorso di esercitazioni in aula. Ogni argomento importante è introdotto con un gruppo di esempi svolti dettagliatamente e commentati con osservazioni didattiche, che precedono gli esercizi proposti. A volte queste parti introduttive assumono l'aspetto di vere e proprie (brevi) lezioni su un argomento, come nel caso dei richiami sull'uso dei simboli di "asintotico" e "o piccolo", argomenti che per loro natura si prestano ad essere sviluppati nelle esercitazioni.

Tutto ciò dovrebbe servire di guida e orientamento per lo studente, in particolare per chi, e sono sempre tanti, non ha seguito le lezioni e le esercitazioni, o non le ha seguite studiando costantemente, e si trova così ad affrontare la preparazione dell'esame un po' da autodidatta. Certamente lo studio del libro di testo dev'essere il punto di partenza della preparazione dell'esame, *anche della prova scritta*. Perciò in questo eserciziario si presuppone che, nel momento in cui lo studente affronta un certo capitolo, abbia già studiato il capitolo corrispondente sul libro di testo, compresi gli esempi svolti, ed abbia già provato a svolgere almeno parte degli esercizi lì riportati. Il percorso di esercitazioni qui presentato dovrebbe essere un utile supporto e consolidamento per chi ha seguito bene il corso e aiutare tutti gli altri a recuperare ciò che si sono persi non frequentando attivamente.

Chi utilizzerà questo libro a fondo, troverà che alcuni esercizi sono piuttosto simili tra loro; ritengo che questo non sia un difetto in un percorso di esercitazioni, in quanto a tutti noi una certa dose di ripetizione è necessaria in fase di apprendimento. D'altro canto rifare *esattamente* lo stesso esercizio serve poco in matematica, perché inevitabilmente la memoria del procedimento e del risultato "spegne" in noi il ragionamento: dunque la *piccola variazione* ha un suo valore didattico.

Un'ultima osservazione riguarda i grafici di funzione inseriti in questo testo. Il lettore noterà che, quanto all'aspetto, sono di due tipi diversi. Alcuni (riconoscibili per il tratto più sottile) sono stati prodotti con un software matematico e rappresentano il grafico in scala, "esatto" (nei limiti dell'approssimazione che il software consente); altri sono stati tracciati "a mano libera" (sia pure con l'ausilio di un programma di grafica). Questi ultimi, di proposito, non sono affatto in scala, per mostrare meglio le caratteristiche importanti del grafico (punti di flesso, angolosi, a tangente verticale, ecc.), che talvolta un grafico esatto rende praticamente invisibili, a motivo della diversa scala su cui questi fenomeni si presentano: è questo grafico a mano libera e non in scala quello che spesso risulta più utile in uno studio di funzione.

Ringrazio colleghi e studenti che con i loro commenti sulle precedenti edizioni mi hanno aiutato a migliorare il materiale confluito in questo testo.
Sono sempre graditi commenti o segnalazioni di errori, all'indirizzo:

marco.bramanti@polimi.it

Segnalo infine che alla pagina web:

http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/esercitazioni.htm

è disponibile ulteriore materiale riguardante questo libro e, se questa iniziativa si rivelerà utile, la pagina nel tempo potrà essere aggiornata e incrementata.

M. B.

Milano, giugno 2011

Sommario

Test di Autovalutazione sui prerequisiti per il Corso di Analisi Matematica 1

Questo test è costituito da esercizi relativi ad alcuni argomenti studiati a scuola. Allo studente che incontrasse difficoltà nello svolgimento degli esercizi proposti si consiglia caldamente di approfondire gli argomenti su qualche testo rivolto alla matematica di base (si veda la *Bibliografia di base* riportata in fondo al testo) e svolgere ulteriori esercizi, in modo da affrontare il corso munito degli strumenti adeguati. Cercare di svolgere autonomamente tutti gli esercizi proposti, in quest'ordine, nei tempi suggeriti. Al termine del test, confrontare attentamente i propri risultati con le soluzioni proposte. Non sottovalutare eventuali discrepanze, anche piccole, tra la propria soluzione e quella fornita.

Completare le seguenti identità o calcolare le espressioni indicate senza usare la calcolatrice (max.10 minuti in tutto):

1. $a^{b+c} =$

2. $\log(ab) =$

3. $\sqrt{x^2} =$

4. $\sin(\alpha + \beta) =$

5. $\left(32^{2/5}\right)^{-1/2} =$

6. $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \tan\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) =$

7. $\log_2 16 - 3^{1/\log_2 3} =$ (il risultato è un numero intero)

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni (max. 5 minuti l'una):

8. $|x - 1| \leq 2$

9. $2x^2 + x - 5 = 0$

10. $\dfrac{2x+3}{x-1}-(x+1)\geq 0$

11. $|x+1|+2\leq|2x-1|$

12. $3^{2x-1}<2\cdot 5^{x+1}$

13. $\sqrt{x^2-3x+2}\geq 2x$

14. $2^x+2^{x+3}=16$

15. $\dfrac{\log_2 x+3}{\log_2^2 x+1}=2$

16. $2\sin^2 x+\sin x\geq 0$

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni elementari (max.15 minuti in tutto):

17. $y=x^3$

18. $y=\sqrt[3]{x}$

19. $y=1/x$

20. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

21. $y=\cos x$

22. $y=|x+1|-1$

23. $y=2^{-x}$

Altri esercizi sui prerequisiti

24. Ricavare y in funzione di x:

$$\log_2\left(\frac{y}{1-2y}\right)=3x+1.$$

Calcolare quindi $y(0)$ e $y(-1)$. (Semplificare le espressioni ottenute).

Risolvere le seguenti disequazioni:

25. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x^2-3x} \geq 2.$

26. $|x^2-1| > 2x+2.$

27. $|\sin x| \geq \dfrac{1}{2}.$

28. $2^{2x}+2^x-3>0.$

29. $|\cos x| < \dfrac{1}{2}.$

30. $2^{x^2-2x} \geq 3.$

31. $x^2+|x-1| \geq 1.$

32. $\dfrac{3x+1}{x-2} \leq 2$

33. $\log_{1/2}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \geq 0$

Per ciascuna delle affermazioni seguenti, stabilire se è vera o falsa:

34.★ La disequazione $\frac{x}{2-x} \leq 2$ è equivalente a $x \leq 2(2-x)$.

35.★ La disequazione $\log_2(3x+1) \leq 1$ è equivalente a $3x+1 \leq 2$.

36.★ La disequazione $|x-2|+x^2 \geq 0$ è sempre verificata.

37.★ La disequazione $\sqrt{x-1} \leq 2$ è equivalente a $(x-1)^2 \leq 4$.

38.★ La disequazione $x(x-2) \leq 1$ è equivalente a $x \leq 1$ o $x-2 \leq 1$.

39.★ La disequazione $|x-1| \leq 2$ è equivalente a $-2 \leq x-1 \leq 2$.

40.★ La disequazione $\frac{x-2}{x} \leq 0$ ha per soluzioni $0 < x \leq 2$.

41.★ La disequazione $\sqrt[3]{x-1} \leq 2$ è equivalente a $(x-1)^3 \leq 8$.

Soluzioni del test e degli esercizi sui prerequisiti

1. $a^b \cdot a^c$

2. $\log a + \log b$

3. $|x|$

4. $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

5. $\frac{1}{2}$

6. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 2

8. $1 \leq x \leq 3$

9. $x = \frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

10. $x \leq 1 - \sqrt{5}$; $1 < x \leq 1 + \sqrt{5}$

11. $x \leq -\frac{2}{3}$; $x \geq 4$

12. $x < \frac{\log 30}{\log \frac{9}{5}}$

13. $x \leq \frac{-3+\sqrt{33}}{6}$

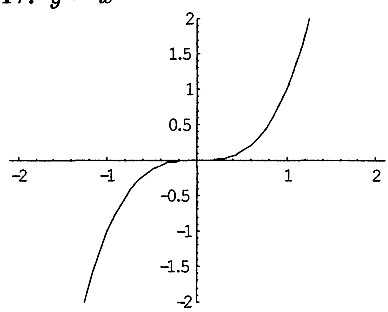
14. $x = \log_2 \frac{16}{9} \quad \left(= 2\log_2 \frac{4}{3}\right)$

15. $x = 2$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

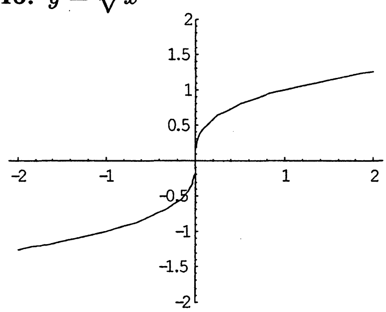
16. $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$;

$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

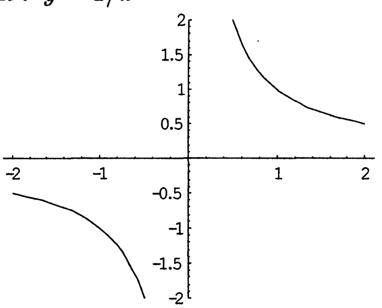
17. $y = x^3$



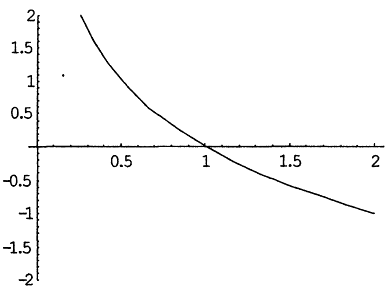
18. $y = \sqrt[3]{x}$



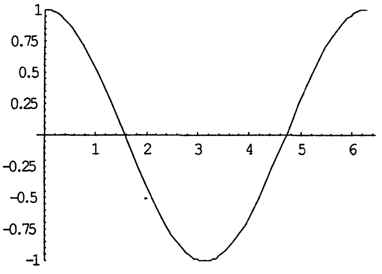
19. $y = 1/x$



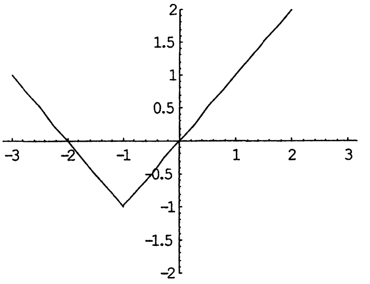
20. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



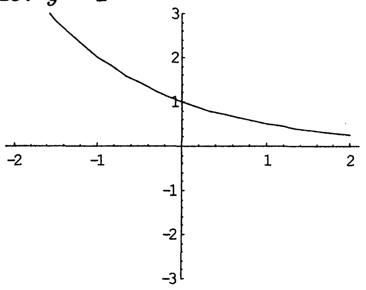
21. $y = \cos x$



22. $y = |x+1| - 1$



23. $y = 2^{-x}$



24. $y(x) = \frac{2\cdot 8^x}{1+4\cdot 8^x}$; $y(0) = \frac{2}{5}$; $y(-1) = \frac{1}{6}$

25. $1 \le x \le 2$

26. $x < -1,\ x > 3$

27. $\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

28. $x > \log_2\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$

29. $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi.$

30. $x \ge 1 + \sqrt{1 + \log_2 3}$; $x \le 1 - \sqrt{1 + \log_2 3}$

31. $x \le 0$; $x \ge 1.$

32. $-5 \le x < 2$

33. $x > 0$

34. falso: si moltiplica per $(2 - x)$, che non è sempre positivo.

35. falso: la prima deisequazione ha senso solo per $3x + 1 > 0$, il che non è vero per la seconda disequazione.

36. vero: somma di due quantità ciascuna ≥ 0

37. falso: la prima disequazione ha senso solo per $x \geq 1$, la seconda $\forall x$.

38. falso: occorre portare tutto a 1° membro e risolvere correttamente la disequazione di 2° grado.

39. vero: segue dalla definizione di modulo

40. vero: si studia il segno del quoziente con la regola dei segni, ricordando inoltre che il denominatore non può annullarsi.

41. falso: è equivalente, invece, a $(x - 1) \leq 8$, come si vede elevando al cubo ambo i membri.

Cap. 1. I numeri

1.1. Argomenti introduttivi

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 1, §1-§5.

In questo primo paragrafo, un po' diverso dal resto del libro, sono raccolti brevi esercizi riguardanti vari argomenti introduttivi: linguaggio logico e insiemi, uso di sommatorie e coefficienti binomiali, proprietà dell'insieme dei numeri reali, disuguaglianze, ecc. Si sottolineano in particolare alcuni aspetti di linguaggio, la comprensione delle definizioni e certi aspetti che in parte hanno a che fare ancora con i prerequisiti. Lo studente che trovasse difficoltà su questi esercizi è invitato a consultare la Bibliografia di base riportata in fondo al testo. Qui non si è voluto dare molto spazio a questa parte, per non toglierne agli argomenti che hanno maggior peso nella prova scritta dell'esame di Analisi Matematica 1.

1.1.A. Insiemi e logica

Esercizi

Dire se sono vere o false le seguenti relazioni insiemistiche.

1.1. $\{2\} \subseteq \{1,2,3\}$
1.2. $\{2\} \in \{1,2,3\}$
1.3. $\{2\} \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
1.4. $\{2\} \subseteq \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$
1.5. $1 \in \mathbb{Z}$
1.6. $-3 \in \mathbb{N}$
1.7. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
1.8. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = A$
1.9. $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$
1.10. $\forall$ insieme A, $A \subseteq A \times A$
1.11. $\forall$ insieme A, $\emptyset \subseteq A$
1.12. $A \subseteq A \cup B$ ($\forall$ coppia di insiemi A, B)
1.13. $A \subseteq A \cap B$ ($\forall$ coppia di insiemi A, B)

1.14. Si consideri la proposizione: "Per ogni coppia di interi positivi esiste almeno un intero positivo che divide entrambi".

Affermare che questa proposizione è falsa equivale ad affermare che:

[A] Per ogni coppia di interi positivi non esiste alcun intero positivo che divida entrambi.

[B] Per ogni coppia di interi positivi esiste un intero positivo che divide solo uno dei due.

[C] Esiste una coppia di interi positivi per cui esiste un intero positivo che non divide l'uno o non divide l'altro.

[D] Esiste una coppia di interi positivi per cui esiste un intero positivo che divide uno dei due ma non l'altro.

1.15.★ Si consideri la proposizione:

p: "Ogni triangolo rettangolo ha la proprietà di Annibale".

Di ciascuna delle seguenti, si dica se è vera o falsa:

a. Se disegno un triangolo rettangolo scegliendo a caso la lunghezza dei cateti, e constato che questo triangolo ha la proprietà di Annibale, posso concludere che p è vera.

b. Se riesco a disegnare un triangolo che non ha la proprietà di Annibale, posso concludere che la p è falsa.

c. Se riesco a disegnare un triangolo che ha la proprietà di Annibale ma non è rettangolo, posso concludere che la p è falsa.

d. Se riesco a disegnare un triangolo rettangolo che non ha la proprietà di Annibale, e un altro triangolo rettangolo che ha la proprietà di Annibale, posso concludere che la p qualche volta è vera e qualche volta è falsa.

e. Se riesco a disegnare un triangolo rettangolo che non ha la proprietà di Annibale, e un altro triangolo rettangolo che ha la proprietà di Annibale, posso concludere che la p è falsa.

f. Alle domande precedenti non è possibile rispondere se non si sa cosa sia la proprietà di Annibale.

1.1.B. Sommatorie e coefficienti binomiali

Esercizi

Per ciascuna delle seguenti uguaglianze, si dica se è vera o falsa. Nelle prossime formule, gli indici $n, k, j,$ ecc. indicano sempre numeri interi.

1.16.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

1.17. $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k$$

1.18. $$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_k$$

1.19. $$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$$

1.20. $$\binom{n}{k} = \binom{k}{n}$$

1.21. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1.22. $$n! = n(n-1)!$$

1.23. $$\binom{n}{0} = 0$$

1.24. $$\binom{n}{1} = 1$$

1.25. $$\binom{n}{1} = n$$

1.26. Calcolare (senza calcolatrice, nel modo più semplice possibile) i seguenti coefficienti binomiali:

$$(a)\ \binom{7}{5};\quad (b)\ \binom{10}{1};\quad (c)\ \binom{5}{3};\quad (d)\ \binom{100}{98}.$$

1.27. Nello sviluppo di $\left(2x^2 - xy\right)^5$

si scriva solo il termine contenente y^3 (senza scrivere lo sviluppo intero).

1.1.C. Numeri reali, ordinamento, estremo superiore

Esercizi

1.28. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, E non vuoto. Di ciascuna delle seguenti affermazioni, si dica se è vera o falsa. Si richiede di rispondere a ciascuna domanda senza leggere le domande successive. Inoltre, se si risponde che l'affermazione è falsa, si chiede di esibire un contresempio, cioè un esempio che mostra la falsità dell'affermazione (ad esempio: "Il numero 2" è un contresempio all'affermazione, falsa, "Tutti i numeri primi sono dispari").

a. Se E ammette massimo, allora ammette anche estremo superiore.
b. Se E è superiormente limitato, allora ammette massimo.
c. Se $M = \max E$, allora $M = \sup E$.
d. Se E ammette estremo superiore, allora ammette anche massimo.
e. Se E è superiormente limitato, allora ammette estremo superiore.
f. Se esiste $\sup E = \Lambda$, allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E : \Lambda - \varepsilon < x < \Lambda$.
g. Se M ammette estremo superiore, allora ammette anche estremo inferiore.
h. Se M non ammette massimo, allora M è infinito.
i. Se $M = \sup E$ ed esiste $\max E$, allora $M = \max E$.
l. Se esiste $\sup E = \Lambda$, allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E : \Lambda - \varepsilon < x \leq \Lambda$.

1.29. Per ciascuna delle seguenti espressioni, si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ è ben definita:

$$a^{3/2};\ a^{2/3};\ a^{-2/3};\ a^{1/3};\ \left(\frac{1}{3}\right)^a;\ (-2)^a;\ a^\pi;\ a^{-2};\ \log_{\frac{1}{3}} a;\ \log_a 3$$

1.30. Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, e supponiamo che:

$$\forall x \in E\, \exists y \in F : x \leq y.$$

Allora si può dedurre che (per ciascuna affermazione si dica se è vera o falsa)

a. $\forall x \in E\, \forall y \in F, x \leq y$
b. $\sup E \leq \sup F$
c. $\exists y \in F : \forall x \in E, x \leq y$
d. $\sup E \leq \inf F$

1.31. Stabilire se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera o falsa:

a. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x + y| = |x| + |y|$
b. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
c. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x + y| \leq |x| + |y|$

d. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x - y| \leq |x| - |y|$
e. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x - y| \leq |x| + |y|$

1.32. Esprimere coi simboli di intervallo $[a, b]$, (a, b), ecc., ed eventualmente quello di unione di intervalli (ad es. $(a, b) \cup (c, d)$) gli insiemi così definiti:
a. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq \pi\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ o } x \geq 2\}$
d. $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\}$
e. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \text{ o } x > 2\}$

1.33. (Inverso del precedente). Tradurre in opportune disequazioni l'appartenenza ai seguenti insiemi:
a. $[-2, 2]$
b. $(1, 2] \cup (3, +\infty)$
c. $(-\infty, 0] \cup (1, 2)$
d. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Determinare (se esistono) il massimo, il minimo, l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$*:*

1.34. $$\left\{x \in \mathbb{R} : x = 2 + \sin\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

1.35. $$\left\{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \cos\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

1.36. $$[0, 2) \cap (1, 3)$$

1.37. $$\left\{x : x = \frac{n+1}{n+2} : n = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

1.38. $$\{x : x = 2^m - 2^{-m} : m = 0, 1, 2, \ldots\}$$

1.39. $$\left\{x : x = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

1.40. $$\left\{x : x = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$$

1.41. Sia $$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\right\}.$$

Per ciascuna delle seguenti, dire se è vera o falsa:

a. $\max A = 1$
b. $\min A = 0$
c. A è limitato superiormente
d. A è limitato inferiormente
e. A è un intervallo limitato
f. A è un insieme finito
g. A è un insieme limitato
h. $A \subset \mathbb{Q}$

Soluzioni § 1.1.

1.1. Vero
1.2. Falso (il primo insieme è *incluso in*, non *appartiene a* il secondo insieme)
1.3. Vero (il 2° insieme ha per elementi insiemi, tra cui il 1° insieme)
1.4. Falso (il 1° insieme non è *contenuto* nel 2°, ma casomai è contenuto in alcuni insiemi che *appartengono* al 2°).
1.5. Vero
1.6. Falso
1.7. Vero
1.8. Falso (E' corretto dire che $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$)
1.9. Vero
1.10. Falso
1.11. Vero
1.12. Vero
1.13. Falso
1.14. C
1.15.

a. Falso: dalla verità della proprietà per un triangolo non posso dedurre la sua verità per ogni triangolo.

b. Falso: non basta che un triangolo *qualsiasi* non abbia la proprietà di Annibale, dovrebbe essere *rettangolo*.

c. Falso: questo mostra che è falsa l'*implicazione inversa* di p, non p stessa.

d. Falso: la p è una proposizione, cioè è vera o falsa "una volta per tutte", non può essere "vera in qualche caso e falsa in qualche caso". (E' la proprietà di Annibale che può essere vera in qualche caso e falsa in qualche caso).

e. Vero. In effetti per concludere che la p è falsa è sufficiente la *prima* delle due cose: saper disegnare un triangolo rettangolo che non ha la proprietà di Annibale.

f. Falso. Come si è visto, rispondere alle domande precedenti ha a che fare solo con gli aspetti sintattici della p, non con il suo significato.

1.16. Vero
1.17. Falso
1.18. Falso
1.19. Vero
1.20. Falso
1.21. Vero
1.22. Vero
1.23. Falso
1.24. Falso
1.25. Vero
1.26. (a) 21; (b) 10; (c) 10; (d) 4950
1.27. $-40x^7y^3$

1.28.

a. Vero; *b.* Falso, contresempio: $E=(0,1)$; *c.* Vero;
d. Falso, contresempio: $E=(0,1)$; *e.* Vero;
f. Falso, contresempio:
$E=\{1,2\}$. $\Lambda=2$, fissato $\varepsilon=\frac{1}{2}$ non esiste $x\in E$ tale che $2-\frac{1}{2}<x<2$.
g. Falso, contresempio: $E=(-\infty,0)$; *h.* Vero; *i.* Vero
l. Vero (si faccia attenzione al " $\leq\Lambda$", che è diverso dalla domanda *f*).

1.29.

$a^{3/2}$: $a\geq 0$; $a^{2/3}$: $\forall a\in\mathbb{R}$; $a^{-2/3}$: $a\neq 0$; $a^{1/3}$: $\forall a\in\mathbb{R}$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^a$: $\forall a\in\mathbb{R}$; $(-2)^a$: $a\in\mathbb{Q}$; $a=\frac{m}{n}$ con m pari oppure m e n dispari;

a^π: $a\geq 0$; a^{-2}: $a\neq 0$; $\log_{\frac{1}{3}}a$: $a>0$; $\log_a 3$: $a>0, a\neq 1$

1.30. *a.* Falso; *b.* Vero; *c.* Falso; *d.* Falso
1.31. *a.* Falso; *b.* Vero; *c.* Vero; *d.* Falso; *e.* Vero
1.32.
a. $[3,+\infty)$
b. $(2,\pi]$
c. $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$
d. $[-3,3]$
e. $[0,1]\cup(2,+\infty)$

1.33.
a. $-2\leq x\leq 2$
b. $1<x\leq 2$ o $x>3$
c. $x\leq 0$ o $1<x<2$
d. $x<-1$ o $x>1$, che si può anche esprimere così: $|x|>1$.

1.34. max $=2+\sin 1$; min $=$ non esiste; sup $=2+\sin 1$; inf $=2$.
1.35. max $=$ non esiste; min $=$ non esiste; sup $=1$; inf $=-1$.
1.36. sup $=2$, inf $=1$, non esistono max. e min.
1.37. inf $=$ min $=\frac{1}{2}$, sup $=1$; max $=$ non esiste.
1.38. inf $=$ min $=0$, sup $=+\infty$, non esiste max.
1.39. inf $=$ min $=-\frac{1}{4}$; max $=$ sup $=0$
1.40. inf $=-1$,sup $=1$, non esistono min., max.
1.41. *a.* Falso; *b.* Vero; *c.* Vero; *d.* Vero;
e. Falso; *f.* Falso; *g.* Vero; *h.* Vero.

1.2. Numeri complessi

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 1, §8.

1.2.A. Concetti di base: forma algebrica e trigonometrica, operazioni sui numeri complessi

Esempi svolti

Esempio 1.1. Scrivere in forma algebrica ($z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:

$$(a)\ \frac{(1+2i)(1-2i)}{3-i};\quad (b)\ \frac{\sqrt{3}\,i-2}{\sqrt{3}\,i+2};\quad (c)\ \frac{(1+2i)^4}{i};\quad (d)\ \frac{(2+3i)}{(3-i)^2}.$$

(a) Svolgiamo prima il prodotto a numeratore (prodotto notevole)

$$\frac{(1+2i)(1-2i)}{3-i} = \frac{\left(1-(2i)^2\right)}{3-i} = \frac{1+4}{3-i}.$$

Ora per togliere i numeri immaginari a denominatore moltiplichiamo e dividiamo la frazione per il coniugato del denominatore, usando l'identità

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

e otteniamo

$$\frac{1+4}{3-i} = \frac{5(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{5(3+i)}{9+1} = \frac{1}{2}(3+i) = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$$

che è il numero di partenza scritto in forma algebrica.

(b) Con lo stesso metodo dell'es. (a) rendiamo reale il denominatore

$$\frac{\sqrt{3}\,i-2}{\sqrt{3}\,i+2} = \frac{\left(\sqrt{3}\,i-2\right)\left(2-\sqrt{3}\,i\right)}{\left(\sqrt{3}\,i+2\right)\left(2-\sqrt{3}\,i\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\,i-2\right)\left(2-\sqrt{3}\,i\right)}{4+3} =$$

ora eseguiamo a numeratore il prodotto di numeri complessi

$$= \frac{-4+3+i\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)}{7} = -\frac{1}{7} + i\frac{4}{7}\sqrt{3}.$$

(c) Per eseguire la potenza $(1+2i)^4$ conviene elevare al quadrato, riscrivere in forma algebrica, ed elevare ancora al quadrato, così:

$$(1+2i)^4 = \left[(1+2i)^2\right]^2 = [1-4+4i]^2 =$$

$$= (-3+4i)^2 = 9-16-24i = -7-24i.$$

Questo metodo è preferibile rispetto allo sviluppo di $(1+2i)^4$ con la formula del binomio di Newton che, oltre a richiedere il calcolo dei coefficienti binomiali, porta a calcolare le potenze successive di i, con... probabili errori di segno. Quindi

$$\frac{(1+2i)^4}{i} = \frac{-7-24i}{i} =$$

ricordando che $\frac{1}{i} = -i$

$$= -24+7i.$$

(d) Sviluppiamo il quadrato a denominatore e poi moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato del denominatore:

$$\frac{(2+3i)}{(3-i)^2} = \frac{2+3i}{9-1-6i} = \frac{(2+3i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{16-18+i(24+12)}{64+36} =$$

$$= \frac{-2+36i}{100} = -\frac{1}{50} + \frac{9}{25}i.$$

Esempio 1.2. Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

(a) $1+i$; (b) -5; (c) $-\sqrt{3}+i$; (d) $2-i$; (e) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$.

(a) Eseguiamo il raccoglimento

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

per mettere in evidenza il modulo e riconoscere coseno e seno dell'argomento:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

da cui riconosciamo che $\rho = \sqrt{2}$; $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

In alternativa si può ragionare così: si vede subito che il punto $1 + i$ nel piano complesso sta sulla retta $y = x$, inoltre è nel primo quadrante, quindi l'argomento è $\frac{\pi}{4}$. Il modulo si calcola poi con $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.

(*b*) -5 è un numero reale negativo: il suo argomento è $\vartheta = \pi$, mentre il modulo è il suo valore assoluto: $\rho = 5$.

(*c*)
$$-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

da cui riconosciamo che $\rho = 2$; $\vartheta = \frac{5}{6}\pi$.

(*d*)
$$2 - i = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right).$$

Osserviamo che $\rho = \sqrt{5}$ ma l'argomento *non è un angolo notevole*. Possiamo indicarlo usando una funzione trigonometrica inversa. La più comoda è arcotangente, in quanto

$$\text{se } \vartheta = \arg(a + ib), \quad \text{allora } \tan\vartheta = \frac{b}{a}.$$

Per decidere se $\vartheta = \arctan\frac{b}{a}$ oppure $\vartheta = \arctan\frac{b}{a} + \pi$ occorre ragionare sul quadrante in cui si trova $a + ib$, ricordando che l'arcotangente assume valori in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cioè nel 1° e 4° quadrante. Quindi, poiché $(2 - i)$ sta nel 4° quadrante,

$$\vartheta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

(*e*)
$$-\sqrt{2} - \sqrt{3}i = \sqrt{5}\left(-\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}i\right).$$

Si vede che $\rho = \sqrt{5}$, mentre anche in questo caso l'argomento non è un angolo notevole. Poiché $\tan\vartheta = \sqrt{\frac{3}{2}}$ e il numero complesso è nel 3° quadrante (perché

a, b sono entrambi negativi) si ha:

$$\vartheta = \arctan\sqrt{\frac{3}{2}} + \pi.$$

Esempio 1.3. Calcolare le seguenti radici n-esime nel campo complesso e riscriverle in forma algebrica:

$$(a) \quad \sqrt[3]{-i} \qquad (b) \quad \sqrt[3]{2\sqrt{3}-2i} \qquad (c) \quad \sqrt[6]{-8}.$$

(a) La formula che fornisce le radici n-esime del numero $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è

$$z = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Occorre quindi preliminarmente calcolare modulo e argomento del radicando. Per $w = -i$ è $\rho = 1, \vartheta = \frac{3\pi}{2}$ quindi, essendo $n = 3$, si ha

$$z = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

che si semplifica a

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2$$

e quindi dà, più esplicitamente

$$z_1 = i; \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(b) Per
$$w = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

si ha $\rho = 4, \vartheta = -\frac{\pi}{6}$, quindi essendo $n = 3$, le 3 radici sono date da:

$$z = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \ k = 0, 1, 2$$

(che non scriviamo in forma più semplice perché gli angoli coinvolti non sono notevoli).

(c) Per $w = -8$ è $\rho = 8, \vartheta = \pi$, ed essendo $n = 6$ si ha

$$z_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right) \quad \text{per } k = 0, 1, ..., 5$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)\right) \quad \text{per } k = 0, 1, ..., 5.$$

Trattandosi di angoli notevoli, è possibile scrivere più esplicitamente:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right); \quad z_1 = \sqrt{2}i; \quad z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right);$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right); \quad z_4 = -\sqrt{2}i; \quad z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

Esempio 1.4. Sia $z = 1 + i$. Calcolare modulo e argomento di z e di z^{10}. Esprimere gli argomenti mediante angoli compresi tra 0 e 2π. Infine, scrivere in forma algebrica z^{10}.

Calcoliamo anzitutto $|z| = \sqrt{2}$; $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Per calcolare modulo e argomento di z^{10} *non occorre calcolare algebricamente la potenza* $(1 + i)^{10}$. Basta ricordare che, per il teorema di De Moivre,

$$|z^{10}| = \sqrt{2}^{10} = 2^5 = 32;$$

$$\arg(z^{10}) = 10 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{2}, \text{quindi } \arg(z^{10}) = \frac{\pi}{2}.$$

Si osservi come abbiamo ridotto l'argomento di z^{10} (cioè $\frac{5}{2}\pi$) all'intervallo $[0, 2\pi)$, sottraendo 2π (più in generale, può essere necessario sottrarre un multiplo di 2π). Una volta calcolato modulo e argomento di z^{10}, è facile scriverlo in forma algebrica:

$$(1 + i)^{10} = 32i.$$

Esercizi

Scrivere in forma algebrica ($z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:

1.42. $$\frac{(3+2i)(2-3i)}{(1+i)^3}$$

1.43. $$(2+3i)^2$$

1.44. $$(1+i)^3$$

1.45. $$\frac{(2-3i)(4+2i)}{i(2+i)^2}$$

Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

1.46. $$2-2i$$

1.47. $$-2-2\sqrt{3}i$$

1.48. $$-3i$$

1.49. $$-3\sqrt{3}-3i$$

Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi (questi esempi richiedono l'uso delle funzioni trigonometriche inverse):

1.50. $$2+3i$$

1.51. $$-1+3i$$

1.52. $$-2-3i$$

1.53. $$1-3i$$

1.54. $$-\sqrt{2}+i$$

Esercizi vari sulla forma algebrica e trigonometrica dei numeri complessi

1.55. Calcolare $\mathrm{Im}z$ e $|z|$, dove z è la soluzione dell'equazione:

$$2i\overline{z} = 3 + 5i$$

1.56. Calcolare $\mathrm{Re}z$ e $|z|$, dove z è la soluzione dell'equazione

$$(3 + 2i)z = 2 + \sqrt{3}i.$$

Calcolare le seguenti radici n-esime nel campo complesso, dopo aver detto quante sono, e riscriverle in forma algebrica:

1.57. $$\sqrt[5]{-2 + 2i}$$

1.58. $$\sqrt[6]{-8i}$$

Calcolare le seguenti radici n-esime nel campo complesso, dopo aver detto quante sono, e riscriverle in forma trigonometrica o esponenziale:

1.59. $$\sqrt[5]{-4 - 4i}$$

1.60. $$\sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}}$$

1.61. Determinare modulo e argomento dei numeri complessi:

$$z = \frac{\sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}}{-1 + i}.$$

1.62.★ Determinare *tutte* le soluzioni della seguente equazione nel campo complesso, e scriverle in forma algebrica:

$$\left(\frac{5 - 3i}{2 + i}\right)\overline{z} = \frac{2 - i}{1 + i}.$$

1.2.B. Equazioni nel campo complesso

Esempi svolti

Esempio 1.5. Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione nel campo complesso, e scriverle in forma algebrica:

$$2iz^2 + 3\overline{z} + 5i = 0.$$

Nell'equazione l'incognita complessa z compare in z^2 e $\overline{z}$. Ciò significa che questa *non è un'equazione algebrica* (cioè il 1° membro non è un polinomio in z, come sarebbe se al posto di $\overline{z}$ ci fosse z). In particolare, non possiamo applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Invece, è naturale porre $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$). L'equazione diviene:

$$2i\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + 3(x - iy) + 5i = 0$$

e separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema di due equazioni in due incognite reali:

$$\begin{cases} -4xy + 3x = 0 & \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = \frac{3}{4} \\ 2(x^2 - y^2) - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$,
$$-2y^2 - 3y + 5 = 0$$

$$y = 1, y = -\frac{5}{2}$$

e otteniamo le soluzioni complesse:

$$z_1 = i; \; z_2 = -\frac{5}{2}i.$$

Se $y = \dfrac{3}{4}$:
$$2x^2 + \frac{13}{8} = 0 \text{ mai.}$$

Attenzione a non cadere nell'errore di ricavare x come $\sqrt{-13/16}$, ottenendo valori immaginari di x! Questo non ha senso perché x e y sono incognite *reali*.

Le soluzioni complesse scritte in forma algebrica (come richiede il testo) sono quindi solo z_1 e z_2 scritte sopra.

Osservazione 1.1. Quando usare la forma algebrica? Il metodo di risoluzione di un'equazione nel campo complesso separando parte reale e parte immaginaria è applicabile teoricamente a *tutte* le equazioni in $\mathbb{C}$. Ma questo non è un buon motivo per usare sempre questo metodo. La risoluzione di un sistema, generalmente *non lineare*, di due equazioni in due incognite, può essere laboriosa. E' bene usare questo metodo solo quando non ce n'è uno più semplice, il che va stabilito *osservando* la struttura dell'equazione, come illustreremo nei prossimi esempi.

Esempio 1.6. Determinare tutte le soluzioni della seguente equazione nel campo complesso, e scriverle in forma algebrica:

$$\frac{3z + i\sqrt{3}}{z+5} = z.$$

Imponiamo anzitutto $z \neq -5$. Si osserva che l'equazione si può riscrivere come equazione algebrica di secondo grado, con i passaggi:

$$3z + i\sqrt{3} = z^2 + 5z$$

$$z^2 + 2z - i\sqrt{3} = 0. \tag{$*$}$$

Ora è lecito applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$z = -1 + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}.$$

(Scriviamo solo il segno $+$ davanti alla radice perché il simbolo di radice complessa indica già i due numeri). Attenzione però al fatto che questa scrittura non fornisce ancora le soluzioni scritte in forma algebrica (come richiede il testo); è necessario calcolare le radici quadrate. Poiché il radicando $1 + i\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$, si ha:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

e quindi

$$z = -1 \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \left(-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Si osservi che anche l'ultimo passaggio è necessario se vogliamo che le soluzioni dell'equazione siano scritte escplicitamente in forma algebrica. Infine, osserviamo che entrambe le soluzioni trovate sono accettabili perché diverse da -5, condizione imposta all'inizio.

Osservazione 1.2. E' istruttivo, a titolo di confronto, provare a risolvere l'equazione $(*)$ col metodo di separazione di parte reale e immaginaria. Ponendo $z = x + iy$, si ottiene

$$(x+iy)^2 + 2(x+iy) - i\sqrt{3} = 0$$

che dà il sistema $$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2xy + 2y - \sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

E' evidente che il metodo non è affatto vantaggioso in questo caso. Molto meglio osservare che $(*)$ è un'equazione di 2° grado e applicare la formula risolutiva. Come notavamo nell'Osservazione 1.1, affrontare un'equazione nel campo complesso separando parte reale e immaginaria è una cosa da fare come ultima risorsa, se non c'è una strada più semplice.

Esempio 1.7. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso scrivendo tutte le soluzioni in forma algebrica o trigonometrica:

$$\mathrm{Re}((1+i)z) \cdot \mathrm{Im}((2-3i)\overline{z}) + i(\mathrm{Im}z + \mathrm{Re}\overline{z} - 2) = 0.$$

Poiché nell'equazione compaiono gli operatori parte reale, parte immaginaria e coniugato, separare parte reale e immaginaria in questo caso è una strada obbligata. Ponendo $z = x + iy$ si ha:

$$\mathrm{Re}((1+i)(x+iy)) \cdot \mathrm{Im}((2-3i)(x-iy)) + i(y+x-2) = 0$$

$$(x-y)(-3x-2y) + i(y+x-2) = 0$$

$$\begin{cases} (x-y)(3x+2y) = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(x-y)(3x+2y) = 0 \Rightarrow y = x \text{ o } y = -\frac{3}{2}x;$$

$$y = x \Rightarrow 2x - 2 = 0, x = 1, y = 1, z = 1 + i;$$

$$y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow -\frac{1}{2}x - 2 = 0, x = -4, y = 6, z = -4 + 6i.$$

In conclusione, le soluzioni sono due:

$$z_1 = 1 + i; z_2 = -4 + 6i.$$

Esempio 1.8. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni (in forma algebrica o trigonometrica) e dicendo esplicitamente quante sono:

$$(\overline{z} + i)^3 = i.$$

Osservando l'equazione, si capisce che conviene ragionare in due passi: prima poniamo $w = \overline{z} + i$, così che l'equazione assume la forma molto semplice

$$w^3 = i.$$

Risolta l'equazione in w, sarà facile ricavare z. Calcoliamo quindi le radici cubiche di i:

$$w = \sqrt[3]{i} = \left\{ -i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

(dove col simbolo {...} abbiamo indicato l'insieme delle 3 radici cubiche).

Ora ricaviamo $\overline{z}$ e poi z:

$$\overline{z} = -i + w = -i + \left\{ -i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} = \left\{ -2i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\};$$

$$z = \overline{\left\{ -2i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}} = \left\{ 2i; \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}.$$

Le soluzioni sono 3:

$$z_1 = 2i; z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Esempio 1.9. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione nel campo complesso:

$$z^2 = -4\overline{z}.$$

Nell'equazione compaiono z^2 e $\overline{z}$. Quindi non è un'equazione algebrica. Potremmo separare parte reale e parte immaginaria. In questo caso però la struttura dell'equazione suggerisce un altro procedimento. Se scriviamo, in forma trigonometrica,

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

ricordando come si eseguono, in forma trigonometrica, i prodotti, le potenze (formule di De Moivre) e l'operazione di coniugato, avremo

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta)$$

$$\overline{z} = \rho(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)); \quad -4\overline{z} = 4\rho(\cos(\pi - \vartheta) + i\sin(\pi - \vartheta))$$

(abbiamo usato il fatto che -4 ha modulo 4 e argomento π). L'equazione diventa quindi

$$\rho^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) = 4\rho(\cos(\pi - \vartheta) + i\sin(\pi - \vartheta))$$

che si può vedere come identità tra il numero complesso di modulo ρ^2 e argomento 2ϑ e il numero complesso di modulo 4ρ e argomento $(\pi - \vartheta)$. Questo è possibile solo se

$$\begin{cases} \rho^2 = 4\rho \\ 2\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi. \end{cases}$$

Si tratta ora di risolvere il sistema di due equazioni nelle due incognite ρ, ϑ ricordando che, per il loro significato, *ρ dev'essere un numero reale non negativo e ϑ un angolo, quindi, ad esempio, è sufficiente considerare valori $\vartheta \in [0, 2\pi)$.*

Risolvendo il sistema (notiamo che in questo caso le due equazioni sono tra loro indipendenti) troviamo

$$\rho = 0, \rho = 4; \vartheta = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$$

che dà i seguenti punti nel piano complesso:

$$z = 0; z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right), k = 0, 1, 2$$

e quindi

$$z_1 = 0; z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i; z_3 = -4; z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

Osservazione 1.3. Quando usare la forma trigonometrica? Il metodo di risoluzione di un'equazione nel campo complesso scrivendo l'incognita in forma trigonometrica è utile quando è possibile riscrivere l'equazione in modo che a ciascuno dei due membri compaia z o $\overline{z}$, o una potenza di z o $\overline{z}$, eventualmente *moltiplicata per* (ma non sommata a) una costante. In questi casi infatti è facile esprimere in funzione di ρ e ϑ il modulo e l'argomento di ciascuno dei due membri.

Osservazione 1.4. Forma trigonometrica e forma esponenziale. La *forma esponenziale* dei numeri complessi è equivalente alla forma trigonometrica, ma di scrittura più compatta. In questo capitolo abbiamo deciso di non usarla, perché solitamente non viene presentata all'inizio del corso, ma più avanti. Se lo studente conosce già la forma esponenziale, comunque, è invitato a usare questa anziché la forma trigonometrica. Ad esempio, l'impostazione di questo esercizio usando la forma esponenziale dei numeri complessi diventa:

$$z = \rho e^{i\vartheta}; \quad z^2 = \rho^2 e^{2i\vartheta}; \quad \overline{z} = \rho e^{-i\vartheta}; \quad -4 = 4e^{i\pi}$$

e quindi $$\rho^2 e^{2i\vartheta} = 4e^{i\pi} \cdot \rho e^{-i\vartheta} = 4\rho e^{i(\pi-\vartheta)}$$

da cui, come sopra, $$\rho^2 = 4\rho \quad \text{e} \quad 2\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi.$$

La forma esponenziale aiuta a ricordare le formule di De Moivre, eseguendo correttamente prodotti e potenze.

Esempio 1.10. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione nel campo complesso:

$$8z = i|z|^3\overline{z}.$$

Come nell'esempio precedente, la struttura dell'equazione suggerisce di usare la forma trigonometrica dei numeri complessi. Ponendo

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

e ricordando che i ha modulo 1 e argomento $\pi/2$, $|z|^3$ ha modulo ρ^3 e argomento 0, $\overline{z}$ ha modulo ρ e argomento $-\vartheta$, per le formule di De Moivre si ha:

$$8\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right)$$

da cui $$\begin{cases} 8\rho = \rho^4 \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\rho = 0; \rho^3 = 8, \text{ quindi } \rho = 2,$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, 1$$

quindi: $$z_1 = 0; \quad z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \quad z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

Esempio 1.11. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, e scrivere in forma algebrica tutte le soluzioni.

$$\left(\frac{z+1}{2z+i}\right)^4 = 1.$$

La struttura dell'equazione suggerisce di spezzare il procedimento in due passi: prima poniamo $w = \frac{z+1}{2z+i}$ e risolviamo l'equazione $w^4 = 1$, che dà le 4 radici quarte dell'unità:

$$w_1 = 1; \quad w_2 = -1; \quad w_3 = i; \quad w_4 = -i.$$

Ora risolviamo rispetto a z l'equazione $\frac{z+1}{2z+i} = w$ per ciascuno dei 4 valori di w trovati. Otteniamo:

$$z_j = \frac{1 - iw_j}{2w_j - 1} \quad \text{per } j = 1, 2, 3, 4.$$

Sostituendo successivamente i 4 valori di w_j ed eseguendo il calcolo algebrico otteniamo:

$$z_1 = \frac{1-i}{2-1} = 1 - i;$$

$$z_2 = \frac{1+i}{-3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i;$$

$$z_3 = \frac{2}{2i-1} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i;$$

$$z_4 = 0.$$

Si noti che il testo richiedeva di *scrivere le soluzioni in forma algebrica* per cui, ad esempio, fermarsi alla scrittura $z_3 = \frac{2}{2i-1}$ senza arrivare a $z_3 = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ non sarebbe stato sufficiente.

Esempio 1.12. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso, scrivendo tutte le soluzioni (in forma algebrica o trigonometrica) e dicendo esplicitamente quante sono:

$$z^4 + 4iz^2 + 5 = 0.$$

E' un'equazione algebrica di 4° grado in z, quindi per il teorema fondamentale dell'algebra avrà senz'altro 4 soluzioni, computate con la dovuta molteplicità.

Si tratta di un'equazione *biquadratica*, ossia un'equazione di 2° grado nell'incognita z^2. Perciò si procede in due tempi: prima si ricava z^2 applicando la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado; poi di ciascuna soluzione trovata si prendono le 2 radici quadrate.

$$z^2 = -2i + \sqrt{-9} = -2i \pm 3i = \begin{cases} i \\ -5i \end{cases}$$

Ora estraiamo le radici quadrate di ciascuno dei due valori trovati per z^2:

$$z_{1,2} = \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i);$$

$$z_{3,4} = \sqrt{-5i} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}(-1+i).$$

Le soluzioni sono queste 4.

Esercizi

Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni nel campo complesso, scrivendo in forma algebrica o trigonometrica le soluzioni e indicandone il numero:

1.63.★ $$\frac{3z+1+2i}{z+3} = \overline{z}$$

1.64.★ $$z^2 + 2\overline{z} - 2 = 0$$

1.65.★ $$2z + 4i = \overline{z}\big(1 + (\mathrm{Re}z)^2 - \mathrm{Im}z\big)$$

1.66.★ $$z^2 - 2iz - 1 + 9i = 0$$

1.67.★ $$z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$$

1.68.★ $$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

1.69.★ $$z^6 + 2z^3 - 3 = 0$$

1.70.★ $$\left|z^2\right| + 1 + 2\,z^2 = 0$$

1.71.★ $$3z + 2i + 3 = \frac{2i + 10}{1 - z}$$

1.72.★ $$z^2 + 2iz - 1 - 4i = 0$$

1.73.★ $$z|z| = 2\overline{z}$$

1.74.★ $$8(z+1)^4 + 1 + i\sqrt{3} = 0$$

1.75.★ $$(z-1)^6 = 64$$

1.76.★ $$\sqrt{2}z^4 - (1+i)\overline{z} = 0$$

1.77.★ $$|z|(3|z| - 2) - z^3 = 0$$

1.78.★ $$\left(z^3 + 3\sqrt{7}\right)\left(z^3 - 3\sqrt{7}\right) = 1$$

1.79.★ $$\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^3 = -8$$

1.80.★ $$z^4 + 4 = \left(i - \sqrt{3}\right)^2$$

1.81.★ $$\left(z - i\sqrt{3}\right)^4 + 8 - i8\sqrt{3} = 0$$

1.82. $$\left|z^4\right| + 1 - 2\,\overline{z}^2 = 0$$

1.83. $$z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$$

1.84.★ $$iz = 3|z|^2\overline{z}$$

1.85.★ $$z^2 + 2\left(\sqrt{5} + 2i\right)z + 1 + 3\sqrt{5}i = 0$$

1.86. $$|z|z^2 = -2\overline{z}$$

1.87. $$z^3 = (\overline{z})^2$$

1.88.★ $$z + 1 + i = -\frac{3i+1}{z+i-1}$$

1.89.★ $$5iz^2 + 6(1+i)z + 2 = 0$$

1.90.★ $$z^2 + 2(i-2)z + 3 + 5i = 0$$

1.91.★ $$\left(\frac{1+i}{8}\right)z^4 = -1-\sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

1.92.★ $$z^2 + i\overline{z} + \frac{1}{4} = 0$$

1.93. $$2iz^2 + 8(1+i)z + 7 = 0$$

1.94. $$z^2 + z(-1+i) - i = 0$$

1.95.★ $$z^6 + z^3(1-2i) - (1+i) = 0$$

1.96.★ $$z^2 + 4i\overline{z} + 5 = 0$$

1.97. $$4z = i|z|^2\overline{z}$$

1.98. $$z^2 + i\sqrt{3}\,z + 6 = 0$$

1.99. $$3 + iz + i = -2\overline{z}$$

1.100.★ $$(z-1)^3 = -8i$$

1.101. $$(3-2i)\overline{z} = 5i$$

1.102.★ $$z^2 + 2(1-i)z + 2\sqrt{3} = 0$$

1.103. $$\frac{z}{i} + \overline{z} = 3(z+i)$$

1.104. $$z + \frac{1}{z} = -2i$$

1.105. $$i(z+i)^3 = 1$$

1.106. $$z^5 + i\overline{z} = 0$$

1.107. $$\left(z^2+i\right)\left(z^2-i\right) + \sqrt{3}i = 0$$

1.108. $$z^7 + i = 1$$

1.109.★ $$(2+1)z^3 = 5 - 5i$$

Soluzioni § 1.2.

1.42. $-\frac{17}{4}-\frac{7}{4}i$

1.43. $-5+12i$

1.44. $-2+2i$

1.45. $-\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$

1.46. $\rho=2\sqrt{2};\ \vartheta=-\frac{\pi}{4}$

1.47. $\rho=4;\ \vartheta=\frac{4}{3}\pi$

1.48. $\rho=3;\ \vartheta=\frac{3}{2}\pi$

1.49. $\rho=6;\ \vartheta=\frac{7}{6}\pi$

1.50. $\rho=\sqrt{13};\ \vartheta=\arctan\frac{3}{2}$

1.51. $\rho=\sqrt{10};\ \vartheta=\pi-\arctan 3$

1.52. $\rho=\sqrt{13};\ \arg z=\pi+\arctan\frac{3}{2}$

1.53. $\rho=\sqrt{10}\,;\quad \arg z=-\arctan 3$

1.54. $\rho=\sqrt{3}\,;\quad \arg z=\pi-\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$

1.55. $\operatorname{Im} z=\frac{3}{2};\ |z|=\frac{\sqrt{34}}{2}.$

1.56. $\operatorname{Re} z=\frac{1}{13}\left(6+2\sqrt{3}\right);\ |z|=\sqrt{\frac{7}{13}}.$

1.57. Le radici sono in numero 5, e sono date da:

$$z=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3}{20}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3}{20}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)\right),\ k=0,1,\ldots,4.$$

1.58. Le radici sono in numero 6, e sono date da:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)\right),\ k=0,1,\ldots,5.$$

1.59. Le radici sono in numero 5, e sono date da:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

1.60. Le radici sono in numero 4, e sono date da:

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

1.61. Modulo: $\rho = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ Argomento: $\vartheta = -\frac{17}{36}\pi + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$

1.62.

$$\overline{z} = \frac{(2-i)}{(1+i)} \cdot \frac{(2+i)}{(5-3i)} = \frac{5}{8+2i} = \frac{5(8-2i)}{64+4} = \frac{20-5i}{34};$$

$$z = \frac{20+5i}{34} = \frac{10}{17} + \frac{5}{34}i.$$

1.63.

$$3z + 1 + 2i = |z|^2 + 3\overline{z}.$$

Ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$3(x+iy) + 1 + 2i = x^2 + y^2 + 3(x - iy)$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x = 1 + 3x \\ 6y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2} \end{cases}$$

e le soluzioni sono $$z_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i; \quad z_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}i.$$

1.64. Non è un'equazione algebrica per la presenza di $\overline{z}$. Ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 2(x - iy) - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 2 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

$$2y(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ oppure } y = 0.$$

Se $x = 1$, allora $\qquad -y^2 + 1 = 0$, quindi $y = \pm 1$.

Se $y = 0$, allora $\qquad x^2 + 2x - 2 = 0$, quindi $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Le soluzioni quindi sono:

$$z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 - i; \quad z_3 = -1 + \sqrt{3}; \quad z_4 = -1 - \sqrt{3}.$$

1.65. Poniamo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

$$2x + 2iy + 4i = (x - iy)\left(1 + x^2 - y\right)$$

equivalente al sistema: $\qquad \begin{cases} 2x = x(1 + x^2 - y) \\ 2y + 4 = -y(1 + x^2 - y) \end{cases}$

La prima equazione dà: $\qquad x = 0$ oppure $x^2 - y = 1$.

Per $x = 0$ la seconda equazione dà

$$y^2 - 3y - 4 = 0, \text{ cioè } y = -1, y = 4$$

e quindi si trovano le soluzioni $z_1 = -i$; $z_2 = 4i$. Per $x^2 - y = 1$ la seconda equazione dà

$$2y + 4 = \; - 2y, \text{ cioè } y = -1$$

che, ancora per $x^2 - y = 1$, dà $\qquad x^2 = 0$, cioè $x = 0$

e quindi si ritrova la soluzione $z_1 = -i$. In definitiva, le soluzioni sono:

$$z_1 = -i; \quad z_2 = 4i.$$

1.66. E' un'equazione algebrica di secondo grado:

$$z = i + \sqrt{-1 + 1 - 9i} = i + 3\sqrt{-i}.$$

Ora calcoliamo nel campo complesso:

$$\sqrt{-i} = \pm \frac{1 - i}{\sqrt{2}}.$$

Quindi: $\qquad z = i + 3 \cdot \left(\pm \dfrac{1 - i}{\sqrt{2}} \right) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right) \end{cases}$

1.67. Le soluzioni sono 2 (equazione algebrica di 2° grado) e sono date da:

$$z = -i \pm \sqrt{-1+\sqrt{3}i}.$$

Calcoliamo a parte le radici complesse $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$. Se $w = -1+\sqrt{3}i$,

$$|w| = 2, \arg w = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\sqrt{w} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Quindi $$z = -i \pm \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right).$$

1.68. E' un'equazione biquadratica (v. Esempio 1.12).

$$z^2 = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) = \pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_{3,4} = \sqrt{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right) + i\sin\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right) = \pm\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

quindi le 4 soluzioni sono:

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.69. Le soluzioni sono in numero 6 (equazione algebrica di 6° grado). Osserviamo che ponendo $t = z^3$ l'equazione si riscrive come equazione di 2° grado in t:

$$t^2+2t-3=0$$

che dà $t=1, t=-3$, ossia $z^3=1,\ z^3=-3$. Quindi risolviamo estraendo le radici:

$$z = \sqrt[3]{1},\ z = \sqrt[3]{-3}$$

Tre soluzioni sono date da $\sqrt[3]{1}$, e sono: $1,\ -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
tre soluzioni sono date da $\sqrt[3]{-3}$, e sono: $-\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.70. Cerchiamo soluzioni nella forma $z = x + iy$.

$$x^2 + y^2 + 1 + 2(x + iy)^2 = 0$$

$$\left(x^2 + y^2 + 2\left(x^2 - y^2\right) + 1\right) + 4ixy = 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ o } y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1;\ y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 0, \text{ mai.}$$

Perciò le soluzioni sono solo $x = 0$ e $y = \pm 1$, ossia: $z = \pm i$.

1.71.

$$(3z + 2i + 3)(1 - z) = 2i + 10$$

$$-3z^2 + z(3 - 2i - 3) + (2i + 3) = 2i + 10$$

$$3z^2 + 2iz + 7 = 0$$

$$z = \frac{-i + \sqrt{-22}}{3} = \frac{-i \pm i\sqrt{22}}{3} = i\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{22}}{3}\right).$$

1.72. E' un'equazione algebrica di secondo grado:

$$z = -i + \sqrt{-1 + 1 + 4i} = -i + 2\sqrt{i}.$$

Ora calcoliamo nel campo complesso:

$$\sqrt{i} = \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}.$$

Quindi:
$$z = -i + 2 \cdot \left(\pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} \sqrt{2} + i\left(\sqrt{2} - 1\right) \\ -\sqrt{2} + i\left(-\sqrt{2} - 1\right) \end{cases}$$

1.73. Cerchiamo soluzioni nella forma $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$.

$$\rho^2(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = 2\rho(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))$$

$$\begin{cases} \rho^2 = 2\rho \\ \vartheta = -\vartheta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0, \rho = 2 \\ \vartheta = k\pi \end{cases}$$

$$z = 0, 2, -2 \ \text{(3 soluzioni).}$$

1.74. $$(z+1)^4=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$$z+1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right), \text{ per } k=0,1,2,3.$$

$$z_{1,2}=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); z_{3,4}=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

$$z_{1,2}=\left(-1\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\pm i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};\ z_{3,4}=\left(-1\mp\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}i.$$

Le soluzioni sono 4.

1.75. $$z-1=\sqrt[6]{64};\quad z=1+2\cdot\sqrt[6]{1}.$$

$$\sqrt[6]{1}=w_k=\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \text{ per } k=0,1,2,3,4,5.$$

Esplicitamente, le radici seste di 1 sono:

$$w_0=1;\quad w_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\quad w_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$w_3=-1;\quad w_4=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\quad w_5=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

e le soluzioni dell'equazione di partenza sono $z_k=1+2w_k$ per $k=0,1,2,3,4,5$, ossia, esplicitamente:

$$z_0=3; z_1=2+i\sqrt{3}; z_2=i\sqrt{3}; z_3=-1; z_4=-i\sqrt{3}; z_5=2-i\sqrt{3}.$$

1.76. $$z^4=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\bar{z}$$

Posto $z=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, poiché $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$, $i$si ha:

$$\rho^4(\cos(4\vartheta)+i\sin(4\vartheta))=\rho\left(\cos\left(-\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\vartheta = -\vartheta + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 0, \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \text{ per } k = 0,1,2,3,4. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono 6, e cioè:

$$z = 0;\ z = \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \text{ per } k = 0,1,2,3,4.$$

1.77. $$|z|(3|z| - 2) = z^3$$

Ponendo $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ si ha:

$$\rho(3\rho - 2) = \rho^3(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta)).$$

Se $\rho = 0$ si ha la soluzione $z_0 = 0;$

altrimenti si semplifica per ρ e si ha:

$$3\rho - 2 = \rho^2(\cos(3\vartheta) + i\sin(3\vartheta)).$$

Ora bisogna distinguere due casi.

Se $3\rho - 2 \geq 0$, cioè $\rho \geq 2/3$, allora il primo membro è un numero di modulo $3\rho - 2$ e argomento 0, perciò risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 3\rho - 2 = \rho^2 \\ 3\vartheta = 2k\pi \end{cases}$$

e quindi $$\begin{cases} \rho = 1; \rho = 2 & \text{accettabili entrambi perché } \geq 2/3 \\ \vartheta = 2k\frac{\pi}{3} & \text{per } k = 0,1,2 \end{cases}$$

che dà le soluzioni: $$z_1 = 1; z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z_4 = 2; z_5 = -1 + \sqrt{3}i; z_6 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Se invece $3\rho - 2 < 0$, cioè $\rho < 2/3$, allora il primo membro è un numero di modulo $2 - 3\rho$ e argomento π, perciò risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 2 - 3\rho = \rho^2 \\ 3\vartheta = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \rho = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2} & \text{di cui è accettabile solo } \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \text{ perché positiva e } < 2/3 \\ \vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3} & \text{cioè } \vartheta = \frac{\pi}{3}; \vartheta = \pi; \vartheta = \frac{5}{3}\pi \end{cases}$$

che dà le soluzioni:

$$z_7 = \left(-3+\sqrt{17}\right) + i\left(-3+\sqrt{17}\right)\sqrt{3};\, z_8 = \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right);$$

$$z_9 = \left(-3+\sqrt{17}\right) + i\left(3-\sqrt{17}\right)\sqrt{3}.$$

1.78. $$z^6 - 63 = 1; \quad z = \sqrt[6]{64} = 2 \cdot \sqrt[6]{1}.$$

Calcoliamo ora: $$\sqrt[6]{1} = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right), k = 0,1,2,3,4,5.$$

$$z = 2\left(\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_0 = 2; z_1 = 1+\sqrt{3}i; z_2 = -1+\sqrt{3}i;$$

$$z_3 = -2; z_4 = -1-\sqrt{3}i; z_5 = 1-\sqrt{3}i.$$

1.79. Sia $w = \frac{z+1}{z-2}$, risolviamo $w^3 = -8$;

$$w = \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1+\sqrt{3}i \\ 1-\sqrt{3}i \\ -2 \end{cases}$$

Ora risolvendo l'equazione $w = \frac{z+1}{z-2}$ rispetto a z si ha:

$$z = \frac{2w+1}{w-1} = \begin{cases} \frac{3+2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i} & = 2-\sqrt{3}i \\ \frac{3-2\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} & = 2+\sqrt{3}i \\ \frac{-3}{-3} & = 1 \end{cases}$$

1.80. $$z^4 + 4 = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$z^4 = -2 - 2i\sqrt{3} \equiv w$$

$$w = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); |w| = 4; \arg w = \frac{4}{3}\pi.$$

$$z = \sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right)\right), \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$z_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad z_4 = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1.81.
$$z - i\sqrt{3} = \sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

Poiché $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$,

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$z = i\sqrt{3} + 2\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \begin{cases} \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right) \\ -1 + 2\sqrt{3}i \\ -\sqrt{3} + \left(\sqrt{3} - 1\right)i \\ 1 \end{cases}$$

1.82. Le soluzioni sono in numero 2 e sono: ± 1

1.83. Le soluzioni sono 4 e sono: $\pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, $\pm\sqrt{3}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

1.84. Posto $z = \rho e^{i\vartheta}$, si ha:

$$\rho e^{i\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)} = 3\rho^3 e^{-i\vartheta}$$

da cui $\begin{cases} \rho = 3\rho^3 \\ \vartheta + \frac{\pi}{2} = -\vartheta + 2k\pi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 0, \rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ $k = 0, 1.$

$$z = 0; z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} \quad k = 0, 1, \text{ ossia:}$$

$$z = 0;\ z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + i\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ (3 soluzioni).}$$

1.85. Equazione algebrica di secondo grado:

$$z = -\left(\sqrt{5} + 2i\right) + \sqrt{\left(\sqrt{5} + 2i\right)^2 - \left(1 + 3\sqrt{5}i\right)} =$$

$$= -\left(\sqrt{5} + 2i\right) + \sqrt{\sqrt{5}i} = -\left(\sqrt{5} + 2i\right) + \sqrt[4]{5}\sqrt{i}.$$

Calcoliamo ora: $$\sqrt{i} = \pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

e quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$z = -\left(\sqrt{5} + 2i\right) \pm \sqrt[4]{5}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} \left(-\sqrt{5} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right) + i\left(-2 + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(-\sqrt{5} - \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right) + i\left(-2 - \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

1.86. Le soluzioni sono in numero 4 e sono:

$$z = 0;\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2};\ z = -\sqrt{2};\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

1.87. Le soluzioni sono in numero 5 e sono:

$$z = 0; z = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

1.88. $$(z + 1 + i)(z + i - 1) + (3i + 1) = 0$$

$$(z + i)^2 - 1 + 3i + 1 = 0$$

$$z^2 + 2iz - 1 + 3i = 0$$

$$z = -i + \sqrt{-3i} = -i \pm \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) =$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) \end{cases}$$

1.89. $$z = \frac{-3(1+i) + \sqrt{9 \cdot 2i - 10i}}{5i} = \frac{-3(1+i) + \sqrt{8i}}{5i} =$$

$$= \frac{-3(1+i) \pm 2(1+i)}{5i} = \begin{cases} -\frac{(1+i)}{5i} = -\frac{1}{5} + \frac{i}{5} \\ -\frac{5(1+i)}{5i} = -1 + i \end{cases}$$

1.90. Equazione algebrica di secondo grado:

$$z = (2-i) + \sqrt{(2-i)^2 - (3+5i)} = 2 - i + \sqrt{-9i} = 2 - i + 3\sqrt{-i}.$$

Calcoliamo ora: $$\sqrt{-i} = \pm\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

e quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$z = 2 - i \pm 3\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} \left(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right) \\ \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + i\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right) \end{cases}$$

1.91. $$z^4 = w = \frac{8(1-i)}{2}\left[\left(-1-\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 4\left(-2 + 2\sqrt{3}i\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Ora $z = \sqrt[4]{w}$; poiché $|w| = 16$ e $\arg w = \frac{2}{3}\pi$,

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Esplicitamente, $$z = \pm\left(\sqrt{3} + i\right);\ z = \pm\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$$

1.92. Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(x+iy)^2 + i(x-iy) + \frac{1}{4} = 0;$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + ix + y + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda, $x = 0$ o $y = -\frac{1}{2}$. Se $x = 0$, dalla prima si ha:

$$y^2 - y - \frac{1}{4} = 0; \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Se $y = -\dfrac{1}{2}$, dalla prima si ha: $\quad x^2 - \dfrac{1}{2} = 0; \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Le soluzioni quindi sono: $\quad z = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2} i; \quad z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} i$

e in tutto sono 4.

1.93. Le soluzioni sono in numero 2 e sono:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}; \quad z = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} i$$

1.94. Le soluzioni sono in numero 2 e sono:

$$z_1 = 1, \; z_2 = -i$$

1.95.

$$z^3 = \frac{-(1-2i) + \sqrt{(1-2i)^2 + 4(1+i)}}{2} = \frac{2i - 1 \pm 1}{2} = \begin{cases} i \\ i - 1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora calcolare: $\quad z = \sqrt[3]{i}; \; z = \sqrt[3]{i-1}.$

$$|i| = 1, \arg i = \frac{\pi}{2} \text{ perciò } \sqrt[3]{i} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

per $k = 0, 1, 2$.

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}; \quad z_3 = -i.$$

$$|i-1| = \sqrt{2}, \arg(i-1) = \frac{3}{4}\pi; \ z = \sqrt[3]{i-1} \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Quindi:
$$z_4 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{i}{\sqrt[3]{2}}$$

$$z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right); \ z_6 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right).$$

Le soluzioni sono i sei numeri z_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ scritti sopra.

1.96.
$$z = x + iy;$$

$$(x+iy)^2 + 4i(x-iy) + 5 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4y + 5 = 0 \\ 2xy + 4x = 0 \end{cases}$$

$$x(y+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } y = -2;$$

$$\text{Se } x = 0, \ -y^2 + 4y + 5 = 0 \text{ dà: } \ y = -1; y = 5;$$

$$\text{Se } y = -2, x^2 - 4 - 8 + 5 = 0 \text{ dà: } \ x = \pm\sqrt{7}.$$

Quindi le soluzioni sono 4, e cioè:

$$z_1 = -i; \quad z_2 = 5i; \quad z_3 = \sqrt{7} - 2i; \quad z_4 = -\sqrt{7} - 2i.$$

1.97. Le soluzioni sono in numero 3 e sono:

$$z = 0; z = \pm\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\right).$$

1.98. Le soluzioni sono in numero 2 e sono:

$$z = i\sqrt{3}; \ z = -2i\sqrt{3}.$$

1.99. La soluzione è unica: $z = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i.$

1.100. Sia $w = -8i$. $|w| = 8$; $\arg w = \frac{3}{2}\pi$

$$z - 1 = \sqrt[3]{w} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), k = 0, 1, 2.$$

Per $k = 0$: $$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2i;\ z = 1 + 2i;$$

per $k = 1$: $$2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i;\ z = \left(1 - \sqrt{3}\right) - i;$$

per $k = 2$: $$2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i;\ z = \left(1 + \sqrt{3}\right) - i.$$

1.101. La soluzione è unica: $z = -\frac{10}{13} - \frac{15}{13}i$

1.102. $$z = -1 + i + \sqrt{-2i - 2\sqrt{3}}$$

$$\text{Sia } w = -2i - 2\sqrt{3};\ |w| = 4;\ \arg w = \frac{7}{6}\pi;$$

$$\sqrt{w} = \pm 2\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right)$$

$$z = -1 + i \pm 2\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right) =$$

$$\begin{cases} -1 + 2\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\left(1 + 2\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right) \\ -1 - 2\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\left(1 - 2\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right) \end{cases}$$

N.B. Usando le formule di bisezione, si possono calcolare (non era richiesto) i valori espliciti:

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}};\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},\text{ perciò:}$$

$$z=-1+\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\left(1+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right);$$

$$z=-1-\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\left(1-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right).$$

1.103. La soluzione è unica: $z=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i.$

1.104. Le soluzioni sono due:

$$z=i\left(-1-\sqrt{2}\right);z=i\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

1.105. Le soluzioni sono tre:

$$z_1=0;\quad z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i;\quad z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

1.106. Le soluzioni sono:

$$z=0;z_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right)$$

per $k=0,1,2,3,4,5$, e in tutto sono 7.

1.107. Le soluzioni sono 4:

$$z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right)\right),\quad k=0,1,2,3.$$

1.108. Le soluzioni sono 7 in tutto:

$$z=\sqrt[14]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right),\quad k=0,1,...,6.$$

1.109. Le soluzioni sono 3:

$$z^3=\frac{5(1-i)}{2+i}=\frac{5(1-i)(2-i)}{5}=1-3i.$$

$$z=\sqrt[3]{1-3i}=\sqrt[6]{10}\left(\cos\left(\frac{\arctan(-3)+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\left(\frac{\arctan(-3)+2k\pi}{3}\right)\right)\right),$$

per $k=0,1,2.$

Cap. 2. Funzioni di una variabile

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 2.

2.1. Grafici delle funzioni elementari

I prossimi esercizi mettono alla prova la conoscenza dei *grafici delle funzioni elementari* (potenze a esponente intero, razionale o irrazionale, esponenziali e logaritmi di base qualsiasi, funzioni trigonometriche elementari e loro inverse, funzioni iperboliche e loro inverse) che lo studente deve semplicemente aver studiato e conoscere (v. [BPS1], cap.2, §3). Per questo motivo non si presentano esempi svolti.

Esercizi

Tracciare (senza calcoli!) il grafico qualitativo delle seguenti funzioni elementari. Indicare chiaramente eventuali punti a tangente verticale o orizzontale, punti angolosi, eventuali asintoti, e riportare sugli assi il valore numerico di eventuali punti notevoli del grafico:

2.1. $x^{4/5}$

2.2. $\log_{\frac{1}{2}} x$

2.3. $\mathrm{Ch}x$

2.4. $\arcsin x$

2.5. $x^{3/5}$

2.6. e^{-x}

2.7. $x^{-1/3}$

2.8. $\arctan x$

2.9. $x^{-4/3}$

2.10. $\log|x|$

2.11. $\mathrm{cotg}\, x$

2.12 $x^{8/3}$

2.13. $\tan x$

2.14. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2.15. $x^{5/2}$

2.16. $\mathrm{Sh}x$

2.17. 3^x

2.18. $|x|$

2.19. $x^{-1/2}$

2.20. $\arccos x$

2.21. $\log_2 x$

2.22. $x^{2/5}$

2.23. $e^{-|x|}$

2.24. $x^{3/4}$

2.25. $\mathrm{Th}x$;

2.26. $x^{-2/3}$

2.27. $\mathrm{mant}x$ (mantissa)

2.28. $[x]$ (parte intera)

2.29. $x^{5/4}$

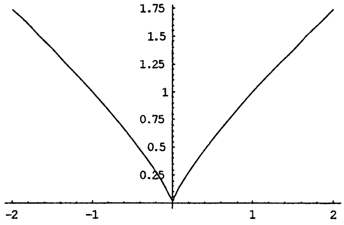
2.30. $\mathrm{SettCh}x$

2.31. $e^{|x|}$

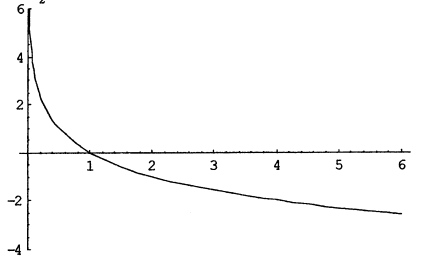
2.32. $x^{7/3}$

Soluzioni § 2.1.

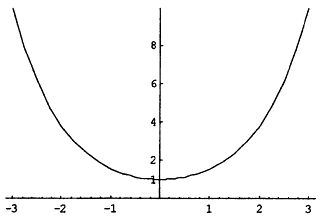
2.1. $x^{4/5}$



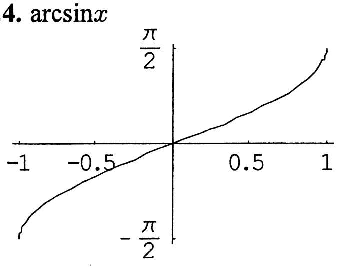
2.2. $\log_{\frac{1}{2}} x$



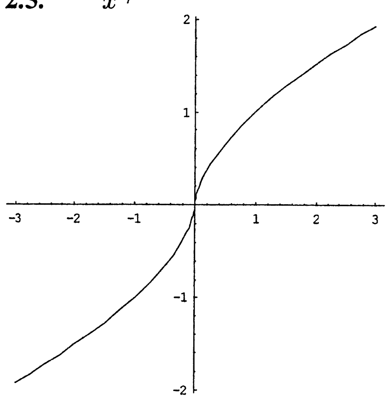
2.3. Chx



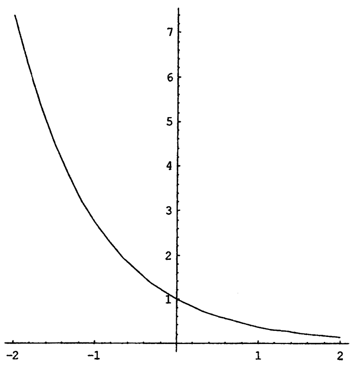
2.4. arcsin$x$



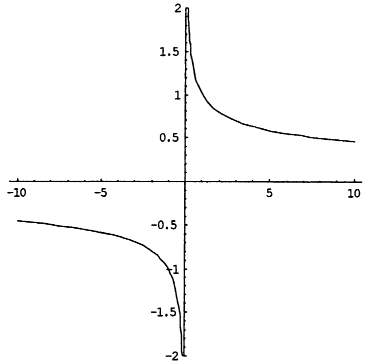
2.5. $x^{3/5}$



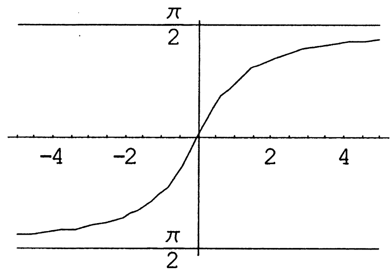
2.6. e^{-x}



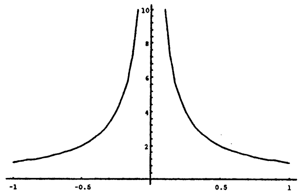
2.7. $x^{-1/3}$



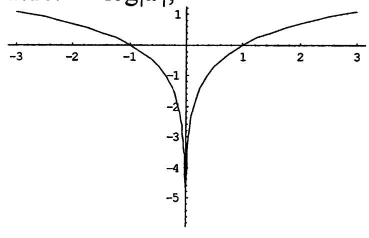
2.8. $\arctan x$



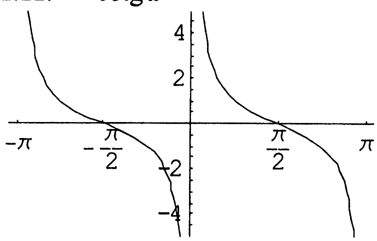
2.9. $x^{-4/3}$



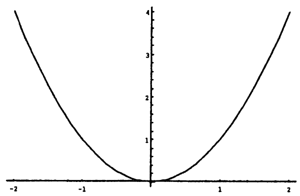
2.10. $\log|x|$;



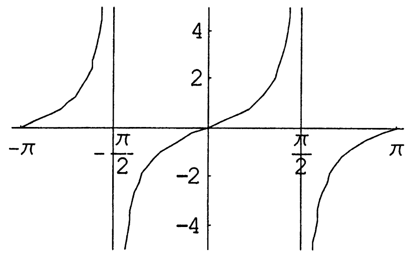
2.11. $\operatorname{cotg} x$



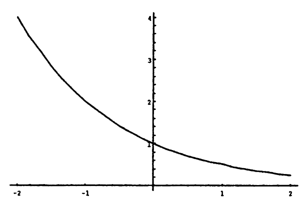
2.12. $x^{8/3}$



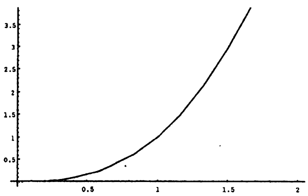
2.13. $\tan x$;



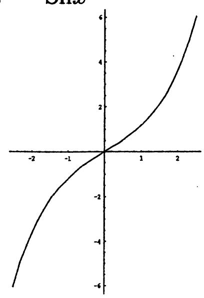
2.14. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



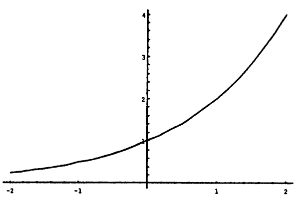
2.15. $x^{5/2}$



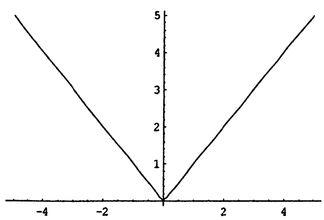
2.16. $\mathrm{Sh}x$



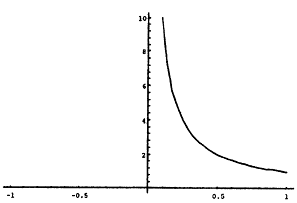
2.17. 3^x



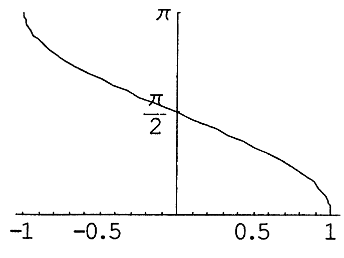
2.18. $|x|$



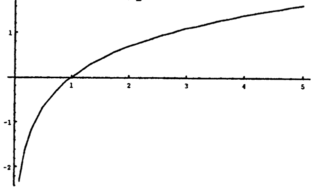
2.19. $x^{-1/2}$



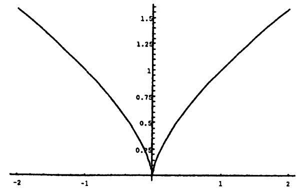
2.20. $\arccos x$



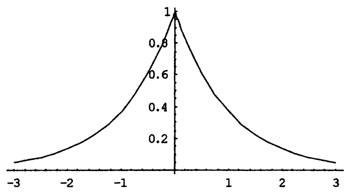
2.21. $\log_2 x$



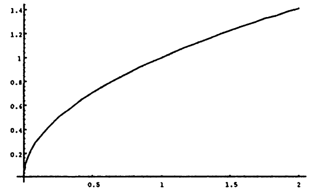
2.22. $x^{2/5}$



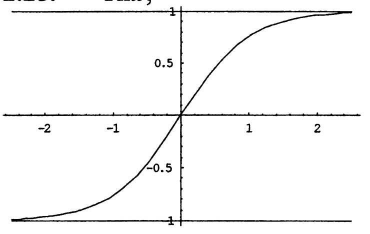
2.23. $e^{-|x|}$



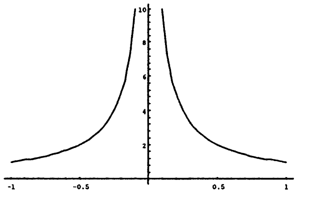
2.24. $x^{3/4}$



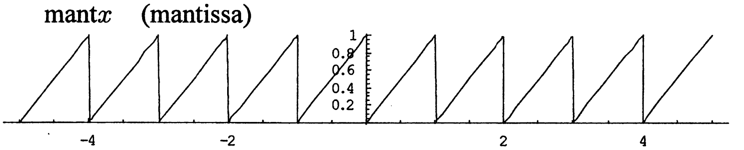
2.25. Thx;



2.26. $x^{-2/3}$

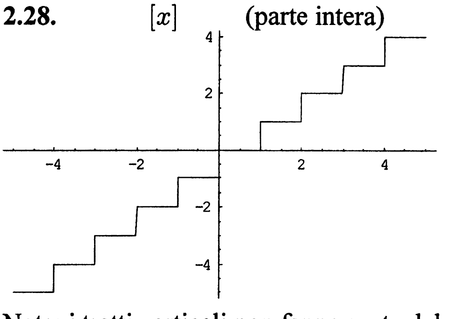


2.27. mant$x$ (mantissa)



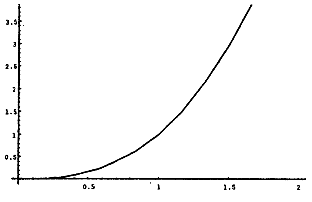
Nota: i tratti verticali non fanno parte del grafico della funzione.

2.28. $[x]$ (parte intera)

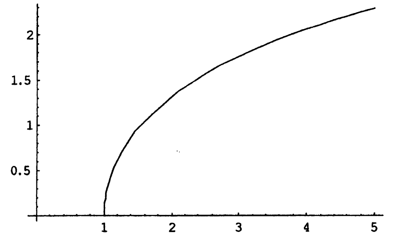


Nota: i tratti verticali non fanno parte del grafico della funzione.

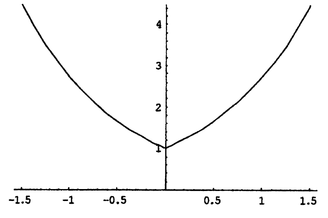
2.29. $x^{5/4}$



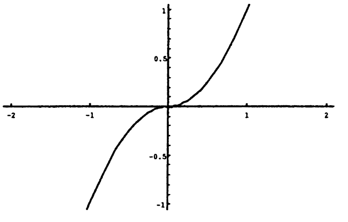
2.30. $\mathrm{SettCh}x$



2.31. $e^{|x|}$



2.32. $x^{7/3}$



2.2. Funzioni composte e proprietà elementari delle funzioni

I prossimi esempi ed esercizi riguardano anzitutto i concetti di *insieme di definizione* di una funzione, *funzione simmetrica* (*pari* o *dispari*), *periodica*, *monotona*, *invertibile*. A partire dalle proprietà delle funzioni elementari e dalle definizioni di questi concetti (funzione pari o dispari, ecc.) si chiede di rispondere a certe domande ragionando sulla composizione (o sulla somma o il prodotto) di funzioni. L'operazione logica fondamentale di *composizione di funzioni* è costantemente sullo sfondo di questi esempi. Gli esercizi in cui si chiede di *scrivere esplicitamente la funzione inversa* di una funzione assegnata (di cui si sa già che è invertibile!) si collocano invece sul piano dei *prerequisiti di matematica elementare*, in quanto richiedono di risolvere equazioni di vario tipo.

Esempi svolti

Esempio 2.1. Insieme di definizione. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni (ossia il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la funzione è ben definita):

$$\text{(a)}\ \frac{\log_2(3+x)}{\sqrt[3]{x+2}};\quad \text{(b)}\ \sqrt{2^x-8}\cdot\log|x-4|;\quad \text{(c)}\ \tan(\log x);\quad \text{(d)}\ \log(\tan x).$$

(a) La funzione $\log_2 t$ è definita per $t>0$, quindi $\log_2(3+x)$ è definito per $3+x>0$, cioè $x>-3$.

La funzione $\sqrt[3]{t}$ è sempre definita, quindi anche $\sqrt[3]{x+2}$ è sempre definita, tuttavia è a denominatore, quindi non deve annullarsi. Imponiamo quindi $\sqrt[3]{x+2}\neq 0$, cioè $x\neq -2$. In definitiva l'insieme di definizione è:

$$(-3,-2)\cup(-2,+\infty).$$

(b) Il radicando della radice *quadrata* dev'essere ≥ 0, quindi

$$2^x-8\geq 0$$

$$2^x\geq 8; x\geq \log_2 8=3.$$

L'argomento del logaritmo dev'essere positivo; poiché l'argomento è $|x-4|$, che è sempre ≥ 0, è sufficiente chiedere che sia

$$|x-4|\neq 0, x\neq 4.$$

In definitiva,

$$(3,4) \cup (4,+\infty).$$

(c) L'argomento del logaritmo dev'essere positivo, quindi $x > 0$. L'argomento della tangente dev'essere $\neq k\pi/2$, quindi

$$\log x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$x \neq e^{k\pi/2} \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

In definitiva:

$$x > 0 \text{ e } x \neq e^{k\pi/2} \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

(d) L'argomento della tangente dev'essere $\neq k\pi/2$, quindi

$$x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

L'argomento del logaritmo dev'essere positivo, quindi

$$\tan x > 0$$

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}.$$

L'ultima condizione ingloba già quella $x \neq k\frac{\pi}{2}$ e quindi dà l'insieme cercato.

Si confrontino gli esempi (c) e (d): il diverso ordine in cui sono composte tra loro le funzioni log e tan porta a due funzioni con insiemi di definizione diversi.

Esempio 2.2. Funzioni pari o dispari. Dire se le seguenti funzioni sono pari, dispari, o nessuna delle due cose:

$$(a) \ \ \frac{x}{1+x^2}; \quad (b) \ \ x\tan^3 x; \quad (c) \ \ x + 2x^2;$$

$$(d) \ \ 2^{-x^2}; \quad (e) \ \ \sin(x^3); \quad (f) \ \ 3^{x^3}.$$

(a) Per applicare la definizione di funzione pari o dispari, calcoliamo

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x),$$

quindi f è dispari. Oppure, più schematicamente: il numeratore è dispari; il denominatore è pari; *il quoziente (o prodotto) di una funzione dispari e una pari è dispari (regola dei segni)*, quindi la funzione è dispari.

(b) Ragionando come sopra,

$$f(-x) = (-x)[\tan(-x)]^3 = -x[-\tan x]^3 = -x \cdot \left(-\tan^3 x\right) = x\tan^3 x = f(x),$$

perciò f è pari. Oppure, più schematicamente: $\tan x$ è dispari, una sua potenza a esponente dispari è dispari, quindi $\tan^3 x$ è dispari; la funzione x è dispari, il prodotto di due funzioni dispari è pari (regola dei segni), quindi f è pari.

(c)
$$f(-x) = -x + 2x^2,$$

che non è né $f(x)$ né $-f(x)$, quindi f non è né pari né dispari. Più schematicamente: *la somma di una funzione pari e una dispari in generale non è né pari né dispari.*

(d)
$$f(-x) = 2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2} = f(x),$$

quindi f è pari. Schematicamente: La funzione x^2 (e quindi $-x^2$) è pari; anche se $g(t) = 2^t$ non è né pari né dispari, poiché la composizione di una funzione qualsiasi con una funzione pari è pari, f è pari.

(e)
$$f(-x) = \sin\left[(-x)^3\right] = \sin\left(-x^3\right) = -\sin\left(x^3\right) = -f(x),$$

quindi f è dispari. Schematicamente: x^3 è dispari, $\sin t$ è dispari, la composizione di due funzioni dispari è dispari.

(f)
$$f(-x) = 3^{(-x)^3} = 3^{-x^3}$$

che non è né $f(x)$ né $-f(x)$, quindi f non è né pari né dispari. Più schematicamente: x^3 è dispari ma $g(t) = 3^t$ non è né pari né dispari; la composta di una funzione né pari né dispari con una dispari in generale non è né pari né dispari.

Esempio 2.3. Periodicità di una funzione. Dire se la seguente funzione è periodica o no, e in caso affermativo qual è il periodo:

$$(a)\ \cos 3x; \quad (b)\ e^{\sin^2 x}; \quad (c)\ \sin 4x - 5\cos 6x; \quad (d)\ \sin(2x)\cdot\cos(\pi x)$$

(a) Poiché $\cos x$ è 2π-periodica, $\cos 3x$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{3}$. In generale, per ogni $\omega > 0$,

$$\text{se } f(x) \text{ ha periodo } T, \text{ allora } f(\omega x) \text{ ha periodo } \frac{T}{\omega},$$

come si vede dalle uguaglianze:

$$f\left(\omega\left(x+\frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x).$$

(*b*) Poiché $\sin^2 x$ è π-periodica, lo stesso vale per la composta $e^{\sin^2 x}$.

(*c*) Poiché $\sin 4x$ ha periodo $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e $-5\cos 6x$ ha periodo $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, la funzione $\sin 4x - 5\cos 6x$ ha per periodo il minimo comun multiplo (reale) tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$, che è π. In altre parole: π è il minimo numero reale positivo per cui si ha:

$$\pi = n\frac{\pi}{2} = m\frac{\pi}{3}$$

per opportuni interi positivi n, m (in questo caso, $n = 2, m = 3$).

(*d*) Poiché $\sin 2x$ ha periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$ e $\cos \pi x$ ha periodo $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, la funzione $\sin(2x) \cdot \cos(\pi x)$ dovrebbe avere per periodo il minimo comun multiplo (reale) tra π e 2, *che però non esiste*, in quanto π è irrazionale. Dunque la funzione *non è periodica.*

Esempio 2.4. Monotonia di una funzione. Dire se la seguente funzione è monotona in tutto il suo insieme di definizione (specificando se crescente o decrescente) oppure no:

$$(a)\ \ 2^{3x+x^3}; \quad (b)\ \ \log_{1/2}(1+4x); \quad (c)\ \ \arctan(1+2^{-x});$$

$$(d)\ \ \frac{1}{1+x^3}; \quad (e)\ \ \frac{1}{1+x^2}; \quad (f)\ \ \frac{1}{1+e^x}$$

Si noti come la risposta alla domanda viene data in ciascun esempio senza disegnare alcun grafico o "studiare" la funzione sistematicamente, ma semplicemente ragionando sulla somma e composizione di funzioni monotone, e sulla definizione di funzione monotona.

(*a*) Le funzioni $3x$ e x^3 sono ciascuna crescente in $\mathbb{R}$, quindi lo è anche la loro somma, $g(x) = 3x + x^3$. Anche la funzione $f(t) = 2^t$ è crescente in $\mathbb{R}$, per composizione di funzioni crescenti la funzione 2^{3x+x^3} è crescente, in tutto $\mathbb{R}$.

L'ultimo passaggio si basa sulla seguente osservazione generale:

$$\text{se } f \text{ e } g \text{ sono crescenti, anche } f \circ g \text{ lo è.}$$

Infatti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)).$$

(b) La funzione $f(x) = 1 + 4x$ è crescente in $\mathbb{R}$, la funzione $g(t) = \log_{1/2}t$ è decrescente nel suo dominio di definizione $t > 0$, per composizione la funzione $g(f(x)) = \log_{1/2}(1 + 4x)$ è decrescente nel suo dominio di definizione, $x > -1/4$.

L'ultimo passaggio si basa sulla seguente osservazione generale:

se g è crescente e f decrescente, allora $f \circ g$ è decrescente.

Infatti:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)).$$

La stessa conclusione naturalmente vale se g è decrescente e f crescente.

(c) $g(x) = 1 + 2^{-x}$ è decrescente in $\mathbb{R}$, $f(t) = \arctan t$ è crescente, per composizione $f(g(x)) = \arctan(1 + 2^{-x})$ è decrescente.

(d) La funzione $1 + x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$, la funzione $f(t) = 1/t$ è decrescente per $t > 0$ e per $t < 0$ (separatamente), *ma non è decrescente globalmente in* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (si pensi al suo grafico: ad esempio, $-1 < 1$ e $f(-1) < f(1)$). Poiché $1 + x^3 > 0$ per $x > -1$, ne segue che $1/(1 + x^3)$ è decrescente per $x > -1$ e per $x < -1$ separatamente, ma non è decrescente in tutto il suo insieme di definizione, che è $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(e) La funzione $g(x) = 1 + x^2$ è crescente per $x \geq 0$ e decrescente per $x \leq 0$, ed è sempre positiva. La funzione $f(t) = 1/t$ è decrescente per $t > 0$. Ne segue che $1/(1 + x^2)$ è decrescente per $x \geq 0$ e crescente per $x \leq 0$. (Si confronti con l'esempio precedente).

(f) La funzione $g(x) = 1 + e^x$ è crescente in tutto $\mathbb{R}$ ed è positiva, la funzione $g(t) = 1/t$ è decrescente per $t > 0$, quindi la composta $g(f(x)) = 1/(1 + e^x)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$. (Si confronti con i due esercizi precedenti).

Esempio 2.5. Funzione inversa. Scrivere esplicitamente la funzione inversa della seguente funzione, precisando il dominio della funzione inversa:

$$(a) \quad f(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}; \quad (b) \quad f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(*a*) Poniamo

$$y = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

e risolviamo l'equazione rispetto ad x; per questo ricaviamo prima $\sqrt{x}$ vedendo l'equazione come equazione di primo grado in $\sqrt{x}$:

$$(2 - \sqrt{x})y = 3 + 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}(2 + y) = 2y - 3$$

$$\sqrt{x} = \frac{2y - 3}{2 + y}.$$

Ora per ricavare x dobbiamo elevare ambo i membri al quadrato, il che però è lecito solo se il secondo membro è ≥ 0. Imponendo la condizione $\frac{2y-3}{2+y} \geq 0$, cioè $y < -2$ o $y \geq 3/2$ si ricava

$$x = \left(\frac{2y - 3}{2 + y}\right)^2,$$

che è la funzione inversa, definita in

$$(-\infty, -2) \cup [3/2, +\infty).$$

(*b*) La funzione f è definita per $x \neq 1$ ed è positiva. Scriviamo:

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

e risolviamo rispetto ad x, calcolando anzitutto

$$\log y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

e poi risolvendo l'equazione di primo grado in x:

$$x = \frac{\log y + 1}{\log y - 1}$$

definita per $y > 0, y \neq e$.

Esercizi

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

2.33.★ $\log\left(\frac{2+x}{x-3}\right)$

2.34. $e^{\frac{3+x}{x^2-1}}$

2.35.★ $\sqrt{\frac{3-x^2}{\sqrt[3]{x}-1}}$

2.36.★ $\arcsin\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$

2.37. $\log(\log x)$

2.38. $\frac{\log(3-x)}{x\log x}$

2.39. $\frac{|x+5|}{\sqrt{|x^2+2x-3|}}$

2.40. $\sin\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$

Funzioni pari e dispari

2.41★ Si completino le seguenti tabelle, relative alla somma, il prodotto o la composizione di funzioni pari o dispari. In ogni casella scrivere "pari", "dispari" o "né pari né dispari":

$f+g$	f pari	f dispari
g pari		
g dispari		

$f\cdot g$	f pari	f dispari
g pari		
g dispari		

$f\circ g$	f pari	f dispari
g pari		
g dispari		

Dire se la seguente funzione è pari, dispari o nessuna delle due:

2.42. $x\sin x$

2.43. $x\cos x$

2.44. $x+\sin x$

2.45. $x+\cos x$

2.46. $2^{|x|}$

2.47. $\sin(x^2)$

2.48. $\frac{1+x^2}{2+x^4}$

2.49. $\frac{1+x^3}{2+x}$

2.50. xe^x

2.51. $\frac{x\sin x}{1+x^2}$

2.52. $\cos(x^3)$

2.53. $\frac{x}{1+x^2}$

2.54. $x\text{Sh}x$

2.55. $x\text{Ch}x$

Dire se la seguente funzione è periodica o no, e in caso affermativo qual è il periodo:

2.56. $\sin 2x$

2.57. $\cos\frac{x}{2}$

2.58. $\sin 6x + 2\cos 4x$

2.59. $e^{\sin x}$

2.60. $\sin(e^x)$

2.61. $2\sin 3x$

2.62. $\sqrt[3]{\sin x}$

2.63. $\sin(3x^2)$

2.64. $\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$

2.65. $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

2.66. $\sin 3x + 2\cos^2 x$

2.67. $\cos\frac{x}{3} + 2\sin\frac{x}{2}$

2.68. $\tan 2x$

Monotonia delle funzioni

2.69.★ Si completino le seguenti tabelle, relative alla somma o la composizione di funzioni monotone. Per semplicità supponiamo che le funzioni siano definite su tutto $\mathbb{R}$. In ogni casella scrivere "crescente", "decrescente" o non scrivere nulla se non si può garantire in generale né l'una né l'altra cosa:

$f+g$	f cresc.	f decres.
g cresc.		
g decresc.		

$f \circ g$	f cresc.	f decresc.
g cresc.		
g decresc.		

Dire se la seguente funzione è monotona in tutto il suo insieme di definizione (specificando se crescente o decrescente) oppure no:

2.70. $2 + \frac{3}{1+x^2}$

2.71. $\log(1+2^x)$

2.72. $\log(1+x^2)$

2.73. e^{x^3}

2.74. $\sin(e^x)$

2.75.★ $\sin\left(\frac{1}{2+e^x}\right)$

Dire se la seguente funzione è invertibile sul suo dominio, oppure no:

2.76. $\sin x$

2.77. $\arctan x$

2.78. $\sqrt{x}$

2.79. x^2

2.80. x^3

2.81. $\frac{1}{x^3}$

Scrivere esplicitamente la funzione inversa $x = g(y)$ della seguente funzione, e precisare qual è il dominio di g:

2.82.★ $e^{2x} + e^x - 6$

2.83.★ $\arctan(1 + \log x)$

2.84.★ $\frac{3e^x-1}{2-e^x}$

2.85.★ $\log(2-x)-\log(x+1)$

2.86.★ $3(\arcsin x)^{1/3} + 5$

2.87. $\frac{1+2x}{3x-1}$

2.88. $\log(1 + 2x)$

2.89. $e^{4x} + 1$

2.90. $\frac{e^x+2}{2e^x+1}$

2.91. $\frac{1+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

2.92. $\frac{1}{e^{2x}+1}$

2.93. $\log(1 + x^3)$

2.94. $\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

2.95. $\sqrt[3]{2 + 3x^5}$

2.96. $\log^3 x - 3$

2.97. $e^{2x} + 2e^x - 3$

2.98. $2\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)$

Funzioni trigonometriche inverse. Scrivere esplicitamente il valore esatto (non quello approssimato ottenuto con una calcolatrice!) delle seguenti espressioni, opportunamente semplificato (ossia senza l'intervento di funzioni trigonometriche):

2.99. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$

2.100. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$

2.101. $\tan\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$

2.102. $\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$

Funzioni iperboliche inverse. Scrivere esplicitamente il valore esatto di:

2.103. $\mathrm{SettSh}\sqrt{3}$

2.104. $\mathrm{SettCh}\sqrt{5}$

2.105. $\mathrm{SettCh}3$

2.106. $\mathrm{SettSh}2$

2.107. $\mathrm{Sh}(\mathrm{SettCh}2)$

2.108. $\mathrm{Ch}(\mathrm{SettSh}3)$

Soluzioni § 2.2.

2.33. Argomento del logaritmo positivo:

$$\frac{2+x}{x-3} > 0$$

$$x > 3 \text{ o } x < -2,$$

cioè
$$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty).$$

2.34. $x \neq \pm 1.$

2.35. $\sqrt[3]{x}$ è sempre definita. Imponiamo la condizione di denominatore non nullo:

$$\sqrt[3]{x} - 1 \neq 0, \text{ cioè } x \neq 1$$

e di radicando della radice quadrata non negativo,

$$\frac{3-x^2}{\sqrt[3]{x}-1} \geq 0.$$

Numeratore ≥ 0 per $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$;
denominatore > 0 per $x > 1$;
frazione ≥ 0 per

$$x \leq -\sqrt{3} \text{ o } 1 < x \leq \sqrt{3},$$

che dà l'insieme cercato:

$$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (1, \sqrt{3}].$$

2.36. Dobbiamo imporre le condizioni

$$-1 \leq \frac{x+1}{2x-1} \leq 1.$$

Se $x > \frac{1}{2}$ dobbiamo risolvere

$$1 - 2x \leq x + 1 \leq 2x - 1$$

$$3x \geq 0 \text{ e } x \geq 2$$

che dà $x \geq 2$, compatibile con $x > \frac{1}{2}$.
Se $x < \frac{1}{2}$ dobbiamo risolvere

$$1 - 2x \geq x + 1 \geq 2x - 1$$

$$3x \leq 0 \text{ e } x \leq 2$$

che dà $x \leq 0$, compatibile con $x < \frac{1}{2}$. In definitiva:

$$x \leq 0 \text{ o } x \geq 2.$$

2.37. $x > 1$

2.38. $(0,1) \cup (1,3)$

2.39. $x \neq 1, x \neq -3$

2.40. $x \neq \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

2.41.

$f+g$	f pari	f dispari
g pari	pari	né pari né dispari
g dispari	né pari né dispari	dispari

$f \cdot g$	f pari	f dispari
g pari	pari	dispari
g dispari	dispari	pari

$f \circ g$	f pari	f dispari
g pari	pari	pari
g dispari	pari	dispari

2.42. pari
2.43. dispari
2.44. dispari
2.45. non simmetrica
2.46. pari
2.47. pari
2.48. pari
2.49. non simmetrica
2.50. non simmetrica
2.51. pari
2.52. pari
2.53. dispari
2.54. pari
2.55. dispari
2.56. periodica, π
2.57. periodica, 4π
2.58. periodica, π
2.59. periodica, 2π
2.60. non periodica
2.61. periodica, $\frac{2}{3}\pi$
2.62. periodica, 2π
2.63. non periodica
2.64. non è periodica
2.65. periodica, 6π
2.66. periodica di periodo 2π
2.67. periodica, di periodo 12π
2.68. periodica, di periodo $\frac{\pi}{2}$.

2.69.

$f+g$	f cresc.	f decresc.
g cresc.	cresc.	
g decresc.		decresc.

$f \circ g$	f cresc.	f decresc.
g cresc.	cresc.	decresc.
g decresc.	decresc.	cresc.

2.70. no
2.71. sì, crescente
2.72. no
2.73. sì, crescente
2.74. no
2.75. La funzione $2 + e^x$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$ e positiva, quindi la funzione $\frac{1}{2+e^x}$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $\frac{1}{2+e^x}$ assume valori nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, su cui la funzione sin$t$ è crescente, perciò la funzione composta è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.
2.76. no
2.77. sì
2.78. sì
2.79. no
2.80. sì
2.81. sì

2.82. Scriviamo
$$e^{2x} + e^x - 6 = y$$
$$e^{2x} + e^x - (6 + y) = 0.$$

Si riconosce che questa è un'equazione di 2° grado nell'incognita e^x, che pertanto può essere calcolata:
$$e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{25 + 4y}}{2}.$$

Prima di ricavare x passando al logaritmo in base e, imponiamo la condizione $-1 \pm \sqrt{25 + 4y} > 0$; questo porta a scartare la soluzione col segno $-$. Si richiede allora
$$\sqrt{25 + 4y} > 1, \text{ cioè } y > -6$$

e l'inversa è:
$$g(y) = \log\left(\frac{-1 + \sqrt{25 + 4y}}{2}\right) \text{ per } y > -6.$$

2.83. Ponendo
$$y = \arctan(1 + \log x)$$

e applicando la funzione tangente ad ambo i membri ricaviamo
$$1 + \log x = \tan y$$
$$\log x = \tan y - 1.$$

Ora ricaviamo x passando all'esponenziale
$$x = e^{\tan y - 1} \text{ per } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

L'insieme di definizione non dipende solo dalla condizione di esistenza di tan$y$, ma dal fatto che nella funzione di partenza è $y = \arctan(\dots)$, e la funzione arctan ha immagine $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.84. Scriviamo $$y = \frac{3e^x - 1}{2 - e^x}$$

e ricaviamo anzitutto e^x risolvendola come equazione di primo grado:

$$e^x = \frac{1 + 2y}{3 + y}.$$

Ora per ricavare x passiamo al logaritmo,

$$x = \log\left(\frac{1 + 2y}{3 + y}\right)$$

imponendo le condizioni di positività dell'argomento del logaritmo, $y < -3, y > -\frac{1}{2}$, che danno l'insieme di definizione dell'inversa.

2.85. $$y = \log(2 - x) - \log(x + 1).$$

Questa ha senso per $-1 < x < 2$. Sotto queste condizioni possiamo riscriverla nella forma

$$y = \log\left(\frac{2 - x}{x + 1}\right)$$

e quindi ricavare prima $$e^y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

e poi, risolvendo l'equazione di 1° grado in x,

$$x = \frac{2 - e^y}{1 + e^y} \quad \text{definita per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

2.86. $$y = 3(\arcsin x)^{1/3} + 5$$

$$\arcsin x = \left(\frac{y - 5}{3}\right)^3$$

che, sotto le condizioni $-\frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{y-5}{3}\right)^3 \leq \frac{\pi}{2}$ può essere risolta come

$$x = \sin\left[\left(\frac{y - 5}{3}\right)^3\right].$$

Questa è la funzione inversa. Il suo insieme di definizione si ottiene risolvendo le condizioni

$$-\frac{\pi}{2} \le \left(\frac{y-5}{3}\right)^3 \le \frac{\pi}{2}$$

cioè
$$5 - 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \le y \le 5 + 3\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}.$$

2.87. $x = \frac{1+y}{3y-2}$, per $y \neq \frac{2}{3}$

2.88. $x = \frac{e^y-1}{2}$, $\forall y$

2.89. $x = \frac{1}{4}\log(y-1)$, per $y > 1$

2.90. $x = \log\left(\frac{y-2}{1-2y}\right)$, per $\frac{1}{2} < y < 2$

2.91. $x = \left(\frac{3y-1}{y+1}\right)^2$ per $y < -1, y \geq \frac{1}{3}$.

2.92. $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)$ per $0 < y < 1$.

2.93. $x = \sqrt[3]{e^y - 1}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

2.94. $x = \left(\frac{y}{1-y}\right)^3$ per $y \neq 1$

2.95. $x = \sqrt[5]{\frac{y^3-2}{3}}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

2.96. $x = e^{\sqrt[3]{3+y}}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

2.97. $x = \log(-1 + \sqrt{4+y})$, per $y > -3$.

2.98. $x = \left(3\tan\frac{y}{2}\right) - 1$, per $y \neq \pi + 2k\pi$.

2.99. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

2.100. $\frac{2}{5}\sqrt{6}$

2.101. $\frac{1}{\sqrt{15}}$

2.102. $2\sqrt{2}$

2.103. $\log\left(\sqrt{3} + 2\right)$

2.104. $\log\left(\sqrt{5} + 2\right)$

2.105. $\log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

2.106. $\log\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

2.107. $\sqrt{3}$.

2.108. $\sqrt{10}$.

2.3. Operazioni sui grafici di funzioni

In questi esercizi si chiede di tracciare il grafico qualitativo di certe funzioni composte, deducendo il grafico da quello di una funzione elementare nota, *esclusivamente* attraverso successive applicazioni delle operazioni sui grafici che si sono studiate nella teoria, ossia:

da $f(x)$ a $f(x+a)$	traslazione lungo l'asse x
da $f(x)$ a $f(x)+a$	traslazione lungo l'asse y
da $f(x)$ a $f(ax)$	dilatazione lungo l'asse x
da $f(x)$ a $af(x)$	dilatazione lungo l'asse y
da $f(x)$ a $f(-x)$	riflessione rispetto all'asse y
da $f(x)$ a $-f(x)$	riflessione rispetto all'asse x
da $f(x)$ a $f(\lvert x\rvert)$	applicazione del modulo alla x
da $f(x)$ a $\lvert f(x)\rvert$	applicazione del modulo alla $f(x)$

(Le ultime due trasformazioni non si lasciano descrivere in modo semplice come le precedenti).

Questo tipo di esercizio è interessante e utile per due motivi:

1. Mostra come con pochissime conoscenze e l'applicazione di strumenti elementari si possa già costruire il grafico di numerose funzioni.

2. Allena a saper "smontare" una funzione composta, analizzandola in termini di operazioni elementari. Questa è un'attitudine logica che risulta utile sia nell'applicare vari risultati teorici che riguardano le funzioni composte, sia per sviluppare l'abilità di scrittura di algoritmi.

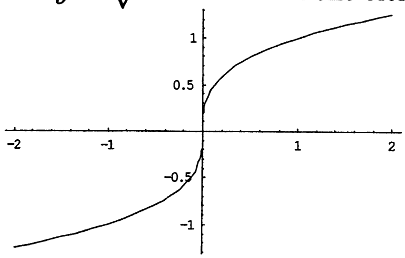
Esempi svolti

Esempio 2.6. Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

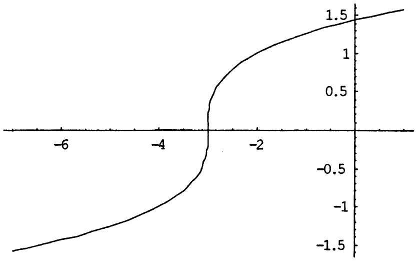
$$f(x) = \left|\sqrt[3]{x+3} + 1\right|$$

Procediamo coi seguenti passi.

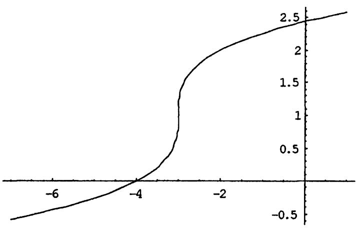
1. $y = \sqrt[3]{x}$. E' una funzione elementare, dal grafico noto:



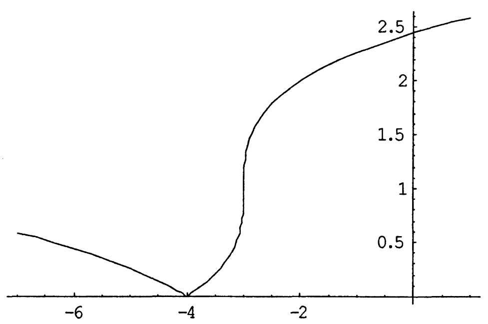
2. $y = \sqrt[3]{x+3}$.
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $f(x+3)$.
Si ottiene dal precedente per traslazione sull'asse x. Traslare a destra o a sinistra? Il modo più semplice di ragionare è: *in questo caso* la funzione $f(x)$ si annulla per $x = 0$, perciò la funzione $f(x+3)$ si annulla per $x + 3 = 0$, cioè $x = -3$:



3. $y = \sqrt[3]{x+3} + 1$.
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $f(x) + 1$.
Si ottiene dal precedente per traslazione sull'asse y, verso l'alto.



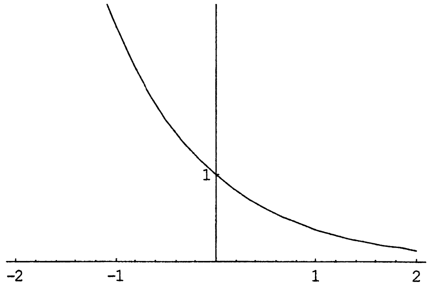
4. $y = \left|\sqrt[3]{x+3} + 1\right|$
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $|f(x)|$.
Si ottiene sostituendo alla parte di grafico che sta sotto l'asse x quello che si ottiene riflettendo tale parte di grafico rispetto all'asse x:



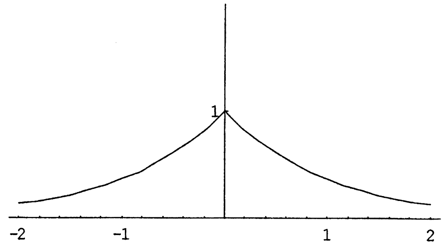
Esempio 2.7. Tracciare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \left|2e^{-|x|} - 1\right|$$

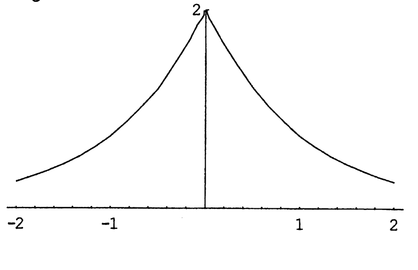
1. $y = e^{-x}$. E' una funzione elementare (vedendola come $(1/e)^x$, funzione esponenziale di base < 1), dal grafico noto:



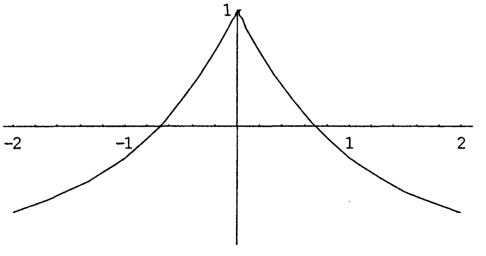
2. $y = e^{-|x|}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$. Si ottiene sostituendo il grafico di f per $x < 0$ e con quello ottenuto riflettendo rispetto all'asse y il grafico di f per $x > 0$:



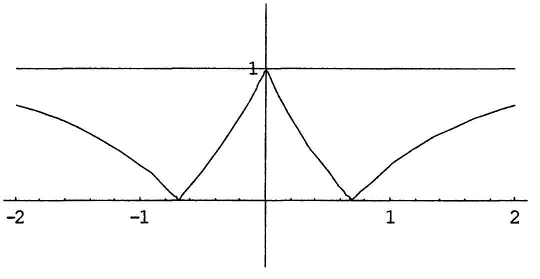
3. $y = 2e^{-|x|}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $2f(x)$. Si ottiene con una dilatazione rispetto all'asse y. In pratica, il punto di intersezione con l'asse y in questo caso passa da $y = 1$ a $y = 2$:



4. $y = 2e^{-|x|} - 1$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x) - 1$.
Traslazione lungo l'asse y, verso il basso. Il punto di intersezione con l'asse y torna ad avere quota 1, e si è creato un asintoto orizzontale $y = -1$:



5. $y = \left|2e^{-|x|} - 1\right|$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $|f(x)|$: il grafico precedente si trasforma così (v. anche es. precedente):

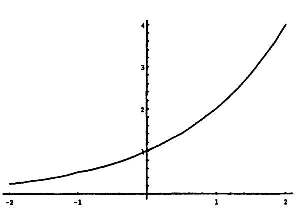


Osservazione 2.5. Ordine di applicazione delle operazioni sui grafici. Si noti l'importanza dell'*ordine* in cui abbiamo scomposto la funzione. Ad esempio, supponiamo che di fronte all'esempio precedente,

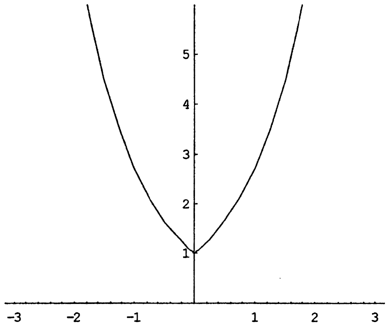
$$f(x) = \left|2e^{-|x|} - 1\right|$$

si pensi di partire con i seguenti passi:

1. $y = e^x$. E' una funzione elementare, dal grafico noto:



2. $y = e^{|x|}$. Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$:



Fin qui, ci può sembrare di aver fatto dei passi ragionevoli, ed in effetti non c'è niente di *sbagliato*. Ma ora siamo in un vicolo cieco. Da qui, con quale operazione (tra quelli sopra specificati!) possiamo ottenere $y = e^{-|x|}$? *Non* con il passaggio da $f(x)$ a $f(-x)$, che non porterebbe alcuna variazione: $e^{-|-x|} = e^{-|x|}$. Niente da fare: abbiamo preso una strada inconcludente; dobbiamo ripartire da capo e smontare la nostra funzione con i passi che abbiamo descritto nell'esempio.

Esercizi

Tracciare il grafico della seguente funzione, a partire dai grafici noti delle funzioni elementari, applicando esclusivamente successive operazioni sul grafico (traslazione, dilatazione, riflessione, valore assoluto). Riportare anche i vari grafici "di passaggio" utilizzati per costruire il grafico della funzione, mettendo ben in evidenza il grafico di $f(x)$. Segnare sugli assi ascissa o ordinata di qualche punto noto della funzione (ad esempio di intersezione con gli assi, di max./min, ecc.).

2.109. $e^{-|x|}$

2.110. $e^{|x|}$

2.111. $\sqrt[3]{x+1}$

2.112.★ $\sqrt{1-x}$

2.113. $2\sin\frac{x}{2}$

2.114.★ $3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2.115.★ $\sin x + \sqrt{3}\cos x$

2.116. $|\log(1+x)|$

2.117. $1 + |\sin(2x)|$ su $[0, 2\pi]$

2.118. $3\cos 2x$ su $[0, 2\pi]$

2.119. $\sqrt[3]{2-x}$

2.120. $\sqrt[3]{(x+2)^2}-1$

2.121.★ $\log(1+|x|)-1$

2.122. $|2e^x-1|$

2.123.★ $2e^{-|x+1|}$

2.124. $\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x}{2}$

2.125.★ $1-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

2.126. $|\log(|x|-4)|$

2.127.★ $2\log_{1/2}(2-x)$

2.128. $\left|(x-1)^{2/3}-1\right|$

2.129. $\left|2\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|$

2.130. $\tan\frac{|x|}{2}$

2.131. $|\log(3-x)|$

2.132. $1+(x+2)^{2/3}$

2.133. $|2^{-x}-1|$

2.134. $\frac{\pi}{2}+\arccos(1-x)$

2.135.★ $2-|x+1|^{1/3}$

2.136. $\log 2-\log(2-x)$

2.137. $\frac{\pi}{2}-\arcsin|x|$

2.138. $\left|2+\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\right|$.

2.139. $2\left(1-e^{-|x+3|}\right)$

2.140. $(|x|-2)^{3/5}$

2.141.★ $2\arctan(1-x)-\frac{\pi}{2}$

2.142. $\sqrt[3]{2-|x|}$.

2.143. $\log(5-|x-1|)$

2.144. $\left|e^{|x-1|}-2\right|$

2.145. $\arctan(1-|x|)$

2.146. $|\log|x+1||$

2.147. $\left|\arctan|x|-\frac{\pi}{4}\right|$

2.148. $(1-x)^{3/5}-1$

2.149. $1-2e^{-|x+2|}$

2.150. $\left|(x+1)^{2/3}-1\right|$

2.151. $\log_{\frac{1}{2}}(4-|x|)$

2.152. $\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|$

N.B. Essendo la funzione periodica, è sufficiente tracciare il grafico su *un solo periodo*.

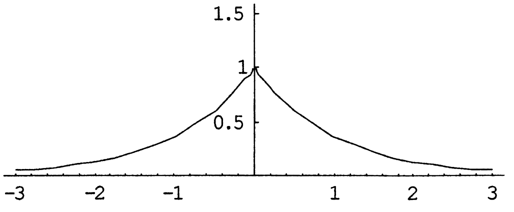
2.153. $\left|2e^{-|x|}-1\right|$

2.154. $\left|(\arctan x)-\frac{\pi}{4}\right|-\frac{\pi}{4}$

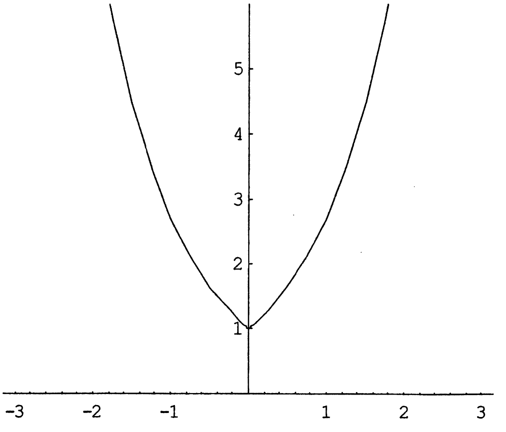
2.155. $1-e^{-|x+2|}$

Soluzioni § 2.3.

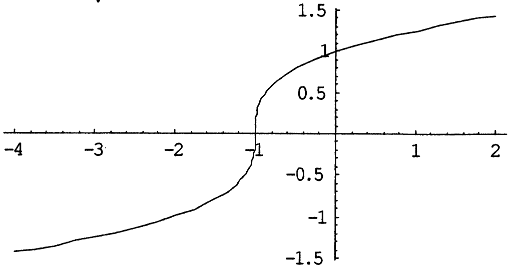
2.109. $e^{-|x|}$



2.110. $e^{|x|}$

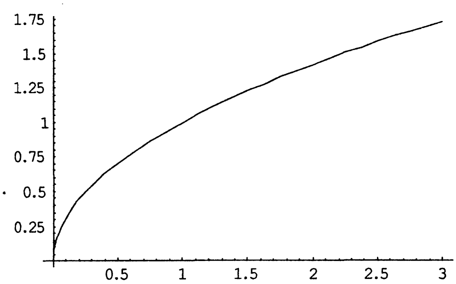


2.111. $\sqrt[3]{x+1}$

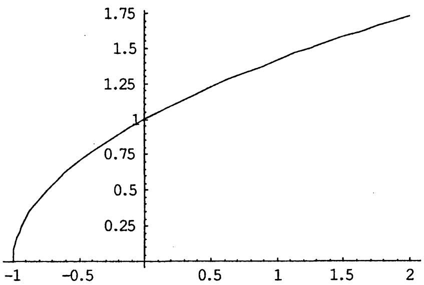


2.112. $\sqrt{1-x}$

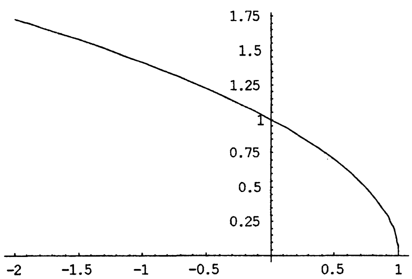
1. Funzione elementare $y = \sqrt{x}$:



2. $y = \sqrt{1+x}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x+1)$: traslazione verso sinistra:

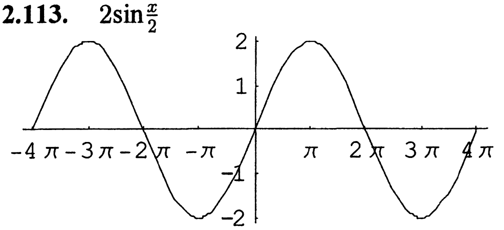


3. $y = \sqrt{1-x}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(-x)$: riflessione rispetto all'asse y:



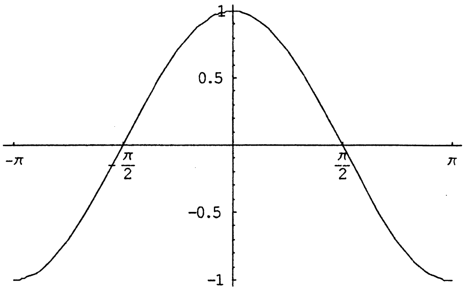
Si osservi l'ordine dei passaggi, in particolare abbiamo prima traslato e poi riflesso.

2.113. $2\sin\frac{x}{2}$



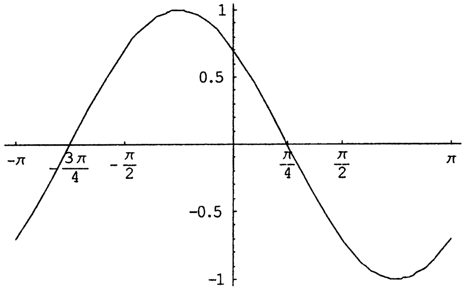
2.114. $3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

1 $\quad y=\cos x$



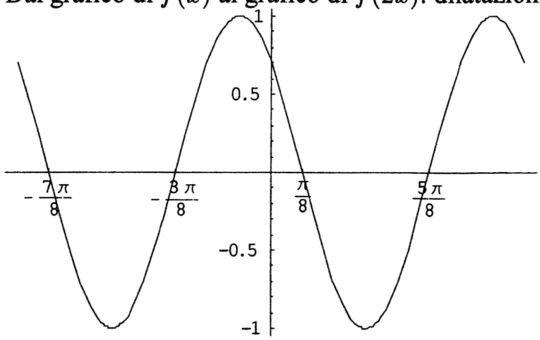
2. $\quad y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$: traslazione lungo l'asse x, verso sinistra:



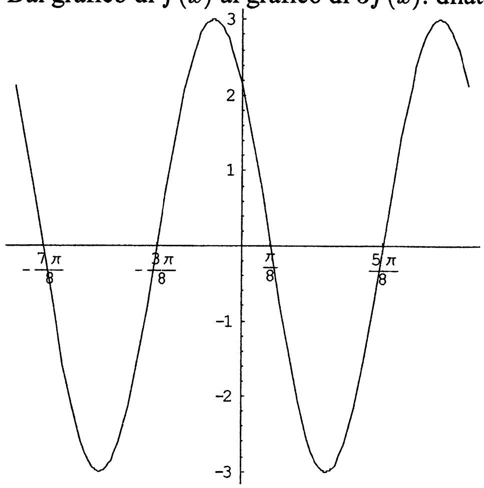
3. $\quad y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(2x)$: dilatazione lungo l'asse x:



4. $\quad y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $3f(x)$: dilatazione lungo l'asse y:



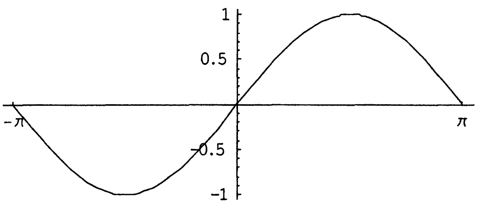
2.115. $\sin x + \sqrt{3}\cos x$
Occorre prima usare le identità trigonometriche per scrivere[1]:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$$

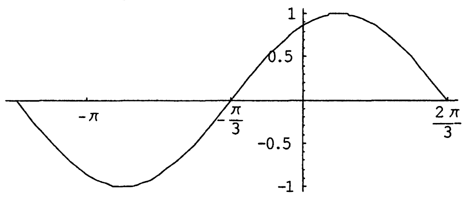
$$= 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Quest'ultima forma è più adatta per costruirne il grafico a mano.

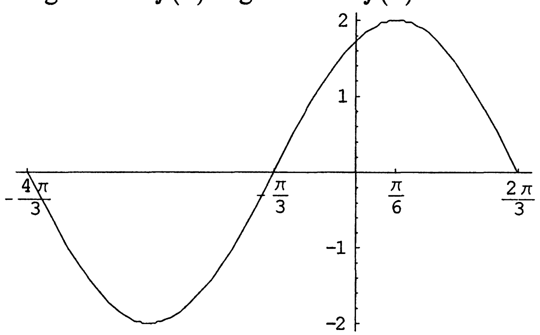
1. $y = \sin x$



2. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$: traslazione verso sinistra:

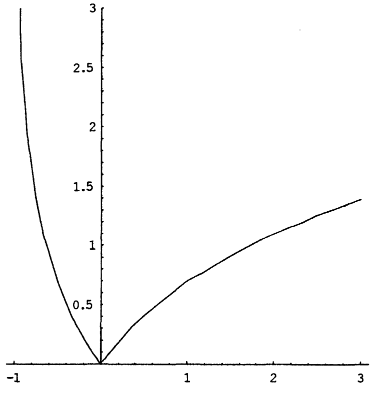


3. $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $2f(x)$: dilatazione sull'asse y:

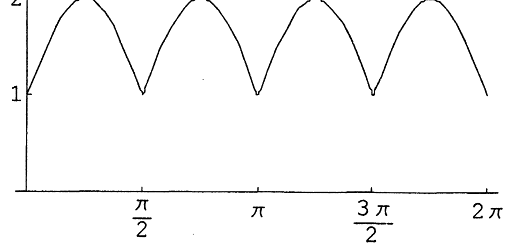


[1] Questo procedimento è spiegato in generale in [BPS1], cap. 2, §3.4.

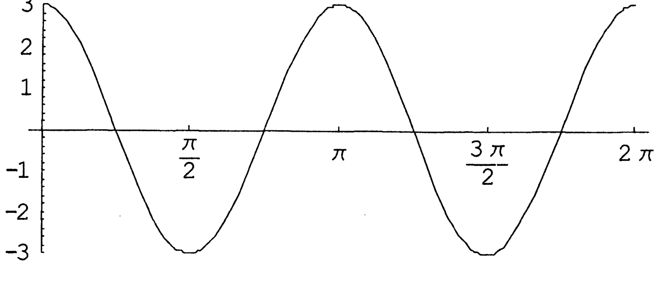
2.116. $|\log(1+x)|$



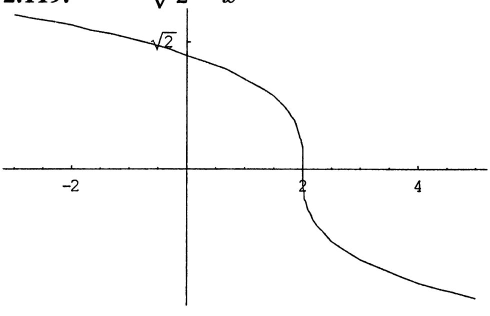
2.117. $1+|\sin(2x)|$ su $[0,2\pi]$



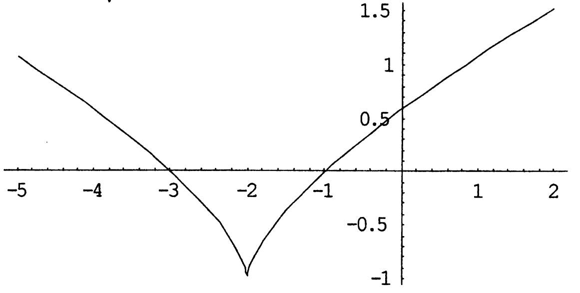
2.118. $3\cos 2x$ su $[0,2\pi]$



2.119. $\sqrt[3]{2-x}$

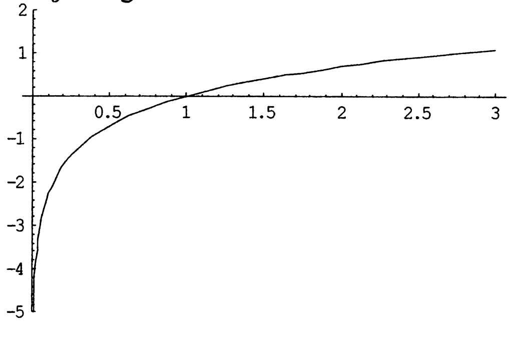


2.120. $\sqrt[3]{(x+2)^2}-1$



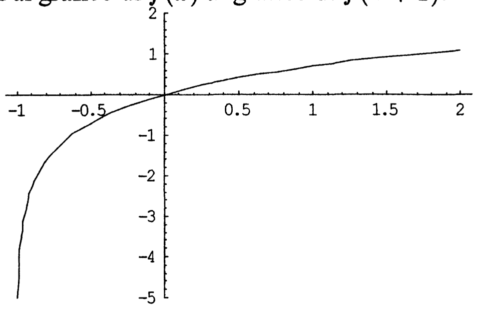
2.121. $\log(1+|x|)-1$

1. $y = \log x$



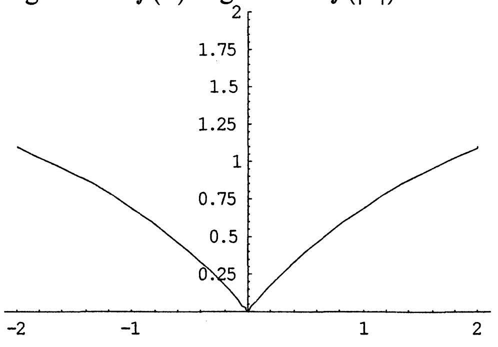
2. $y = \log(1 + x)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x + 1)$: traslazione lungo l'asse x, verso sinistra:



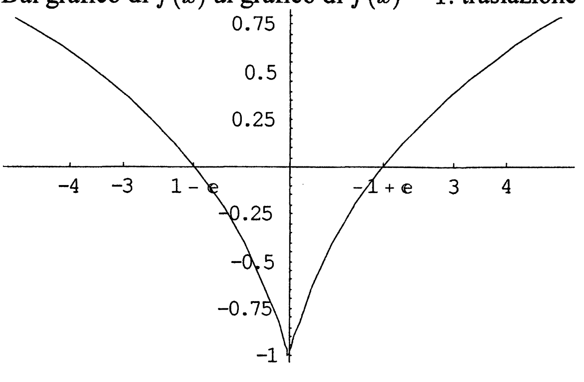
3. $y = \log(1 + |x|)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$:

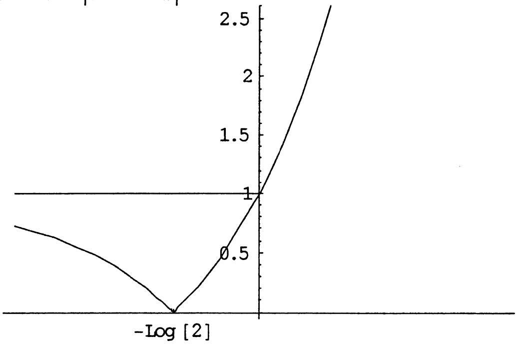


4. $y = \log(1 + |x|) - 1$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x) - 1$: traslazione lungo l'asse y, verso il basso:

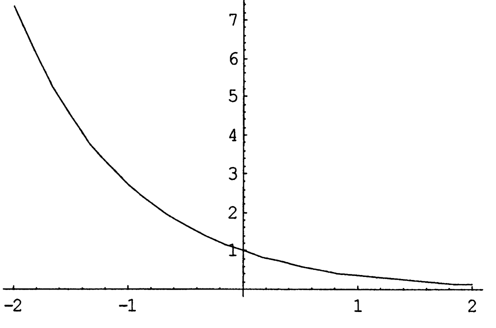


2.122. $|2e^x - 1|$

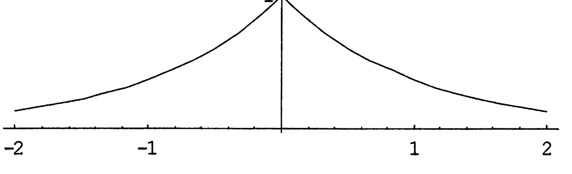


2.123. $2e^{-|x+1|}$

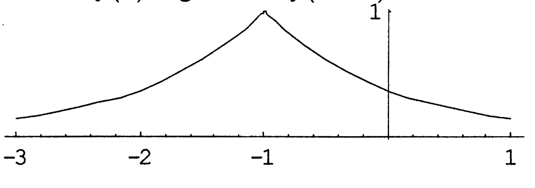
1. $y = e^{-x}$:



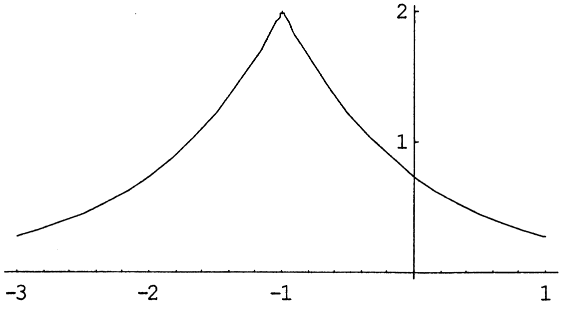
2. $y = e^{-|x|}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$:



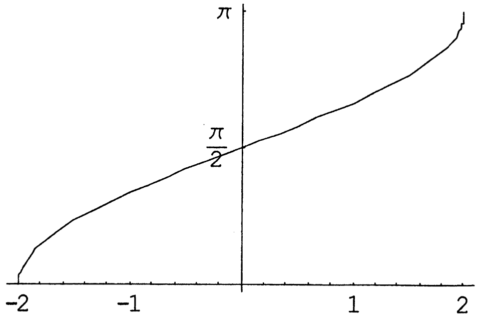
3. $y = e^{-|x+1|}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x+1)$: traslazione verso sinistra:



4. $y = 2e^{-|x+1|}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $2f(x)$: dilatazione sull'asse y:

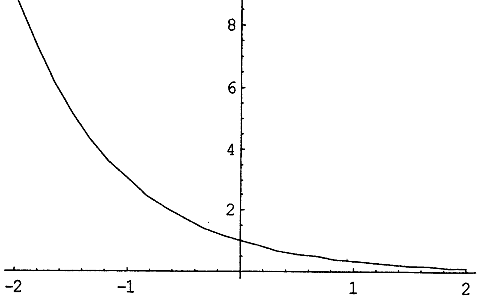


2.124. $\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x}{2}$



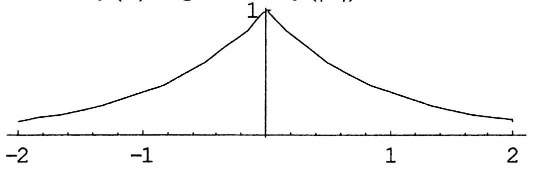
2.125. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



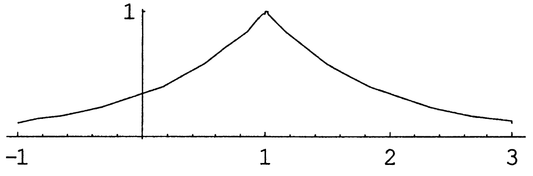
2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$:



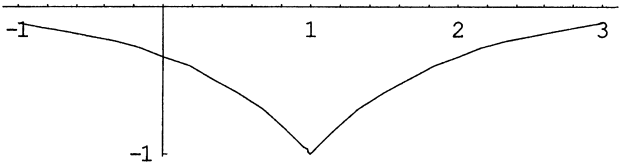
3. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x-1)$: traslazione verso destra:



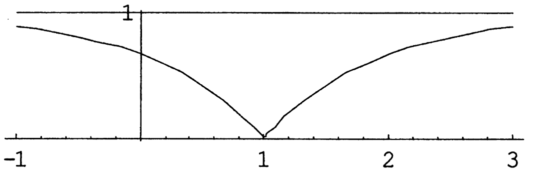
4. $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $-f(x)$: riflessione rispetto all'asse x:

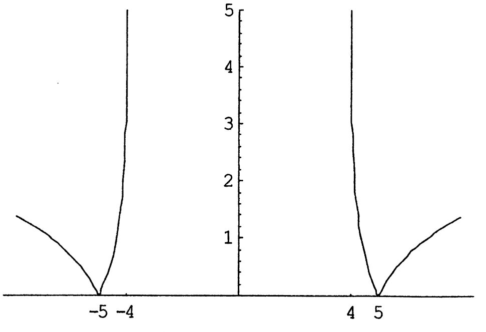


5. $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-1|}$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $1 + f(x)$: traslazione sull'asse y, verso l'alto:



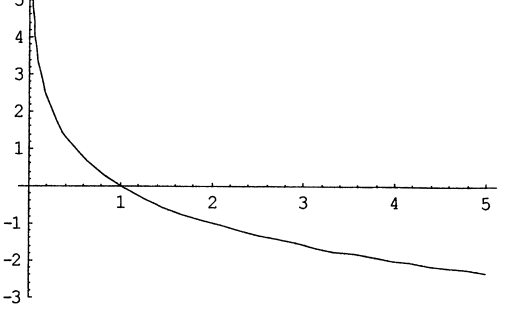
2.126. $|\log(|x| - 4)|$



Nota: $x = \pm 4$ asintoti verticali.

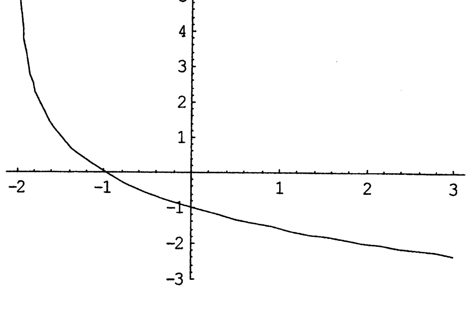
2.127. $2\log_{1/2}(2 - x)$

1. $y = \log_{1/2} x$



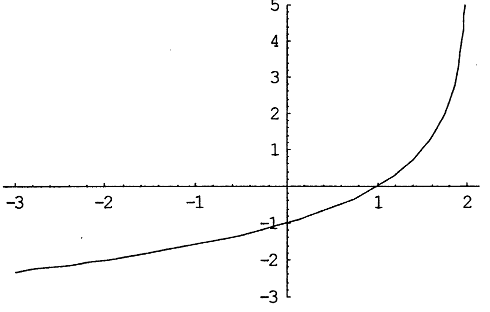
2. $y = \log_{1/2}(2 + x)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x + 2)$: traslazione verso sinistra:



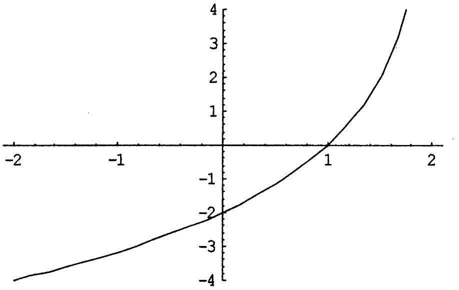
3. $y = \log_{1/2}(2 - x)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(-x)$: riflessione rispetto l'asse y:



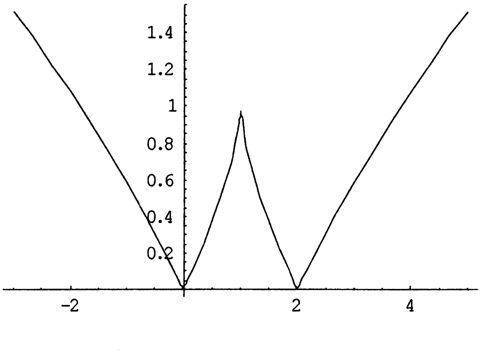
4. $y = 2\log_{1/2}(2 - x)$

Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $2f(x)$: dilatazione lungo l'asse y:

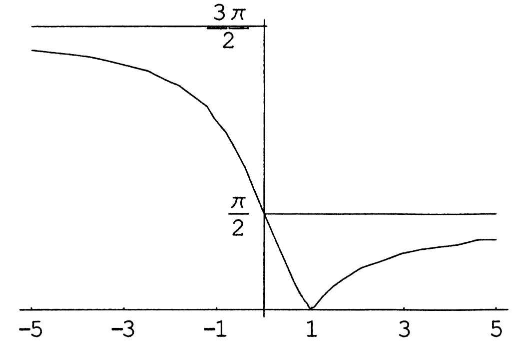


(La retta $x = 2$ è asintoto verticale)

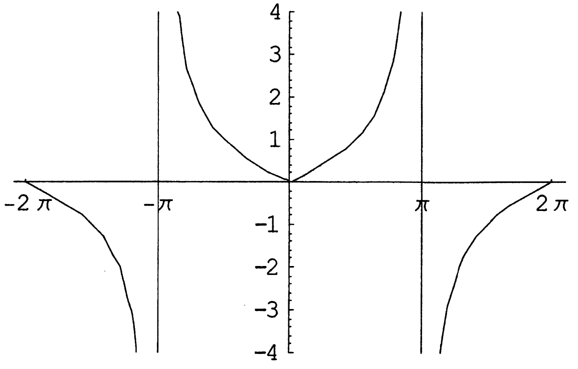
2.128. $\left|(x-1)^{2/3} - 1\right|$



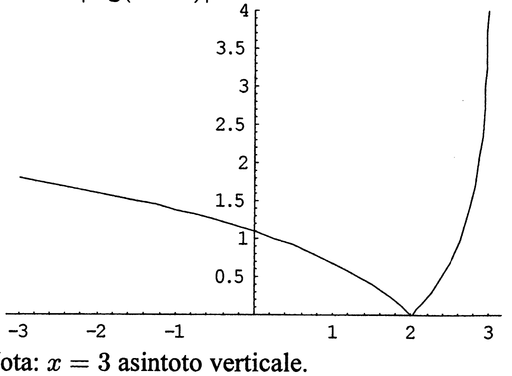
2.129. $\left|2\arctan x - \frac{\pi}{2}\right|$



2.130. $\tan\frac{|x|}{2}$

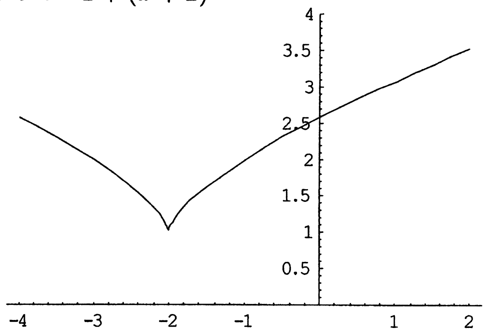


2.131. $|\log(3-x)|$

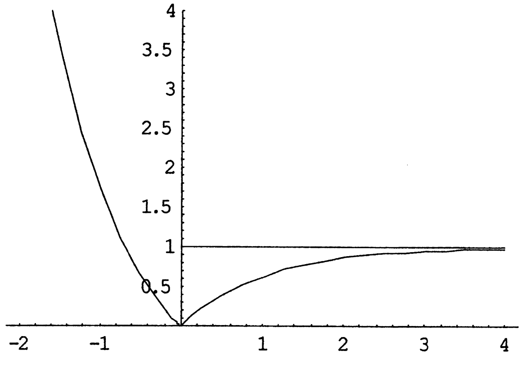


Nota: $x = 3$ asintoto verticale.

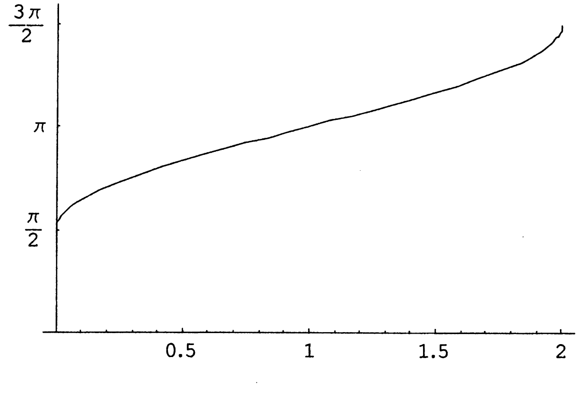
2.132. $1+(x+2)^{2/3}$



2.133. $|2^{-x}-1|$

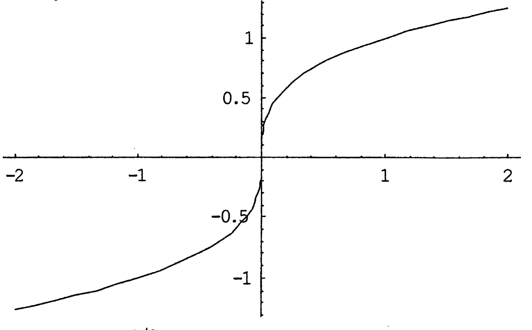


2.134. $\frac{\pi}{2}+\arccos(1-x)$

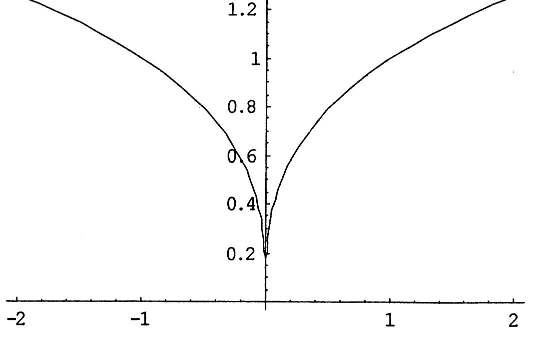


2.135. $2 - |x+1|^{1/3}$

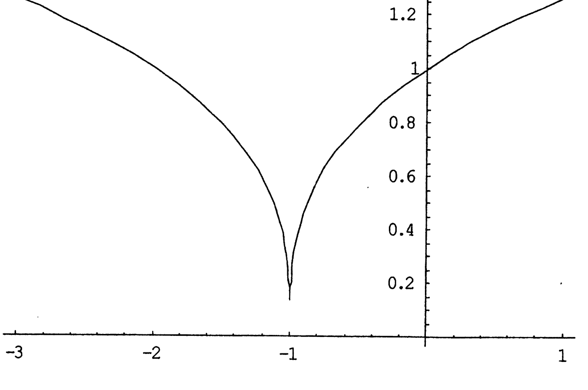
1. $y = x^{1/3}$



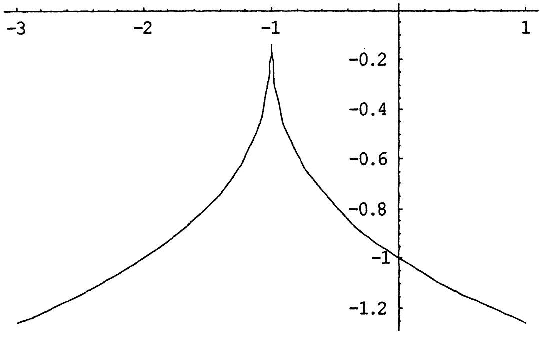
2. $y = |x|^{1/3}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(|x|)$:



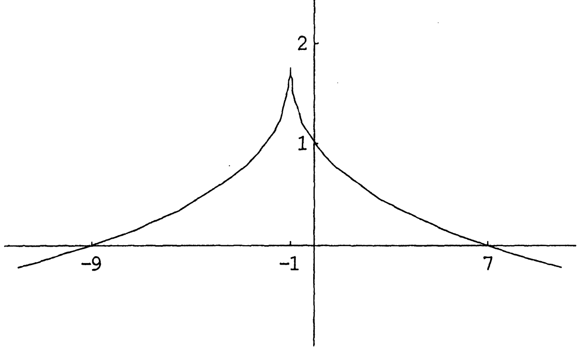
3. $y = |x+1|^{1/3}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x+1)$: traslazione verso sinistra:



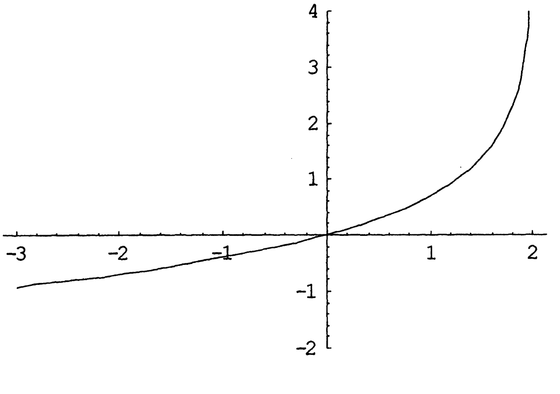
4. $y = -|x+1|^{1/3}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $-f(x)$: riflessione rispetto all'asse x:



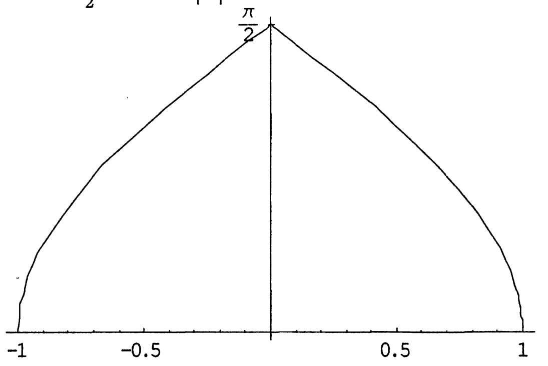
5. $y = 2 - |x+1|^{1/3}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x)+2$: traslazione lungo l'asse y, verso l'alto:



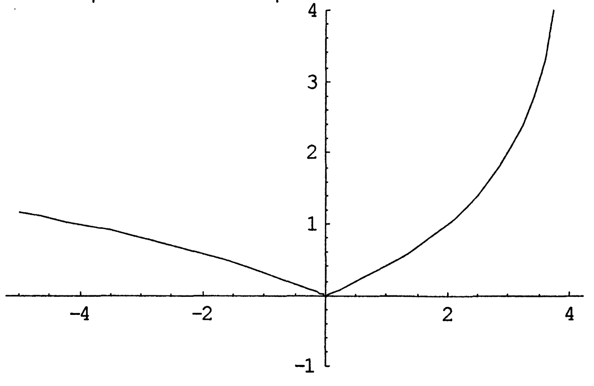
2.136. $\log 2 - \log(2-x)$



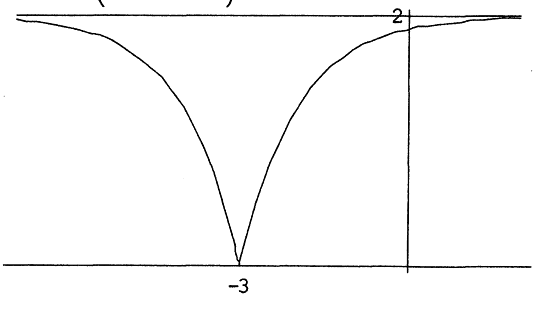
2.137. $\frac{\pi}{2} - \arcsin|x|$



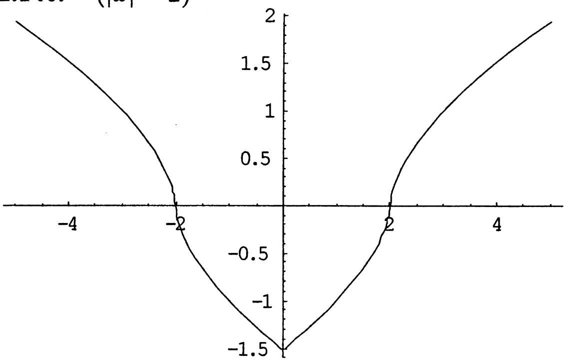
2.138. $\left|2 + \log_{\frac{1}{2}}(4 - x)\right|.$



2.139. $2\left(1 - e^{-|x+3|}\right)$

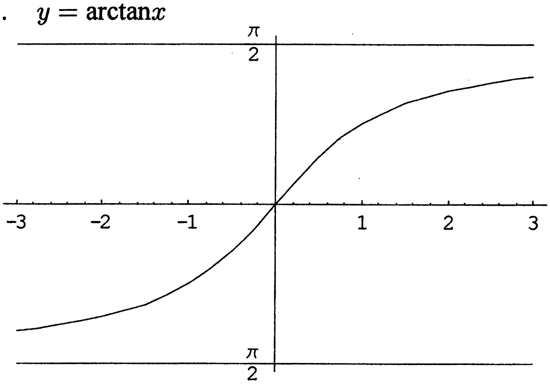


2.140. $(|x| - 2)^{3/5}$



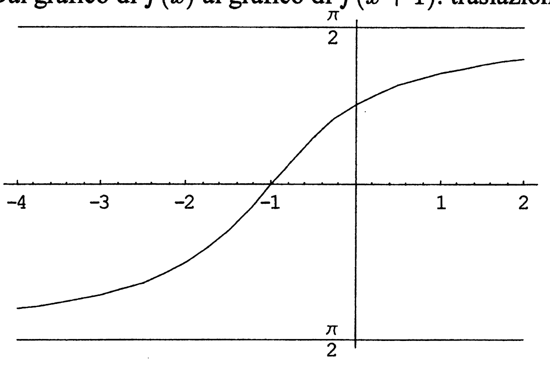
2.141. $2\arctan(1 - x) - \frac{\pi}{2}$

1. $y = \arctan x$

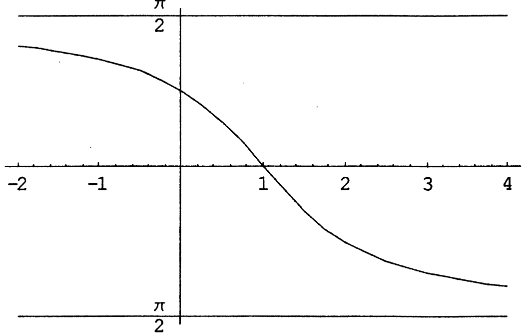


2. $y = \arctan(1 + x)$

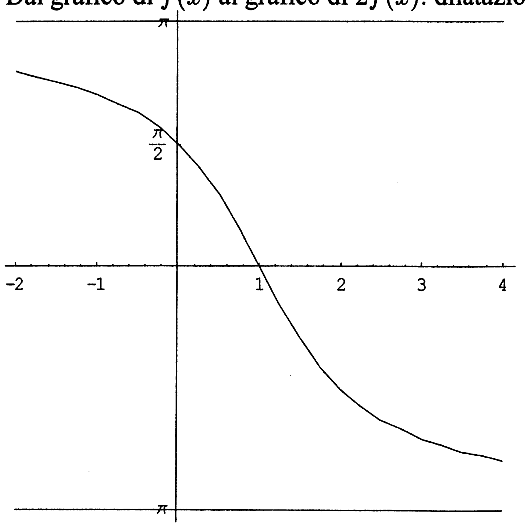
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x + 1)$: traslazione lungo l'asse x, verso sinistra:



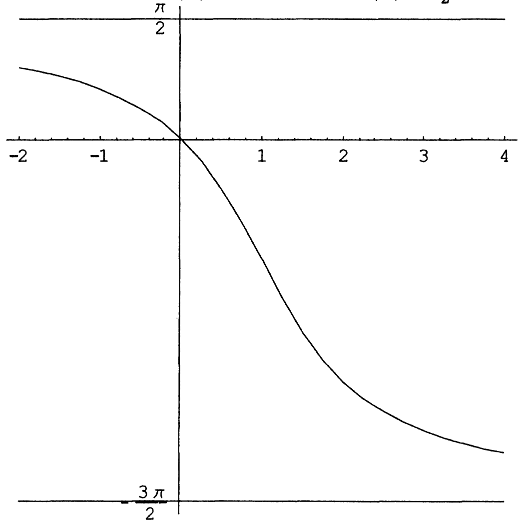
3. $y = \arctan(1 - x)$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(-x)$: riflessione rispetto l'asse y:



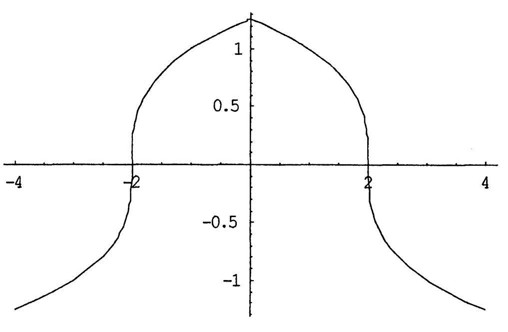
4. $y = 2\arctan(1 - x)$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $2f(x)$: dilatazione lungo l'asse y:



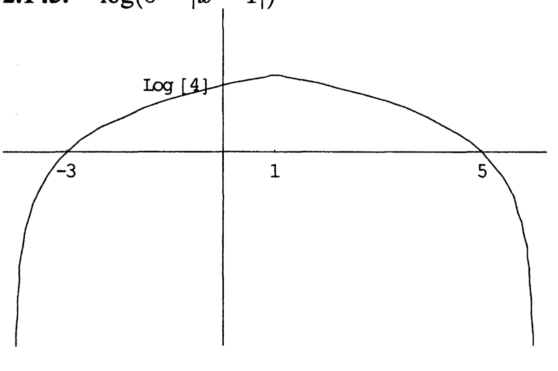
5. $y = 2\arctan(1-x) - \frac{\pi}{2}$
Dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x) - \frac{\pi}{2}$: traslazione lungo l'asse y, verso il basso:



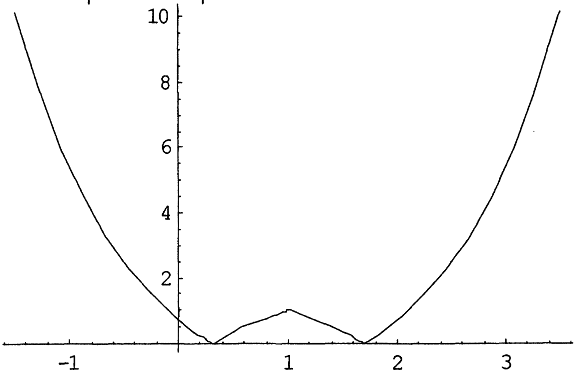
2.142. $\sqrt[3]{2-|x|}$.



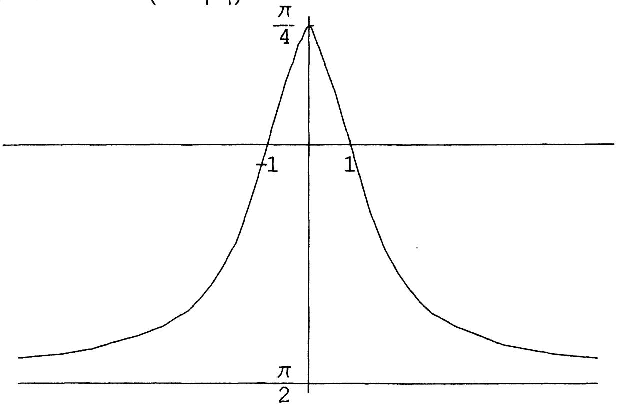
2.143. $\log(5-|x-1|)$



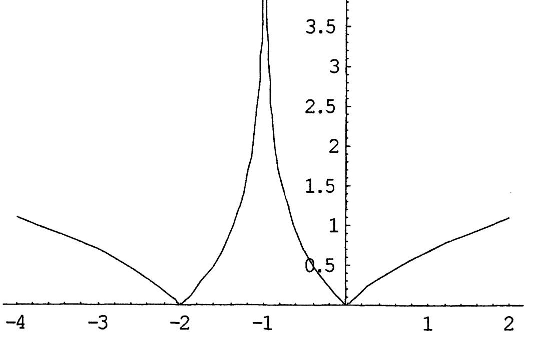
2.144. $\left|e^{|x-1|}-2\right|$



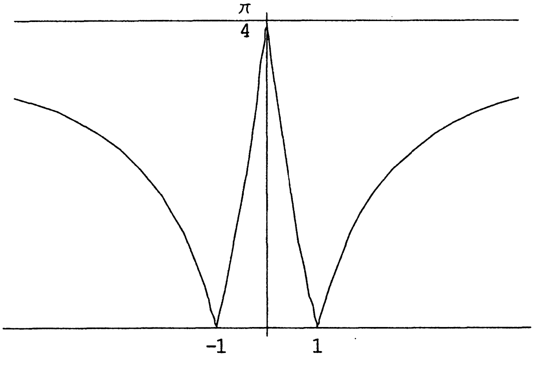
2.145. $\arctan(1-|x|)$



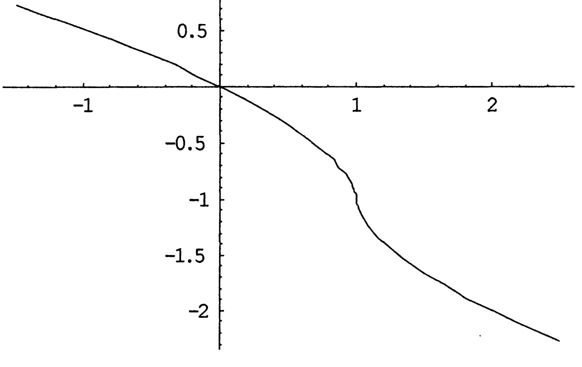
2.146. $|\log|x+1||$



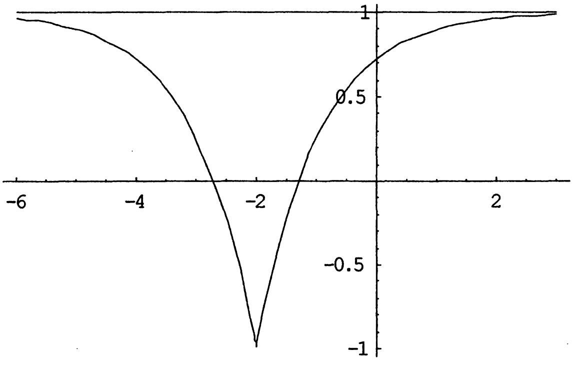
2.147. $\left|\arctan|x| - \frac{\pi}{4}\right|$



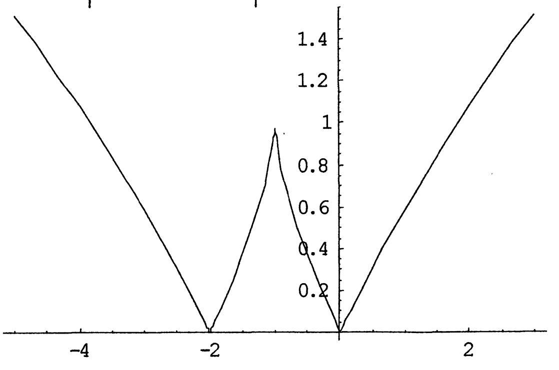
2.148. $(1-x)^{3/5} - 1$



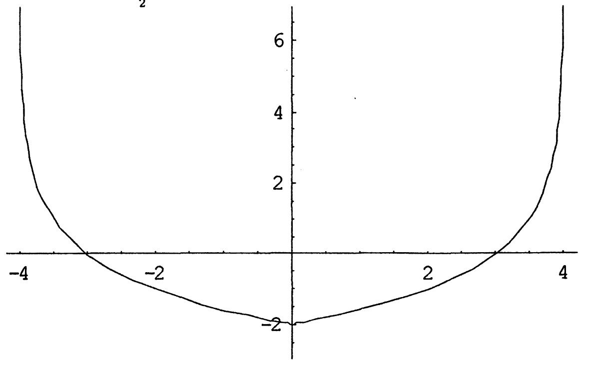
2.149. $1 - 2e^{-|x+2|}$



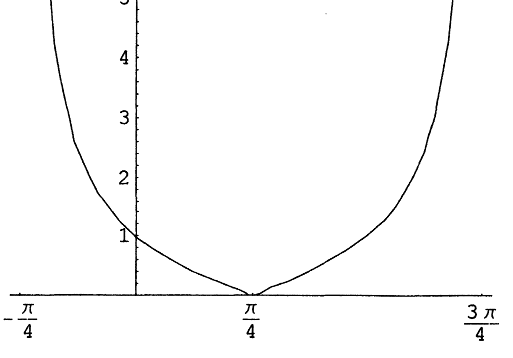
2.150. $\left|(x+1)^{2/3}-1\right|$



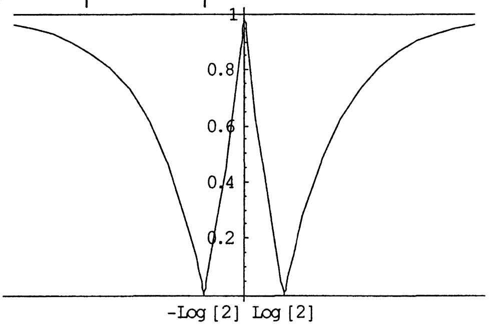
2.151. $\log_{\frac{1}{2}}(4-|x|)$



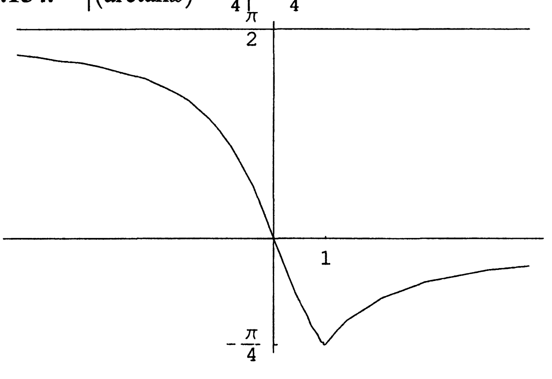
2.152. $\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|$



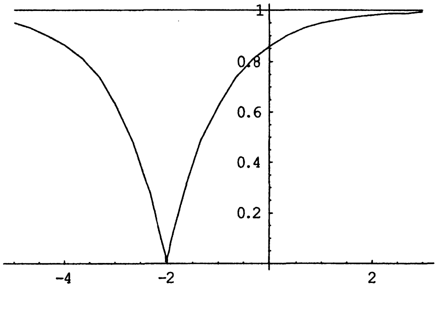
2.153. $\left|2e^{-|x|} - 1\right|$



2.154. $\left|(\arctan x) - \frac{\pi}{4}\right| - \frac{\pi}{4}$



2.155. $1 - e^{-|x+2|}$



Cap. 3. Limiti e continuità

Gli esercizi sul *calcolo dei limiti* sono articolati, in questo eserciziario, coerentemente all'impostazione del libro di testo [BPS1]. Perciò anzitutto (§3.1) affronteremo i *limiti di successioni*, limitandoci ai risultati fondamentali sul calcolo dei limiti (in particolare, utilizzeremo la "gerarchia degli infiniti" e il simbolo asintotico, la definizione del numero e, ma *non* i limiti notevoli dedotti dalla definizione del numero e né quelli legati alle funzioni trigonometriche). Quindi (§3.2) illustreremo i concetti di base riguardanti limiti di funzioni, asintoti, continuità di una funzione in un punto. Successivamente (§3.3) utilizzeremo i limiti notevoli e le stime asintotiche per il calcolo dei limiti, sia di funzioni che di successioni. Il §3.3 contiene anche una discussione dettagliata dell'utilizzo del simbolo di asintotico (per le funzioni), che può essere utile anche per comprendere l'utilizzo che ne viene fatto (per le successioni) già nel §3.1, perciò questi paragrafi sono in qualche modo interdipendenti. Nel §3.4 mostreremo come il calcolo dei limiti e le stime asintotiche si applicano allo studio del grafico di una funzione.

I limiti per il calcolo dei quali occorrono anche gli strumenti del calcolo differenziale (teorema di De L'Hospital e formule di Taylor-Mac Laurin) saranno affrontati nel prossimo cap. 4.

3.1. Concetti di base sui limiti di successioni

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap.3, §1.

3.1.A. Proprietà delle successioni

Esempi svolti

Esempio 3.1. Questo primo esempio non richiede la nozione di limite. Si consideri la successione

$$a_n = \log\left(1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}\right), \text{ per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rispondere alle domande:

$\{a_n\}$ è limitata superiormente	☐ vero	☐ falso
In caso affermativo, $\sup\{a_n\} = \dots$		
$\{a_n\}$ ammette massimo	☐ vero	☐ falso

In caso affermativo, $\max\{a_n\} = \dots$
$\{a_n\}$ è limitata inferiormente ☐ vero ☐ falso
In caso affermativo, $\inf\{a_n\} = \dots$
$\{a_n\}$ ammette minimo ☐ vero ☐ falso
In caso affermativo, $\min\{a_n\} = \dots$

La presenza del segno alternato $(-1)^n$ suggerisce di ragionare sull'andamento della successione distinguendo cosa succede per n pari e n dispari.

Se n pari, $a_n = \log\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)$. L'argomento del logaritmo è

$$1 + \frac{n}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

che varia in $[\frac{3}{2}, 2)$; il logaritmo varia quindi in $[\log\frac{3}{2}, \log 2)$, e $\log 2$ è il sup, ma non il max, di questi valori.

Se n è dispari, $a_n = \log\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\frac{1}{n+1}\right)$, che è negativo e al crescere di n è inferiromene illimitato.

La successione, nel suo complesso, è quindi superiormente ma non inferiormente limitata, non ammette massimo (pur avendo sup finito) né minimo (perché è inferiormente illimitata). Le risposte sono:

$\{a_n\}$ è limitata superiormente	☒ vero	☐ falso	$\sup\{a_n\} = \log 2$
$\{a_n\}$ ammette massimo	☐ vero	☒ falso	
$\{a_n\}$ è limitata inferiormente	☐ vero	☒ falso	
$\{a_n\}$ ammette minimo	☐ vero	☒ falso	

Esempio 3.2. Si consideri la successione

$$a_n = e^{-1/n}\sin n, \text{ per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rispondere alle domande:

$\{a_n\}$ è limitata superiormente	☐ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ è limitata inferiormente	☐ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ è definitivamente positiva	☐ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ non si annulla mai	☐ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ ha limite (finito o infinito)	☐ vero	☐ falso

La successione è il prodotto della successione $e^{-1/n}$, limitata, sempre diversa da zero, convergente a 1, e della successione $\sin n$, limitata ma irregolare, mai nulla (ricordare che in questo esercizio n parte da 1 e, per l'irrazionalità di π, l'angolo n non è mai multiplo intero di π). Il prodotto sarà quindi limitato, mai nullo, irregolare. Quanto alla terza domanda, poiché $e^{-1/n} \to 1$ e il segno di $\sin n$ non è definitivamente costante, a_n non è definitivamente positiva. Le risposte sono pertanto le seguenti:

$\{a_n\}$ è limitata superiormente	☒ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ è limitata inferiormente	☒ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ è definitivamente positiva	☐ vero	☒ falso
$\{a_n\}$ non si annulla mai	☒ vero	☐ falso
$\{a_n\}$ ha limite (finito o infinito)	☐ vero	☒ falso

Esercizi

3.1. Si consideri la successione

$$a_n = e^n \sin n, \text{ per } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rispondere alle domande:

a.	$\{a_n\}$ è limitata superiormente	☐ vero	☐ falso
b.	$\{a_n\}$ è limitata inferiormente	☐ vero	☐ falso
c.	$\{a_n\}$ è definitivamente positiva	☐ vero	☐ falso
d.	$\{a_n\}$ non si annulla mai	☐ vero	☐ falso
e.	$\{a_n\}$ ha limite (finito o infinito)	☐ vero	☐ falso

3.2. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n^{(-1)^n}}{n+1}, \text{ per } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rispondere alle domande:

a.	$\{a_n\}$ è limitata superiormente In caso affermativo, $\sup\{a_n\} = \ldots$	☐ vero	☐ falso
b.	$\{a_n\}$ ammette massimo In caso affermativo, $\max\{a_n\} = \ldots$	☐ vero	☐ falso
c.	$\{a_n\}$ è limitata inferiormente In caso affermativo, $\inf\{a_n\} = \ldots$	☐ vero	☐ falso
d.	$\{a_n\}$ ammette minimo In caso affermativo, $\min\{a_n\} = \ldots$	☐ vero	☐ falso

3.1.B. Calcolo dei limiti con tecniche di base

Esempi svolti

Esempio 3.3. Calcolare il limite delle seguente successioni, se esiste.

$$(a)\quad a_n = \frac{2^{1/n} + n^2 + 3^{-n}}{\log^6 n + 2 + n}; \quad (b)\quad a_n = \frac{3n^3 + 3^n + \log n}{\log^6 n + 2^{2n} + n^5}.$$

Svolgeremo questi primi esempi senza usare il simbolo di "asintotico", per maggiore gradualità. Naturalmente usarlo semplificherebbe le cose.

(a) Numeratore:

$$2^{1/n} \to 1; \quad n^2 \to +\infty; \quad 3^{-n} \to 0$$

quindi la parte principale è n^2.

Denominatore: n è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log^6 n$ (gerarchia degli infiniti), quindi è la parte principale.

Raccogliendo a numeratore e denominatore le parti principali abbiamo:

$$a_n = \frac{n^2\left(1 + \frac{2^{1/n}}{n^2} + \frac{3^{-n}}{n^2}\right)}{n\left(1 + \frac{\log^6 n}{n} + \frac{2}{n}\right)} = n\frac{\left(1 + \frac{2^{1/n}}{n^2} + \frac{3^{-n}}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{\log^6 n}{n} + \frac{2}{n}\right)}$$

dove ciascuna parentesi tonda tende a 1, quindi poiché $n \to +\infty$, anche $a_n \to +\infty$.

(b) Numeratore: somma di infiniti di tipo diverso, per la gerarchia degli infiniti la parte principale è 3^n.

Denominatore: somma di infiniti di tipo diverso, per la gerarchia degli infiniti la parte principale è $2^{2n} = 4^n$.

Raccogliendo le parti principali si ha:

$$a_n = \frac{3^n\left(1 + \frac{3n^3}{3^n} + \frac{\log n}{3^n}\right)}{4^n\left(1 + \frac{\log^6 n}{4^n} + \frac{n^5}{4^n}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{(1 + \dots)}{(1 + \dots)}$$

dove le quantità $\dots$ tendono a 0. Di conseguenza, poiché $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$, anche $a_n \to 0$.

Esempio 3.4. Calcolare i seguenti limiti, se esistono.

$$(a) \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!(n^{1/n})}; \quad (b) \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin n + \sin(n^2)}{n^2+1}.$$

(a) Denominatore: ricordiamo che $n^{1/n} \to 1$. Questo segue, scrivendo

$$n^{1/n} = e^{\frac{\log n}{n}},$$

dalla gerarchia degli infiniti, in base a cui $\frac{\log n}{n} \to 0$. Quindi il limite cercato è uguale al limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

ancora per la gerarchia degli infiniti (il confronto tra 3^n e $n!$ si può effettuare col criterio del rapporto).

(b). Notiamo che le successioni $\sin n$, $\sin(n^2)$ sono irregolari ma limitate. Si può scrivere la maggiorazione

$$\left| \frac{n\sin n + \sin(n^2)}{n^2+1} \right| \leq \frac{n+1}{n^2+1},$$

e il 2° membro tende a zero, come si vede raccogliendo le parti principali:

$$\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \to 0.$$

Di conseguenza, per il criterio del confronto, il limite cercato è zero.

Esempio 3.5. Calcolare i seguenti limiti, se esistono.

$$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1} \right)^{2n}; \quad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n-1}}{n(n+1)!}.$$

(a) Osserviamo che la base $\left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)$ tende a 1, come si vede raccogliendo le parti principali (uguali a n^2) a numeratore e denominatore. L'esponente $2n$ tende a $+\infty$, quindi abbiamo una forma di indeterminazione del tipo $[1^\infty]$, che ci ricorda il limite notevole che definisce il numero e.

Ricordiamo che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

e, più in generale, se a_n è una qualsiasi successione tendente a $\pm\infty$,

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e.$$

Per ricondurci a questa scrittura, facciamo questi passaggi:

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1-n}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{1-n}}\right]^{\left(\frac{1-n}{n^2+n+1}\right)\cdot 2n}$$

$$\equiv \left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{b_n}$$

con

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{1-n} \to -\infty; \quad b_n = \left(\frac{1-n}{n^2+n+1}\right)\cdot 2n \to -2.$$

Poiché $\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right] \to e$ e $b_n \to -2$, concludiamo che

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{2n} \to e^{-2}.$$

(b) Sia $a_n = \frac{3^{n-1}}{n(n+1)!}$. Trattandosi di una successione a termini positivi il cui termine generale è il rapporto di successioni più semplici di tipo esponenziale e fattoriale, è naturale applicare il criterio del rapporto. Calcoliamo quindi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^n}{(n+1)(n+2)!}\cdot\frac{n(n+1)!}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{3n}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3}{n\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} \to 0,$$

quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$.

Esercizi

Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni, giustificando i passaggi svolti:

3.3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n} + 3n^3}{\log^6 n + 2 - n^5}$$

3.4. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + 3n^3 \log n}{2^{1/n} + n^5}$$

3.5. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \log^3 n}{n \log n + 1}$$

3.6. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2+\frac{1}{n}}}{1 + n^{3-\frac{2}{n}}}$$

3.7. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$

3.8. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$$

3.9. $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n}$$

3.10. $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n}$$

3.11.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n + \log(n^2) - 2^n}{(\log n)^3 + n^2}$$

3.12.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{8 + 2n - n^{4/3}}{n^{-1/3} + 3n - n^{5/3}}$$

3.13.★ $$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$$

3.14.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\log(5n^3)+(\log n)^2}{2(\log n)^3+n\log n}$$

3.15.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{8+2n^2-n^{4/3}}{n^{-1/3}+3n^2-n^{5/3}}$$

3.16.★ $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^4+1}-n\sqrt{n^2+1}\right)$$

3.17.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3^n+2^{-n}}{2^{2n}+(\log n)^3}$$

3.18.★ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin n+\sin(n^2)}{n^2+1}$$

3.19.★ $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n}$$

3.20. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+4}\right)^{-2n}$

3.21. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{-n}$

3.22. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2-3n+4}\right)^{n}$

3.23. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+4}\right)^{n}$

3.24. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)$

3.25. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{2n^2}$

3.26. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$

3.27.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\cdot 2^n}{n!}$

3.28.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$

3.29.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}2^n}{(n+1)!}$

3.30.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(n-1)!}$

3.31.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$

3.32.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{4^n}$

3.33.★ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

3.34.★
$$\lim_{n\to+\infty} \log(n+2^n)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

3.35.★
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n^{3/2}+1}{n^2-5n}\right)^{n(3+\sin n)}$$

3.36.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2[\log(n+\log n)]\log(2n+1)}{(2n+3)^2\log^2 n}$$

3.37.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+\log^3 n)(\log n+1)}{n\log^2 n\cdot\sqrt{n^2+\log^2 n}}$$

3.38.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n(n^2+n+1)}{n^4(e^n+e^{-n})}$$

3.39.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2 n\right)\cdot\sin\left(n^2\right)$$

3.40.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}+\log\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

3.41.★
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

3.42.★
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2-3}\right)^{-5n}$$

Soluzioni §3.1.

3.1. *a.* Falso; *b.* Falso; *c.* Falso; *d.* Vero; *e.* Falso

3.2. *a.* Vero, $\sup\{a_n\} = 1$; *b.* Falso; *c.* Vero, $\inf\{a_n\} = 0$; *d.* Falso

3.3. $a_n \sim -\frac{3}{n^2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.4. $a_n \sim \frac{3\log n}{n^2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.5. $a_n \sim \frac{n}{\log n} \to +\infty$

3.6. $a_n \sim \frac{1}{n} \to 0$

3.7. $\frac{1}{e^2}$

3.8. $+\infty$

3.9.
$$a_n = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3} \to \frac{1}{e^3}.$$

3.10.
$$a_n = \left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{-2} \to e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

3.11.
$$\frac{n+\log(n^2)-2^n}{(\log n)^3+n^2} \sim \frac{-2^n}{n^2} \to -\infty$$

3.12.
$$\frac{8+2n-n^{4/3}}{n^{-1/3}+3n-n^{5/3}} \sim \frac{-n^{4/3}}{-n^{5/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0.$$

3.13.
$$n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right) = n\frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n} =$$
$$= n\cdot\frac{3}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \to \frac{3}{2}$$

3.14.
$$\frac{n^2+\log(5n^3)+(\log n)^2}{2(\log n)^3+n\log n}\sim$$

$$\sim\frac{n^2}{n\log n\left(1+2\frac{\log^2 n}{n}\right)}\sim\frac{n^2}{n\log n}=\frac{n}{\log n}\to+\infty.$$

3.15.
$$\frac{8+2n^2-n^{4/3}}{n^{-1/3}+3n^2-n^{5/3}}\sim\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}.$$

3.16.
$$\left(\sqrt{n^4+1}-n\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n^4+1}-n\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^4+1}+n\sqrt{n^2+1}\right)}=$$

$$=\frac{n^4+1-n^2(n^2+1)}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1-n^2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\sim\frac{-n^2}{2n^2}=-\frac{1}{2}$$

3.17.
$$\frac{n^2+3^n+2^{-n}}{2^{2n}+(\log n)^3}\sim\frac{3^n}{2^{2n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0$$

3.18.
$$\frac{n^2\sin n+\sin(n^2)}{n^2+1}=\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)\cdot\sin n+\frac{\sin(n^2)}{n^2+1}.$$

$$\left|\frac{\sin(n^2)}{n^2+1}\right|\leq\frac{1}{n^2+1}\to 0$$

quindi per il teorema del confronto il secondo addendo della successione tende a zero.

Invece
$$\frac{n^2}{n^2+1}\to 1$$

mentre $\sin n$ non ha limite. Perciò la successione non ha limite.

3.19. $$\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}}\right]^{\frac{3}{n-1}\cdot 2n} = a_n^{b_n}, \text{ con:}$$

$$a_n = \left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{3}} \to e; \; b_n = \frac{3}{n-1}\cdot 2n = \frac{6n}{n-1} \to 6,$$

perciò la successione $a_n^{b_n} \to e^6$.

3.20. e^8.

3.21. e^{-5}.

3.22. e^4.

3.23. 1.

3.24. $-\frac{1}{4}$.

3.25. 0.

3.26. $+\infty$.

3.27. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3\cdot 2^n} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n} \to 0, \text{ perciò } a_n \to 0.$$

3.28. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1, \text{ perciò } a_n \to +\infty.$$

3.29. Successione positiva,

$$\frac{n^{\frac{1}{n}}2^n}{(n+1)!} \sim \frac{2^n}{(n+1)!} \equiv b_n.$$

Studiamo b_n col criterio del rapporto.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} \to 0,$$

perciò $b_n \to 0$ per il criterio del rapporto, e la successione di partenza tende a 0 per il criterio del confronto asintotico.

Si noti come questo procedimeno porti a espressioni più "pulite" di quelle che si otterrebbero applicando il criterio del rapporto direttamente alla successione di partenza.

3.30. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n} \to 0. \quad \text{Quindi } a_n \to 0.$$

3.31. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1, \text{ quindi } a_n \to 0.$$

3.32. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4} \to +\infty,$$

quindi $a_n \to +\infty$.

3.33. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{n!3^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{3} \to \frac{e}{3} < 1,$$

quindi $a_n \to 0$.

3.34. Successione positiva, la studiamo mediante stime asintotiche.

$$\log(n+2^n) = \log\left[2^n\left(1+\frac{n}{2^n}\right)\right] = n\log 2 + \log\left(1+\frac{n}{2^n}\right) \sim n\log 2$$

(perché $n\log 2 \to +\infty$ mentre $\log\left(1+\frac{n}{2^n}\right) \to 0$).

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)} \sim \frac{1}{en}.$$

Dunque $$a_n \sim n\log 2 \cdot \frac{1}{en} = \frac{\log 2}{e}.$$

Pertanto la successione converge a $\frac{\log 2}{e}$.

3.35.

$$a_n \equiv \left(\frac{n^2 - n^{3/2} + 1}{n^2 - 5n}\right)^{n(3+\sin n)} = e^{n(3+\sin n)\log\left(\frac{n^2-n^{3/2}+1}{n^2-5n}\right)} \equiv e^{b_n}.$$

Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1,

$$b_n \sim n(3+\sin n)\left(\frac{n^2 - n^{3/2} + 1}{n^2 - 5n} - 1\right) =$$

$$= n(3+\sin n)\left(\frac{-n^{3/2} - 5n + 1}{n^2 - 5n}\right) \sim -\sqrt{n}(3+\sin n) \leq -2\sqrt{n}$$

(perché $3 + \sin n \geq 2$). Per il teorema del confronto e del confronto asintotico, $b_n \to -\infty$, perciò $a_n \to 0$.

3.36. Poiché $(n + \log n) \sim n \to +\infty$ e $(2n+1) \sim 2n \to +\infty$,

$$\frac{n^2[\log(n+\log n)]\log(2n+1)}{(2n+3)^2\log^2 n} \sim \frac{n^2\log n\log(2n)}{4n^2\log^2 n} =$$

$$= \frac{\log(2n)}{4\log n} = \frac{\log 2 + \log n}{4\log n} \sim \frac{\log n}{4\log n} = \frac{1}{4}.$$

Dunque il limite cercato è $\frac{1}{4}$.

3.37.
$$a_n \sim \frac{n^2\log n}{n\log^2 n \cdot n} = \frac{1}{\log n} \to 0.$$

3.38.
$$a_n \sim \frac{3^n n^2}{n^4 e^n} = \frac{3^n}{n^2 e^n} = \frac{(3/e)^n}{n^2} \to +\infty$$

per la gerarchia degli infiniti, in quanto $(3/e) > 1$.

In alternativa, la successione $\frac{(3/e)^n}{n^2}$ si poteva studiare col criterio del rapporto.

3.39.
$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \to 0,$$

e per il criterio del confronto, $a_n \to 0$.

3.40.

$$\left|\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right| \leq \frac{1}{n\pi} \to 0,$$

e per il teorema del confronto $\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \to 0$;

$$\log\left(\sin\frac{\pi}{n}\right) \to -\infty \text{ perché } \sin\frac{\pi}{n} \to 0^+.$$

Perciò $a_n \to -\infty$, per il teorema sull'aritmetizzazione parziale di ∞.

3.41. Successione a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, $a_n \to 0$.

3.42.

$$\left(\frac{n^2+2n}{n^2-3}\right)^{-5n} = e^{-5n\log\left(\frac{n^2+2n}{n^2-3}\right)} \equiv e^{a_n};$$

$$a_n \sim -5n\left(\frac{n^2+2n}{n^2-3} - 1\right) \sim -5n\left(\frac{2n+3}{n^2-3}\right) \sim -5n \cdot \frac{2}{n} = -10.$$

Quindi $$e^{a_n} \to e^{-10}.$$

3.2. Concetti di base su limiti di funzioni, asintoti, continuità

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 3, §2, §3.1.

Questo paragrafo riguarda: le varie definizioni di limite di funzione (finito, infinito, al finito, all'infinito, per eccesso e per difetto, destro, sinistro); il modo in cui si dimostra la non esistenza di un limite; la definizione di asintoto verticale o orizzontale (gli asintoti obliqui saranno trattati nel §3.4).

Si utilizzano i teoremi fondamentali sui limiti, ma non si utilizzano ancora né i limiti notevoli né le stime asintotiche (argomenti a cui è dedicato il §3.3).

3.2.A. Limiti di funzioni elementari

Questi primi esercizi richiedono semplicemente la conoscenza dei limiti delle funzioni elementari alla frontiera del loro insieme di definizione, ossia, sostanzialmente, la conoscenza dei grafici delle funzioni elementari e delle varie definizioni di limite. Pertanto non si presentano esempi svolti. Nel rispondere, immaginare o tracciare il grafico qualitativo della funzione, e riflettere sulla definizione di limite coinvolta.

Esercizi

Scrivere il valore del seguente limite, se esiste, oppure dire che non esiste. Se tale limite indica la presenza di un asintoto verticale o orizzontale, specificarlo.

3.43. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$

3.44. $\lim\limits_{x\to0^+} \log_2 x$

3.45. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{Ch}x$

3.46. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

3.47. $\lim\limits_{x\to0} x^{-2}$

3.48. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.49. $\lim\limits_{x\to\pm1} \arccos x$

3.50. $\lim\limits_{x\to0^+} \log_{1/2} x$

3.51. $\lim\limits_{x\to\pm1} \arcsin x$

3.52. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{1/2} x$

3.53. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$

3.54. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$

3.55. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}$

3.56. $\lim_{x\to0^\pm}x^{-3}$

3.57. $\lim_{x\to+\infty}\tan x$

3.58. $\lim_{x\to0^+}x^{-1/2}$

3.59. $\lim_{x\to-\infty}3^x$

3.60. $\lim_{x\to\pm\infty}|x|$

3.61. $\lim_{x\to0}x^{-1/3}$

3.62. $\lim_{x\to+\infty}\log_2 x$

3.63. $\lim_{x\to+\infty}\sin x$

3.64. $\lim_{x\to+\infty}x^{-1/2}$

3.65. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^\pm}\tan x$

3.66. $\lim_{x\to0^\pm}x^{-4}$

3.67. $\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x$

3.68. $\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{Sh}x$

3.69. $\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{Th}x$

3.70. $\lim_{x\to\pm\infty}[x]$
dove $[x]$ = parte intera di x

3.71. $\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{mant}(x)$
dove $\mathrm{mant}(x)$ = mantissa di x

3.2.B. Definizioni di limite

I prossimi esercizi riguardano le varie definizioni di limite date mediante "ε e δ" e la verifica di tali definizioni in casi concreti.

Esempi svolti

Esempio 3.6. Dare la definizione del seguente limite:

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty.$$

La definizione è la seguente:

$$\forall K>0\ \exists\delta>0 \text{ tale che } \forall x\in\mathbb{R}, 0<x+1<\delta\Rightarrow f(x)>K.$$

Esempio 3.7. Dimostrare in base alla definizione che

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2+x}{x-1} = +\infty$$

ossia che:

$$\forall K > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - 1 < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

Ciò che dobbiamo fare è trovare effettivamente δ in funzione di K. Fissiamo dunque $K > 0$, e chiediamoci quando risulta

$$\frac{2+x}{x-1} > K.$$

Risolvendo la disequazione per $x > 1$ si ha:

$$2 + x > K(x-1)$$

$$x(K-1) < 2 + K$$

il che, supponendo come è lecito $K > 1$ (ci interessa il caso in cui K è grande, visto che $f(x) \to +\infty$) dà

$$x < \frac{2+K}{K-1} = 1 + \frac{3}{K-1}.$$

Per ogni $K > 1$ scegliamo dunque

$$\delta = \frac{3}{K-1}.$$

Ripercorrendo a ritroso le disuguaglianze, vediamo che

$$0 < x - 1 < \frac{3}{K-1} \Rightarrow f(x) > K,$$

quindi la definizione di limite è soddisfatta. Se poi $K \leq 1$, qualunque scelta di $x > 1$ (e quindi qualunque δ) va bene, ad es. $\delta = 1$.

Esercizi

Scrivere la definizione (mediante $\varepsilon, \delta, K \ldots$) dei seguenti limiti:

3.72. $$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

3.73. $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3^+$$

3.74. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3.75. $$\lim_{x\to1} f(x) = 2$$

3.76. $$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

Dimostrare in base alla definizioni di limite le seguenti affermazioni (come nell'esempio 3.7):

3.77.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{x-5}\right) = 3$$

3.78.★ $$\lim_{x\to1}\frac{2x}{(x-1)^2} = +\infty$$

3.79.★ $$\lim_{x\to0}\frac{\log|x|}{2x+1} = -\infty$$

3.2.C. Limiti elementari di funzioni composte. Non esistenza del limite

Calcolare i seguenti limiti, se esistono, giustificando il procedimento seguito.

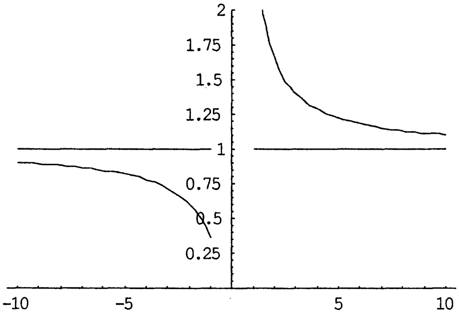
Se il limite non esiste, dimostrarlo utilizzando le tecniche illustrate nei prossimi esempi. Se il limite è raggiunto per eccesso o per difetto, specificare questa informazione. Se il limite indica la presenza di un asintoto verticale o orizzontale, specificarlo.

Esempi svolti

Esempio 3.8.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x}$; (b) $\lim_{x\to0} e^{1/x}$; (c) $\lim_{x\to0} e^{1/x^2}$; (d) $\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$

(a) Per $x \to \pm\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0^{\pm}$ e quindi (per il limite della funzione composta e la continuità della funzione elementare e^t) $e^{1/x} \to 1$. Più precisamente, tenendo conto della monotonia della funzione esponenziale si può dire che $\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1^{\pm}$ (perché per $t \to 0^{\pm}$ è $e^t \to 1^{\pm}$). La retta $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Inoltre l'informazione che $f(x) \to 1^{\pm}$ per $x \to \pm\infty$ ci permette di conoscere da che parte il grafico della funzione si avvicina all'asintoto. La situazione è descritta dal grafico:



(b) Per $x \to 0^{\pm}$ è $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, quindi

$$e^{1/x} \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$$

rispettivamente. Poiché i due limiti sono diversi e il testo chiedeva di calcolare il limite per $x \to 0$ (e non separatamente i limiti per $x \to 0^{\pm}$), la conclusione è che il limite *non esiste*. Possiamo comunque dire che $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$.

(c) Per $x \to 0$ è $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, quindi $e^{1/x^2} \to +\infty$ e $x = 0$ è asintoto verticale.

(d) Per $x \to +\infty$,

$$\frac{2x+1}{x+3} \to 2$$

(come si vede raccogliendo a numeratore e denominatore le parti principali $2x, x$, rispettivamente), quindi (per la continuità della funzione elementare $\log t$),

$$\log\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) \to \log 2.$$

$y = \log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Esempio 3.9.

(a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+\operatorname{sin}x}{2x-\operatorname{cos}x}$; (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+2\operatorname{sin}x}{2-\operatorname{cos}x}$; (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}\operatorname{sin}x$; (d) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \arctan\dfrac{1}{x}$

(a) Per $x \longrightarrow \pm\infty$, $\operatorname{sin}x$ e $\operatorname{cos}x$ non hanno limite, ma si mantengono limitati, perciò

$$\frac{3x+\operatorname{sin}x}{2x-\operatorname{cos}x} = \frac{3x\left(1+\frac{\operatorname{sin}x}{3x}\right)}{2x\left(1-\frac{\operatorname{cos}x}{2x}\right)} = \frac{3}{2}\left(\frac{1+\frac{\operatorname{sin}x}{3x}}{1-\frac{\operatorname{cos}x}{2x}}\right) \longrightarrow \frac{3}{2}.$$

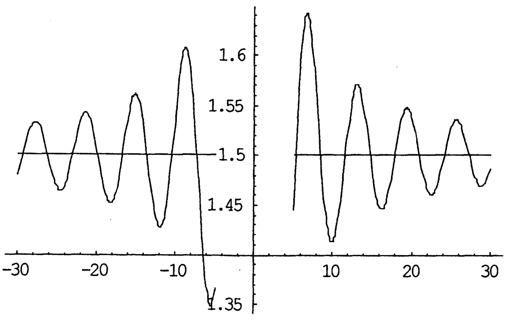
Notiamo che, a causa delle oscillazioni delle funzioni trigonometriche, la funzione non tende a $3/2$ né per eccesso né per difetto. Il grafico della funzione interseca infinite volte l'asintoto, come si vede risolvendo l'equazione

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1+\frac{\operatorname{sin}x}{3x}}{1-\frac{\operatorname{cos}x}{2x}}\right) = \frac{3}{2}$$

che porta a
$$\frac{\operatorname{sin}x}{3x} = -\frac{\operatorname{cos}x}{2x}$$

e quindi
$$\tan x = -\frac{3}{2},$$

che ha le infinite soluzioni $x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$. Il grafico infatti ha il seguente aspetto (lo tracciamo per $|x| > 3$ per evidenziare il solo comportamento in un intorno di infinito):



(b) In questo caso tanto il numeratore quanto il denominatore oscillano senza ammettere limite. Il limite non esiste. Per mostrarlo rigorosamente, applichiamo la *definizione successionale di limite*[1], esibendo due diverse successioni tendenti a $+\infty$, lungo le quali la funzione tende a limiti diversi (e lo stesso occorre fare per $-\infty$). Ad esempio per

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi; \quad b_n = 2n\pi$$

abbiamo:
$$f(a_n) = \frac{3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}{2 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = \frac{3+2}{2-0} = \frac{5}{2};$$

$$f(b_n) = \frac{3 + 2\sin(2n\pi)}{2 - \cos(2n\pi)} = \frac{3+0}{2-1} = 3;$$

pertanto non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Analogamente si mostra che non esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ considerando le successioni

$$c_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi; \quad d_n = -2n\pi$$

che tendono a $-\infty$.

(c) Per $x \to \pm\infty$, $\sin x$ non ammette limite ma si mantiene limitata, mentre $\frac{1}{x} \to 0$, quindi possiamo scrivere

$$\left|\frac{1}{x}\sin x\right| \leq \frac{1}{|x|} \to 0$$

e applicando il teorema del confronto concludere che il limite cercato è 0. Si noti che non si può dire che il limite sia 0^+ o 0^- perché la funzione presenta infinite oscillazioni di segno. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, e anche in questo caso il grafico della funzione lo attraversa infinite volte.

(d) Per $x \to 0^\pm$ si ha $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, quindi (limite della funzione composta) $\arctan\frac{1}{x} \to \pm\frac{\pi}{2}$.

[1] v. testo [BPS1], cap. 3, par. 2, Definizione 3.8.

Esercizi

3.80. $\lim_{x\to 0^\pm} e^{1/x}$

3.81.★ $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

3.82.★ $\lim_{x\to 1^\pm} \left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right)$

3.83. $\lim_{x\to 0^\pm} \left(\frac{2x+3}{x(x^2-1)}\right)$

3.84.★ $\lim_{x\to 1^\pm} e^{-\frac{1}{x^2-1}}$

3.85.★ $\lim_{x\to 1^+} \log(\log x)$

3.86.★ $\lim_{x\to 0^+} \sin(\log x)$

3.87. $\lim_{x\to \pm\infty} \sin\frac{1}{x}$

3.88.★ $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

3.89. $\lim_{x\to 0} \arctan\frac{1}{x}$

3.90. $\lim_{x\to 0} x\arctan\frac{1}{x}$

3.91. $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

3.92. $\lim_{x\to 0^\pm} e^{\cos x/x}$

3.93. $\lim_{x\to \pm\infty} e^{\sin x/x}$

3.94. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} e^{\tan x}$

3.95. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \log(\log^2(\tan x))$

Soluzioni § 3.2.

3.43. $+\infty$

3.44. $-\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$

3.45. $+\infty$

3.46. 0^+; $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

3.47. $+\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale

3.48. $+\infty$

3.49. $0; \pi$ (rispettivamente)

3.50. $+\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$

3.51. $\pm\frac{\pi}{2}$

3.52. $-\infty$

3.53. $+\infty$

3.54. $-\infty$

3.55. $+\infty$

3.56. $\pm\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale

3.57. non esiste

3.58. $+\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$

3.59. 0^+; $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

3.60. $+\infty$

3.61. non esiste

3.62. $+\infty$

3.63. non esiste

3.64. 0^+; $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

3.65. $\mp\infty$; $x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale

3.66. $+\infty$; $x = 0$ è asintoto verticale

3.67. $\pm\frac{\pi}{2}$; $y = \pm\frac{\pi}{2}$ asintoti orizz. per $x \to \pm\infty$ (rispettivam.)

3.68. $\pm\infty$

3.69. ± 1; $y = \pm 1$ asintoti orizz. per $x \to \pm\infty$ (rispettivam.)

3.70. $\pm\infty$

3.71. non esiste

3.72. $\forall K > 0\, \exists \delta : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) < -K$

3.73. $\forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < -K \Rightarrow 0 \leq f(x) - 3 < \varepsilon$

3.74. $\forall K > 0\, \exists H > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > H \Rightarrow f(x) < -K$

3.75. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

3.76. $\forall K > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - 1 < \delta \Rightarrow f(x) > K$

3.77. La definizione di $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+2}{x-5}\right) = 3$ è:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > K \Rightarrow \left|\left(\frac{3x+2}{x-5}\right) - 3\right| < \varepsilon.$$

Consideriamo la disequazione: $$\left|\left(\frac{3x+2}{x-5}\right) - 3\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{17}{x-5}\right| < \varepsilon; |x - 5| > \frac{17}{\varepsilon}$$

verificata se $$x > 5 + \frac{17}{\varepsilon}.$$

E' sufficiente allora scegliere $K = 5 + \frac{17}{\varepsilon}$ perché la definizione di limite sia soddisfatta.

3.78. La definizione di $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = +\infty$ è:

$$\forall K > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{2x}{(x-1)^2} > K$$

Consideriamo la disequazione: $$\frac{2x}{(x-1)^2} > K.$$

Per $|x-1| < \frac{1}{2}$ è $x > \frac{1}{2}$ e quindi $2x > 1$. Quindi

$$\frac{2x}{(x-1)^2} > \frac{1}{(x-1)^2}$$

e questo è $> K$ purché $$(x-1)^2 < \frac{1}{K}, |x-1| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Quindi pur di scegliere $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{K}}$ e $\delta \leq \frac{1}{2}$ la definizione è soddisfatta.

3.79. La definizione di $\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{2x+1} = -\infty$ è

$$\forall K > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{\log|x|}{2x+1} < -K.$$

Consideriamo la disequazione $\frac{\log|x|}{2x+1} < -K$. Per $|x| < \frac{1}{4}$ è $x > -\frac{1}{4}$ e $2x+1 > \frac{1}{2}$. Quindi, scegliendo $|x| < \delta \leq \frac{1}{4}$ e quindi in particolare $\log|x| < 0$, si ha

$$\frac{\log|x|}{2x+1} < 2\log|x| < -K \text{ purché } \log|x| < -\frac{K}{2}, |x| < e^{-K/2}.$$

Quindi è sufficiente scegliere $\delta \leq \frac{1}{4}$ e $\delta \leq e^{-K/2}$.

3.80. $+\infty$; 0^+, rispettivamente; $x = 0$ asintoto vertic. per $x \to 0^+$

3.81. Per $x \to 0$ si ha $\frac{1}{x^2} \to +\infty, -\frac{1}{x^2} \to -\infty$, quindi $e^{-1/x^2} \to 0^+$ (perché $e^t \to 0^+$ per $t \to -\infty$).

3.82. Scriviamo

$$\frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x+3}{x+1}.$$

Ora per $x \to 1$ si ha $\frac{2x+3}{x+1} \to \frac{5}{2}$ mentre per $x \to 1^{\pm}$ si ha $x-1 \to 0^{\pm}$ e $\frac{1}{x-1} \to \pm\infty$, quindi

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right) = \pm\infty.$$

$x = 1$ asintoto verticale.

3.83. $\mp\infty$; $x = 0$ asintoto verticale

3.84. Per $x \to 1^{\pm}$ si ha $x^2 - 1 \to 0^{\pm}$, $\frac{1}{x^2-1} \to \pm\infty$, $-\frac{1}{x^2-1} \to \mp\infty$, e

$$e^{-\frac{1}{x^2-1}} \to \begin{cases} 0^+ \\ +\infty. \end{cases}$$

$x = 1$ asintoto verticale per $x \to 1^-$.

3.85. Per $x \to 1^+$ si ha $\log x \to 0^+$, perciò $\log(\log x) \to -\infty$.
$x = 1$ asintoto verticale.

3.86. Il limite non esiste. Ad esempio, per

$$a_n = e^{-2n\pi}; \quad b_n = e^{\frac{\pi}{2}-2n\pi}$$

si ha $a_n, b_n \to 0^+$, $f(a_n) = 0$ per ogni n; $f(b_n) = 1$ per ogni n.

3.87. $0^{\pm}$; $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

3.88. Il limite non esiste. Ad esempio, per

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}; \quad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

si ha che $a_n, b_n \to 0^+$, e

$$f(a_n) = 0 \text{ per ogni } n, \text{ mentre } f(b_n) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty.$$

3.89. Il limite non esiste perché i limiti destro e sinistro sono diversi tra loro:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \arctan\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

3.90. 0

3.91. $0^{\pm}$; $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

3.92. $+\infty; 0^+$, rispettivamente; $x = 0$ asintoto vertic. per $x \to 0^+$.

3.93. 1; $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

3.94. $0^+; +\infty$, rispettivamente; $x = \frac{\pi}{2}$ asintoto vertic. per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

3.95. $-\infty$; $x = \frac{\pi}{4}$ asintoto verticale

3.3. Calcolo dei limiti mediante stime asintotiche e limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo il calcolo dei limiti (di funzioni o di successioni) facendo uso, oltre che delle tecniche di base, dei seguenti strumenti:

- stime asintotiche;
- limiti notevoli (trigonometrici, dedotti dalla definizione di e, o dati dal confronto di infiniti di tipo diverso -logaritmi, potenze, esponenziali-).

Si tratta di tecniche potenti che, combinando opportunamente un piccolo numero di strumenti, ci mettono in grado di calcolare limiti in una grande varietà di situazioni.[2] Anche se, come sempre, l'affronto degli esercizi si basa sullo studio della teoria, per cui si rimanda al libro di testo [BPS1], cap. 3, §3.3, 3.4, la cui conoscenza viene qui presupposta, in questo caso, data la particolare delicatezza dell'argomento, si è ritenuto opportuno presentare un vero e proprio percorso graduale e dettagliato, aggiungendo agli esempi svolti anche alcuni richiami, osservazioni e segnalazioni dei più comuni errori e fraintendimenti.

3.3.A. Richiami sull'utilizzo del simbolo di asintotico

Date due funzioni f_1, f_2, definite almeno in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^*$, diciamo che

$$f_1(x) \sim f_2(x) \quad \text{per} \quad x \to x_0$$

("$f_1(x)$ asintotica a $f_2(x)$ per $x \to x_0$") se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Nel caso $x_0 = +\infty$, per "intorno di x_0" si intende un intervallo del tipo $(K, +\infty)$. Analogamente per $-\infty$. Le *proprietà elementari della relazione di asintotico* che utilizziamo nel calcolo dei limiti sono le seguenti:

- *Uguale limite.* Se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ allora le due funzioni hanno lo stesso limite (finito o infinito) per $x \to x_0$, oppure entrambe non hanno limite.

Questo è il motivo per cui *è utile* sapere che due funzioni sono asintotiche.

- *Proprietà riflessiva.* Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim f_2(x)$, allora anche $f_2(x) \sim f_1(x)$.

---

[2] Come anticipato all'inizio del capitolo, il quadro di strumenti presentati in questo paragrafo sarà ulteriormente allargato nel prossimo capitolo, esaminando gli strumenti di calcolo dei limiti che fanno uso del calcolo differenziale (teorema di De L'Hospital e formule di Taylor-Mac Laurin).

Questo è il motivo per cui è corretto esprimersi dicendo semplicemente che "due funzioni sono asintotiche tra loro" (per $x \to x_0$), e non solo che "la prima è asintotica alla seconda".

- *Proprietà transitiva.* Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim f_2(x)$ e $f_2(x) \sim f_3(x)$ allora anche $f_1(x) \sim f_3(x)$.

Questo significa che si può procedere con *catene di relazioni asintotiche* (spesso alternate da relazioni di uguaglianza), per concludere alla fine che l'ultimo termine della catena è asintotico al primo.

- *Funzione asintotica a una costante.* Per $x \to x_0$, $f(x) \to c$ (numero reale *diverso da zero*) se e solo se $f(x) \sim c$.

Spesso l'ultimo termine di una catena di stime asintotiche è una costante: in tal caso, coincide col limite.

- *Uso di asintotico con prodotti e quozienti.* Se per $x \to x_0$ $f_1(x) \sim f_2(x)$ e $g_1(x) \sim g_2(x)$ allora anche

$$f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x);$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)};$$

$$f_1(x)^\alpha \sim g_1(x)^\alpha$$

per ogni esponente reale α per cui quanto scritto ha senso (per certi α occorre che le funzioni siano non negative).

Il simbolo di asintotico si comporta in modo naturale quindi rispetto a *prodotti, quozienti ed elevamento a potenza.* Non ci si deve lasciar prendere la mano pensando che si comporti altrettanto naturalmente con altre operazioni (come la somma o l'esponenziale): come si vedrà, *non è così.*

Puntualizzeremo nel seguito *poche* altre proprietà del simbolo di asintotico, e invitiamo fin d'ora lo studente a *non eseguire passaggi che coinvolgono il simbolo di asintotico ma non seguono da nessuna proprietà dimostrata.*

I ***limiti notevoli*** studiati (quelli dedotti dal limite notevole di $\sin x/x$ per $x \to 0$ e quelli dedotti dalla definizione del numero e) si possono riformulare in termini di stime asintotiche:

Box (3.I)

Per $x \to 0$,

$$\sin x \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \tan x \sim x; \quad \arctan x \sim x; \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2;$$

$$e^x - 1 \sim x;\ \ a^x - 1 \sim x\log a;\ \ \log(1+x) \sim x;\ \ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\log a};$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ costante non nulla}).$$

Inoltre, il teorema del limite della funzione composta permette di applicare le precedenti stime in una forma più flessibile, sostituendo alla variablile x una qualsiasi funzione infinitesima. Ad esempio,

Box (3.II)

Se $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$, e inoltre la funzione $\varepsilon(x)$ è definitivamente diversa da zero per $x \to x_0$, allora

$$\text{per } x \to x_0 \quad \sin\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x),\ \ e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x), \log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

e così via per gli altri limiti notevoli.

Asintotico in prodotti e quozienti

Esempio 10. Calcolare i seguenti limiti utilizzando, se è utile, il simbolo di asintotico.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\sin^2(3x)};\ \text{(b)}\ \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin x\cos x}{x^2};\ \text{(c)}\ \lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{3}{x}\right)$$

(a) Numeratore e denominatore sono funzioni continue che valgono 0 per $x = 0$; pertanto il quoziente dei limiti dà $0/0$, *forma di indeterminazione*. In altre parole il teorema sul limite del quoziente non dice nulla in questo caso. Occorre un'analisi più approfondita, che consenta di confrontare *come* tendono a zero numeratore e denominatore. Per le proprietà sopra ricordate, possiamo scrivere, per $x \to 0$,

$$\frac{x\sin(2x)}{\sin^2(3x)} \sim \frac{x \cdot 2x}{(3x)^2} = \frac{2}{9}$$

e concludere che il limite cercato è $2/9$.

(b) Come nell'esempio precedente, si ha una forma di indeterminazione $0/0$, e occorre uno studio asintotico.

$$\frac{\sin x \cos x}{x^2} \sim \frac{x \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x} \to \pm\infty \quad \text{per } x \to 0^{\pm}.$$

dunque il limite è $\pm\infty$, rispettivamente. Abbiamo utilizzato la stima asintotica $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ (limite notevole) e il fatto che per $x \to 0$ $\cos x \to 1$, perciò $\cos x \sim 1$. Si osservi *questo modo standard di sfruttare in una stima asintotica il fatto che uno dei fattori tende a una costante non nulla.*

(c) Per $x \to \pm\infty$ è $\frac{2}{x} \to 0$, quindi possiamo applicare la stima asintotica $\sin\left(\frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$ (applichiamo la stima nel box (3.II), con $\varepsilon(x) = 2/x$ per $x \to \pm\infty$). Inoltre, $\cos\left(\frac{3}{x}\right) \to 1$, perciò

$$x \sin\left(\frac{2}{x}\right)\cos\left(\frac{3}{x}\right) \sim x \cdot \frac{2}{x} \cdot 1 = 2,$$

e il limite cercato è 2.

Osservazione 3.1. Precisare il punto x_0. Nell'affermare una relazione asintotica è fondamentale, naturalmente, *precisare a quale punto x_0 tende la variabile x.* Ad esempio:

$$\sin x \sim x \text{ per } x \to 0 \quad \text{vero;}$$

$$\sin x \sim x \text{ per } x \to +\infty \quad \text{falso;}$$

$$\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \to \pm\infty \text{ vero;}$$

$$\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \to 0 \text{ falso.}$$

Osservazione 3.2. Non usare "asintotico" come "uguale". Il simbolo di "asintotico" condivide qualche proprietà col simbolo "uguale" (simmetria, transitività), ma non si può usare come un uguale. Ad esempio, per $x \to 0$, le relazioni

$$e^x - 1 \sim x; \; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

non sono equivalenti alle relazioni

$$e^x \sim 1 + x; \; \cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$

(che formalmente si ottengono dalle precedenti trattando la relazione asintotica come se fosse un'equazione). La relazione $e^x \sim 1 + x$, per esempio, non è falsa, ma è ingannevole, perché in realtà contiene solo l'informazione $e^x \to 1$ per $x \to 0$, quindi è più povera di informazioni rispetto a $e^x - 1 \sim x$. (Per capire queste affermazioni basta applicare la *definizione* di asintotico). Infatti, notiamo che per $x \to 0$, è anche

$$e^x \sim 1 \sim 1 + x^2,$$

ma da questo *non possiamo dedurre*

$$e^x - 1 \sim x^2 \text{ (falso!!!)}.$$

In sintesi: *non è lecito portare una quantità da una parte all'altra del segno di $\sim$ cambiandola di segno, come si farebbe con un'uguaglianza.* Come vedremo ancora, questo fatto è legato al problema dell'uso del simbolo di asintotico nelle somme.

Stime asintotiche e parte principale di una somma. Parte principale di polinomi, logaritmi o esponenziali

La *parte principale* di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ è, in parole povere, la più semplice funzione asintotica a $f(x)$, per $x \to x_0$.[3] Mostriamo con esempi come si utilizza il simbolo di asintotico per mettere in evidenza *la parte principale di una somma di più termini*. Si noti come generalmente la parte principale di una somma di termini è data da un solo termine (che eventualmente è *il prodotto*, ma non la somma, di più espressioni).

Esempio 3.11.	La parte principale di...	per $x \to \ldots$	è...
(a)	$\sin x$	0	x
(b)	$\sin x + 2$	0	2
(c)	$(2x^3 + 2x^2 - x)$	$\pm\infty$	$2x^3$
(d)	$(2x^3 + 2x^2 - x)$	0	$-x$
(e)	$(5x^3 + 2^x + 3\log^4 x)$	$+\infty$	2^x

[3] Questa non è ovviamente una definizione vera e propria, in quanto non è possibile precisare rigorosamente cosa significhi che una funzione è *più semplice* di un'altra, e tantomeno cosa significhi che è "la più semplice possibile"; tuttavia, con un po' di buon senso, è facile essere d'accordo sul fatto che, ad esempio, x sia più semplice di $\sin x$, o $2x^3$ sia più semplice di $(2x^3 + 2x^2 - x)$.

Dimostrazione delle affermazioni precedenti.

(a): è un limite notevole ormai familiare.

(b): $\sin x + 2 \to 2$, perciò $\sin x + 2 \sim 2$.

(c) $$\left(2x^3 + 2x^2 - x\right) = 2x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) \sim 2x^3$$

per $x \to \infty$, perché $\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) \to 1$ per $x \to \pm\infty$.

(d) $$\left(2x^3 + 2x^2 - x\right) = -x\left(1 - 2x - 2x^2\right) \sim -x$$

per $x \to 0$, perché $(1 - 2x - 2x^2) \to 1$, per $x \to 0$.

(e) $$\left(5x^3 + 2^x + 3\log^4 x\right) = 2^x\left(1 + \frac{5x^3}{2^x} + \frac{3\log^4 x}{2^x}\right) \sim 2^x$$

per $x \to \infty$, perché $\left(1 + \frac{5x^3}{2^x} + \frac{3\log^4 x}{2^x}\right) \to 1$ per $x \to +\infty$ (gerarchia degli infiniti).

Osservazione 3.3. Parte principale di un polinomio. I due esempi precedenti (c) e (d) hanno un significato generale, in quanto illustrano il metodo con cui si determina la parte principale di un polinomio, per $x \to 0$ o per $x \to \pm\infty$. In (c) si determina la parte principale di un *infinito*; in (d) la parte principale di un *infinitesimo*: in entrambi i casi la parte principale è quella "più grande", ma mentre per $x \to \pm\infty$ è "più grande" la potenza di *esponente maggiore*, per $x \to 0$ è "più grande" la potenza di *esponente minore*. Tutto ciò non vale solo per polinomi (somme di potenze intere), ma anche per somme di potenze a esponenti reali qualunque, come si vedrà in esempi successivi. In modo analogo, la somma di infiniti di tipo diverso, come in (e), è asintotica al termine che è infinito di ordine superiore.

Esempio 3.12. La parte principale di...		per $x \to \dots$	è...
(a)	$\sqrt{x} + \sqrt{x + x^2}$	0^+	$2\sqrt{x}$
(b)	$2x + 3\sqrt{x^2 + x}$	$+\infty$	$5x$
(c)	$2x + 3\sqrt{x^2 + x}$	$-\infty$	x
(d)	$\sqrt{x} - \sqrt{x + x^2}$	0^+	$-\frac{1}{2}x^{3/2}$

Questi esempi hanno a che fare con situazioni in cui vogliamo calcolare la parte principale di una somma di infinitesimi o infiniti in cui non c'è un singolo addendo che "pesa più degli altri" (come accade nei casi (c), (d), (e) dell'esempio precedente), ma ci sono più addendi di ugual peso (cioè infinitesimi o infiniti dello stesso ordine), che concorrono a formare la parte principale.

(a) Poiché per $x \to 0^+$ si ha $x + x^2 \sim x$, e quindi $\sqrt{x+x^2} \sim \sqrt{x}$, ci accorgiamo che i due addendi $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+x^2}$ sono infinitesimi dello stesso ordine. Se raccogliamo dalla somma la parte principale di ciascuno, otteniamo

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{1+x}\right) \sim 2\sqrt{x}$$

perché $\left(1 + \sqrt{1+x}\right) \to 2$ per $x \to 0^+$.

(b) Per $x \to +\infty$ si ha $\sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = x$, perciò raccogliamo

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 + 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \sim 5x$$

perché $\left(2 + 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \to 5$ per $x \to +\infty$.

(c) Per $x \to -\infty$ si ha $\sqrt{x^2+x} \sim \sqrt{x^2} = -x$, perciò raccogliamo

$$2x + 3\sqrt{x^2+x} = x\left(2 - 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \sim -x$$

perché $\left(2 - 3\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \to -1$ per $x \to +\infty$.

(d) Questo esempio sembra simile ad (a), ma se procediamo come sopra, scrivendo

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{1+x}\right)$$

ci troviamo a prima vista in un vicolo cieco, perché ora $\left(1 - \sqrt{1+x}\right) \to 0$, e non possiamo concludere che $\sqrt{x}\left(1 - \sqrt{1+x}\right) \sim 0$! (Si ricordi che la relazione $f(x) \sim 0$ è priva di senso, poiché significherebbe $\frac{f(x)}{0} \to 1$).

Questo è un caso in cui i due addendi non solo sono infinitesimi dello stesso ordine, ma hanno *parti principali opposte*. E' il fenomeno della *cancellazione delle parti principali in una somma*. Quando ciò accade in generale non è sufficiente un passaggio puramente algebrico per determinare la parte principale, ma occorre sfruttare qualche limite notevole. In questo caso si tratta di sfruttare la stima asintotica[4]

[4] Per la verità, *questa* stima asintotica, che segue da un limite notevole dedotto dalla definizione di e, si può stabilire anche per via puramente algebrica, con i passaggi:

$$\left(1-\sqrt{1+x}\right) \sim -\frac{1}{2}x \text{ per } x \to 0,$$

e concludere che

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x}\left(1-\sqrt{1+x}\right) \sim \sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^{3/2}.$$

Esempio 3.13. La parte principale di... per $x \to \ldots$ è...

(a)	$\log_2(x+3)$	$+\infty$	$\log_2 x$
(b)	$(x^3+2x^2)\log_2(x+3)$	$+\infty$	$x^3\log_2 x$

(a)

$$\log_2(x+3) = \log_2\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) = \log_2 x + \log_2\left(1+\frac{3}{x}\right) \sim \log_2 x$$

per $x \to +\infty$, perché $\log_2 x \to +\infty$ mentre $\log_2(1+3/x) \to 0$.

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato un fatto generale: se $f \to \pm\infty$ e g è limitata, $f+g \sim f$: per convincersene, basta raccogliere f:

$$f+g = f\cdot\left(1+\frac{g}{f}\right) \sim f \quad \text{perché} \quad \left(1+\frac{g}{f}\right) \to 1. \tag{1}$$

Osservazione 3.4. Parte principale di un logaritmo. L'esempio (a) ha un significato più generale, in quanto mostra come determinare la parte principale di un logaritmo quando il suo argomento tende a 0^+ o $+\infty$. Sia $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, e supponiamo che $g(x)$ tenda a 0^+ oppure a $+\infty$, per $x \to x_0$. (Quindi $\log_a g(x)$, con $a > 1$, tende, rispettivamente, a $-\infty$ o $+\infty$). Allora possiamo scrivere

$$\log_a f(x) = \log_a\left(g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a g(x) + \log_a\frac{f(x)}{g(x)} \sim \log_a g(x)$$

$$\left(1-\sqrt{1+x}\right) = \frac{1-(1+x)}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)} = -\frac{x}{1+\sqrt{1+x}} \sim -\frac{1}{2}x \text{ per } x \to 0,$$

ma solitamente in questi casi non ci sono scorciatoie algebriche.

perché

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \text{ in quanto } \frac{f(x)}{g(x)} \to 1, \text{ mentre } \log_a g(x) \to \mp\infty,$$

per $g(x)$ tendente a 0^+ oppure a $+\infty$, rispettivamente. Si può quindi concludere che:

se l'argomento del logaritmo è un infinito o un infinitesimo (positivo!), la parte principale del logaritmo è il logaritmo della parte principale.

Per completare il quadro, ricordiamo come si determina invece la parte principale del logaritmo quando l'argomento tende a 1, e quindi il logaritmo è infinitesimo. Abbiamo visto che se $\varepsilon(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora

$$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x) \text{ per } x \to x_0.$$

Ponendo $f(x) = 1 + \varepsilon(x)$ otteniamo che: se $f(x) \to 1$ per $x \to x_0$, allora

$$\log(f(x)) \sim f(x) - 1 \text{ per } x \to x_0.$$

Ad esempio,

$$\text{per } x \to 1, \ \log x \sim (x-1).$$

Nel prossimo box sintetizziamo i 3 modi tipici in cui si effettua la stima asintotica di un logaritmo:

Box (3.III)

Se per $x \to x_0$ $f(x) \sim g(x)$ e $f(x) \to 0^+$ oppure $f(x) \to +\infty$, allora

$$\log(f(x)) \sim \log(g(x)) \text{ per } x \to x_0;$$

se $f(x) \to 1$, allora

$$\log(f(x)) \sim f(x) - 1 \text{ per } x \to x_0.$$

Proseguiamo con la discussione degli esempi.

(b) Per $x \to +\infty$,

$$\left(x^3 + 2x^2\right)\log_2(x+3) \sim x^3 \log_2 x.$$

Abbiamo usato le stime

$$\left(x^3 + 2x^2\right) \sim x^3;$$

$$\log_2(x+3) \sim \log_2 x$$

(con le tecniche illustrate in precedenza), ovvero abbiamo determinato stime asintotiche dei singoli *fattori*; la conclusione segue perché l'asintotico si conserva per prodotti.

Osservazione 3.5. Prodotto di infiniti di tipo diverso. A questo punto ci si può chiedere se nell'esempio (b) la funzione $x^3 \log_2 x$ sia effettivamente la più semplice funzione asintotica a quella di partenza. Ad esempio, poiché sappiamo che per $x \to +\infty$ l'infinito x^3 è di ordine superiore rispetto a $\log_2 x$,

possiamo dire che $x^3 \log_2 x \sim x^3$?

La risposta è *negativa*, come si vede subito applicando la definizione di asintotico:

$$\text{per } x \to +\infty, \quad \frac{x^3 \log_2 x}{x^3} = \log_2 x \to +\infty$$

mentre, per valere la relazione asintotica, il quoziente dovrebbe tendere a 1. Si rifletta sul confronto:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{per } x \to +\infty, \quad x^3 + \log_2 x \sim x^3 \text{ è vero, mentre} \\[2ex] \text{per } x \to +\infty, \quad x^3 \cdot \log_2 x \sim x^3 \text{ è falso.} \end{array}}$$

Queste relazioni non sono poi così strane, e sono facili da ricordare, se si riflette sulla seguente analogia elementare: in un calcolo numerico approssimato, se intendiamo il simbolo $\simeq$ come "circa uguale a",

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{è vero che } 1.000.000 + 10 \simeq 1.000.000 \\[2ex] \text{ma è falso che } 1.000.000 \cdot 10 \simeq 1.000.000. \end{array}}$$

Esempio 3.14. La parte principale di... per $x \to$ ... è...

$e^{x^2+x+1/x}$ $\quad +\infty \quad$ e^{x^2+x}

Infatti,

$$e^{x^2+x+1/x} = e^{x^2} e^x e^{1/x} \sim e^{x^2} e^x = e^{x^2+x},$$

perché $e^{1/x} \to 0$.

Si noti che l'espressione trovata *non può essere ulteriormente semplificata.* In altre parole,

$$\text{anche se } x^2 + x \sim x^2, \text{ da questo } \textit{non segue } e^{x^2+x} \sim e^{x^2}.$$

Infatti $\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \to +\infty$.

Osservazione 3.6. Parte principale di esponenziali. L'esempio precedente mostra il comportamento diverso di esponenziali e logaritmi quanto alla determinazione della parte principale. Diversamente da quanto accade per il logaritmo quando il suo argomento tende a $+\infty$ (si veda l'Osservazione 3.4), *la parte principale di un esponenziale non è l'esponenziale della parte principale.* Cerchiamo di capire meglio il perché, chiedendoci:

$$\text{sotto che ipotesi si può affermare che } e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \text{ ?}$$

Scriviamo:

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} \to 1 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \to 0.$$

Chiediamoci ora: sotto quali ipotesi è vero che se $f(x) \sim g(x)$ allora $f(x) - g(x) \to 0$?

$$f(x) - g(x) = g(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}_{\to 0} \to 0 \text{ se } g(x) \text{ è limitata.}$$

(poichè $f \sim g$, $f/g - 1 \to 0$; allora se g è limitata, il prodotto tende a zero). Dunque: se $f \sim g$ *e inoltre* g *è limitata* (e quindi anche f lo è), allora $f - g \to 0$; in generale però $f \sim g \not\Rightarrow f - g \to 0$; in particolare: se $f \sim g$ e g è limitata, allora $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$.

Abbiamo illustrato le principali tecniche e avvertenze da tener presenti nell'utilizzo delle stime asintotiche per la determinazione di parti principali e il calcolo dei limiti. I prossimi esercizi, che sono ancora in un certo senso di preparazione, vogliono mettere alla prova la comprensione di queste idee. Successivamente presenteremo i veri e propri esercizi di calcolo dei limiti, a loro volta preceduti da esempi svolti.

Esercizi sull'utilizzo del simbolo di asintotico

Per ogni affermazione fatta, dire se è vera o falsa:

3.96. per $x \to 0$ $e^x - 1 \sim \sin x$

3.97. per $x \to +\infty$ $\mathrm{Sh}x \sim x$

3.98. per $x \to +\infty$ $\mathrm{Sh}x \sim e^x$

3.99. per $x \to 0^+$ $x^2 \log x \sim x^2$

3.100. per $x \to 0^+$ $x^2 + \log x \sim x^2$

3.101. per $x \to +\infty$ $x^2 + \log x \sim x^2$

3.102. per $x \to 0$ $\sqrt[3]{x^2+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$

3.103. per $x \to 0$ $1 - \cos x \sim x^2$

3.104. per $x \to +\infty$ $\log(1+x) \sim x$

3.105. per $x \to +\infty$ $x^2 e^x \sim e^x$

3.106. per $x \to 0$ $x^2 + 2x \sim 2x$

3.107. per $x \to +\infty$ $x^2 + e^x \sim e^x$

3.108. per $x \to 0$ $\log x \sim x$

3.109. per $x \to +\infty$ $\log(1+x) \sim \log x$

3.110. per $x \to +\infty$ $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$

3.111. per $x \to +\infty$ $\log(2x + x^3) \sim 3\log x$

3.112. per $x \to 0$ $\sin^2(x^3) \sim x^6$

3.113. per $x \to 0$ $\sqrt[3]{x^2+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x^{2/3}$

3.114. per $x \to -\infty$ $\log(2+x^2) \sim 2\log|x|$

3.115. per $x \to 0$ $\mathrm{Ch}x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

3.116. per $x \to +\infty$ $\sin x \sim x$

3.117. per $x \to 0$ $x^2 e^x \sim x^2$

3.118. per $x \to 0^+$ $\log(3x) \sim \log x$

3.119. per $x \to +\infty$ $x^2 + e^x \sim e^x$

3.120. Se per $x \to x_0$ $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \sim f(x)$, allora

$$\text{per } x \to x_0 \quad \log g(x) \sim \log f(x).$$

3.121. Se per $x \to x_0$ $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \sim f(x)$, allora

$$\text{per } x \to x_0 \quad e^{g(x)} \sim e^{f(x)}.$$

3.122. Se per $x \to x_0$ $f(x) \to 0$ e $g(x) \sim f(x)$, allora

$$\text{per } x \to x_0 \quad \sqrt[3]{g(x)} \sim \sqrt[3]{f(x)}.$$

Dare una stima asintotica della seguente funzione, mediante una funzione più semplice (del tipo cx^α, o $c(x-x_0)^\alpha$ per opportuni $c, \alpha \in \mathbb{R}$)

3.123. per $x \to 0$ $e^{2x^3} - 1 \sim \ldots$

3.124. per $x \to +\infty$ $\sqrt[3]{x^3+x} - x \sim \ldots$

3.125. per $x \to 1$ $x^2 \log x \sim \ldots$

3.126. per $x \to 0^+$ $\sqrt[3]{8x+x^2} + \sqrt[3]{x} \sim \ldots$

3.127. per $x \to +\infty$ $\sqrt[3]{8x+x^2} - 3x^{2/3} \sim \ldots$

3.128. per $x \to +\infty$ $\sqrt[3]{8x+x^2} - x^{2/3} \sim \ldots$

3.3.B. Richiami sulla gerarchia degli infiniti

Cominciamo col ricordare il seguente risultato di confronto tra infiniti di tipo diverso, che abbiamo già utilizzato varie volte, anche con le successioni:

Proposizione 3.1. Gerarchia degli infiniti per $x \to \infty$. *Consideriamo, per $x \to +\infty$, le seguenti tre famiglie di funzioni:*

$$(\log_a x)^\alpha \quad (a > 1, \alpha > 0); \quad x^\beta \quad (\beta > 0); \quad b^x \quad (b > 1).$$

(Si osservi che tendono tutte a $+\infty$). Allora la prima è "o piccolo" della seconda, che a sua volta è "o piccolo" della terza.

Esplicitamente, questo significa che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$$

per ogni $a > 1$, $\alpha > 0, \beta > 0, b > 1$. Una dimostrazione di questa proposizione mediante il Teorema di De L'Hospital è riportata sul libro di testo [BPS1], cap.4, §4.4. Mostriamo l'utilizzo tipico dei confronti precedenti nel calcolo di limiti più complessi.

Esempio 3.15. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2^x + \log(1+x^2)}{1+3x}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log(1+x^2) + 3x^2\log x + 1}{x^4 2^{-x} + x^2\log(x+1)}.$$

(a) Per $x \to +\infty$ si ha $\log(1+x^2) \sim \log(x^2) = 2\log x$, che è un infinito di ordine inferiore rispetto a 2^x, quindi:

$$\text{Num.} = 2^x + \log(1+x^2) \sim 2^x.$$

Perciò

$$f(x) \sim \frac{2^x}{3x} \to +\infty$$

ancora per la gerarchia degli infiniti.

Per $x \to -\infty$, invece è $2^x \to 0$ e

$$\log(1+x^2) \sim \log(x^2) = 2\log|x| \to +\infty,$$

perciò $$f(x) \sim \frac{2\log|x|}{3x} \to 0^-$$

per la gerarchia degli infiniti.

(b) Per $x \to +\infty$, $x\log(1+x^2) \sim x\log(x^2) = 2x\log x$, che è un infinito di ordine inferiore rispetto a $3x^2\log x$, quindi

$$\text{Num.} \sim 3x^2\log x.$$

A denominatore, $x^4 2^{-x} \to 0$, perciò

$$\text{Den.} \sim x^2\log(x+1) \sim x^2\log x$$

quindi $$f(x) \sim \frac{3x^2\log x}{x^2\log x} = 3,$$

che è il limite cercato.

La Proposizione precedente mostra come confrontare logaritmi, potenze ed esponenziali a $+\infty$. Ci si può chiedere se valgano risultati analoghi nell'origine. La domanda va però formulata in modo più preciso, in quanto, per $x \to 0^+$,

$$\log x \to -\infty; \quad x^\beta \to 0 \ (\beta > 0); \quad b^x \to 1.$$

Pertanto, il quoziente tra due di queste tre funzioni non dà forme di indeterminazione (il confronto è banale). Sono però forme di indeterminazione interessanti quelle contenute nella prossima:

Proposizione 3.2. Gerarchia degli infiniti per $x \to 0^+$. *Valgono i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^\beta |\log x|^\alpha = 0$$

per ogni $\beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (si osservi che il limite dà una forma di indeterminazione $[0 \cdot \infty]$ se $\alpha > 0$; per $\alpha \leq 0$ non c'è nessuna forma di indeterminazione);

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b^{-1/x^\alpha}}{x^\beta} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta b^{1/x^\alpha} = +\infty$$

per ogni $b > 1, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ (si osservi che i limiti danno forme di indeterminazione $[0/0], [0 \cdot \infty]$, rispettivamente, se $\beta > 0$, mentre se $\beta \leq 0$ non c'è nessuna forma di indeterminazione).

Dimostrazione. Proviamo entrambi gli asserti con la tecnica di cambiamento di variabile nel limite, riconducendoci alla Proposizione precedente (confronto per $x \to +\infty$). Per il primo limite, supponiamo $\alpha > 0$, altrimenti il limite è banale.

$$\lim_{x\to 0^+} x^\beta |\log x|^\alpha =$$

ponendo $x = 1/t$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{|\log t|^\alpha}{t^\beta} = 0$$

per il confronto tra logaritmi e potenze all'infinito (Proposizione 3.1). Per il secondo limite, supponiamo ora $\beta > 0$, altrimenti il limite è banale.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b^{-1/x^\alpha}}{x^\beta} =$$

ponendo $x = 1/t$
$$= \lim_{t\to+\infty} t^\beta b^{-t^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\beta}{b^{t^\alpha}} =$$

ponendo $t^\alpha = y$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{y^{\beta/\alpha}}{b^y} = 0$$

per il confronto tra potenze e esponenziali all'infinito (Proposizione 3.1). Infine, il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta b^{1/x^\alpha}$ è il limite del reciproco rispetto al precedente, quindi dà $+\infty$.

La tecnica di cambiamento di variabile insieme ad opportuni passaggi algebrici può anche servire per confrontare tra loro infiniti di tipo diverso rispetto agli infiniti "standard" dati da logaritmi, potenze ed esponenziali. Si considerino i prossimi esempi:

Esempio 3.16. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3(\log x)}{2\log x}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{3^{x^2}}.$$

(a) Ponendo $t = \log x$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3(\log x)}{2\log x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log^3 t}{2t} = 0$$

per il confronto tra logaritmi e potenze (Proposizione 3.1).

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{3^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x\log_3 x}}{3^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 3^{(x\log_3 x - x^2)}.$$

D'altro canto per la Proposizione 3.1 è

$$x\log_3 x - x^2 \to -\infty, \text{ quindi}$$

$$3^{(x\log_3 x - x^2)} \to 0.$$

3.3.C. Calcolo di limiti mediante limiti notevoli e stime asintotiche

Esempi svolti

Esempio 3.17. ***Limiti notevoli.*** Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-x\right)}{\mathrm{Sh}(2x)\mathrm{Ch}(3x)};\quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2(3x)}{(\cos(2x)-1)\cos(3x)}.$$

(a) Stimiamo questi fattori mediante le stime asintotiche dedotte dai limiti notevoli:

$$\left(\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)-1\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2;\quad \mathrm{Sh}(2x)\sim 2x.$$

Stimiamo inoltre $$\left(\sqrt[3]{x}-x\right)\sim\sqrt[3]{x}$$

(parte principale della somma di infinitesimi di ordine diverso). Infine, poiché $\mathrm{Ch}(3x)\to 1$, è semplicemente $\mathrm{Ch}(3x)\sim 1$. Quindi:

$$f(x)\sim\frac{-\frac{1}{2}x^{2/3}\cdot x^{1/3}}{2x}=-\frac{x}{4x}=-\frac{1}{4}$$

e il limite è $-\frac{1}{4}$.

(b) I due fattori $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ e $\cos(3x)$ tendono a una costante non nulla, perciò si stimano semplicemente con il loro limite. Per gli altri due fattori $\sin^2(3x)$ e $(\cos(2x)-1)$ usiamo le stime dedotte dai limiti notevoli e abbiamo:

$$\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2(3x)}{(\cos(2x)-1)\cos(3x)} \sim \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(3x)^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2\cdot 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}9x^2}{-2x^2} = -\frac{9}{2\sqrt{2}}$$

e questo è il limite cercato.

Esempio 3.18. ***Limiti notevoli.*** Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to+\infty} x^2\log\left[\cos\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)\right];\quad \text{(b)}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right)^{3x^2};$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+5x-1}-2x\right)\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)^{-1}.$$

(a) Poiché

$$\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)\to 0, \text{ si ha } \cos\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)\to 1.$$

Possiamo quindi usare la stima asintotica del logaritmo quando il suo argomento tende a 1 (v. box (3.III)), e abbiamo:

$$x^2\log\left[\cos\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)\right] \sim x^2\left[\cos\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)-1\right] \sim$$

sfruttando ora la stima asintotica del coseno quando il suo argomento è infinitesimo

$$\sim x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2+x}{1-x^2}\right)^2\right) \sim -\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Il limite è $-\frac{1}{2}$

Si presti attenzione all'*ordine* in cui abbiamo eseguito le due stime, sul logaritmo e sul coseno: nell'analizzare una funzione composta, partiamo dalla più *esterna* (in questo caso il logaritmo).

(b) Notiamo che per $x\to+\infty$, $\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right)\to 1$, mentre $3x^2\to 1$, quindi abbiamo una forma di indeterminazione $[1^\infty]$, che ci ricorda il limite che definisce il numero e. Dovremo ricondurci ai limiti notevoli legati ad e.

Cominciamo a riscrivere la funzione nella forma seguente:

$$\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right)^{3x^2} = e^{3x^2\log\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right)} = e^{h(x)}.$$

Questa è una procedura standard: una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$, in cui cioè la variabile si presenta sia alla base che all'esponente, può essere meglio analizzata riscrivendola

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\log\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)\log[f(x)]}}$$

perché a questo modo la variabile compare solo all'esponente.

Stimiamo ora la funzione

$$h(x) = 3x^2\log\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right).$$

Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1, il logaritmo tende a zero, quindi ora la forma di indeterminazione (per $h(x)$) è del tipo $[\infty \cdot 0]$. Usiamo la stima asintotica del logaritmo quando il suo argomento tende a 1:

$$h(x) \sim 3x^2\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2} - 1\right) = 3x^2\left(\frac{2x-1}{x^3+2}\right) \to 6.$$

Perciò
$$e^{h(x)} \to e^6$$

che è il limite cercato.

(c) Per $x \to +\infty$, $-\frac{1}{x} \to 0$, perciò

$$\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)^{-1} \sim \left(-\frac{1}{x}\right)^{-1} = -x;$$

$$\sqrt[3]{8x^3+5x-1} - 2x = 2x\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{8x^2}-\frac{1}{8x^3}} - 1\right) \sim$$

$$\sim 2x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8x^2} - \frac{1}{8x^3}\right) \sim 2x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8x^2} = \frac{5}{12x}.$$

Si noti il raccoglimento della parte principale $2x$, cioè $8x^3$ sotto radice, che è stato necessario per poter applicare la stima asintotica dedotta dal limite notevole legato alla funzione $(1+x)^\alpha$. La funzione $\left(\frac{5}{8x^2}-\frac{1}{8x^3}\right)$ è effettivamente un infinitesimo per $x \to +\infty$, mentre non avremmo potuto applicare la stima direttamente alla differenza $\sqrt[3]{8x^3+5x-1}-2x$. Concludiamo:

$$f(x) \sim -x \cdot \frac{5}{12x} = -\frac{5}{12}$$

pertanto il limite cercato è $-\frac{5}{12}$.

Osservazione 3.7. Si confronti il procedimento seguito nell'esempio (b) per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3+2}\right)^{3x^2}$$

con il procedimento seguito nel §3.1 per calcolare analoghi limiti di successioni, come sarebbe ad esempio

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+2n+1}{n^3+2}\right)^{3n^2}.$$

Nel §3.1 ci riconducevamo al teorema

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e \text{ se } a_n \to \pm\infty,$$

il che portava a riscrivere la successione nella forma

$$\left(\frac{n^3+2n+1}{n^3+2}\right)^{3n^2} = \left[\left(1+\frac{2n-1}{n^3+2}\right)^{\frac{n^3+2}{2n-1}}\right]^{\left(\frac{2n-1}{n^3+2}\right)\cdot 3n^2}$$

per poter applicare il procedimento visto. Ora che conosciamo le stime asintotiche del logaritmo, abbiamo a disposizione un procedimento meno tortuoso. Lo studente è invitato a rifare qualcuno degli esercizi sui limiti di successioni (§3.1) che sfruttano la definizione di e, utilizzando ora il procedimento illustrato nell'esempio (b).

Esempio 3.19. ***Limiti di successioni.*** Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(n^2\right) + (2n+\sin n)\cos\frac{1}{n};\quad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} n(\sin n)\left(\sin\frac{1}{n}\right).$$

(a) Consideriamo

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(n^2\right) + (2n+\sin n)\cos\frac{1}{n}.$$

Per il primo addendo, maggioriamo il modulo

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(n^2\right)\right| \le \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \to 0,$$

quindi per il teorema del confronto,

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(n^2\right) \to 0.$$

Per il secondo addendo, poiché $\cos\frac{1}{n} \to 1$ e $(2n+\sin n) \sim 2n$ (somma di una successione che tende a $+\infty$ e una limitata),

$$(2n+\sin n)\cos\frac{1}{n} \sim (2n+\sin n) \sim 2n \to +\infty.$$

Perciò $$a_n \to +\infty$$

(teorema su "aritmetizzazione parziale di infinito"): la successione a_n è divergente.

(b)Sia $$a_n = n(\sin n)\left(\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$n\sin\frac{1}{n} \sim n\cdot\frac{1}{n} = 1$$

mentre $\sin n$ è irregolare. Perciò $a_n \sim \sin n$ è irregolare.

Esercizi

3.129. $$\lim_{x\to\pm\infty} e^x \log|x|;\ \lim_{x\to 0}(\text{idem})$$

3.130. $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{-x}+3e^{2x}}$$

3.131. $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x|+2^x}{x}$$

3.132. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\cos(x^{1/4})-1}$$

3.133. $$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(x^5+x\right)^{1/3}-x^{5/3}\right)$$

3.134. $$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$$

3.135. $$\lim_{x\to 0} \left[x\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{1/x}\right]$$

3.136. $$\lim_{x\to+\infty} x\left(3^{\frac{2x+1}{x^2+1}}-1\right)$$

3.137. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}\text{Sh}x}{\sqrt{x}}$$

3.138. $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Ch}(\sin x)-1}{\log^2(1+x)}$$

3.139. $$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+2}\right)^x.$$

3.140. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log x}{\log(1+x)+e^{1/x}}.$$

3.141.★ $$\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \sin\log x \cdot \log\sin x$$

3.142.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x \sin x}$$

3.143. $$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+3x}\right)^x$$

3.144.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\cos\sqrt{3}x\right)\sin^2 x}{x^3 \tan 2x}$$

3.145.★ $$\lim_{x\to \pm\infty} |x| \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\right)$$

3.146. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x^3)}{x^4 \tan(x^2)}$$

3.147.★ $$\lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{3x}$$

3.148. $$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1-2x)}{e^{x^2}-1}$$

3.149.★ $$\lim_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$$

3.150.★ $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x+\log(1+x^2)}{\log|x|}$$

3.151.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x-1}$$

3.152.★ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x}$$

3.153.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(x^2)}{2x^3\sin(x^3)}$$

3.154.★ $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)(\sin x)^2\right]$$

3.155.★ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^4}-x^{4/3}\right)$$

3.156.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-1)}{\tan(x^3)}$$

3.157.★ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x-3\log x}{\log(1+x)+(1+2\log x)^2}$$

3.158.★ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$

3.159.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+3x)}{\sin^2(2x)}$$

3.160.★ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)(\sin x)^2\right]$$

3.161.★ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}-x^{4/3}\right)$$

3.162. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^3(2x)}{3\sin(x^5)}$$

3.163. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\tan x}$$

3.164. $$\lim_{x\to\pm\infty}(e^x - e^{-x})$$

3.165. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2x^2+3x^3}{(2x+1)^3}$$

3.166. $$\lim_{x\to 0^\pm}\left(\cos x\cdot e^{1/\sin x}\right)$$

3.167. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x - 2\log^2 x}{(1+\log x)^2};\quad \lim_{x\to+\infty}(\text{idem});\quad \lim_{x\to 1}(\text{idem})$$

3.168. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-3x}}{x};\quad \lim_{x\to\pm\infty}(\text{idem})$$

3.169. $$\lim_{x\to 0^+} x\sin\log x$$

3.170. $$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x+2}{2x+3}}-\sqrt{e}\right)$$

3.171. $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+2}-x\right)$$

3.172. $$\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left[\sqrt[5]{x^3+2x+1}-x^{3/5}\right]x^{8/5}\right\}$$

3.173.★ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)+(\log x)^{1/2}}{\log(\log^3 x)+x(\log x)^{1/3}}.$$

3.174.★ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^x}{x^{\log x}}.$$

3.175.★ $$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1+3x}{1+x}}-e^3\right)$$

3.176.★ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{1/x}}{e^{-x}+x\log x}$$

3.177.★ $$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{1+x^2}{2x+x^2}\right)$$

3.178. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x}{2x^2-x+1}\right)^{x}$$

3.179. $$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+2}\right)$$

3.180. $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+3x^2}+x\right)x$$

3.181. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[5]{x^5+2x^3}-x\right)}{\sin(1/x)}$$

3.182. $$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{3x+x^2}{1+x+x^2}\right)$$

3.183.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\right)}{\sqrt[3]{x^3+2x}-x}\right)$$

3.184.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4}\right)^{3x}$$

3.185.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+4}\right)^{2x+1}$$

3.186.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x^3-2x+1}{x^3+x+4}\right)\right]\cdot\left(\frac{x^3+\log x}{2x+5}\right)$$

3.187.★ $$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x+5}{3x-2}}-\sqrt[3]{e}\right)$$

3.188.★ $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+4}\right)^{x+\log|x|}$$

3.189.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}+\log^2 x\right)\left(\sqrt[3]{x^2+5x-1}-x^{2/3}\right)$$

3.190.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2^{-x}}{\log x+2x^2+4x}\right)^{x}$$

3.191.★ $$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\left(\frac{2x^2+\log^3 x}{x^2+3x+\log^4 x}\right)}-e^2\right)$$

3.192.★ $$\lim_{x\to-\infty}\left(2^x+\log|x|+e^{1/x}\right)\left\{\sqrt{x^2-1}-x\right\}$$

3.193.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-5x}\right)^{(x+\log x)}$$

3.194.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+2x^3-3}-x\right)\left(x^2\sin\frac{3}{x}\right)$$

3.195.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+\log x\right)\cdot\log\left(\frac{x^2+2}{x^2-5}\right)$$

3.196.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+16x^3-2}-x\right)\cdot(x+\log x)$$

3.197.★ $$a_n=\tan\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\cos\left(n^2\right)+\left(\frac{2n+1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}$$

3.198.★ $$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)\left\{n^{2/3}-\sqrt[3]{n^2-\sqrt{n}}\right\}$$

3.199.★ $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{n^4+3n^2-n+1}-n}{\sin\frac{1}{n}}\right)$$

3.200.★ $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+\log^3 n}{n\cdot\sqrt[n]{n^2+\log^2 n}\cdot\log^4 n}\right)$$

3.201.★ $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n\log^3 n}-n\right)\cdot\frac{n}{\log^4 n}$$

3.202.★ $$\lim_{n\to+\infty} n(\sin n)^3\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

3.203.★ $$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}+\arctan n\right)$$

3.204.★ $$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(n^3+5n-1\right)^{1/3}-n\right]\log(2+e^n)$$

3.205.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{2x-3}{x+5x^2}\right)}-1\right)\left(x+5\log^2 x\right)$$

3.206.★ $$\lim_{x\to+\infty}(x+2\log x)\log\left(\frac{x^3+4}{2-3x+x^3}\right)$$

3.207.★ $$\lim_{x\to0}(1+\sin(3x))^{\frac{\cos(2x)}{x}}$$

3.208.★ $$\lim_{x\to0^+}(1-\cos x)^{1/\log x}$$

3.209.★ $$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x^3)}{(1-\cos x)^2}$$

3.210.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-x\right)\log\left(e^{x^2}+1\right)$$

3.211.★

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2+\log x+e^{-x}\right)\left\{\log\left(x^2+3x-1\right)-2\log x\right\}$$

3.212.★

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/6}\cdot\sin\left(\left(2x\right)^{1/3}\right)}{1-\cos\sqrt[4]{x}}$$

3.213.★

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log^2\left(1+\sqrt{3}x^2\right)}{\left(1-\cos^2(5x)\right)\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

3.214.★

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x+4}-x}{\cos\left(\frac{7}{x}\right)\sin\left(\frac{5}{x}\right)}$$

3.215.★

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}+e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e^{-\frac{1}{x}}\log x}$$

Soluzioni § 3.3.

3.96. vero
3.97. falso
3.98. falso
3.99. falso
3.100. falso
3.101. vero
3.102. vero
3.103. falso
3.104. falso
3.105. falso
3.106. vero
3.107. vero
3.108. falso
3.109. vero
3.110. vero
3.111. vero
3.112. vero
3.113. falso
3.114. vero
3.115. vero
3.116. falso
3.117. vero
3.118. vero
3.119. vero
3.120. vero
3.121. falso
3.122. vero

3.123. $2x^3$

3.124. $\frac{1}{3x}$

3.125. $(x-1)$

3.126. $3x^{1/3}$

3.127. $-2x^{2/3}$

3.128. $\frac{8}{3x^{1/3}}$

3.129. $+\infty, 0$, rispettivamente, per $x \longrightarrow \pm\infty$; $-\infty$.

3.130. $\frac{1}{3}$; 0

3.131. $+\infty$, 0

3.132. -2

3.133. 0

3.134. $\frac{1}{e}$

3.135. 0

3.136. 2log3

3.137. 0

3.138. $\frac{1}{2}$

3.139. e^3

3.140. 0

3.141. Il fattore sinlog$x$ non ammette limite ma è limitato in valore assoluto. Mostriamo che il prodotto degli altri due fattori tende a zero, da cui seguirà che il limite cercato è zero, per il teorema del confronto. Infatti:

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \log \sin x =$$

ponendo $\sin x = t$ $$\lim_{t\to 0^+} t\log t = 0$$

(gerarchia degli infiniti). Perciò il limite cercato è zero.

3.142. Notiamo che per poter applicare la stima asintotica su $(1-\cos x)$ alla funzione $\sqrt{\cos x}-1$ è necessario il passaggio algebrico:

$$\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x\sin x} = \frac{\cos x - 1}{x\sin x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

3.143. e^{-3}

3.144. $$\frac{\left(1-\cos\sqrt{3}x\right)\sin^2 x}{x^3\tan 2x} \sim \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x\right)^2\right)x^2}{x^3\cdot 2x} = \frac{\frac{3}{2}x^4}{2x^4} = \frac{3}{4}.$$

3.145. Poiché $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\right) \to 1$,

$$|x|\log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\right) \sim |x|\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+2}-1\right] = |x|\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right) \sim \frac{|x|}{x}.$$

Perciò $$\lim_{x\to\pm\infty}|x|\log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\right) = \pm 1.$$

3.146. 4

3.147. $$\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right)^{3x} = e^{3x\log\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right)} = e^{h(x)}.$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2+1} \to 1, \text{ perciò}$$

$$3x\log\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}\right) \sim 3x\left(\frac{x^2-2x}{x^2+1}-1\right) = 3x\left(\frac{-2x-1}{x^2+1}\right) \sim 3x\left(-\frac{2}{x}\right) = -6.$$

Perciò il limite cercato è e^{-6}.

3.148. -2

3.149. $$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right) \sim x\frac{1}{3x} = \frac{1}{3}$$

3.150. $$\frac{2^x+\log(1+x^2)}{\log|x|} \sim \frac{\log(1+x^2)}{\log|x|} \sim \frac{\log(x^2)}{\log|x|} = 2\frac{\log|x|}{\log|x|} = 2.$$

3.151. $$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-1} = \frac{e^x-1}{e^x-1} + \frac{1-e^{-x}}{e^x-1} = 1 + \frac{1-e^{-x}}{e^x-1} \to 2$$

perché $$\frac{1-e^{-x}}{e^x-1} \sim \frac{-(-x)}{x} = 1.$$

3.152. $$\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x} = e^{2x\log\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)} \equiv e^{f(x)}.$$

Poiché $\frac{x^2+3x}{x^2+1} \to 1$,

$$f(x) \sim 2x\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}-1\right) = 2x\left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right) \sim 2x\cdot\frac{3}{x} = 6.$$

Perciò $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)^{2x} = e^6.$$

3.153. $$\frac{\sin^3(x^2)}{2x^3\sin(x^3)} \sim \frac{(x^2)^3}{2x^3\cdot x^3} = \frac{1}{2}$$

3.154. $$\left|\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)(\sin x)^2\right| \leq \frac{1}{|x|}(\sin x)^2 \sim \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0.$$

Perciò per il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico, il limite è 0.

3.155. $$\left(\sqrt[3]{x^3+x^4}-x^{4/3}\right) = x^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right) \sim$$

$$\sim x^{4/3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{x^{1/3}}{3} \to \pm\infty.$$

3.156. $$\frac{x(\cos x-1)}{\tan(x^3)} \sim \frac{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

3.157. $$\frac{\log^2 x-3\log x}{\log(1+x)+(1+2\log x)^2} \sim \frac{\log^2 x}{4\log^2 x} = \frac{1}{4}.$$

3.158. $$\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\log\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)}{2x}} \equiv e^{f(x)}.$$

Poiché $\frac{1+3x}{1+2x} \longrightarrow 1$,

$$\frac{\log\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)}{2x} \sim \frac{\frac{1+3x}{1+2x}-1}{2x} = \frac{\frac{x}{1+2x}}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Perciò il limite è $\sqrt{e}$.

3.159. $$\frac{x\log(1+3x)}{\sin^2(2x)} \sim \frac{x\cdot 3x}{(2x)^2} = \frac{3}{4}.$$

3.160. $$\left|x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)(\sin x)^2\right| \leq \left|x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)\right| \sim \frac{1}{|x|} \longrightarrow 0,$$

perciò il limite è zero (per il criterio del confronto e del confronto asintotico).

3.161.

$$\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}-x^{4/3}\right) = x^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \sim x^{4/3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3x^{2/3}} \longrightarrow 0.$$

3.162. $\frac{8}{3}$

3.163. $-\frac{1}{2}$

3.164. $\pm\infty$

3.165. $\frac{3}{8}$

3.166. $+\infty$; 0^+, rispettivam., per $x \longrightarrow 0^{\pm}$

3.167. -2; -2; 0

3.168. 3; 0; $+\infty$

3.169. 0

3.170. $\frac{\sqrt{e}}{4}$

3.171. 2; $+\infty$

3.172. $\pm\infty$

3.173. E' una forma di indeterminazione $[\infty/\infty]$.

$$\text{Numeratore} \sim (\log x)^{1/2}$$

perché ponendo $\log x = t$ si ha $\log t + t^{1/2} \sim t^{1/2}$ (gerarchia degli infiniti).

$$\text{Denominatore} = 3\log(\log x) + x(\log x)^{1/3} \sim x(\log x)^{1/3}$$

a maggior ragione, perché $x(\log x)^{1/3}$ è infinito di ordine superiore rispetto a $(\log x)^{1/3}$ e quindi a $\log(\log x)$. Perciò

$$f(x) \sim \frac{(\log x)^{1/2}}{x(\log x)^{1/3}} = \frac{(\log x)^{1/6}}{x} \to 0$$

per confronto di infiniti, e il limite è zero.

3.174. Per confrontare i due infiniti riscriviamoli entrambi usando l'identità:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

$$(\log x)^x = e^{x\log\log x}; \quad x^{\log x} = e^{(\log x)^2}.$$

Ora poiché $x\log\log x \geq x$, e $x \gg (\log x)^2$ (dove $f \gg g$ significa "f è infinito di ordine superiore rispetto a g"), a maggior ragione è $x\log\log x \gg (\log x)^2$, quindi

$$e^{(\log x)^2} \gg e^{x\log\log x} \quad \text{e il limite cercato è 0.}$$

3.175. Poiché $\frac{1+3x}{1+x} \to 3$,

$$x\left(e^{\frac{1+3x}{1+x}} - e^3\right) = xe^3\left(e^{\frac{1+3x}{1+x}-3} - 1\right) \sim$$

$$\sim xe^3\left(\frac{1+3x}{1+x} - 3\right) = xe^3\left(\frac{-2}{1+x}\right) \to -2e^3.$$

3.176. Per $x \to 0^+$, $e^{-x} \to 1, x\log x \to 0$ perciò $e^{-x} + x\log x \to 1$ e

$$\frac{xe^{1/x}}{e^{-x} + x\log x} \sim xe^{1/x} \to +\infty$$

perché:
$$\lim_{x\to0^+} xe^{1/x} = \left[t = \frac{1}{x}\right] = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

per la gerarchia degli infiniti.

3.177. Poiché $\left(\frac{1+x^2}{2x+x^2}\right) \to 1$,

$$x\log\left(\frac{1+x^2}{2x+x^2}\right) \sim x\left(\frac{1+x^2}{2x+x^2} - 1\right) = x\left(\frac{1-2x}{2x+x^2}\right) \sim x\left(\frac{-2x}{x^2}\right) = -2.$$

3.178. e^2.

3.179. 3.

3.180. $-\frac{3}{4}$.

3.181. $\frac{2}{5}$

3.182. 2.

3.183. Diamo stime asintotiche degli infinitesimi a numeratore e denominatore. Poiché $\frac{x^2+3x-1}{x^2-1} \to 1$,

$$\text{Num} = \log\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\right) \sim \left(\frac{x^2+3x-1}{x^2-1} - 1\right) = \frac{3x}{x^2-1} \sim \frac{3}{x}$$

$$\text{Den} = \sqrt[3]{x^3+2x} - x = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}} - 1\right) \sim x \cdot \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3x}$$

$$f(x) \sim \frac{3}{x} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{9}{2}. \text{ Il limite cercato è } \frac{9}{2}.$$

3.184.
$$\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4}\right)^{3x} = e^{3x\log\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4}\right)} = e^{f(x)}$$

con:
$$f(x) \sim 3x\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4} - 1\right) = 3x\left(\frac{x-3}{2x^2+4}\right) \to \frac{3}{2}.$$

Dunque il limite cercato è: $e^{3/2}$.

3.185.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+4}\right)^{2x+1} = [1^\infty]$$

Poniamo:
$$\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+4}\right)^{2x+1} = e^{(2x+1)\cdot\log\left(\frac{x^2+3x+1}{x-2x+4}\right)} \equiv e^{g(x)}.$$

$$g(x) \sim 2x\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+4} - 1\right) = 2x\left(\frac{5x-3}{x^2-2x+4}\right) \sim \frac{2x\cdot 5x}{x^2} = 10.$$

Perciò
$$e^{g(x)} \to e^{10}.$$

3.186.

$$\left[\log\left(\frac{x^3-2x+1}{x^3+x+4}\right)\right]\left(\frac{x^3+\log x}{2x+5}\right) \sim \left(\frac{x^3-2x+1}{x^3+x+4} - 1\right)\left(\frac{x^3}{2x}\right) =$$

$$= \left(\frac{-3x-3}{x^3+x+4}\right)\cdot\frac{x^2}{2} \sim \frac{-3x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{2} = -\frac{3}{2}$$

dunque il limite cercato è $-\frac{3}{2}$.

3.187.
$$x\left(e^{\frac{x+5}{3x-2}} - \sqrt[3]{e}\right) = x\sqrt[3]{e}\left(e^{\frac{x+5}{3x-2}-\frac{1}{3}} - 1\right) \sim$$

$$\sim x\sqrt[3]{e}\left(\frac{x+5}{3x-2} - \frac{1}{3}\right) = x\sqrt[3]{e}\left(\frac{17}{3(3x-2)}\right) \to \frac{17}{9}\sqrt[3]{e}.$$

3.188.
$$\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+4}\right)^{x+\log|x|} = e^{(x+\log|x|)\log\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+4}\right)} \equiv e^{h(x)}$$

con
$$h(x) \sim x\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+4} - 1\right) = x\left(\frac{-x-3}{2x^2+4}\right) \to -\frac{1}{2}.$$

Quindi il limite cercato è $e^{-1/2}$.

3.189.

$$\left(\sqrt[3]{x} + \log^2 x\right)\left(\sqrt[3]{x^2+5x-1} - x^{2/3}\right) \sim \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2+5x-1} - x^{2/3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{x}\cdot x^{2/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}} - 1\right) \sim x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{x} = \frac{5}{3}.$$

3.190.
$$\left(\frac{2x^2-3x+2^{-x}}{\log x+2x^2+4x}\right)^x = e^{x\log\left(\frac{2x^2-3x+2^{-x}}{\log x+2x^2+4x}\right)} \equiv e^{h(x)}$$

Poiché $\left(\frac{2x^2-3x+2^{-x}}{\log x+2x^2+4x}\right) \to 1$,

$$h(x) \sim x\left(\frac{2x^2-3x+2^{-x}}{\log x+2x^2+4x} - 1\right) = x\left(\frac{-7x+2^{-x}-\log x}{\log x+2x^2+4x}\right) \sim \frac{-7x^2}{2x^2} = -\frac{7}{2}$$

Quindi
$$f(x) \to e^{-7/2}.$$

3.191.
$$f(x) = x\left(e^{\frac{2x^2+\log^3 x}{x^2+3x+\log^4 x}} - e^2\right) = xe^2\left(e^{\left(\frac{2x^2+\log^3 x}{x^2+3x+\log^4 x}-2\right)} - 1\right).$$

Poiché $\left(\frac{2x^2+\log^3 x}{x^2+3x+\log^4 x} - 2\right) \to 0$,

$$f(x) \sim xe^2\left(\frac{2x^2 + \log^3 x}{x^2 + 3x + \log^4 x} - 2\right) =$$

$$= xe^2\left(\frac{\log^3 x - 6x - 2\log^4 x}{x^2 + 3x + \log^4 x}\right) \sim xe^2\left(\frac{-6x}{x^2}\right) = -6e^2$$

Quindi $$f(x) \to -6e^2.$$

3.192. $$2^x + \log|x| + e^{1/x} \sim \log|x|$$

(perché $\log|x| \to +\infty; 2^x \to 0; e^{1/x} \to 1$);

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = x\left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right) \sim -2x \to +\infty;$$

$$f(x) \sim -2x\log|x| \to +\infty.$$

Si presti attenzione al passaggio $\sqrt{x^2} = -x$, perché $x \to -\infty$.

3.193. $$f(x) = e^{(x+\log x)\cdot\log\left(\frac{x^2+3x}{x^2-5x}\right)} \equiv e^{h(x)}.$$

$$h(x) \sim x \cdot \left[\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 5x} - 1\right] = x \cdot \frac{8x}{x^2 - 5x} \sim \frac{8x^2}{x^2} = 8,$$

quindi $f(x) \to e^8$.

3.194.

$$\left(\sqrt[5]{x^5 + 2x^3 - 3} - x\right)\left(x^2\sin\frac{3}{x}\right) \sim \left(\sqrt[5]{x^5 + 2x^3 - 3} - x\right)3x =$$

$$= 3x^2\left(\sqrt[5]{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^5}} - 1\right) \sim 3x^2\frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right) \to \frac{6}{5}.$$

3.195. $$f(x) \sim x^2\left[\frac{x^2 + 2}{x^2 - 5} - 1\right] = \frac{7x^2}{x^2 - 5} \to 7.$$

3.196. $$f(x) \sim x\left(\sqrt[5]{x^5+16x^3-2}-x\right) =$$

$$= x^2\left(\sqrt[5]{1+\frac{16}{x^2}-\frac{2}{x^5}}-1\right) \sim x^2\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{16}{x^2}-\frac{2}{x^5}\right) \sim x^2\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{16}{x^2}\right) = \frac{16}{5}.$$

3.197. $$\left|\tan\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\cos\left(n^2\right)\right| \le \left|\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right| \to 0,$$

quindi per il teorema del confronto,

$$\tan\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\cos\left(n^2\right) \to 0.$$

Ora: $$\left(\frac{2n+1}{n}\right)\cos\frac{1}{n} \to 2.$$

Perciò $$a_n \to 2,$$

in particolare la successione è convergente.

3.198. $$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[6]{n}};$$

$$\left\{n^{2/3}-\sqrt[3]{n^2-\sqrt{n}}\right\} = n^{2/3}\left\{1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^{3/2}}}\right\} \sim n^{2/3}\cdot\frac{1}{3n^{3/2}} = \frac{1}{3}n^{-5/6};$$

quindi $$a_n \sim \frac{n}{n^{1/6}}\cdot\frac{1}{3n^{5/6}} = \frac{1}{3} \quad \text{e il limite cercato è } \frac{1}{3}.$$

3.199. $$\frac{\sqrt[4]{n^4+3n^2-n+1}-n}{\sin\frac{1}{n}} = \frac{n\left(\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}-1\right)}{\sin\frac{1}{n}} \sim$$

$$\sim \frac{n\left(\frac{1}{4}\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)\right)}{\frac{1}{n}} \sim n^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{n^2} = \frac{3}{4}. \quad \text{Il limite è } \frac{3}{4}.$$

3.200. $$\sqrt[n]{n^2+\log^2 n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \sqrt[n]{1+\frac{\log^2 n}{n^2}} \to 1,$$

perciò $$a_n \sim \frac{n^2}{n\log^4 n} = \frac{n}{\log^3 n} \to +\infty$$

per la gerarchia degli infiniti.

3.201.

$$a_n = \left(\sqrt{1+\frac{\log^3 n}{n}} - 1\right) \cdot \frac{n^2}{\log^4 n} \sim \left(\frac{\log^3 n}{2n}\right) \cdot \frac{n^2}{\log^4 n} = \frac{n}{2\log n} \to +\infty.$$

3.202. $$|a_n| \le n\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0,$$

e per il criterio del confronto, $a_n \to 0$.

3.203. $$n\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1; \arctan n \to \frac{\pi}{2};$$

quindi $$a_n \to 1 + \frac{\pi}{2}.$$

3.204. $$\left[\left(n^3+5n-1\right)^{1/3} - n\right] =$$

$$= n\left[\left(1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right] \sim n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{5}{3n};$$

$$\log(2+e^n) \sim \log(e^n) = n;$$

$$a_n \sim \frac{5}{3n} \cdot n = \frac{5}{3} \quad \text{e il limite cercato è } 5/3.$$

3.205. Poiché $\frac{2x-3}{x+5x^2} \to 0$,

$$e^{\left(\frac{2x-3}{x+5x^2}\right)} - 1 \sim \frac{2x-3}{x+5x^2} \sim \frac{2x}{5x^2} = \frac{2}{5x}$$

mentre, per la gerarchia degli infiniti,

$$x + 5\log^2 x \sim x.$$

Quindi
$$f(x) \sim \frac{2}{5x} \cdot x = \frac{2}{5} \quad \text{e il limite è } \frac{2}{5}.$$

3.206. Poiché $\frac{x^3+4}{2-3x+x^3} \to 1$,

$$\log\left(\frac{x^3+4}{2-3x+x^3}\right) \sim \frac{x^3+4}{2-3x+x^3} - 1 = \frac{3x+2}{2-3x+x^3} \sim \frac{3x}{x^3} = \frac{3}{x^2}$$

mentre
$$(x + 2\log x) \sim x$$

quindi
$$f(x) \sim x \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x} \to 0, \quad \text{e il limite è } 0.$$

3.207.
$$(1+\sin(3x))^{\frac{\cos(2x)}{x}} = e^{\frac{\cos(2x)}{x}\log(1+\sin(3x))} \equiv e^{h(x)}$$

con
$$h(x) \sim \frac{1}{x} \cdot \sin(3x) \sim \frac{3x}{x} = 3,$$

quindi $e^{h(x)} \to e^3$.

3.208.
$$(1-\cos x)^{1/\log x} = e^{\frac{1}{\log x}\cdot\log(1-\cos x)} \equiv e^{h(x)}$$

con
$$h(x) \sim \frac{\log\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{\log x} = \frac{2\log x - \log 2}{\log x} \to 2,$$

quindi $e^{h(x)} \to e^2$.

3.209.
$$f(x) \sim \frac{x^3}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x} \to +\infty.$$

3.210. Poiché $x \to +\infty$,

$$\sqrt[3]{x^3-1} - x = x\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} - 1\right) \sim x \cdot \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{3x^2}$$

$$\log\left(e^{x^2}+1\right) \sim \log\left(e^{x^2}\right) = x^2,$$

quindi
$$f(x) \sim -\frac{1}{3x^2} \cdot x^2 = -\frac{1}{3}.$$

3.211. $$\left(2x^2+\log x+e^{-x}\right)\sim 2x^2, \text{ mentre}$$

$$\left\{\log\left(x^2+3x-1\right)-2\log x\right\}=\log\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2}\right)\sim\frac{x^2+3x-1}{x^2}-1=$$

$$=\frac{3x-1}{x^2}\sim\frac{3}{x}$$

quindi $$f(x)\sim 2x^2\cdot\frac{3}{x}=6x\to+\infty.$$

3.212. $$f(x)\sim\frac{x^{1/6}\cdot(2x)^{1/3}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}=\frac{2^{1/3}x^{1/2}}{\frac{1}{2}x^{1/2}}=2^{4/3}.$$

3.213. $$f(x)\sim\frac{\left(\sqrt{3}x^2\right)^2}{\sin^2(5x)(2x)^2}\sim\frac{3x^4}{25x^2\cdot 4x^2}=\frac{3}{100}.$$

3.214. $$\text{Num.}=\sqrt[3]{x^3+2x+4}-x=$$

$$=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}-1\right)\sim x\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2}\right)=\frac{2}{3x};$$

$$\text{Den.}\sim\frac{5}{x},\quad\text{quindi}\quad f(x)\sim\frac{2}{3x}\cdot\frac{x}{5}=\frac{2}{15}.$$

3.215. Ponendo $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$ si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}+e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e^{-\frac{1}{x}}\log x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^6e^{-t^2}+e^{-t}}{-2e^{-t^2}\log t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^6}{2\log t}+\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-t}}{2e^{-t^2}\log t}.$$

Il primo limite è uguale a $-\infty$ (gerarchia degli infiniti). Poiché il secondo è una quantità ≤ 0, il limite complessivo è $-\infty$.

Quest'ultimo ragionamento permette di *non* studiare il secondo limite, che è meno immediato del primo; in realtà si può dimostrare che

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-e^{-t}}{2e^{-t^2}\log t}=-\infty,$$

il che rafforza la conclusione precedente.

3.4. Applicazioni agli studi di funzione

Vedremo ora l'applicazione del calcolo dei limiti e delle stime asintotiche allo studio del grafico di una funzione. Cominceremo con alcuni esempi molto semplici che illustrano l'idea di base. Poi passeremo a esempi più elaborati, prima fissando l'attenzione su un aspetto per volta (cioè lo studio del grafico di una funzione nell'intorno di un punto prefissato, oppure lo studio del grafico di una funzione all'infinito), infine eseguendo degli studi di funzione in cui si arriva a determinare complessivamente il grafico qualitativo della funzione. Il termine "qualitativo" in questo contesto significa che *non* otteniamo certe informazioni *quantitative* (come ascissa e ordinata dei punti di massimo, minimo, flesso) per le quali tipicamente si utilizza il calcolo differenziale. Gli studi di funzione che utilizzano il calcolo differenziale si vedranno nel prossimo capitolo.

3.4.A. Grafici qualitativi elementari

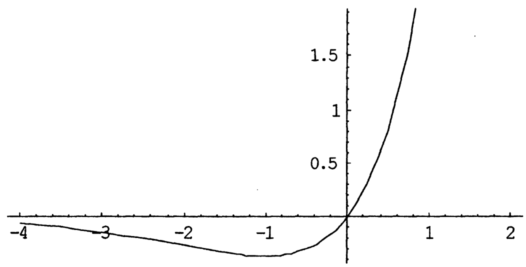
Esempi svolti

Tracciare rapidamente *il grafico qualitativo delle seguenti semplici funzioni, ragionando sulla composizione di funzioni elementari, sulle operazioni coi grafici (traslazioni, ecc.) ed eventualmente eseguendo confronti, stime asintotiche, e calcolando qualche limite. Disegnare con precisione eventuali punti angolosi, punti a tangente orizzontale o verticale, asintoti, e segnare sugli assi il valore numerico dei punti notevoli che si riescono a determinare.*

Esempio 3.20. (a) $f(x) = xe^x$; (b) $\sqrt[3]{x}e^x$.

(a) Definita su tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ con crescita sopralineare;
per $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^-$.
$f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$.
$f(0) = 0$ solo per $x = 0$, e per $x \to 0$ è $f(x) \sim x$.

Grafico locale:



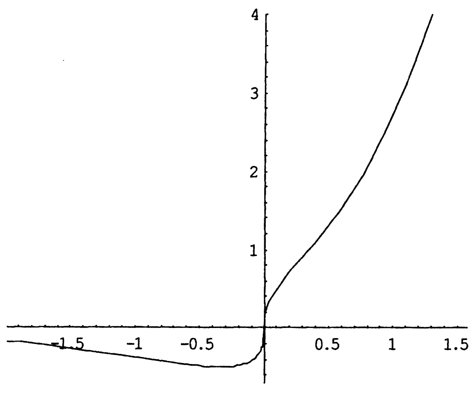
In particolare, osserviamo che f deve avere (almeno) un punto di minimo in un certo $x_0 < 0$.

(b) Simile alla funzione precedente per quanto riguarda il comportamento all'infinito e il segno.

$f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$.

$f(0) = 0$ solo per $x = 0$, e per $x \to 0$ è $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$.

Grafico locale:



Notiamo il punto di flesso a tangente verticale in $x = 0$ (che discende dalla stima asintotica in 0, per confronto col grafico di $\sqrt[3]{x}$).

Esempio 3.21. (a) $f(x) = x\log x$; (b) $f(x) = \sqrt{x}\log x$.

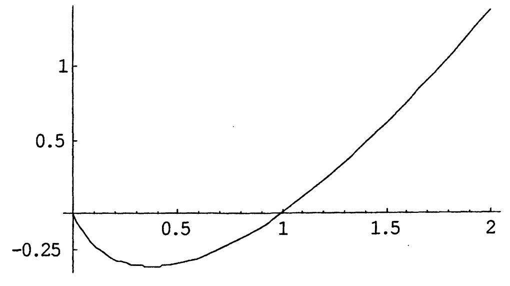
(a) Definita per $x > 0$.

Per $x \to 0^+, f(x) \to 0^-$.

Inoltre, poiché $\frac{f(x)}{x} \to -\infty$, deduciamo che il grafico arriva in 0 con tangente verticale.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ con crescita sopralineare.

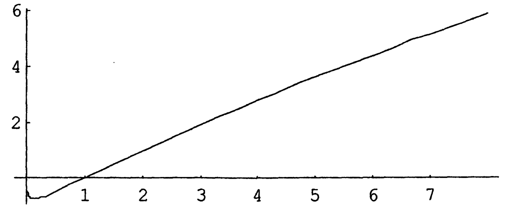
Grafico qualitativo:



(b) Definita per $x > 0$, il comportamento in 0 è simile a quello della funzione precedente.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ con crescita sottolineare.

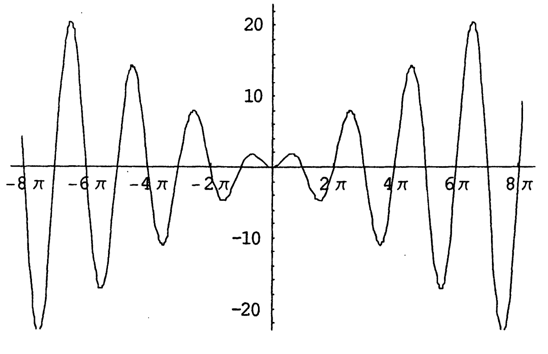
Grafico qualitativo:



A differenza della funzione (a), questa ha sicuramente un cambio di concavità.

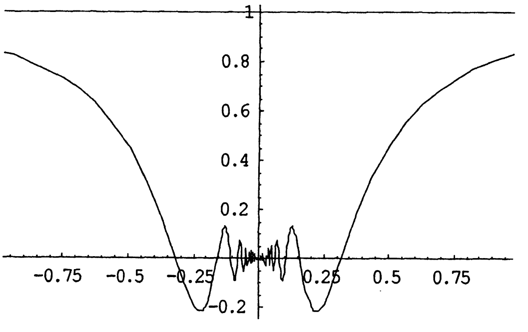
Esempio 3.22. (a) $f(x) = x\sin x$; (b) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$.

(a) Definita in tutto $\mathbb{R}$, simmetrica pari. La funzione ha infinite oscillazioni (come la funzione $\sin x$), non periodiche, ma "amplificate" dal prodotto con x:



Notiamo che la funzione si annulla negli stessi punti in cui si annulla $\sin x$, cioè $k\pi$, non ha limite all'infinito, e per $x \to 0$, $f(x) \sim x^2$.

(b) Definita per $x \neq 0$, simmetrica pari.
Per $x \to 0$, $f(x) \to 0$ (discontinuità eliminabile).
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 1$ (asintoto orizzontale).
Al finito, f ha infinite oscillazioni vicino all'origine. In particolare, $f(x) = 0$ per $\frac{1}{x} = k\pi$, $x = \frac{1}{k\pi}$.
Per comprendere meglio il comportamento vicino a 0 si può osservare che $|f(x)| \leq |x|$, il che mostra che il grafico è compreso tra quello delle due rette $\pm x$.
Grafico:



Esercizi

Si chiede di studiare le funzioni seguenti come negli esempi svolti.

3.216. $x^2 e^x$

3.217. e^{-x^2}

3.218. e^{x^2}

3.219. $xe^{-|x|}$

3.220. $x^2 \log x$

3.221. $e^{-x} \sin x$

3.222. $\log(1 + |x|)$

3.223. $\frac{\sin x}{x^2}$

3.4.B. Stime asintotiche e grafici locali

Dare una stima asintotica della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$, e tracciare, di conseguenza, il grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno di $x = x_0$. Classificare questo punto (cioè dire se si tratta ad es. di un punto di cuspide, angoloso, di *flesso a tangente verticale, di discontinuità a salto, di discontinuità eliminabile, asintoto verticale...).*

Esempi svolti

Esempio 3.23.

$$f(x) = \frac{\left(e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1\right)^4}{\log(1+x) \cdot \log x} \qquad\qquad x_0 = 1$$

Poiché $\sqrt[3]{x-1} \to 0$,

$$\left(e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1\right)^4 \sim \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4 = (x-1)^{4/3};$$

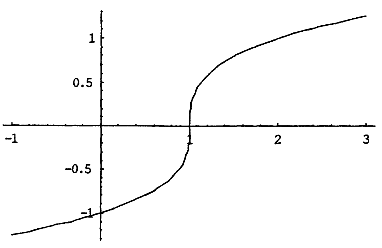
Inoltre,

$$\log(1+x) \cdot \log x \sim \log 2 \cdot \log x \sim \log 2 \cdot (x-1);$$

perciò

$$\frac{\left(e^{\sqrt[3]{x-1}} - 1\right)^4}{\log(1+x) \cdot \log x} \sim \frac{(x-1)^{4/3}}{\log 2 \cdot (x-1)} = \frac{(x-1)^{1/3}}{\log 2}.$$

Perciò in $x = 1$ la funzione ha un punto di flesso a tangente verticale (ascendente):



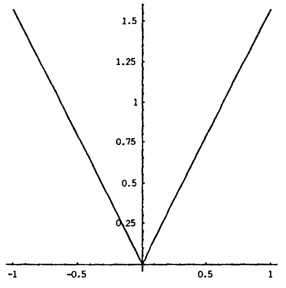
Esempio 3.24.

$$f(x) = xe^{-x}\arctan\frac{1}{x} \qquad\qquad x_0 = 0$$

Per $x \to 0^{\pm}$,

$$xe^{-x}\arctan\frac{1}{x} \sim x\arctan\frac{1}{x} \sim \pm\frac{\pi}{2}x$$

(ricordando che arctan$t \to \pm\pi/2$ per $x \to \pm\infty$). Perciò $x = 0$ è un punto angoloso, in cui la funzione ha, da destra e sinistra, tangenti di pendenza $\pm\frac{\pi}{2}$:



Si noti che, con la sola stima asintotica, non è possibile essere più precisi nello specificare il modo in cui il grafico si avvicina alle due rette tangenti per $x \to 0^{\pm}$ (ad es., la concavità).

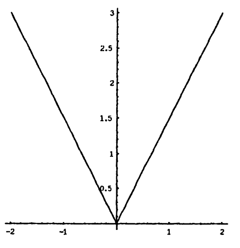
Esempio 3.25.

$$f(x) = \frac{2^x|e^{3x} - 1|}{2^x + 1} \qquad x_0 = 0$$

Per $x \to 0$,

$$\frac{2^x|e^{3x} - 1|}{2^x + 1} \sim \frac{|3x|}{2} = \frac{3}{2}|x|$$

perciò $x = 0$ è un punto angoloso:



Vale la stessa osservazione fatta alla fine dell'esercizio precedente. Si noti il diverso modo in cui nei due esempi la stima mostra l'esistenza di un punto angoloso. In quest'esempio, all'origine del punto angoloso c'è la presenza di un valore assoluto nella funzione; nell'esempio precedente il punto angoloso nasceva dal prodotto di una funzione che tende a zero linearmente con un'altra che tende a due limiti diversi da destra e da sinistra.

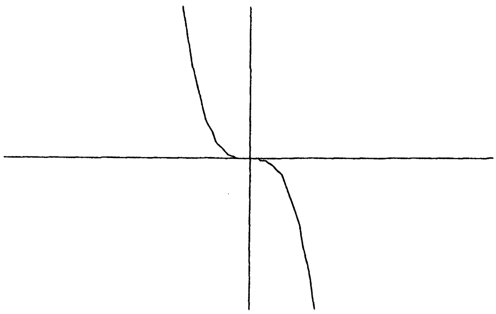
Esempio 3.26.

$$f(x) = \frac{\log(\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x}} \qquad x_0 = 0$$

Per $x \longrightarrow 0$,

$$\frac{\log(\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{\cos x - 1}{x^{1/3}} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^{1/3}} = -\frac{1}{2}x^{5/3}$$

quindi $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale, discendente.



Esempio 3.27.

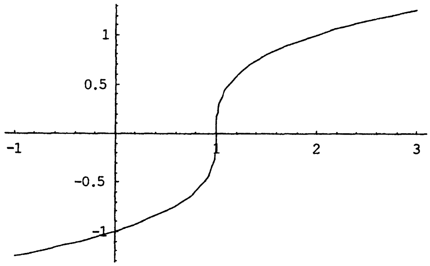
$$f(x) = \frac{e^{|x^2-1|} - 1}{\sqrt[3]{x-1}} \qquad x_0 = 1$$

Per $x \longrightarrow 1$,

$$\frac{e^{|x^2-1|} - 1}{\sqrt[3]{x-1}} \sim \frac{|(x-1)(x+1)|}{(x-1)^{1/3}} \sim$$

$$\sim \frac{2|x-1|}{(x-1)^{1/3}} \sim \begin{cases} 2(x-1)^{2/3} \text{ per } x \longrightarrow 1^+ \\ -2(x-1)^{2/3} \text{ per } x \longrightarrow 1^- \end{cases}$$

quindi $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale, ascendente.



Esercizi

Dare una stima asintotica della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ e tracciare, di conseguenza, il grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno di $x = x_0$. Classificare questo punto, come nei precedenti esempi svolti.

3.224.★ $$f(x) = \frac{e^{2x}\log x}{\sqrt[3]{x-1}} \qquad x_0 = 1$$

3.225.★ $$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\log|x+1|}{e^x - 1} \qquad x_0 = 0$$

3.226.★ $$f(x) = |\log(x+1)| \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \qquad x_0 = 0$$

3.227.★ $$f(x) = \frac{|\log x|\sin x}{\sin(2x-2)} \qquad x_0 = 1$$

3.228.★ $$f(x) = \frac{\sin x \cdot \sqrt[3]{x-1}}{\log(1+\sqrt[3]{x})} \qquad x_0 = 0$$

3.229.★ $$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\log(1+2x+x^3)}}{\log(x+2)\sin x} \qquad x_0 = 0$$

3.230.★ $$f(x) = \frac{\log(2x^2-1)}{\sqrt[3]{x-1}} \qquad x_0 = 1$$

3.231.★ $$f(x) = \frac{(\log x)^2}{(x^2+x-2)\sqrt[3]{x-1}} \qquad x_0 = 1$$

3.232.★ $$f(x) = \frac{\cos(\pi x)\cdot \log x}{\sqrt[3]{\sin[\pi(x-1)]}} \qquad x_0 = 1$$

3.233.★ $$f(x) = \frac{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2\cos(\pi x)}{\cos\left(\sqrt[5]{x}\right)-1} \qquad x_0 = 0$$

3.234.★ $$f(x) = \frac{e^{2x}(1-\cos x)}{\sin\sqrt[3]{x}\cdot \tan x} \qquad x_0 = 0$$

3.235.★ $$f(x) = \frac{e^{x^2}-e}{\sqrt[3]{\log x}} \qquad x_0 = 1$$

3.236.★ $$f(x) = \frac{(e^{2x}-1)\sin^2\left(x+2x^{1/3}\right)}{\arctan(3x)} \qquad x_0 = 0$$

3.237.★ $$f(x) = \frac{\cos(3x)-1}{\log(1+x)\cdot\tan(2x^{2/3}+3x)} \qquad x_0 = 0$$

3.238.★

$$f(x) = \sin\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos(\pi x)\log\left(\frac{1+2x+5x^2}{1+6x}\right) \qquad x_0 = 0$$

3.239.★ $$f(x) = \frac{\left(e^{2\sqrt[3]{x}}-1\right)\sin x}{2^x-1} \qquad x_0 = 0$$

3.240.★ $$f(x) = \frac{(e^{|x|}-1)\sqrt[3]{x}}{\log|1+x|} \qquad x_0 = 0$$

3.241.★ $$f(x) = \frac{[\log(2-x)]\sqrt[5]{x^2-1}}{\sqrt[3]{e^x - e}} \qquad x_0 = 1$$

3.242.★ $$f(x) = \frac{e^{x^2}\log x\,(e^{x-1}-1)^{1/3}}{(x^2-1)^2} \qquad x_0 = 1$$

3.243.★ $$f(x) = \frac{\log(1+|x|)\sqrt{|x|}}{\mathrm{Sh}x} \qquad x_0 = 0$$

3.244. Per $x \to 1$, $f(x) = \frac{(x^2-1)}{\sqrt[3]{\log x}}$ è asintotica a: ...
(scrivere un'espressione del tipo $c(x-1)^\alpha$). Di conseguenza $x = 1$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tang. orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.245. Per $x \to 0$, $f(x) = \frac{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2}{\log(1+x)}$ è asintotica a:...
(scrivere un'espressione del tipo cx^α). Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tang. orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.246. Per $x \to 0$, $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{\sin^2(2\sqrt[3]{x})}$ è asintotica a:....
(scrivere un'espressione del tipo cx^α). Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di minimo
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.247. Per $x \to 0$, $f(x) = \frac{x\sin x}{\log(1+\sqrt[3]{x})}$ è asintotica a:...
(scrivere un'espressione del tipo cx^α). Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
Di conseguenza, $x = 0$ per f è un punto:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tang. orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.248. Per $x \to 0, f(x) = \frac{\log(\cos^2 x)}{\sqrt[3]{x^2 \sin^2 x}}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α). Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tangente orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.249. Per $x \to 0, f(x) = \frac{\cos(3x)-1}{\sin(\sqrt[3]{\tan x})}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α). Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tangente orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.250. Per $x \to 0, f(x) = \frac{\sin(3x)\cos x}{\sqrt[3]{x \sin x}}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tangente orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.251. Per $x \to 0, f(x) = \frac{(\sin x)\log(1+|x|)}{|x|^{1/3}}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tangente orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.252. Per $x \to 0, f(x) = \frac{e^{x^2+2x}-1}{\sqrt[3]{\sin x}}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide
- ☐ di flesso a tangente verticale
- ☐ di flesso a tangente orizzontale
- ☐ di asintoto verticale
- ☐ di discontinuità a salto

3.253. Per $x \to 0, f(x) = \frac{1-\cos x}{e^x \sin(\sqrt[3]{x})}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:

- ☐ angoloso
- ☐ di cuspide

- [ ] di flesso a tangente verticale
- [ ] di flesso a tangente orizzontale
- [ ] di asintoto verticale
- [ ] di discontinuità a salto

3.254. Per $x \to 0, f(x) = \frac{|x-2|\cdot|\log(1+x)|\cdot\sqrt[3]{|x|}}{e^x-1}$ è asintotica a:...

Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
- [ ] angoloso
- [ ] di cuspide
- [ ] di flesso a tangente verticale
- [ ] di flesso a tangente orizzontale
- [ ] di asintoto verticale
- [ ] di discontinuità a salto

3.255. Per $x \to 0, f(x) = \frac{2^x\log^3(1+|x|)}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
- [ ] angoloso
- [ ] di cuspide
- [ ] di flesso a tangente verticale
- [ ] di flesso a tangente orizzontale
- [ ] di asintoto verticale
- [ ] di discontinuità a salto

3.256. Per $x \to 0, f(x) = \frac{x\log^2(1+\sqrt[3]{x})}{\sin^2(x^{2/5})}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α).
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
- [ ] angoloso
- [ ] di cuspide
- [ ] di flesso a tangente verticale
- [ ] di flesso a tangente orizzontale
- [ ] di asintoto verticale
- [ ] di discontinuità a salto

3.257. Per $x \to 0, f(x) = \frac{(\sqrt[4]{1+2x}-1)\sqrt[3]{x}}{e^{3x+x^2}-1}$ è asintotica a:...
(scrivere una funzione del tipo cx^α)
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
- [ ] angoloso
- [ ] di cuspide
- [ ] di flesso a tang. vert. ascendente
- [ ] di flesso a tang. orizz. ascendente
- [ ] di flesso a tang. vert. discendente
- [ ] di flesso a tang. orizzontale discendente
- [ ] di asintoto verticale
- [ ] di discontinuità a salto

3.258. Per $x \to 0, f(x) = \frac{\log(\cos x)}{\sin(\sqrt[3]{x})}$ è asintotica a (scrivere una funzione del tipo cx^α):...
Di conseguenza, $x = 0$ per f è:
- [ ] angoloso
- [ ] di cuspide

❑ di flesso a tang. verticale ascendente ❑ di flesso a tang. orizzontale ascendente
❑ di flesso a tang. verticale discendente ❑ di flesso a tang. orizzontale discendente
❑ di asintoto verticale ❑ di discontinuità a salto

3.4.C. Studio all'infinito e ricerca degli asintoti obliqui

Ricordiamo che una retta $y = mx + q$ ($m \neq 0, q \in \mathbb{R}$) si dice *asintoto obliquo* per f, per $x \to +\infty$ (o a $-\infty$), se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

ossia se la distanza tra la retta e il grafico della funzione tende a zero all'infinito. Un asintoto obliquo esiste se e solo se sono soddisfatte le *due condizioni*:

$$f(x) \sim mx \text{ per } x \to +\infty$$

per qualche $m \neq 0$, ed esiste finito

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx],$$

che in tal caso coincide con il numero q. Sottolineiamo, in particolare, che la prima condizione da sola non implica l'esistenza dell'asintoto obliquo, come mostreranno gli esempi.

Esempi svolti

Esempio 3.28. Dare una stima asintotica di $f(x)$ per $x \to +\infty$; stabilire quindi se f possiede un asintoto obliquo, in caso affermativo determinandolo.

$$f(x) = xe^{\frac{x+2}{3x-1}}.$$

Stimiamo: $$f(x) \sim x\sqrt[3]{e} \text{ per } x \to +\infty.$$

Quindi la funzione tende a $+\infty$, con *crescita lineare*. Cerchiamo l'eventuale asintoto obliquo:

$$f(x) - x\sqrt[3]{e} = x\sqrt[3]{e}\left(e^{\frac{x+2}{3x-1}-\frac{1}{3}} - 1\right) \sim x\sqrt[3]{e}\left(\frac{x+2}{3x-1} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= x\sqrt[3]{e} \cdot \frac{7}{3(3x-1)} \to \frac{7}{9}\sqrt[3]{e}.$$

Perciò esiste asintoto obliquo di equazione

$$y = x\sqrt[3]{e} + \frac{7}{9}\sqrt[3]{e}.$$

Esempio 3.29. Dare una stima asintotica di $f(x)$ per $x \to +\infty$; stabilire quindi se f possiede un asintoto obliquo, in caso affermativo determinandolo.

$$f(x) = (2x+1)\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim 2x \to +\infty$, con crescita lineare. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) + \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right].$$

Ora:

$$\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to 1;$$

$$2x\left(\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) \sim 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{2/3}}\right) = -x^{1/3} \to -\infty$$

quindi il limite considerato vale $-\infty$, e la funzione non ammette asintoto obliquo.

Esempio 3.30. Dare una stima asintotica di $f(x)$ per $x \to +\infty$; stabilire quindi se f possiede un asintoto obliquo, in caso affermativo determinandolo.

$$f(x) = e^{\sin\frac{1}{x}}\left(3x + \cos\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) \sim 3x \text{ (crescita lineare).}$$

$$f(x) - 3x = 3x\left(e^{\sin\frac{1}{x}} - 1\right) + e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x} \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Ora: $$f_1(x) \sim 3x \cdot \sin\frac{1}{x} \sim 3x \cdot \frac{1}{x} = 3;\ f_2(x) \to 1;\ \text{quindi:}$$

$$f(x) - 3x \to 4$$

e la funzione ammette asintoto obliquo

$$y = 3x + 4.$$

Esercizi

Sudiare il comportamento della funzione all'infinito (oppure solo a $+\infty$ o $-\infty$, se non ha senso calcolare uno dei limiti), stabilendo in particolare se la funzione ha crescita lineare, sopralineare, sottolineare. Stabilire quindi se la funzione ammette asintoti obliqui, determinandoli in caso affermativo.

3.259. $\frac{x^2+2x+3}{x+1}$

3.260. $\frac{x^2+x^{3/2}+1}{x+1}$

3.261. $x\, e^{\frac{x+1}{x+2}}$

3.262. $\sqrt{x^2+3x}$

3.263. $\log(e^{2x+1}+x)$

3.264.★ $xe^{\frac{2x}{x+1}}$

3.265. $\frac{2x^2+x\log x+3}{x+1}$

3.266 $\sqrt{4x^2-x}$

3.267.★ $x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$

3.268.★ $(x+2)\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

3.269.★ $x\log\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\right).$

3.270.★ $(x+1)e^{\frac{x+1}{x}}$

3.271.★ $xe^{\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}\right)}$

3.272.★ $\sqrt[4]{16x^4+3x^3+1}$

3.273.★ $2x\log\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+1}\right)$

3.274.★ $e^{3/(x+1)}(3x+1)$

3.275.★ $\sqrt[3]{8x^3+3x^2+1}$

3.276.★ $xe^{\frac{2x+\sqrt{x}}{x-1}}$

Calcolare i limiti indicati per le seguenti funzioni e in base a questi e a considerazioni elementari, tracciare il grafico delle funzioni.

3.277. $\lim\limits_{x\to(-1)^{\pm}} \frac{2x+1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (idem)

3.278. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (idem)

3.279. $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \frac{\cos(x^2)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (idem)

3.280. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^{\pm}} f(x)$

3.281. $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x)$

3.282. $f(x) = xe^{1/x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x)$; la funzione ha asintoti obliqui?

3.283. $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^{\pm}} f(x)$; la funzione ha asintoti obliqui?

3.4.D. Studi di funzione mediante limiti e stime asintotiche

Tracciare rapidamente il grafico qualitativo della seguente funzione, in base alla conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari ed utilizzando opportunamente limiti e stime asintotiche. In particolare, è richiesta la stima asintotica nei punti in cui f si annulla e alla frontiera dell'insieme di definizione. Evidenziare nel grafico eventuali punti notevoli (a tangente orizzontale o verticale, angolosi, di asintoto, ecc.), e l'andamento all'infinito.

Esempi svolti

Esempio 3.31.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2x-1}}(\log x)^{2/3}.$$

Definita per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Per $x \to 0^+, f(x) \sim e(\log x)^{2/3} \to +\infty$; $x = 0$ asintoto verticale.

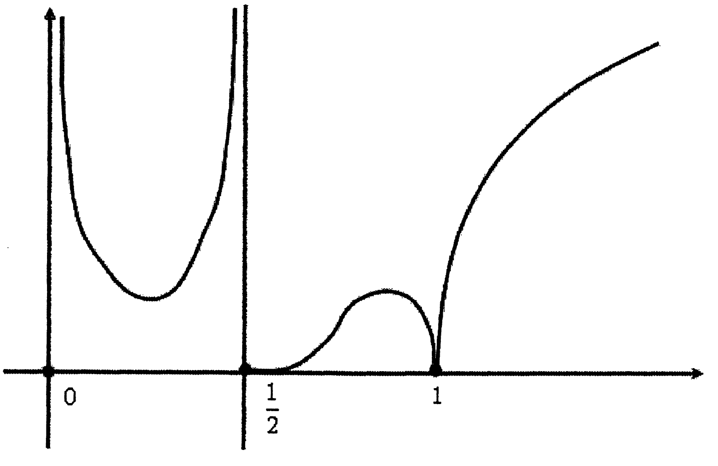
Per $x \to \frac{1}{2}^{\pm}, f(x) \to \begin{cases} 0^+ & \text{(con tangente orizzontale)} \\ +\infty & x = \frac{1}{2}\text{asintoto verticale, da sinistra} \end{cases}$

Per $x \to +\infty, f(x) \sim (\log x)^{2/3} \to +\infty$ con crescita sottolineare (senza asintoto obliquo).

$f(x) \geq 0$ in tutto l'insieme di definizione, $f(x) = 0$ per $x = 1$;

per $x \to 1, f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{e}}(x-1)^{2/3}; x = 1$ punto di cuspide e di minimo relativo (e assoluto).

Grafico qualitativo:



Esempio 3.32.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

Definita per $x \neq 0, x \neq 2$.

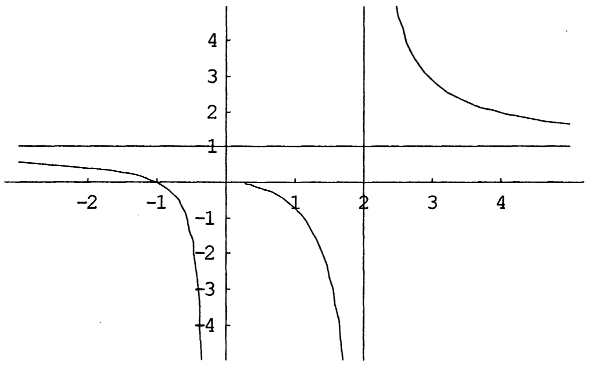
Per $x \to 0^{\pm}, f(x) \sim -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} \to \begin{cases} 0^- \\ -\infty \end{cases}$

$x = 0$ asintoto verticale dalla sinistra.

Per $x \to 2^{\pm}, f(x) \sim \frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{(x-2)} \to \pm\infty$. $x = 2$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \to 1$. $y = 1$ asintoto orizzontale.

$f(-1) = 0$. Grafico qualitativo:



Esempio 3.33.

$$f(x) = x\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right|$$

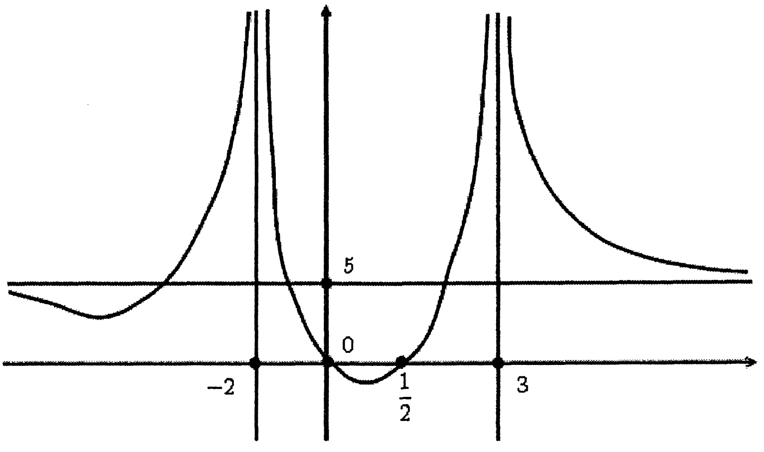
Definita per $x \neq -2, x \neq 3$.
Per $x \to -2$, $f(x) \sim -2\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| \to +\infty$; $x = -2$ asintoto verticale.
Per $x \to 3$, $f(x) \sim 3\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| \to +\infty$; $x = 3$ asintoto verticale.
Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim x\left(\frac{x+2}{x-3} - 1\right) = x\left(\frac{5}{x-3}\right) \to 5.$$

$y = 5$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
$f(x) = 0$ per $x = 0$ e per

$$\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = 1, \text{ cioè } x + 2 = \pm(3 - x)$$

cioè per $x = \frac{1}{2}$. Grafico qualitativo:



Esempio 3.34.

$$f(x) = (e^{\text{arctan}x} - 1)(x-1)^{1/3}(x+1)^{1/2}$$

Definita per $x \geq -1$.

Per $x \longrightarrow -1, f(x) \sim \left(1 - e^{-\pi/4}\right)\sqrt[3]{2}(x+1)^{1/2}$ punto a tangente verticale

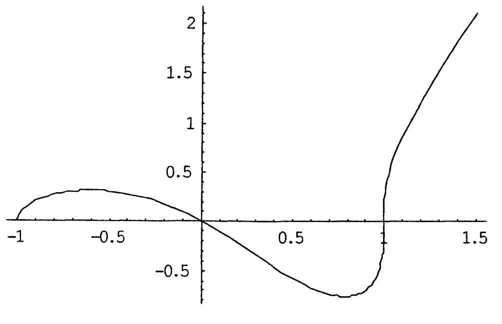
Per $x \longrightarrow +\infty, f(x) \sim \left(e^{\pi/2} - 1\right)x^{5/6} \longrightarrow +\infty$ con crescita sottolineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

$f(x) = 0$ per $x = 0, x = 1$.

Per $x \longrightarrow 0, f(x) \sim -\text{arctan}x \sim -x$

Per $x \longrightarrow 1,\ f(x) \sim \left(e^{\pi/4} - 1\right)\sqrt{2} \cdot (x-1)^{1/3}$, perciò $x = -1$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Grafico qualitativo:



Osservazione 3.8. Stima asintotica all'infinito e verso della concavità. Negli esempi precedenti, quando la stima asintotica all'infinito denotava una crescita sopralineare o sottolineare, abbiamo interpretato graficamente questa informazione come un'indicazione del verso della concavità all'infinito. Per esempio, nell'ultimo esempio visto si aveva $f(x) \longrightarrow +\infty$ con crescita sottolineare, e abbiamo tracciato il grafico di una funzione concava verso il basso all'infinito. L'idea generale è che se, per $x \longrightarrow \pm\infty$, è

$f(x) \longrightarrow +\infty$ con crescita sopralineare, ci aspettiamo f concava verso l'alto;

$f(x) \longrightarrow +\infty$ con crescita sottolineare, ci aspettiamo f concava verso il basso;

viceversa, se per $x \longrightarrow \pm\infty$, è

$f(x) \longrightarrow -\infty$ con crescita sopralineare, ci aspettiamo f concava verso il basso;

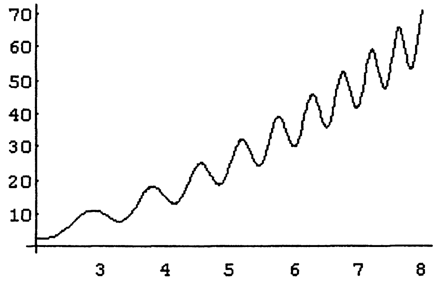
$f(x) \longrightarrow -\infty$ con crescita sottolineare, ci aspettiamo f concava verso l'alto.

Perché abbiamo scritto "ci aspettiamo"? L'affermazione è rigorosa o no? Per rispondere, si consideri il prossimo esempio.

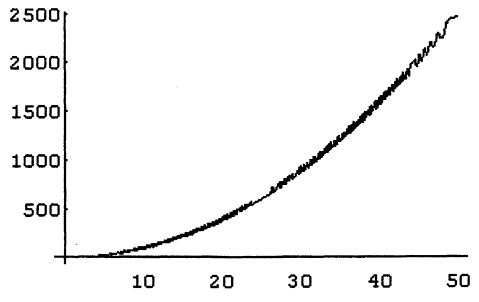
Esempio 3.35.

$$f(x) = x^2 + x\sin(x^2).$$

Poiché la funzione sin è limitata, $|x\sin(x^2)| \leq |x| = o(x^2)$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, perciò $f(x) \sim x^2$. Da questo segue che $f(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, e che f non ha asintoto obliquo. Tuttavia la concavità di f (così come il suo crescere e decrescere) non sono, neppure per $|x|$ abbastanza grande, gli stessi di x^2. Infatti il grafico di f è:



Si osservi il grafico della stessa funzione su una scala maggiore (ossia "visto più da lontano"):



Notiamo come, "visto da lontano", il grafico di f assomigli al grafico di x^2 e tuttavia f non abbia, neppure per $|x|$ abbastanza grande, le stesse proprietà di concavità e di monotonia di x^2.

L'esempio precedente insegna che *dalla stima asintotica all'infinito, a rigore, non possiamo dedurre il segno della concavità di una funzione.* Questa può essere studiata in modo rigoroso utilizzando la derivata seconda, come si vedrà nel cap.4. Tuttavia si può dimostrare che:

Se per $x \to +\infty$ (o $-\infty$) $f(x)$ è asintotica ad una funzione concava verso l'alto (il basso, rispettivamente), e la funzione $f(x)$ per x abbastanza grande non cambia il segno della concavità, allora per x abbastanza grande f è concava verso l'alto (il basso, rispettivamente).

L'utilità della proprietà precedente sta nel fatto che, nei casi concreti, osservando la *forma analitica* della funzione spesso possiamo escludere che essa abbia infiniti cambi di concavità all'infinito[5]. In tal caso una stima asintotica mediante una funzione sopralineare o sottolineare permette effettivamente di dedurre il segno della concavità all'infinito. Negli studi di funzione fatti senza far uso della derivata seconda utilizzeremo sistematicamente questo criterio, implicitamente.

Ad esempio se $f(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$, certamente $f(x)$ non ha asintoti obliqui e non è concava *verso il basso* in un intorno di $+\infty$: può darsi che sia concava verso l'alto, oppure che abbia concavità oscillante. Se possiamo escludere che abbia infinite oscillazioni di concavità, allora concludiamo che è concava verso l'alto per $x \to +\infty$.

---

[5] Ad esempio, se la funzione è composta unicamente da funzioni elementari del tipo potenza, esponenziale, logaritmo e nessuna funzione trigonometrica, certamente non potrà avere infinite oscillazioni e quindi infiniti cambi di concavità.

Esercizi

3.284.★ $\frac{x^2}{x-2}\, e^{-x}$

3.285.★ $(x^2+x)e^x$

3.286.★ $\frac{(x-1)\log x}{x^2}$

3.287.★ $(x^2-x)\log x$

3.288.★ $\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x}\log x}$

3.289.★ $x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$

3.290.★ $x|\log(x+1)|$

3.291.★ $\frac{e^{3x}-1}{x+3}$

3.292.★ $\frac{(x-1)^2 e^{\frac{2}{x}}}{\log x}$

3.293.★ $\left|\frac{x+1}{x+2}\right|^x$

3.294.★ $e^{-\frac{1}{\arctan x}}\cdot[\log(2+x)]^{1/3}.$

3.295.★ $\frac{x^2\log|x|}{\log(1+x)}.$

3.296.★ $x\log^3|1-x^2|.$

3.297.★ $e^{1/(x-1)}(e^x-1)e^x.$

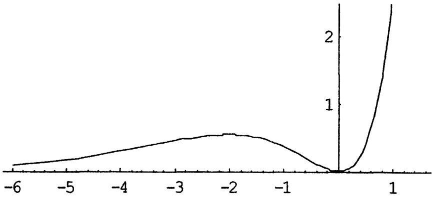
3.298.★ $\frac{x(\sqrt[3]{x}-1)}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$

3.299.★ $\left(e^{-\sqrt[3]{|x|}}-1\right)\left|e^{\sqrt[3]{x}}-1\right|.$

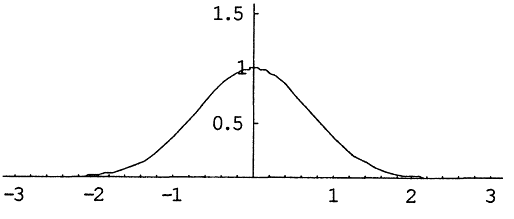
3.300.★ $x^3\arctan\frac{1}{x}-x\arctan\frac{1}{x^3}.$

Soluzioni § 3.4.

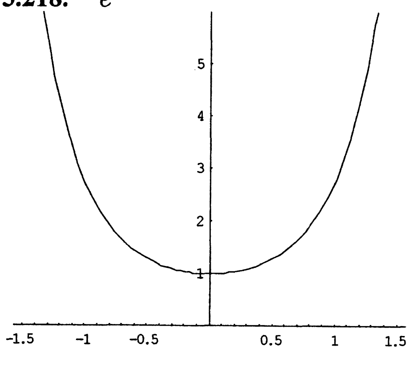
3.216. x^2e^x



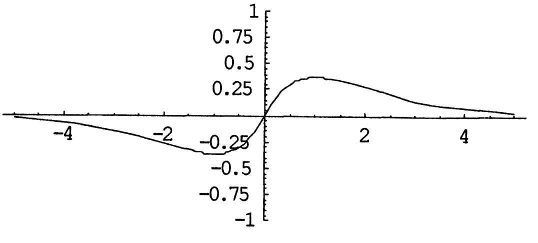
3.217. e^{-x^2}



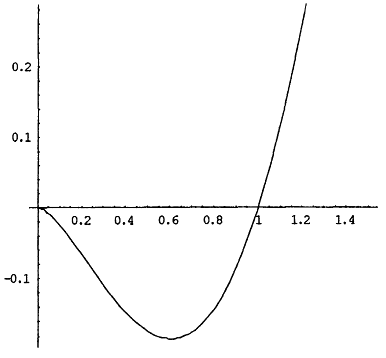
3.218. e^{x^2}



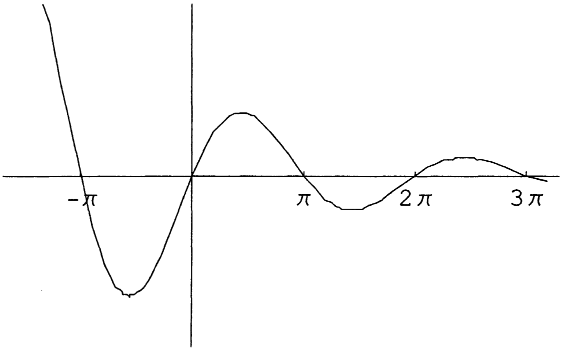
3.219. $xe^{-|x|}$



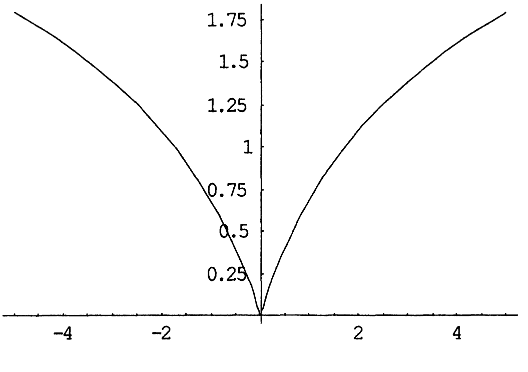
3.220. $x^2 \log x$



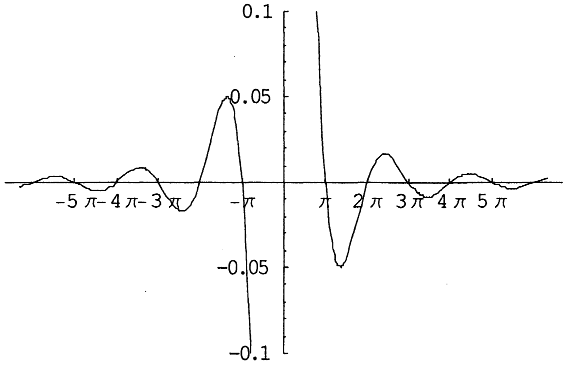
3.221. $e^{-x} \sin x$



3.222. $\log(1 + |x|)$



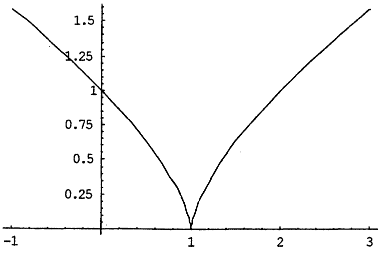
3.223. $\frac{\sin x}{x^2}$



3.224. Per $x \to 1$,

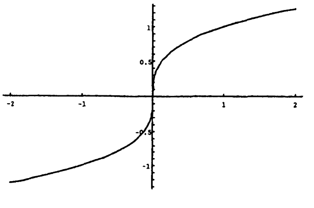
$$\frac{e^{2x}\log x}{\sqrt[3]{x-1}} \sim \frac{(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} = (x-1)^{2/3}.$$

Perciò $x = 1$ è un punto di cuspide (e minimo relativo), con grafico qualitativo:



3.225. $$\frac{\sqrt[3]{x}\log|x+1|}{e^x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x}\log(x+1)}{e^x - 1} \sim \frac{\sqrt[3]{x}\,x}{x} = \sqrt[3]{x}.$$

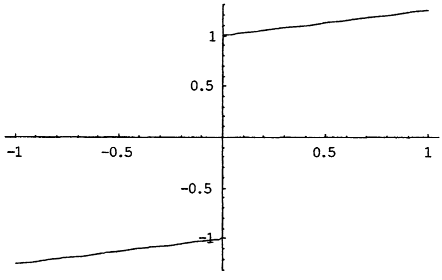
Perciò f ha un punto di flesso a tangente verticale in $x = 0$:



3.226.

$$|\log(x+1)| \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \sim |\log(x+1)| \cdot \frac{1}{x} \sim |x| \cdot \frac{1}{x} \to \pm 1 \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

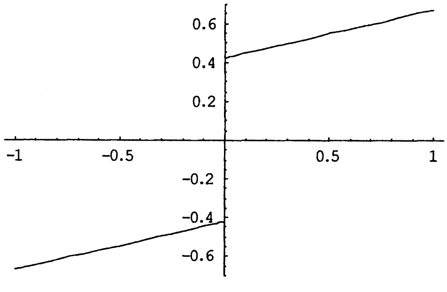
Perciò $x = 0$ è un punto di discontinuità a salto:



3.227.

$$\frac{|\log x| \sin x}{\sin(2x-2)} \sim \frac{|x-1| \sin 1}{2(x-1)} \to \pm \frac{\sin 1}{2} \text{ per } x \to 0^{\pm}.$$

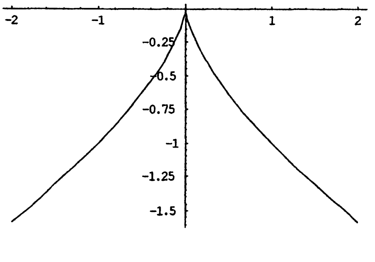
Perciò $x = 0$ è un punto di discontinuità a salto.



3.228.

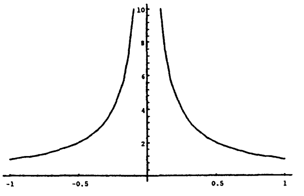
$$\frac{\sin x \cdot \sqrt[3]{x-1}}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} \sim \frac{-x}{\sqrt[3]{x}} = -x^{2/3} \to 0$$

perciò $x = 0$ è un punto (di discontinuità eliminabile) di cuspide rivolta verso l'alto (punto di massimo relativo).



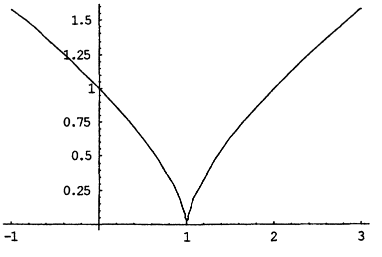
3.229.
$$\frac{\sqrt[3]{\log(1+2x+x^3)}}{\log(x+2)\sin x} \sim \frac{(2x)^{1/3}}{x\log 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\log 2} \cdot \frac{1}{x^{2/3}}$$

perciò $x = 0$ è un asintoto verticale, con $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0$.



3.230.
$$\frac{\log(2x^2-1)}{\sqrt[3]{x-1}} \sim \frac{2x^2-2}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^{1/3}} \sim 4(x-1)^{2/3}$$

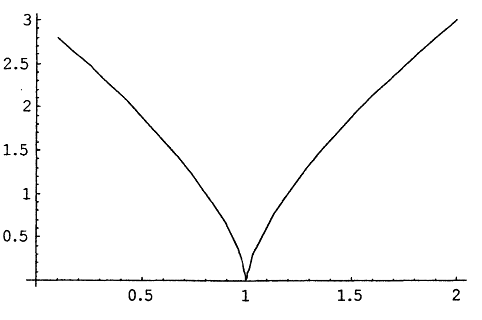
quindi $x = 1$ è punto di cuspide (e di minimo relativo).



3.231.

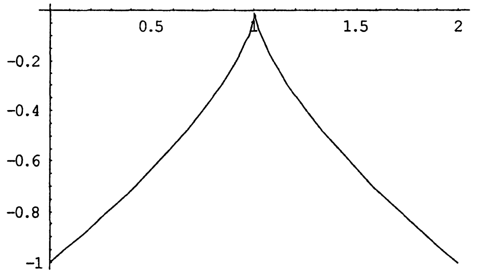
$$\frac{(\log x)^2}{(x^2+x-2)\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(\log x)^2}{(x-1)(x+2)\sqrt[3]{x-1}} \sim \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^{1+\frac{1}{3}}} = 3(x-1)^{2/3}$$

Quindi il punto $x = 1$ è di discontinuità eliminabile, di cuspide, di minimo relativo. Grafico locale:



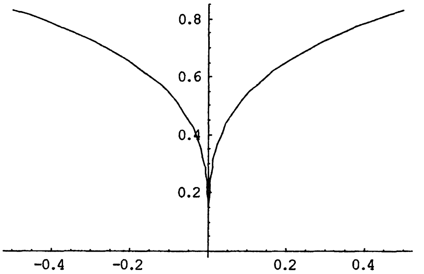
3.232. Per $x \to 1$, $f(x) \sim \dfrac{-(x-1)}{\sqrt[3]{\pi(x-1)}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot (x-1)^{2/3}$

perciò in $x = 1$ la funzione ha un punto di cuspide (rivolto verso l'alto):

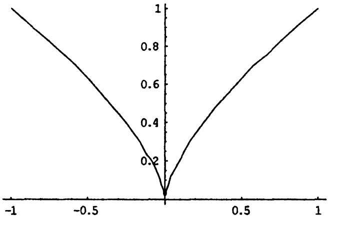


3.233. $$\frac{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2\cos(\pi x)}{\cos\left(\sqrt[5]{x}\right)-1} \sim \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{-\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{x}\right)^2} = -2x^{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}} = -2x^{\frac{4}{15}}.$$

Quindi il punto $x = 0$ è di discontinuità eliminabile, di cuspide, di minimo relativo. Grafico locale:



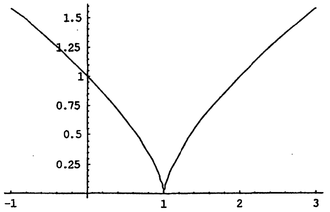
3.234. $$\frac{e^{2x}(1-\cos x)}{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\tan x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{1/3}\cdot x} = \frac{1}{2}x^{2/3} \text{ punto di cuspide.}$$



3.235.
$$\frac{e^{x^2}-e}{\sqrt[3]{\log x}}=\frac{e\left(e^{x^2-1}-1\right)}{\sqrt[3]{\log x}}\sim\frac{e(x^2-1)}{(x-1)^{1/3}}=$$

$$=\frac{e(x-1)(x+1)}{(x-1)^{1/3}}\sim\frac{2e(x-1)}{(x-1)^{1/3}}=2e(x-1)^{2/3}.$$

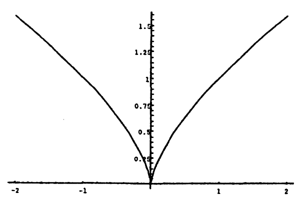
Quindi $x=1$ è un punto di cuspide, discendente.



3.236.
$$\frac{(e^{2x}-1)\sin^2\left(x+2x^{1/3}\right)}{\arctan(3x)}\sim\frac{2x\left(x+2x^{1/3}\right)^2}{3x}\sim$$

$$\sim\frac{2}{3}\left(2x^{1/3}\right)^2=\frac{8}{3}x^{2/3}.$$

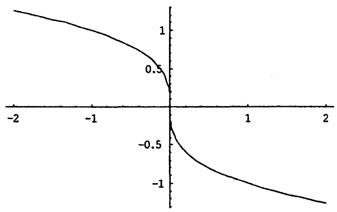
Quindi $x_0=0$ è punto di cuspide. Grafico locale:



3.237.
$$\frac{\cos(3x)-1}{\log(1+x)\cdot\tan(2x^{2/3}+3x)}\sim\frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x\cdot(2x^{2/3}+3x)}\sim$$

$$\sim\frac{-\frac{9}{2}x^2}{2x^{1+\frac{2}{3}}}=-\frac{9}{4}x^{1/3}.$$

Quindi $x_0 = 0$ è punto di flesso a tangente verticale. Grafico locale:



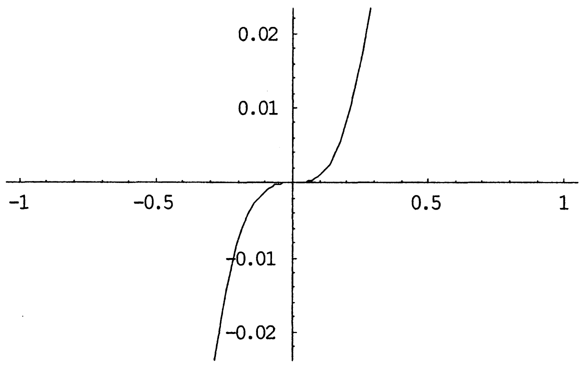
3.238.
$$\sin\left(x - \sqrt[3]{x^2}\right) \sim -x^{2/3};$$

$$\cos(\pi x) \to 1;$$

$$\log\left(\frac{1+2x+5x^2}{1+6x}\right) \sim \frac{1+2x+5x^2}{1+6x} - 1 = \frac{-4x+5x^2}{1+6x} \sim -4x;$$

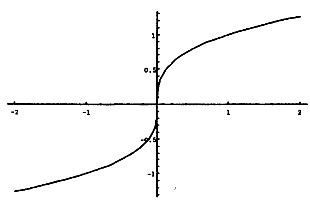
$$f(x) \sim -x^{2/3} \cdot 1 \cdot (-4x) = 4x^{5/3}$$

Dunque $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale, ascendente:



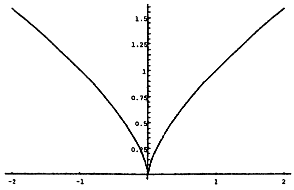
3.239.
$$f(x) \sim \frac{2\sqrt[3]{x} \cdot x}{x\log 2} = \frac{2}{\log 2} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$x = 0$ punto di flesso a tangente verticale.



3.240.
$$f(x) \sim \frac{|x|\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

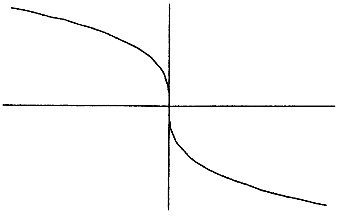
$x = 0$ punto di cuspide.



3.241.
$$\frac{[\log(2-x)]\sqrt[5]{x^2-1}}{\sqrt[3]{e^x - e}} \sim \frac{(1-x)\sqrt[5]{2(x-1)}}{\sqrt[3]{e}\sqrt[3]{e^{x-1}-1}} \sim$$

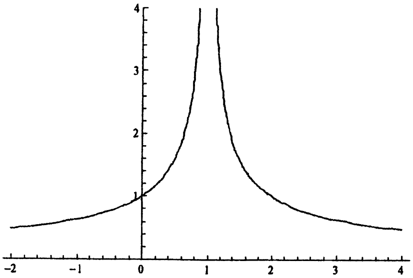
$$\sim -\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{e}}(x-1)^{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{e}}(x-1)^{\frac{13}{15}}.$$

$x = 1$ punto di flesso a tangente verticale, discendente.



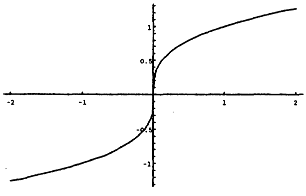
3.242.
$$f(x) \sim \frac{e(x-1)(x-1)^{1/3}}{2^2(x-1)^2} = \frac{e}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$$

$x = 1$ asintoto verticale



3.243. $$f(x) \sim \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} = \sqrt{|x|}\cdot \mathrm{sgn}(x).$$

$x = 0$ punto di flesso a tangente verticale.



3.244. $2(x-1)^{2/3}$; punto cuspide

3.245. $x^{-1/3}$; asintoto verticale

3.246. $\frac{1}{4}x^{4/3}$; punto di minimo

3.247. $x^{5/3}$; punto di flesso a tangente orizzontale

3.248. $-x^{2/3}$; punto di cuspide

3.249. $-\frac{9}{2}x^{5/3}$; punto di flesso a tangente orizzontale

3.250. $3x^{1/3}$; punto di flesso a tangente verticale

3.251. $x^{5/3}$; punto di flesso a tangente orizzontale

3.252. $2x^{2/3}$; punto di cuspide

3.253. $\frac{1}{2}x^{5/3}$; di flesso a tangente orizzontale

3.254. $2\sqrt[3]{x}$; punto di flesso a tangente verticale

3.255. $x^{8/3}\mathrm{sgn}(x)$; punto di flesso a tangente orizzontale

3.256. $x^{13/15}$; punto di flesso a tangente verticale

3.257. $\frac{1}{6}x^{1/3}$; punto di flesso a tangente verticale ascend.

3.258. $-\frac{1}{2}x^{5/3}$; punto di flesso a tang. orizz. discend.

3.259. $f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty$; $y = x + 1$ asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

3.260. $f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty$; non esiste asintoto obliquo.

3.261. $f(x) \sim ex$ per $x \to \pm\infty$; $y = ex - e$ as. obl. per $x \to \pm\infty$

3.262. $f(x) \sim |x|$ per $x \to \pm\infty$; asintoti obliqui: $y = x + \frac{3}{2}$ per $x \to +\infty$; $y = -x - \frac{3}{2}$ per $x \to -\infty$

3.263. $f(x) \sim 2x$ per $x \to +\infty$ (non è definita in un intorno di $-\infty$); $y = 2x + 1$ as. obl. per $x \to +\infty$.

3.264.
$$xe^{\frac{2x}{x+1}} \sim xe^2 \to +\infty$$
con crescita lineare; per vedere se c'è asintoto obliquo calcoliamo:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{2x}{x+1}} - xe^2\right).$$
$$\left(xe^{\frac{2x}{x+1}} - xe^2\right) = xe^2\left(e^{\frac{2x}{x+1}-2} - 1\right) \sim$$
$$\sim xe^2\left[\frac{2x}{x+1} - 2\right] = xe^2\left(\frac{-2}{x+1}\right) \to -2e^2.$$
Perciò f ha asintoto obliquo:
$$y = xe^2 - 2e^2.$$

3.265.
$$f(x) \sim 2x; \quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - 2x] = \infty$$
Perciò non c'è asintoto obliquo.

3.266. C'è asintoto obliquo: $y = 2x - \frac{1}{4}$.

3.267.
$$x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} \sim x.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right].$$
$$x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x = x\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \sim x\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}.$$

Perciò c'è asintoto obliquo

$$y = x - \frac{1}{2}.$$

3.268. $$f(x) \sim x\log 2 \to +\infty \text{ linearmente.}$$

$$f(x) - x\log 2 = x\log\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2\log\left(\frac{2x}{x+1}\right) \equiv q_1(x) + q_2(x).$$

$$q_1(x) \sim x\left(\frac{x}{x+1} - 1\right) = x\left(\frac{-1}{x+1}\right) \to -1; q_2(x) \to 2\log 2;$$

quindi $f(x) - x\log 2 \to 2\log 2 - 1$, e

$$y = x\log 2 + 2\log 2 - 1 \text{ è asintoto obliquo.}$$

3.269. $$x\log\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\right) \sim x\log 2 \to \pm\infty$$

con crescita lineare. Vediamo se esiste asintoto obliquo:

$$f(x) - x\log 2 = x\left[\log\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2+1}\right) - \log 2\right] =$$

$$= x\log\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+2}\right) \sim x\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+2} - 1\right) = x\left(\frac{x-1}{2x^2+2}\right) \to \frac{1}{2}$$

quindi $y = x\log 2 + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

3.270. $$f(x) \sim xe \to +\infty \text{ linearmente;}$$

$$f(x) - xe = xe\left(e^{\frac{x+1}{x}-1} - 1\right) + e^{\frac{x+1}{x}} \equiv q_1(x) + q_2(x);$$

$$q_1(x) \sim xe\left(\frac{x+1}{x} - 1\right) = e;\ q_2(x) \to e, f(x) - xe \to 2e,$$

$$y = xe + 2e \text{ è asintoto obliquo.}$$

3.271.

$$xe^{\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}\right)} \sim xe^{2/3} \to +\infty,$$

con crescita lineare. Per stabilire se c'è asintoto obliquo calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-xe^{2/3}\right].$$

$$f(x)-xe^{2/3}=xe^{2/3}\left[e^{\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}-\frac{2}{3}\right)}-1\right].$$

Poiché $\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}-\frac{2}{3}\right)\to 0$,

$$xe^{2/3}\left[e^{\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}-\frac{2}{3}\right)}-1\right]\sim xe^{2/3}\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+5x}-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=xe^{2/3}\left(\frac{-7x-3}{3(3x^2+2x)}\right)\sim xe^{2/3}\left(\frac{-7x}{9x^2}\right)=-\frac{7}{9}e^{2/3}.$$

Perciò la funzione ammette asintoto obliquo, di equazione:

$$y=xe^{2/3}-\frac{7}{9}e^{2/3}.$$

3.272. $$f(x)\sim\sqrt[4]{16x^4}=2x\to+\infty$$

con crescita lineare. Per stabilire se c'è asintoto obliquo calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x].$$

$$f(x)-2x=\sqrt[4]{16x^4+3x^3+1}-2x=$$

$$=2x\left(\sqrt[4]{1+\left(\frac{3}{16x}+\frac{1}{16x^4}\right)}-1\right).$$

Poiché $\left(\frac{3}{16x}+\frac{1}{16x^4}\right)\to 0$,

$$f(x)-2x\sim 2x\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{16x}+\frac{1}{16x^4}\right)\sim\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{16x}=\frac{3}{32}.$$

Perciò la funzione ammette asintoto obliquo, di equazione:

$$y=2x+\frac{3}{32}.$$

3.273. $$2x\log\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+1}\right)\sim 2x\log 5\to+\infty$$

con crescita lineare, quindi può esserci asintoto obliquo. Stimiamo:

$$f(x) - 2x\log5 = 2x\left[\log\left(\frac{5x^2+3x-1}{5(x^2+1)}\right)\right] \sim 2x\left[\frac{5x^2+3x-1}{5(x^2+1)} - 1\right] =$$

$$= 2x\left[\frac{3x-6}{5(x^2+1)}\right] \sim 2x \cdot \frac{3x}{5x^2} = \frac{6}{5}.$$

Pertanto la funzione ha asintoto obliquo $y = 2x\log5 + \frac{6}{5}$.

3.274. $$f(x) \sim 3x;$$

$$f(x) - 3x = \left(e^{3/(x+1)} - 1\right)3x + e^{3/(x+1)};$$

$$\left(e^{3/(x+1)} - 1\right)3x \sim \frac{3}{x+1} \cdot 3x \to 9; \; e^{3/(x+1)} \to 1;$$

$$f(x) - 3x \to 10$$

e la funzione ha asintoto obliquo

$$y = 3x + 10.$$

3.275. $$f(x) \sim 2x;$$

$$f(x) - 2x = 2x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{8x} + \frac{1}{8x^3}} - 1\right) \sim 2x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{8x} + \frac{1}{8x^3}\right) \sim$$

$$\sim 2x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8x} = \frac{1}{4},$$

e la funzione ha asintoto obliquo

$$y = 2x + \frac{1}{4}.$$

3.276. $$f(x) \sim xe^2 \to +\infty$$

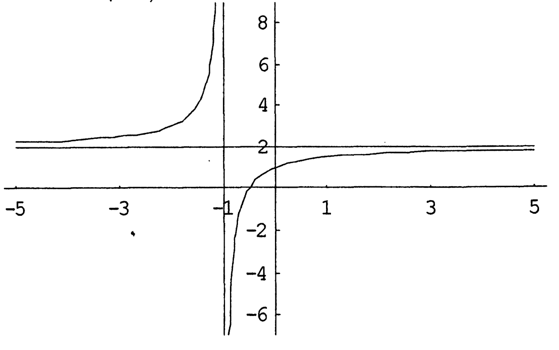
con crescita lineare, possibile asintoto obliquo.

$$f(x) - xe^2 = xe^2\left(e^{\frac{2x+\sqrt{x}}{x-1}-2} - 1\right) \sim xe^2\left(\frac{2x+\sqrt{x}}{x-1} - 2\right) =$$

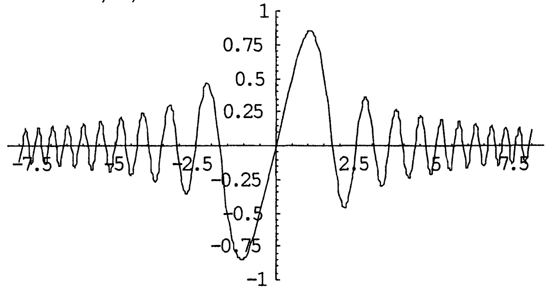
$$= xe^2\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1}\right) \sim \frac{xe^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}e^2 \to +\infty,$$

quindi non esiste asintoto obliquo.

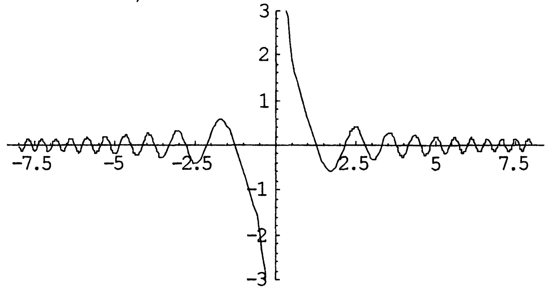
3.277. $\mp\infty$; 2



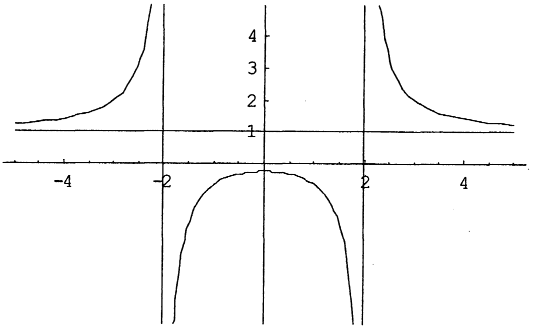
3.278. 0; 0; 0



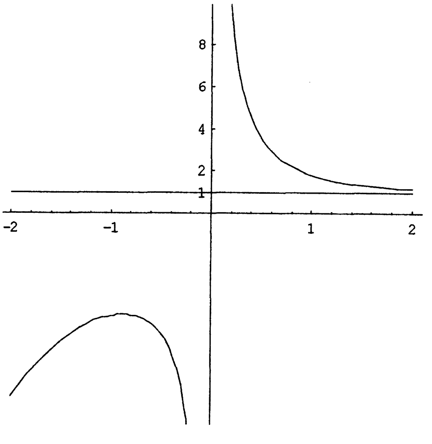
3.279. $\pm\infty$; 0



3.280. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to(-2)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$

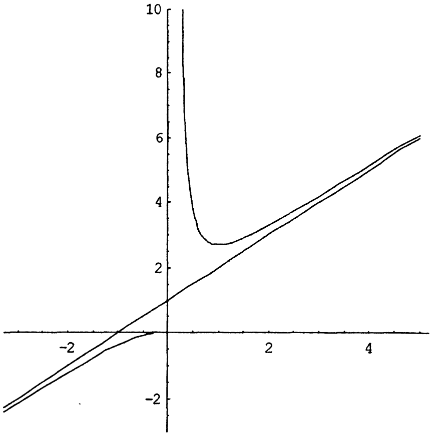


3.281. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 1 \\ -\infty \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$



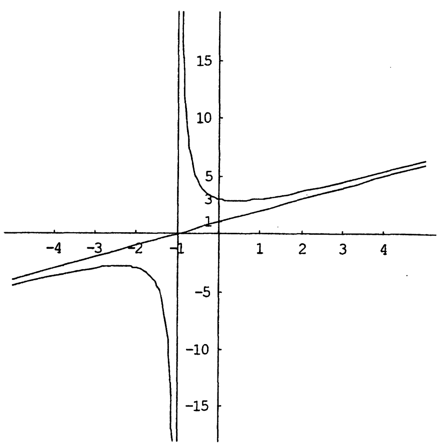
3.282. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$

La funzione ha asintoti obliqui? Sì, $y = x + 1$, per $x \to \pm\infty$.



3.283. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

La funzione ha asintoti obliqui? Sì, $y = x + 1$ per $x \to \pm\infty$.

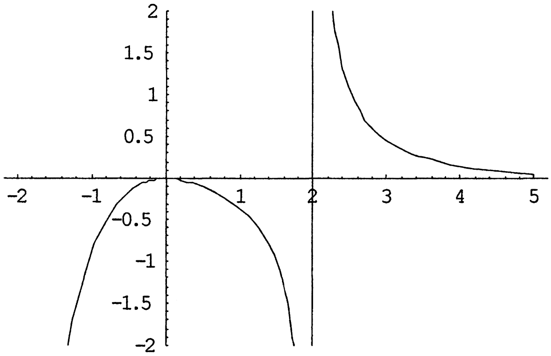


3.284. Definita per $x \neq 2$. Per $x \to 2^{\pm}$, $f(x) \to \pm\infty$; $x = 2$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim xe^{-x} \to \begin{cases} 0^{+} \\ -\infty \end{cases}$ con crescita sopralineare.

$y = 0$ asintoto orizz. per $x \to +\infty$.

$f(0) = 0$. Per $x \to 0$, $f(x) \sim -\frac{1}{2}x^2$; $x = 0$ punto di massimo relativo (a tangente orizzontale). Grafico qualitativo:



3.285. Definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x^2 e^x \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ \end{cases}$

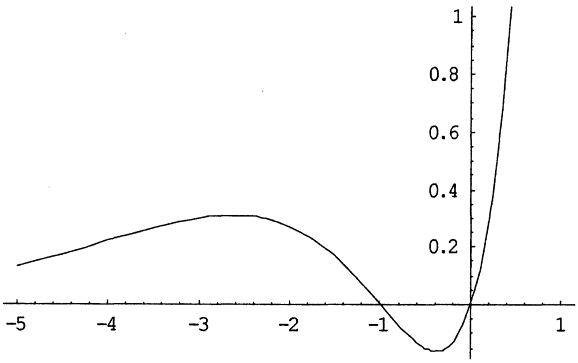
$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

$f(x) = 0$ per $x = 0, x = -1$.

Per $x \to 0, f(x) \sim x$ (retta tangente: $y = x$);

per $x \to -1, f(x) = x(x+1)e^x \sim -\frac{1}{e}(x+1)$. (Retta tangente: $y = -\frac{1}{e}(x+1)$).

Di conseguenza $f(x)$ deve avere un punto di minimo nell'intervallo $(-1, 0)$ e un punto di massimo nell'intervallo $(-\infty, -1)$. Grafico qualitativo:

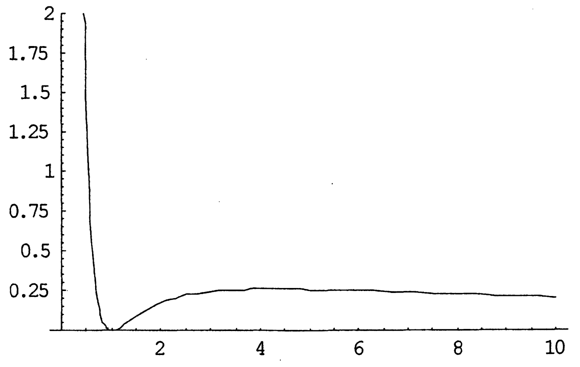


3.286. Definita per $x > 0$; per $x \to 0^+$, $f(x) \sim -\frac{\log x}{x} \to +\infty$. $x = 0$ asintoto verticale.

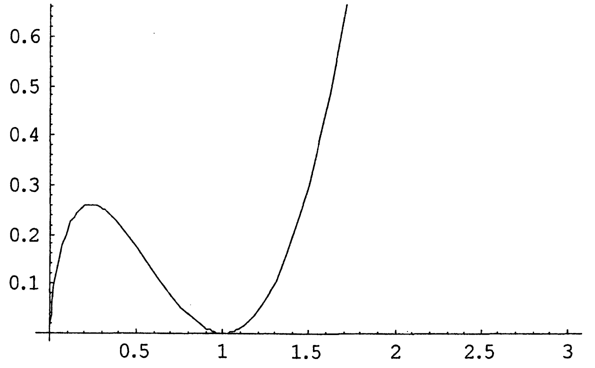
Per $x \to +\infty, f(x) \sim \frac{\log x}{x} \to 0^+$ (gerarchia degli infiniti). $y = 0$ asintoto orozzontale.

$f(1) = 0$; per $x \to 1, f(x) \sim (x-1)^2$; $x = 1$ punto a tangente orizzontale, di minimo.

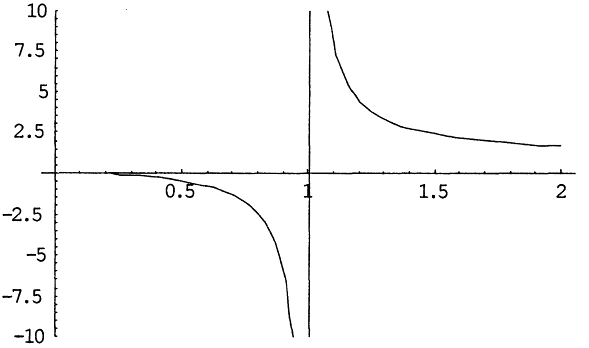
Grafico qualitativo:



3.287. Definita per $x > 0$.
Per $x \to 0^+, f(x) \sim -x\log x \to 0^+$ con tangente verticale (perché $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$).
Per $x \to +\infty, f(x) \sim x^2 \log x \to +\infty$ con crescita sopralineare.
$f(x) = 0$ per $x = 0, 1$.
Per $x \to 1, f(x) = x(x-1)\log x \sim (x-1)^2$, perciò $x = 1$ è punto a tangente orizzontale (di minimo). Grafico qualitativo:



3.288. Definita per $x > 0, x \neq 1$.
Per $x \to 0^+, f(x) \sim \frac{x^{3/2}}{\log x} \to 0^-$ con tangente orizzontale (è $o(x)$).
Per $x \to 1^\pm, f(x) \sim \frac{\log 2}{x-1} \to \pm\infty$; $x = 1$ asintoto verticale.
Per $x \to +\infty, f(x) \sim \frac{2\log x}{\sqrt{x}\log x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0^+$; $y = 0$ asintoto orizzontale.
Grafico qualitativo:



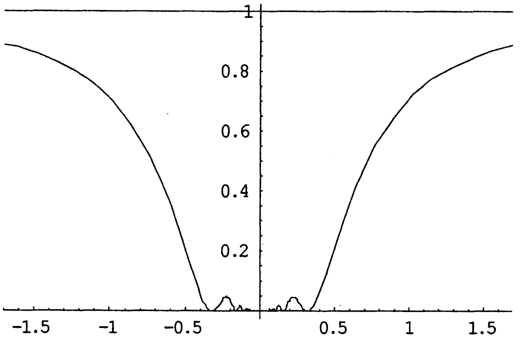
3.289. Definita per $x \neq 0$; per $x \to 0$, $f(x) \to 0$, perciò è prolungabile con continuità ponendo $f(0) = 0$. La funzione è pari.

Sfruttando il fatto che $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 \leq 1$ e $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$ si ha anche:

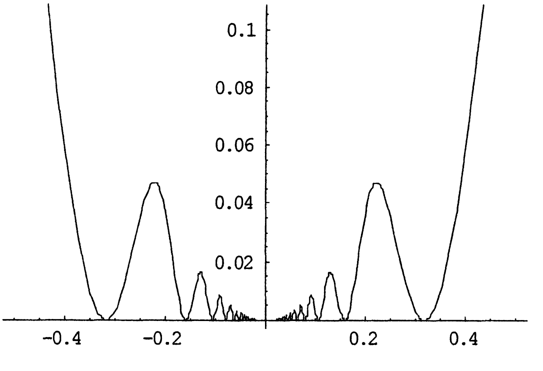
$|f(x)| \leq x^2$ (significativo vicino all'origine); $|f(x)| \leq 1$ (significativo per x grande).

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1$; $y = 1$ asintoto orizzontale.

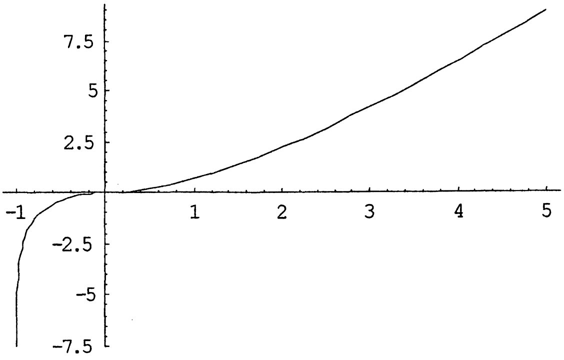
$f(x) \geq 0 \forall x$; $f(x) = 0$ per $x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Grafico qualitativo:



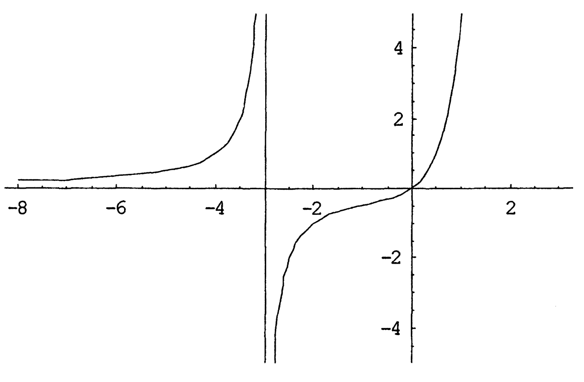
Vicino all'origine:



3.290. Definita per $x > -1$.
Per $x \to (-1)^+, f(x) \to -\infty$
$x = -1$ asintoto verticale dalla destra.
Per $x \to +\infty, f(x) \sim x\log x \to +\infty$ con crescita sopralineare.
$f(x) = 0$ per $x = 0$;
per $x \to 0, f(x) \sim x \cdot |x|$, perciò $x = 0$ punto di flesso a tangente orizzontale.
Grafico:



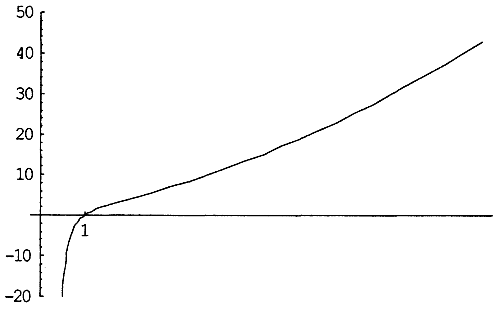
3.291. Definita per $x \neq -3$. Per $x \to (-3)^{\pm}, f(x) \to \mp\infty$
$x = -3$ asintoto verticale.
Per $x \to +\infty, f(x) \sim \frac{e^{3x}}{x} \to +\infty$ con crescita sopralineare
Per $x \to -\infty, f(x) \sim -\frac{1}{x} \to 0^+$
$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$
$f(0) = 0$; per $x \to 0, f(x) \sim \frac{3x}{3} = x$. Grafico:



3.292. Definita per $x > 0, x \neq 1$.
Per $x \to 0^+, f(x) \sim \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\log x} \to -\infty$; $x = 0$ asintoto verticale.

Per $x \to 1, f(x) \sim \frac{(x-1)^2 e^2}{(x-1)} = e^2 \cdot (x-1) \to 0$; $x = 1$ punto di discontinuità eliminabile, definendo $f(1) = 0$, f risulta continua, e in $x = 1$ si annulla linearmente.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{x^2}{\log x} \to +\infty$ con crescita sopralineare (senza asintoto obliquo).
Grafico:



3.293. Conviene riscrivere f nella forma:

$$f(x) = e^{x \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}.$$

$f(x)$ definita per $x \neq -2; x \neq -1$;

per $x \to -2, x\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \to -\infty; f(x) \to 0^+$ (con velocità esponenziale, quindi con tangente orizzontale); $x = -2$ punto di discontinuità eliminabile.

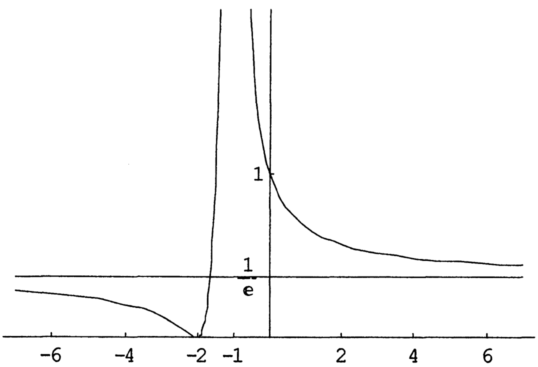
per $x \to -1, x\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \to +\infty; f(x) \to +\infty$ $x = -1$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty$,
$$f(x) = e^{x\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)} = e^{g(x)}$$

con
$$g(x) \sim x\left(\frac{x+1}{x+2} - 1\right) = x\left(\frac{-1}{x+2}\right) \to -1$$

quindi
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^{-1}$$

$y = e^{-1}$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Grafico qualitativo:



3.294. Definita per $x \neq 0, x > -2$.

Per $x \to -2^+, f(x) \sim e^{\frac{1}{\arctan 2}} \cdot [\log(2+x)]^{1/3} \to -\infty$. $x = -2$ asintoto verticale

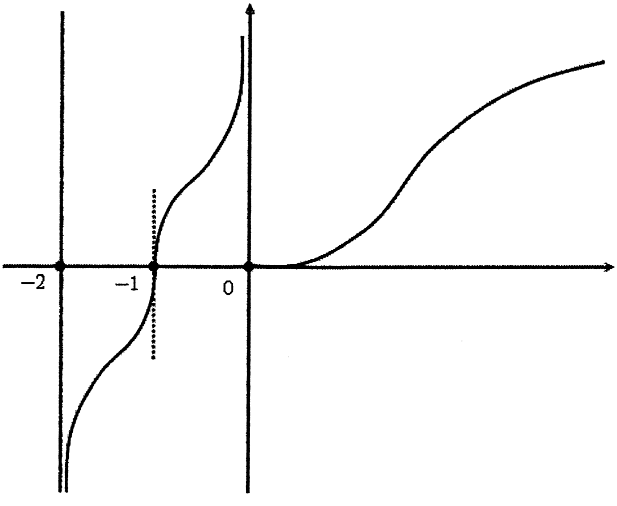
Per $x \to +\infty, f(x) \sim e^{-\frac{2}{\pi}} \cdot [\log x]^{1/3} \to +\infty$ con crescita sottolineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

Per $x \to 0^{\pm}, f(x) \sim e^{-\frac{1}{\arctan x}} \cdot [\log 2]^{1/3} \to \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$

$x = 0$ è punto a tangente orizzontale da destra (annullamento esponenziale), mentre è asintoto verticale da sinistra.

$f(x) = 0$ per $x = -1$. Per $x \to -1, f(x) \sim e^{\frac{4}{\pi}} \cdot (x+1)^{1/3}$, perciò $x = -1$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Grafico qualitativo:



3.295. Definita per $x > -1, x \neq 0$.

Per $x \to -1^+$,

$$f(x) \sim \frac{|x| - 1}{\log(1+x)} = \frac{-(x+1)}{\log(1+x)} \to 0^+.$$

Quindi $x = -1$ è punto di discontinuità eliminabile. Inoltre $f(x)$ si annulla più rapidamente di $(x+1)$, quindi ha tangente orizzantale.

Per $x \to 0^{\pm}$,

$$f(x) \sim x \log|x| \to 0^{\mp}.$$

Quindi $x = 0$ è punto di discontinuità eliminabile. Inoltre $f(x)$ si annulla più lentamente di x, quindi ha tangente verticale: punto di flesso a tangente verticale.

$f(1)=0$. Per $x\to 1$,

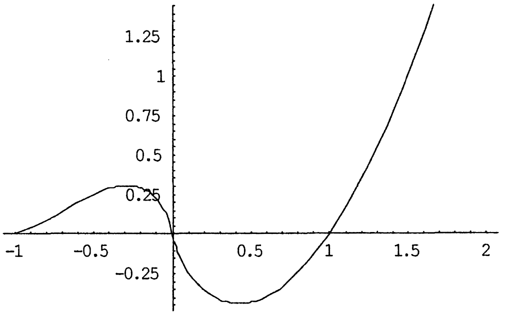
$$f(x)\sim\frac{x-1}{\log 2}$$

che si annulla linearmente (il grafico attraversa l'asse x con tangente obliqua, senza alcuna particolarità).

Per $x\to+\infty$,

$$f(x)\sim x^2\to+\infty$$

con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoto obliquo). Grafico qualitativo:



3.296. Definita per $x\neq\pm1$, dispari.
$f(0)=0$. Per $x\to 0$,

$$f(x)\sim x\left(-x^2\right)^3=-x^7.$$

Quindi $x=0$ è punto di flesso a tangente orizzontale, discendente.
Per $x\to 1$,

$$f(x)\sim\log^3\left|1-x^2\right|\to-\infty.$$

Quindi $x=1$ è asintoto verticale (per simmetria, $f(x)\to+\infty$ per $x\to-1$, e $x=-1$ è asintoto verticale).

Per $x\to+\infty$,

$$f(x)\sim x\left(\log\left(x^2\right)\right)^3=8x\log^3x\to+\infty$$

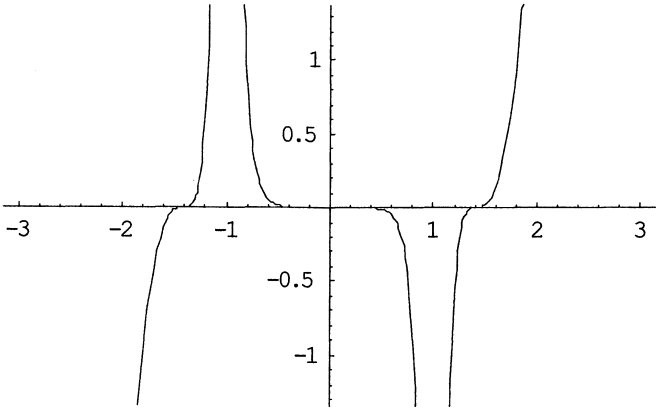
con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

(Per simmetria, $f(x)\to-\infty$ per $x\to-\infty$, sopralinearmente).

$f(x)=0$ per $|1-x^2|=1, x^2-1=\pm1, x=0, x=\pm\sqrt{2}$. Inoltre in questi punti, il logatitmo si annulla del prim'ordine, perciò la funzione si annulla del 3° ordine, cioè con flesso a tangente orizzontale. Infatti, per $x\to\sqrt{2}$,

$$f(x) \sim \sqrt{2}(x^2-2)^3 = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)^3\left(x-\sqrt{2}\right)^3 = 32\left(x-\sqrt{2}\right)^3.$$

Grafico qualitativo:



3.297. Definita per $x \neq 1$.
$f(0) = 0$.
Per $x \to 1^\pm$,

$$f(x) \sim e(e-1)e^{1/(x-1)} \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$$

$x = 1$ è asintoto verticale da destra, punto di arresto, a tangente orizzontale, da sinistra.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim e^{2x} \to +\infty$$

con crescita sopralineare (in particolare senza asintoti obliqui).
Per $x \to -\infty$,

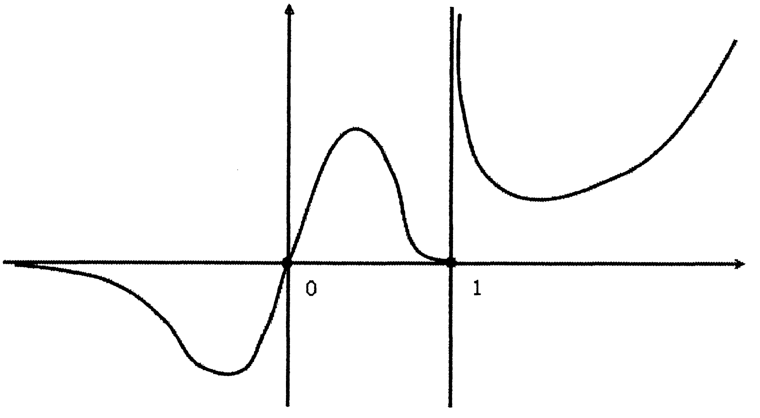
$$f(x) \sim -e^x \to 0^-.$$

$y = 0$ asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$).
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{e}$$

si annulla con retta tangente obliqua.

Grafico qualitativo:



3.298. Definita per $x \neq 0$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{-x}{\sqrt[3]{x}} = -x^{2/3} \to 0^-.$$

Quindi $x = 0$ è un punto di discontinutità eliminabile, di cuspide verso l'alto.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{x^{4/3}}{e^{\sqrt[3]{x}}} \to 0^+$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale.
Per $x \to 1$,

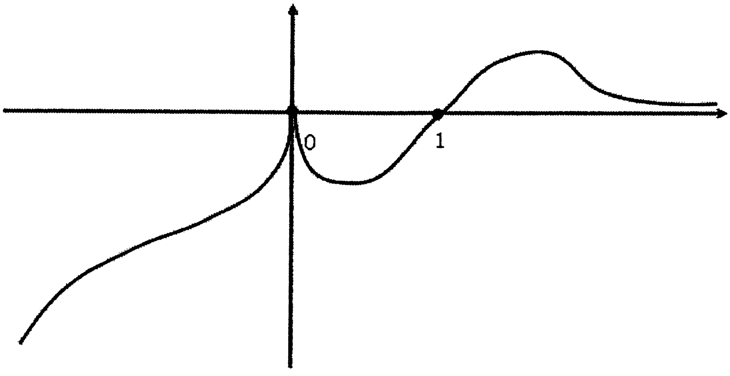
$$f(x) \sim \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)}{e - 1} \sim \frac{(x-1)}{3(e-1)}.$$

Per $x \to -\infty$,

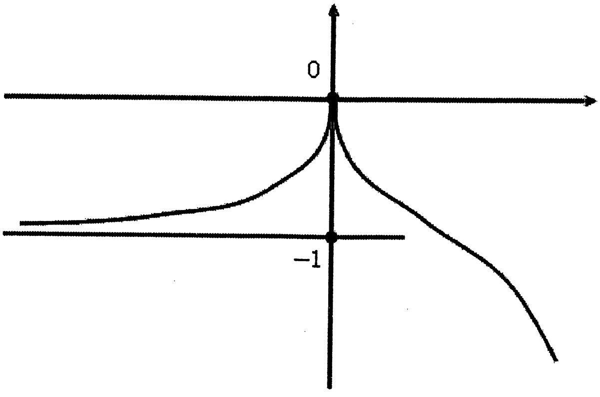
$$f(x) \sim \frac{x^{4/3}}{-1} = -x^{4/3} \to -\infty$$

con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoti obliqui).

Grafico qualitativo:



3.299. Definita in tutto $\mathbb{R}$. Si annulla in $x = 0$.
Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim -e^{\sqrt[3]{x}} \to -\infty$, con crescita sopralineare.
Per $x \to -\infty$, $f(x) \to -1$. $y = -1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
Per $x \to 0$, $f(x) \sim -\sqrt[3]{|x|} \cdot \left|\sqrt[3]{x}\right| = -x^{2/3}$; $x = 0$ punto di cuspide rivolto verso l'alto.
Grafico qualitativo:



3.300. Definita per $x \neq 0$, funzione pari.
Per $x \to 0^{\pm}$,

$$x^3 \arctan\frac{1}{x} \sim \pm x^3 \frac{\pi}{2}; \quad -x \arctan\frac{1}{x^3} \sim \mp x\frac{\pi}{2},$$

quindi $f(x) \sim \mp x\frac{\pi}{2} \to 0$. Inoltre $x = 0$ è un punto angoloso.

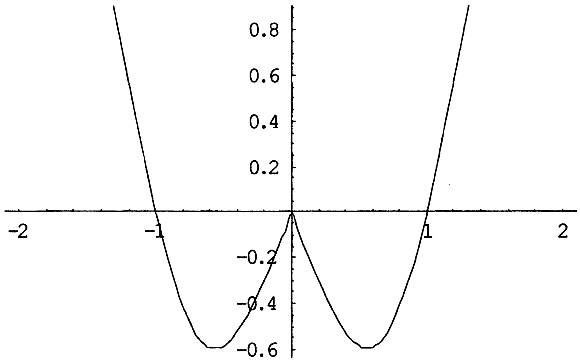
Per $x \to +\infty$,

$$x^3 \arctan \frac{1}{x} \sim x^2; \quad -x \arctan \frac{1}{x^3} \sim -\frac{1}{x^2},$$

quindi $f(x) \sim x^2 \to +\infty$ con crescita sopralineare.

$f(1) = 0$.

Simmetrizzando per $x < 0$, tracciamo il grafico qualitativo:



Cap. 4. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

4.1. Calcolo delle derivate

4.1.A. Algebra delle derivate

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap.4, §2, §3.

Questi primi esercizi riguardano la semplice conoscenza delle derivate delle funzioni elementari e delle regole di calcolo delle derivate, pertanto non si presentano esempi svolti.

Esercizi

Per ogni affermazione fatta, dire se è vera o falsa:

4.1. $(\cos x)' = \sin x$

4.2. $(\arctan(1+x^2))' = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

4.3. $(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x$

4.4. $(x\log x)' = \log x + 1$

4.5. $(\mathrm{Ch}x)' = \mathrm{Sh}x$

4.6. $(\log|x|)' = \frac{1}{|x|}$

4.7. $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' = \frac{1}{3(x^2+1)^{2/3}}$

4.8. $\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)' = \frac{-5}{(x-2)^2}$

4.9. $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \arctan x$

4.10. $(\log_2(x^2+1))' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \log 2$

4.11. $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$

4.12. $(xe^x)' = e^x(x+1)$

4.13. $(\arcsin x)' = \sqrt{1-x^2}$

4.14. $(\log 3x)' = \frac{1}{x}$

4.15. $\left(2^{x^2}\right)' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \log 2$

4.16. $\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)' = \frac{-5}{(2x+1)^2}$

4.17. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \log x$

4.18. $(\arctan 2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$

4.19. $\left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x - 1}\cos x$

4.20. $\left(x\log^2 x\right)' = \log^2 x + 2\log x$

4.21. $(\mathrm{Th}x)' = 1 - \mathrm{Th}^2 x$

4.22. $(\log|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x}$

4.23. $\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)' = 2(2x+1)^{2/3}$

4.24. $\left(\frac{3x+2}{x+2}\right)' = \frac{4}{(x+2)^2}$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni di x, ed eseguire le semplificazioni immediate. Ogni eventuale lettera diversa da x va considerata come una costante.

4.25. $x^5 - \log x + \sin x$

4.26. $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5} + x^{2/5} - \frac{1}{x}$

4.27. $x^2 \log x$

4.28. $\sin^3 x - \cos^2(3x) + e^{x^2}$

4.29. $\frac{\sin 2x + \cos^3 x + 1}{\sin x \cos x}$

4.30. $\frac{ax+b}{cx+d}$

4.31. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

4.32. $e^{\lambda x}(a\cos bx + c\sin(bx))$

4.33. $\frac{xy}{x^2+y^2}$

4.34. $\frac{\sqrt{\arcsin x}}{\arctan x}$

4.35. $e^{\sin x}(2x+1)$

4.36. $(\sin x)^{\cos x}$

4.37. $e^{1/\log x}$

4.38. $\tan(2x+1)$

4.39. $\frac{\mathrm{Sh}x\,\mathrm{Ch}x + x}{2}$

4.40. $\mathrm{Th}(1+\log x)$

4.41. $2^{(x^2+1)/(x-1)}$

4.42. $\log_2(3x^4+1)$

4.43. $x^2\log(\cos x)$

4.44. $e^{\frac{x+1}{x-2}}$

4.45. $x2^{\sin^2 x}$

4.46. $x^2\arctan\frac{1}{x}$

4.47.★ $\log\left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right)$

4.48. $xe^{\frac{3x+5}{x^2+1}}$

4.49. $2^{\frac{x+1}{x-1}}$.

4.50. $\log_2\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)$

4.51. $x\arctan\frac{1}{x}$.

4.52. $\sin(2x)\cdot\cos(3x)$.

4.53. $\log\left(\frac{2-\sin x}{1+\cos x}\right)$

4.54. $x\cos(\sin 3x)$

4.55. $\sqrt{2+\sqrt{1+3\sqrt{x}}}$

4.56. $x\log_2(x^2+3x+1)$

4.57. $\sqrt{\arctan(1+x^2)}$

4.58. $3^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

4.59. $\log(2^x+2^{-x})$

4.60. $\log\left(\frac{3\sin x+2}{4\cos x-1}\right)$

4.1.B. Retta tangente e linearizzazione

Esempi svolti

Esempio 4.1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$y = \frac{\cos x}{1+x} \quad \text{nel punto } x_0 = \pi.$$

Calcoliamo: $$f(\pi) = -\frac{1}{1+\pi};$$

$$f'(x) = \frac{-(1+x)\sin x - \cos x}{(1+x)^2};\ f'(\pi) = \frac{1}{(1+\pi)^2};$$

Quindi la retta tangente ha equazione:

$$y = \frac{1}{(1+\pi)^2}(x-\pi) - \frac{1}{1+\pi}.$$

Esempio 4.2. Linearizzare, per $x \to 0$, la funzione:

$$f(x) = e^x\sqrt{4+3x}.$$

Ricordiamo che "linearizzare" una funzione nell'intorno di un punto x_0 assegnato significa scriverne l'approssimazione mediante una funzione lineare, cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \text{ per } x \to x_0.$$

Nel nostro caso $x_0 = 0$ e si ha:

$$f(0) = 2;\ f'(x) = e^x\left(\sqrt{4+3x} + \frac{3}{2\sqrt{4+3x}}\right);\ f'(0) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$f(x) = 2 + \frac{11}{4}x + o(x).$$

Esercizi

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ in x_0

4.61. $f(x) = \sin 2x$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

4.62. $f(x) = e^{-3x}$; $x_0 = 1$.

4.63. $f(x) = \log(1 + x^2)$; $x_0 = 1$.

4.64. $f(x) = \arctan x$; $x_0 = 1$.

4.65. $f(x) = 2^x$; $x_0 = \log_2 3$.

4.66. $f(x) = e^{x^2}$; $x_0 = \sqrt{2}$.

4.67. $f(x) = \log(\sin x)$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

4.68. $f(x) = \tan(x^2)$; $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

4.69. $f(x) = \arctan(x^2)$; $x_0 = 2$.

Linearizzare, per $x \to x_0$, la funzione:

4.70.★ $f(x) = \cos(\pi \cos x)$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4.71.★ $f(x) = \arcsin(2x) + \frac{\pi}{3}$; $x_0 = \frac{1}{4}$

4.72.★ $f(x) = 3\arctan(2x) + \frac{\pi}{4}$; $x_0 = \frac{1}{2}$

4.73.★ $f(x) = \arctan(1 + \log x)$; $x_0 = 1$

4.1.C. Derivata della funzione inversa

Esempio 4.3. Sia

$$f(x) = x\log^2 x.$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile. (Non si chiede di scrivere la funzione inversa).

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intervallo detto, calcolare $g'(4e^2)$.

a. $$f'(x) = \log^2 x + 2\log x = \log x(\log x + 2).$$

Per $x > 1$, è $\log x > 0$ e quindi $f'(x) > 0$, perciò f è strettamente crescente e dunque invertibile.

Notiamo che l'equazione $y = x\log^2 x$ non è risolubile rispetto a x con procedimenti algebrici; questo è il motivo per cui l'esercizio non richiede di scrivere l'inversa; invece, è il teorema sulla derivata della funzione inversa che ci permetterà di calcolare $g'(4e^2)$ senza bisogno di conoscere g in ogni punto.

b. $f(e^2) = 4e^2$, dunque $g(4e^2) = e^2$, e

$$g'\left(4e^2\right) = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{2(2+2)} = \frac{1}{8}.$$

Esercizi

4.74.★ Sia $f(x) = e^{x^2+x+1}$.

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $x > -\frac{1}{2}$ la funzione f è monotona e quindi invertibile. (Non si chiede di scrivere la funzione inversa).

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intervallo di cui sopra, calcolare $g'(e^3)$.

4.75.★ Sia $f(x) = xe^{-x^2}$.

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che in un opportuno intorno di $x = 1$ la funzione f è monotona e quindi invertibile. (Non si chiede di scrivere la funzione inversa).

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'\left(\frac{1}{e}\right)$.

4.76.★ Sia $f(x) = x^2\log x$.

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che in un opportuno intorno di $x = e$ la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'(e^2)$.

4.77.★ Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left|\frac{x+3}{2-x}\right|,$$

invertibile in $(0,2)$; detta g la sua funzione inversa, calcolare

$$g'(\log 2).$$

4.78.★ Si consideri la funzione:

$$f(t) = e^{-2t}\left(t^2 + 3t + 4\right),$$

invertibile; detta g la sua funzione inversa, calcolare

$$g'\left(\frac{8}{e^2}\right).$$

4.79.★ Sia $$f(x) = x\log(\log x).$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(e,+\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'(e^2\log 2)$.

4.80.★ Sia $$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right).$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ la funzione f è strettamente monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4.81.★ Sia $$f(x) = e^{2x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che in un intorno di $x = 1$ la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'(e^2)$.

4.82.★ Sia

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(0,+\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

4.83.★ Sia
$$f(x) = \frac{x}{\log x}.$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che nell'intervallo $(e, +\infty)$ la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

4.84.★ Sia
$$f(x) = e^{2x}(3 + 5x).$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che in un intorno di 0 la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'(3)$.

4.85.★ Sia
$$f(x) = x(\log x + 2).$$

a. Calcolare $f'(x)$ e dedurre che in un intorno di 1 la funzione f è monotona e quindi invertibile.

b. Detta g la funzione inversa di f nell'intorno di cui sopra, calcolare $g'(2)$.

4.86.★ Sia
$$f(x) = e^{\sin(2x)} + \cos(5x)$$

a. Provare che f è invertibile in un intorno di $x = 0$.

b. Detta g la funzione inversa di f su questo intervallo, calcolare $g'(2)$.

4.87.★ Sia
$$f(x) = \log_2(1 + 3x) + e^{-2x}$$

a. Provare che f è invertibile in un intorno di $x = 0$.

b. Detta g la funzione inversa di f su questo intervallo, calcolare $g'(1)$.

4.88.★ Sia
$$f(x) = 2x + \log(\log x).$$

a. Determinare l'insieme di definizione di f e provare che f è invertibile in tutto l'insieme di definizione.

b. Detta g la funzione inversa di f, calcolare $g'(2e)$.

4.89.★ Sia
$$f(x) = 3x + e^{-x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

a. Provare che f è invertibile per $x \geq 0$.
b. Detta g la funzione inversa di f su questo intervallo, calcolare $g'\left(3 + \frac{1}{e}\right)$.

Esercizi vari su linearizzazione, derivata della funzione inversa, convessità per tangenti

4.90.★
a. Linearizzare, per $x \to 0$, la funzione:
$$f(x) = \arctan(2x + 1).$$

b. Calcolando $f''(0)$, stabilire se in un intorno di $x = 0$ il grafico di f sta sopra o sotto la retta $y = a + bx$ calcolata al punto *a*.

4.91.★
a. Linearizzare, per $t \to 0$, la funzione:
$$f(t) = e^{-\frac{1}{t+2}}.$$

b. Calcolando $f''(0)$, stabilire se in un intorno di $t = 0$ il grafico di f sta sopra o sotto la retta $y = a + bt$ calcolata al punto *a*.

4.92.★
a. Linearizzare, per $x \to 0^+$, la funzione:
$$f(x) = e^{-x}\log(1 + 2x) + e^x.$$

b. Per $x \in [0, 1]$ la funzione f è invertibile. Detta g la sua funzione inversa, calcolare $g'(1)$.

4.93.★
a. Linearizzare, per $x \to 0^+$, la funzione:
$$f(x) = e^{-2x}\cos\sqrt{x}.$$

(Ossia: scrivere $f(x)$ nella forma $a + bx + o(x)$ per $x \to 0$).
b. Per $x \in [0, 1]$ la funzione f è invertibile. Detta g la sua funzione inversa, calcolare $g'(1)$.

Soluzioni § 4.1.

4.1.	falso	**4.13.**	falso
4.2.	vero	**4.14.**	vero
4.3.	falso	**4.15.**	vero
4.4.	vero	**4.16.**	falso
4.5.	vero	**4.17.**	falso
4.6.	falso	**4.18.**	vero
4.7.	falso	**4.19.**	falso
4.8.	vero	**4.20.**	vero
4.9.	falso	**4.21.**	vero
4.10.	falso	**4.22.**	vero
4.11.	vero	**4.23.**	falso
4.12.	vero	**4.24.**	vero

4.25. $$5x^4 - \frac{1}{x} + \cos x$$

4.26. $$-\frac{2}{x^3} + \frac{15}{x^6} + \frac{2}{5}\frac{1}{x^{3/5}} + \frac{1}{x^2}$$

4.27. $$2x\log x + x$$

4.28. $$3\sin^2 x\cos x + 6\cos(3x)\sin(3x) + 2xe^{x^2}$$

4.29.

$$\frac{(2\cos 2x - 3\cos^2 x\sin x)\sin x\cos x - (\sin 2x + \cos^3 x + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

4.30. $$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

4.31. $$-\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

4.32. $$e^{\lambda x}(\lambda c_1\cos(ax) + \lambda c_2\sin(bx) - c_1 a\sin(ax) + c_2 b\cos(bx))$$

4.33. $$\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

4.34. $$\frac{\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)\mathrm{arcsin}x}}\mathrm{arctan}x - \frac{1}{1+x^2}\sqrt{\mathrm{arcsin}x}}{(\mathrm{arctan}x)^2}$$

4.35. $$e^{\mathrm{sin}x}((2x+1)\mathrm{cos}x+2)$$

4.36. $$(\mathrm{sin}x)^{\mathrm{cos}x}\left(-\mathrm{sin}x\log(\mathrm{sin}x)+\frac{\mathrm{cos}^2 x}{\mathrm{sin}x}\right)$$

4.37. $$e^{1/\log x}\left(-\frac{1}{x\log^2 x}\right)$$

4.38. $$2\left(1+\tan^2(2x+1)\right)$$

4.39. $$\frac{\mathrm{Ch}^2 x+\mathrm{Sh}^2 x+1}{2}=\mathrm{Ch}^2 x$$

4.40. $$\frac{1-\mathrm{Th}^2(1+\log x)}{x}$$

4.41. $$\log 2\cdot 2^{(x^2+1)/(x-1)}\cdot\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=$$
$$=\log 2\cdot 2^{\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)}\frac{(x^2-2x-1)}{(x-1)^2}.$$

4.42. $$\frac{1}{\log 2}\cdot\frac{12x^3}{3x^4+1}$$

4.43. $$2x\log(\mathrm{cos}x)-x^2\tan x$$

4.44. $$e^{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\left(\frac{-3}{(x-2)^2}\right)$$

4.45. $$2^{\mathrm{sin}^2 x}(1+x\log 2\cdot 2\mathrm{sin}x\mathrm{cos}x).$$

4.46. $$2x\mathrm{arctan}\frac{1}{x}+\frac{x^2}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\mathrm{arctan}\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^2+1}.$$

4.47. Riscriviamo la funzione nella forma

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right) = \log(x^2+1) - \log(2x+3);$$

quindi calcoliamo $$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3} = \frac{2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)(2x+3)}$$

4.48. $$e^{\frac{3x+5}{x^2+1}}\left(1 + x \cdot \frac{-3x^2-10x+3}{(x^2+1)^2}\right).$$

4.49. $$-2\log 2 \cdot 2^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2}$$

4.50. $$\frac{x^2-4x-1}{(1+x^2)(x-2)\log 2}$$

4.51. $$\arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

4.52. $$2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$$

4.53. $$\frac{-\cos x}{2-\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{-\cos x + 2\sin x - 1}{(2-\sin x)(1+\cos x)}$$

4.54. $$\cos(\sin 3x) - 3x\sin(\sin 3x)\cos 3x$$

4.55. $$\frac{3}{8\sqrt{2+\sqrt{1+3\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{1+3\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}.$$

4.56. $$\log_2(x^2+3x+1) + \frac{x(2x+3)}{(x^2+3x+1)\log 2}$$

4.57. $$\frac{x}{\sqrt{\arctan(1+x^2)}\left(1+(1+x^2)^2\right)}$$

4.58. $$3^{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \frac{(x^2-2x-1)\log 3}{(x-1)^2}$$

4.59. $$\left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\right)\log 2.$$

4.60. $$\frac{3\cos x}{3\sin x + 2} + \frac{4\sin x}{4\cos x - 1} = \frac{12 - 3\cos x + 8\sin x}{(3\sin x + 2)(4\cos x - 1)}.$$

4.61. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - x$

4.62. $y = \frac{1}{e^3}(4 - 3x).$

4.63. $y = x + \log 2 - 1$

4.64. $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

4.65. $y = (3\log 2)(x - \log_2 3) + 3 = (3\log 2)x + 3(1 - \log 3)$

4.66. $y = 2\sqrt{2}e^2\left(x - \sqrt{2}\right) + e^2 = 2\sqrt{2}e^2 x - 3e^2$

4.67. $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \log 2$

4.68. $y = 4\sqrt{\frac{\pi}{4}}x - \pi + 1$

4.69. $y = \frac{4}{17}(x - 2) + \arctan 4.$

4.70. $$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$f'(x) = \sin(\pi\cos x)\pi\sin x; \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

Dunque: $$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

4.71.
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\arcsin\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2};$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}};\ f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{4}\right) + o\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

4.72.
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (3\arctan 1) + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi;$$

$$f'(x) = \frac{3\cdot 2}{1+(2x)^2};\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3;$$

$$f(x) = \pi + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + o\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

4.73.
$$f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+\log x)^2}\cdot\frac{1}{x}; \qquad f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Dunque:
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \text{ per } x \to 1.$$

4.74.

a.
$$f'(x) = e^{x^2+x+1}(2x+1) > 0 \text{ per } x > -\frac{1}{2},$$

quindi in questo intervallo f è strettamente crescente, e pertanto invertibile.

b. Poiché $f(1) = e^3, g(e^3) = 1$, quindi
$$g'(e^3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3e^3}.$$

4.75

a.
$$f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2); f'(1) = -\frac{1}{e} < 0;$$

poiché f' è continua, per il teorema di permanenza del segno sarà $f'(x) < 0$ in tutto un intorno di $x = 1$; in tale intorno f è strettamente decrescente e quindi invertibile.

b. Poiché $f(1) = \frac{1}{e}, g(\frac{1}{e}) = 1$, e

$$g'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = -e.$$

4.76.

a.
$$f'(x) = 2x\log x + x = x(2\log x + 1);\ f'(e) = 3e > 0,$$

poiché f' è continua, per il teorema di permanenza del segno in tutto un intorno di $x = e$ sarà $f'(x) > 0$ e $f(x)$ è strettamente crescente, quindi invertibile.

b. Poiché $f(e) = e^2$,

$$g'(e^2) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{3e}.$$

4.77.
$$f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{-5}{(x+3)(x-2)};$$

$$\log\left|\frac{x+3}{2-x}\right| = \log 2 \quad \text{per} \quad \frac{x+3}{2-x} = \pm 2, x = \frac{1}{3}, x = 7;$$

poiché si parla dell'intervallo $(0,2)$, il solo valore che interessa è $1/3$: $f(1/3) = \log 2, g(\log 2) = 1/3$;

$$g'(\log 2) = \frac{1}{f'(1/3)} = \frac{1}{9/10} = \frac{10}{9}.$$

4.78.
$$f'(t) = -e^{-2t}(2t^2 + 4t + 5);$$

$$f(1) = \frac{8}{e^2};\ g\left(\frac{8}{e^2}\right) = 1;$$

$$g'\left(\frac{8}{e^2}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{11e^{-2}} = -\frac{e^2}{11}.$$

4.79.

a. $$f'(x) = \log(\log x) + \frac{x}{x\log x} = \log(\log x) + \frac{1}{\log x}.$$

Per $x > e, \log x > 1, \log(\log x) > 0$, e $\log(\log x) + \frac{1}{\log x} > 0$.

Quindi in $(e, +\infty)$ la funzione f è strettamente crescente e quindi invertibile.

b. $$f(e^2) = e^2\log 2; \quad g(e^2\log 2) = e^2;$$

$$g'(e^2\log 2) = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{\log 2 + \frac{1}{2}}.$$

4.80.

a. $$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right).$$

Per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin x > 0, \frac{\pi}{2}\cos x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, quindi $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) > 0$.

Perciò $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi in questo intervallo la funzione f è strettamente decrescente e quindi invertibile.

b. $$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ se:}$$

$$\frac{\pi}{2}\cos x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ossia se } \cos x = \begin{cases} \frac{1}{2} + 4k \\ \frac{3}{2} + 4k \end{cases}$$

L'unica possibilità è $\cos x = \frac{1}{2}$ che, per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, significa $x = \frac{\pi}{3}$.

Dunque $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{3}$, e

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}}.$$

4.81

a. $$f'(x) = e^{2x}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \quad f'(1) = 2e^2 > 0$$

e poiché f' è continua, per il teorema di permanenza del segno sarà $f'(x) > 0$ (e quindi f strettamente crescente) in un intorno di $x = 1$. Perciò in un intorno di $x = 1$ la f è invertibile.

b. $f(1) = e^2$, dunque $g(e^2) = 1$, e

$$g'(e^2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e^2}.$$

4.82.

a.
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \ \forall x > 0$$

perciò la funzione è strettamente crescente, e quindi invertibile, in $(0, \infty)$.

b. Notiamo che $f(2) = \frac{2}{\sqrt{e}}$, perciò $g\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = 2$ e

$$g'\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{e}}{3}.$$

4.83.

a.
$$f'(x) = \frac{\log x - 1}{\log^2 x} > 0 \text{ per } x > e.$$

Quindi in $(e, +\infty)$ f è strettamente crescente, e quindi invertibile.

b. Notiamo che $f(e^2) = \frac{e^2}{2}$, perciò $g\left(\frac{e^2}{2}\right) = e^2$, e

$$g'\left(\frac{e^2}{2}\right) = \frac{1}{f'(e^2)} = 4.$$

4.84.

a.
$$f'(x) = e^{2x}(2(3 + 5x) + 5) = e^{2x}(11 + 10x) > 0 \text{ per } x > -\frac{11}{10}.$$

Quindi in $\left(-\frac{11}{10}, +\infty\right)$ f è strettamente crescente e quindi invertibile.

b.
$$f(0) = 3; g(3) = 0; \quad g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{11}.$$

4.85.

a. f è definita per $x > 0$.

$$f'(x) = \log x + 3 > 0 \text{ per } x > e^{-3}.$$

Quindi in $(e^{-3}, +\infty)$ f è strettamente crescente e quindi invertibile.

b.
$$f(1) = 2; g(2) = 1; \quad g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

4.86.
$$f'(x) = e^{\sin(2x)} 2\cos(2x) - 5\sin(5x); \quad f'(0) = 2 > 0.$$

Poiché f' è continua, per il teorema di permanenza del segno, in tutto un intorno di $x = 0$ è $f'(x) > 0$, quindi la funzione è strettamente crescente, e perciò invertibile, in tale intorno.

$$f(0)=2; g(2)=0;\ \ g'(2)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}.$$

4.87. $$f'(x)=\frac{3}{(1+3x)\log 2}-2e^{-2x};\ \ f'(0)=\frac{3}{\log 2}-2\neq 0.$$

Per il teorema di permanenza del segno, $f'(x)$ ha segno costante in un intorno di $x=0$, quindi la funzione è strettamente monotona, e perciò invertibile, in tale intorno.

$$f(0)=1; g(1)=0;\ \ g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{3}{\log 2}-2}.$$

4.88. *a.* f è definita per $x>0$ e $\log x>0$, quindi per $x>1$. In $(1,+\infty)$ f è la somma di due funzioni strettamente crescenti, quindi è strettamente crescente, quindi è invertibile.

In alternativa, si può provare che f è globalmente invertibile calcolando

$$f'(x)=2+\frac{1}{x\log x}$$

e osservando che per $x>1$ è sempre positiva, quindi f è strettamente monotona.

b. $f(e)=2e$, quindi $g(2e)=e$. $f'(e)=2+\frac{1}{e}$, quindi

$$g'(2e)=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{2+\frac{1}{e}}=\frac{e}{2e+1}.$$

4.89.

a. Calcoliamo $$f'(x)=3+e^{-x}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right).$$

Per $x\geq 0$ è $e^{-x}\leq 1$, dunque

$$f'(x)\geq 3-\left|\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right|\geq 3-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=2-\frac{\pi}{2}>0.$$

Dunque per $x\geq 0$ la f è strettamente crescente e perciò invertibile.

b. $f(1)=3+\frac{1}{e}$, quindi $g(3+\frac{1}{e})=1$. Allora

$$g'\left(3+\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3-\frac{1}{e}}=\frac{e}{3e-1}.$$

4.90.

a. $$f(0)=\frac{\pi}{4};\ f'(x)=\frac{2}{1+(2x+1)^2};\ f'(0)=1;\ \ f(x)=\frac{\pi}{4}+x+o(x).$$

b. $$f''(x) = -\frac{8(2x+1)}{\left[1+(2x+1)^2\right]^2};\ f''(0) = -2 < 0,$$

perciò f sta sotto la retta $y = \frac{\pi}{4} + x$, in un intorno di $x = 0$.

4.91.

a. $$f'(t) = e^{-\frac{1}{t+2}} \cdot \frac{1}{(t+2)^2};\ f'(0) = \frac{1}{4\sqrt{e}};\ f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{t}{4\sqrt{e}} + o(t) \text{ per } t \to 0.$$

b. $$f''(t) = e^{-\frac{1}{t+2}}\left\{\frac{1}{(t+2)^4} - \frac{2}{(t+2)^3}\right\};\ f''(0) = -\frac{3}{16\sqrt{e}} < 0,$$

perciò in un intorno dell'origine il grafico di f sta *sotto* la retta $y = \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{t}{4\sqrt{e}}$.

4.92.

a. $$f(0) = 1;\ f'(x) = e^{-x}\left(-\log(1+2x) + \frac{2}{1+2x}\right) + e^x;\ f'(0) = 3;$$

$$f(x) = 1 + 3x + o(x)$$

b. Poiché $f(0) = 1, g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$.

4.93.

a. $$f(0) = 1;\ f'(x) = e^{-2x}\left(-2\cos\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\right);\ f'(0) = -\frac{5}{2};$$

Il valore di $f'(0)$ è stato ottenuto calcolando $\lim_{x\to 0} f'(x)$, in quanto l'espressione di $f'(x)$ che abbiamo calcolato non ha significato per $x = 0$ [1].

$$f(x) = 1 - \frac{5}{2}x + o(x)$$

b. Poiché $f(0) = 1, g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{2}{5}$.

[1] La giustificazione di questo procedimento e altri commenti sull'argomento si trovano nel libro di testo [BPS1], cap. 4, par. 4.5.

4.2. Studio dei punti di non derivabilità

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, § 2.4.

Delle seguenti funzioni si chiede di: determinare l'insieme di definizione; determinare l'insieme in cui è derivabile; calcolare la derivata, ove esiste; studiare gli eventuali punti di non derivabilità (dire, cioè, se si tratta di punti angolosi, di cuspide, di flesso a tangente verticale, di discontinuità...).

Esempi svolti

Esempio 4.4.

$$f(x) = \sqrt[3]{|\log x|} + \left|\log\left(x + \frac{1}{2}\right)\right|$$

La funzione f è definita per $x > 0$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{3x\log^{2/3}x} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}\left(\log\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{3x\log^{2/3}x} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

definita per $x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$. (Una spiegazione dettagliata di questi passaggi si trova nell'Osservazione che segue quest'esempio).

Possiamo ora studiare i punti $x = 1, x = \frac{1}{2}$.

Per $x \to 1^{\pm}$,

$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) \to \frac{2}{3} \quad \text{mentre} \quad \frac{\operatorname{sgn}(x-1)}{3x\log^{2/3}x} \to \pm\infty$$

perciò $f'(x) \to \pm\infty$ e $x = 1$ è punto di cuspide.

Per $x \to \frac{1}{2}^{\pm}$,

$$f'(x) \to -\frac{2}{3\log^{2/3}2} \pm 1,$$

quindi $x = \frac{1}{2}$ è punto angoloso.

Osservazione 4.1. Derivata di un valore assoluto e punti angolosi. Prendiamo spunto da quest'esempio per puntualizzare alcuni fatti che riguardano la derivata della funzione valore assoluto. Come noto, $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$

(dove presenta un punto angoloso), ma lo è in tutti gli altri punti, e la sua derivata vale

$$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Questa formula è utile (sempre e solo quando l'argomento del modulo non si annulla) anche in combinazione col teorema di derivazione delle funzioni composte, per cui:

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = f'(x) \cdot \mathrm{sgn}(f(x)).$$

Ciò significa che se f è derivabile, anche $|f(x)|$ sarà derivabile, almeno nei punti in cui $f(x) \neq 0$; nei punti in cui $f(x) = 0$ ci aspettiamo dei punti angolosi di $|f(x)|$ (che talvolta potrebbero però non esserci, come mostreranno i prossimi esempi). Ad esempio

$$\frac{d}{dx}|\log x| = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{sgn}(\log x) = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{sgn}(x-1), \text{ per ogni } x \neq 1, x > 0.$$

Questa funzione ha effettivamente un punto angoloso in $x = 1$, come si vede calcolando

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{d}{dx}|\log x| = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{1}{x} \cdot \mathrm{sgn}(x-1) = \pm 1.$$

Si ricordino anche le seguenti identità elementari:

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x},$$

che sono utili ad esempio in calcoli come il seguente:

$$\frac{d}{dx}(x|x|) = 1 \cdot |x| + x \cdot \mathrm{sgn}(x) = |x| + |x| = 2|x|, \text{ per ogni } x \neq 0.$$

Infine, in questo contesto conviene ricordare la formula

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x},$$

che discende dalle precedenti osservazioni in base al teorema di derivazione della funzione composta:

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{d}{dx}(|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}.$$

Dalla precedente segue anche

$$\frac{d}{dx}(\log|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(dove f è una funzione derivabile e diversa da zero), formula che viene spesso... dimenticata a favore di varianti fantasiose ma sbagliate.

Esempio 4.5.

$$f(x) = x^{4/3}\log|x| + \left|\log\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\right|$$

Definita per $x \neq 0$. Funzione pari.

Per $x \to 0, f(x) \to \left|\log\frac{3}{4}\right|$, quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$.

Inoltre, $x^{4/3}\log|x|$ è derivabile in $x = 0$, con derivata nulla, in quanto $x^{4/3}\log|x| = o(x)$ per $x \to 0$.

$\log\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) \geq 0$ per $x^2 + \frac{3}{4} \geq 1, x^2 \geq \frac{1}{4}$, quindi $x \geq \frac{1}{2}, x \leq -\frac{1}{2}$

I punti $x = \pm\frac{1}{2}$ (in cui si annulla l'argomento del modulo) sono probabili punti angolosi. Calcoliamo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{1/3}\log|x| + x^{1/3} + \frac{2x}{x^2+3/4} & \text{per } x > \frac{1}{2}, x < -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}x^{1/3}\log|x| + x^{1/3} - \frac{2x}{x^2+3/4} & \text{per } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notiamo che $f'(0) = 0$, come si vede calcolando tale valore come $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. (Ritroviamo così un fatto già stabilito per altra via).

$$f'_{\pm}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{4\log 2}{3\sqrt[3]{2}} + 1 \\ -\frac{4\log 2}{3\sqrt[3]{2}} - 1 \end{cases}$$

Quindi $x = \frac{1}{2}$ è punto angoloso; per simmetria (f è pari) anche $x = -\frac{1}{2}$ è punto angoloso.

Esempio 4.6.

$$f(x) = x(x-1)^{2/3}e^{\sqrt[3]{x}}$$

f è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, e certamente derivabile per $x \neq 0, x \neq 1$.

Ci aspettiamo un punto di cuspide in $x = 1$, per la presenza della funzione $(x-1)^{2/3}$, e un punto di flesso a tangente verticale in $x = 0$, per la presenza della funzione $\sqrt[3]{x}$.

$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{3}+1\right)(x-1)^{2/3} + \frac{2xe^{\sqrt[3]{x}}}{3(x-1)^{1/3}}$$

Si osserva che in $x = 0$ in effetti f è derivabile, con derivata nulla (l'effetto della funzione $\sqrt[3]{x}$ è stato "neutralizzato" dalla presenza del fattore x); dunque f è derivabile $\forall x \neq 1$, e $x = 1$ è punto di cuspide, come si vede calcolando

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f'(x) = \pm\infty.$$

Esercizi

4.94.★ $$f(x) = \left|\left(x^2-3x+2\right)(2^x-4)\right|$$

4.95.★ $$f(x) = \arcsin(2-x)$$

4.96.★ $$f(x) = \log\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$$

4.97.★ $$f(x) = \left|\log\left(2x^2-3x+1\right)\right|$$

4.98.★ $$f(x) = \sqrt[3]{\sin 2x}$$

4.99.★ $$f(x) = \arcsin\left(\sqrt[3]{x+1}\right)$$

4.100.★ $$f(x) = \left|2^{\frac{x-1}{x+2}}-1\right|$$

4.101.★ $$f(x) = \left(\frac{x^2+2x-3}{x+2}\right)^{2/3}$$

4.102.★ $$f(x) = |x-1|^{3/2}e^{\sqrt[3]{x}}$$

4.103.★ $$f(x)=\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^2+(x-1)|x-1|$$

4.104.★ $$f(x)=xe^{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x-1}$$

4.105.★ $$f(x)=\arcsin|x+1|$$

4.106.★ $$f(x)=x\cdot\sqrt[3]{\log^2|x|}$$

4.107.★ $$f(x)=(x-2)^{2/3}|\log(\log x)|$$

4.108.★ $$f(x)=\arcsin\left(e^{-x^2}\right)+\sqrt[3]{x-1}$$

4.109.★ $$f(x)=|x-2|\sqrt[3]{\log(x-1)}$$

4.110.★ $$[\log(x+1)]\cdot e^{|\log x|}$$

4.111.★ $$f(x)=|\log x|\cdot\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}$$

4.112.★ $$f(x)=\sqrt[3]{\log^2 x}\cdot e^{|x-3|}$$

4.113.★ $$f(x)=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4.114.★ $$f(x)=\frac{|\log(1+x)|}{x^2+1}$$

4.115.★ $$f(x)=\frac{|\log x|}{x+\log(1+x)}$$

Soluzioni § 4.2.

4.94. $f(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$. Studiando il modulo si vede che:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)(2^x-4) & \text{per } x \geq 1 \\ -(x-1)(x-2)(2^x-4) & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (2x-3)(2^x-4) + (x^2-3x+2)2^x\log 2 & \text{per } x > 1 \\ -[(2x-3)(2^x-4) + (x^2-3x+2)2^x\log 2] & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo
$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 2,$$

perciò f non è derivabile in $x = 1$, punto angoloso.

(Notare che in $x = 2$, anche se l'argomento del modulo si annulla, f risulta derivabile; il motivo è che in $x = 2$ l'argomento del modulo ha tangente orizzontale).

4.95. Definita per $-1 \leq 2 - x \leq 1, 1 \leq x \leq 3$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}}$$

f è derivabile per $-1 < 2 - x < 1, 1 < x < 3$; i punti $x = 1, x = 3$, sono punti di arresto per f, a tangente verticale, come si vede calcolando

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 3^-} f'(x).$$

4.96. Definita per $x \neq -2, x \neq -3$.

$$f'(x) = (\log|x+2| - \log|x+3|)' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

definita in tutto l'insieme di definizione di f. $x = -2, x = -3$ sono punti di discontinuità per f.

4.97. Definita per $x < \frac{1}{2}, x > 1$.
Inoltre, $\log(2x^2 - 3x + 1) \geq 0$ per $2x^2 - 3x + 1 \geq 1,\ x(2x-3) \geq 0,\ x \leq 0, x \geq \frac{3}{2}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} & \text{per } x < 0, x > \frac{3}{2} \\ \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{2}, 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nell'insieme di definizione di f, $f'(x)$ non è definita in $x = 0, x = \frac{3}{2}$, che sono punti angolosi.

4.98. Definita in tutto $\mathbb{R}$; derivabile per $\sin 2x \neq 0$, cioè $2x \neq k\pi$, quindi $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = \frac{2\cos 2x}{3(\sin 2x)^{2/3}}.$$

Calcoliamo
$$\lim_{x\to\left(k\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} f'(x) = \begin{cases} \text{se } k \text{ pari} & +\infty \\ \text{se } k \text{ dispari} & -\infty. \end{cases}$$

In ogni caso i punti $x = k\frac{\pi}{2}$ sono di flesso a tangente verticale.

4.99. Definita per $-1 \leq \sqrt[3]{x+1} \leq 1$, cioè $-2 \leq x \leq 0$.
Dall'osservazione di $f(x)$ ci aspettiamo: un punto di flesso a tangente verticale dove si annulla il radicando, cioè in $x = -1$, e punti di arresto a tangente verticale dove l'argomento di arcsin è uguale a ± 1, cioè nei punti $x = 0, x = -2$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^{2/3}}} \cdot \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}.$$

f è derivabile, nel suo insieme di definizione, per $x \neq -2, x \neq -1, x \neq 0$.
$x = -1$ punto di flesso a tangente verticale, perché $\lim_{x\to -1^{\pm}} f'(x) = +\infty$.
$x = -2$ e $x = 0$ punti a tangente verticale, perché

$$\lim_{x\to -2^{+}} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to 0^{-}} f'(x).$$

4.100. Definita per $x \neq -2$. Discutiamo il modulo per calcolare f' e individuare gli eventuali punti angolosi.

$$2^{\frac{x-1}{x+2}} - 1 \geq 0 \text{ per } \frac{x-1}{x+2} \geq 0, \text{per } x \geq 1, x < -2.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \log 2 \cdot \frac{3}{(x+2)^2} & \text{per } x > 1, x < -2 \\ -2^{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \log 2 \cdot \frac{3}{(x+2)^2} & \text{per } -2 < x < 1 \end{cases}$$

f non è derivabile in:
$x = -2$ (punto di discontinuità);
$x = 1$ (punto angoloso): $f'_{\pm}(1) = \pm\frac{\log 2}{3}$.

4.101. Definita per $x \neq -2$. Ci aspettiamo punti di cuspide dove si annulla il numeratore (per la presenza dell'esponente $2/3$).

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{x^2+2x-3}\right)^{1/3} \cdot \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}.$$

f è derivabile per $x \neq -2, x \neq 1, x \neq -3$. $x = -2$ punto di discontinuità; $x = 1, x = -3$ punti di cuspide.

4.102. f è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, e certamente derivabile per $x \neq 0, x \neq 1$.

$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{|x-1|^{3/2}}{3x^{2/3}} + \frac{3}{2}|x-1|^{1/2}\operatorname{sgn}(x-1)\right)$$

Si osserva che in $x = 1$ in effetti f è derivabile, con derivata nulla; dunque f è derivabile $\forall x \neq 0$, e $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale.

4.103. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. Ci aspettiamo problemi di derivabilità in $x = 0$ (per la radice cubica), $x = 1$ (per il modulo). Calcoliamo[2]:

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{2/3}}\left(e^{\sqrt[3]{x}} - 1\right)e^{\sqrt[3]{x}} + 2|x-1|.$$

Si vede che in realtà in $x = 1$ la derivata esiste e vale 0.
Invece non esiste $f'(0)$. Per $x \to 0^{\pm}$,

$$f'(x) \sim \frac{2e\sqrt[3]{x}}{3x^{2/3}} = \frac{2e}{3x^{1/3}} \to \pm\infty$$

quindi $x = 1$ è punto di cuspide.

4.104. La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$. Ci aspettiamo punti di flesso a tangente verticale in $x = 0, x = 1$ per la presenza delle radici cubiche.

Calcoliamo:
$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{x}{3x^{2/3}}\right) + \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} =$$

$$= e^{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}.$$

In $x = 1$ la funzione non è derivabile, e questo punto è di flesso a tangente verticale, come si vede calcolando

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f'(x) = +\infty.$$

$\forall x \neq 1$, f è derivabile. In particolare, in $x = 0$, la funzione risulta derivabile (contro la previsione iniziale), infatti

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \frac{4}{3}.$$

[2] Si veda l'Osservazione 4.1 per il calcolo della derivata di $(x-1)|x-1|$.

(Il fattore x che moltiplica $e^{\sqrt[3]{x}}$ e si annulla in $x = 0$ ha "migliorato" il comportamento della funzione in questo punto).

4.105. Definita per $-1 \leq |x+1| \leq 1$, cioè $|x+1| \leq 1$, cioè $-2 \leq x \leq 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} \cdot \operatorname{sgn}(x+1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-x(x+2)}} \cdot \operatorname{sgn}(x+1).$$

f è derivabile, nel suo insieme di definizione, per $x \neq -2, x \neq -1, x \neq 0$.
$x = -1$ punto angoloso:

$$f'_+(-1) = 1; f'_-(-1) = -1$$

$x = -2$ e $x = 0$ punti a tangente verticale.

4.106. La funzione è definita per $x \neq 0$, ma esiste $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, dunque $x = 0$ è punto di discontinuità eliminabile. Mi aspetto problemi di derivabilità in $x = 0, x = \pm 1$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \log^{2/3}|x| + \frac{2}{3}\frac{x}{x\log^{1/3}|x|} = \log^{2/3}|x| + \frac{2}{3\log^{1/3}|x|}.$$

Si vede che la funzione non è derivabile in $x = 0, x = \pm 1$.

Per $x \to 0$, $\qquad f'(x) \sim \log^{2/3}|x| \to +\infty$

quindi $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Per $x \to 1^{\pm}$, $\qquad f'(x) \sim \dfrac{2}{3\log^{1/3}x} \to \pm\infty$

quindi $x = 1$ è punto di cuspide. Per simmetria (la funzione è dispari) anche $x = -1$ è punto di cuspide.

4.107. La funzione è definita per $x > 1$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}|\log(\log x)| + \frac{(x-2)^{2/3}}{x\log x}\operatorname{sgn}(\log(\log x)) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}\log(\log x) + \frac{(x-2)^{2/3}}{x\log x} & \text{per } x > e \\ -\frac{2}{3(x-2)^{1/3}}\log(\log x) - \frac{(x-2)^{2/3}}{x\log x} & \text{per } 1 < x < 2, 2 < x < e \end{cases}$$

Notiamo che: $\quad$ per $x \to 2^{\pm}, f'(x) \sim -\dfrac{2\log(\log 2)}{3(x-2)^{1/3}} \to \pm\infty$

perciò in $x = 2$ la funzione non è derivabile e ha un punto di cuspide.

$$\text{Per } x \to e^{\pm}, f'(x) \to \pm\frac{(e-2)^{2/3}}{e}$$

perciò in $x = e$ la funzione non è derivabile e ha un punto angoloso.
Invece f è derivabile per $x > 1, x \neq 2, x \neq e$.

4.108. La funzione f è definita in tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{3(x-1)^{2/3}},$$

definita per $x \neq 1, x \neq 0$.

Per $x \to 0^{\pm}$, $\quad \dfrac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} \sim \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2}} = -\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(x) \to \mp\sqrt{2},$

mentre $\frac{1}{3(x-1)^{2/3}} \to \frac{1}{3}$. Quindi

$$f'(x) \to \frac{1}{3} \mp \sqrt{2} \text{ per } x \to 0^{\pm},$$

e $x = 0$ è un punto angoloso.

Per $x \to 1^{\pm}$, $\quad f'(x) \sim \dfrac{1}{3(x-1)^{2/3}} \to +\infty,$

perciò $x = 1$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente.
La funzione è derivabile per ogni $x \neq 0, 1$.

4.109. f è definita per $x > 1$.

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x-2)\sqrt[3]{\log(x-1)} + \frac{|x-2|}{3(x-1)(\log(x-1))^{2/3}}$$

per $x \neq 2$. Per $x \to 2$,

$$\mathrm{sgn}(x-2)\sqrt[3]{\log(x-1)} \to 0$$

mentre $\quad \dfrac{|x-2|}{3(x-1)(\log(x-1))^{2/3}} \sim \dfrac{|x-2|}{3(x-2)^{2/3}} = \dfrac{1}{3}|x-2|^{1/3} \to 0.$

Perciò esiste anche $f'(0) = 0$, e f è derivabile in tutto il suo insieme di definizione.

4.110. f è definita per $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{e^{|\log x|}}{x+1} + [\log(x+1)] \cdot \frac{e^{|\log x|}}{x}\operatorname{sgn}(\log x) \quad \text{per } x \neq 1.$$

Per $x \to 1^{\pm}$,

$$f'(x) \to \frac{1}{2} \pm \log 2,$$

quindi $x = 1$ è un punto angoloso; f è derivabile per ogni $x > 0, x \neq 1$.

4.111. f è definita per $x > 0$. La funzione è certamente derivabile per $x \neq 1, x \neq 2$. Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sgn}(\log x) \cdot \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} + |\log x| \cdot \frac{2x-3}{3(x-1)^{2/3}(x-2)^{2/3}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} - \log x \cdot \frac{2x-3}{3(x-1)^{2/3}(x-2)^{2/3}} & \text{per } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} + \log x \cdot \frac{2x-3}{3(x-1)^{2/3}(x-2)^{2/3}} & \text{per } x > 1, x \neq 2. \end{cases}$$

Studiamo ora i punti $x = 1, x = 2$.
Per $x \to 1$,

$$\frac{1}{x}\operatorname{sgn}(\log x) \cdot \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \to 0, \text{ mentre}$$

$$|\log x| \cdot \frac{2x-3}{3(x-1)^{2/3}(x-2)^{2/3}} \sim \frac{|x-1|}{3(x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3}|x-1|^{1/3} \to 0,$$

perciò esiste $f'(1) = 0$: $x = 1$ è un punto di derivabilità.
Per $x \to 2$,

$$f'(x) \sim \log 2 \cdot \frac{1}{3(x-2)^{2/3}} \to +\infty,$$

perciò $x = 2$ è un punto di non derivabilità, di *flesso a tangente verticale*.

4.112. f è definita per $x > 0$. La funzione è certamente derivabile per $x \neq 1, x \neq 3$. Calcoliamo:

$$f'(x) = e^{|x-3|}\left\{\operatorname{sgn}(x-3)\sqrt[3]{\log^2 x} + \frac{2}{3x\sqrt[3]{\log x}}\right\}.$$

Studiamo ora i punti $x = 1, x = 3$. Per $x \to 1^{\pm}$,

$$f'(x) \sim \frac{2e^2}{3\sqrt[3]{x-1}} \to \pm\infty,$$

perciò $x = 1$ è un punto di non derivabilità, di *cuspide*.

Per $x \to 3^{\pm}$,

$$f'(x) \sim \text{sgn}(x-3)\sqrt[3]{\log^2 3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{\log 3}} \to \pm\sqrt[3]{\log^2 3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{\log 3}}$$

perciò $x = 3$ è un punto di non derivabilità, *angoloso*.

4.113. La funzione è definita per $x \in [-1, 1]$.

$$f'(x) = \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2},$$

definita per $x \neq \pm 1$.

Per $x \to \pm 1^{\mp}, f'(x) \to \pm\infty$, perciò i punti $x = \pm 1$, di non derivabilità, sono punti d'arresto a tangente verticale.

4.114. La funzione è definita per $x > -1$.

Poiché $\log(1+x) > 0$ per $x > 0, \text{sgn}(\log(1+x)) = \text{sgn}(x)$, e

$$f'(x) = \frac{\frac{1+x^2}{1+x}\text{sgn}(x) - 2x|\log(1+x)|}{(1+x^2)^2},$$

definita per $x \neq 0$.

Per $x \to 0^{\pm}, f'(x) \to \pm 1$, perciò il punto $x = 0$, di non derivabilità, è angoloso.

4.115. La funzione è definita per $x > 0$.

Poiché $\log x > 0$ per $x > -1, \text{sgn}(\log x) = \text{sgn}(x-1)$, e

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\text{sgn}(x-1)(x + \log(1+x)) - |\log x|\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)}{(x + \log(1+x))^2},$$

definita per $x \neq 1$.

Per $x \to 1^{\pm}, f'(x) \to \pm\frac{1}{1+\log 2}$, perciò il punto $x = 1$, di non derivabilità, è angoloso.

4.3. Studio del grafico di una funzione

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, § 6.

In questo paragrafo affrontiamo lo *studio e la determinazione del grafico di una funzione* utilizzando, oltre agli strumenti visti nei capitoli 2 e 3, anche quelli del calcolo differenziale (derivata prima e, quando è utile, derivata seconda).

Non vorremmo che lo studente applicasse uno schema rigido di lavoro: in uno studio di funzione ci sono poche cose che vanno fatte sempre -o quasi- (insieme di definizione e limiti alla frontiera dell'insieme di definizione; eventuali asintoti; calcolo e studio del segno della derivata prima -se possibile-, per determinare i punti di massimo e minimo, il crescere e decrescere); e diverse altre che possono essere utili in certi casi (stime asintotiche in punti particolari, o all'infinito; osservazione di eventuali simmetrie o periodicità; calcolo della derivata seconda, se ha una forma abbastanza semplice da saperne studiare il segno, ecc.). Ciò che suggerisce cosa è utile fare di volta in volta è inanzitutto l'*osservazione della forma esplicita della funzione* da studiare, come illustreremo con gli esempi; in secondo luogo, i risultati che mano a mano si ottengono nello studio suggeriscono quali aspetti vanno approfonditi, o quali al contrario è superfluo approfondire.

Spesso una medesima informazione (ad esempio, la presenza di un punto di flesso) viene ottenuta indipendentemente per vie diverse (ad esempio, attraverso una stima asintotica *e anche* attraverso lo studio delle derivate); quando ciò accade, queste informazioni, che dal punto di vista strettamente logico sono ridondanti, costituiscono delle forme preziose di *controllo incrociato* sulla correttezza dei risultati ottenuti. Occorre essere attenti a cogliere ogni eventuale incoerenza che emerge da questi controlli incrociati, come segno della presenza di qualche errore, che va cercato e corretto.

Esempi svolti

Esempio 4.7. Studiare la seguente funzione, e tracciarne il grafico:

$$f(x) = e^x \left(\frac{5x-3}{x^2+2x-3} \right),$$

Riscriviamo f come

$$f(x) = e^x \frac{(5x-3)}{(x-1)(x+3)},$$

da cui vediamo che è definita per $x \neq 1, -3$.

Cosa ci aspettiamo. Dovremo anzitutto studiare i limiti della funzione in questi due punti (in cui ci aspettiamo asintoti verticali) e all'infinito.

Per $x \to 1^{\pm}$, $$f(x) \sim e\frac{2}{(x-1)4} = \frac{e}{2(x-1)} \to \pm\infty,$$

perciò $x = 1$ è asintoto verticale.

Per $x \to -3^{\pm}$, $$f(x) \sim \frac{9e^{-3}}{2(x+3)} \to \pm\infty,$$

perciò $x = -3$ è asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim \frac{5}{x}e^{x} \to \begin{cases} +\infty & \text{(con crescita sopralin., senza asintoto obliquo)} \\ 0^{-} \end{cases}$$

$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

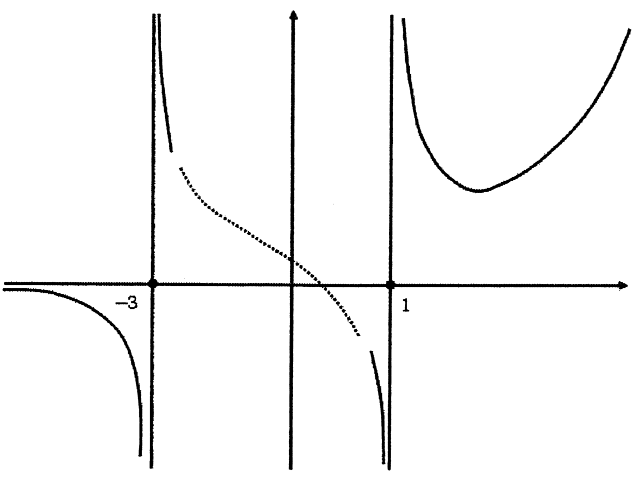
Si noti come lo studio asintotico all'infinito ci abbia permesso:

1) di escludere la presenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (non ostante il limite infinito), a causa della crescita sopralineare. Questo permetterà tra l'altro di decidere la concavità della funzione a $+\infty$ senza bisogno di calcolare la derivata seconda;

2) di sapere che per $x \to -\infty$ il grafico si avvicina all'asintoto *da sotto*.

Osserviamo che $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

Le informazioni raccolte fin qui ci consentono di tracciare un primo grafico parziale:



Ci aspettiamo quindi un punto di minimo nell'intervallo $(1, +\infty)$; notiamo che nell'intervallo $(-3, 1)$ potrebbero esserci un punto di minimo e uno di massimo, oppure la funzione essere sempre decrescente.

Calcoliamo perciò la derivata prima:

$$f'(x) = e^x \left(\frac{5x-3}{x^2+2x-3} + \left(\frac{5x-3}{x^2+2x-3} \right)' \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{5x-3}{x^2+2x-3} + \frac{5(x^2+2x-3)-(2x+2)(5x-3)}{(x^2+2x-3)^2} \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{(5x-3)(x^2+2x-3)+5x^2+10x-15-(10x^2+4x-6)}{(x^2+2x-3)^2} \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{5x^3+7x^2-21x+9+5x^2+10x-15-10x^2-4x+6}{(x^2+2x-3)^2} \right) =$$

$$= e^x \cdot \frac{x(5x^2+2x-15)}{(x^2+2x-3)^2}.$$

Si noti che è necessario portare il calcolo della derivata prima (un po' laborioso ma algebricamente elementare) fino a questa forma finale, *ridotta a denominatore comune, semplificata e fattorizzata*, se vogliamo essere in grado di *studiare il segno* della derivata prima (che è il motivo per cui l'abbiamo calcolata!).

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{se} \quad x\left(5x^2+2x-15\right) \geq 0 \text{ ossia se:}$$

$$\frac{-1-\sqrt{76}}{5} \leq x \leq 0; x \geq \frac{-1+\sqrt{76}}{5}$$

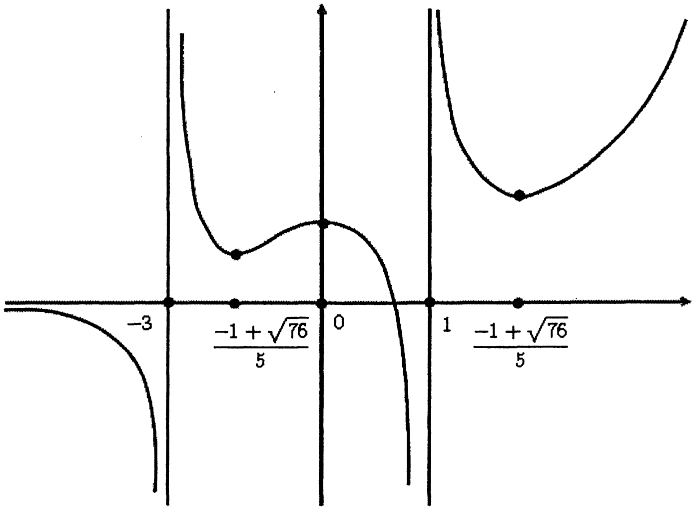
Quindi:

$x = \frac{-1-\sqrt{76}}{5}$ ($\simeq -1.9$) punto di minimo relativo;

$x = 0$ punto di massimo relativo; $f(0) = 1$.

$x = \frac{-1+\sqrt{76}}{5}$ ($\simeq 1.54$) punto di minimo relativo.

La forma analitica della derivata prima *sconsiglia* di calcolare la derivata seconda. (Se lo facessimo, la disequazione $f''(x) \geq 0$ porterebbe a studiare una disequazione algebrica di grado alto, che non sapremmo risolvere: dunque è inutile imbarcarsi nel calcolo). D'altro canto le informazioni in nostro possesso consentono già di tracciare un grafico abbastanza preciso anche con riferimento alla concavità. Notiamo che la funzione deve avere un punto di flesso nell'intervallo $(-3, 1)$.



Osservazione 4.2. Disegnare il grafico della funzione un po' alla volta. Si noti l'importanza di costruire il grafico della funzione un po' alla volta, mano a mano che si raccolgono le informazioni (eventualmente rifacendolo se a un certo punto ci si accorge che il grafico vero è diverso da come si pensava), per capire che cosa ci possiamo aspettare dal seguito dello studio, quali aspetti è utile approfondire, per accorgersi immediatamente di eventuali incoerenze, e per evitare di fare studi inutili. In questi primi esempi svolti riporteremo sempre un "grafico provvisorio", costruito in base alle prime informazioni raccolte, per mostrare come questo possa orientare lo studio successivo e quindi per insegnare allo studente un metodo di lavoro. Nelle soluzioni e negli svolgimenti degli esercizi assegnati riporteremo invece solo il grafico finale, per esigenze di brevità. Lo studente però è invitato a procedere sempre in questo modo.

Esempio 4.8. Studiare la seguente funzione, e tracciarne il grafico:

$$f(x) = x^{1/3}\left(x^2 + 2x - 3\right)^{2/3}.$$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$. Riscriviamola nella forma:

$$f(x) = x^{1/3}(x-1)^{2/3}(x+3)^{2/3}.$$

Cosa ci aspettiamo. Dovremo studiare f anzitutto all'infinito. Ci aspettiamo poi un punto di flesso a tangente verticale in $x = 0$, per la presenza di $x^{1/3}$, e due punti di cuspide in $x = 1, x = -3$, per la presenza dell'esponente $2/3$. Dovremo quindi studiare (con stime asintotiche e/o derivata prima) i 3 punti $x = 0, x = 1, x = -3$.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x^{5/3} \to \pm\infty$ con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

$$f(x) = 0 \text{ in } x = 0, x = 1, x = -3.$$

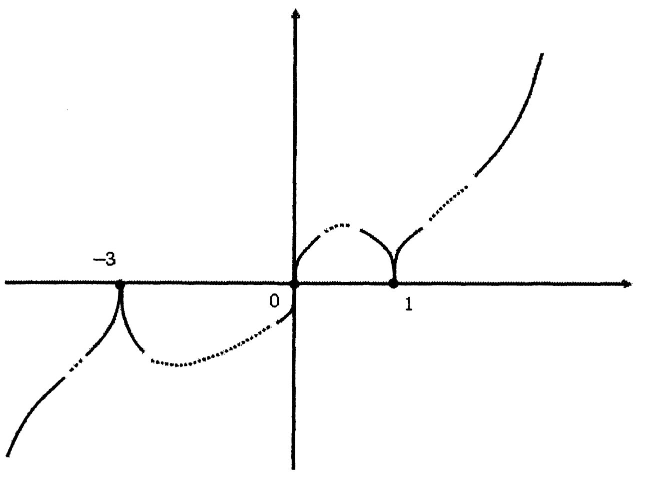
Inoltre:

per $x \to 0,\ f(x) \sim \sqrt[3]{9}\, x^{1/3}$ $, x = 0$ punto di flesso a tangente verticale (ascendente);

per $x \to 1, f(x) \sim \sqrt[3]{16}(x-1)^{2/3}$, $x = 1$ punto di cuspide, (rivolto verso il basso);

per $x \to -3, f(x) \sim -\sqrt[3]{48}(x+3)^{2/3}$, $x = -3$ punto di cuspide, (rivolto verso l'alto).

Le informazioni raccolte fin qui ci consentono di tracciare un primo grafico parziale:



Ci aspettiamo (almeno) un punto di minimo nell'intervallo $(-3, 0)$ e un punto di massimo in $(0, 1)$. Inoltre, i punti $x = 0, 1, -3$ saranno punti di non derivabilità.

Calcoliamo:

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}\left(x^2+2x-3\right)^{2/3} + x^{1/3}\cdot\frac{2(2x+2)}{3(x^2+2x-3)^{1/3}} =$$

$$= \frac{(x^2+2x-3)+2x(2x+2)}{3x^{2/3}(x^2+2x-3)^{1/3}} = \frac{5x^2+6x-3}{3x^{2/3}(x^2+2x-3)^{1/3}}.$$

f' è definita per $x \neq 0, 1, -3$. Per studiare il segno di f' osserviamo che:

$$5x^2+6x-3 \geq 0 \quad \text{per } x \geq \frac{-3+\sqrt{24}}{5}; x \leq \frac{-3-\sqrt{24}}{5};$$

$$\left(x^2+2x-3\right)^{1/3} \geq 0 \text{ per } x \geq 1, x \leq -3.$$

Quindi $f'(x) \geq 0$ per:

$$x < -3; \frac{-3-\sqrt{24}}{5} \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{24}}{5} \text{ (ma } x \neq 0\text{); } x > 1.$$

Perciò

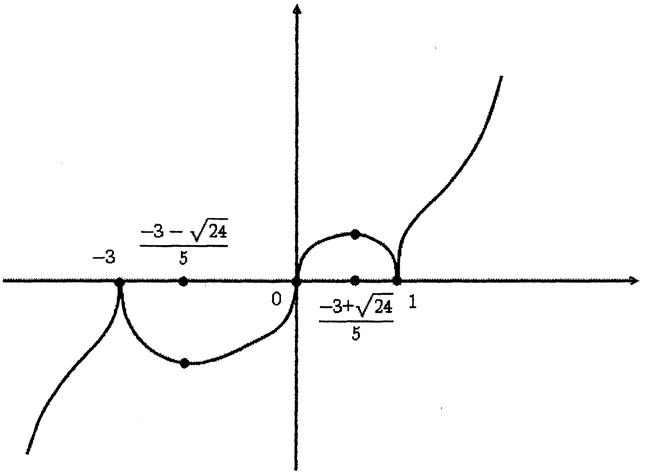
$$x = \frac{-3-\sqrt{24}}{5} \text{ punto di minimo relativo;}$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{24}}{5} \text{ punto di massimo relativo.}$$

Inoltre $x = -3$ punto di massimo relativo (in cui f non è derivabile), e $x = 1$ punto di minimo relativo (in cui f non è derivabile).

Ricordiamo anche che $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale, ascendente (f non è derivabile in $x = 0$).

Anche in questo esempio, è sconsigliabile calcolare $f''(x)$. Per quanto riguarda i cambi di concavità possiamo dire che, poiché la funzione all'infinito ha crescita sopralineare, deve avere due flessi a tangente obliqua, in un punto $x_1 < -3$ e un punto $x_2 > 1$. Grafico:



Esempio 4.9. Studiare la seguente funzione, e tracciarne il grafico:

$$f(x) = \log\left[\left(2 - x^2\right)(1 + x)\right].$$

La funzione f è definita per

$$\left(2 - x^2\right)(1 + x) > 0,$$

ossia $x < -\sqrt{2}; -1 < x < \sqrt{2}$.

Notiamo che non è lecito riscriverla (usando le proprietà dei logaritmi) come

$$f(x) = \log\left(2 - x^2\right) + \log(1 + x)$$

in quanto questa seconda scrittura ha senso solo se *ciascuno* dei fattori $(2 - x^2), (1 + x)$ è positivo, mentre la funzione di partenza è definita ogni volta che il prodotto dei due fattori è positivo (il che accade anche se sono entrambi negativi).

E' lecito invece riscrivere

$$f(x) = \log\left|2 - x^2\right| + \log|1 + x|, \qquad (*)$$

ricordando però che devono valere le condizioni $x < -\sqrt{2}; -1 < x < \sqrt{2}$.

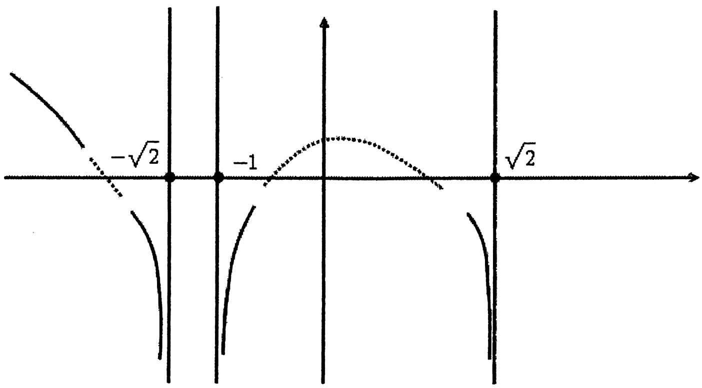
Cosa ci aspettiamo: asintoti verticali nei 3 punti in cui si annulla l'argomento del logaritmo. Dovremo anche studiare f a $-\infty$, non a $+\infty$ perché la funzione è definita solo per $x < \sqrt{2}$.

Per $x \to \left(-\sqrt{2}\right)^{-}, x \to \left(\sqrt{2}\right)^{-}, x \to (-1)^{+}, f(x) \to -\infty$.

$x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = -1$ asintoti verticali.

Per $x \to -\infty, f(x) \sim \log(-x^3) = 3\log|x| \to +\infty$, con crescita sottolineare, quindi senza asintoto obliquo.

Le informazioni raccolte fin qui ci consentono di tracciare un primo grafico parziale:



Ci aspettiamo (almeno) un punto di massimo nell'intervallo $\left(-1, \sqrt{2}\right)$. Per calcolare f' è più comodo partire dall'espressione (*); si ha:

$$f'(x) = -\frac{2x}{2-x^2} + \frac{1}{1+x} = \frac{-3x^2 - 2x + 2}{(2-x^2)(1+x)} \geq 0 \text{ per}$$

$$3x^2 + 2x - 2 \leq 0$$

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{7}}{3},$$

il che, tenendo conto dell'insieme di definizione di f, significa:

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } x < \ -\sqrt{2} \ \ ; -1 < x \leq \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$

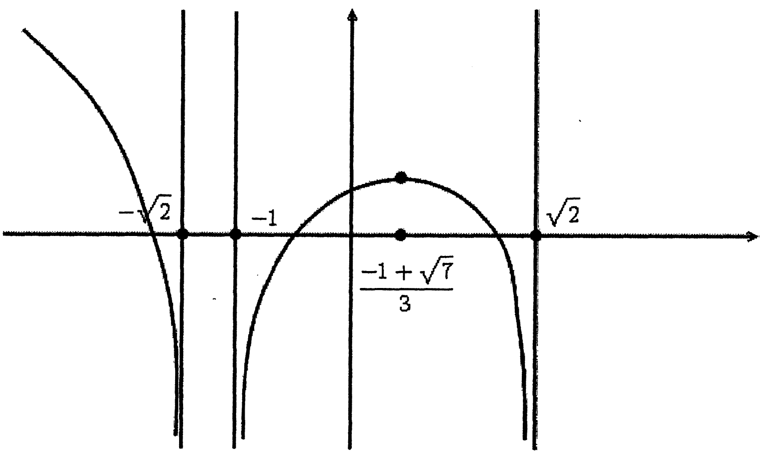
e $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ punto di massimo relativo.

La funzione taglia l'asse delle x in *tre punti*: una volta nell'intervallo $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ (perché f è strettamente decrescente in questo intervallo e va da $+\infty$ a $-\infty$) e due volte in $\left(-1, \sqrt{2}\right)$ perche $f(0) = \log 2 > 0$ mentre agli estremi $f(x) \to -\infty$.

La derivata prima è abbastanza semplice da suggerire il calcolo di f''. Procediamo così:

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{2-x^2} + \frac{1}{1+x}\right)' = -2\left(\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2}\right) - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Non conviene sviluppare i calcoli, ma semplicemente notare che l'espressione scritta è somma di due quantità negative per ogni x, perciò $f''(x) < 0$ sempre, e *la funzione è sempre concava verso il basso*. Grafico:



Esempio 4.10. Studiare la seguente funzione, e tracciarne il grafico.

$$f(x) = e^x \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}$$

Definita per $x \neq 1$. $f(-1) = 0$.

Cosa ci aspettiamo: un asintoto verticale dove si annulla il denominatore, e un punto di flesso a tangente verticale dove si annulla il numeratore sotto radice quinta. Dovremo quindi studiare i due punti $x = \pm 1$, oltre che il comportamento all'infinito.

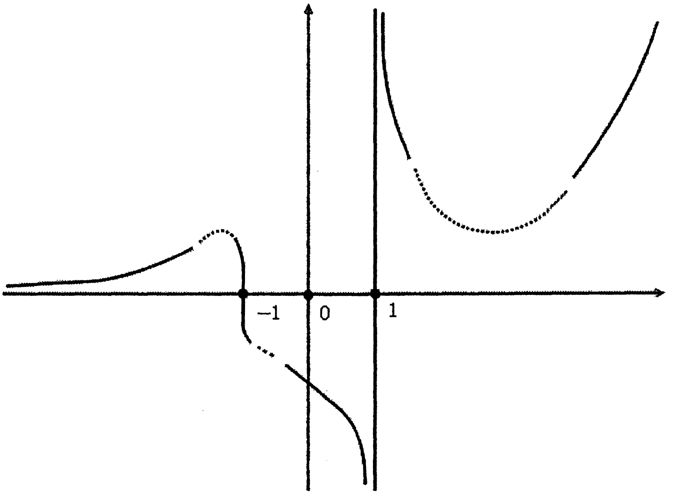
Per $x \longrightarrow 1^{\pm}, f(x) \sim \frac{e\sqrt[5]{2}}{(x-1)^{1/5}} \longrightarrow \pm\infty$. $x = 1$ asintoto verticale.

Per

$$x \longrightarrow \pm\infty, f(x) \sim e^x \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare (senza as. obliquo)} \\ 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizzontale per } x \longrightarrow -\infty. \end{cases}$$

Per $x \longrightarrow -1, f(x) \sim -\frac{1}{e\sqrt[5]{2}}(x+1)^{1/5}$: $x = -1$ punto di flesso a tangente verticale, discendente.

Le informazioni raccolte fin qui ci consentono di tracciare un primo grafico parziale:



Ci aspettiamo almeno un punto di massimo nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e un punto di minimo nell'intervallo $(1, +\infty)$. Calcoliamo ora:

$$f'(x) = e^x \left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{4/5} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{5(x+1)^{4/5}(x-1)^{2-1/5}(x+1)^{1/5} + (x-1)^{4/5}(-2)}{5(x+1)^{4/5}(x-1)^2} \right) =$$

$$= e^x \left(\frac{5(x+1)(x-1)^{9/5} - 2(x-1)^{4/5}}{5(x+1)^{4/5}(x-1)^2} \right) = e^x \left(\frac{5(x+1)(x-1) - 2}{5(x+1)^{4/5}(x-1)^{6/5}} \right) =$$

$$= e^x \frac{(5x^2 - 7)}{5(x+1)^{4/5}(x-1)^{6/5}}$$

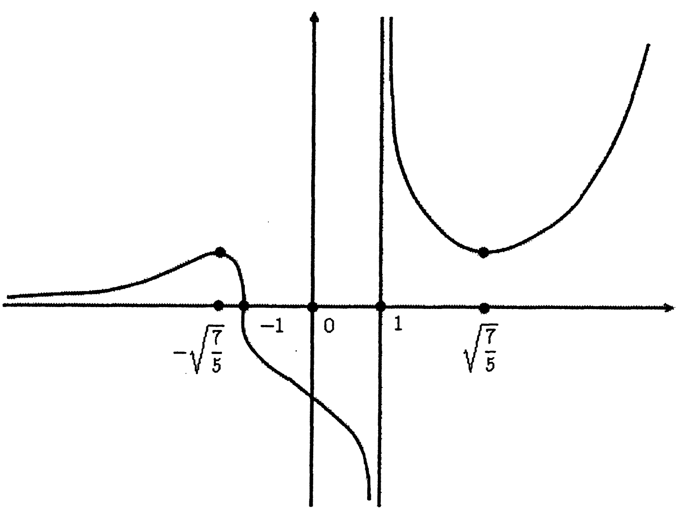
definita per $x \neq \pm 1$. Anche qui, si noti che è necessario procedere attraverso i calcoli algebrici un po' laboriosi fino ad arrivare a questa forma ridotta a fattor comune, semplificata e fattorizzata, se vogliamo che il calcolo della derivata prima sia utile allo studio del grafico di f.

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad 5x^2 - 7 \geq 0, \text{cioè per} \quad x \geq \sqrt{\frac{7}{5}}; x \leq -\sqrt{\frac{7}{5}}.$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{5}} \text{ punto di minimo rel.;}$$

$$x = -\sqrt{\frac{7}{5}} \text{ punto di massimo rel.}$$

L'espressione di f' sconsiglia di calcolare f''. La funzione deve avere un punto di flesso in $\left(-\infty, -\sqrt{7/5}\right)$ e uno in $(-1, 1)$, oltre che il flesso a tangente verticale in $x = -1$. Grafico:



Esempio 4.11. Studiare la seguente funzione, e tracciarne il grafico

$$f(x) = e^{2x}\left(\left|x^2 - x\right| - 2\right)$$

Definita in tutto $\mathbb{R}$.

Cosa ci aspettiamo: la presenza del modulo suggerisce l'esistenza di punti angolosi dove si annulla l'argomento del modulo, cioè $x = 0, x = 1$. Oltre a questi punti, dovremo studiare il comportamento all'infinito.

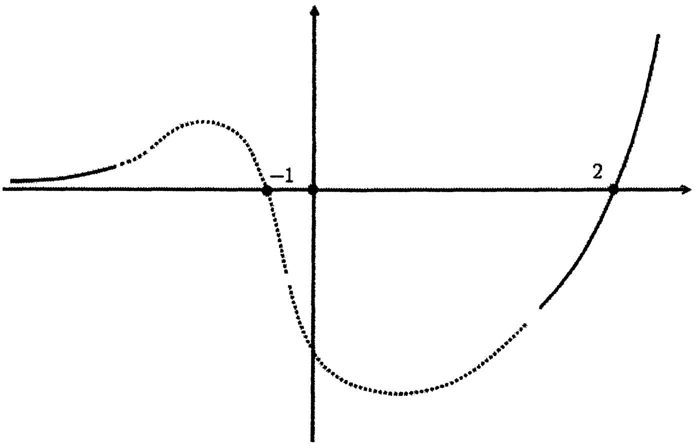
Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim e^{2x}x^2 \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ & \end{cases}$

$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. In vista del calcolo di f', è utile discutere il modulo, riscrivendo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}(x^2 - x - 2) = e^{2x}(x+1)(x-2) & \text{per } x \leq 0, x \geq 1 \\ e^{2x}(-x^2 + x - 2) & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$f(x) = 0$ per $x = -1, x = 2$. Inoltre, $f(x) \geq 0$ per $x \leq -1, x \geq 2$.

Le informazioni raccolte fin qui ci consentono di tracciare un primo grafico parziale:



Ci aspettiamo almeno un punto di massimo nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e un punto di minimo nell'intervallo $(-1, 2)$, oltre a punti angolosi in $x = 0, x = 1$.

Possiamo ora calcolare f' utilizzando le due diverse espressioni di f:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x}(2x^2 - 5) & \text{per } x < 0, x > 1 \\ e^{2x}(-2x^2 - 3) & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si noti che abbiamo escluso esplicitamente, nell'espressione di f', i punti $x = 0, x = 1$, dove ci aspettiamo che f non sia derivabile. Per verificarlo, calcoliamo:

$$f'_{\pm}(0) = \begin{cases} -3 \\ -5 \end{cases} \quad f'_{\pm}(1) = \begin{cases} -3e^2 \\ -5e^2 \end{cases}$$

quindi $x = 0, x = 1$ sono punti di non derivabilità, angolosi.

Per $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ sempre, f decrescente.

Per $x < 0, x > 1, f'(x) \geq 0$ per $2x^2 - 5 \geq 0, x \leq -\sqrt{\frac{5}{2}}, x \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ punto di massimo relativo; $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ punto di minimo relativo. Calcoliamo ora:

$$f''(x) = \begin{cases} e^{2x}(4x^2 + 4x - 10) & \text{per } x < 0, x > 1 \\ e^{2x}(-4x^2 - 4x - 6) & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

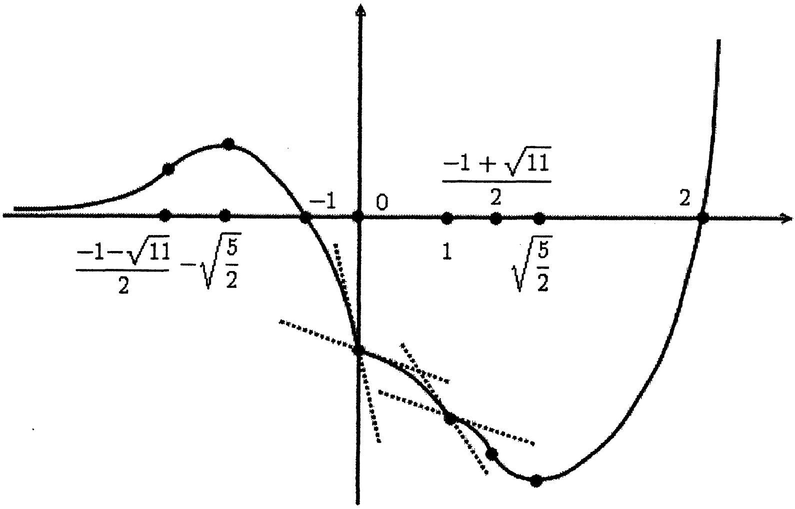
Per $0 < x < 1$, $f''(x) < 0$ sempre, f concava verso il basso.

Per $x < 0$ o $x > 1$, $f''(x) \geq 0$ per

$$2x^2 + 2x - 5 \geq 0, x \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2}, x \geq \frac{-1+\sqrt{11}}{2}.$$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$ punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico (non in scala):



Esercizi

Studi di funzione guidati, senza derivata seconda. *In questi primi esercizi è indicata nel testo una traccia precisa dei punti richiesti. Non è richiesto il calcolo della derivata seconda.*

4.116.★ Sia
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Fare una stima asintotica di f nei punti in cui questo è suggerito dalla forma della funzione.

c. Calcolare $f'(x)$. (Scrivere l'espressione trovata per f' e semplificarla in modo da saperne studiare il segno). Determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, ecc.).

4.117.★ Sia
$$f(x) = \frac{5 + x^{2/3}}{2 + x^{1/3}}.$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare eventuali punti in cui f è continua ma non derivabile, precisando che tipo di punto è (angoloso, di cuspide, ecc.).

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.118.★ Sia
$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{1 - 2\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3}.$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare eventuali punti in cui f è continua ma non derivabile, precisando che tipo di punto è (angoloso, di cuspide, ecc.).

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.)

4.119.★ Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right) - \tan^2 x$$

a. Determinare il periodo di f e restringerne lo studio ad un intervallo di periodicità simmetrico rispetto all'origine. In questo intervallo:

b. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, evenutali asintoti.

c. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico nell'intervallo di periodicità considerato (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.120.★ Sia $$f(x) = x\left(2\log x - \log^3 x\right).$$

a. Determinare insieme di definizione di f, stima asintotica e limiti alla frontiera, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare la pendenza della retta tangente in eventuali punti di arresto.

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.)

4.121.★ Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^{1/(x^3-1)}$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare la pendenza della retta tangente in eventuali punti di arresto.

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.122.★ Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 e^{1/(x^2-1)}$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f e studiare la natura di tutti i punti stazionari.

c. Determinare la pendenza della retta tangente in eventuali punti di arresto.

d. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.123.★ Sia
$$f(x) = e^{-2x}\left(\frac{x+2}{x-3}\right).$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

Studi di funzione guidati, con derivata seconda. *In questi esercizi è indicata nel testo una traccia precisa dei punti richiesti. E' richiesto anche lo studio della derivata seconda.*

4.124.★ Sia
$$f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1.$$

a. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, stima asintotica all'infinito, comportamento all'infinito di f (cioè dire se ha asintoto orizzontale, obliquo, crescita sopra o sottolineare...), evenutali asintoti.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare la pendenza della retta tangente in eventuali punti di arresto.

d. Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di flesso di f.

e. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.125.★ Sia
$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x} - \log\left(\frac{1}{1+\cos x}\right).$$

a. Determinare il periodo di f e restringerne lo studio ad un intervallo di periodicità simmetrico rispetto all'origine. In questo intervallo:

b. Determinare insieme di definizione di f, limiti alla frontiera, evenutali asintoti.

c. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

d. Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di flesso di f.

e. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

4.126.★ Sia
$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{\pi}{4}.$$

a. Stabilire l'insieme di definizione di f; calcolare i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione; determinare tutti gli eventuali asintoti e i punti di discontinuità.

b. Calcolare $f'(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di massimo e minimo relativo di f.

c. Determinare la pendenza limite della retta tangente nei punti di discontinuità.

d. Calcolare $f''(x)$, studiarne il segno, determinare i punti di flesso di f.

e. Completare brevemente lo studio di f (se occorrono altre informazioni) e tracciarne il grafico (evidenziando tutti gli eventuali asintoti, punti a tangente verticale, il verso della concavità, ecc.).

Studi di funzione senza derivata seconda. *Nei prossimi esercizi si chiede di studiare la funzione e tracciarne il grafico. Non è fornita una traccia su come procedere (si cerchi di seguire il metodo illustrato negli esempi svolti e negli esercizi precedenti). L'unica indicazione è che* non è richiesto *lo studio della derivata seconda: lo studente è invitato a dedurre in altro modo le informazioni su concavità e flessi.*

4.127. $\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)e^{-x}$

4.128. $e^x\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

4.129. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+4}{x+1}}$

4.130. $xe^{\frac{x-2}{x+1}}$

4.131. $\dfrac{x^3+1}{x+2}$

4.132. $e^x(x+2)$

4.133. $e^x\left(x^2+2x-3\right)$

4.134.★ $e^{-x}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}.$

4.135.★ $\log\left(\dfrac{x^2+2}{|x+3|}\right)$

4.136.★ $e^{\frac{x^2-3x}{1+2x}}$

4.137.★ $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x+2}$

4.138.★ $e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}$

4.139.★ $x^2e^{\frac{x-3}{x+1}}$

4.140.★ $\log\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\right]$

4.141.★ $e^{-x}\left(\left|x^2-3\right|+2x\right)$

4.142.★ $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}$

4.143.★ $e^{\frac{1}{x}}(x+3)$

4.144.★ $\arctan\left(\dfrac{x^2-2}{x+3}\right)$

4.145.★ $\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$

4.146.★ $\mathrm{Ch}\left(\dfrac{x+3}{x^2-1}\right)$

4.147.★ $x^{2/3}\left(x^2+3x-4\right)^{1/3}$

4.148.★ $e^x \cdot \sqrt[3]{x^3-3x^2}$

4.149.★ $x^{4/5}(10-x)^{1/5}$

4.150.★ $\sqrt[3]{x}\, e^{-x^2+\frac{5}{3}x}$

Studi di funzione con derivata seconda. *Nei prossimi esercizi si chiede di studiare la funzione e tracciarne il grafico. Non è fornita una traccia su come procedere. Si intende che* è richiesto *anche lo studio della derivata seconda.*

4.151.★ $x(\log|x|)^{3/5}$

4.152.★ $\dfrac{|x^2+2x-3|}{x^2}$

4.153.★ $\dfrac{x}{\log^3|x|}$

4.154.★ $\log\left(1+x^2\right)+\arctan\dfrac{1}{x}$

4.155.★ $(x+1)|e^x-1|$

4.156.★ $x\left(x^2-1\right)^{1/3}$

4.157.★ $\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$

4.158.★ $x^2-8x+4\log|x-1|$

4.159.★ $e^{-x}|x(x+1)|$

4.160.★ $xe^{1/(x-1)}$

4.161.★ $(3x+2)e^{1/x}$.

4.162.★ $x^2-3x+2+\log x$.

4.163.★ $x+2\arctan\dfrac{1}{x}+\pi$.

4.164.★ $x^2\sqrt[3]{x+1}$.

4.165.★ $x^2(2-x)^{2/3}$.

4.166.★ $e^{-x^2}\left(x^3+\dfrac{3}{2}x\right)$.

4.167.★ $xe^{-|x^3-1|}$

4.168.★ $e^{3x}\left(x^2-|x+1|\right)$

4.169.★ $e^{-x}\left|e^x-x^2\right|$.

4.170.★ $e^{x+2}\left(3x^2-1\right)$

4.171.★ $\left|x^3-3x^2+x\right|$

Funzioni dipendenti da un parametro

4.172.★ Si consideri la funzione

$$f(t) = \left(e^{\lambda t} - 1\right)e^{-2\lambda t}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro fissato.

a. Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(t)$ per $t \geq 0$.

b. Linearizzare $f(t)$ per $t \to 0$.

c. Completare uno studio sommario della funzione e tracciarne un grafico qualitativo per $t \geq 0$.

4.173.★ Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{1 + t^p}{(1+t)^p}$$

dove $p > 1$ è un parametro fissato.

a. Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluto di $f(t)$ per $t \geq 0$.

b. Linearizzare $f(t)$ per $t \to 0$.

c. Completare uno studio sommario della funzione e tracciarne un grafico qualitativo per $t \geq 0$.

4.174.★ Si consideri la funzione

$$f(t) = \lambda^2 t e^{1/\lambda t}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro fissato.

a. Cercare (eventuali) massimi e minimi di $f(t)$ per $t \geq 0$.

b. Studiare il comportamento della funzione per per $t \to +\infty$.

c. Completare uno studio sommario della funzione e tracciarne un grafico qualitativo per $t > 0$.

4.175.★ Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{2ae^t + e^{-t}}{e^t + ae^{-t}}$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato.

a. Calcolare in dipendenza da a i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione.

b. Studiare, in dipendenza da a, il crescere e decrescere di $f(t)$.

c. Tracciare un grafico qualitativo della funzione, in dipendenza da a.

Soluzioni § 4.3.

4.116. $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

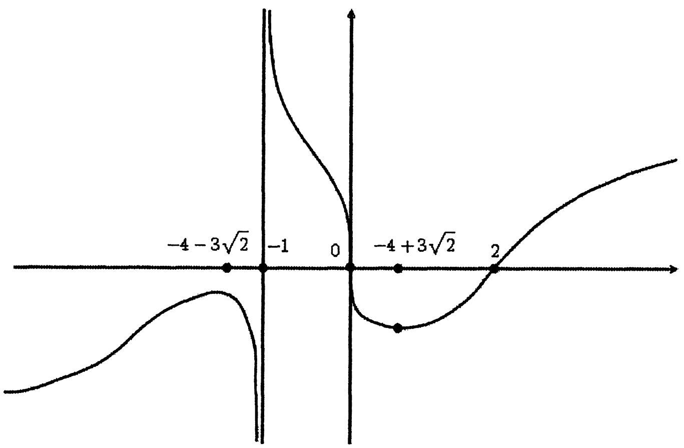
a. Definita per $x\neq -1$. Per $x\to -1^{\pm}, f(x)\sim \frac{3}{x+1}\to\pm\infty$.
$x=-1$ asintoto verticale.

Per $x\to\pm\infty, f(x)\sim\sqrt[3]{x}\to\pm\infty$ con crescita sottolineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

b. $f(0)=0$, per $x\to 0$ $f(x)\sim -2\sqrt[3]{x}$, quindi $x=0$ è punto di flesso a tangente verticale, discendente.

c.
$$f'(x)=\frac{x^2+8x-2}{3x^{2/3}(x+1)^2}\geq 0$$

per $x\geq -4+3\sqrt{2}, x\leq -4-3\sqrt{2}$. Quindi:
punto di max. rel.: $x=-4-3\sqrt{2}$
punto di min. rel.: $x=-4+3\sqrt{2}$
d. Grafico:



4.117. $f(x)=\frac{5+x^{2/3}}{2+x^{1/3}}$

a. Definita per $x\neq -8$.
Per $x\to -^{\pm}8, f(x)\sim\frac{9}{2+x^{1/3}}\to\pm\infty$,
perciò $x=-8$ è asintoto verticale.

Per $x\to\pm\infty, f(x)\sim\sqrt[3]{x}\to\pm\infty$, con crescita sottolineare. (In particolare, senza asintoto obliquo).

b.
$$f'(x)=\frac{x^{2/3}+4x^{1/3}-5}{3x^{2/3}(2+x^{1/3})^2}.$$

(Per studiare il segno del numeratore si pone $t = x^{1/3}$ e si studia il segno di $t^2 + 4t - 5$).

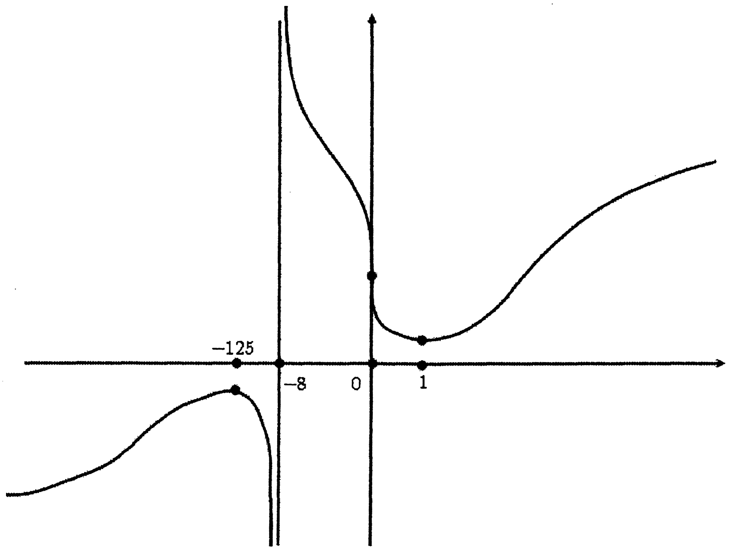
$f'(x) \geq 0$ per $x \leq -125, x \geq 1; x = -125$ punto di max. rel.; $x = 1$ punto di min. rel.

c. In $x = 0$ f è continua ma non derivabile,

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = -\infty,$$

perciò f ha un punto di flesso a tangente verticale, discendente.

d. Grafico (non in scala):



4.118. $f(x) = \frac{x^{2/3}}{1-2\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3}$.

a. Definita per $x \neq \frac{1}{8}$. Per $x \to \frac{1}{8}^{\pm}$

$$f(x) \sim \frac{1}{4(1 - 2\sqrt[3]{x})} \to \mp\infty,$$

quindi $x = \frac{1}{8}$ asintoto verticale. Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim -\sqrt[3]{x} \to \mp\infty$ con crescita sottolineare. (In particolare, senza asintoto obliquo).

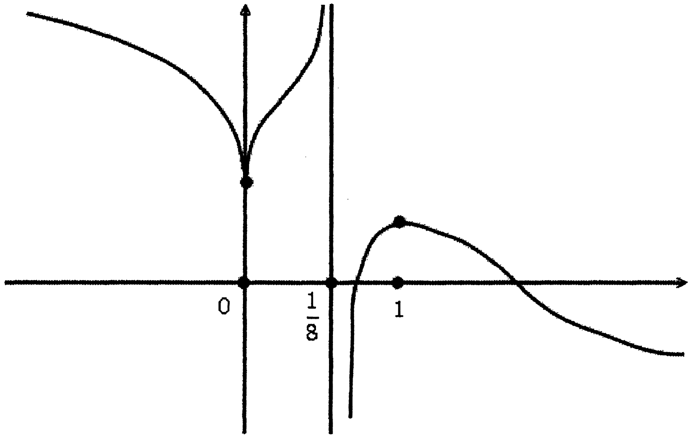
b.
$$f'(x) = \frac{2(1 - \sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}\,(1 - 2\sqrt[3]{x})^2}$$

$f'(x) \geq 0$ per $0 < x < \frac{1}{8}, \frac{1}{8} < x < 1$.

$x = 1$ punto di max. rel.; $x = 0$ punto di min. rel.

c. f non è derivabile in $x = 0$. $\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$, quindi $x = 0$ è un punto di cuspide, verso il basso.

d. Grafico:



4.119. $f(x) = \log\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right) - \tan^2 x$

a. f è π-periodica (perché sia $\cos^2 x$ che $\tan x$ sono π-periodiche). Studiamola perciò in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nell'intervallo considerato:

b. f è definita in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Osserviamo che f è simmetrica pari.

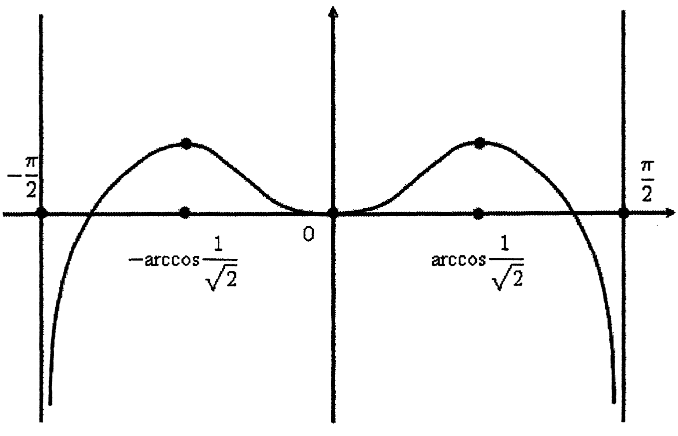
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty; \ x = \pm\frac{\pi}{2} \text{ asintoti verticali.}$$

c.
$$f'(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}\left(2\cos^2 x - 1\right) \geq 0 \ \text{ per:}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < -\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 < x < \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ punti di max. rel.; $x = 0$ punto di min. rel.

d. Grafico:



4.120. $f(x) = x(2\log x - \log^3 x)$.

a. Insieme di definizione di f: $x > 0$.

Per $x \to 0^+$, $\qquad f(x) \sim -x\log^3 x \to 0^+$.

Per $x \to +\infty$, $\qquad f(x) \sim -x\log^3 x \to -\infty$

con crescita sopralineare, in particolare senza asintoto obliquo.

b.
$$f'(x) = 2 + 2\log x - 3\log^2 x - \log^3 x =$$

$$= (1 - \log x)\left(\log^2 x + 4\log x + 2\right) \geq 0 \text{ per:}$$

$$0 < x < e^{-2-\sqrt{2}};\ e^{-2+\sqrt{2}} < x < e.$$

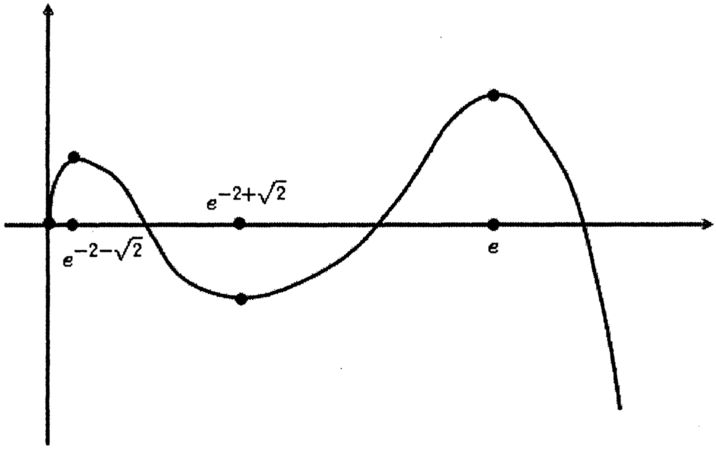
(Per studiare il segno del secondo fattore si pone $t = \log x$ e si studia il segno di $t^2 + 4t + 2$).

punti di max. rel.: $x = e^{-2-\sqrt{2}}, x = e$

punti di min. rel.: $x = e^{-2+\sqrt{2}}$ (ed anche $x = 0$, se prolunghiamo f con continuità ponendo $f(0) = 0$)

c. Per $x \to 0^+, f'(x) \sim -\log^3 x \to +\infty$, quindi in $x = 0$ il grafico arriva con tangente verticale.

d. Grafico:



4.121. $f(x) = x^2 e^{1/(x^3-1)}$

a. Insieme di definizione di f: $x \neq 1$.

Per $x \to 1^{\pm}$, $\quad f(x) \sim e^{1/(x^3-1)} \to \begin{cases} +\infty \text{ (asintoto verticale)} \\ 0^+ \end{cases}$

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x^2 \to +\infty$ con crescita sopralin. (quindi senza asintoto obliquo).

b. $$f'(x) = \frac{xe^{1/(x^3-1)}}{(x^3-1)^2}(2x^6 - 7x^3 + 2) \geq 0 \quad \text{per:}$$

$$\sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{33}}{4}} < x < 0; \quad x \geq \sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{33}}{4}}$$

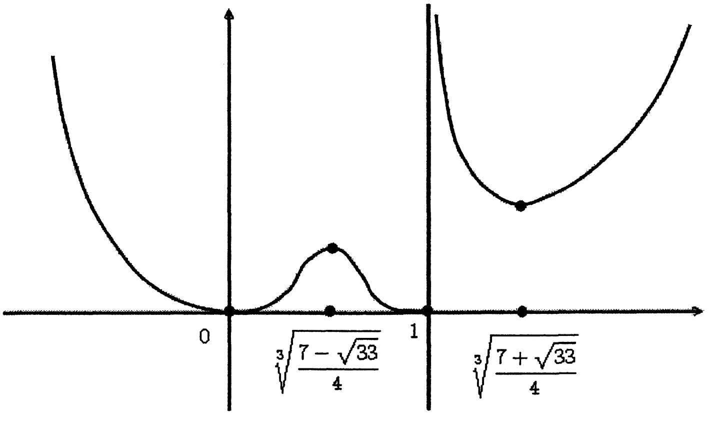
Nota: per studiare il segno di $(2x^6 - 7x^3 + 2)$ si pone $t = x^3$ e si studia il segno di $(2t^2 - 7t + 2)$.

$x = \sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{33}}{4}}$ punto di max. rel.;

$x = \sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{33}}{4}}$; $x = 0$ punti di min. rel.

c. Per $x \to 1^-, f'(x) \sim \frac{-3e^{1/(x^3-1)}}{(x^3-1)^2} \to 0^-$, quindi il grafico arriva in 1, da sinistra, con tangente orizzontale.

d. Grafico:



4.122. $f(x) = x^3 e^{1/(x^2-1)}$

a. Insieme di definizione di f: $x \neq \pm 1$. Funzione dispari, perciò la studiamo per $x \geq 0$ e poi simmetrizziamo.

Per $x \to 1^{\pm}$, $f(x) \sim e^{1/(x^2-1)} \to \begin{cases} +\infty \text{ (asintoto verticale)} \\ 0^+ \end{cases}$

Per $x \to +\infty, f(x) \sim x^3 \to +\infty$ con crescita sopralineare (quindi senza asintoto obliquo)

b.
$$f'(x) = \frac{x^2 e^{1/(x^2-1)}}{(x^2-1)^2}\left(3x^4 - 8x^2 + 3\right) \geq 0$$

(limitandoci a $x \geq 0$) per:

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}; \quad x \geq \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}.$$

Nota: per studiare il segno di $(3x^4 - 8x^2 + 3)$ si pone $t = x^2$ e si studia il segno di $3t^2 - 8t + 3$.

Conclusioni (anche per $x < 0$):

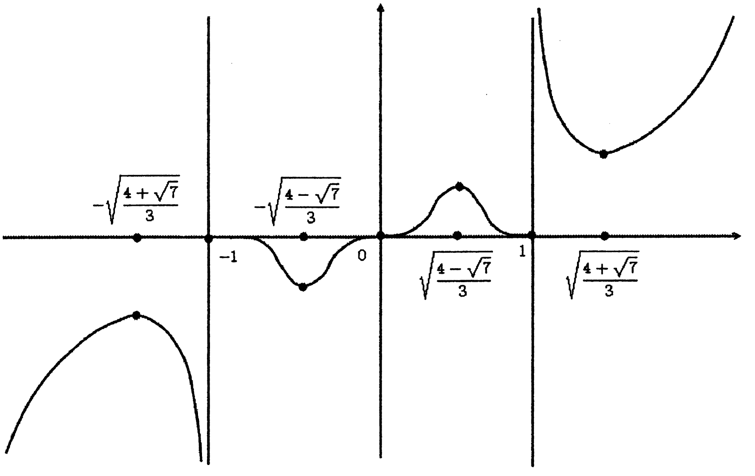
$x = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}; x = -\sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$ punti di max. rel.;

$x = \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}; x = -\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{3}}$ punti di min. rel.

Si osserva che $f'(0) = 0$, $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.

c. Per $x \to 1^-, f'(x) \sim \frac{-2e^{1/(x^2-1)}}{(x^2-1)^2} \to 0^-$, quindi il grafico arriva in 1, da sinistra, con tangente orizzontale.

d. Simmetrizzando dispari otteniamo il grafico:



4.123. $f(x) = e^{-2x}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$.
a. f è definita per $x \neq 3$.

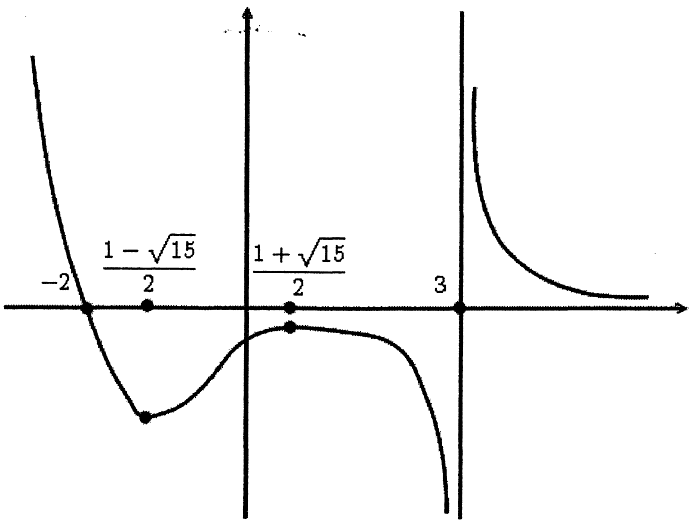
Per $x \to 3^{\pm}$, $$f(x) \sim \frac{5e^{-6}}{x-3} \to \pm\infty,$$

quindi $x = 3$ asintoto verticale. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim e^{-2x} \to \begin{cases} 0^+ & \text{(asintoto orizzontale)} \\ +\infty & \text{(con crescita sopralineare, senza asintoto obliquo)} \end{cases}$$

b. $$f'(x) = e^{-2x}\frac{(-2x^2+2x+7)}{(x-3)^2} \geq 0 \quad \text{per:} \quad \frac{1-\sqrt{15}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{15}}{2}$$

$x = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$ punto di max. rel.; $x = \frac{1-\sqrt{15}}{2}$ punto di min. rel.
c. Grafico:



4.124. $f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$.
a. f è definita per $x > 0, x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1; \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Quindi $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
$x = 0$ punto di arresto.
Per $x \to 1^{\pm}, f(x) \sim \frac{1}{\log^2 x} \to +\infty$.
$x = 1$ asintoto verticale.

b.
$$f'(x) = \frac{2(\log x - 1)}{x \log^3 x} \geq 0 \text{ per:}$$

$$0 < x < 1; \ x \geq e.$$

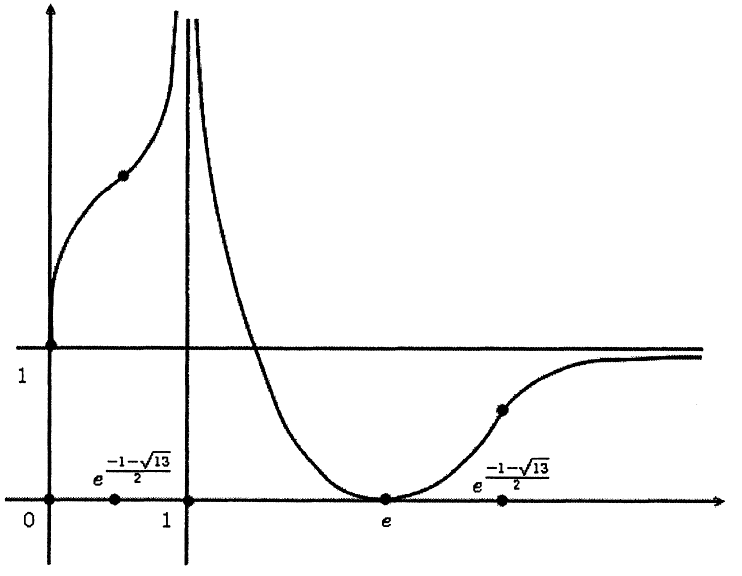
punti di min. rel.: $x = e$; $x = 0$ (se definiamo $f(0) = 1$, prolungando f per continuità).
c. Per $x \to 0^+, f'(x) \sim \frac{2}{x \log^2 x} \to +\infty$, quindi il grafico arriva in $x = 0$ con tangente verticale.

d.
$$f''(x) = -\frac{2(\log^2 x + \log x - 3)}{x^2 \log^4 x} \geq 0 \text{ per:}$$

$$e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \leq x \leq e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \quad (x \neq \pm 1).$$

Punti di flesso: $x = e^{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$.

e. Grafico:



4.125. $f(x) = \frac{1}{1+\cos x} - \log\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$

a. f è 2π-periodica, la studiamo su $[-\pi, \pi]$.

b. In $[-\pi, \pi]$, f è definita per $x \neq \pm\pi$, quindi in $(-\pi, \pi)$.

La funzione è simmetrica pari, posso studiarla solo in $[0, \pi)$ e poi simmetrizzare.

Per $x \to \pi^-, f(x) \sim \frac{1}{1+\cos x} \to +\infty$.

$x = \pi$ asintoto verticale.

c.
$$f'(x) = -\frac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} \geq 0 \quad \text{per:}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$$

(nell'intervallo $[0, \pi)$).

$x = 0$ punto di max. rel.;

$x = \frac{\pi}{2}$; punto di min. rel.

d.
$$f''(x) = -\frac{\{\cos^2 x(1+\cos x) + \sin^2 x(\cos x - 1)\}}{(1+\cos x)^3} =$$

scrivendo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

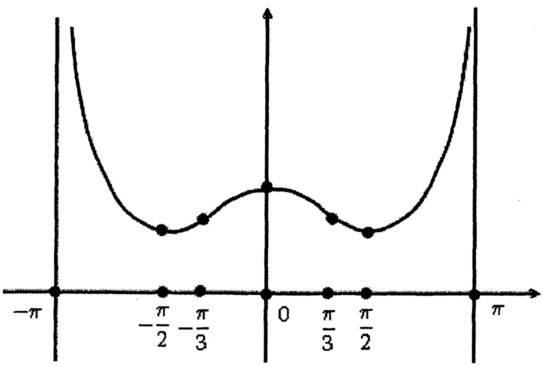
$$= -\frac{\{2\cos^2 x + \cos x - 1\}}{(1+\cos x)^3}$$

scomponendo $2t^2 + t - 1 = (t+1)(2t-1)$

$$= \frac{1 - 2\cos x}{(1+\cos x)^2} \geq 0 \quad \text{per: } \frac{\pi}{3} \leq x < \pi$$

(nell'intervallo $[0, \pi)$). $x = \frac{\pi}{3}$ punto di flesso.

e. Grafico:



4.126. $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{\pi}{4}$

a. f è definita per $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi \\ -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x = 0$ punto di discontinuità a salto.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

b. $$f'(x) = -\frac{1}{2x^2 + 2x + 1} \leq 0 \text{ sempre.}$$

La f non è derivabile in $x = 0$, dove è discontinua.
Non ci sono punti di max. o min. rel.

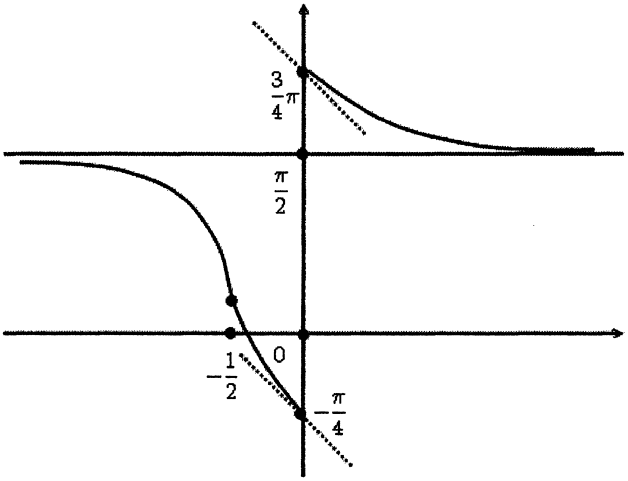
c. Per $x \to 0^{\pm}$, $\quad f'(x) \to -1$,

questa è la pendenza limite della retta tangente da destra e da sinistra in $x = 0$.

d.
$$f''(x) = \frac{2+4x}{(2x^2+2x+1)^2} \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq -\frac{1}{2}.$$

$x = -\frac{1}{2}$ punto di flesso.

e. Grafico:



4.127. $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)e^{-x}$

Definita in tutto $\mathbb{R}$. Per $x \to \pm\infty$,

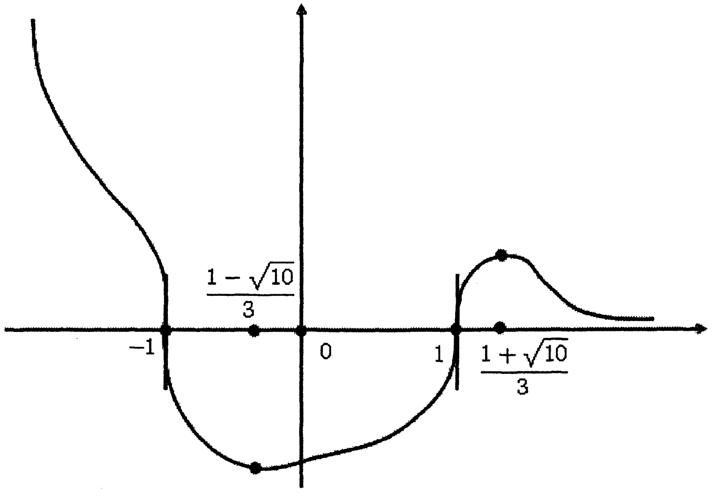
$$f(x) \sim x^{2/3}e^{-x} \to \begin{cases} 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to +\infty. \\ +\infty & \text{con crescita sopralineare} \end{cases}$$

Per $x \to 1, f(x) \sim (x-1)^{1/3}\frac{\sqrt[3]{2}}{e}$. $x = 1$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Per $x \to -1, f(x) \sim -(x+1)^{1/3}\sqrt[3]{2}e$. $x = -1$ punto di flesso a tangente verticale, discendente.

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{3(x^2-1)^{2/3}}\left(-3x^2+2x+3\right)$$

$x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ punto di minimo; $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ punto di massimo; $x = \pm 1$ punti di flesso a tangente verticale.

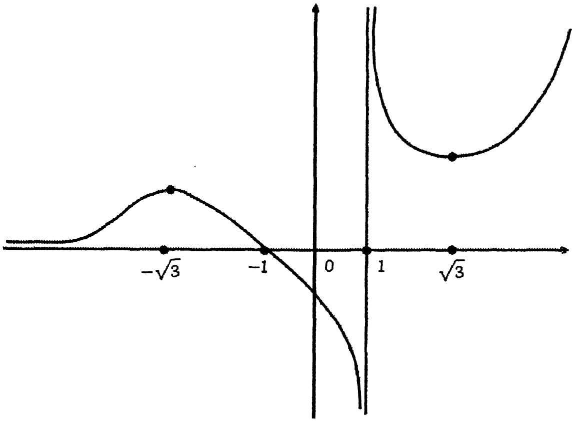


4.128. $f(x) = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
Definita per $x \neq 1$. Per $x \to 1^{\pm}, f(x) \sim \frac{2e}{x-1} \to \pm\infty$. $x = 1$ asintoto verticale.
Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim e^x \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to -\infty. \end{cases}$$

$$f'(x) = e^x \frac{(x^2-3)}{(x-1)^2}.$$

$x = \sqrt{3}$ punto di minimo; $x = -\sqrt{3}$ punto di massimo; $f(-1) = 0$.

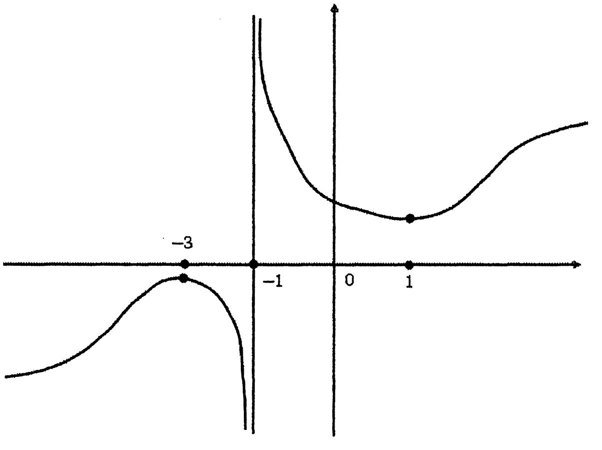


4.129. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+4}{x+1}}$
Definita per $x \neq -1$.
Per $x \to -1^{\pm}$, $f(x) \sim \sqrt[3]{\frac{4}{x+1}} \to \pm\infty$. $x = -1$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^{1/3} \to \pm\infty$ con crescita sottolineare.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{3(x^2 + x + 4)^{2/3}(x + 1)^{4/3}}$$

$x = 1$ punto di minimo; $x = -3$ punto di massimo.



4.130. $f(x) = xe^{\frac{x-2}{x+1}}$
Definita per $x \neq -1$. Per $x \to -1^{\pm}$,

$$f(x) \sim -e^{-\frac{3}{x+1}} \to \begin{cases} 0^- & \text{con tangente orizzontale} \\ -\infty \end{cases}$$

$x = -1$ asintoto verticale per $x \to -1^-$.

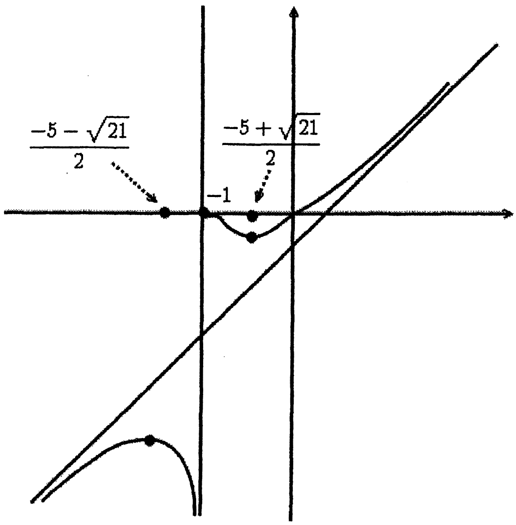
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim ex \to \pm\infty$ con crescita lineare.

$$f(x) - ex = xe\left[e^{\frac{x-2}{x+1}-1} - 1\right] \sim xe\left(\frac{-3}{x+1}\right) \to -3e,$$

quindi $y = ex - 3e$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

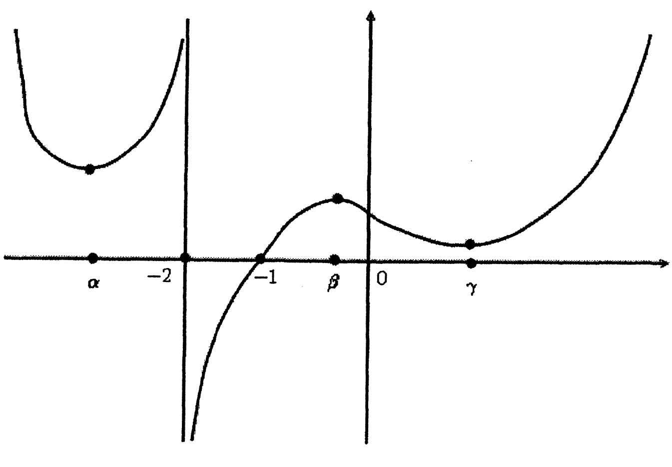
$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x-2}{x+1}}}{(x+1)^2}(x^2 + 5x + 1)$$

$x = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ punto di minimo; $x = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ punto di massimo.



4.131. $f(x) = \frac{x^3+1}{x+2}$
Definita per $x \neq -2$.
Per $x \longrightarrow -2^{\pm}, f(x) \sim -\frac{7}{x+2} \longrightarrow \mp\infty$; $x = -2$ asintoto verticale.
Per $x \longrightarrow \pm\infty$, $f(x) \sim x^2 \longrightarrow +\infty$ con crescita sopralineare.
$f(x) \geq 0$ per $x < 2, x > -1$.

$f'(x) = \frac{2x^3+6x^2-1}{(x+2)^2}$. Lo studio del segno di f' porta a risolverre graficamente la disequazione $2x^3 \geq 1 - 6x^2$. Si vede che f ha un punto di minimo $\alpha < -2$, un punto di massimo $\beta \in (-1, 0)$, un punto di minimo $\gamma \in (0, 1)$.



4.132. $f(x) = e^x(x+2)$
Definita per ogni x. Per $x \to \pm\infty$,

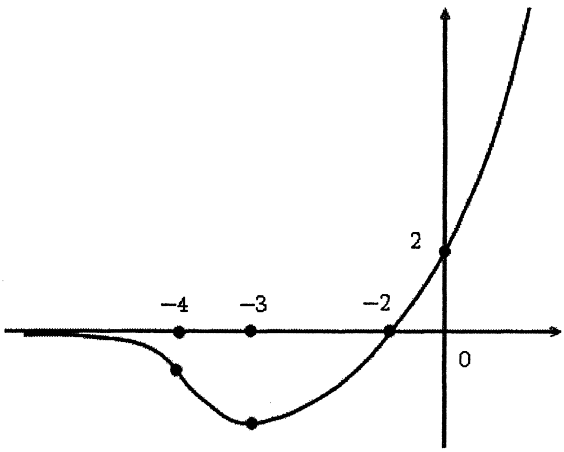
$$f(x) \sim xe^x \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^- & y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to -\infty. \end{cases}$$

$$f'(x) = e^x(x+3);$$

$x = -3$ punto di minimo relativo;

$$f''(x) = e^x(x+4);$$

$x = -4$ punto di flesso.



4.133. $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$
Definita per ogni x. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim x^2e^x \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to -\infty. \end{cases}$$

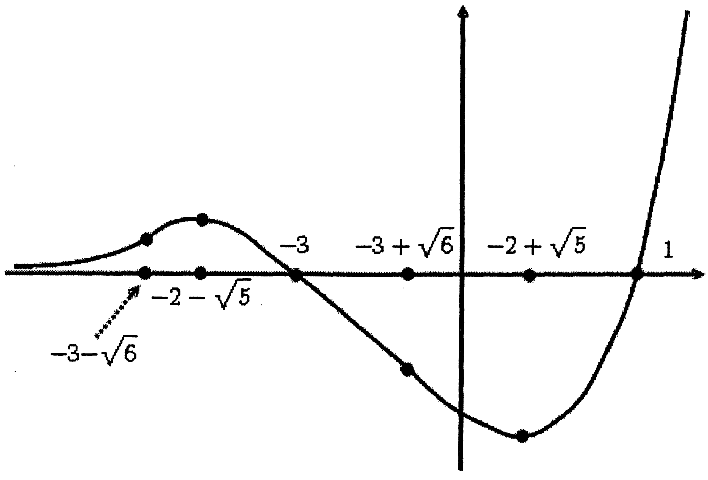
$$f(x) \geq 0 \text{ per } x \leq -3, x \geq 1.$$

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + 4x - 1\right);$$

ha punti di minimo e massimo in $x = -2 \pm \sqrt{5}$, rispettivamente.

$$f''(x) = e^x\left(x^2 + 6x + 3\right);$$

ha punti di flesso in $x = -3 \pm \sqrt{6}$.



4.134. $f(x) = e^{-x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

Insieme di definizione: $x \neq 1$.

Per $x \to 1^{\pm}$, $f(x) \sim \frac{e^{-1}\sqrt[3]{2}}{(x-1)^{1/3}} \to \pm\infty$, $x = 1$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim e^{-x} \to \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$

$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; per $x \to -\infty$ $f(x)$ ha crescita sopralineare (in particolare, non ha asintoto orizzontale).

$$f'(x) = e^{-x}\left(-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{(x-1)^{2/3}}{3(x+1)^{2/3}} \cdot \left(\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \right) \right) =$$

$$= e^{-x}\left(-\frac{(x+1)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}} + \frac{1}{3(x+1)^{2/3}} \cdot \left(\frac{-2}{(x-1)^{4/3}} \right) \right) =$$

$$= -e^{-x}\left(\frac{3(x-1)(x+1)+2}{3(x+1)^{2/3}(x-1)^{4/3}} \right) = e^{-x}\left(\frac{1-3x^2}{3(x+1)^{2/3}(x-1)^{4/3}} \right).$$

$f'(x)$ è definita per $x \neq \pm 1$, e si ha:

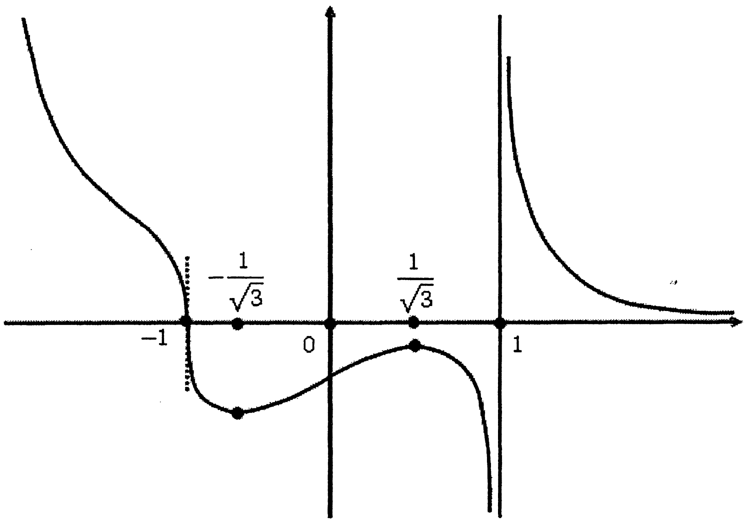
$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 1-3x^2 \geq 0, \ -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ne segue che:

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo relativo; $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di massimo relativo.

Studiamo $x = -1$ (punto di non derivabilità). $f(-1) = 0$; per $x \to -1$, $f(x) \sim -e\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$, perciò f ha un flesso a tangente verticale.

Dalle informazioni precedenti si deduce che f ha almeno un flesso a tangente obliqua nell'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e uno in $(-\infty, -1)$; per $x \to \pm\infty$ è concava verso l'alto.



4.135. $f(x) = \log\left(\frac{x^2+2}{|x+3|}\right)$

Insieme di definizione: $x \neq -3$.

Per $x \to -3, f(x) \to +\infty$; $x = -3$ asintoto verticale.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim \log|x| \to +\infty$, con crescita sottolineare (in particolare, non ha asintoti obliqui ed è concava verso il basso all'infinito).

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{2x(x+3)-(x^2+2)}{(x^2+2)(x+3)} = \frac{x^2+6x-2}{(x^2+2)(x+3)}.$$

$x^2 + 6x - 2 \geq 0$ per $x \leq -3 - \sqrt{11}; x \geq -3 + \sqrt{11}$;

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } -3 - \sqrt{11} \leq x < -3;\ x \geq -3 + \sqrt{11}.$$

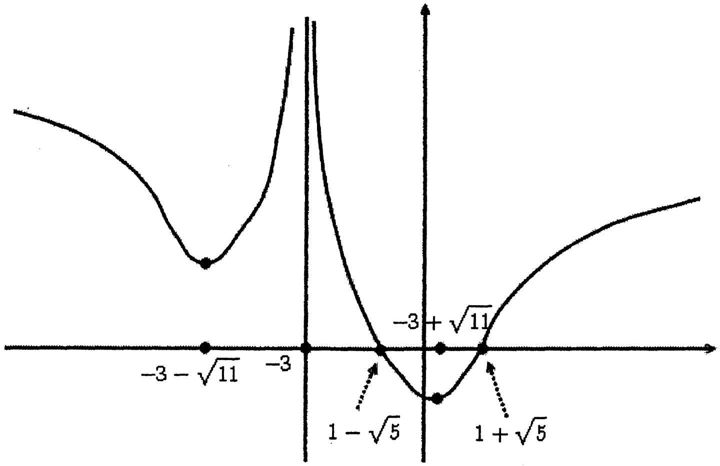
$x = -3 \pm \sqrt{11}$ punti di minimo relativo.

$f\left(-3 + \sqrt{11}\right) < 0$; $f\left(-3 - \sqrt{11}\right) > 0$, da cui si deduce che f ha due intersezioni con l'asse x per $x > -3$; difatti, per $x > -3$,

$$\log\left(\frac{x^2+2}{|x+3|}\right) = 0 \text{ per } x^2 + 2 = x + 3;\quad x^2 - x - 1 = 0;\ x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Dalle informazioni che abbiamo, f deve avere almeno un punto di flesso in

$x_1 < -3 - \sqrt{11}$, e uno in $x_2 > -3 + \sqrt{11}$. All'infinito, come già detto, è concava verso il basso.



4.136. $f(x) = e^{\frac{x^2-3x}{1+2x}}$
Insieme di definizione: $x \neq -\frac{1}{2}$.
Per $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{\pm}$, $\frac{x^2-3x}{1+2x} \to \pm\infty$, $f(x) \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+. \end{cases}$
$x = -\frac{1}{2}$ asintoto verticale per $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{+}$.
Per $x \to \pm\infty$, $\frac{x^2-3x}{1+2x} \sim \frac{x}{2}$, $f(x) \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+. \end{cases}$
$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
Per $x \to +\infty$ $f(x)$ ha crescita superlineare, in particolare non ha asintoto obliquo.

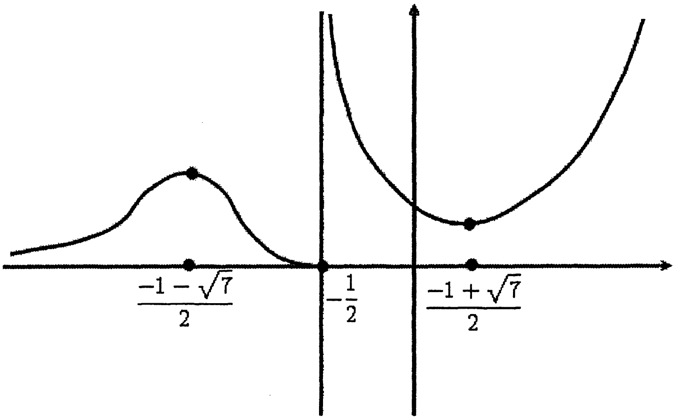
$$f'(x) = e^{\frac{x^2-3x}{1+2x}} \frac{(2x-3)(1+2x) - 2(x^2-3x)}{(1+2x)^2} =$$

$$= e^{\frac{x^2-3x}{1+2x}} \frac{2x^2+2x-3}{(1+2x)^2} \geq 0 \text{ per } 2x^2+2x-3 \geq 0,$$

$x \geq \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$, $x \leq \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$. $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ punto di massimo relativo; $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ punto di minimo relativo.

La funzione è derivabile in tutti i punti in cui è definita; è sempre positiva, e per $x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^{-}$ tende a zero con tangente orizzontale.

Da queste informazioni segue che f deve avere (almeno) due flessi, uno in $x_1 < \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$ e uno in $x_2 \in \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Grafico:

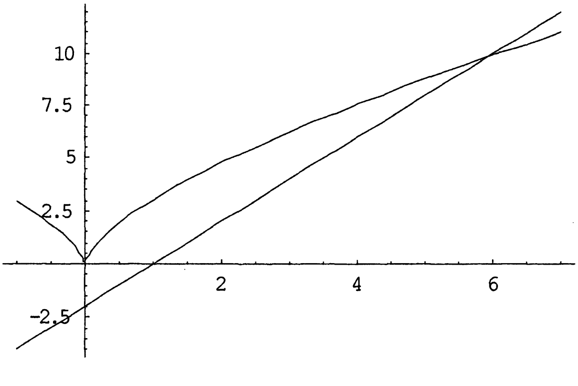


4.137. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x+2}$. Insieme di definizione: $x \neq -2$.
Per $x \to (-2)^{\pm}$, $f(x) \sim \frac{-\sqrt[3]{2}-1}{x+2} \to \mp\infty$. $x = -2$ asintoto verticale.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{2/3}} \to 0^+$. $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
$f(1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3x^{2/3}}(x+2) - \left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - 3x + 3x^{2/3}}{3x^{2/3}(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2x + 3x^{2/3}}{3x^{2/3}(x+2)^2} \text{ per } x \neq 0, -2.$$

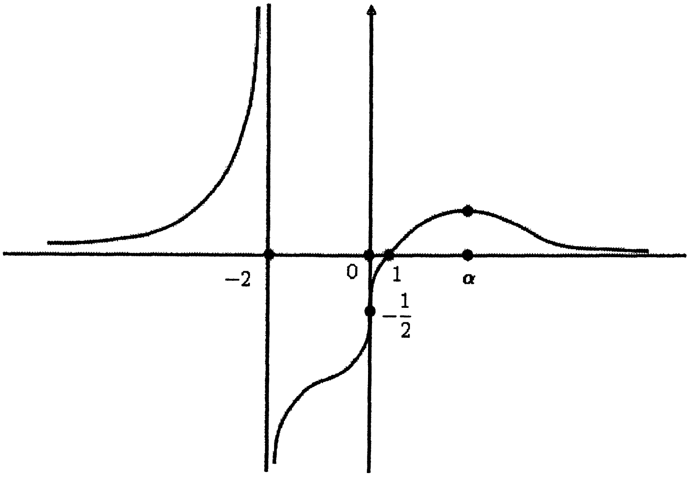
$f'(x) \geq 0$ per $3x^{2/3} \geq 2x - 2$. Confronto grafico:



$f'(x) \geq 0$ per $x \leq \alpha$, con $\alpha \in (5,6)$. $x = \alpha$ punto di massimo relativo.

f non è derivabile in $x = 0$. Per $x \to 0$, $f'(x) \sim \frac{1}{6x^{2/3}} \to +\infty$, quindi f ha un flesso a tangente verticale in $x = 0$.

Da questi elementi segue che f ha (almeno) un flesso in $x_1 > \alpha$ e uno in $x_2 \in (-2, 0)$.



4.138. $f(x) = e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|}$. Insieme di definizione: $x \neq -2$.

Per $x \to -2$, $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \to +\infty$, $e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|} \to 0^+$, perciò $x = -2$ è un punto di discontinuità eliminabile.

Per $x \to \pm\infty$, $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \to 1$, $e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|} \to e^{-1}$, perciò $y = \frac{1}{e}$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.

$$f'(x) = e^{-\left|\frac{x+1}{x+2}\right|} \cdot \left(-\operatorname{sgn}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{(x+2)^2}\right),$$

definita per $x \neq -1$, $x \neq -2$.

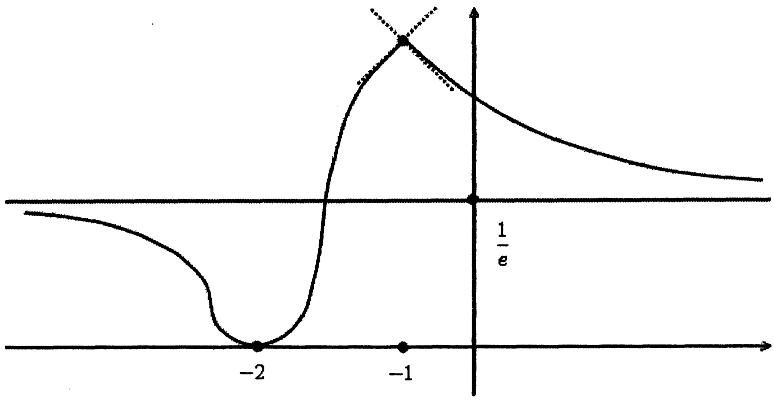
Per $x \to -2$, $f'(x) \to 0$ (confronto di infinitesimi), perciò nel punto di discontinuità eliminabile la funzione arriva con tangente orizzontale.

Per $x \to (-1)^{\pm}$, $f'(x) \sim 1 \cdot (-\operatorname{sgn}(x+1)) \cdot 1 \to \mp 1$.

Perciò $x = -1$ è un punto angoloso, con pendenza delle rette tangenti da destra e sinistra uguale rispettivamente a $-1, 1$.

$f'(x) > 0$ per $-\operatorname{sgn}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) > 0$, cioè per $\frac{x+1}{x+2} < 0$, cioè per $-2 < x < -1$.

Grafico:



Si vede che $x = -2$ è punto di minimo; $x = -1$ è punto di massimo.

4.139. $f(x) = x^2 e^{\frac{x-3}{x+1}}$
Definita per $x \neq -1$.
Per $x \to -1$, $f(x) \sim e^{-4/(x+1)} \to \begin{cases} 0^+ & \text{per } x \to -1^+ \\ +\infty & \text{per } x \to -1^- \end{cases}$

$x = -1$ asintoto verticale da sinistra, punto a tangente orizzontale da destra (la funzione si annulla con velocità esponenziale).

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^2 \to +\infty$ con crescita sopralineare (non c'è asintoto obliquo).

$f(x) = 0$ in $x = 0$, per $x \to 0$ $f(x) \sim x^2/e^3$, quindi $x = 0$ è punto a tangente orizzontale, di minimo relativo.

$$f'(x) = e^{\frac{x-3}{x+1}} \left(2x + x^2 \cdot \frac{x + 1 - (x - 3)}{(x+1)^2} \right) = \frac{2xe^{\frac{x-3}{x+1}}}{(x+1)^2} \left(x^2 + 4x + 1 \right)$$

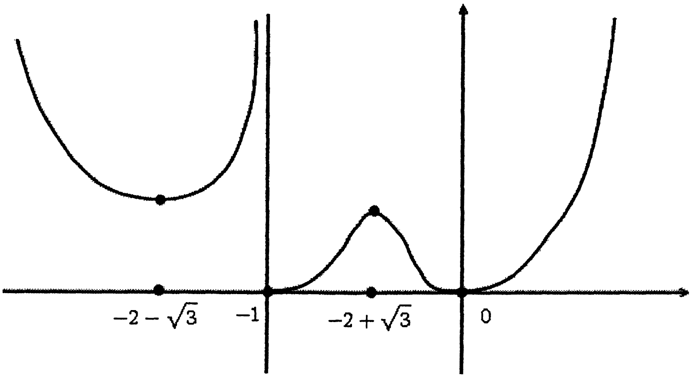
definita per $x \neq -1$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } x\left(x^2 + 4x + 1\right) \geq 0$$

$$-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3};\ x \geq 0.$$

$x = 0$, $x = -2 - \sqrt{3}$ punti di minimo relativo; $x = -2 + \sqrt{3}$ punto di massimo relativo.

Grafico qualitativo (non in scala):



4.140. $f(x) = \log\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\right]$.
Insieme di definizione: $\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)}\right] > 0$, quindi: $1 < x < 2, x > 3$.
Per $x \to 1^+$ e per $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$; per $x \to 3^+, f(x) \to +\infty$.
$x = 1$, $x = 2, x = 3$ asintoti verticali.
Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \log x \to +\infty$ con crescita sottolineare (senza asintoto obliquo).

$$f'(x) = \{\log|x-1| + \log|x-2| - \log|x-3|\}' =$$

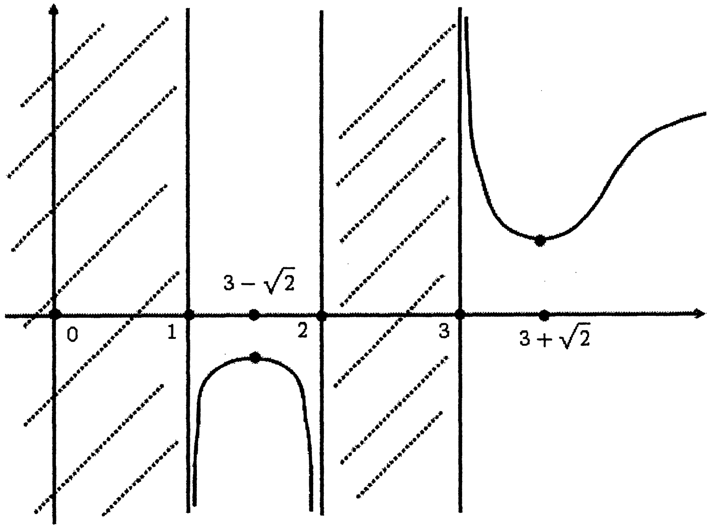
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) - (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \geq 0 \quad \text{per}$$

$$x^2 - 6x + 7 \geq 0, x \leq 3 - \sqrt{2}; x \geq 3 + \sqrt{2}.$$

$x = 3 - \sqrt{2}$ punto di massimo relativo;
$f\left(3 - \sqrt{2}\right) = \log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < 0$.
$x = 3 + \sqrt{2}$ punto di minimo relativo;
$f\left(3 + \sqrt{2}\right) = \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right) > 0$.
Grafico (non in scala):



Si osserva che f deve avere un punto di flesso in $x_0 > 3 + \sqrt{2}$.

4.141. $f(x) = e^{-x}(|x^2 - 3| + 2x)$.
Definita in tutto $\mathbb{R}$. Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim x^2 e^{-x} \to \begin{cases} 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizzontale per } x \to +\infty \\ +\infty & \text{con crescita sopralin. (senza asintoto obliquo)} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 + 2x - 3) & \text{per } x \leq -\sqrt{3}, x \geq \sqrt{3} \\ e^{-x}(-x^2 + 2x + 3) & \text{per } -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

$f(x) = 0$ per $x = -1, x = -3$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(5 - x^2) & \text{per } x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3} \\ e^{-x}(x^2 - 4x - 1) & \text{per } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$x = \pm\sqrt{3}$ sono punti angolosi:

$$f'_{\pm}\left(\sqrt{3}\right) = \begin{cases} 2e^{-\sqrt{3}} > 0 \\ \left(2 - 4\sqrt{3}\right)e^{-\sqrt{3}} < 0 \end{cases}$$

Quindi $x = \sqrt{3}$ è anche punto di minimo relativo;
$m = f\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}}$

$$f'_{\pm}\left(-\sqrt{3}\right) = \begin{cases} \left(2 + 4\sqrt{3}\right)e^{\sqrt{3}} > 0 \\ 2e^{\sqrt{3}} > 0 \end{cases}$$

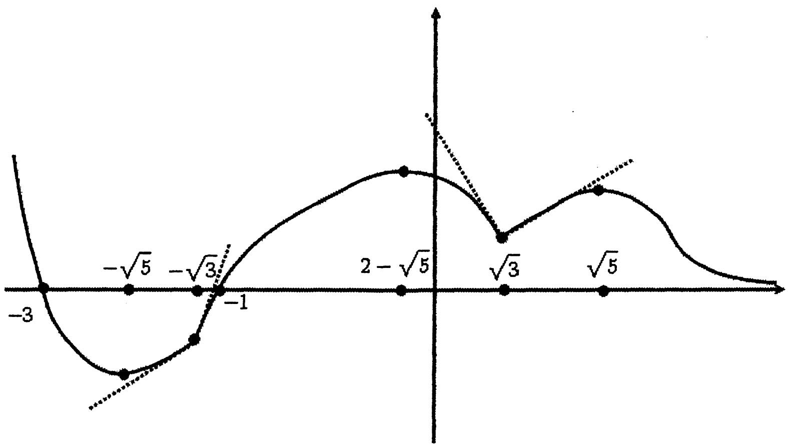
Inoltre: per $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$, $f'(x) \geq 0$ per $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$, ossia per

$$-\sqrt{5} \leq x < -\sqrt{3};\ \sqrt{3} < x \leq \sqrt{5};\ \text{quindi:}$$

$x = -\sqrt{5}$ è punto di minimo relativo; $f\left(-\sqrt{5}\right) = e^{\sqrt{5}}\left(2 - 2\sqrt{5}\right)$
$x = \sqrt{5}$ è punto di massimo relativo; $f\left(\sqrt{5}\right) = e^{-\sqrt{5}}\left(2 + 2\sqrt{5}\right)$.
Per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $f'(x) \geq 0$ per $x \leq 2 - \sqrt{5}, x \geq 2 + \sqrt{5}$, ossia per

$$-\sqrt{3} < x \leq 2 - \sqrt{5};$$

quindi $x = 2 - \sqrt{5}$ è un punto di massimo relativo, $f\left(2 - \sqrt{5}\right) = \left(2\sqrt{5} - 2\right)e^{\sqrt{5}-2}$
Grafico qualitativo (non in scala):

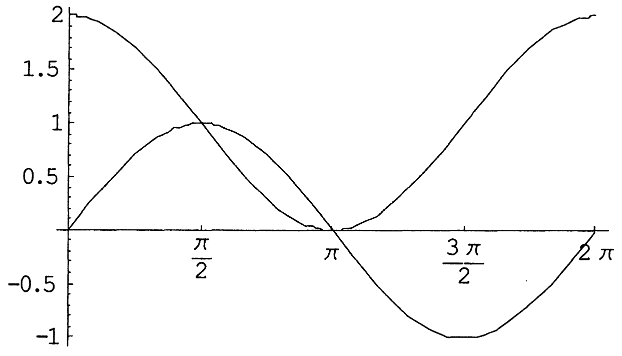


4.142. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$. Funzione 2π-periodica, la studiamo in $[0, 2\pi]$.
Definita per $\cos x \neq -1$, cioè $x \neq \pi$.
Per $x \to \pi^{\pm}, f(x) \sim -\frac{1}{1+\cos x} \to -\infty$. $x = \pi$ asintoto verticale.
$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$; $f(x) = 0$ per $\sin x = -\cos x$, cioè per $x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$.

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \cos x) + \sin x(\sin x + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 - \sin x + \cos x}{(1 + \cos x)^2}.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 1 + \cos x \geq \sin x.$$

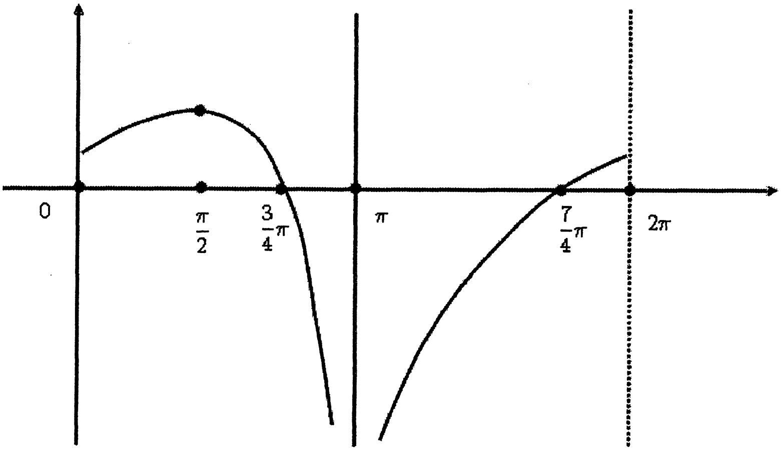
Risolviamo graficamente questa disequazione:



$1 + \cos x \geq \sin x$ per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\pi \leq x \leq 2\pi$.

$x = \frac{\pi}{2}$ punto di massimo relativo. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

La funzione potrebbe non avere alcun flesso. Grafico:



4.143. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+3)$

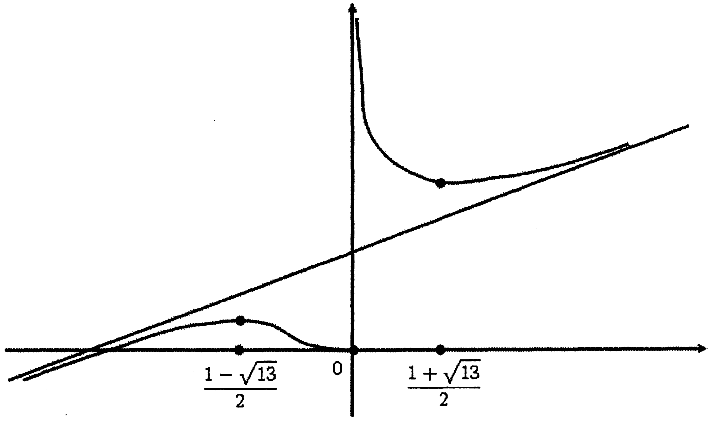
Definita per $x \neq 0$. Per $x \to 0^{\pm}$,

$f(x) \to \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$ con tang. orizz. (infinitesimo di ordine sup. risp. a x).

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x \to \pm\infty$ con crescita lineare; inoltre $f(x) - x \to 4$ perciò $y = x + 4$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(x^2 - x - 3\right).$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ punto di massimo rel., } x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ punto di minimo rel.}$$



f deve avere un punto di flesso in $x_1 \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$.

4.144. $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right)$
Insieme di definizione: $x \neq -3$.
Per $x \to (-3)^{\pm}$, $\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right) \sim \frac{7}{x+3} \to \pm\infty, f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$.
$x = -3$ punto di discontinuità a salto.
Per $x \to \pm\infty$, $\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right) \sim x \to \pm\infty, f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$.
$y = \pm\frac{\pi}{2}$ asintoti orizzontali, rispettivamente per $x \to \pm\infty$.
$f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right)^2} \cdot \frac{2x(x+3)-(x^2-2)}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2+6x+2}{(x+3)^2+(x^2-2)^2}$$

definita per $x \neq -3$ (in cui f è discontinua, quindi non derivabile).

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } x^2+6x+2 \geq 0, x \geq -3+\sqrt{7}, x \leq -3-\sqrt{7}.$$

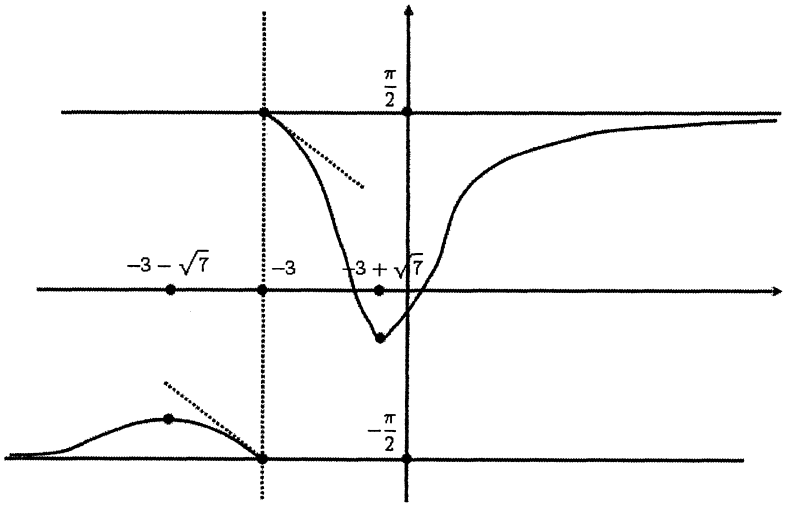
$$x = -3+\sqrt{7} \text{ punto di minimo relativo;}$$

$$x = -3 - \sqrt{7} \text{ punto di massimo relativo.}$$

Per $x \to (-3)^{\pm}, f'(x) \to -\frac{1}{7}$. La funzione arriva nel punto di salto con la stessa pendenza (negativa) da destra e sinistra.

In base a questi elementi, f deve avere punti di flesso in $x_1 \in \left(-\infty, -3-\sqrt{7}\right)$, $x_2 \in \left(-3, -3+\sqrt{7}\right)$, $x_3 \in \left(-3+\sqrt{7}, +\infty\right)$.

Grafico:



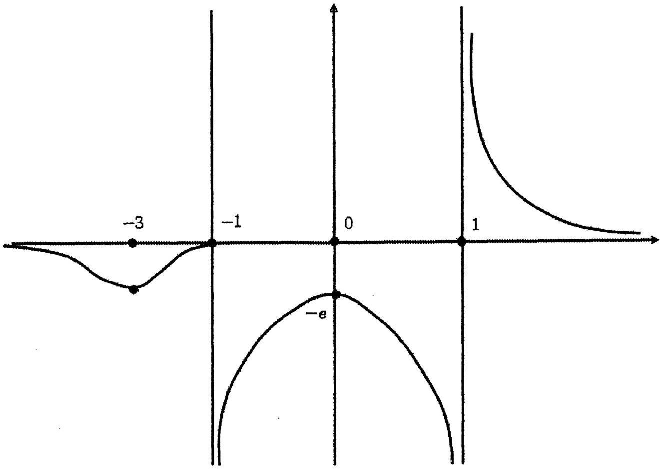
4.145. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$. Insieme di definizione: $x \neq \pm 1$.
Per $x \to 1^{\pm}, f(x) \sim \frac{e^{\frac{1}{2}}}{x-1} \to \pm\infty$; $x = 1$ asintoto verticale.
Per $x \to -1^{\pm}, f(x) \sim -2e^{\frac{1}{x+1}} \to \begin{cases} -\infty \\ 0^- \end{cases}$
$x = -1$ asintoto verticale da destra, punto di arresto da sinistra.
Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim \frac{1}{x} \to 0^{\pm}$; $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
$f(x) \geq 0$ per $x \geq 1$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+1}}\left(-\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2(x-1)^2}\left(-(x-1)-(x+1)^2\right) = \frac{-e^{\frac{1}{x+1}}(x^2+3x)}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

$f'(x) \geq 0$ per $x^2 + 3x \leq 0, -3 \leq x < -1; -1 < x \leq 0$
$x = -3$ punto di minimo relativo; $x = 0$ punto di massimo relativo.
Per $x \to -1^-$, $f'(x) \to 0$ (tangente orizzontale nel punto di arresto).

La funzione deve avere almeno due flessi, uno in $x_1 < -3$ e uno in $-3 < x_2 < -1$. Grafico (non in scala):



4.146. $f(x) = \text{Ch}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)$
Insieme di definizione: $x \neq \pm 1$.
Per $x \to \pm 1$, $\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right) \to \infty$, $f(x) \to +\infty$.
$x = \pm 1$ asintoti verticali.
Per $x \to \pm\infty$, $\frac{x+3}{x^2-1} \to 0$, $f(x) \to 1^+$.
$y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$.
$f(x) \geq 1$ per ogni x; $f(x) = 1$ per $x = -3$ (punto di minimo assoluto).

$$f'(x) = \text{Sh}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right) \cdot \frac{(x^2-1) - 2x(x+3)}{(x^2-1)^2} =$$

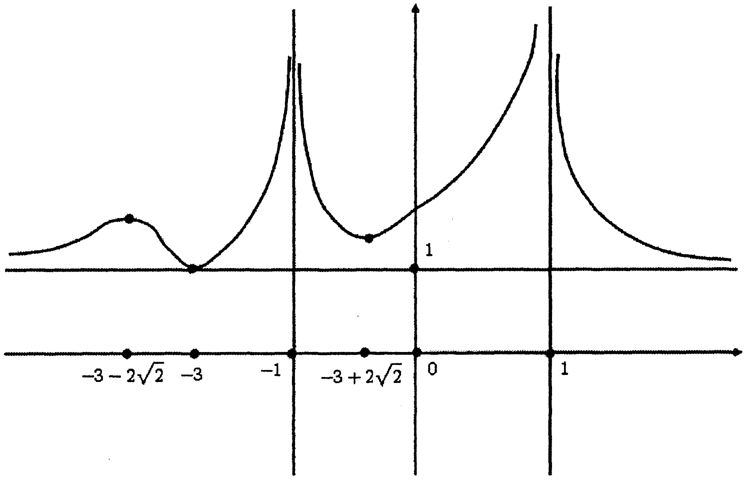
$$= -\text{Sh}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right) \cdot \frac{(x^2+6x+1)}{(x^2-1)^2}.$$

$$\text{Sh}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right) \geq 0 \text{ per } \left(\frac{x+3}{x^2-1}\right) \geq 0, -3 \leq x \leq -1, x \geq 1;$$

$$x^2 + 6x + 1 \geq 0 \text{ per } x \leq -3 - 2\sqrt{2},\ x \geq -3 + 2\sqrt{2};$$

Quindi, $f'(x) \geq 0$ (e f è crescente) per:
$x \leq -3 - 2\sqrt{2}$; $-3 \leq x < -1$; $-3 + 2\sqrt{2} \leq x < 1$.
$x = -3 - 2\sqrt{2}$ punto di massimo relativo;
$x = -3$ punto di minimo relativo;
$x = -3 + 2\sqrt{2}$ punto di minimo relativo.
La funzione deve avere almeno due flessi, per $x < -3 - 2\sqrt{2}$ e

per $-3-2\sqrt{2} < x < -3$.
Grafico (non in scala):



4.147. $f(x) = x^{2/3}(x^2+3x-4)^{1/3}$

f è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x^{4/3} \to +\infty$ con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

$$f(x) = x^{2/3}(x-1)^{1/3}(x+4)^{1/3}$$

perciò: f si annulla in $x = 0, x = 1, x = -4$. Inoltre:

per $x \to 0$, $f(x) \sim -\sqrt[3]{4}\, x^{2/3}$, $x = 0$ punto di cuspide (rivolto verso l'alto);

per $x \to 1, f(x) \sim \sqrt[3]{5}(x-1)^{1/3}$, $x = 1$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente

per $x \to -4, f(x) \sim -\sqrt[3]{80}(x+4)^{1/3}$, $x = -4$ punto di flesso a tangente verticale, discendente.

I punti $x = 0, 1, -4$ saranno punti di non derivabilità.

$$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}\left(x^2+3x-4\right)^{1/3} + x^{2/3}\cdot\frac{2x+3}{3(x^2+3x-4)^{2/3}} =$$

$$= \frac{2(x^2+3x-4)+x(2x+3)}{3x^{1/3}(x^2+3x-4)^{2/3}} = \frac{4x^2+9x-8}{3x^{1/3}(x^2+3x-4)^{2/3}}.$$

f' è definita per $x \neq 0, 1, -4$.

$$4x^2+9x-8 \geq 0 \text{ per } x \geq \frac{-9+\sqrt{209}}{8}; x \leq \frac{-9-\sqrt{209}}{8}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } x \geq \frac{-9+\sqrt{209}}{8}, \frac{-9-\sqrt{209}}{8} \leq x < 0$$

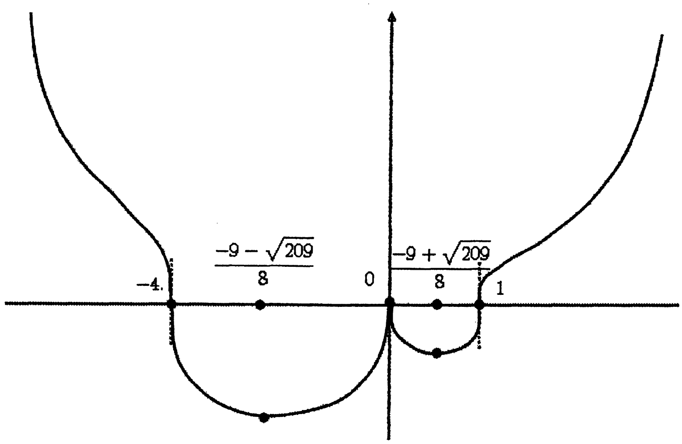
Perciò

$$x = \frac{-9+\sqrt{209}}{8} \simeq 0.68 \quad \text{punto di minimo relativo;}$$

$$x = \frac{-9-\sqrt{209}}{8} \simeq -2.9 \text{ punto di minimo relativo.}$$

Inoltre, $x = 0$ è punto di massimo relativo (in cui f non è derivabile).

Poiché la funzione all'infinito è concava verso l'alto, deve avere due flessi a tangente obliqua, esterni all'intervallo $[-4, 1]$. Grafico:



4.148. $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. Definita e continua in tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim xe^x \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralin. (senza asintoto obliquo)} \\ 0^- & \text{quindi } y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to -\infty \end{cases}$$

$f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x^2(x-3)} = 0$ per $x = 0, x = 3$.

Per $x \to 0$, $f(x) \sim -\sqrt[3]{3}\, x^{2/3}$, quindi $x = 0$ è punto di cuspide rivolta verso l'alto.

Per $x \to 3$, $f(x) \sim e^3 \sqrt[3]{9}\, \sqrt[3]{x-3}$, quindi $x = 3$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

$$f'(x) = e^x \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \frac{3x^2 - 6x}{3(x^3 - 3x^2)^{2/3}} \right) =$$

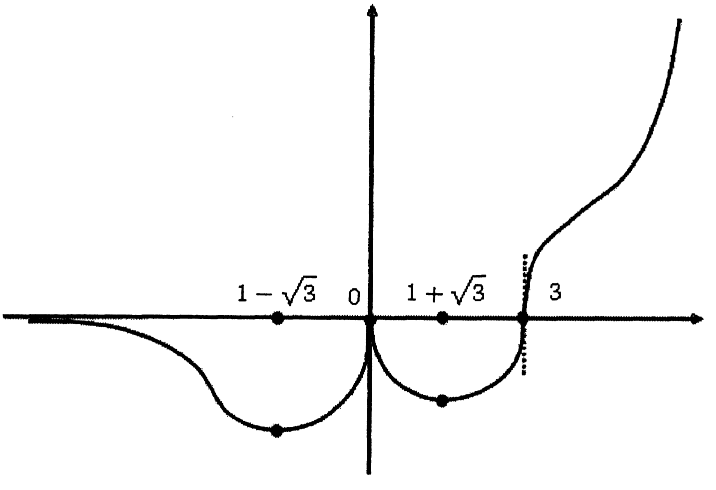
$$= \frac{e^x}{\left(x^3 - 3x^2\right)^{2/3}} \cdot x\left(x^2 - 2x - 2\right)$$

La funzione f è derivabile per $x \neq 0, x \neq 3$. Abbiamo già discusso la natura di questi punti.
Per $x \neq 0, x \neq 3$, si ha $f'(x) \geq 0$ se

$$x\left(x^2 - 2x - 2\right) \geq 0$$

ossia se: $$1 - \sqrt{3} \leq x < 0; x \geq 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi:
$x = 1 - \sqrt{3}$ è punto di minimo relativo; $x = 1 + \sqrt{3}$ è punto di minimo relativo;
$x = 0$ è punto di massimo relativo. Grafico:



4.149. $f(x) = x^{4/5}(10 - x)^{1/5}$
Definita in tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim -x \to \mp\infty$ con crescita lineare.
Cerco eventuale asintoto obliquo:

$$f(x) + x = x\left[\left(\frac{10 - x}{x}\right)^{1/5} + 1\right] =$$

$$= -x\left[\left(1 - \frac{10}{x}\right)^{1/5} - 1\right] \sim -x \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{10}{x}\right) = 2.$$

Quindi esiste asintoto obliquo $y = -x + 2$, per $x \to \pm\infty$.

(Potremmo fare uno studio asintotico dei punti $x = 0, x = 10$; in questo esempio, invece, decidiamo di studiare questi punti direttamente mediante la derivata prima).

Calcoliamo:

$$f'(x) = -\frac{x^{4/5}}{5(10-x)^{4/5}} + \frac{4(10-x)^{1/5}}{5x^{1/5}} = \frac{8-x}{x^{1/5}(10-x)^{4/5}}$$

definita per $x \neq 0, x \neq 10$.

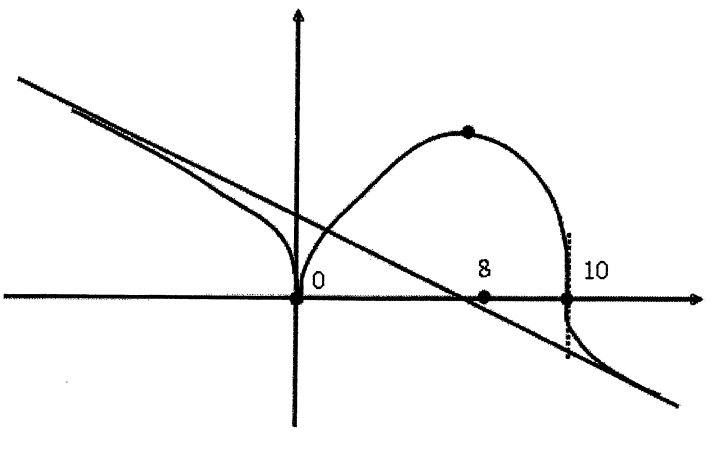
Per $x \to 0^{\pm}, f'(x) \sim \frac{8}{x^{1/5}10^{4/5}} \to \pm\infty$, quindi $x = 0$ è punto di cuspide discendente.

Per $x \to 10, f'(x) \sim \frac{-2}{10^{1/5}(10-x)^{4/5}} \to -\infty$, quindi $x = 10$ è punto di flesso a tangente verticale, discendente.

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 0 < x \leq 8$$

quindi $x = 8$ punto di massimo relativo.

Grafico:



4.150. $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x^2+\frac{5}{3}x}$

Definita in tutto $\mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \to 0^{\pm}$, quindi $y = 0$ asintoto orizzontale.

Per $x \to 0$, $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$, quindi f ha un flesso a tangente verticale in $x = 0$ (sarà un punto di non derivabilità). Calcoliamo:

$$f'(x) = e^{-x^2+\frac{5}{3}x}\left(\sqrt[3]{x}\left(-2x+\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{3x^{2/3}}\right) =$$

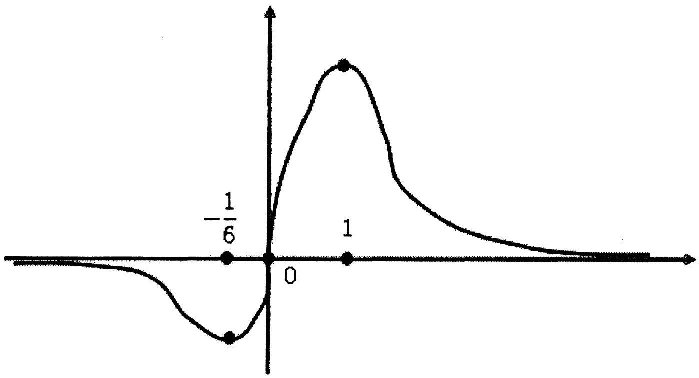
$$= \frac{e^{-x^2+\frac{5}{3}x}}{3x^{2/3}}\left(-6x^2+5x+1\right),$$

definita per $x \neq 0$.

Per $x \to 0, f'(x) \sim \frac{1}{3x^{2/3}} \to +\infty$, quindi $x = 0$ punto di flesso a tangente verticale (come già trovato).

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } -6x^2 + 5x + 1 \geq 0 \text{ per } -\frac{1}{6} \leq x \leq 1 \text{ (ma } x \neq 0).$$

Perciò $x = -\frac{1}{6}$ punto di minimo relativo, $x = 1$ punto di massimo relativo. Grafico:



4.151. $f(x) = x(\log|x|)^{3/5}$.

Definita per $x \neq 0$; funzione dispari, la studiamo per $x > 0$ e poi simmetrizziamo.

Per $x > 0$, $f(x) = x(\log x)^{3/5}$.

Per $x \to 0^+, f(x) \to 0^-$. $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile: prolunghiamo con continuità f ponendo $f(0) = 0$.

$\frac{f(x)}{x} = (\log|x|)^{3/5} \to -\infty$ per $x \to 0^+$ perciò (simmetrizzando per $x < 0$) $f'(0) = -\infty$, ossia $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale, discendente.

$f(x) = 0$ per $x = 1$; per $x \to 1, f(x) \sim (x-1)^{3/5}$, perciò $x = 1$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ con crescita sopralineare.

$$f'(x) = (\log x)^{3/5} + \frac{3}{5(\log x)^{2/5}} = \frac{5\log x + 3}{5(\log x)^{2/5}}.$$

$f(x)$ è derivabile per $x \neq 0, 1$.

Per $x \to 0, f'(x) \to -\infty$ (ritroviamo il flesso a tangente verticale, discendente);

per $x \to 1, f'(x) \to +\infty$ (ritroviamo il flesso a tangente verticale, ascendente).

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 5\log x + 3 \geq 0,\ x \geq e^{-3/5}.$$

$$x = e^{-3/5} \text{ punto di minimo relativo.}$$

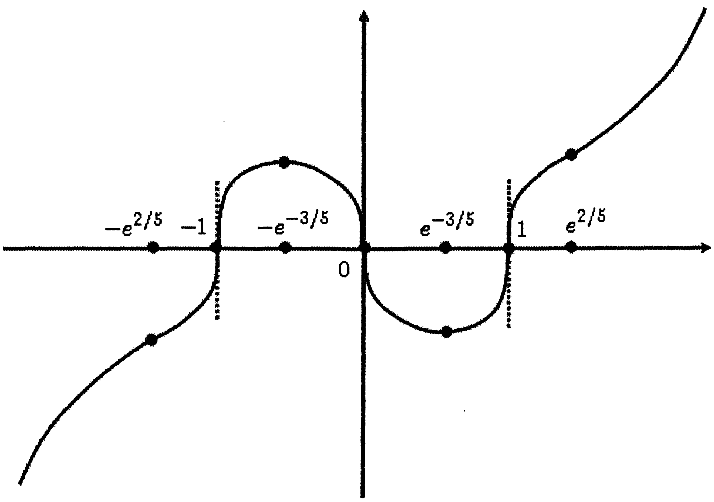
$$f''(x) = \frac{3}{5x(\log x)^{2/5}} - \frac{6}{25x(\log x)^{7/5}} =$$

$$= \frac{15\log x - 6}{25x(\log x)^{7/5}} \geq 0 \text{ per } 0 < x < 1, x > e^{2/5}.$$

Per $x > 0$, f è concava verso l'alto per per $0 < x < 1, x > e^{2/5}$;

$$x = e^{2/5} \text{ punto di flesso a tangente obliqua.}$$

Simmetrizzando dispari si ha il grafico:



4.152.
$$f(x) = \frac{|x^2 + 2x - 3|}{x^2} = \frac{|(x-1)(x+3)|}{x^2}$$

Insieme di definizione: $x \neq 0$.
$f(x) \geq 0 \; \forall x \neq 0, f(x) = 0$ per $x = 1, x = -3$ (probabili punti angolosi).
Per $x \to 0, f(x) \sim \frac{3}{x^2} \to +\infty$. $x = 0$ asintoto verticale.
Per $x \to \pm\infty, f(x) \to 1$. $y = 1$ asintoto orizzontale.

$$f(x) = \left|1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right|$$

$$f'(x) = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)\operatorname{sgn}((x-1)(x+3)) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{x^3}(3-x) & \text{se } x < -3, x > 1 \\ \frac{2}{x^3}(x-3) & \text{se } -3 < x < 1. \end{cases}$$

$f(x)$ non è derivabile per $x = 0$ (dove non è definita) e per $x = -3, x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f'(x) = \pm 4$$

$x = 1$ punto angoloso con pendenze da destra e sinistra ± 4. In particolare, $x = 1$ è punto di minimo relativo.

$$\lim_{x \to -3^{\pm}} f'(x) = \pm \frac{4}{9}$$

$x = -3$ punto angoloso con pendenze da destra e sinistra $\pm\frac{4}{9}$. In particolare, $x = -3$ è punto di minimo relativo.

Se $x < -3, x > 1$, $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq 3$, cioè per $1 < x \leq 3$.

Se $-3 < x < 1$, $f'(x) \geq 0$ per $x < 0, x \geq 3$, cioè per $-3 < x < 0$.

Quindi:

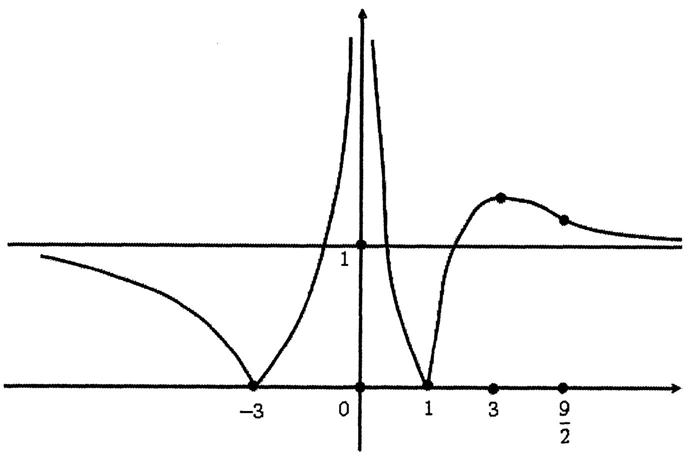
$f(x)$ cresce per $-3 < x < 0$ e $1 < x \leq 3$. $x = 3$ è punto di massimo relativo, $f(3) = \frac{4}{3}$. (Abbiamo già trovato i due punti di minimo relativo).

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^3} - \frac{18}{x^4}\right) \operatorname{sgn}((x-1)(x+3)) = \begin{cases} \frac{2}{x^4}(2x - 9) & \text{se } x < -3, x > 1 \\ \frac{2}{x^4}(9 - 2x) & \text{se } -3 < x < 1. \end{cases}$$

Se $x < -3, x > 1$, $f''(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{9}{2}$.

Se $-3 < x < 1$, $f''(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{9}{2}$, cioè per $-3 < x < 1$.

Quindi: f è concava verso l'alto per $-3 < x < 1$, $x \geq \frac{9}{2}$. $x = \frac{9}{2}$ è punto di flesso a tangente obliqua. Grafico:



4.153. $f(x) = \frac{x}{\log^3 |x|}$. Insieme di definizione: $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

Funzione dispari: la studiamo solo per $x > 0$, e poi simmetrizziamo.

Per $x > 0$ è
$$f(x) = \frac{x}{\log^3 x}.$$

$f(x) > 0$ per $x > 1$.

Per $x \to 0^+, f(x) \to 0^-$, perciò $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile, poniamo $f(0) = 0$. Poiché inoltre $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\log^3 x} \to 0^-$, f arriva nell'origine con tangente orizzontale. Poiché la funzione è dispari, $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale, discendente.

Per $x \to 1$, $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^3} \to \pm\infty$ per $x \to 1^\pm$.

$x = 1$ asintoto verticale.

Per $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$, con crescita sottolineare (e quindi senza asintoto obliquo).

$$f'(x) = \frac{\log^3 x - 3x\frac{\log^2 x}{x}}{\log^6 x} = \frac{\log x - 3}{\log^4 x}.$$

Per $x \to 0^+, f'(x) \sim \frac{1}{\log^3 x} \to 0^-$, quindi $x = 0$ è un punto a tangente orizzontale (ritroviamo un'informazione già ottenuta).

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } \log x - 3 \geq 0, x \geq e^3.$$

f cresce per $x \geq e^3, x = e^3$ punto di minimo relativo. Per calcolare f'' conviene riscrivere f' come

$$f'(x) = \frac{1}{\log^3 x} - \frac{3}{\log^4 x}; \quad \text{perciò:}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{x\log^4 x} + \frac{12}{x\log^5 x} = \frac{3}{x\log^5 x}(4 - \log x).$$

$$4 - 3\log x \geq 0 \text{ per } x \leq e^4; \log^5 x > 0 \text{ per } x > 1$$

quindi

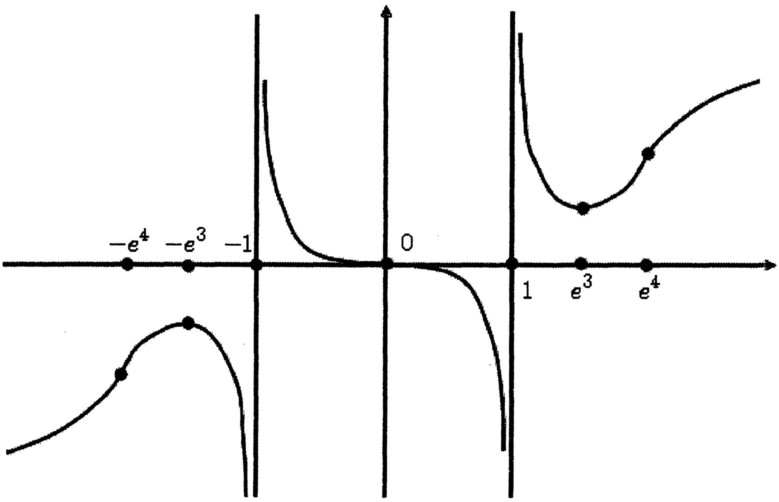
$$f''(x) \geq 0 \text{ per } 1 < x \leq e^4.$$

f è concava verso l'alto per $1 < x \leq e^4$, $x = e^4$ è punto di flesso.

Simmetrizzando dispari la funzione si trova che:

$x = -1$ asintoto verticale; $x = -e^3$ punto di massimo relativo; $x = e^4$ punto di flesso

$f(x) \to -\infty$ con crescita sublineare per $x \to -\infty$. Grafico (non in scala):



4.154. $f(x) = \log(1 + x^2) + \arctan\frac{1}{x}$. Insieme di definizione: $x \neq 0$.

Per $x \to 0^\pm$, $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$, perciò $x = 0$ è un punto di discontinuità a salto.

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim \log(x^2) = 2\log|x| \to +\infty$,
con crescita sottolineare (e quindi senza asintoto obliquo).

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x-1}{1+x^2}.$$

f non è derivabile per $x = 0$ (perché è discontinua), tuttavia, esiste $\lim_{x\to 0} f'(x) = -1$. La funzione arriva in 0 da destra e da sinistra con la stessa pendenza obliqua $m = -1$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 2x - 1 \geq 0, x \leq \frac{1}{2}.$$

f cresce per $x \leq \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ punto di minimo relativo.

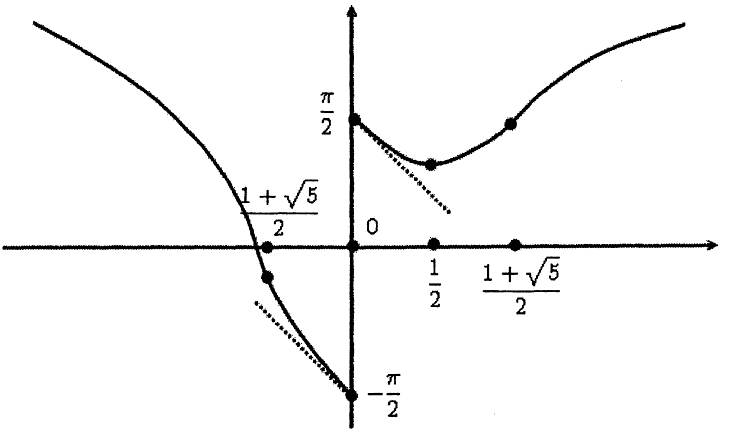
$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x-1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}\left(-x^2 + x + 1\right).$$

(f'' non esiste per $x = 0$).

$$f''(x) \geq 0 \text{ per } x^2 - x - 1 \leq 0.$$

f è concava verso l'alto per $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ sono punti di flesso.

Grafico:



4.155. $f(x) = (x+1)|e^x - 1|$. Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.
$f(x) \geq 0$ per $x \geq -1$, $f(x) = 0$ per $x = -1, x = 0$ ($x = 0$ probabile punto angoloso).
Per $x \to 0, f(x) \sim |x|$, quindi $x = 0$ punto angoloso (e di minimo relativo).
Per $x \to +\infty, f(x) \sim xe^x \to +\infty$ con crescita superlineare (senza asintoto obliquo).
Per $x \to -\infty, f(x) \sim x \to -\infty$ con crescita lineare (possibile asintoto obliquo).
Per $x \to -\infty$,

$$f(x) - x = (x+1)(1-e^x) - x = 1 - e^x - xe^x \to 1.$$

Perciò $y = x + 1$ è asintoto obliquo pe $x \to -\infty$.

$$f'(x) = |e^x - 1| + (x+1)e^x \text{sgn}(e^x - 1) =$$

$$= \begin{cases} e^x(2+x) - 1 & \text{se } x > 0 \\ -e^x(2+x) + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$f(x)$ non è derivabile per $x = 0$.

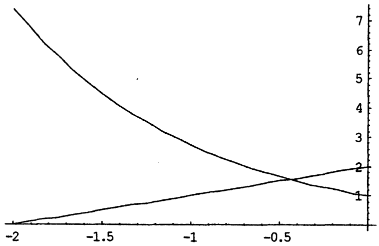
Se $x > 0$ $\qquad f'(x) \geq 0$ per $e^x(2+x) - 1 \geq 0$,

$$2 + x \geq e^{-x} \text{ sempre vero}$$

(1° membro > 2; 2° membro < 1). Quindi per $x > 0$ f è sempre crescente.

Se $x < 0$ $\qquad f'(x) \geq 0$ per $e^x(2+x) - 1 \leq 0,\ 2 + x \leq e^{-x}$.

Un semplice confronto grafico



mostra che questo è vero per $x \leq \alpha$, con $\alpha \in (-1, 0)$.

Se $x < 0$, f cresce per $x \leq \alpha$, $x = \alpha$ è punto di massimo relativo.

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(3+x) & \text{se } x > 0 \\ -e^x(3+x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi:

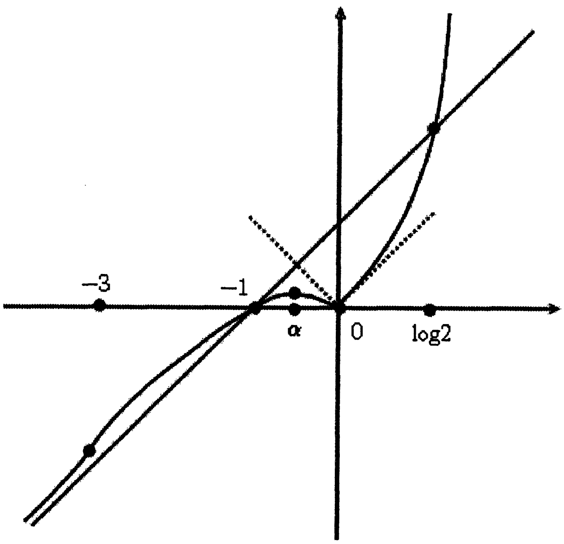
Se $x > 0$, $f''(x) > 0$ sempre; se $x < 0$, $f''(x) \geq 0$ per $x \leq -3$.

f è concava verso l'alto per $x \leq -3$, $x > 0$. $x = -3$ è punto di flesso a tangente obliqua. Infine, possiamo osservare che il grafico di f taglia l'asintoto per

$$|e^x - 1|(x+1) = x+1,$$

$$x = -1 \text{ o } |e^x - 1| = 1; \quad e^x - 1 = \pm 1; \; x = \log 2$$

cioè nei due punti $x = -1, x = \log 2$. Grafico:



4.156. $f(x) = x(x^2-1)^{1/3}$. Definita in tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^{5/3} \to \pm\infty$ con crescita sopralineare (senza asintoto obliquo).

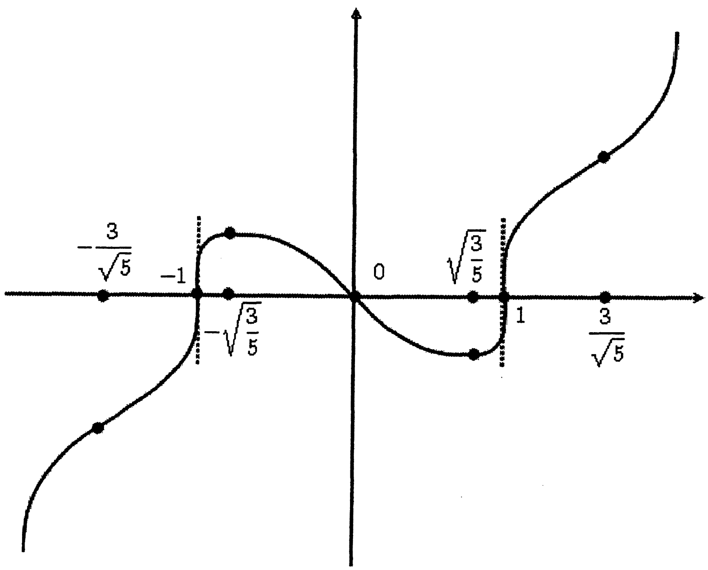
Poiché
$$f(x) = x(x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3}$$
si vede che $x = \pm 1$ sono punti di flesso a tangente verticale.

$$f'(x) = \frac{(5x^2-3)}{3(x^2-1)^{2/3}} \geq 0 \quad \text{per:} \quad x \geq \sqrt{\frac{3}{5}}, x \leq -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ punto di minimo relativo; $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ punto di massimo relativo.

$$f''(x) = \frac{2x}{9(x^2-1)^{5/3}}(5x^2-9)$$

$x = 0$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ punti di flesso a tangente obliqua.



4.157. $f(x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$. Funzione 2π-periodica, la studiamo in $[0, 2\pi]$.
In quest'intervallo, è definita per:

$$\sin x \neq -\cos x, \text{ cioè } x \neq \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi.$$

Per $x \to \left(\frac{3}{4}\pi\right)^{\pm}$, $f(x) \sim \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}-1)}{\sin x+\cos x} \to \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}-1)}{0^{\mp}}\right] = \pm\infty.$

Per $x \to \left(\frac{7}{4}\pi\right)^{\pm}$, $f(x) \sim \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)}{\sin x+\cos x} \to \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)}{0^{\pm}}\right] = \pm\infty.$

$x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{7}{4}\pi$ asintoti verticali.

$f(x) = 0$ per $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0, \tan x = \sqrt{3}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4}{3}\pi.$

$f(0) = f(2\pi) = \sqrt{3}.$

$$f'(x) = \frac{\left(-\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{(\sin x + \cos x)^2} < 0 \text{ per ogni } x \text{ in cui } f \text{ è definita.}$$

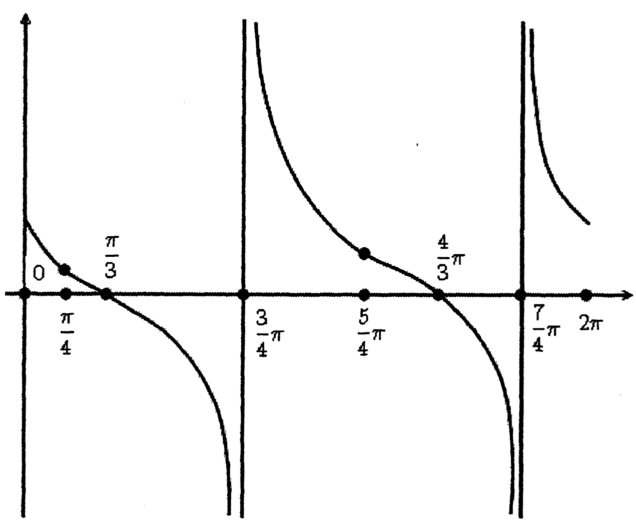
Perciò f decresce in $[0, \frac{3}{4}\pi)$, $(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, $(\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$.

$$f''(x) = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{(\sin x + \cos x)^3}(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ per: } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi < x \leq \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi.$$

$$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi \text{ punti di flesso a tangente obliqua.}$$

Grafico:



4.158. $f(x) = x^2 - 8x + 4\log|x-1|$
Insieme di definizione: $x \neq 1$.
Per $x \to 1$, $f(x) \to -\infty$. $x = 1$ asintoto verticale.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^2 \to +\infty$ con crescita sopralineare (senza asintoto obliquo).

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{4}{x-1} = 2\frac{(x-4)(x-1)+2}{x-1} =$$

$$= \frac{2(x^2-5x+6)}{x-1} = \frac{2(x-2)(x-3)}{x-1}.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 1 < x \leq 2; x \geq 3.$$

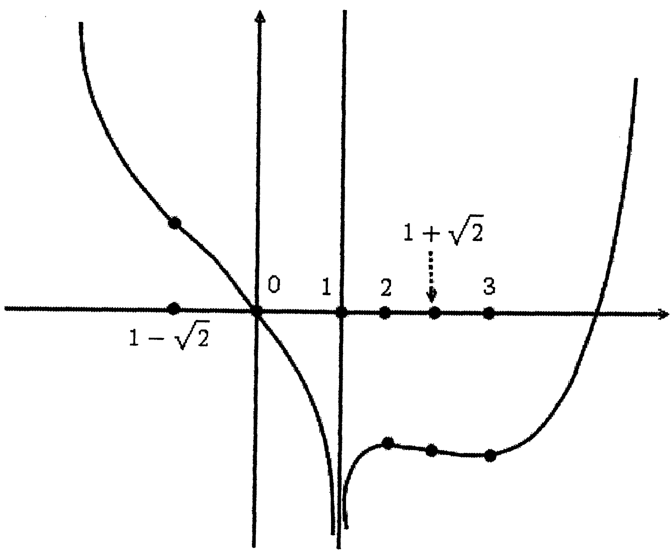
$x = 2$ punto di massimo relativo; $x = 3$ punto di minimo relativo.

$$f''(x) = 2 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}\left((x-1)^2 - 2\right) =$$

$$= \frac{2(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} \geq 0 \text{ per } x \geq 1+\sqrt{2}; x \leq 1-\sqrt{2}.$$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$ punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



4.159. $f(x) = e^{-x}|x(x+1)|$. Definita in tutto $\mathbb{R}$. $f(x) = 0$ in $x = 0, x = -1$ (probabili punti angolosi). Precisamente:

Per $x \to 0, f(x) \sim |x|$. $x = 0$ punto angoloso e punto di minimo relativo.

Per $x \to -1, f(x) \sim e^{-1}|x+1|$. Quindi $x = -1$ è punto angoloso e punto di minimo relativo. Per $x \to \pm\infty$,

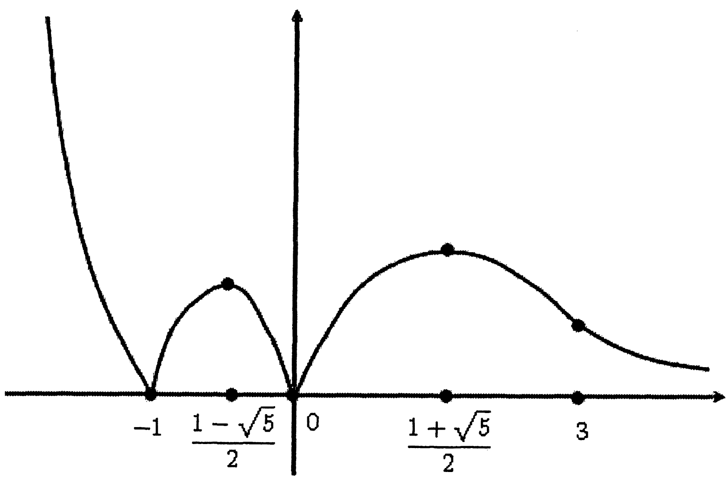
$$f(x) \sim x^2 e^{-x} \to \begin{cases} 0^+ & y = 0 \text{ as. orizz. per } x \to +\infty \\ +\infty & \text{con crescita sopralineare.} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(-x^2 + x + 1) & \text{se } x > 0, x < -1 \\ e^{-x}(x^2 - x - 1) & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \pm 1$; $x = 0$ punto angoloso. $\lim_{x \to -1^\pm} f'(x) = \pm\frac{1}{e}$; $x = -1$ punto angoloso.
(Ritroviamo informazioni già ottenute con le stime asintotiche).
Per $x > 0, x < -1, f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
Per $-1 < x < 0, f'(x) \geq 0$ per $-1 < x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;
$x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ punti di massimo relativo;
$x = 0, x = -1$ punti di minimo relativo (e assoluto).

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 - 3x) & \text{se } x > 0, x < -1 \\ e^{-x}(-x^2 + 3x) & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

$x = 3$ punto di flesso a tangente obliqua.



4.160. $f(x) = xe^{1/(x-1)}$. Insieme di definizione: $x \neq 1$.

Per $x \to 1^\pm, f(x) \sim e^{1/(x-1)} \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$

$x = 1$ asintoto verticale per $x \to 1^+$.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x \to \pm\infty$ con crescita lineare.
Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$f(x) - x = x\left(e^{1/(x-1)} - 1\right) \sim x \cdot \frac{1}{x-1} \to 1.$$

Quindi $y = x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

$$f'(x) = e^{1/(x-1)}\left(1 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) = \frac{e^{1/(x-1)}}{(x-1)^2}\left(x^2 - 3x + 1\right) \geq 0$$

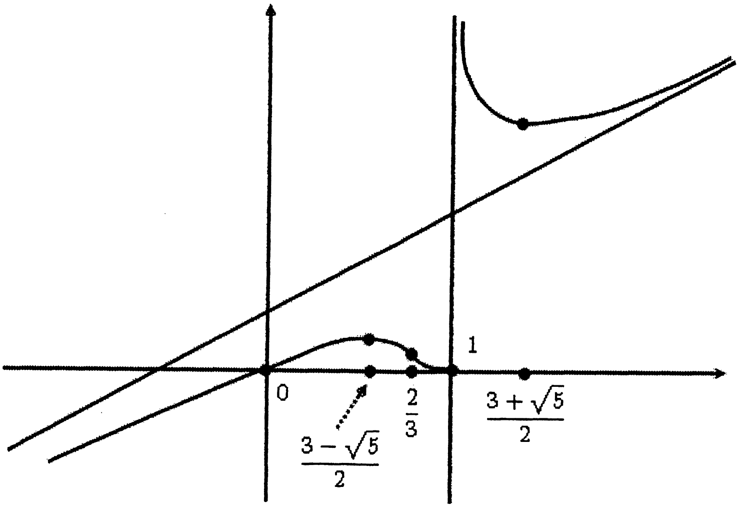
per $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Quindi:
$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ punto di minimo relativo; $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ punto di massimo relativo.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} + \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-3x+1)}{(x-1)^4}\right) =$$

$$= e^{1/(x-1)}\left(-\frac{(x^2-3x+1)}{(x-1)^4} + \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 6x - 2}{(x-1)^3}\right) =$$

$$= \frac{e^{1/(x-1)}}{(x-1)^4}\left(-\left(x^2 - 3x + 1\right) + (x+1)(x-1)\right) = \frac{e^{1/(x-1)}}{(x-1)^4}(3x-2) \geq 0 \text{ per } x \geq \frac{2}{3}.$$

$x = 2/3$ punto di flesso a tangente obliqua.
La funzione è concava verso l'alto per $x > 1$ e per $2/3 < x < 1$.



4.161. $f(x) = (3x+2)e^{1/x}$. Insieme di definizione: $x \neq 0$.

Per $x \to 0^{\pm}, f(x) \sim 2e^{1/x} \to \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$

$x = 0$ asintoto verticale per $x \to 0^+$. Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim 3x \to \pm\infty$ con crescita lineare. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$f(x) - 3x = 3x\big(e^{1/x} - 1\big) + 2e^{1/x};$$

$$2e^{1/x} \to 2; 3x\big(e^{1/x} - 1\big) \sim 3x \cdot \frac{1}{x} = 3, \text{quindi } f(x) - 3x \to 5$$

e $y = 3x + 5$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

$$f'(x) = e^{1/x}\left(3 - \frac{(3x+2)}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^2}\big(3x^2 - 3x - 2\big) \geq 0$$

per $x \geq \frac{3+\sqrt{33}}{6}, x \leq \frac{3-\sqrt{33}}{6}$. Quindi:

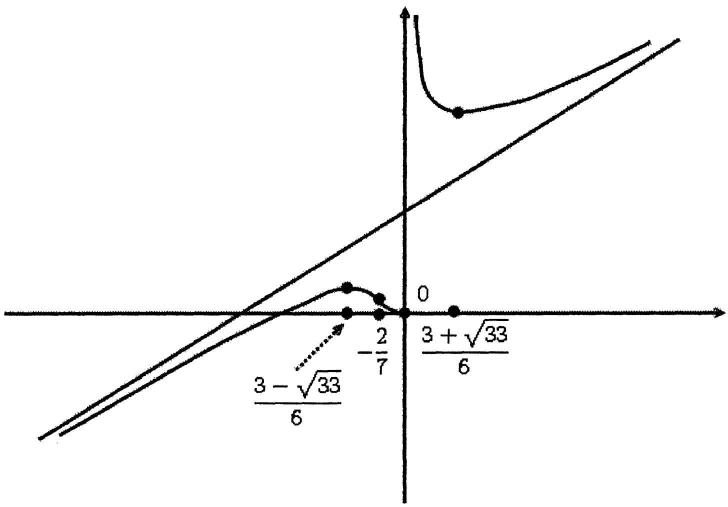
$x = \frac{3+\sqrt{33}}{6}$ punto di minimo relativo; $x = \frac{3-\sqrt{33}}{6}$ punto di massimo relativo.

$$f''(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{3x^2 - 3x - 2}{x^2} + \frac{(6x-3)x^2 - 2x(3x^2 - 3x - 2)}{x^4}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(\frac{(-3x^2 + 3x + 2) + (3x^2 + 4x)}{x^4}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^4}(7x+2) \geq 0 \text{ per } x \geq -\frac{2}{7}.$$

$x = -2/7$ punto di flesso a tangente obliqua.

La funzione è concava verso l'alto per $x > 0$ e per $-2/7 < x < 0$.



4.162. $f(x) = x^2 - 3x + 2 + \log x$.
Definita per $x > 0$.
Per $x \to 0^+, f(x) \sim \log x \to -\infty; x = 0$ asintoto verticale.
Per $x \to +\infty, f(x) \sim x^2 \to +\infty$ con crescita sopralineare (in particolare, senza asintoto obliquo).

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x} \geq 0$$

per

$$0 < x \leq \frac{1}{2}; x \geq 1.$$

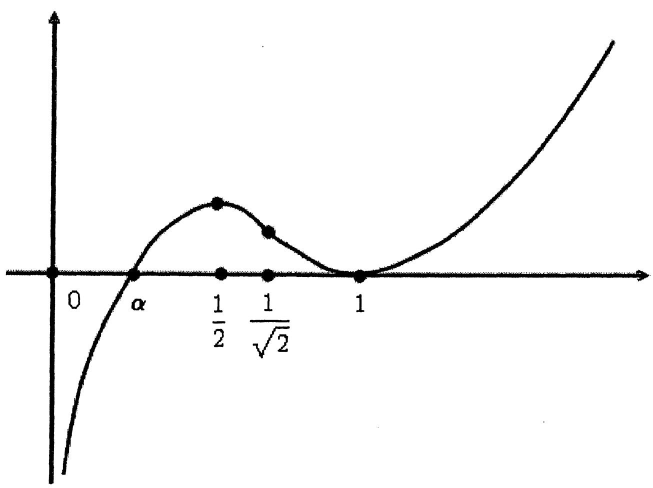
$x = 1$ punto di minimo relativo; $x = \frac{1}{2}$ punto di massimo relativo.

Osserviamo che $f(1) = 0$, perciò nel punto di minimo relativo la funzione si annulla; perciò $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ e la funzione ha un secondo punto di intersezione con l'asse x in un punto

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \text{ per } x^2 \geq \frac{1}{2}, x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

f è concava verso l'alto per $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e ha un punto di flesso in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tangente obliqua, di coefficiente angolare $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - 3$. Grafico:



4.163. $f(x) = x + 2\arctan\frac{1}{x} + \pi$. Definita per $x \neq 0$.

Per $x \to 0^{\pm}, f(x) \to \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$

$x = 0$ punto di discontinuità a salto.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x \to \pm\infty$ con crescita lineare.

$f(x) - x = 2\arctan\frac{1}{x} + \pi \to \pi, y = x + \pi$ asintoto obliquo.

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \text{ per } x \geq 1; x \leq -1.$$

$x = 1$ punto di minimo relativo;

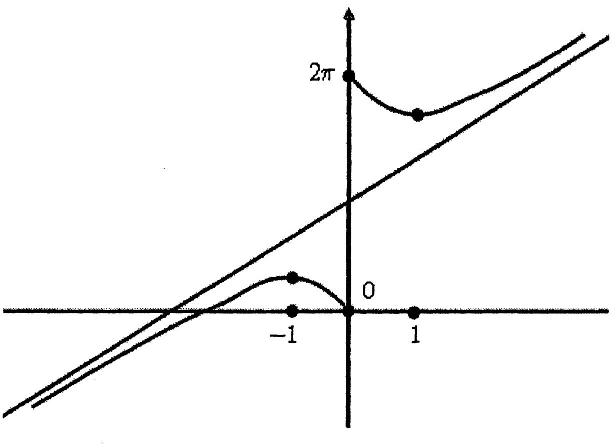
$x = -1$ punto di massimo relativo.

Non è derivabile in $x = 0$ (perché discontinua).

Per $x \to 0^{\pm}, f'(x) \to -1$, quindi la funzione arriva nel punto di discontinuità con la stessa pendenza limite, da destra e da sinistra.

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ per } x > 0$$

La funzione è concava verso l'alto per $x > 0$; non ha punti di flesso (in $x = 0$ le derivate prima e seconda non esistono). Grafico:



4.164. $f(x) = x^2\sqrt[3]{x+1}$. Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim x^{2+1/3} \to \pm\infty$ con crescita sopralineare.

$f(x) = 0$ per $x = 0, x = -1$.

Per $x \to -1, f(x) \sim \sqrt[3]{x+1}$, quindi $x = -1$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente.

Per $x \to 0, f(x) \sim x^2$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo relativo.

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x+1} + \frac{x^2}{3(x+1)^{2/3}} = \frac{6x(x+1)+x^2}{3(x+1)^{2/3}} = \frac{x(7x+6)}{3(x+1)^{2/3}} \geq 0$$

per $x \geq 0, x \leq -6/7$. Quindi:
$x = 0$ punto di minimo relativo; $x = -\frac{6}{7}$ punto di massimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(14x+6)3(x+1)^{2/3} - \frac{(7x^2+6x)2}{(x+1)^{1/3}}}{9(x+1)^{4/3}} =$$

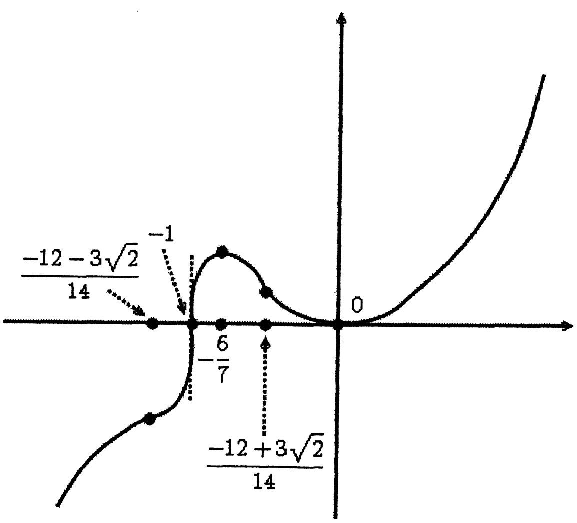
$$= 2 \cdot \frac{3(7x^2+10x+3) - (7x^2+6x)}{9(x+1)^{5/3}} = 2 \cdot \frac{14x^2+24x+9}{9(x+1)^{5/3}}.$$

$$14x^2 + 24x + 9 \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{-12-3\sqrt{2}}{14}; x \geq \frac{-12+3\sqrt{2}}{14};$$

$$(x+1)^{5/3} \geq 0 \text{ per } x \geq -1, \text{ dunque:}$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ per } \frac{-12-3\sqrt{2}}{14} \leq x < -1; x \geq \frac{-12+3\sqrt{2}}{14},$$

ed in questi intervalli la funzione è concava verso l'alto.
$x = \frac{-12\pm3\sqrt{2}}{14}$ punti di flesso a tangente obliqua;
$x = -1$ punto di flesso a tangente verticale.



4.165. $f(x) = x^2(2-x)^{2/3}$. Insieme di definizione: $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^{2+2/3} \to +\infty$ con crescita sopralineare.
$f(x) = 0$ per $x = 0, x = 2$.
Per $x \to 2$, $f(x) \sim 4(2-x)^{2/3}$, quindi $x = 2$ è punto di cuspide, rivolto verso il basso.
Per $x \to 0$, $f(x) \sim 2^{2/3}x^2$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo relativo.

$$f'(x) = 2x(2-x)^{2/3} - \frac{2x^2}{3(2-x)^{1/3}} = \frac{6x(2-x)-2x^2}{3(2-x)^{1/3}} = \frac{4x(3-2x)}{3(2-x)^{1/3}} \geq 0$$

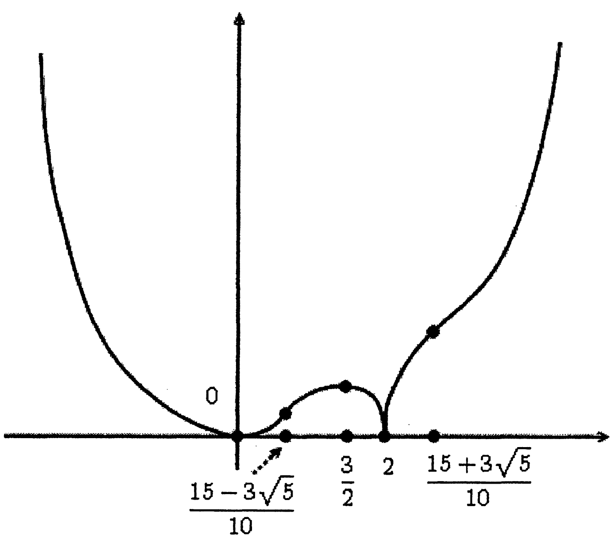
per $0 \leq x \leq 3/2; x > 2$. Quindi:
$x = 0, x = 2$ punti di minimo relativo; $x = 3/2$ punto di massimo relativo.

$$f''(x) = 4\frac{(3-4x)3(2-x)^{1/3} + \frac{(3x-2x^2)}{(2-x)^{2/3}}}{9(2-x)^{2/3}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{3(3-4x)(2-x) + (3x-2x^2)}{9(2-x)^{4/3}} = \frac{8(5x^2-15x+9)}{9(2-x)^{4/3}} \geq 0 \text{ per:}$$

$$5x^2 - 15x + 9 \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{15-3\sqrt{5}}{10}; x \geq \frac{12+3\sqrt{5}}{10};$$

ed in questi intervalli la funzione è concava verso l'alto.
$x = \frac{15\pm3\sqrt{5}}{10}$ punti di flesso a tangente obliqua.



4.166. $f(x) = e^{-x^2}\left(x^3 + \frac{3}{2}x\right)$. Definita in tutto $\mathbb{R}$. Simmetrica dispari.
$f(x) = xe^{-x^2}\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \geq 0$ per $x \geq 0$.
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim e^{-x^2}x^3 \to 0^{\pm}$. $y = 0$ asintoto orizzontale.

$$f'(x) = e^{-x^2}\left(-2x\left(x^3 + \frac{3}{2}x\right) + 3x^2 + \frac{3}{2}\right) = e^{-x^2}\left(-2x^4 + \frac{3}{2}\right) \geq 0 \text{ per}$$

$$-2x^4 + \frac{3}{2} \geq 0, \quad x^4 \leq \frac{3}{4}, \quad x^2 \leq \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad -\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

$x = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ punto di massimo relativo; $x = -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ punto di minimo relativo.

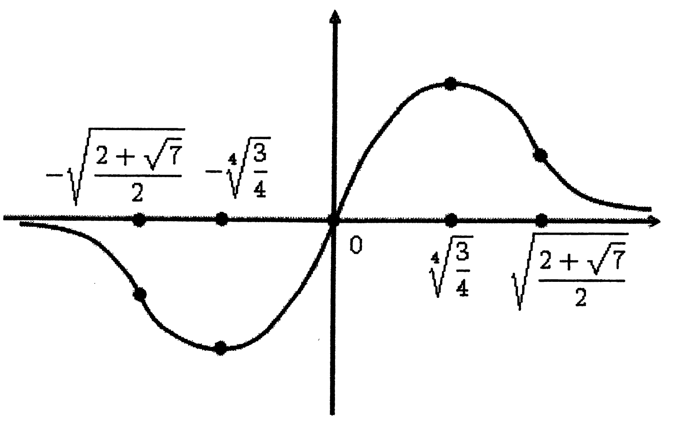
$$f''(x) = e^{-x^2}\left(-2x\left(-2x^4 + \frac{3}{2}\right) - 8x^3\right) = xe^{-x^2}\left(4x^4 - 8x^2 - 3\right).$$

$4x^4 - 8x^2 - 3 \geq 0$ per $x^2 \geq \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$, cioè $x \geq \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}}$; $x \leq -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}}$

$f''(x) \geq 0$, e quindi f concava verso l'altro, per:

$$x \geq \sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{2}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{2}} \leq x \leq 0.$$

$x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{2}}$ punti di flesso (a tangente obliqua). Grafico:



4.167. $f(x) = xe^{-|x^3-1|}$. Definita in tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty, f(x) \to 0^{\pm}$. $y = 0$ asintoto orizzontale.
$x = 1$ probabile punto angoloso.

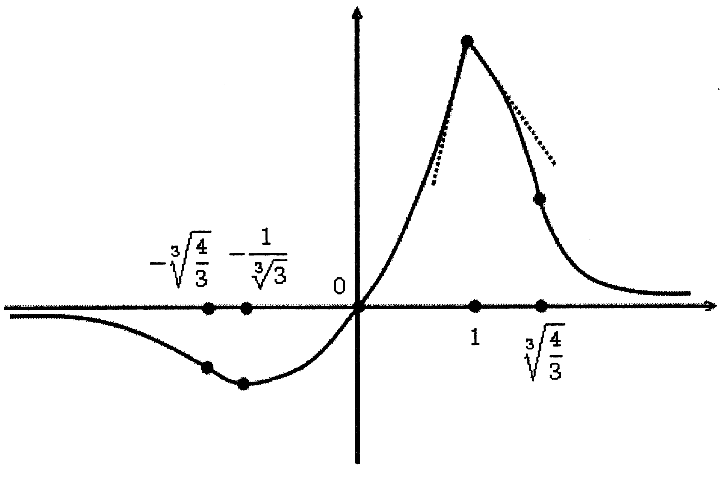
$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x^3} & \text{se } x \geq 1 \\ xe^{x^3-1} & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} e^{1-x^3}(1-3x^3) & \text{se } x > 1 \\ e^{x^3-1}(1+3x^3) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = -2; f'(1^-) = 4,$$

quindi effettivamente $x = 1$ è un punto angoloso, e punto di max. rel.
Per $x > 1, f'(x) < 0$ sempre.
Per $x < 1, f'(x) \geq 0$ per $x \geq -1/\sqrt[3]{3}$.
Quindi f è crescente per $-1/\sqrt[3]{3} \leq x \leq 1$, decrescente altrove. Di conseguenza:
$x = -1/\sqrt[3]{3}$ è punto di minimo; $x = 1$ è punto di massimo (angoloso).

Calcoliamo ora $$f''(x) = \begin{cases} e^{1-x^3}3x^2(3x^3-4) & \text{se } x > 1 \\ e^{x^3-1}3x^2(3x^3+4) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

definita per $x \neq 1$.
Per $x > 1, f''(x) \geq 0$ se $x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.
Per $x < 1, f''(x) \geq 0$ se $x \geq -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.
Quindi: f è concava verso l'alto per $-\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \leq x < 1, x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.
$x = \pm\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ sono punti di flesso a tangente obliqua. Grafico:



4.168. $f(x) = e^{3x}(x^2 - |x+1|)$. Definita in tutto $\mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim e^{3x}x^2 \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ \end{cases}$

$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$, non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}(x^2 - x - 1) & \text{per } x \geq -1 \\ e^{3x}(x^2 + x + 1) & \text{per } x \leq -1 \end{cases}$$

$f(x) = 0$ per $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

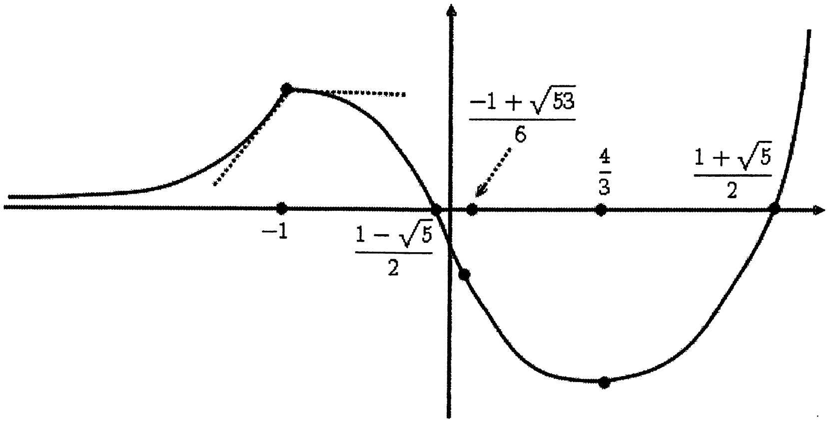
$$f'(x) = \begin{cases} e^{3x}(3x^2 - x - 4) & \text{per } x > -1 \\ e^{3x}(3x^2 + 5x + 4) & x < -1 \end{cases}$$

$f'_{\pm}(-1) = \begin{cases} 0 \\ 2e^{-3} \end{cases}$ quindi $x = -1$ è un punto di non derivabilità, angoloso.

Per $x > -1$, $f'(x) \geq 0$ per: $x \geq 4/3$; per $x < -1$, $f'(x) \geq 0$ per ogni x.
$x = -1$ punto di massimo relativo;
$x = \frac{4}{3}$ punto di minimo relativo.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{3x}(9x^2 + 3x - 13) & \text{per } x > -1 \\ e^{3x}(9x^2 + 21x + 17) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

Per $x > -1$, $f''(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{-1+\sqrt{53}}{6}$; per $x < -1$, $f''(x) \geq 0$ per ogni x.
$x = \frac{-1+\sqrt{53}}{6}$ punto di flesso a tangente obliqua. Grafico (non in scala):



4.169. $f(x) = e^{-x}|e^x - x^2|$.
Definita su tutto $\mathbb{R}$, si annulla per $e^x = x^2, x = \alpha \in (-1, 0)$.
Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim \begin{cases} 1 & y = 1 \text{ asintoto orizzontale per } x \to +\infty \\ x^2 e^{-x} \to +\infty & \text{con crescita sopralineare.} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 e^{-x} & \text{per } x \geq \alpha \\ x^2 e^{-x} - 1 & \text{per } x \leq \alpha \end{cases}$$

$x = \alpha$ è un punto angoloso, di minimo assoluto. Per $x \neq \alpha$ f è derivabile, e

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 - 2x) & \text{per } x > \alpha \\ e^{-x}(2x - x^2) & \text{per } x < \alpha \end{cases}$$

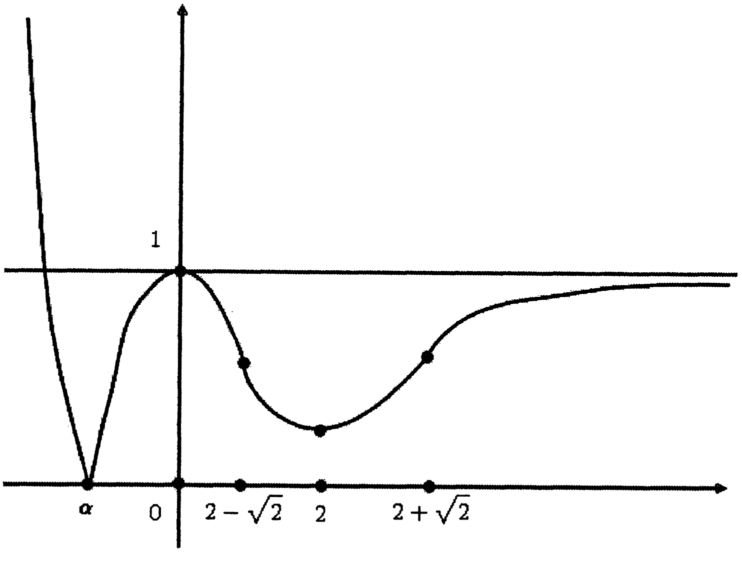
$$f'(x) \geq 0 \text{ per } \alpha < x \leq 0; x \geq 2.$$

$x = 0$ punto di max. rel.; $x = 2$, $x = \alpha$ punti di min. rel.
$f(0) = 1; f(2) = 1 - 4e^{-2}$.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(-x^2 + 4x - 2) & \text{per } x > \alpha \\ e^{-x}(x^2 - 4x + 2) & \text{per } x < \alpha \end{cases}$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ per } x < \alpha; 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}.$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2} \text{ punti di flesso.}$$



4.170. $f(x) = e^{x+2}(3x^2 - 1)$. Definita su tutto $\mathbb{R}$.
Per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) \sim e^{x+2}3x^2 \to \begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ 0^+ & y = 0 \text{ asintoto orizz. per } x \to -\infty. \end{cases}$$

$f(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

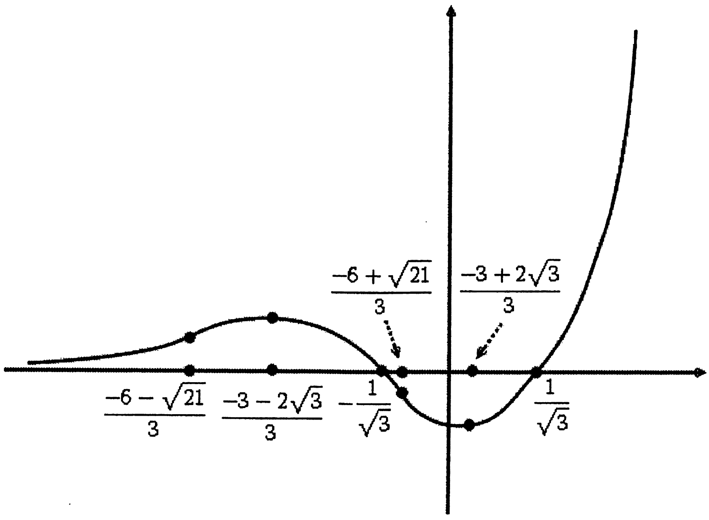
$$f'(x) = e^{x+2}\big(3x^2 + 6x - 1\big) \geq 0 \text{ per } \ x \leq \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}; x \geq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

$x = \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}$ punto di massimo relativo;
$x=\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ punto di minimo relativo.

$$f''(x) = e^{x+2}\big(3x^2 + 6x - 1 + 6x + 6\big) = e^{x+2}\big(3x^2 + 12x + 5\big) \geq 0 \text{ per}$$

$$x \leq \frac{-6-\sqrt{21}}{3}; x \geq \frac{-6+\sqrt{21}}{3}.$$

$x = \frac{-6\pm\sqrt{21}}{3}$ punti di flesso.



4.171. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + x|$

$$f(x) = 0 \text{ per } x = 0, x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \quad \text{(probabili punti angolosi).}$$

Per $x \to \pm\infty, f(x) \sim |x^3| \to +\infty$ con crescita sopralineare.

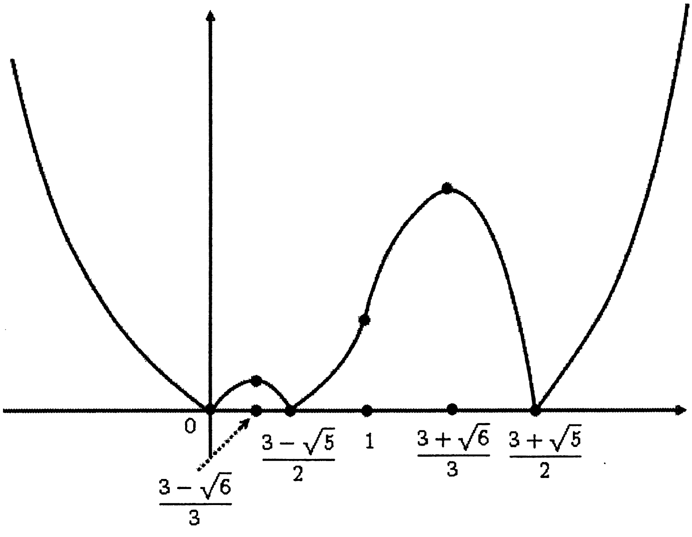
$$f'(x) = \operatorname{sgn}\left(x^3 - 3x^2 + x\right) \cdot \left(3x^2 - 6x + 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 3x^2 - 6x + 1 & \text{per } x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ -3x^2 + 6x - 1 & \text{per } x \leq 0, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ per $x = \frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$, punti di massimo relativo.
I punti in cui f si annulla, $x = 0, x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ sono angolosi (e di minimo assoluto).

$$f''(x) = \operatorname{sgn}\left(x^3 - 3x^2 + x\right)(6x - 6) = 0 \text{ per } x = 1.$$

$x = 1$ punto di flesso a tangente obliqua.



4.172. $f(t) = (e^{\lambda t} - 1)e^{-2\lambda t}$

a.
$$f(t) = e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t};$$

$$f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} + 2\lambda e^{-2\lambda t} = \lambda e^{-2\lambda t}\left(2 - e^{\lambda t}\right) \geq 0 \text{ per}$$

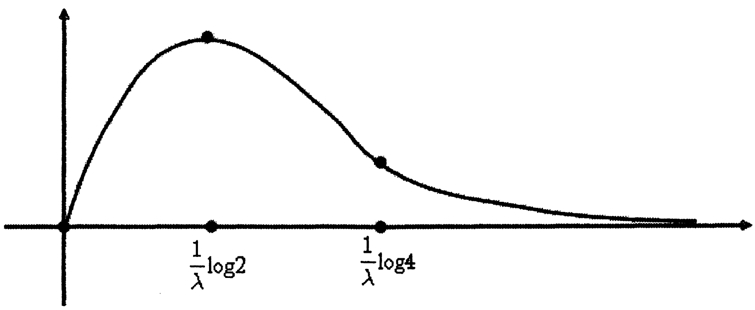
$$e^{\lambda t} \leq 2, \ t \leq \frac{1}{\lambda}\log 2$$

Per $t \geq 0$, f ha il punto di massimo in $t = \frac{1}{\lambda}\log 2$. $f\left(\frac{1}{\lambda}\log 2\right) = \frac{1}{4}$, massimo assoluto.
$f(0) = 0$ minimo relativo (e assoluto, perché $f \geq 0$).
b. $f(0) = 0$; $f'(0) = \lambda$. $f(t) = \lambda t + o(t)$ per $t \to 0$.

c. Per $t \to +\infty$, $f(t) \sim e^{-\lambda t} \to 0^+$. $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

$$f''(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} - 4\lambda^2 e^{-2\lambda t} = \lambda^2 e^{-2\lambda t}\left(e^{\lambda t} - 4\right) \geq 0 \text{ per } t \geq \frac{1}{\lambda}\log 4.$$

$t = \frac{1}{\lambda}\log 4$ punto di flesso.



4.173. $f(t) = \frac{1+t^p}{(1+t)^p}$

a.

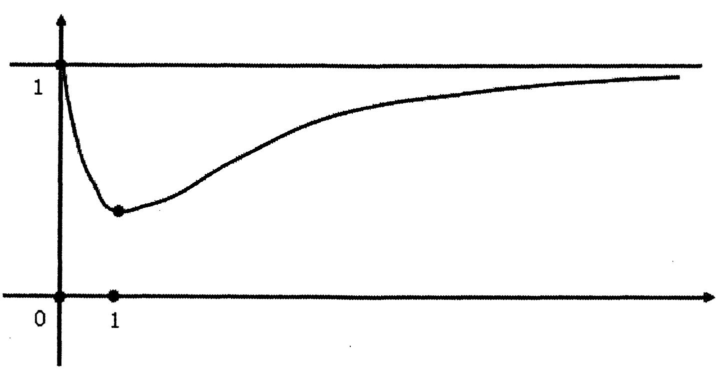
$$f'(t) = \frac{pt^{p-1}(1+t)^p - p(1+t)^{p-1}(1+t^p)}{(1+t)^{2p}} = \frac{pt^{p-1}(1+t) - p(1+t^p)}{(1+t)^{p+1}} = \frac{p(t^{p-1}-1)}{(1+t)^{p+1}}.$$

$$f'(t) \geq 0 \text{ per } t^{p-1} \geq 1,\ t \geq 1$$

(perché $p - 1 > 0$). Quindi $p = 1$ punto di minimo relativo. $f(1) = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$.
$f(0) = 1$; per $t \to +\infty$ $f(t) \to 1$. Perciò:
$t = 0$ punto di massimo relativo (e assoluto) per $t \geq 0$, massimo di f: 1;
minimo di f: $\frac{1}{2^{p-1}}$.

b. $f(0) = 1$; $f'(0) = -p$; $f(t) = 1 - pt + o(t)$ per $t \to 0$.

c. Le informazioni sono già sufficienti per un grafico qualitativo:



4.174. $f(t) = \lambda^2 t e^{1/\lambda t}$

a.
$$f'(t) = \lambda^2 e^{1/\lambda t}\left(1 - t \cdot \frac{1}{\lambda t^2}\right) = \lambda^2 e^{1/\lambda t}\left(1 - \frac{1}{\lambda t}\right) \geq 0$$

per $t \geq \frac{1}{\lambda}$. Perciò $t = \frac{1}{\lambda}$ punto di minimo relativo e assoluto, per $t \geq 0$. Minimo: $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda e$.

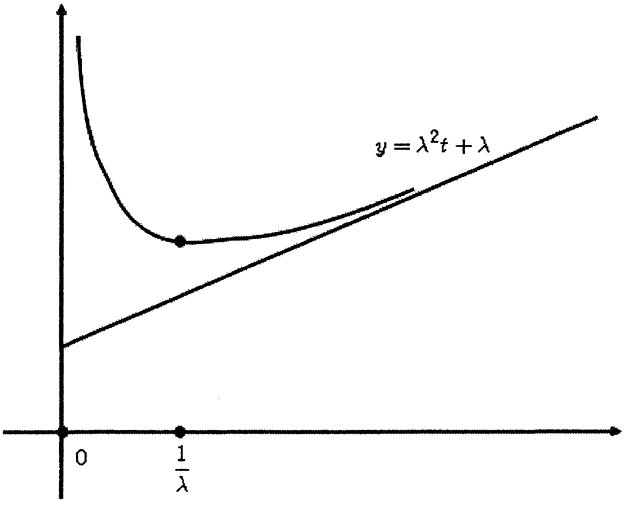
Per $t \to 0^+$, $f(t) \to +\infty$;
per $t \to +\infty$, $f(t) \sim \lambda^2 t \to +\infty$.
Perciò f non è superiormente limitata per $t \geq 0$, e non ha massimi assoluti (né relativi).

b. Per $t \to +\infty$, $f(t) \sim \lambda^2 t \to +\infty$;

$$f(t) - \lambda^2 t = \lambda^2 t\left(e^{1/\lambda t} - 1\right) \sim \lambda^2 t \cdot \frac{1}{\lambda t} = \lambda.$$

$y = \lambda^2 t + \lambda$ asintoto obliquo per $t \to +\infty$.

c. Gli elementi raccolti sono già sufficienti a tracciare un grafico qualitativo:



4.175. $f(t) = \frac{2ae^t + e^{-t}}{e^t + ae^{-t}}$

a. Poiché $a > 0$, $e^t + ae^{-t} \neq 0\, \forall t$, perciò l'insieme di definizione è $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 2a; \quad \lim_{t \to -\infty} f(t) = \frac{1}{a}.$$

Perciò la funzione ha asintoti orizzontali per $t \to \pm\infty$.

b.
$$f'(t) = \frac{(2ae^t - e^{-t})(e^t + ae^{-t}) - (e^t - ae^{-t})(2ae^t + e^{-t})}{(e^t + ae^{-t})^2} =$$

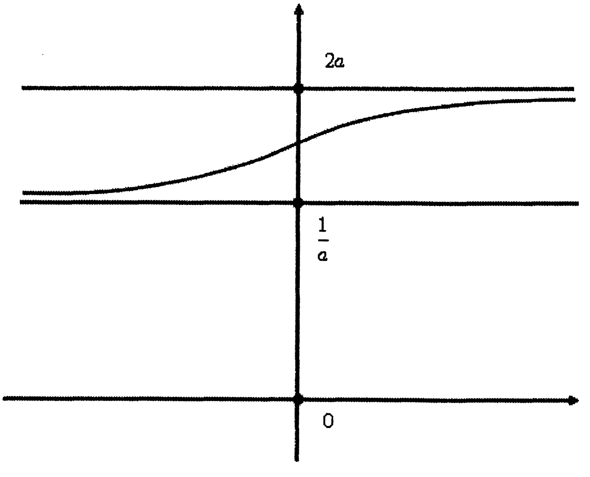
$$= \frac{e^{2t}(2a - 2a) + e^{-2t}(-a + a) + (2a^2 - 1 + 2a^2 - 1)}{(e^t + ae^{-t})^2} = \frac{2(2a^2 - 1)}{(e^t + ae^{-t})^2}.$$

Perciò $f'(t)$ ha segno costante al variare di t: se $2a^2 - 1 > 0$, $f'(t) > 0$ per ogni t; se $2a^2 - 1 < 0$, $f'(t) < 0$ per ogni t; se $2a^2 - 1 = 0$, $f'(t) \equiv 0$. Ne segue (essendo $a > 0$):

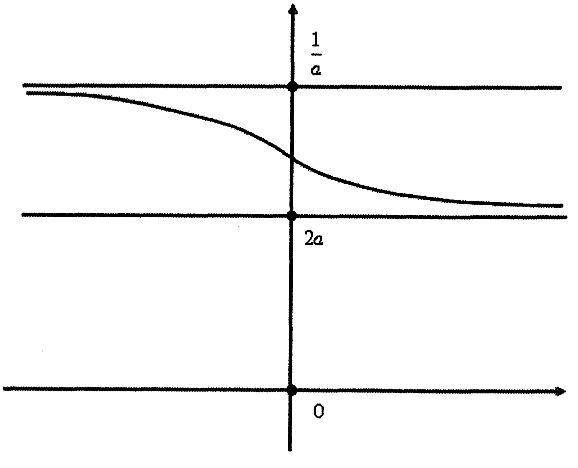
se $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$, f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$; se $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$; (in entrambi i casi, f è limitata ma non ha né max. né min.);

se $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, f è costante, $f(t) \equiv \sqrt{2}$.

c. Si può tracciare un grafico qualitativo: se $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$:



se $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$:



4.4. Teorema di De L'Hospital e formula di Taylor

4.4.A. Il Teorema di De L'Hospital

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, § 4.4.

Come mostrato nel libro di testo, il teorema di De L'Hospital, tra le altre cose, permette di dimostrare il risultato sulla "gerarchia degli infiniti" (logaritmi, potenze, esponenziali), che è già stato utilizzato nel calcolo dei limiti nel cap. 3. Ci occupiamo qui degli altri utilizzi del teorema di De L'Hospital, tipicamente il calcolo di un limite non risolubile (o meno facilmente solubile) mediante limiti notevoli e stime asintotiche, o perché coinvolge una somma di infiniti o infinitesimi in cui le parti principali si cancellano, o perché il limite è fatto per x tendente a un punto in cui le funzioni in gioco non soddisfano una stima asintotica già nota.

Come vedremo nelle sezioni successive di quato paragrafo, spesso un limite risolubile mediante il teorema di De L'Hospital è anche risolubile utilizzando gli sviluppi di Taylor. Ritorneremo su questo fatto, commentandolo e confrontando i due procedimenti, quando avremo discusso anche il secondo.

Esempi svolti

Calcolare i seguenti limiti utilizzando anche, quando è opportuno, il teorema di De L'Hospital.

Esempio 4.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x-3+3(1+x)^{2/3}}{x^2(1+x)^{1/3}}.$$

Per $x \to 0$,

$$\frac{-2x-3+3(1+x)^{2/3}}{x^2(1+x)^{1/3}} \sim \frac{-2x-3+3(1+x)^{2/3}}{x^2} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Notiamo che *questa forma di indeterminazione non è risolubile utilizzando soltanto le stime asintotiche che discendono dai limiti notevoli*. Infatti

$$-3+3(1+x)^{2/3} = 3\left[(1+x)^{2/3}-1\right] \sim 3\left[\frac{2}{3}x\right] = 2x$$

perciò a numeratore si ha il fenomeno della *cancellazione delle parti principali*:

$$\text{Numeratore} = -2x + (\text{funzione asintotica a } 2x),$$

e da questo non possiamo concludere alcuna stima asintotica sul numeratore[1].

Applicando perciò il teorema di De L'Hospital (lo applichiamo al limite dell'ultimo quoziente scritto, che è più semplice del quoziente originale), calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(-2x - 3 + 3(1+x)^{2/3}\right)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2 + 2(1+x)^{-1/3}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + (1+x)^{-1/3}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad (*)$$

L'ultimo limite si può ora calcolare mediante i limiti notevoli:

$$(1+x)^{-1/3} - 1 \sim -\frac{1}{3}x, \text{ perciò}$$

$$\frac{-1 + (1+x)^{-1/3}}{x} \sim \frac{-\frac{x}{3}}{x} = -\frac{1}{3},$$

quindi il limite cercato è $-\frac{1}{3}$.

In alternativa, avremmo potuto calcolare il limite (*) applicando una seconda volta il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3(1+x)^{4/3}}}{1} = -\frac{1}{3},$$

ritrovando ovviamente lo stesso risultato.

Esempio 4.13.

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}\right)$$

[1]Il fatto che il numeratore tenda a zero è ovvio, ma non ci basta a calcolare il limite del quoziente. Attenzione a non cadere nell'errore di scrivere che

Numeratore ~ 0, *relazione che non ha senso!*

(significherebbe che $\frac{\text{Num.}}{0} \to 1$).

$$x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to \left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{x}\right) = -1$$

Si noti che dopo l'applicazione del teorema di De L'Hospital, formalmente abbiamo ancora una forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$, che però si risolve facilmente con un passaggio puramente algebrico. Se avessimo applicato una seconda volta De L'Hospital avremmo complicato le cose invece di semplificarle.

In alternativa, la forma di indeterminazione di questo limite avrebbe potuto ricondursi a delle stime asintotiche note ricordando l'identità[2]

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{per } x > 0 \qquad (**)$$

per cui $$x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) - x\arctan\frac{1}{x} \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

dove per $x \to +\infty$ (e quindi $\frac{1}{x} \to 0$),

$$f_1(x) \sim \frac{\pi}{2}x\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{\pi}{4x} \to 0; \quad f_2(x) \sim -x \cdot \frac{1}{x} = -1,$$

e quindi la somma tende a -1, come già calcolato. Questo secondo procedimento è concettualmente più elementare, ma richiede di ricordare l'identità notevole (**); l'applicazione di De L'Hospital, pur basandosi su un teorema più sofisticato, è certamente più meccanica.

Esempio 4.14.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x\sin x + \cos x - \pi)(2x - \pi)}{\operatorname{cotg}^2 x}.$$

[2] v. libro di testo [BPS1], cap. 4, Esempio 4.3.

Il limite dà una forma di indeterminazione $[0/0]$. Possiamo fare una piccola semplificazione con la stima asintotica, per $x \to \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{(2x\sin x + \cos x - \pi)(2x - \pi)}{\operatorname{cotg}^2 x} \sim \frac{(2x\sin x + \cos x - \pi)(2x - \pi)}{\cos^2 x}$$

(in quanto $\sin^2 x \to 1$). Di quest'ultimo quoziente calcoliamo ora il limite col Teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 2x\cos x - \sin x)(2x - \pi) + 2(2x\sin x + \cos x - \pi)}{-2\sin x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2x\cos x)(2x - \pi) + 2(2x\sin x + \cos x - \pi)}{-\sin(2x)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo ancora il teorema di De L'Hospital; semplificando si trova:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(3\cos x - 2x\sin x)(2x - \pi) + 4(\sin x + 2x\cos x)}{-2\cos(2x)} = \frac{0+4}{-2\cdot(-1)} = 2.$$

Pertanto il limite cercato vale 2.

Questo è un esempio in cui l'applicazione (in questo caso ripetuta) del teorema di De L'Hospital risolve in maniera abbastanza meccanica una forma di indeterminazione che non sarebbe banale trattare con i limiti notevoli, dal momento che la variabile tende a $\pi/2$ e non a 0.

Il Teorema di De l'Hospital: precauzioni per l'uso

Prima di passare agli esercizi, facciamo qualche osservazione sui più comuni errori che si possono commettere nell'applicare questo teorema.

A. Il teorema si applica al quoziente e non al prodotto di due funzioni

Esempio 4.15.

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\log x.$$

Sappiamo già che tale limite vale 0 (v. cap.3, §3.3.B, Proposizione 3.2). Se, erroneamente, calcolassimo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\right)'(\log x)' = \lim_{x\to 0^+} 2x\cdot\frac{1}{x} = 2,$$

troveremmo un risultato falso.

Ricordiamo che il procedimento corretto è il seguente: anzitutto si riscrive

$$x^2\log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}},$$

per avere un *quoziente* che porta a una forma di indeterminazione $[\infty/\infty]$. Quindi si può applicare il teorema:

$$\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2}x^2 \to 0,$$

risultato corretto.

B. Il teorema si applica solo a forme di indeterminazione

Esempio 4.16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{1+x}.$$

Il limite vale 0, ovviamente: non c'è nessuna forma di indeterminazione. Se non ci accorgessimo di questo fatto e, meccanicamente, applicassimo il teorema, troveremmo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x))'}{(1+x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1} = 1,$$

risultato falso.

C. Se il limite di f'/g' non esiste, nulla si può dedurre sul limite di f/g.

Esempio 4.17.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin(1/x)}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Calcoliamo prima il limite con gli strumenti visti nel cap. 3.

Denominatore $\sim \sqrt{x}$; perciò:

$$f(x) \sim \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \to 0$$

(perché è il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata). Se provassimo a calcolare il limite col Teorema di De l'Hospital troveremmo:

$$\frac{(x\sin(1/x))'}{\left(\log(1+\sqrt{x})\right)'} = \frac{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}} \sim 2\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}.$$

Il primo addendo tende a zero perché prodotto di una funzione infinitesima per una limitata, il secondo addendo non ammette limite (né finito né infinito); pertanto il limite del quoziente delle derivate non esiste. Se concludessimo che anche il limite di partenza non esiste, affermeremmo una falsità: abbiamo visto che il limite è zero. Il punto delicato è che il Teorema di De l'Hospital dà una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza del limite del quoziente di due funzioni.

D. Il teorema fornisce il limite ma non la parte principale di f/g.

Esempio 4.18. Determinare la parte principale di

$$h(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

Ovviamente, è

$$\frac{x^2}{\sin x} \sim x.$$

Si osservi il seguente procedimento:

$$\frac{(x^2)'}{(\sin x)'} = \frac{2x}{\cos x} \sim 2x, \quad \text{quindi} \quad h(x) \sim 2x \quad \textit{falso!!}$$

Evidentemente la conclusione è falsa. Ciò che è scorretto non è applicare il Teorema di De l'Hospital, ma voler dedurre da esso non solo il limite ma anche la parte principale del quoziente. In altre parole:

il fatto che sia $$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

non implica che sia anche $$\frac{f'(x)}{g'(x)}\sim\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Osservazione 4.3. Si possono dimostrare i limiti notevoli col teorema di De L'Hospital? Il Teorema di De l'Hospital è uno strumento potente, che può indurre a ritenere superflua la fatica fatta in precedenza per stabilire, con metodi più elementari, i limiti notevoli che conosciamo. Ad esempio, perché dimostrare, usando disuguaglianze trigonometriche (v. libro di testo [BPS1], cap. 3, § 3.2), che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{1}$$

quando basta applicare il Teorema di De l'Hospital:

$$\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\frac{\cos x}{1}\to 1\ ?$$

Osservando le cose criticamente si vede che, per giustificare i passaggi qui sopra, occorre:

1. Sapere già che $\sin x\to 0$ per $x\to 0$ (altrimenti non c'è forma di indeterminazione e non si può applicare il teorema) e che $\cos x\to 1$ per $x\to 0$ (altrimenti non si può concludere che il limite cercato è 1). Quindi: bisogna già sapere che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue (almeno nell'origine).
2. Sapere che $(\sin x)'=\cos x$.

Ricordiamoci ora di come si fa a dimostrare che $(\sin x)'=\cos x$:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=$$

$$=\sin x\cdot\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\cdot\left(\frac{\sin h}{h}\right)\to\cos x,\ \text{per } h\to 0$$

perché $$\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)\sim\frac{-\frac{1}{2}h^2}{h}=-\frac{1}{2}h\to 0$$

e $$\left(\frac{\sin h}{h}\right) \to 1.$$

Dunque per calcolare la derivata di $\sin x$ *occorre conoscere già* il limite notevole (1): non è possibile quindi usare il teorema di De l'Hospital per *dimostrarlo*. La morale è che nell'itinerario logico che si segue in matematica ci sono certi fatti elementari che vanno dimostrati con metodi elementari; su questi fatti si fondano risultati più potenti, che però non consentono di "dimenticare" le tecniche più elementari: altrimenti si creano dei circoli viziosi nella logica del discorso.

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti utilizzando anche, quando è opportuno, il teorema di De L'Hospital.

4.176.★ $$\lim_{x\to 1}\frac{1+\log x-e^{x-1}}{(x-1)^2}$$

4.177.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

4.178.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^2\sin^2 x}$$

4.179.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^3)-\sin x}{x\sin x}$$

4.180.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin(3x)}$$

4.181.★ $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{\log^2 x}$$

4.182.★ $$\lim_{x\to \pi}\left(\frac{\log^2(1+x-\pi)}{x\sin x\cos\frac{x}{2}}\right).$$

Altri esercizi sul teorema di De L'Hospital sono riportati più avanti in questo paragrafo (§4.4.E), come esercizi da affrontare usando il teorema di De L'Hospital o gli sviluppi di Taylor-MacLaurin.

4.4.B. Richiami sul simbolo di "o piccolo"

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, §7.3-7.4.

Vogliamo ora introdurre l'argomento degli sviluppi di Taylor-MacLaurin. Preliminarmente, è utile prendere pratica con l'uso del simbolo di "o piccolo". Come abbiamo fatto nel cap. 3 per il simbolo di "asintotico", richiamiamo qui alcuni fatti che riguardano il simbolo di "o piccolo" e le sue proprietà, che saranno importanti per il corretto utilizzo di questo simbolo nel calcolo dei limiti mediante sviluppi di Taylor-MacLaurin (di cui ci occuperemo subito dopo).

Definizione. Si dice che, per $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^*$),

$$f(x) = o(g(x))$$

(che si legge "$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$") se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{2}$$

Equivalentemente si può dire che il simbolo $o(g(x))$ (per $x \to x_0$) denota *una qualunque funzione* tale che

$$\frac{o(g(x))}{g(x)} \to 0 \ \text{(per } x \to x_0\text{)}. \tag{3}$$

In particolare, si noti che il simbolo $o(1)$ (per $x \to x_0$) denota *una qualunque funzione che tende a zero* (per $x \to x_0$). La (3) si può riscrivere equivalentemente nella forma

$$o(g(x)) = g(x) \cdot o(1), \tag{4}$$

che è particolarmente utile per dimostrare le proprietà del simbolo di "o piccolo", come vedremo.

Esempi 4.19

a. $$x^2 = o(x) \quad \text{per } x \to 0;$$

b. $$\sin(x^3) = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0;$$

c. $$\sin(x^3) = o(x) \quad \text{per } x \to 0;$$

d. $$\frac{1}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \to +\infty;$$

e. $$\frac{1}{x} = o(1) \quad \text{ per } x \to +\infty.$$

Dimostrazione. Verifichiamo la definizione (2), ad esempio per (d):

$$\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x} \to 0 \text{ per } x \to +\infty.$$

Si lasciano al lettore gli altri esempi.

Intuitivamente, dire che f è o piccolo di g significa affermare che f è "infinitamente più piccola" di g, per $x \to x_0$: ad es. in *a* abbiamo due funzioni infinitesime per $x \to 0$ (x e x^2); tuttavia, per $x \to 0$, x^2 è infinitamente più piccola di x, nel senso che $x^2/x \to 0$.

Osservazione 4.4. Il simbolo $o(f)$ indica una classe di funzioni. Gli esempi *a* e *c* illustrano il fatto che il simbolo $o(x)$ denota una *classe di funzioni*, e non una funzione ben determinata: difatti, *due diverse funzioni* sono indicate come $o(x)$. Gli esempi *b* e *c* mostrano anche che una stessa funzione, in questo caso $\sin(x^3)$, può essere "o piccolo" di quantità diverse. Queste due osservazioni fanno capire che il segno di uguale scritto negli esempi precedenti va preso con una certa cautela: a rigore, infatti, non può esserci uguaglianza tra una funzione (nell'esempio *a*: x^2) e una classe di funzioni (nell'esempio *a*: $o(x)$). L'uguaglianza va letta solo da sinistra a destra: "la funzione x^2 è o piccolo di x", mentre "o piccolo di x" non è necessariamente uguale a x^2. Altrimenti da *a* e *c* seguirebbe $\sin(x^3) = x^2$, il che è falso!

La relazione tra la nozione di *o piccolo* e la nozione di *asintotico* è espressa dalla prossima:

Proposizione 4.1. *Siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}^*$). Allora, per $x \to x_0$,*

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Dimostrazione. E' una semplice applicazione delle definizioni.

Dimostriamo $\Rightarrow$.

La tesi è $f(x) = g(x) + o(g(x))$, ossia $f(x) - g(x) = o(g(x))$, ossia $(f(x) - g(x))/g(x) \to 0$. Ma

$$(f(x) - g(x))/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \to 0$$

perché per ipotesi $f(x) \sim g(x)$, ossia $f(x)/g(x) \to 1$.

Dimostriamo $\Leftarrow$.

Poiché per ipotesi $f(x) = g(x) + o(g(x))$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \to 1,$$

per definizione di "o piccolo". Dunque $f(x)/g(x) \to 1$, ovvero $f(x) \sim g(x)$. □

La proposizione precedente permette di riformulare i limiti notevoli che conosciamo mediante la nozione di "o piccolo":

Esempi 4.20. Per $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$ ossia $\sin x = x + o(x)$
2. $\arcsin x \sim x$ ossia $\arcsin x = x + o(x)$
3. $\tan x \sim x$ ossia $\tan x = x + o(x)$
4. $\arctan x \sim x$ ossia $\arctan x = x + o(x)$
5. $(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$ ossia $(1 - \cos x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
6. $\left(\sqrt{1+x} - 1\right) \sim \frac{1}{2}x$ ossia $\left(\sqrt{1+x} - 1\right) = \frac{1}{2}x + o(x)$
7. $\log(1 + x) \sim x$ ossia $\log(1 + x) = x + o(x)$
8. $e^x - 1 \sim x$ ossia $e^x - 1 = x + o(x)$
9. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ossia $(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$
(per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$)
10. $\mathrm{Sh}x \sim x$ ossia $\mathrm{Sh}x = x + o(x)$

11. $\mathrm{Ch}x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$ ossia $\mathrm{Ch}x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

12. $\mathrm{Th}x \sim x$ ossia $\mathrm{Th}x = x + o(x)$.

Osservazione 4.5. Confronto tra l'uso di sviluppi e l'uso di relazioni asintotiche. Le relazioni appena scritte mettono in luce uno dei vantaggi dell'esprimere i limiti notevoli mediante "o piccolo" invece che mediante "asintotico": l'uso di "o piccolo" permette di scrivere *uguaglianze*, e un'uguaglianza è molto più versatile di una relazione asintotica. Ad esempio, la relazione

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

si può riscrivere *equivalentemente* come:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \tag{5}$$

(che è lo sviluppo al 2° ordine della funzione $\cos x$). Al contrario, si ricordi che, come già osservato discutendo le proprietà del simbolo di asintotico[3], la relazione

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \tag{6}$$

non è equivalente a

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2. \tag{7}$$

(Si invita a rileggere ora l'osservazione citata). La conclusione è:

in una relazione asintotica non si può spostare un termine da una parte all'altra del simbolo di $\sim$ (cambiandolo di segno) come si può fare invece in una uguaglianza contenente un termine "o piccolo".

Prima di proseguire nelle applicazioni del concetto di "o piccolo" al calcolo dei limiti, occorre impratichirsi con le *proprietà formali* con cui si manipola il simbolo $o(\cdot)$.

Proposizione 4.2. *Se f, g, h sono tre funzioni e c una costante non nulla, valgono le seguenti uguaglianze (lasciando sottointeso "per $x \to x_0$" in tutte le relazioni):*

[3] v. cap. 3, § 3.3, Osservazione 3.2.

a. $-o(f) = o(f)$;
b. $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
c. $c \cdot o(f) = o(f) = o(cf)$;
d. $f \cdot o(g) = o(fg)$;
e. $o(f)^n = o(f^n)$;
f. $o(f + o(f)) = o(f)$;
g. $o(o(h)) = o(h)$;
h. *se* $f = o(g)$ *e* $g = o(h)$ *allora* $f = o(h)$;
i. se $f \sim g$ *allora* $o(f) = o(g)$;
l. se $f = o(g)$ *allora* $o(f) + o(g) = o(g)$.

Questo elenco di proprietà è ridondante: in realtà alcune di esse sono equivalenti ad altre o loro immediate conseguenze, ma si sono scritte di proposito nelle varie forme in cui si possono presentare negli esempi.

Osservazione 4.6. Le uguaglianze da a a g si possono intendere come *identità tra classi di funzioni*, ad esempio la d significa che ogni funzione del tipo $f \cdot o(g)$ è anche del tipo $o(fg)$, e viceversa. In altre parole, sono uguaglianze che possono essere sfruttate in entrambi i sensi. (Si confronti con l'Osservazione 4.4).

Esercizi

4.183. Dimostrare tutti i punti della Proposizione 4.2. Un possibile procedimento (forse non il più breve, ma che ha il pregio di permettere di dimostrare tutte le proprietà allo stesso modo) consiste nell'usare sistematicamente l'identità $o(f) = f \cdot o(1)$, tener presente che $o(1)$ denota una qualsiasi funzione che tende a zero, e applicare i teoremi sul limite della somma, del prodotto, ecc. Mostriamo ad esempio che

$$o(f + o(f)) = o(f).$$

Infatti: $$o(f + o(f)) = (f + o(f)) \cdot o(1) = (f + f \cdot o(1)) \cdot o(1) =$$

$$= f \cdot (1 + o(1))o(1) = f \cdot o(1) = o(f).$$

Nella penultima uguaglianza si è usato il fatto che $(1 + o(1))o(1) = o(1)$, che segue dai teoremi sul limite della somma e del prodotto. Lo studente è invitato a dimostrare tutti gli altri punti.

Dire se sono vere o false le seguenti relazioni, per $x \to 0$.

4.184. $2x + x^2 = o(x)$
4.185. $2x^3 = o(x)$
4.186. $2x + x^2 = o(\sqrt[3]{x})$
4.187. $xo(x) = o(x^2)$
4.188. $x^2 + 3x^4 + o(x^4) = o(x^3)$
4.189. $x^2 + 3x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$
4.190. $x^2 + 3x^4 + o(x^4) = x^2 + o(x^2)$
4.191. $o(x^2) - o(x^2) = 0$
4.192. $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$
4.193. $(x + o(x))^2 = o(x)$
4.194. $e^{-1/x^2} = o(x^{10})$
4.195. $\frac{1}{\log x} = o(x)$

Dire se sono vere o false le seguenti relazioni, per $x \to +\infty$.
4.196. $\sin x = o(x)$
4.197. $\frac{1}{1+x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4.198. $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)$
4.199. $\log^2 x = o(x)$
4.200. $1 = o(x)$
4.201. $\sin x = o(1)$
4.202. $e^{-x} = o(1)$
4.203. $\frac{1}{1+x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$
4.204. $xo\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$
4.205. $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4.206. $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Semplificare le seguenti espressioni, riscrivendole in forma più semplice, ma senza perdere informazioni. Ad esempio, per $x \to 0$, semplificare

$$x + xo(x^2) + 3x^2 + o(x^4) - 4x^5$$

significa scrivere che quest'espressione è uguale a: $x + 3x^2 + o(x^3)$.

Per $x \to 0$,
4.207. $(x + o(x))^2 =$
4.208. $x + 3x^2 + 2x^3 + o(x^2) =$
4.209. $x(2x + o(x)) =$

4.210. $x + 2x^2 + o(x^2 + 3x^3) =$
4.211. $2x + o(1) =$
4.212. $1 + 3x + o(x) + o(x^2) =$
4.213. $\left(x - 2x^2 + o(x^2)\right)^2 =$

4.4.C. Scrittura di sviluppi di Taylor-MacLaurin immediati

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, § 7.1, 7.2, 7.3.

Sviluppi di MacLaurin di funzioni elementari

I prossimi esercizi richiedono semplicemente lo studio delle formule degli sviluppi notevoli delle funzioni elementari, perciò non si riportano esempi svolti. Se non si ricordano a memoria gli sviluppi, per esercizio li si ricavino dalla definizione. E' bene comunque memorizzare almeno gli sviluppi delle seguenti funzioni elementari:
$e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x), (1+x)^\alpha, \mathrm{Sh} x, \mathrm{Ch} x.$

Osservazione 4.7. Sviluppo di una potenza a esponente reale. Tra gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari, merita un'attenzione particolare lo sviluppo della funzione:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

dove
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (*)$$

è il *coefficiente binomiale generalizzato.* Si noti che α può essere un numero non intero, mentre k è sempre un intero positivo. Se $k = 0$ si pone

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

Per ricordare la (*) si noti che a numeratore c'è il prodotto di k numeri (solitamente non interi!) a partire da α e sottraendo 1 ad ogni passo. Il calcolo dei coefficienti binomiali generalizzati richiede un po' d'attenzione, perciò presentiamo un esempio dettagliato:

Esempio 4.21. Calcoliamo lo sviluppo al 4° ordine della funzione $\sqrt{1+x}$. Si ha:

$$\sqrt{1+x} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3} x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4} x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4).$$

Esercizi su sviluppi di MacLaurin di funzioni elementari (1)

4.214. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine di e^x.

4.215. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine di $\log(1+x)$.

4.216. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 5° ordine di $\mathrm{Sh}x$.

4.217. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 6° ordine di $\cos x$.

4.218. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 7° ordine di $\cos x$.

4.219. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di $\sqrt[3]{1+x}$.

4.220. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 5° ordine di $(1+x)^{-1}$.

4.221. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di $\tan x$.

4.222. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di $\arcsin x$.

Osservazione 4.8. Sviluppi di MacLaurin di funzioni pari o dispari. Se una funzione è pari (o dispari), nel suo sviluppo di MacLaurin compaiono solo le potenze pari (rispettivamente, dispari). Questo ha una conseguenza importante sulla forma del resto secondo Peano di queste funzioni, che esemplifichiamo nel caso delle funzioni trigonometriche.

Lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di sin$x$ è:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right). \tag{*}$$

In realtà, sappiamo che il primo termine significativo dello sviluppo che compare dopo $-\frac{x^3}{6}$ è $\frac{x^5}{5!}$, che non solo è $o(x^3)$, ma addirittura $o(x^4)$. Perciò è corretto anche scrivere:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right). \tag{**}$$

Anzi, questa seconda uguaglianza contiene più informazioni della prima. Sono entrambe corrette, il che può confondere le idee (come mai ci sono due modi diversi di scrivere il resto, non equivalenti, eppure sono entrambi giusti?). Il modo corretto di pensare è: la formula (*) rappresenta lo sviluppo di sin$x$ al 3° ordine; la (**) è lo sviluppo di sin$x$ al 4° ordine: non compare un termine in x^4 perché la derivata quarta di sin$x$ nell'origine è nulla, ma il fatto che il resto sia $o(x^4)$ ci dice appunto che stiamo dando lo sviluppo al 4° ordine[4].

Nei prossimi esercizi si chiede di scrivere sviluppi di funzioni composte (molto semplici). Si riporta un solo esempio svolto per illustrare il procedimento richiesto. Esempi più complessi si tratteranno nel § 4.4.F.

Esempio 4.22. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine di e^{-x^2}.

Poiché
$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o\left(t^2\right),$$

sostituendo $t = -x^2$ si ha:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o\left(x^4\right).$$

In altre parole, si chiede qui di calcolare lo sviluppo della funzione composta a partire dalla formula nota della funzione elementare (in questo caso, e^t) e non, invece, calcolando le derivate nell'origine dalla prima alla quarta per la funzione e^{-x^2} (si noti che il primo procedimento è molto più veloce). Infine, si noti che se si

[4] Volendo fare un'analogia numerica: supponiamo che la lunghezza esatta di un oggetto sia $3.201m$; se voglio darne un'approssimazione al decimetro, dirò che è $3.2\pm0,1m$; se voglio darne un'approssimazione (più precisa) al centimetro, dirò che è $3.2\pm0.01m$. Anche se la misura non è cambiata ($3.2m$), è cambiato il grado di precisione che attribuiamo a tale misura, quindi è cambiata l'informazione.

richiede di sviluppare al 4° ordine e^{-x^2}, è il risultato finale che dev'essere uno sviluppo al 4° ordine, e non necessariamente lo sviluppo da cui si parte (in questo caso, sviluppo al 2° ordine di e^t).

Esercizi su sviluppi di MacLaurin di funzioni elementari (2)

4.223. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 6° ordine di $\sin(x^2)$.

4.224. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di $\log(1-x)$.

4.225. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 6° ordine di $\frac{1}{1+x^2}$.

4.226. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di e^{2x}.

4.227. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine di $\sqrt{1-x}$.

Sviluppi di Taylor

Vediamo ora degli esempi in cui si tratta di scrivere lo sviluppo di Taylor, con resto secondo Peano, di una funzione assegnata in un punto assegnato (diverso dall'origine), applicando la definizione, cioè calcolando le derivate successive e utilizzando la formula di Taylor.

Esempio 4.13. Scrivere *esplicitamente* lo sviluppo di Taylor al second'ordine, con resto secondo Peano, per la funzione

$$f(x) = e^{\sin x}, \text{ centrato nel punto } x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$f(x) = e^{\sin x}$, in $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Calcoliamo:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{e};$$

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x; f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3e}}{2};$$

$$f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x); f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{e}}{4};$$

Quindi, in base alla formula di Taylor al 2° ordine con resto secondo Peano:

$$f(x) = \sqrt{e} + \frac{\sqrt{3e}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{e}}{8}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right).$$

Esercizi su sviluppi di Taylor

Scrivere *esplicitamente* lo sviluppo di Taylor al second'ordine, con resto secondo Peano, per la funzione

4.228.★ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nel punto $x_0 = 1$.

4.229. $f(x) = \log(1 + x^2)$ nel punto $x_0 = 2$.

4.230. $f(x) = e^{x^2+x}$ nel punto $x_0 = 1$.

4.231. $f(x) = \arctan(x^2)$ nel punto $x_0 = 1$.

4.232.★ $f(x) = \log(\cos x)$, nel punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

4.233.★ $f(x) = x^x$ nel punto $x_0 = 1/e$.

4.4.D. Calcolo di limiti e parti principali mediante sviluppi di MacLaurin e applicazioni

Entriamo ora nel vivo del discorso sugli sviluppi. In questa sezione illustreremo l'utilizzo degli sviluppi di MacLaurin per il calcolo dei limiti e confronteremo talvolta questo procedimento con altri già visti. In tutto ciò che diremo, si tenga ben presente quanto osservato nelle sezioni precedenti riguardo alle proprietà di "o piccolo", che qui utilizzeremo senza ricordarle esplicitamente ogni volta.

Data l'utilità degli sviluppi nel calcolo dei limiti, il problema di come *scrivere* lo sviluppo di una funzione non elementare (cioè una funzione composta), con un procedimento il meno laborioso possibile, è esso stesso un problema interessante. Vari esempi e osservazioni saranno quindi dedicati a questo.

Esempi svolti

Esempio 4.23.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^3}{(x+2x^2)^2\log^3\left(1+\frac{x}{2}\right)}.$$

Il limite dà una forma di indeterminazione $[0/0]$ non risolubile con la semplice applicazione dei limiti notevoli. Potremmo affrontare l'esercizio con il teorema di De L'Hospital, ma qui ci interessa imparare una tecnica diversa, quella degli sviluppi.

Determiniamo la parte principale dell'infinitesimo a numeratore e denominatore. Osserviamo il numeratore:

$$xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^3.$$

L'obiettivo è sviluppare la funzione quanto basta per trovare il primo termine non nullo dello sviluppo, cioè la parte principale.

La conoscenza degli sviluppi delle funzioni elementari e^x e $\sin x$ mostra che lo sviluppo al prim'ordine si annulla: infatti

$$xe^{-x^2}\sim x \quad \text{mentre} \quad -\sin x\sim -x.$$

Perciò $\quad xe^{-x^2}=x+o(x), \quad -\sin x=-x+o(x)$, quindi

$$\text{Num.}=x+o(x)-x+o(x)+\frac{5}{6}x^3=o(x),$$

uguaglianza che non ha niente di sbagliato ma contiene *troppa poca informazione* per permetterci di calcolare il limite.

La prima idea può essere quindi quella di sviluppare la funzione almeno al 3° ordine (la funzione è dispari, quindi il suo sviluppo conterrà solo potenze dispari). A sua volta, per le proprietà del simbolo di "o piccolo", lo sviluppo al 3° ordine di xe^{-x^2} si ottiene moltiplicando x per lo sviluppo al 2° ordine di e^{-x^2}, che a sua volta si ottiene calcolando per $t=-x^2$ lo sviluppo al 1° ordine di e^t, ossia:

$$e^t=1+t+o(t);$$

$$e^{-x^2}=1-x^2+o(x^2);$$

$$xe^{-x^2} = x\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) = x - x^3 + o(x^3).$$

(Si osservi l'uso che abbiamo fatto delle proprietà di "o piccolo"). Sfruttando anche lo sviluppo al 3° ordine di sin$x$ abbiamo:

$$xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 =$$

$$= \left(x - x^3 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{5}{6}x^3 = o(x^3).$$

Osserviamo che si cancellano anche i termini di 3° ordine. Quindi non abbiamo ancora ottenuto la parte principale del numeratore. Dovremo svilupparlo al 5° ordine. Questo richiederà di prendere un termine significativo in più nello sviluppo sia dell'esponenziale che di sin$x$, cioè scrivere:

$$xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 =$$

$$= x\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) + \frac{5}{6}x^3 =$$

$$= x - x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5) - x + x^3 - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) =$$

$$= x^5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{120}\right) + o(x^5) \sim \frac{59}{120}x^5.$$

Veniamo ora al denominatore. Qui non ci sono fenomeni di cancellazione della parte principale, perciò non occorre scrivere sviluppi di MacLaurin per determinare la parte principale: possiamo dare semplicemente una stima asintotica di ognuno dei due fattori:

$$\left(x + 2x^2\right)^2 \sim x^2; \quad \log^3\left(1 + \frac{x}{2}\right) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^3; \text{ quindi:}$$

$$\left(x+2x^2\right)^2 \log^3\left(1+\frac{x}{2}\right) \sim x^2\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^5}{8}$$

e in definitiva: $f(x) \sim \dfrac{\frac{59}{120}x^5}{\frac{x^5}{8}} = \dfrac{59}{15}$, che è il limite cercato.

Esempio 4.24. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\log x - e^{x-1}}{(x-1)^2}.$$

Proponiamoci di risolvere la forma di indeterminazione $[0/0]$ utilizzando gli sviluppi di MacLaurin. Per prima cosa è utile eseguire il cambio di variabile $x = 1 + h$, che riporta il limite a un limite nell'origine:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\log x - e^{x-1}}{(x-1)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1+\log(1+h) - e^h}{h^2}.$$

Ora sviluppiamo come funzione di h il quoziente. La conoscenza degli sviluppi al prim'oridne di esponenziale e logartitmo ci dice subito che lo sviluppo al primo'ordine del numeratore non è significativo (fenomeno della cancellazione delle parti principali); quindi, sviluppiamo al second'ordine:

$$\frac{1+\log(1+h)-e^h}{h^2} =$$

$$= \frac{1+(h-h^2/2+o(h^2)) - (1+h+h^2/2+o(h^2))}{h^2} = \frac{-h^2+o(h^2)}{h^2} \to -1.$$

Osservazione 4.9. Confronto tra sviluppi di MacLaurin e applicazione del teorema di De l'Hospital. Per risolvere l'ultimo esercizio è stato necessario uno sviluppo *al secondo ordine* del numeratore. Nel §4.1 abbiamo risolto questo esercizio (v. Es. 4.176) mediante il Teorema di De l'Hospital, ed è stato necessario applicarlo *due volte* consecutive. Questo fatto non è casuale: in generale,

calcolare il limite di un quoziente f/g (che dà luogo ad una forma di indeterminazione $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$) *sviluppando fino all'ordine* n *numeratore e denominatore, equivale a calcolare il limite applicando* n *volte il Teorema di De l'Hospital* (ovvero calcolando n derivate di numeratore e denominatore).

Concettualmente quindi i due strumenti sono equivalenti. A seconda dei casi può risultare più comodo lo sviluppo o il Teorema di De l'Hospital. Il vantaggio del primo si ha quando le funzioni elementari coinvolte hanno sviluppi a noi già noti, per cui in realtà non "calcoliamo" niente, ma sostituiamo opportune espressioni ad altre; il vantaggio del secondo si ha invece nei casi in cui qualche sviluppo sarebbe scomodo da calcolare (se non ricorrendo direttamente alla definizione, ossia calcolando derivate), e/o quando il punto x_0 a cui la variabile tende non è 0.

Esempio 4.25. Stabilire ordine di infinitesimo e parte principale, per $x \longrightarrow 0$, della funzione:

$$f(x) = (2 + \cos 3x - 3\mathrm{Ch}x)^4 \cdot \log\left(1 + x^3\right).$$

La richiesta di determinare la parte principale significa: sviluppare la funzione fino al primo termine significativo (cioè non nullo). Il punto d'arrivo è quindi semplicemente una stima asintotica; per arrivarci, però, può darsi che non basti partire da stime asintotiche, ma sia necessario anche qualche sviluppo. Consideriamo il termine:

$$(2 + \cos 3x - 3\mathrm{Ch}x).$$

Per ottenerne la parte principale occorre svilupparlo al 2° ordine:

$$(2 + \cos 3x - 3\mathrm{Ch}x) =$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)\right) - 3\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= -6x^2 + o(x^2) \sim -6x^2.$$

Inoltre $$\log(1 + x^3) \sim x^3.$$

Dunque $$f(x) \sim \left(-6x^2\right)^4 \cdot x^3 = 6^4 x^{11}.$$

Pertanto l'ordine di infinitesimo è 11, la parte principale è $1296x^{11}$.

Osservazione 4.10. Sviluppare i vari termini in modo coerente. Si faccia attenzione, nell'esempio precedente, a questi fatti: per determinare la parte principale di

$$(2+\cos 3x-3\text{Ch}x)^4\cdot\log\left(1+x^3\right),$$

a) nel termine $(2+\cos 3x-3\text{Ch}x)$ abbiamo sviluppato $\cos 3x$ al 2° ordine, e *coerentemente* anche $\text{Ch}x$ al 2° ordine; questo ci ha fornito una stima asintotica di $(2+\cos 3x-3\text{Ch}x)$, e quindi di $(2+\cos 3x-3\text{Ch}x)^4$;

b) nel termine $\log(1+x^3)$ abbiamo fatto una stima asintotica, che in questo caso è uno sviluppo al 3° ordine di $\log(1+x^3)$ (basato sullo sviluppo al 1° ordine di $\log(1+t)$).

Si noti il contrasto:

• Quando sviluppiamo *una somma*, ogni termine va sviluppato allo stesso ordine, se vogliamo ottenere uno sviluppo coerente;

• Quando stimiamo un *prodotto*, invece, non c'è nessuna relazione a priori tra i gradi a cui occorre sviluppare i diversi fattori: il criterio è che di ogni fattore dobbiamo determinare la parte principale, cioè il primo termine non nullo dello sviluppo.

Esempio 4.26.

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine della funzione:

$$f(x)=\text{Sh}(2x)-2e^x.$$

b. In base al solo sviluppo determinato al punto *a* (e non ad altri calcoli effettuati sulla funzione), dire se la funzione presenta in $x=0$ un punto di minimo relativo, di massimo relativo, di flesso, o nessuna di queste cose. Giustificare la risposta.

a. Diversamente dagli esempi precedenti, qui non ci viene chiesto di sviluppare una funzione fino al primo termine non nullo, ma fino ad un termine prefissato (in questo caso, il 3°). Scriviamo dunque:

$$f(x)=\left(2x+\frac{(2x)^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)-2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$=-2-x^2+x^3+o\left(x^3\right).$$

b. In base allo sviluppo, $x=0$ è punto di massimo relativo. Infatti,

$$f(x)-f(0)\sim\ -x^2\leq 0$$

in un intorno di $x=0$. Si osservi il ragionamento con cui è stata ottenuta la conclusione. Si noti anche che per svolgere il punto b non era necessaria tutta l'informazione ricavata al punto a: sarebbe bastato uno sviluppo al 2° ordine.

Esempio 4.27. Sia

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f fino al primo termine non nullo.
b. Utilizzando questo risultato, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

a. La funzione $\sin x$ è dispari, $\frac{\sin x}{x}$ è pari, come pure è pari $\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$, quindi lo sviluppo di f conterrà solo potenze pari. I termini di ordine zero si cancellano ($\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$, e $\cos(0) = 1$), quindi dobbiamo sviluppare all'ordine 2, oppure 4, oppure 6...

Il modo naturale di procedere è: provare a sviluppare all'ordine 2; se non si trova un termine significativo si sviluppa all'ordine 4; e così via.

Sviluppare $\frac{\sin x}{x}$ all'ordine 2 vuol dire sviluppare $\sin x$ all'ordine 3:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = o(x^2)$$

e non abbiamo trovato la parte principale. Sviluppiamo allora al 4° ordine (quindi $\cos x$ al 4° ordine e $\sin x$ al 5° ordine, in modo che anche $\frac{\sin x}{x}$ sia sviluppato al 4° ordine):

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x} +$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{9 \cdot 4!} + o(x^4)\right) =$$

$$= x^4\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{9 \cdot 4!}\right) + o(x^4) = \frac{x^4}{4!}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + o(x^4) = \frac{x^4}{270} + o(x^4).$$

b. Perciò $$f(x) \sim \frac{x^4}{270} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4} = \frac{1}{270}.$$

Si osservi che per calcolare il limite al punto *b* non siamo ripartiti dalla forma analitica della funzione f, ma solo dalla sua stima asintotica calcolata al punto *a*.

Osservazione 4.11. (Catene di uguaglianze con "perdita di informazione"). Consideriamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{32} + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x).$$

La prima uguaglianza è lo sviluppo al terz'ordine di $f(x) = \sqrt{1+x}$; le altre uguaglianze sono semplificazioni successive di questo sviluppo: ad esempio, nella seconda si pone

$$\frac{x^3}{32} + o(x^3) = o(x^2).$$

Questo è certamente lecito, ma d'altra parte porta ad una *perdita di informazione*: se immaginiamo di sapere solo che

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

non c'è modo di "ricostruire" l'informazione ulteriore che il termine $o(x^2)$ in realtà è del tipo $\frac{x^3}{32} + o(x^3)$. Questo fatto è legato all'osservazione, già fatta, che ogni sviluppo è un'uguaglianza che va letta solo "da sinistra a destra". Nel calcolo dei limiti capita spesso che per determinare la parte principale di un infinitesimo che, ad esempio, è somma di più addendi, occorra sviluppare i singoli addendi ed eseguire le dovute semplificazioni fino a mettere in evidenza la parte principale dell'infinitesimo. Nel far ciò, se si sviluppa qualcuno degli addendi a un ordine troppo basso, può capitare di perdere informazioni fino a non saper più determinare la parte principale. In questo caso occorre ritornare sui propri passi sviluppando ulteriormente le funzioni.

Si consideri la seguente analogia. Il numero e è irrazionale, dunque è rappresentato da un allineamento decimale illimitato (ma non periodico). Per approssimare e mediante un numero razionale, possiamo scrivere le prime cifre decimali, ad esempio:

$$e = 2,7182\ldots,$$

che significa che e è uguale a $2,7182$ più una quantità inferiore a $1/10.000$.

Si noti l'analogia tra sviluppo di una funzione all'ordine n e approssimazione di un numero irrazionale con le prime n cifre decimali:

funzione (non polinomiale)	$\leftrightarrow$	numero irrazionale
polinomio approssimante di grado n	$\leftrightarrow$	numero razionale formato con le prime n cifre decimali
termine $o(x^n)$	$\leftrightarrow$	errore inferiore a $1/10^n$

Se non ci occorrono 4 cifre decimali, possiamo scrivere ad esempio

$$e = 2,718\ldots$$

che significa che e è uguale a $2,718$ più una quantità inferiore a $1/1.000$. Ora è chiaro che da questa sola informazione non possiamo più ricostruire che la quarta cifra decimale è 2: nella catena di uguaglianze

$$e = 2,7182\ldots = 2,718\ldots$$

abbiamo progressivamente perso informazioni. Anche queste sono dunque uguaglianze che vanno lette solo da sinistra a destra.

Esercizi

4.234.★ Sia

$$f(x) = \log(1 + 2x^2) + 4(\cos x - 1).$$

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f fino al primo termine non nullo.
b. Utilizzando questo risultato, calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + f(x)} - 1}{x^4}.$$

4.235.★ Sia

$$f(x) = \frac{\log(1 + x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{1 + x}}.$$

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di f fino al primo termine non nullo.
b. Utilizzando questo risultato, calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|f(x)|}}{x}.$$

4.236.★
a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 2° ordine della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + x} - \mathrm{Ch}\left(\sqrt{6x}\right).$$

b. In base al solo sviluppo determinato al punto a (e non ad altri calcoli effettuati sulla funzione), dire se la funzione presenta in $x = 0$ un punto di minimo relativo, di massimo relativo, di flesso, o nessuna di queste cose. Giustificare la risposta.

4.237.★
a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine della funzione:

$$f(x) = \log(1 - x^2) - 2\cos x.$$

b. In base al solo sviluppo determinato al punto a (e non ad altri calcoli effettuati sulla funzione), dire se la funzione presenta in $x = 0$ un punto di minimo relativo, di massimo relativo, di flesso, o nessuna di queste cose. Giustificare la risposta.

4.238. Sia

$$f(x) = e^{-x}(x+1).$$

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine per f.

b. Utilizzando esclusivamente lo sviluppo trovato al punto *a*, dire se il punto $x = 0$ è eventualmente un punto di massimo o di minimo o di flesso.

4.239.★

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine della funzione:

$$f(x) = e^x - e^{-x^2} - \sin x.$$

b. In base al solo sviluppo determinato al punto *a* (e non ad altri calcoli effettuati sulla funzione), dire se la funzione presenta in $x = 0$ un punto di minimo relativo, di massimo relativo, di flesso, o nessuna di queste cose. Giustificare la risposta.

4.240. Scrivere una funzione non polinomiale il cui sviluppo di MacLaurin al terz'ordine è

$$2 - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3).$$

Dire poi se questa funzione ha massimo o minimo in 0.

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di $f(x)$ con resto secondo Peano, dell'ordine indicato.

4.241. $f(x) = xe^{x^2} - x^2\log(1+x)$, al 4° ordine

4.242. $f(x) = xe^{x^2} - 2\sin x$, al 4° ordine

4.243. $f(x) = \log(1+x^2) + 2\cos x$, al 4° ordine

4.244. $f(x) = e^{x^2} - \cos x$, al 4° ordine

4.245. $f(x) = \log(1+2x) - 2\sin x$, al 4° ordine

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine della seguente funzione. Quindi, in base alle sole informazioni contenute nello sviluppo appena scritto, dire se il punto $x = 0$*:*

- ☐ *non è un punto stazionario;*
- ☐ *è un punto stazionario, di massimo relativo;*
- ☐ *è un punto stazionario, di minimo relativo;*
- ☐ *è un punto stazionario, di flesso ascendente;*
- ☐ *è un punto stazionario, di flesso discendente,*

giustificando la risposta data.

4.246.★ $f(x) = 2x\sin x - \mathrm{Ch}2x$

4.247.★ $f(x) = 2xe^{x^2} - \sin 2x$

4.248. $f(x) = \log^2(1+x) + 2\cos x$

4.249.★ $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} - e^{2x}$

4.250. $f(x) = 2\mathrm{Ch}x - \sin^2 x$

4.4.E. Calcolo di limiti utilizzando utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale

Nei prossimi esempi ed esercizi, di riepilogo, si devono calcolare limiti che, per qualche motivo, richiedono (o suggeriscono) l'utilizzo degli strumenti del calcolo differenziale, cioè il teorema di De L'Hospital e/o gli sviluppi di MacLaurin. A loro volta, la scrittura di questi sviluppi richiede le varie tecniche che abbiamo illustrato in precedenza (ad esempio, le proprietà del simbolo di "o piccolo"). Nell'affrontare questi esercizi, si cerchi di utilizzare i vari metodi appresi fin qui (dai limiti notevoli e le stime asintotiche agli strumenti del calcolo differenziale), scegliendo lo strumento più adatto e la via più semplice non solo in ciascun esercizio, ma addirittura in ciascun passaggio, facendo uso di osservazione e spirito critico, piuttosto che di schemi meccanici.

Esempi svolti

Esempio 4.28.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\log^2(1+\log x)}$$

Si tratta di una forma di indeterminazione $[0/0]$. Poiché $x \to 1$ gli sviluppi di MacLaurin non sono indicati (per applicarli, dovremmo prima eseguire un cambio di variabile $x = 1 + h$ e studiare il limite per $h \to 0$). Sul numeratore non è immediato neppure scrivere una stima asintotica in base ai limiti notevoli (di nuovo, si potrebbe fare pur di eseguire prima il cambio di variabile $x = 1 + h$). E' quindi naturale applicare il teorema di De L'Hospital. Osserviamo che il denominatore ha l'aspetto un po' complicato, per cui prima di applicare De L'Hospital e calcolarne la derivata, è opportuno farne una stima asintotica. Per $x \to 1, \log x \to 0$ perciò

$$\log(1+\log x) \sim \log x \sim (x-1), \text{ perciò}$$

$$\text{denominatore} \sim (x-1)^2, \text{ e:}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\log^2(1+\log x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

che calcoliamo ora con De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3x^{2/3}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{2}{9x^{5/3}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2\frac{1}{3x^{2/3}}\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2} = -\frac{\pi}{6},$$

che quindi è il limite cercato.

A titolo di confronto, risolviamo lo stesso esercizio eseguendo il cambio di variabile $x = 1 + h$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+h}-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+h)\right)}{h^2}.$$

Ora osserviamo che

$$\sqrt[3]{1+h}-1\sim\frac{1}{3}h$$

mentre utilizzando un'identità trigonometrica ci riconduciamo anche per il secondo fattore a un limite notevole:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+h)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}h\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right)\sim-\frac{\pi}{2}h,$$

perciò

$$f(h)\sim\frac{\frac{1}{3}h\cdot\left(-\frac{\pi}{2}h\right)}{h^2}=-\frac{\pi}{6}.$$

Questo secondo procedimento è concettualmente più elementare e porta anche a calcoli semplici, ma forse richiede un po' di inventiva; il primo procedimento è più meccanico. Si noti, in entrambi i casi, l'importanza di eseguire la prima stima asintotica per semplificare l'aspetto del denominatore.

Esempio 4.29.

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x-\log(1+x))x^\alpha$$

(al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$).

Se sviluppiamo al prim'ordine la quantità tra parentesi, otteniamo

$$\sin x-\log(1+x)=(x+o(x))-(x+o(x))=o(x),$$

e quindi non riusciamo a determinare la parte principale della funzione. (Si noti che nello sviluppo scritto non c'è niente di sbagliato: semplicemente, ci sono *troppo poche informazioni*). Occorre quindi sviluppare almeno al second'ordine:

$$(\sin x-\log(1+x))=x+o(x^2)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}.$$

(Notare che abbiamo scritto $\sin x = x + o(x^2)$: si ricordi l'Osservazione 4.8 sullo sviluppo di $\sin x$ a un ordine pari). Quindi

$$f(x) \sim \frac{x^{2+\alpha}}{2} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > -2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = -2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -2. \end{cases}$$

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti utilizzando opportunamente, se occorre, il Teorema di De L'Hospital o gli sviluppi di MacLaurin.

4.251.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 2\cos x + 1}{x^2 \log(1 + 3x^2)}$$

4.252.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^{(x+2)} - 9}{4x}$$

4.253.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x}{\sqrt[3]{x^2}\left(e^{\sqrt[3]{x}} - 1\right)}$$

4.254.★ $$\lim_{x\to 1} \frac{(e^x - e)^2}{(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)}$$

4.255.★ $$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x + \cos(6x))^2}{(6x - \pi)\sin(6x)}$$

4.256.★ $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{3}{\log x}\right)$$

4.257.★ $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos 2x - x + 2x^3}{x^2 \log(1 + 4x^3)}$$

4.258.★ $$\lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\left(e^{x^2} - \cos x\right)}{x\left(\sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}\right)} \right\}$$

4.259.★ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\pi-2\arctan(x^3))}{(e^{5/x^2}-1)}$$

4.260.★ $$\lim_{x\to1}\left(\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cdot\tan(\pi x)}\right)$$

4.261.★ $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}-e^{-x/2}\right)\frac{1}{\mathrm{Ch}x-1}$$

4.262.★ $$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}-e^{x^2}\right)\frac{1}{x\sin x}\right]$$

4.263.★ $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{Sh}x-x\mathrm{Ch}x}{\log^2(1+2x)-4x^2}$$

4.264.★ $$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{x^2}+e^2(1-x^2)}{\left[\log\left(x^2-3\sqrt{2}x+5\right)\right]^2}$$

4.265.★ $$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\tan(\pi x)}{e^x\log^2 x}$$

4.266.★ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{1/x^2}-\cos\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}\right)}{\sin^2(1/x)}$$

4.267.★ $$\lim_{x\to0}\frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sin 2x}{x\sin x}$$

4.268.★ $$\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-e^{x^2}}{x\sin(x^3)}$$

4.269.★ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x+\frac{1}{2}\right)$$

4.270.★ $$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{ex}} - \log\left(e+\frac{1}{x}\right)\right)$$

4.271. $$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^2\sin(x^2)}$$

4.272. $$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sin\pi x)}{\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)^2}$$

4.273. $$\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x+1-e^{x^2}}{x^2\sin^2 x}$$

4.274. $$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+\log(1-x^2)}{x^2(2x+x^2)^2}$$

4.275. $$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x-1\right)$$

4.276. $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi x+2}{2x+1}\right)$$

4.277. $$\lim_{x\to1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(x-1)}{\sin^2(\pi x)}$$

4.278.★ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{2^{x^2}}$$

4.279. $$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sin(x-2)}$$

4.280. $$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\tan(\pi x)}{e^x\log^2 x}$$

4.281. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{\tan^2 2x}$$

4.282. $$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

4.283.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-\sin^2 x}{\log^2(1+2x^2)}$$

4.284.★ $$\lim_{x\to 1}\frac{\log^2 x\cos(\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}$$

4.285.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e^{-x})}{x\log(1+2x)}$$

4.286.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right)}{\sin^2 2x\cdot\sin(x^2)}$$

4.287. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x-x)}{x\log(1+3x)}$$

4.288. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\mathrm{Ch}x-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2(e^{2x^2}-1)}$$

4.289.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\mathrm{cotg}x-\frac{1}{x}\right)$$

4.290. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{(\sin^2 x)\sin(x^2)}$$

4.291.★ $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x}{x\sin x}$$

4.292. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-\mathrm{Ch}x}{(\tan^2 x)\tan(x^2)}$$

4.293. $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\sin x}-e^x\right)x^\alpha$ (al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$).

4.294.★ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ch}x-\mathrm{Th}(1/x)}{x^{3/2}}.$$

4.295.★ $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}e^{1/x}\right).$$

4.177, 4.178, 4.180. Svolgere di nuovo gli esercizi 4.177, 4.178, 4.180 (assegnati in precedenza come esercizi sul teorema di De L'Hospital), utilizzando ora gli sviluppi di MacLaurin. Si riportano i testi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^2\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin(3x)}$$

Esercizi vari su sviluppi di Taylor-MacLaurin e teorema di De L'Hospital

4.296.★ Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$f(x)=2-x^2+3x^4+o\left(x^4\right) \text{ per } x\to 0.$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2+x\sin x}{x^4}.$$

4.297. Sia $f(x)$ una funzione tale che

$$f(x)=-1+2x^2-3x^4+o\left(x^4\right) \text{ per } x\to 0.$$

Calcolare $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1-x\sin 2x}{x^4}.$$

4.298.★ Sia

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

(prolungata per continuità in $x=0$ ponendo $f(0)=1$).

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine per f (sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di $\sin x$).

b. Calcolare $f'(x)$ (dalla definizione di f, non dallo sviluppo!).

c. Stabilire se f' è continua in $x=0$, giustificando il procedimento seguito.

4.299. Sia

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$$

(prolungata per continuità in $x=0$ ponendo $f(0)=1$).

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine per f (sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di e^x).

b. Calcolare $f'(x)$ (dalla definizione di f, non dallo sviluppo!).

c. Stabilire se f' è continua in $x=0$, giustificando il procedimento seguito.

4.300. Sia

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sh}x}{x}$$

(prolungata per continuità in $x=0$ ponendo $f(0)=1$).

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 4° ordine per f (sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di $\mathrm{Sh}x$).

b. Calcolare $f'(x)$ (dalla definizione di f, non dallo sviluppo!).

c. Stabilire se f' è continua in $x=0$, giustificando il procedimento seguito.

4.301. Sia

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{x}$$

(prolungata per continuità in $x=0$ ponendo $f(0)=1$).

a. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine per f (sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$).
b. Calcolare $f'(x)$ (dalla definizione di f, non dallo sviluppo!).
c. Stabilire se f' è continua in $x = 0$, giustificando il procedimento seguito.

4.4.F. Sviluppo di MacLaurin di una funzione composta

Abbiamo lasciato come ultimo argomento la discussione del caso più delicato di calcolo di uno sviluppo di MacLaurin, che può intervenire nel calcolo di un limite: quello in cui occorre sviluppare la funzione composta di due funzioni trascendenti elementari, come

$$e^{\sin x}, \log\cos x, \cos(e^x - 1), \text{ ecc.}$$

Illustriamo il problema coi seguenti

Esempi svolti

Esempio 4.14. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al 3° ordine per la funzione

$$f(x) = e^{\sin x}.$$

Ci sono due modi di procedere. Il primo consiste nell'*applicare la definizione* di sviluppo di MacLaurin, ossia calcolare le derivate successive di $e^{\sin x}$: questo è il procedimento concettualmente più semplice, anche se i calcoli effettivi possono diventare laboriosi (la derivata n-esima di una funzione composta può avere un'espressione molto complicata).

Il secondo metodo consiste nel "comporre" opportunamente gli sviluppi di MacLaurin (già noti) delle due funzioni elementari (in questo caso, e^x e $\sin x$). Questo metodo è più delicato (meno meccanico) ma, se usato in modo accorto, consente di ridurre al minimo i *calcoli*, a favore del *ragionamento*. Perciò è senz'altro il metodo più istruttivo, e applicheremo questo.

Cominciamo a scrivere lo sviluppo di e^t con $t = \sin x$:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3).$$

(Abbiamo sfruttato il fatto che $\sin x \sim x$, perciò $o(\sin^3 x) = o(x^3)$). Ora sostituiamo a $\sin x$ il suo sviluppo al terz'ordine

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

badando a svolgere solo i calcoli effettivamente necessari: è inutile scrivere quantità che successivamente verranno riassorbite nel resto $o(x^3)$:

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Nel secondo passaggio non si sono sviluppati "algebricamente" il quadrato e il cubo dello sviluppo si $\sin x$, ma si sono scritte solo le potenze di grado ≤ 3. Si osservi che quello ottenuto è effettivamente lo sviluppo *al terz'ordine* di $e^{\sin x}$, anche se non compare un termine in x^3 (ovvero il suo coefficiente è nullo). Lo sviluppo al second'ordine della stessa funzione è:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

(che non è la stessa cosa!).

Ricordiamo la relazione tra il coefficiente di x^n nello sviluppo di MacLaurin e la derivata n-esima della funzione:

$$f^{(n)}(0) = c_n \cdot n!$$

Perciò lo sviluppo trovato ci dice che le derivate di ordine $1, 2, 3$ di $e^{\sin x}$ valgono rispettivamente $1, 1, 0$. Come controllo, lo studente calcoli direttamente queste derivate per la funzione $e^{\sin x}$. Si avrà anche un confronto sulla laboriosità dei due metodi.

Proseguiamo su questo esempio, che ha lo scopo di illustrare il metodo generale con cui si determina lo sviluppo di MacLaurin di una funzione composta. Se volessimo calcolare lo *sviluppo al quinto ordine* della stessa funzione, come dovremmo procedere? Anzitutto scriviamo:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3!}\sin^3 x + \frac{1}{4!}\sin^4 x + \frac{1}{5!}\sin^5 x + o(x^5).$$

Quindi sostituiamo a $\sin x$ il suo sviluppo al quinto ordine, che è:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

Si ha così (tralasciando direttamente i termini di ordine troppo alto):

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \tag{*}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + \frac{1}{4!}(x + o(x^2))^4 + \frac{1}{5!}(x + o(x))^5 + o(x^5) =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \frac{1}{4!}(x^4 + o(x^5)) + \frac{1}{5!}(x^5 + o(x^5)) =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^4\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) + x^5\left(\frac{2}{5!} - \frac{1}{12}\right) + o(x^5).$$

Si osservi attentamente il passaggio (*): alla funzione $\sin x$ si è sostituito il suo sviluppo a un ordine diverso in ogni parentesi, in modo tale che, sviluppando le potenze di questi sviluppi, si ottenesse sempre uno sviluppo al quint'ordine (e non di più). I termini $o(x^n)$ sono fondamentali per tenere traccia dell'ordine di grandezza del resto, e controllare quindi di aver considerato abbastanza termini. Ad esempio:

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) + \text{altri termini che sono } o(x^5).$$

Esempio 4.15.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)^{1/x^2}.$$

E' una forma di indeterminazione del tipo $[1^\infty]$. Come di consueto, riscriviamo f^g nella forma $e^{g\log f}$:

$$\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)^{1/x^2}=\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)\right).$$

Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1,

$$\frac{1}{x^2}\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)\sim\frac{1}{x^2}\left(e^{\sin x}-\log(1+x)-1\right):=\frac{h(x)}{x^2}.$$

Si tratta ora di determinare la parte principale della funzione (infinitesima) $h(x)$. Poiché

$$\log(1+x)\sim x \quad \text{e} \quad \left(e^{\sin x}-1\right)\sim \sin x\sim x,$$

si vede subito che uno sviluppo al prim'ordine non è sufficiente a determinare la parte principale di $h(x)$. Sfruttando allora lo sviluppo della funzione $e^{\sin x}$, calcolato nell'esempio precedente, e lo sviluppo di MacLaurin di $\log(1+x)$, possiamo scrivere:

$$h(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1=$$

$$=x^2+o(x^2)\sim x^2.$$

Pertanto
$$\frac{1}{x^2}\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)\to 1$$

e
$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)\right)\to e.$$

Esempio 4.16. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al quart'ordine della funzione

$$f(x)=e^{x+x^2}.$$

Procediamo come nell'Esempio 4.14. Qui le cose sono più semplici perché la funzione più interna $(x+x^2)$ è già un polinomio, quindi coincide con il suo sviluppo (a qualsiasi ordine!).

$$e^{x+x^2} = 1 + \left(x + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x + x^2\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x + x^2\right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(x + x^2\right)^4 + o\Big(\left(x + x^2\right)^4\Big) =$$

$$= 1 + \left(x + x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x^3 + x^4\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 + 3x^4 + o(x^4)\right) +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) =$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + o(x^4).$$

In alternativa, si sarebbe potuto procedere al calcolo delle derivate:

$$f(x) = e^{x+x^2}; \quad f'(x) = e^{x+x^2}(1 + 2x); \quad f''(x) = e^{x+x^2}\left(3 + 4x + 4x^2\right);$$

$$f^{(3)}(x) = e^{x+x^2}\left(7 + 18x + 12x^2 + 8x^3\right);$$

$$f^{(4)}(x) = e^{x+x^2}\left(25 + 56x + 72x^2 + 32x^3 + 16x^4\right).$$

Valutando in $x = 0$ queste derivate e calcolando quindi i coefficienti $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, si ritrova lo sviluppo scritto sopra. Come si vede, anche in casi abbastanza semplici il calcolo dello sviluppo di MacLaurin di una funzione composta mediante la definizione risulta piuttosto laborioso.

Esercizi

4.302.★
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\text{Sh}x) + \text{Ch}(\text{sin}x) - 2}{x^\alpha}$$
(al variare del parametro reale α).

4.303.★ Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al terz'ordine di
$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2}$$
sfruttando lo sviluppo notevole della funzione $\frac{1}{1-t}$.

4.304.★ Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al quart'ordine di $\log(\text{cos}x)$.

4.305.★ Determinare la parte principale, per $x \to 0$, della funzione $\text{Sh}(\text{sin}x) - x$. Calcolare poi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Sh}(\text{sin}x) - x}{x^4 \text{sin}x}.$$

4.306.★ Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\text{cos}(e^x - 1) + \sin(x^2 + x^3) - 2}{x^\alpha}$$
al variare del parametro reale α.

4.179. Svolgere nuovamente l'esercizio 4.179 (che è stato proposto come esercizio sul teorema di De L'Hospital), utilizzando ora la tecnica degli sviluppi di funzioni composte:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x + x^3) - \text{sin}x}{x\text{sin}x}.$$

Soluzioni § 4.4.

4.176.
$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\log x - e^{x-1}}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applicando il teorema di De L'Hospital, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - e^{x-1}}{2(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Possiamo applicare una seconda volta il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2} - e^{x-1}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Questo è il limite cercato.

4.177.
$$\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} \sim \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applicando ora il teorema di De L'Hospital, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

quindi il limite cercato è $-\frac{1}{3}$.

4.178.
$$\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^2\sin^2 x} \sim \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^4} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applicando ora il teorema di De L'Hospital, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x - 2\sin x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{4x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applicando ancora il teorema di De L'Hospital, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{12x} = -\frac{1}{12}.$$

Quindi il limite cercato è $-\frac{1}{12}$.

4.179.
$$\frac{\log(1+x+x^3) - \sin x}{x\sin x} \sim \frac{\log(1+x+x^3) - \sin x}{x^2} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1+3x^2}{1+x+x^3}-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{6x(1+x+x^3)-(1+3x^2)^2}{(1+x+x^3)^2}+\sin x}{2}=-\frac{1}{2}$$

e il limite cercato è $-\frac{1}{2}$.

4.180. $$\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin(3x)}\sim\frac{e^x-1+\log(1-x)}{3x^3}\to\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\frac{1}{x-1}}{9x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{(x-1)^2}}{18x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\frac{2}{(x-1)^3}}{18}=-\frac{1}{18},$$

che è il limite cercato.

4.181. $$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{\log^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{\log^2 x}\sim\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{(x-1)^2}.$$

Calcoliamo il limite dell'ultimo quoziente scritto mediante il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to1}\frac{\pi\cos(\pi x)(x^3+x^2+x-3)+\sin(\pi x)(3x^2+2x+1)}{2(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Ancora con De L'Hospital abbiamo:

$$\lim_{x\to1}\frac{-\pi^2\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)+2\pi\cos(\pi x)(3x^2+2x+1)+\sin(\pi x)(6x+2)}{2}=$$

$$= \frac{0 - 2\pi \cdot 6 + 0}{2} = -6\pi,$$

che è il limite cercato.

Osserviamo che il limite era risolubile anche con strumenti più elementari. Notando che il polinomio $(x^3 + x^2 + x - 3)$ si annulla per $x = 1$, lo si può decomporre col teorema di Ruffini:

$$\left(x^3 + x^2 + x - 3\right) = (x - 1)\left(x^2 + 2x + 3\right).$$

Una seconda osservazione è trigonometrica. Per sfruttare la stima asintotica di $\sin(\pi x)$ dovremmo far comparire come argomento $(x - 1)$ che è infinitesimo. D'altro canto:

$$\sin(\pi(x - 1)) = \sin(\pi x - \pi) = -\sin(\pi x),$$

perciò $$\sin(\pi x) = -\sin(\pi(x - 1)) \sim -\pi(x - 1) \text{ per } x \to 1.$$

Usando di questi due fatti abbiamo (sfruttando la prima stima asintotica fatta nel primo svolgimento):

$$\frac{\sin(\pi x)(x^3 + x^2 + x - 3)}{(x - 1)^2} = \frac{\sin(\pi x)(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)^2} \sim$$

$$\sim \frac{6\sin(\pi x)}{(x - 1)} \sim \frac{-6\pi(x - 1)}{(x - 1)} = -6\pi.$$

4.182. $$f(x) \sim \frac{(x - \pi)^2}{\pi \sin x \cos\frac{x}{2}}.$$

Calcoliamo il limite dell'ultima funzione scritta mediante il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{2(x - \pi)}{\pi\left(\cos x \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \sin\frac{x}{2}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

applichiamo di nuovo il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{2}{\pi\left(-\sin x \cos\frac{x}{2} - \cos x \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin x \cos\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{0 + 1 + 0} = \frac{2}{\pi}.$$

Perciò il limite cercato vale $\frac{2}{\pi}$.

4.183.
a. Tesi: $-o(f) = o(f)$, ossia $-fo(1) = fo(1)$, cioè $-o(1) = o(1)$.
Se una funzione tende a zero, anche la sua opposta tende a zero, perciò è vera.
b. Tesi: $o(f) \pm o(f) = o(f)$, ossia $fo(1) \pm fo(1) = fo(1)$, cioè
$o(1) \pm o(1) = o(1)$

La somma o differenza di funzioni che tendono a zero tende a zero, perciò è vera.

c. Tesi: $c \cdot o(f) = o(f) = o(cf)$, ossia $cfo(1) = fo(1) = cfo(1)$, cioè $co(1) = o(1)$.

Il prodotto di una funzione infinitesima per una costante è infinitesima, quindi è vero.

d. Tesi: $f \cdot o(g) = o(fg)$, cioè $fg \cdot o(1) = fg \cdot o(1)$, ovvio.

e. $o(f)^n = o(f^n)$, cioè $(fo(1))^n = f^n o(1)$, cioè $(o(1))^n = o(1)$.

La potenza n-esima di una funzione infinitesima è infinitesima. Quindi è vero.

f. Già dimostrata.

g. Tesi: $o(o(h)) = o(h)$, cioè $o(ho(1)) = ho(1)$, cioè $ho(1)o(1) = ho(1)$, cioè $o(1)o(1) = o(1)$.

Il prodotto di due funzioni infinitesime è infinitesimo, perciò è vero.

h. *se* $f = o(g)$ *e* $g = o(h)$ allora $f = o(h)$;

Infatti: se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ allora

$f = g \cdot o(1)$ e $g = ho(1)$, quindi (poiché il prodotto di due funzioni infinitesime è infinitesimo)

$$f = ho(1) \cdot o(1) = h \cdot o(1) = o(h).$$

i. se $f \sim g$ allora $o(f) = o(g)$, cioè $fo(1) = go(1)$.

Poiché $f \sim g$, si ha $f = g \cdot \omega$, con $\omega \to 1$. Dunque

$$fo(1) = g\omega \cdot o(1) = g \cdot o(1)$$

perché $\omega \cdot o(1) = o(1)$ (il prodotto di una funzione infinitesima e una funzione tendente a 1 è infinitesimo).

l. *se* $f = o(g)$ allora $o(f) + o(g) = o(g)$, cioè $fo(1) + go(1) = go(1)$.

Poiché $f = o(g)$, $f = go(1)$ e

$$fo(1) + go(1) = go(1)o(1) + go(1) = g[o(1)o(1) + o(1)] = go(1)$$

perché $o(1)o(1) + o(1) = o(1)$ (il prodotto di due funzioni infinitesime sommate a una funzione infinitesima è infinitesimo).

4.184. Falso
4.185. Vero
4.186. Vero
4.187. Vero
4.188. Falso
4.189. Vero
4.190. Vero
4.191. Falso
4.192. Vero
4.193. Vero
4.194. Vero
4.195. Falso
4.196. Vero
4.197. Falso
4.198. Vero
4.199. Vero
4.200. Vero
4.201. Falso
4.202. Vero
4.203. Vero
4.204. Vero
4.205. Falso
4.206. Vero
4.207 $x^2 + o(x^2)$
4.208 $x + 3x^2 + o(x^2)$
4.209 $2x^2 + o(x^2)$
4.210 $x + 2x^2 + o(x^2)$
4.211 $o(1)$

4.212 $1 + 3x + o(x)$

4.213 $x^2 - 4x^3 + o(x^3)$

4.214. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

4.215. $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$

4.216. $\mathrm{Sh}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$

4.217. $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)$

4.218. $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7)$

4.219. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$

4.220. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$

4.221. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

4.222. $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

4.223. $\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$

4.224. $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

4.225. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$

4.226. $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

4.227. $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

4.228.
$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2};$$

$$f''(x) = -2\left[\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\right] = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f(1) = \frac{1}{2}; f'(1) = -\frac{1}{2}; f''(1) = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

4.229. $$f(x) = \log 5 + \frac{4}{5}(x-2) - \frac{3}{25}(x-2)^2 + o\big((x-2)^2\big).$$

4.230. $$f(x) = e^2 + 3e^2(x-1) + \frac{11}{2}e^2(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$$

4.231. $$f(x) = \frac{\pi}{4} + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$$

4.232. $f(x) = \log(\cos x)$, in $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Calcoliamo:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\log 2;$$

$$f'(x) = -\tan x; f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3};$$

$$f''(x) = -\left(1 + \tan^2 x\right); f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4;$$

$$f(x) = -\log 2 - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

4.233. Scrivendo $x^x = e^{x\log x}$ possiamo calcolare:

$$f'(x) = x^x(\log x + 1); \quad f''(x) = x^x\left(\log^2 x + 2\log x + 1 + \frac{1}{x}\right).$$

Quindi: $$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e}; \quad f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0; \quad f''\left(\frac{1}{e}\right) = e^{1-1/e},$$

perciò $$x^x = e^{-1/e} + e^{1-1/e}\frac{\left(x - \frac{1}{e}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{1}{e}\right)^2\right).$$

4.234. $f(x) = \log(1 + 2x^2) + 4(\cos x - 1)$.

a.
$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}\left(2x^2\right)^2 + o(x^4) + 4\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o\left(x^4\right)\right) =$$
$$= x^4\left(-2 + \frac{1}{6}\right) + o\left(x^4\right) = -\frac{11}{6}x^4 + o\left(x^4\right).$$

b.
$$\frac{\sqrt{1 + f(x)} - 1}{x^4} \sim \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{11}{6}x^4\right)}{x^4} = -\frac{11}{12}.$$

4.235. Sia $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

a.
$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o\left(x^2\right);$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o\left(x^2\right);$$
$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o\left(x^2\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o\left(x^2\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right)x^2 + o\left(x^2\right) = -\frac{1}{24}x^2 + o\left(x^2\right).$$

b.
$$\frac{\sqrt{|f(x)|}}{x} \sim \frac{\sqrt{\left|\frac{1}{24}x^2\right|}}{x} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

4.236.

a.
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) +$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 6x + \frac{1}{4!}(6x)^2 + o\left(x^2\right)\right) =$$
$$= \left(-\frac{2}{9} - \frac{36}{24}\right)x^2 + o\left(x^2\right) = -\frac{31}{18}x^2 + o\left(x^3\right).$$

b. Per lo sviluppo precedente si ha, in particolare, che

$$f(x) \sim -\frac{31}{18}x^2 \text{ per } x \to 0.$$

Perciò $x = 0$ è un punto di massimo relativo per f.

4.237.

a.
$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$f(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 2\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] =$$

$$= -2 + x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) + o(x^4) = -2 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

b. $x = 0$ punto di massimo relativo.

4.238.
a. $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
b. Il punto $x = 0$ è di massimo relativo.

4.239

a.
$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) +$$

$$-\left(1 - x^2 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

b. Per lo sviluppo precedente si ha, in particolare, che

$$f(x) \sim \frac{3}{2}x^2 \text{ per } x \to 0.$$

Perciò $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f.

4.240. Ad esempio, $f(x) = 1 + \cos x + x^3$. Ha un punto di massimo relativo in $x = 0$, e questo dipende solo dallo sviluppo.

4.241. $f(x) = x + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.

4.242. $f(x) = -x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$.

4.243. $f(x) = 2 - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$

4.244. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$.

4.245. $f(x) = -2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + o(x^4)$.

4.246.
$$2x\sin x - \mathrm{Ch}2x =$$
$$= 2x\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 + \tfrac{1}{2}(2x)^2 + \tfrac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4)\right) =$$
$$= 2x^2 - \frac{x^4}{3} - 1 - 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right) = -1 - x^4 + o\left(x^4\right)$$

$x = 0$ è un punto stazionario, di massimo relativo.

4.247.
$$\sin 2x = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o\left(x^4\right) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^4\right);$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^3\right);$$

$$2xe^{x^2} = 2x + 2x^3 + o\left(x^4\right);$$

$$f(x) = 2x + 2x^3 + o\left(x^4\right) - \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^4\right)\right) = \frac{10}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

$x = 0$ è un punto stazionario, di flesso ascendente.

4.248. $f(x) = 2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$.
$x = 0$ è un punto stazionario, di flesso discendente

4.249. $$\sqrt[3]{1+x^2}=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)$$

$$e^{2x}=1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{24}(2x)^4+o(x^4)$$

$$f(x)=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)+$$

$$-\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)=$$

$$=-2x-\frac{5}{3}x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{9}x^4+o(x^4)$$

$x=0$ non è un punto stazionario.

4.250. $f(x)=2+\frac{5}{12}x^4+o(x^4)$. $x=0$ è un punto stazionario, di min. relativo

4.251. $$\frac{e^{-x^2}-2\cos x+1}{x^2\log(1+3x^2)}\sim\frac{e^{-x^2}-2\cos x+1}{3x^4}\to\left[\frac{0}{0}\right].$$

Risolviamo il limite usando gli sviluppi di MacLaurin:

$$e^{-x^2}-2\cos x+1=1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)+$$

$$-2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)+1=$$

$$=x^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+o(x^4)\sim\frac{5}{12}x^4,$$

perciò $$f(x)\sim\frac{\frac{5}{12}x^4}{3x^4}=\frac{5}{36},$$

che il limite cercato.

A titolo di confronto, risolviamo lo stesso esercizio applicando De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}+2\sin x}{12x^3}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo ancora De L'Hospital (dopo aver semplificato per 2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}(2x^2-1)+\cos x}{18x^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}(6x-4x^3)-\sin x}{36x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{-x^2}(6-4x^2)}{36}-\frac{1}{36}\right]=\frac{5}{36},$$

che è il limite cercato.

4.252. Forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Riscriviamo

$$(x+3)^{(x+2)}-9=e^{(x+2)\log(x+3)}-e^{2\log 3}=$$

$$=e^{2\log 3}\left[e^{(x+2)\log(x+3)-2\log 3}-1\right]\sim$$

$$\sim e^{2\log 3}[(x+2)\log(x+3)-2\log 3]$$

perciò possiamo calcolare il limite usando solo i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^{(x+2)}-9}{4x}=\lim_{x\to 0}e^{2\log 3}\left[\frac{x\log(x+3)}{4x}+\frac{2\log(x+3)-2\log 3}{4x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}9\left[\frac{\log(x+3)}{4}+\frac{\log\left(1+\frac{x}{3}\right)}{2x}\right]=9\left(\frac{\log 3}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{6+9\log 3}{4}.$$

In questo caso come si vede non era *necessario* applicare gli strumenti del calcolo differenziale.

Si sarebbe potuto anche applicare De L'Hospital e calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+2)\log(x+3)}\left[\log(x+3)+\frac{x+2}{x+3}\right]}{4}=\frac{e^{2\log 3}\left[\log 3+\frac{2}{3}\right]}{4}=$$

$$=\frac{9}{4}\left[\log 3+\frac{2}{3}\right]=\frac{6+9\log 3}{4},$$

procedimento che avrebbe fornito il risultato cercato in modo più semplice.

4.253.

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{\sqrt[3]{x^2}\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)}\sim\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x^{2/3}\cdot x^{1/3}}=\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}\to\left[\frac{0}{0}\right].$$

Ora possiamo calcolare questo limite utilizzando i limiti notevoli o gli sviluppi:

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x}=\frac{1+\frac{1}{3}x+o(x)-(1+x+o(x))}{x}=\frac{-\frac{2}{3}x+o(x)}{x}\to-\frac{2}{3},$$

che è il limite cercato.

4.254. $$\lim_{x\to1}\frac{(e^x-e)^2}{x^3+3x^2-9x+5}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$\frac{(e^x-e)^2}{x^3+3x^2-9x+5}=\frac{e^2(e^{x-1}-1)^2}{x^3+3x^2-9x+5}\sim\frac{e^2(x-1)^2}{x^3+3x^2-9x+5}.$$

Calcoliamo il limite dell'ultimo quoziente scritto mediante il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to1}\frac{2e^2(x-1)}{(3x^2+6x-9)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Osserviamo che:

$$\frac{2e^2(x-1)}{(3x^2+6x-9)}=\frac{2e^2(x-1)}{(x-1)(3x+9)}=\frac{2e^2}{3x+9}\to\frac{2}{12}e^2=\frac{1}{6}e^2$$

perciò il limite cercato è $\frac{1}{6}e^2$.

4.255. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x+\cos(6x))^2}{(6x-\pi)\sin(6x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(2\sin x+\cos(6x))(2\cos x-6\sin 6x)}{6\sin(6x)+6(6x-\pi)\cos(6x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Ancora con De L'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}\cdot\frac{(2\cos x-6\sin 6x)^2+(2\sin x+\cos(6x))(-2\sin x-36\cos(6x))}{12\cos(6x)-6(6x-\pi)\sin(6x)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{-12}=-\frac{1}{12}$$

che quindi è il limite cercato.

4.256. $$\lim_{x\to 1^\pm}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{3}{\log x}\right)=\pm[+\infty-\infty]$$

Conviene fare il cambio di variabile $x=1+h$ e riscrivere

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{3+h}{h}-\frac{3}{\log(1+h)}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(3+h)\log(1+h)-3h}{h\log(1+h)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{(3+h)\log(1+h)-3h}{h\log(1+h)}\sim\frac{(3+h)\log(1+h)-3h}{h^2}.$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$(3+h)\log(1+h)-3h=(3+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-3h=$$

$$=3h+h^2\left(1-\frac{3}{2}\right)+o(h^2)-3h=-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\sim-\frac{1}{2}h^2.$$

Perciò $$f(h)\sim\frac{-\frac{1}{2}h^2}{h^2}=-\frac{1}{2},$$

e questo è il limite cercato.

4.257. Forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\frac{x\cos 2x-x+2x^3}{x^2\log(1+4x^3)}\sim\frac{x\cos 2x-x+2x^3}{4x^5}=\frac{\cos 2x-1+2x^2}{4x^4},$$

ora stimiamo il numeratore mediante gli sviluppi di MacLaurin:

$$\cos 2x-1+2x^2=\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)\right)-1+2x^2=$$

$$=-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+2x^2=\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\sim\frac{2}{3}x^4$$

perciò $$f(x)\sim\frac{\frac{2}{3}x^4}{4x^4}=\frac{1}{6},$$ e questo è il limite cercato.

4.258. $$\text{Num.} = 1 + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2;$$

$$\text{Den.} = x\left(\sqrt[3]{x} - \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{6}x + o(x)\right)\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{6};$$

$$f(x) \sim \frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{6}} = 9, \quad \text{e il limite cercato è 9.}$$

4.259. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\pi - 2\arctan(x^3))}{(e^{5/x^2} - 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\pi - 2\arctan(x^3))}{5/x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\pi - 2\arctan(x^3))}{5/x^3} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Calcoliamo il limite dell'ultimo quoziente scritto col Teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{1+x^6} \cdot 3x^2}{-15/x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 \cdot x^4}{15 \cdot x^6} = \frac{2}{5}.$$

Oppure si poteva usare l'identità:

$$\arctan t + \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \text{ per } t > 0, \text{ e scrivere:}$$

$$\pi - 2\arctan(x^3) = \pi - 2\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] = 2\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right) \sim \frac{2}{x^3}.$$

A questo punto, $$\frac{x(\pi - 2\arctan(x^3))}{(e^{5/x^2} - 1)} \sim \frac{x \cdot \frac{2}{x^3}}{5/x^2} = \frac{2}{5}.$$

4.260. $$f(x) \sim \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\tan(\pi x)}.$$

Calcoliamo il limite dell'ultima funzione scritta mediante il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\tan^2(\pi x))\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}.$$

Perciò il limite cercato vale $\frac{1}{\pi\sqrt{2}}$.

4.261. Applicando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari:

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2);$$

$$e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2); \quad \mathrm{Ch}x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right)\right)\frac{1}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \sim \frac{\frac{5}{24}x^2}{\frac{x^2}{2}} = \frac{5}{12}.$$

Perciò il limite cercato vale $\frac{5}{12}$.

4.262.
$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x} - e^{x^2}\right)\frac{1}{x\sin x}\right].$$

Applicando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2); \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2);$$

$$f(x) = \left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) - (1 + x^2 + o(x^2))\right)\frac{1}{x\sin x}\right] =$$

$$= \frac{-\frac{7}{6}x^2 + o(x^2)}{x\sin x} \sim \frac{-\frac{7}{6}x^2}{x^2} = -\frac{7}{6}, \text{ che è il limite cercato.}$$

4.263. Forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Sviluppiamo numeratore e denominatore.

$$\mathrm{Num} = \left(x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}.$$

$$\text{Den} = (\log(1+2x) - 2x)(\log(1+2x) + 2x) =$$

$$= \left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) - 2x\right)(2x + o(x) + 2x) =$$

$$= \left(-2x^2 + o(x^2)\right)(4x + o(x)) \sim -8x^3.$$

Perciò
$$f(x) \sim \frac{-\frac{x^3}{3}}{-8x^3} = \frac{1}{24}.$$

4.264. Forma di indeterminazione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Poiché l'argomento del logaritmo tende a 1, possiamo stimare:

$$\text{Den.} \sim \left[\left(x^2 - 3\sqrt{2}x + 5\right) - 1\right]^2 = \left[x^2 - 3\sqrt{2}x + 4\right]^2 =$$

$$= \left[\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 \sim \left[\left(x - \sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)\right]^2 = 2\left(x - \sqrt{2}\right)^2.$$

Quindi il limite di partenza è uguale a

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{e^{x^2} + e^2(1 - x^2)}{2\left(x - \sqrt{2}\right)^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

e lo calcoliamo con De L'Hospital,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{2xe^{x^2} - 2xe^2}{4\left(x - \sqrt{2}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

ma ora il limite si calcola elementarmente:

$$\frac{2xe^{x^2} - 2xe^2}{4\left(x - \sqrt{2}\right)} = \frac{xe^2\left(e^{x^2-2} - 1\right)}{2\left(x - \sqrt{2}\right)} \sim$$

poiché $(x^2 - 2)$ è infinitesimo per $x \to \sqrt{2}$,

$$\sim \frac{\sqrt{2}e^2(x^2 - 2)}{2\left(x - \sqrt{2}\right)} = \frac{e^2\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)} \to \frac{e^2\left(2\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}} = 2e^2.$$

4.265.
$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)\tan(\pi x)}{e^x\log^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$e^x\log^2 x\sim e(x-1)^2$$

perciò il limite di partenza è uguale a

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)\tan(\pi x)}{e(x-1)^2}$$

che calcoliamo col teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan(\pi x)+(\sqrt{x}-1)(1+\tan^2(\pi x))\pi}{2e(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{4x^{3/2}}\tan\pi x+\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\tan^2\pi x)\pi+(\sqrt{x}-1)2\tan\pi x(1+\tan^2\pi x)\pi^2}{2e}=\frac{\pi}{2e}$$

che è il limite di partenza.

4.266.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{1/x^2}-\cos\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}\right)}{\sin^2(1/x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$e^{1/x^2}-\cos\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4!x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)-\frac{3}{2x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\right)\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\sim\frac{11}{24x^4}.$$

$$\frac{x^2\left(e^{1/x^2}-\cos\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}\right)}{\sin^2(1/x)}\sim\frac{x^2\cdot\frac{11}{24x^4}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{11}{24}.$$

4.267.
$$\frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sin 2x}{x\sin x}\sim\frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\sin 2x}{x^2}\to\left[\frac{0}{0}\right]$$

De L'Hospital:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2\cos 2x}{2x}\to\left[\frac{0}{0}\right];$$

ancora De L'Hospital: $$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+4\text{sin}2x}{2}=0$$

Il limite di partenza è zero.

4.268. $$\frac{1+x\text{sin}x-e^{x^2}}{x\text{sin}(x^3)}\sim\frac{1+x\text{sin}x-e^{x^2}}{x^4}=$$

$$=\frac{1+x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{2}{3}+o(1)\to-\frac{2}{3}$$

4.269.

$$\left(\sqrt{x^2+x-1}-x+\frac{1}{2}\right)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}}\to\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]=1.$$

Il limite di partenza vale 1.

4.270. $$x^2\left(e^{\frac{1}{ex}}-\log\left(e+\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=x^2\left(e^{\frac{1}{ex}}-\log\left[e\left(1+\frac{1}{ex}\right)\right]\right)=x^2\left(e^{\frac{1}{ex}}-1-\log\left(1+\frac{1}{ex}\right)\right)=$$

$$= x^2\left(\frac{1}{ex}+\frac{1}{2(ex)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{ex}+\frac{1}{2(ex)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\sim x^2\cdot\frac{1}{e^2x^2}=\frac{1}{e^2}.$$

Perciò il limite di partenza è $\frac{1}{e^2}$.

4.271. $\frac{11}{24}$

4.272. $-\frac{4}{\pi}$.

4.273. -1

4.274. $-\frac{1}{6}$

4.275. $\begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = 1 \\ 0 & \text{per } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{per } \alpha < 1 \end{cases}$

4.276. $-2+\frac{\pi}{4}$

4.277. $-\frac{1}{2\pi}$

4.278. Scriviamo

$$\frac{x^x}{2^{x^2}} = e^{(x\log x - x^2\log 2)} \equiv e^{h(x)}.$$

Ora $\quad h(x) \sim -x^2\log 2 \to -\infty, \quad \text{quindi} \quad e^{h(x)} \to 0,$

e il limite cercato è 0.

4.279. $+\infty$

4.280. $\frac{\pi}{2e}$

4.281. $\frac{1}{8}$.

4.282. $-\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$.

4.283.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - 1 - \sin^2 x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \sim \frac{5}{6}x^4.$$

$$\log^2(1 + 2x^2) \sim (2x^2)^2 = 4x^4$$

Perciò
$$f(x) \sim \frac{\frac{5}{6}x^4}{4x^4} = \frac{5}{24}.$$

4.284.
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log^2 x \cos(\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{\log^2 x \cos(\pi x)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \sim \frac{-(x-1)^2}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \to \left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:
$$\lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo ancora De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2}{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

4.285.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x + e^{-x})}{x\log(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$x\log(1+2x) \sim 2x^2$$

$$\log(x + e^{-x}) = \log\left(x + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

Quindi
$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = \frac{1}{4}.$$

4.286.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right)}{\sin^2 2x\cdot\sin(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\sin^2 2x\cdot\sin\left(x^2\right) \sim (2x)^2\cdot x^2 = 4x^4.$$

$$\log\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right) = \log\left(\frac{x^2}{2}+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right) \sim \frac{x^4}{24}.$$

Perciò
$$f(x) \sim \frac{\frac{x^4}{24}}{4x^4} = \frac{1}{4\cdot 24} = \frac{1}{96}.$$

4.287. $\frac{1}{6}$.

4.288. $\frac{1}{48}$.

4.289.
$$\frac{1}{x}\left(\text{cotg}x-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x} \sim \frac{x\cos x-\sin x}{x^3} \to \left[\frac{0}{0}\right].$$

Calcoliamo il limite dell'ultima espressione con De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

4.290. $\frac{1}{12}$.

4.291. $$\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x}{x\sin x}=\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}\sim\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\longrightarrow\left[\frac{0}{0}\right]$$

Calcoliamo l'ultimo limite col Teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

4.292. $\frac{1}{12}$.

4.293. $$\left(e^{\sin x}-e^x\right)x^\alpha=e^x\left(e^{\sin x-x}-1\right)x^\alpha\sim\left(e^{\sin x-x}-1\right)x^\alpha\sim$$

$$\sim(\sin x-x)x^\alpha\sim-\frac{x^3}{6}\cdot x^\alpha\longrightarrow\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>-3\\ -\frac{1}{6} & \text{se } \alpha=-3\\ -\infty & \text{se } \alpha<-3.\end{cases}$$

4.294. Forma di indeterminazione $[0/0]$. Per determinare la parte principale del numeratore, dobbiamo sviluppare Tht per $t\longrightarrow+\infty$. Scriviamo (dalla definizione di Tht):

$$\mathrm{Th}t=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=1-\frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}.$$

Quindi, per $t\longrightarrow+\infty$, $$(1-\mathrm{Th}t)=\frac{2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\sim 2e^{-2t}.$$

Abbiamo perciò determinato il seguente sviluppo:

$$\mathrm{Th}t=1-2e^{-2t}+o(e^{-2t}),\text{ per } t\longrightarrow+\infty. \qquad (*)$$

Perciò, per $x\longrightarrow 0^+$:

$$\mathrm{Ch}x-\mathrm{Th}(1/x)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(1-2e^{-2/x}+o(e^{-2/x})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{1}{2}x^2$$

(perché $2e^{-2/x}=o(x^2)$, per $x\longrightarrow 0^+$). In definitiva,

$$\frac{\mathrm{Ch}x-\mathrm{Th}(1/x)}{x^{3/2}}\sim\frac{1}{2}x^{1/2}\longrightarrow 0,$$

che è il limite cercato.

Osserviamo che per risolvere questo esercizio abbiamo dovuto determinare lo sviluppo (*), in base a considerazioni elementari. Si noti che lo sviluppo di MacLaurin della funzione Thx non era di alcuna utilità, trattandosi di studiare la funzione *all'infinito*. Così pure, un'applicazione diretta del Teorema di De l'Hospital non sarebbe stata utile:

$$\frac{(\text{Ch}x - \text{Th}(1/x))'}{(x^{3/2})'} = \frac{\text{Sh}x + \frac{1}{x^2}(1 - \text{Th}^2(1/x))}{\frac{3}{2}x^{1/2}},$$

espressione più complicata di quella di partenza.

4.295. Forma di indeterminazione $[\infty \cdot 0]$, dove la quantità tra parentesi è differenza di due funzioni che tendono a $\pi/2$. Possiamo sviluppare $e^{1/x}$ per $x \to +\infty$ sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di e^t; il problema è come sviluppare $\arctan x$ per $x \to +\infty$; viene in aiuto la seguente identità trigonometrica, che abbiamo già usato altre volte:

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Di conseguenza, per $x \to +\infty$,

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (*)$$

In base alla $(*)$ possiamo quindi scrivere:

$$x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}e^{1/x}\right) = x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) =$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{x}\left(-1-\frac{\pi}{2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + o(1) \to -\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Questo esercizio si poteva anche risolvere col teorema di De l'Hospital:

$$x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}e^{1/x}\right) = \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}e^{1/x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

$$\frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}e^{1/x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{2}e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}e^{1/x} \to -\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

4.296.

$$\frac{f(x) - 2 + x\sin x}{x^4} =$$

$$= \frac{2 - x^2 + 3x^4 + o(x^4) - 2 + x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^4} = \frac{x^4\left(3 - \frac{1}{6}\right) + o(x^4)}{x^4} \to \frac{17}{6}.$$

4.297. $-\frac{5}{3}$.

4.298.

a. $$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}+o(x^4)$$

b. $$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

c. Dobbiamo verificare se $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$. Cominciamo a calcolare:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

perciò $$\lim_{x\to 0}f'(x)=0.$$

D'altro canto, $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=$$

(dallo sviluppo di f) $$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x}=0,$$

quindi f' è continua nell'origine.

4.299.
a. $f(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)$

b. $f'(x)=\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\frac{1}{2}$ (calcolando il limite dell'espressione calcolata in *b*, con De L'Hospital). $f'(0)=\frac{1}{2}$ (calcolando il limite del rapporto incrementale in base allo sviluppo determinato al punto *a*). Perciò f' è continua in 0.

4.300.
a. $f(x)=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{5!}x^4+o(x^4)$.

b. $f'(x)=\frac{x\mathrm{Ch}x-\mathrm{Sh}x}{x^2}$

c. $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (calcolando il limite dell'espressione calcolata in *b*, ad esempio con gli sviluppi di MacLaurin di Sh e Ch); $f'(0) = 0$ (calcolando il limite del rapporto incrementale in base allo sviluppo determinato al punto *a*). Perciò f' è continua in 0.

4.301.

a. $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$.

b. $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{x-(1+x)\log(1+x)}{(1+x)x^2}$.

c. $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$ (calcolando il limite dell'espressione calcolata in *b*, ad esempio con lo sviluppo di MacLaurin di log); $f'(0) = -\frac{1}{2}$ (calcolando il limite del rapporto incrementale in base allo sviluppo determinato al punto *a*). Perciò f' è continua in 0.

4.302. Per determinare la parte principale del numeratore (che è infinitesimo), occorre sviluppare le due funzioni composte $\cos(\text{Sh}x)$ e $\text{Ch}(\sin x)$. Poiché

$$\cos(\text{Sh}x) - 1 \sim -\frac{1}{2}\text{Sh}^2 x \sim -\frac{1}{2}x^2; \quad \text{Ch}(\sin x) - 1 \sim \frac{1}{2}\sin^2 x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

si capisce subito che lo sviluppo al second'ordine del numeratore non consente di determinarne la parte principale. Per trovare il primo termine significativo nello sviluppo del numeratore dobbiamo sviluppare allora *almeno al quarto ordine* (poiché il numeratore è pari, lo sviluppo contiene solo potenze pari). Quindi scriviamo:

$$\cos(\text{Sh}x) = \cos\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Analogamente: $$\text{Ch}(\sin x) = \text{Ch}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Quindi $$\cos(\mathrm{Sh}x) + \mathrm{Ch}(\sin x) - 2 =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) + 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 2 = -\frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Perciò $$f(x) \sim -\frac{x^{4-\alpha}}{4} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ -1/4 & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4. \end{cases}$$

4.303. Sfruttando lo sviluppo

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3), \text{ per } t \to 0$$

si ha (ponendo $t = x - x^2$):

$$\frac{1}{1 - x + x^2} = 1 + \left(x - x^2\right) + \left(x - x^2\right)^2 + \left(x - x^2\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x - x^2 + x^2 - 2x^3 + o(x^3) + x^3 + o(x^3) = 1 + x - x^3 + o(x^3).$$

4.304. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o\left(x^4\right)$$

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o\left(t^2\right)$$

Applicando lo sviluppo di $\log(1+t)$ con $t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ si ha:

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o\left(x^4\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^2 + o\left(x^4\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)\right) + o\left(x^4\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right).$$

4.305. $$\mathrm{Sh}(\sin x) - x = \mathrm{Sh}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o\left(x^5\right)\right) - x =$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o\left(x^5\right)\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{5!}(x + o(x))^5 + o\left(x^5\right) - x =$$

$$= -\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5) + \frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^2\left(-\frac{1}{6}x^3\right)+o(x^5)\right) + \frac{1}{5!}x^5+o(x^5) =$$

$$= x^5\left(\frac{2}{5!} - \frac{3}{36}\right) + o(x^5) = -\frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

Poiché $x^4 \sin x \sim x^5$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Sh}(\sin x) - x}{x^4 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{15}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{15}.$$

4.306. $$\cos(e^x - 1) = \cos\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + x^4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + o(x^4)\right) + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

$$2\cos(e^x - 1) + \sin(x^2 + x^3) - 2 =$$

$$= 2 - x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 2 + (x^2 + x^3) + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(e^x - 1) + \sin(x^2 + x^3) - 2}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 4 \\ -\frac{1}{2} & \text{per } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 4 \end{cases}$$

4.5. Applicazioni al calcolo numerico approssimato: metodo di Newton e formula di Taylor con resto secondo Lagrange

4.5.A. Richiami sul metodo di Newton

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, § 7.5.

Richiamiamo l'enunciato del teorema relativo al metodo di Newton, di cui negli esercizi successivi dovremo verificare le ipotesi:

Teorema 4.3. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due volte derivabile in* $[a, b]$, *e supponiamo che:*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2. $f'(x), f''(x)$ *hanno segno costante in* $[a, b]$;

3. $f(a) \cdot f''(a) > 0$.

Definiamo per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$$

Allora esiste uno e un sol punto $c \in (a, b)$ *tale che* $f(c) = 0$ *e la successione* x_n *tende a* c *per difetto. Se invece di valere la 3 vale la*

3'. $f(b) \cdot f''(b) > 0$, *allora la successione*

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

converge a c *per eccesso.*

Esempio 4.30. Si vuole trovare una soluzione approssimata dell'equazione

$$x + \log x = 0.$$

A tale scopo:

a. Si verifichi che le ipotesi del metodo di Newton sono verificate sull'intervallo $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$;

b. si scriva esplicitamente la formula di ricorrenza che assegna una successione convergente alla soluzione dell'equazione, precisando se tale convergenza sarà per difetto o per eccesso;

c. si calcolino le prime iterazioni del metodo, finché il risultato si stabilizza nelle prime 4 cifre decimali.

a. Sia $f(x) = x + \log x$.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0; f(1) = 1 > 0;$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ in } \left[\frac{1}{e}, 1\right];$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \text{ in } \left[\frac{1}{e}, 1\right].$$

b.
$$f\left(\frac{1}{e}\right)f''\left(\frac{1}{e}\right) > 0, \text{ perciò poniamo } a_0 = \frac{1}{e}.$$

Calcoliamo

$$g(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)} = t - \frac{t + \log t}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{t(1 - \log t)}{t + 1}$$

perciò poniamo

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n(1-\log a_n)}{a_n+1} \\ a_0 = \frac{1}{e} \end{cases}$$

La successione a_n convergerà alla soluzione per difetto. Calcoliamo:

$$a_1 = \frac{\frac{2}{e}}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{2}{1 + e} \simeq 0.53788.$$

$$a_2 = g(0.53788) = \frac{0.53788(1 - \log 0.53788)}{0.53788 + 1} = 0.56666.$$

$$a_3 = g(0.56666) = \frac{0.56666(1 - \log 0.56666)}{0.56666 + 1} = 0.56714.$$

$$a_4 = g(0.56714) = \frac{0.56714(1 - \log 0.56714)}{0.56714 + 1} = 0.56714 = a_3.$$

Il risultato è stabilizzato nelle prime 5 cifre (ne erano richieste 4). Possiamo fermarci qui e considerare $c = 0.5671$ il punto richiesto.

A titolo di verifica, $\qquad f(0.5671) = -0.000112,$

quindi la funzione effettivamente è "quasi nulla" nel punto c. [5]

Esercizi

4.307.★ Si vuole trovare una soluzione approssimata dell'equazione

$$e^{1/x} - x = 0.$$

A tale scopo:

a. Si verifichi che le ipotesi del metodo di Newton sono verificate sull'intervallo $[1, e]$;

b. si scriva esplicitamente la formula di ricorrenza che assegna una successione convergente alla soluzione dell'equazione, precisando se tale convergenza sarà per difetto o per eccesso;

c. si calcolino le prime iterazioni del metodo, finché il risultato si stabilizza nelle prime 2 cifre dopo la virgola.

4.308.★ Si consideri l'equazione:

$$e^x = 2 - x^2.$$

a. Mediante un confronto grafico determinare quante soluzioni ha e darne una prima localizzazione.

b. Utilizzando il metodo di Newton, scrivere esplicitamente una successione definita per ricorrenza, che converga alla *massima* soluzione.

c. Mediante l'algoritmo precedente, calcolare il valore numerico approssimato al secondo decimale di una delle soluzioni.

4.309.★ Calcolare con approssimazione l'unica soluzione reale dell'equazione $x^3 + x + 1 = 0$. A tal fine:

a. Mostrare che il metodo di Newton è applicabile sull'intervallo $[-1, 0]$;

b. scrivere *esplicitamente* l'algoritmo iterativo;

c. calcolare esplicitamente le prime iterazioni, finché le prime due cifre decimali si stabilizzano.

---

[5] Si noti comunque che non c'è un relazione banale tra questo numero (-0.000112) e lo scarto tra c e il punto in cui la funzione si annulla realmente.

4.310.★ Calcolare con approssimazione l'unica soluzione reale dell'equazione $\log x = \frac{1}{x}$. A tal fine:

a. Mostrare che il metodo di Newton è applicabile sull'intervallo $[1, 2]$;

b. scrivere *esplicitamente* l'algoritmo iterativo;

c. calcolare esplicitamente le prime iterazioni, finché le prime due cifre decimali si stabilizzano.

4.311.★ Si vuole calcolare l'unica soluzione dell'equazione

$$\sin x = \frac{x}{2}$$

che cade nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

a. Mostrare che le ipotesi del metodo di Newton sono soddisfatte in questo intervallo.

b. Definire per ricorrenza una successione che converge alla soluzione cercata.

c. calcolare esplicitamente le prime iterazioni, finché le prime due cifre decimali si stabilizzano.

4.312.★ Si vuole calcolare l'unica soluzione dell'equazione

$$\cos x = x$$

che cade nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Mostrare che le ipotesi del metodo di Newton sono soddisfatte in questo intervallo.

b. Definire per ricorrenza una successione che converge alla soluzione cercata.

c. Calcolare le prime tre iterazioni dell'algoritmo.

4.5.B. Calcoli numerici approssimati mediante la formula di Taylor

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, §7.4.

La formula di Taylor con resto secondo Lagrange può essere utilizzata per calcolare numericamente una funzione, in un punto o in un intervallo, con un controllo dell'errore commesso.

Esempio 4.31. Calcolare un valore approssimato di $\sqrt{e}$, con un errore inferiore a $1/1000$, usando la formula di Taylor con resto secondo Lagrange.

La formula di Taylor con resto secondo Lagrange per la funzione $f(x) = e^x$ è:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

per un certo $t \in (0, x)$. Poiché per ogni n si ha $f^{(n+1)}(t) = e^t$, per $x = \frac{1}{2}$ si ha:

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!2^k} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} e^t, \quad \text{con } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Perciò l'errore di approssimazione è

$$E_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} e^t < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Anche se non conosciamo ancora il valore di $e^{1/2}$ (è proprio quello che stiamo calcolando!) possiamo dire che $e^{1/2} < 2$, perché $e < 4$. Perciò

$$0 < E_n < \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

Si tratta ora di scegliere l'intero n in modo che risulti $E_n < \frac{1}{1000}$. Tabulando i primi valori di $\frac{1}{2^n(n+1)!}$ troviamo:

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2^n(n+1)!}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{1920}$	$\dots$

Possiamo scegliere quindi $n = 4$. Questo significa che

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!2^k} + E_4$$

con $0 < E_4 < \frac{1}{1920}$. Il valore numerico approssimato che cerchiamo è quindi:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!2^k} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} = \frac{211}{128} = 1.648\ldots$$

Esercizi

4.313.★ Calcolare un valore approssimato di e^2, con errore inferiore a $1/100$. A tal fine: utilizzare la formula di Taylor con resto secondo Lagrange; scrivere *esplicitamente* i passaggi di maggiorazione dell'errore (usare la disuguaglianza $e < 3$); scrivere *esplicitamente* una sommatoria che assegna il valore cercato (non è richiesto il calcolo di tale somma).

4.314.★ Calcolare un valore approssimato di $\sin\frac{1}{2}$, con errore inferiore a $1/10$ 000. A tal fine: utilizzare la formula di Taylor con resto secondo Lagrange; scrivere *esplicitamente* i passaggi di maggiorazione dell'errore; scrivere *esplicitamente* una sommatoria che assegna il valore cercato, e calcolarne il valore numerico.

4.315.★ Calcolare un valore approssimato di $\frac{1}{\sqrt{e}}$, con un errore inferiore a $1/1000$, usando la formula di Taylor con resto secondo Lagrange.

4.316.★ Calcolare un valore approssimato di $\sqrt{\frac{3}{2}}$, con un errore inferiore a $1/1000$, usando la formula di Taylor con resto secondo Lagrange.

Soluzioni § 4.5.

4.307.
a. Sia $f(x) = e^{1/x} - x$.

$$f(1) = e - 1 > 0; f(e) = e^{1/e} - e < 0;$$

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} - 1 < 0 \text{ in } [1, e]; \quad f''(x) = e^{1/x}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) > 0 \text{ in } [1, e].$$

b. $$f(1)f''(1) > 0, \text{ perciò poniamo } a_0 = 1.$$

Calcoliamo $$g(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)} = t + \frac{e^{1/t} - t}{\frac{e^{1/t}}{t^2} + 1}.$$

perciò poniamo $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{e^{1/a_n} - a_n}{\frac{e^{1/a_n}}{a_n^2} + 1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

La successione a_n convergerà alla soluzione per difetto. Calcoliamo:

$$a_1 = 1 + \frac{e - 1}{e + 1} = \frac{2e}{e + 1} \simeq 1.462.$$

(Lavoriamo con una cifra in più di quelle che vogliamo vedere stabilizzate).

$$a_2 = g(1.462) = 1.462 + \frac{e^{1/1.462} - 1.462}{\frac{e^{1/1.462}}{1.462^2} + 1} = 1.732.$$

$$a_3 = g(1.732) = 1.732 + \frac{e^{1/1.732} - 1.732}{\frac{e^{1/1.732}}{1.732^2} + 1} = 1.763.$$

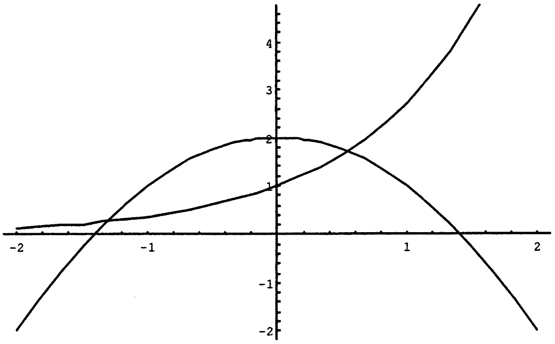
$$a_4 = g(1.763) = 1.763 + \frac{e^{1/1.763} - 1.763}{\frac{e^{1/1.763}}{1.763^2} + 1} = 1.763.$$

A questo punto il risultato è stabilizzato. Il punto richiesto è $c = 1.76$.

4.308.
a. Tracciamo su un grafico le funzioni e^x, $2 - x^2$. Si vede subito che questi grafici hanno esattamente due intersezioni.

(*Dimostrazione rigorosa: poiché sono continue, per il teorema degli zeri hanno almeno un'intersezione sull'intervallo* $[-2, 0]$ *e almeno un'intersezione sull'intervallo* $[0, 2]$, *quindi in tutto almeno* 2 *intersezioni; poiché una funzione è strettamente convessa e* *l'altra strettamente concava, non possono avere più di* 2 *intersezioni; perciò ne hanno esattamente* 2).

Ci è chiesto di determinare la soluzione massima, quindi in questo caso quella *positiva*, che dal grafico cadrà esempio nell'intervallo $[0, 1]$.



b. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$$

e mostriamo che il metodo di Newton è applicabile in $[0, 1]$.

$f(0) = -1 < 0; f(1) = e - 1 > 0.$

$f'(x) = e^x + 2x > 0$ in $[0, 1]$;

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ in $[0, 1]$.

$f(0)f''(0) < 0$, perciò definiamo la successione:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Calcoliamo la funzione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x + x^2 - 2}{e^x + 2x} = \frac{e^x(x-1) + x^2 + 2}{e^x + 2x}.$$

Quindi: $$\begin{cases} a_{n+1} = g(a_n) \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{con } g(x) = \frac{e^x(x-1) + x^2 + 2}{e^x + 2x}.$$

c. Possiamo calcolare ora le prime iterazioni:

$$a_1 = g(1) = 0.636;$$

$$a_2 = g(0.636) = \frac{e^{0.636}(0.636 - 1) + 0.636^2 + 2}{e^{0.636} + 2 \cdot 0.636} = 0.543;$$

$$a_3 = g(0.543) = \frac{e^{0.543}(0.543-1)+0.543^2+2}{e^{0.543}+2\cdot 0.543} = 0.537;$$

$$a_4 = g(0.537) = \frac{e^{0.537}(0.537-1)+0.537^2+2}{e^{0.537}+2\cdot 0.537} = 0.537;$$

Possiamo fermarci qui; il valore di c stabilizzato al secondo decimale è 0.53.

Naturalmente, una scelta diversa del punto iniziale porta a risultati intermedi diversi, ed eventualmente a un diverso numero di iterazioni; il risultato numerico finale però è questo.

4.309.

a. Sia $f(x) = x^3 + x + 1$. $f(-1) = -1 < 0$; $f(0) = 1 > 0$;
$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0\ \forall x$; $f''(x) = 6x \leq 0\ \forall x \in [-1, 0]$.
Perciò il metodo di Newton è applicabile sull'intervallo considerato.

b. Poiché $f(-1)f''(-1) > 0$, definiamo:

$$\begin{cases} a_{n+1} = g(a_n) \\ a_0 = -1 \end{cases}$$

con
$$g(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)} = t - \frac{t^3+t+1}{3t^2+1} = \frac{2t^3-1}{3t^2+1}.$$

c. $a_0 = -1$; $\quad a_1 = g(1) = -0.75$;
$a_2 = g(-0.75) = -0.686$; $\quad a_3 = g(-0.686) = -0.682$.
A questo punto le prime due cifre decimali sono stabilizzate: $c \simeq -0.68$.

4.310.

a. Sia $f(x) = \log x - \frac{1}{x}$. $f(1) = -1 < 0$; $f(2) = \log 2 - \frac{1}{2} = 0.193 > 0$.
$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ in $[1, 2]$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ in $[1, 2]$.
Perciò il metodo di Newton è applicabile in $[1, 2]$.

b. Sia
$$g(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)} = t - \frac{\log t - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 2t - t^2 \log t}{1+t};$$

poiché $f(1)f''(1) > 0$, poniamo
$$\begin{cases} a_{n+1} = g(a_n) \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

c. $a_1 = g(1) = 1.5$; $\quad a_2 = g(1.5) = 1.735$;
$a_3 = g(1.735) = 1.763$; $\quad a_4 = g(1.763) = 1.763$.
Perciò la soluzione cercata è, stabilizzata al secondo decimale, 1.76.

4.311.

a. Sia $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$; allora: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$; $f(\pi) = -\frac{\pi}{2} < 0$;
$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} < 0$ in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $f''(x) = -\sin x < 0$ in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Le ipotesi sono soddisfatte.

b. Sia $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sin x - \frac{x}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = \frac{x\cos x - \sin x}{\cos x - \frac{1}{2}};$$

poiché $f(\pi)f''(\pi) > 0$, poniamo

$$\begin{cases} a_{n+1} = g(a_n) = \frac{a_n \cos a_n - \sin a_n}{\cos a_n - \frac{1}{2}} \\ a_0 = \pi. \end{cases}$$

c. Calcoliamo:
$a_1 = g(\pi) = 2.094;$ $\quad a_2 = g(2.094) = 1.913$
$a_3 = g(1.913) = 1.895;$ $\quad a_4 = g(1.895) = 1.895$
Il valore di c stabilizzato al secondo decimale è 1.89.

4.312.
a. Sia $f(x) = \cos x - x$; allora: $f(0) = 1 > 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$;
$f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $f''(x) = -\cos x < 0$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Le ipotesi sono soddisfatte.

b. Sia $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos x - x}{-\sin x - 1} = \frac{x\sin x + \cos x}{\sin x + 1};$$

poiché $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, poniamo

$$\begin{cases} a_{n+1} = g(a_n) = \frac{a_n \sin a_n + \cos a_n}{\sin a_n + 1} \\ a_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

c. Calcoliamo:
$a_1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.7853$
$a_2 = g(0.7853) = 0.7395$
$a_3 = g(0.7395) = 0.7390.$
Il valore di c stabilizzato al terzo decimale è 1.739.

4.313. $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^t, \ t \in (0, x);$$

$$e^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^t, \ t \in (0, 2);$$

$$|\text{Errore}| = \left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right| < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^2 < 9 \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \equiv R_n.$$

(Anche se non conosciamo il valore di e^2, sappiamo che $e^2 < 9$ perché $e < 3$). Calcoliamo:

n	2	6	8	9
R_n	12	0.228	0.0127	0.00254

$n = 9$ è il minimo intero che va bene. Per $n = 9$ si ha:

$$e^2 = \sum_{k=0}^{9} \frac{2^k}{k!} + E = 7.389 + E, \text{ con } 0 < E < 0.01.$$

4.314.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} (\sin x)_{|x=t},\ t \in (0, x)$$

$$\sin\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} + \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} (\sin x)_{|x=t} \right],\ t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

con Errore $= [\dots]$.

Poiché
$$\left| \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} (\sin x) \right| \leq 1 \text{ per ogni } x, n,$$

(perché la derivata di qualsiasi ordine della funzione $\sin x$ è $\pm\sin x$ opppure $\pm\cos x$),

$$|\text{Errore}| < \frac{1}{10000} \text{ per } \frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} < \frac{1}{10000}.$$

Ora,
$$\frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} = \begin{cases} n = 1 & \frac{1}{2^4 \cdot 4!} = \frac{1}{384} \\ n = 2 & \frac{1}{2^6 \cdot 6!} = \frac{1}{46080} \end{cases}$$

quindi $n = 2$ va bene. Si ha allora:

$$\sin\frac{1}{2} \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!} = 0.4794.$$

4.315.

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k! 2^k} + \frac{1}{(-2^{n+1})(n+1)!} e^t, \text{ con } t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Perciò
$$|E_n| = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} e^t < \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

per $n \geq 4$, infatti:

$$\left\{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\right\}_{n=1,2,3,4}=\frac{1}{8},\frac{1}{48},\frac{1}{384},\frac{1}{3840}.$$

Dunque il valore approssimato che si cerca è

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\simeq\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{k!2^k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}=\frac{233}{384}=0.607..$$

4.316. Calcolare un valore approssimato di $\sqrt{\frac{3}{2}}$ usando la formula di Taylor con resto secondo Lagrange con $n=3$, e dare una maggiorazione dell'errore commesso. Scriviamo:

$$\sqrt{1+x}=\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\right)+\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dx^4}\left(\sqrt{1+x}\right)_{/x=t}x^4$$

per $x=\frac{1}{2}$:
$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)+E_4$$

con
$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{157}{128}\simeq 1.2266$$

$$E_4=\frac{1}{4!\cdot 2^4}\frac{d^4}{dx^4}\left(\sqrt{1+x}\right)_{/x=t}=$$

$$=\frac{1}{4!\cdot 2^4}\left[-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{(1+t)^{7/2}}\right]=-\frac{15}{6144}\frac{1}{(1+t)^{7/2}}$$

con $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, quindi $\frac{1}{(1+t)^{7/2}}\le 1$, e

$$|E_4|\le\frac{15}{6144}=0.0024.$$

Quindi:
$$\sqrt{\frac{3}{2}}\simeq 1.2266\pm 0.0024.$$

Cap. 5. Serie

5.1. Serie numeriche

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 5, §1.

Per maggiore gradualità, gli esercizi sono qui raggruppati in 4 sezioni: le prime due riguardano, rispettivamente, serie a termini positivi e serie a termini di segno variabili; nella terza si presentano esercizi assortiti di entrambi i tipi. In tutte e 3 queste prime sezioni gli esercizi possono essere svolti *senza gli strumenti del calcolo differenziale*. La quarta sezione invece contiene esercizi che richiedono anche gli sviluppi di MacLaurin per determinare la parte principale di certi infinitesimi, oppure l'uso della derivata per studiare la monotonia di una successione, quando questo è utile per poter applicare il criterio di Leibniz.

5.1.A. Serie a termini positivi

Si presentano qui esempi di serie che possono essere studiati usando i criteri validi per le serie a termini positivi, applicando le stime asintotiche che discendono dai limiti notevoli (ma senza far uso di sviluppi di MacLaurin).

Esempi svolti

Stabilire il carattere delle seguenti serie (= dire se la serie converge, diverge o oscilla), giustificando le proprie conclusioni.

Nota bene: in realtà sappiamo che una serie a termini positivi converge o diverge, quindi una volta constatato che effettivamente la serie da studiare ha i termini positivi (o definitivamente positivi, o definitivamente negativi) il terzo caso si può escludere.

Esempio 5.1.

$$\text{(a)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log n}\right);\quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+\sin n}{n^2+2\sqrt{n}+\sin(1/n)}\right)^n$$

(a) Serie a termini positivi,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\sim\frac{\sqrt{n}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{n}};$$

Quindi
$$a_n \sim \frac{1}{2n^{3/2}\log n} < \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Ora: la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 3/2 > 1$ converge; per il criterio del confronto anche la serie $\sum \frac{1}{2n^{3/2}\log n}$ converge; per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di partenza *converge*.

(b) La serie è a termini positivi. Per il denominatore vale la stima asintotica:
$$n^2 + 2\sqrt{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n^2$$

perciò
$$\left(\frac{1}{n^2 + 2\sqrt{n} + \sin(1/n)}\right) n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Poiché la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, l'idea è che anche la nostra serie diverga. Il termine $(3 + \sin n)$ è oscillante, ma essendo $-1 \leq \sin n \leq 1$, risulta
$$2 \leq (3 + \sin n) \leq 4,$$
perciò possiamo minorare:
$$a_n \geq \left(\frac{2}{n^2 + 2\sqrt{n} + \sin(1/n)}\right) n \sim \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

e poiché $\sum \frac{2}{n}$ diverge, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum \left(\frac{2}{n^2+2\sqrt{n}+\sin(1/n)}\right) n$ diverge, e per il criterio del confronto la serie di partenza *diverge*.

Esempio 5.2.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^3}{n^n}; \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 2^{2n}}$$

(a) Serie a termini positivi; la presenza del fattoriale e della potenza n^n suggeriscono di applicare il *criterio del rapporto*:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^3}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!n^3} =$$

$$= \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \sim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

perciò la serie *converge*.

Si presti attenzione a questo diverso comportamento:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to 1, \text{ ma: } \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e.$$

In entrambi i casi, la base $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ tende a 1; nel primo caso però l'esponente è costante, quindi anche la potenza tende a 1, mentre nel secondo caso l'esponente è variabile, la potenza dà una forma di indeterminazione $[1^\infty]$, che anzi si riconosce dare il limite notevole e.

(b) Serie a termini positivi. La presenza dei due termini di esponente n suggerisce di applicare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^5 2^{2n}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5} \cdot \frac{5}{4} \to \frac{5}{4} > 1,$$

perciò la serie *diverge*.

Esercizi

Stabilire se le seguenti serie a termini positivi convergono o divergono, precisando il criterio utilizzato.

5.1.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3+2n+2}$

5.2.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$

5.3.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^3}$

5.4.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+\log^3 n}{n!+2^n}$

5.5.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}}$

5.6.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^2 n+1}{n\log^2 n+n^2\log n}$

5.7.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\,3^{n+1}}{n!}$

5.8.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}}$

5.9.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}}-e\right)$

5.10.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}\right)$

5.11.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 3^n}{n!}$

5.12.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n+3\sqrt{n}+5}\right).$

5.13.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{n+1}{3-n^2}}-e^{\frac{1}{n}}\right)$

5.14.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(\sqrt{n}\right)^n}$

5.15.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right)\log n$

5.16.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}\cdot n!}{(2n+1)!}$

5.17.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}+\sin\left(\frac{1}{e^n}\right)\right)$

5.18.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

5.19.★ Utilizzando la serie geometrica (e non applicando le formule studiate a scuola) scrivere sotto forma di frazione i seguenti numeri decimali periodici:

$$(a)\ 0.\overline{4};\quad (b)\ 0.\overline{35};\quad (c)\ 0.\overline{9};\quad (d)\ 0.2\overline{35}.$$

5.1.B. Serie a termini di segno variabile

Si presentano qui esempi di serie che possono essere studiati usando i criteri validi per le serie a termini di segno variabile, applicando le stime asintotiche che discendono dai limiti notevoli (ma senza far uso di strumenti di calcolo differenziale).

Esempi svolti

Esempio 5.3. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie, giustificando le proprie conclusioni.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{n}+\cos(n\pi)}{n}\right].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{n}+\cos(n\pi)}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(n\pi)}{n}\right].$$

La prima serie è a termini positivi,

$$\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}\sim\frac{1}{n^2},$$

perciò la prima serie converge per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha > 1$.

La seconda serie è a segni alterni e per il criterio di Leibniz converge, perché $1/n \downarrow 0$. (Ricordiamo che col simbolo $a_n \downarrow 0$ si intende che a_n converge a zero ed è monotona decrescente).

Quindi la serie di partenza converge semplicemente, perché somma di due serie convergenti. Quanto alla convergenza assoluta,

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{n}+\cos(n\pi)}{n}\right|=\left|(-1)^n\frac{1+(-1)^n\sin\frac{1}{n}}{n}\right|=\frac{1+(-1)^n\sin\frac{1}{n}}{n}\sim\frac{1}{n}$$

e per confronto asintotico con la serie armonica, la serie dei valori assoluti diverge. Quindi la serie non converge assolutamente.

Esempio 5.4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie, giustificando le proprie conclusioni.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2)\cos(n\pi)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Convergenza assoluta:

$$\left|\sin(n^2)\cos(n\pi)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

e per il criterio del confronto e del confronto asintotico, la serie di partenza converge assolutamente. Quindi converge anche semplicemente.

Esercizi

Stabilire se le seguenti serie a termini di segno variabile convergono assolutamente e/o semplicemente, giustificando le proprie conclusioni in base ai criteri studiati.

5.20.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

5.21.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n+\sqrt{n}}$

5.22.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$

5.23.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n n}{n^2}$

5.24.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$

5.25.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

5.26.★ $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\cos n.$$

5.27.★ $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right).$$

5.28.★ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + (-1)^n n^2 + \log^4 n}{2n^3}$$

5.1.C. Esercizi sulle serie a termini positivi o di segno variabile

Si presentano ora esercizi assortiti (serie a termini positivi o di segno variabile), che non fanno uso di strumenti di calcolo differenziale.

Di ciascuna delle seguenti serie, dire se converge, diverge o oscilla, motivando il perché. (Se la serie è a termini a segno variabile, non è richiesto lo studio della convergenza assoluta).

5.29.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{n^3+3n^2}$

5.30.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

5.31.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^n}$

5.32.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$

5.33.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

5.34.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$

5.35.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+\sqrt{n}}$

5.36.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$

5.37.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 \log n + 3}$

5.38.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$

5.39.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$

5.40. ★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n^2}{n^3+3n^2+1}$

5.41.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^n + \log^3 n)}{n!}$

5.42.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log^3 n + \sqrt{n}}{1 + n^3\sqrt{n^2+1}}$

5.43.★
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt[3]{n^2} + 3\sqrt[4]{n^7}}{\sqrt{n^3 + 3\sqrt{1+n^8}}}$$

5.44.★
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n!}$$

5.45.★
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5.46.★
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + (-1)^n\right] \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

5.47.★
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n n + \sin n}{n^2 \log n}\right)$$

5.48.★
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin(\cos n))^n$$

5.49.★
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sin n)}{n}$$

Calcolare esplicitamente la somma delle seguenti serie:

5.50. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n}}$

5.51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{4^n}$

Stabilire se le seguenti serie convergono semplicemente, e se convergono assolutamente.

5.52.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,(\sin n)\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2$

5.53.★ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\frac{n}{1+n^2}} - 1\right)\sqrt{n}$

5.54.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\tan\frac{1}{n}\right)$

5.55.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^3}{n^3 + 2n}\right)$

5.56.★ $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

5.57.★ $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)$

5.58.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^{\alpha}, \alpha > 0$

5.59.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{1/n}-1)}{\sqrt{n}}$

5.60.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}}$

5.61.★ $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n^3}$

5.62.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1+n}{n+2}\right)$

5.63.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n+1}$

5.64.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right)$

5.65.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n \cdot \tan\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$

5.66.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin\frac{1}{n} \cdot \tan\frac{1}{n}$

5.67.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$

5.68.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}$

5.69.★ $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n-2}{n^2+1}\right)$

5.70.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\cos(n\pi)}{3n^2-5n^3}$

5.1.D. Esercizi sulle serie che utilizzano anche il calcolo differenziale

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 5, §1, cap.4, §7.3, §4.2.

I prossimi esercizi utilizzano anche strumenti di calcolo differenziale: sviluppi di MacLaurin per dare una stima asintotica del termine generale della serie, oppure l'uso della derivata per per verificare la monotonia di una successione.

Esempi svolti

Esempio 5.5. Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}}\right).$$

Si ha:
$$\left|(-1)^n\left(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}}\right)\right| = e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \sim \frac{1}{n},$$

perciò la serie *diverge assolutamente* (criterio del confronto asintotico, confronto con serie armonica, divergente).

La serie di partenza è a segni alterni, con termine generale tendente a zero.

Per applicare il criterio di Leibniz verifichiamo la monotonia di $b_n = e^{\frac{2}{n}} - e^{\frac{1}{n}}$ calcolando

$$f(x) = e^{\frac{2}{x}} - e^{\frac{1}{x}};$$

$$f'(x) = e^{\frac{2}{x}}\left(\frac{-2}{x^2}\right) - e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[1-2e^{\frac{1}{x}}\right] \sim -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

per $x \to +\infty$. Quindi f' è definitivamente negativa, f è definitivamente decrescente, e b_n è definitivamente decrescente. Per il criterio di Leibniz, la serie di partenza converge semplicemente.

Osservazione 5.1. Perché usare la derivata per studiare la monotonia di una successione. Il criterio di Leibniz richiede la verifica della monotonia di una certa successione, ossia il fatto che $a_{n+1} \le a_n$ per ogni n. In casi molto semplici, la monotonia è evidente dalla forma analitica di a_n, ad esempio

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{\log n}$$

evidentemente decrescono all'aumentare di n. Ma non appena si passa a successioni meno elementari, la cosa diventa meno ovvia. Ad esempio:

$$a_n = \frac{\log n}{n}$$

certamente tende a zero per confronto di infiniti, ma non è ovvio che sia monotona decrescente: al crescere di n, infatti, crescono sia il numeratore che il denominatore. Ci basterebbe sapere che per n maggiore di un certo n_0 la successione sia decrescente, ma anche questo non è banale da stabilire per via puramente algebrica. Se però esiste una funzione $f(x)$ di variabile reale, definita almeno per $x > 0$ o per x abbastanza grande, tale che $a_n = f(n)$ (in questo caso è $f(x) = \log x/x$), allora lo studio del decrescere di a_n può essere ricondotto allo studio del decrescere di $f(x)$. *Se f è decrescente almeno per x abbastanza grande, allora a_n sarà decrescente almeno per n abbastanza grande*. A sua volta, per stabilire questo è sufficiente provare che $f'(x)$ è negativa per x abbastanza grande, il che si può dedurre risolvendo la disequazione $f'(x) < 0$ *oppure con una stima asintotica di f' per $x \to +\infty$*, come si è fatto nell'esempio precedente. Si noti che, al contrario, una stima asintotica su a_n *non consente* di dedurre la monotonia di a_n. Ad esempio, se $a_n \sim \frac{1}{n}$ questo *non implica* che a_n sia una successione definitivamente decrescente. Il calcolo differenziale quindi in certi casi rende meccanica una verifica che per via algebrica potrebbe essere laboriosa.

Esempio 5.6. Stabilire il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sin\frac{1}{n} - \mathrm{Sh}\frac{1}{n}\right).$$

Per stimare il termine generale, usiamo gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni $\sin x$, $\mathrm{Sh} x$:

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right); \quad \mathrm{Sh}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

$$a_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) =$$

$$= n\left(-\frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim -\frac{1}{3n^2}.$$

La stima ci dice che si tratta di una serie a termini (definitivamente) negativi; per il criterio del confronto asintotico, la serie *converge*, per confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^{\alpha}$ con $\alpha > 1$.

Esercizi

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

5.71.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{\sqrt{n}}$

5.72.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log^3 n}{n}$

5.73.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin\frac{1}{n}$

5.74.★ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{1/n^2} - \cos\frac{1}{n}\right) \log n.$

5.75.★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{n} - \mathrm{Ch}\frac{1}{n}\right)$

Studiare la convergenza semplice e assoluta della seguente serie, giustificando le proprie conclusioni citando i criteri utilizzati.

5.76.★ $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

5.77.★ $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(\log n)}{n}.$$

5.78.★ $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \arctan n \cdot \arctan\frac{1}{n}\right].$$

5.79.★ $$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right).$$

5.80.★ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \sin n}{n^2+1}$$

Soluzioni § 5.1.

5.1. $a_n \sim \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2}$, perciò la serie *converge*, per il criterio del confronto asintotico, ed il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 2 > 1$.

5.2. $a_n \sim \frac{n^{1/3}}{n} = \frac{1}{n^{2/3}}$, perciò la serie *diverge*, per il criterio del confronto asintotico, ed il confronto con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

5.3. *Converge* per il criterio del confronto:

$$\frac{\log n}{n^3} = \frac{\log n}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ convergente.}$$

5.4. Per la gerarchia degli infiniti,

$$a_n \sim \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

dunque la serie *converge*, per confronto asintotico con quella di $\frac{1}{(n-1)!}$ (che a sua volta converge, ad esempio per il criterio del rapporto).

5.5.
$$a_n = \frac{3^{n-1+\frac{3}{n+1}}}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 3^{-1+\frac{3}{n+1}} \sim \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

dunque la serie *converge*, per confronto asintotico con la serie geometrica di ragione $3/4$.

5.6. Per la gerarchia degli infiniti,

$$a_n \sim \frac{\log^2 n}{n^2 \log n} = \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \text{ (definitivamente)}$$

(perché $\log n \leq \sqrt{n}$ definitivamente). Dunque per il criterio del confronto asintotico, e per confronto con la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ $(3/2 > 1)$ la serie *converge*.

5.7. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}\, 3^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{n}\, 3^{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{3}{n+1} \sim \frac{3}{n} \to 0$$

perciò per il criterio del rapporto, la serie *converge*.

5.8. Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$$

perciò per il criterio della radice, la serie *converge*.

5.9. Poiché $\frac{n^2+2n}{n^2+1} \to 1$,

$$e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e = e\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}-1} - 1\right) \sim e\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1\right) = e\left(\frac{2n-1}{n^2+1}\right) \sim \frac{2e}{n}.$$

Serie a termini (definitivamente) positivi; per il criterio del confronto asintotico, la serie *diverge*, per confronto con la serie armonica.

5.10. Poiché

$$\left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}\right) \to 1, \quad \log\left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}\right) \sim \left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4} - 1\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{n}-4}{n^2+4} \sim \frac{3}{n^{3/2}}.$$

Serie a termini (definitivamente) positivi; per il criterio del confronto asintotico, la serie *converge*, per confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$ con $\alpha > 1$.

5.11. Serie a termini positivi; applico il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 3^n} = \frac{3}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sim \frac{3}{n} \to 0 < 1,$$

perciò la serie *converge*.

5.12. Serie a termini positivi,

$$\frac{\log n}{n+3\sqrt{n}+5} \sim \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$$

per il criterio del confronto asintotico, il criterio del confronto, e il confronto con la serie armonica divergente, la serie *diverge*.

5.13.
$$e^{\frac{n+1}{3-n^2}} - e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\left(\frac{n+1}{3-n^2}-\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \sim \left(\frac{n+1}{3-n^2} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{n^2+n-3+n^2}{n(3-n^2)} \sim -\frac{1}{n}.$$

Si noti che la prima stima asintotica è giustificata dal fatto che $\left(\frac{n+1}{3-n^2} - \frac{1}{n}\right) \to 0$, il che, se non si fosse verificato a priori, segue dalla seconda stima asintotica.

Conclusione: la serie è a termini (definitivamente) negativi; per il criterio del confronto asintotico, la serie *diverge*, per confronto con la serie armonica.

5.14. Serie a termini positivi, applico il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}=\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}}\to\frac{1}{\sqrt{e}}<1,\ \text{perciò la serie converge.}$$

5.15. Serie a termini positivi. Poiché $\frac{n^3+1}{n^3-3n}\to 1$,

$$\log\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}\right)\log n\sim\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}-1\right)\log n=\left(\frac{1+3n}{n^3-3n}\right)\log n\sim\frac{3\log n}{n^2}.$$

Ora:
$$\frac{3\log n}{n^2}\le\frac{1}{n^{3/2}}\ \text{definitivamente,}$$

(perché $3\log n\le\sqrt{n}$ definitivamente) perciò per il criterio del confronto asintotico, il criterio del confronto, ed il confronto con la la serie armonica generalizzata di esponente $3/2$ (convergente), la serie *converge*.

5.16. Serie a termini positivi. Applico il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{3(n+1)}\cdot(n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{3^{3n}\cdot n!}=\frac{3^3(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}\sim\frac{27n}{4n^2}=\frac{27}{4n}\to 0,$$

perciò per il criterio del rapporto la serie converge.

5.17. Serie a termini positivi. Il fattore $e^{\sin n}$ non ammette limite, ma soddisfa le disuguaglianze

$$e^{-1}\le e^{\sin n}\le e.$$

Cominciamo a studiare il fattore $\quad \sin\frac{1}{n}+\sin(e^{-n})\sim\frac{1}{n}$

perché $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ e $\sin(e^{-n})\sim e^{-n}\ll\frac{1}{n}$. Poiché la serie armonica $\sum\frac{1}{n}$, *minoriamo*:

$$e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}+\sin(e^{-n})\right)\ge e^{-1}\left(\sin\frac{1}{n}+\sin(e^{-n})\right)\sim e^{-1}\cdot\frac{1}{n}$$

e concludiamo che, per il criterio del confronto e del confronto asintotico, e il confronto con la serie armonica (divergente), la serie *diverge*.

5.18. Serie a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge.

5.19.

(*a*)
$$0.\bar{4} = 0.4444... = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + ... = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = \frac{4}{9}.$$

(*b*)
$$0.\overline{35} = 0.353535... = \frac{35}{100} + \frac{35}{100^2} + \frac{35}{100^3} + ... = 35\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100^n} =$$

$$= 35\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) = \frac{35}{99}.$$

(*c*)
$$0.\bar{9} = 0.9999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ... = 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} =$$

$$= 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1.$$

(*d*)
$$0.2\overline{35} = 0.2353535... = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot 0.353535... =$$

(usando il procedimento del punto *b*)

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{35}{99} = \frac{233}{990}.$$

5.20. Converge assolutamente perché:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \text{ convergente.}$$

Quindi converge anche semplicemente.

5.21. Converge semplicemente per il criterio di Leibniz. Infatti è una serie a segni alterni e

$$\frac{1}{1+n+\sqrt{n}} \downarrow 0.$$

Non converge assolutamente perché

$$|a_n| \sim \frac{1}{n}, \text{ serie divergente.}$$

5.22. $e^{\frac{1}{n}} \to 1$ perciò la serie non converge semplicemente (perché il termine generale non tende a zero), e quindi neanche assolutamente. Si può dire che: la serie di partenza oscilla; la serie dei moduli diverge.

5.23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, a termini positivi, converge;
la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, a segni alterni, converge per il criterio di Leibniz.
Quindi la serie *converge semplicemente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{n}+(-1)^n n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

La prima serie converge (assolutamente), la seconda diverge (serie armonica), perciò la serie diverge, ossia: la serie di partenza *diverge assolutamente.*

Si noti il passaggio fatto per studiare il modulo:

$$|\sqrt{n}+(-1)^n n| = |(-1)^n((-1)^n \sqrt{n}+n)| = (-1)^n \sqrt{n}+n$$

perché $n \geq \pm\sqrt{n}$.

5.24.
$$\left| \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge ($3/2 > 1$, serie armonica generalizzata), quindi per il criterio del confronto la serie di partenza *converge assolutamente.* Pertanto *converge anche semplicemente.*

5.25. La serie è a segni alterni, $\frac{1}{\log n} \downarrow 0$, quindi per il criterio di Leibniz la serie *converge semplicemente.* Invece

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\log n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

diverge perché
$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

(serie armonica divergente) dunque per il criterio del confronto la serie *diverge assolutamente.*

5.26.
$$\left| e^{\sin n} \left(\sin \frac{1}{n} \right) \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \cos n \right| \leq$$

$$\leq e \left(\sin \frac{1}{n} \right) \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \sim e \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e}{n^{3/2}}$$

Per il criterio del confronto e del confronto asintotico, e il confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$, la serie di partenza *converge assolutamente* e quindi *converge semplicemente.*

5.27. Serie a termini di segno variabile;
$$|a_n| \leq \sin \frac{1}{n} \left| \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right| \sim \frac{1}{n} \left| -\frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n^2}.$$

Per il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico, per confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^{\alpha}$, la serie dei valori assoluti converge.

Quindi la serie di partenza *converge assolutamente*, e perciò *converge semplicemente.*

5.28. Convergenza assoluta:
$$\left| \frac{5n + (-1)^n n^2 + \log^4 n}{2n^3} \right| \sim \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n},$$

perciò per confronto asintotico con la serie armonica divergente, la serie di partenza *diverge assolutamente.*

Convergenza semplice:
$$\frac{5n + (-1)^n n^2 + \log^4 n}{2n^3} = \frac{5n + \log^4 n}{2n^3} + \frac{(-1)^n}{2n} \equiv a_n + b_n.$$

$a_n \geq 0$, $a_n \sim \frac{5n}{2n^3} = \frac{5}{2n^2}$, perciò $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ è una serie a segni alterni, convergente per il criterio di Leibniz.

Di conseguenza la serie di partenza *converge semplicemente.*

5.29. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2},$$

per il criterio del confronto asintotico ed il confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2 > 1$, la serie *converge.*

5.30. Serie a segni alterni, e poiché

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \downarrow 0,$$

per il criterio di Leibniz la serie *converge.*

5.31. Serie a termini positivi, applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n(\log n)^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\log n} \sim \frac{1}{\log n} \to 0 < 1,$$

perciò la serie *converge.*

5.32. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

per il criterio del confronto asintotico ed il confronto con la serie armonica, la serie *diverge.*

5.33. *Converge* perché converge assolutamente. La serie dei valori assoluti, a sua volta, converge per il criterio del rapporto. Infatti, se $b_n = \frac{2^n}{n!}$, si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1.$$

5.34. *Converge* perché è una serie a termini positivi, e per il criterio del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{1}{n^2}, \text{ serie convergente.}$$

5.35. *Converge* perché è una serie a segni alterni ($\cos(n\pi) = (-1)^n$),

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \downarrow 0,$$

perciò per il criterio di Leibniz converge.

5.36. *Converge* per il criterio del rapporto (serie a termini positivi):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2(n+1)}{n^2} \sim \frac{2}{n} \to 0 < 1.$$

5.37. Serie a termini positivi; per il criterio del confronto asintotico e del confronto:

$$a_n \sim \frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ perciò la serie } \textit{converge}.$$

5.38. Non converge perché il termine generale non tende a zero. Inoltre, studiando la successione s_n delle somme parziali, si vede che s_n non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$; pertanto la serie *oscilla*.

5.39. *Diverge* perché è una serie a termini positivi, e per il criterio del confronto:

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ divergente.}$$

5.40. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$$

perciò la serie *diverge*, per il criterio del confronto asintotico ed il confronto con la serie armonica.

5.41. Serie a termini positivi. Applico il criterio del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{2^n}{n!} \equiv b_n,$$

che è una serie convergente, come si vede dal criterio del rapporto: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$. Perciò la serie *converge*.

5.42. Serie a termini positivi. Applico il criterio del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}, \text{ perciò la serie } \textit{converge}.$$

5.43. Serie a termini positivi, criterio del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{3n^{7/4}}{\sqrt{3n^4}} = \frac{\sqrt{3}}{n^{1/4}}$$

diverge perché $1/4 < 1$ (serie armonica generalizzata).

5.44. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{3^n}{n!} = b_n$$

(per la gerarchia degli infiniti). Per il criterio del confronto asintotico la serie di a_n ha lo stesso carattere della serie di b_n. Studiamo quest'ultima serie col criterio del rapporto:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1,$$

perciò la serie converge (e anche la serie di partenza quindi *converge*).

5.45. Serie a termini positivi. Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1$$

quindi la serie *converge*.

5.46.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} + (-1)^n\right]\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n.$$

$$a_n \sim \frac{1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Perciò $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie a termini positivi convergente (per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$).

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ è una serie a segni alterni. Poiché

$$\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \text{ è monotona decrescente e infinitesima,}$$

per il criterio di Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge. Quindi la serie di partenza *converge*.

5.47. $$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n n+\sin n}{n^2\log n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2\log n}.$$

La prima serie è a segni alterni e converge per il criterio di Leibniz perché $\frac{1}{n\log n}\downarrow 0$; la seconda serie converge perché converge assolutamente, in quanto:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2\log n}\right|\leq\frac{1}{n^2\log n}\leq\frac{1}{n^2},$$

convergente per il criterio del confronto, e il confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^{\alpha}$ con $\alpha>1$. Essendo somma di due serie convergenti, la serie di partenza *converge.*

5.48. Poiché

$$|\cos n|\leq 1, \text{ si ha anche } |\sin(\cos n)|\leq\sin 1$$

(L'angolo 1 radiante è nel primo quadrante, perciò per $|x|\leq 1$ la funzione $\sin x$ è monotona crescente). Quindi

$$|(\sin(\cos n))^n|\leq(\sin 1)^n$$

e poiché $0<\sin 1<1$, per confronto con la serie geometrica di ragione $\sin 1$ la serie di partenza converge assolutamente, e quindi semplicemente.

5.49. Poiché

$$|\sin n|\leq 1, \text{ si ha anche } \cos(\sin n)\geq\cos 1$$

(L'angolo 1 radiante è nel primo quadrante, perciò per $0\leq x\leq 1$ la funzione $\cos x$ è monotona decrescente, quindi $\cos x\geq\cos 1$; poiché $\cos x$ è pari questo vale anche per $|x|\leq 1$). Allora

$$\frac{\cos(\sin n)}{n}\geq\frac{\cos 1}{n}$$

e per confronto con la serie armonica, divergente, la serie di partenza diverge.

5.50. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{2n}}=\frac{9}{7}$$

5.51. $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}}{4^n}=\frac{12}{7}.$$

5.52. $$|a_n| \leq \sqrt{n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 \sim \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

perciò per il criterio del confronto e del confronto asintotico, la serie *converge assolutamente*. Pertanto, *converge anche semplicemente*.

5.53. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{n}{1+n^2}\cdot\sqrt{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

perciò la serie *diverge*, per confronto asintotico con $\frac{1}{n^{1/2}}$ $(1/2 < 1)$

5.54. Serie a segni alterni. $\tan\frac{1}{n} \to 0$ ed è monotona decrescente ($\frac{1}{n}$ decresce, e per $x \in (0,1)$ $\tan x$ cresce). Per il criterio di Leibniz, la serie *converge semplicemente.*

$$|a_n| = \tan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

e per confronto asintotico con la serie armonica, la serie *diverge assolutamente.*

5.55. $$a_n \sim \frac{n^3}{n^3+2n} - 1 = \frac{-2n}{n^3+2n} \sim -\frac{2}{n^2}$$

perciò è una serie a termini negativi, e per confronto asintotico con la serie di $\frac{1}{n^2}$ la serie *converge* (semplicemente e assolutamente).

5.56. Serie a termini positivi.

$$n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n},$$

perciò la serie *diverge* per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica divergente.

5.57. $$\left|(\sin n)\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Perciò per il criterio del confronto e del confronto asintotico, e il confronto con la serie armonica generalizzata di $1/n^2$, la serie *converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.*

5.58. Serie a termini positivi.

$$\left[\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^\alpha = \left[\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

perciò per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata, la serie *converge per* $\alpha > 1$*, altrimenti diverge.*

5.59. Serie a termini positivi.

$$\frac{\left(e^{1/n}-1\right)}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

perciò per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha = 3/2$, la serie *converge.*

5.60. Serie a termini positivi.

$$\frac{e^{1/n}}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

perciò per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica, la serie *diverge.*

5.61. Serie a termini positivi.

$$n \sin\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2},$$

perciò per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$, la serie *converge.*

5.62. Poiché $\frac{1+n}{n+2} \to 1$,

$$\log\left(\frac{1+n}{n+2}\right) \sim \frac{1+n}{n+2} - 1 = \frac{-1}{n+2} \sim -\frac{1}{n},$$

perciò la serie è a termini negativi e per confronto asintotico con la serie armonica, *diverge.*

5.63. Serie a termini positivi.

$$\frac{e^{1/n}-1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2},$$

perciò la serie *converge* per il criterio del confronto asintotico.

5.64. Serie a termini positivi. Poiché $\left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right) \to 1$,

$$\log\left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right) \sim \left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right) - 1 = \frac{n-2}{n^2+2} \sim \frac{1}{n},$$

perciò la serie *diverge*, per confornto asintotico con la serie armonica.

5.65. Serie a termini positivi.

$$a_n \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^{3/2}},$$

perciò per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha = 3/2$, la serie *converge.*

5.66.
$$\left| \sin n \cdot \sin \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n} \right| \leq \sin \frac{1}{n} \cdot \tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

Per il criterio del confronto e del confronto asintotico, la serie di partenza *converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.*

5.67. Serie a termini positivi, criterio del confronto asintotico:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^{9/2}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

serie armonica generalizzata convergente perché $\frac{3}{2} > 1$. Per confronto asintotico, la serie di partenza *converge.*

5.68. Serie a termini positivi.

$$\frac{\sqrt[3]{n} \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}} \sim \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}.$$

Poiché $\frac{7}{6} > 1$, la serie *converge* per il criterio del confronto asintotico, per confronto con la serie armonica generalizzata.

5.69. Serie a termini positivi. Poiché $\frac{n^2+2n-2}{n^2+1} \to 1$,

$$\log\left(\frac{n^2+2n-2}{n^2+1}\right) \sim \frac{n^2+2n-2}{n^2+1} - 1 = \frac{2}{n}.$$

Per confronto asintotico con la serie armonica, la serie di partenza *diverge.*

5.70. Convergenza assoluta:

$$\left| \frac{n^2 \cos(n\pi)}{3n^2 - 5n^3} \right| = \frac{n^2}{5n^3 - 3n^2} \sim \frac{1}{5n},$$

divergente, perciò la serie *diverge assolutamente.*

Convergenza semplice:

$$\frac{n^2\cos(n\pi)}{3n^2-5n^3}=(-1)^{n+1}\frac{1}{5n-3};$$

si tratta quindi di una serie a segni alterni. $\frac{1}{5n-3}\downarrow 0$, perciò per il criterio di Leibniz, la serie *converge semplicemente.*

5.71. Serie a segni alterni, *converge* per il criterio di Leibniz. Per poterlo applicare, occorre provare che $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ è *decrescente*, (e non solo che tende a zero, il che è vero per la "gerarchia degli infiniti"). Questo si può fare calcolando la derivata prima della funzione

$$f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}},\ f'(x)=\frac{2-\log x}{x^{3/2}},$$

e verificando che per x abbastanza grande questa è negativa. Infatti, $f'(x)<0$ per $\log x>2, x>e^2$, quindi $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$ è decrescente per $n\geq 8$.

5.72. Serie a segni alterni, *converge* per il criterio di Leibniz. Per poterlo applicare, occorre provare che $\frac{\log^3 n}{n}$ è decrescente. Calcoliamo perciò la derivata prima della funzione

$$f(x)=\frac{\log^3 x}{x},\ f'(x)=\frac{3\log^2 x-\log^3 x}{x^2}.$$

$f'(x)<0$ per $\log x>3, x>e^3=20.08\ldots$; quindi $\frac{\log^3 n}{n}$ è decrescente per $n\geq 21$.

5.73. Serie a segni alterni. La stima asintotica

$$a_n=\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

implica che il termine generale tende a zero, ma non implica la monotonia di a_n. (Attenzione: se $a_n\sim b_n$ e b_n è decrescente, questo non implica che a_n sia decrescente!).

Posto $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, calcoliamo:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\cos\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)$$

Lo studio del segno di $f'(x)$ non è elementare. Ci basta però affermare che per $x\to+\infty$ è $f'(x)$ definitivamente negativa; a tal fine usiamo gli sviluppi di MacLauirn di sin e cos:

$$\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{1}{x}(1+o(1))=-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

definitivamente. Perciò $\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$ è definitivamente decrescente, e per il criterio di Leibniz la serie converge.

5.74. $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\log n =$$

$$= \left(\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\log n \sim \frac{3\log n}{2n^2} < \frac{3}{2n^{3/2}},$$

dove l'ultima disuguaglianza vale almeno definitivamente, perché $\frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$.

Quindi la serie è a termini (definitivamente) positivi; per il criterio del confronto asintotico, il criterio del confronto, e il confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$, la serie *converge.*

5.75. $$\sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{n} - \mathrm{Ch}\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Serie a termini negativi; per il criterio del confronto asintotico, ed il confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $3/2$ (convergente), la serie *converge.*

5.76. Serie a termini di segno variabile.

$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{n}\right)\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

perciò, per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$ con $\alpha < 1$, la serie dei valori assoluti diverge, e la serie di partenza *diverge assolutamente.*

Per studiare la convergenza semplice scriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

E' una serie a segni (definitivamente) alterni, con

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{n} \geq 0; a_n \to 0.$$

Verifichiamo la monotonia di a_n.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sin\frac{1}{x};$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \sim -\frac{1}{2x^{3/2}} < 0$$

perciò $f'(x)$ è definitivamente negativa per $x \to +\infty$, $f(x)$ è definitivamente decrescente per $x \to +\infty$, $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, e per il criterio di Leibniz la serie *converge semplicemente.*

5.77. La serie è (definitivamente) a segni alterni, e $\frac{\log(\log n)}{n} \to 0$ per la gerarchia degli infiniti. Verifichiamo la monotonia. Posto

$$f(x) = \frac{\log(\log x)}{x},$$

si ha:
$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x\log x} - \log(\log x)}{x^2} = \frac{1 - \log x \cdot \log(\log x)}{x^2 \log x} \leq 0$$

per
$$\log x \cdot \log(\log x) \geq 1,$$

il che è vero definitivamente per $x \to +\infty$. Quindi la successione $\frac{\log(\log n)}{n}$ è (definitivamente) monotona, e per il criterio di Leibniz la serie *converge semplicemente.*

Invece, *diverge assolutamente* perché

$$\left|(-1)^n \frac{\log(\log n)}{n}\right| = \frac{\log(\log n)}{n} \geq \frac{1}{n},$$

e per confronto con la serie armonica (divergente) si conclude quanto affermato.

5.78. Si ha:

$$\left|(-1)^n \arctan n \cdot \arctan\frac{1}{n}\right| = \arctan n \cdot \arctan\frac{1}{n} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n},$$

perciò la serie *diverge assolutamente* (criterio del confronto asintotico, confronto con serie armonica, divergente).

La serie di partenza è a segni alterni, con termine generale tendente a zero.

Per applicare il criterio di Leibniz verifichiamo la monotonia di $b_n = \arctan n \cdot \arctan\frac{1}{n}$ calcolando

$$f(x) = \arctan x \cdot \arctan\frac{1}{x};$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1}{x} + \arctan x\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[\arctan\frac{1}{x} - \arctan x\right] \sim -\frac{\pi}{2x^2}$$

per $x \to +\infty$. Quindi f' è definitivamente negativa, f è definitivamente decrescente, e b_n è definitivamente decrescente. Per il criterio di Leibniz, la serie di partenza converge semplicemente.

5.79. Serie a termini di segno variabile.

$$\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) \sim \frac{n-2}{n+1} - 1 = \frac{-3}{n+1} \sim -\frac{3}{n} < 0.$$

$$\left|(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)\right| \sim \frac{3}{n}$$

perciò, per il criterio del confronto asintotico e il confronto con la serie armonica, la serie dei valori assoluti diverge, e la serie di partenza *diverge assolutamente.*

Per studiare la convergenza semplice scriviamo

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

con

$$a_n = -\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) > 0.$$

E' una serie a segni (definitivamente) alterni, con $a_n \to 0$.

Verifichiamo la monotonia di a_n.

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-2}\right);$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{-3}{(x+1)(x-2)} \sim -\frac{2}{x^2} < 0$$

perciò $f'(x)$ è definitivamente negativa per $x \to +\infty$, $f(x)$ è definitivamente decrescente per $x \to +\infty$, $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente, e per il criterio di Leibniz la serie *converge semplicemente.*

5.80. Convergenza assoluta:

$$\left|\frac{(-1)^n n+\sin n}{n^2+1}\right| \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n},$$

pertanto per confronto asintotico con la serie armonica divergente, la serie di partenza *diverge assolutamente*. Convergenza semplice:

$$\frac{(-1)^n n+\sin n}{n^2+1} = (-1)^n \frac{n}{n^2+1} + \frac{\sin n}{n^2+1} \equiv a_n + b_n.$$

Ora:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per il criterio di Leibniz, perché $\frac{n}{n^2+1} \downarrow 0$
(verifica: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \sim$ (per $x \to -\infty$) $-\frac{1}{x^2} < 0$, dunque la funzione è definitivamente decrescente);

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge per il criterio della convergenza assoluta, perché

$$\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Pertanto la serie di partenza *converge semplicemente*.

5.2. Serie di Taylor ed esponenziale complesso

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 5, §2.

Coerentemente all'impostazione del libro di testo, in questo paragrafo ci occuperemo solo delle serie di Taylor delle funzioni elementari e delle immediate estensioni di queste formule al campo complesso (esponenziale complesso, serie geometrica nel campo complesso). Una discussione più ampia delle proprietà delle serie di potenze è svolta nel vol. 2 del libro di testo, quindi non rientra in questo volume.

Esempi svolti

Esempio 5.7. Calcolare la somma della seguente serie, riconoscendola come serie di potenze notevole, calcolata in un punto particolare.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Utilizziamo la serie di Taylor della funzione

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ valida per } |x| < 1, \text{ applicandola a } x = -\frac{1}{2}:$$

$$\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n},$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2.$$

Esempio 5.8. Calcolare la somma s della seguente serie nel campo complesso; quindi calcolare la parte reale di s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2^n}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2-(\cos 1 + i\sin 1)} = \frac{2(2-\cos 1 + i\sin 1)}{(2-\cos 1)^2 + \sin^2 1} =$$

$$= \frac{2(2-\cos 1)+i2\sin 1}{5-4\cos 1} = \frac{2(2-\cos 1)}{5-4\cos 1} + i\frac{2\sin 1}{5-4\cos 1}.$$

La parte reale della somma è

$$\frac{2(2-\cos 1)}{5-4\cos 1}.$$

Esercizi

Calcolare la somma della seguente serie nel campo complesso (riconoscendola come serie di potenze notevole, calcolata in un punto particolare), e riscrivere la somma della serie in forma algebrica.

5.81.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(1+i)^n.$

5.82.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!3^n}.$

5.83.★ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n e^{-3n}.$

5.84.★ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!}.$

5.85.★ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(2n)!}.$

5.86.★ Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Calcolare la parte reale del numero complesso:

$$e^{-e^{iz}}.$$

5.87.★ Calcolare la somma s della seguente serie nel campo complesso; quindi scrivere s in forma algebrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(1+2i)^n}{3^{2n}}.$$

Scrivere in forma algebrica il seguente numero complesso, dove $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5.88. e^{iz^2}

5.89. e^{iz}

5.90. $e^{\bar{z}+i}$

5.91. e^{z^2-2i}

Soluzioni § 5.2.

5.81.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+i)^n=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1+i}{2}\right)^n\right]-1=$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1+i}{2}}-1=\frac{2}{3+i}-1=$$
$$=\frac{-1-i}{3+i}=\frac{(-1-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-4-2i}{10}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

Abbiamo utilizzato la serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\text{ valida per }|z|<1,\text{ applicandola a }z=-\frac{1+i}{2}.$$

5.82. Utilizziamo la serie di Taylor della funzione
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{ valida per ogni }x\in\mathbb{R},\text{ applicandola a }x=-\frac{1}{3}:$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!3^n}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{3})^n}{n!}\right]-1=e^{-1/3}-1.$$

5.83.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n2^ne^{-3n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{e^3}\right)^n-1=\frac{1}{1+\frac{2}{e^3}}-1=-\frac{2}{2+e^3}.$$

Abbiamo utilizzato la serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\text{ valida per }|x|<1,\text{ applicandola a }x=-\frac{2}{e^3}.$$

5.84. Utilizziamo la serie di Taylor della funzione
$$\mathrm{Sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\text{ valida per ogni }x\in\mathbb{R},\text{ applicandola a }x=2:$$

$$\mathrm{Sh}2 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!}.$$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{Sh}2}{2} - 1 \simeq 0.81343.$$

5.85. Utilizziamo la serie di Taylor della funzione

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ valida per ogni $x \in \mathbb{R}$, applicandola a $x = \frac{1}{2}$:

$$\cos\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n)!}.$$

Quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{Sh}2}{2} - 1 \simeq 0.81343.$$

5.86.
$$e^{-e^{iz}} = e^{-e^{ix-y}} = e^{-e^{-y}(\cos x + i\sin x)} = e^{-e^{-y}\cos x}e^{-ie^{-y}\sin x} =$$
$$= e^{-e^{-y}\cos x}(\cos(e^{-y}\sin x) - i\sin(e^{-y}\sin x)).$$

Quindi
$$\mathrm{Re}\left(e^{-e^{iz}}\right) = e^{-e^{-y}\cos x}\cos(e^{-y}\sin x).$$

5.87.
$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{(1+2i)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i(1+2i)}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i-2}{9}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{i-2}{9}\right)} = \frac{9}{11-i} = \frac{9(11+i)}{122} = \frac{99}{122} + \frac{9}{122}i.$$

5.88.
$$e^{iz^2} = e^{-2xy}\cos\left(x^2-y^2\right) + ie^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right).$$

5.89.
$$e^{iz} = e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x.$$

5.90.
$$e^{\bar{z}+i} = e^{x}\cos(1-y) + ie^{x}\sin(1-y).$$

5.91.
$$e^{z^2-2i} = e^{x^2-y^2}\cos(2xy-2) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy-2)$$

Cap. 6. Calcolo integrale per funzioni di una variabile

6.1. Calcolo di integrali definiti e indefiniti

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, §5.

Una premessa importante. Il calcolo degli integrali indefiniti e definiti (mediante la ricerca di una primitiva e l'applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale), al livello medio richiesto in un corso di base, è un insieme di procedure standard che occorre studiare e applicare. Più precisamente, come descritto in modo abbastanza analitico nel libro di testo, per *un certo numero di ben precise classi di funzioni,* si studia qual è la procedura per determinarne la primitiva. Questo significa che lo studente, posto di fronte a una funzione di uno di questi tipi, dev'essere in grado di *delineare a priori i passi* del procedimento con cui ne calcolerà la primitiva, semplicemente *osservando attentamente l'aspetto della funzione integranda, e non invece eseguendo "tentativi"* sulla base di un insieme di metodi studiati in astratto.

Nel libro di testo, la cui scansione seguiremo anche qui, si presentano dettagliatamente (e si illustrano con esempi svolti) le procedure per calcolare la primitiva di certe classi di funzioni razionali, irrazionali, trigonometriche, e alcune altre classi di funzioni per le quali è adatta l'integrazione per parti o certe sostituzioni standard; a questi argomenti, che hanno a che fare col calcolo delle primitive, si aggiungono poche osservazioni specificamente rivolte al calcolo degli integrali definiti, riguardanti il ruolo di simmetrie e valori assoluti negli integrali definiti.

Qui presenteremo prima alcuni esempi svolti ed esercizi assegnati, suddivisi per argomento, e successivamente un buon numero di esercizi assortiti, in cui il lavoro dello studente consiste proprio nell'orientarsi a riconoscere il tipo di integrale e quindi di procedura da utilizzare. Sottolineiamo ancora che *la lettura degli esempi svolti in questo eserciziario non sostituisce il preliminare studio attento e puntuale del libro di testo.*

6.1.A. Integrali immediati

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 4, par. 5.1.

Questi primi esempi richiedono solo lo studio della tabella degli integrali immediati e delle regole elementari di integrazione, quindi non si presentano esempi svolti.

Esercizi

6.1. $$\int \left(5x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 4\right) dx$$

6.2. $$\int \left(x^2 - 1\right)^2 dx$$

6.3. $$\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

6.4. $$\int (2x+1)^3 dx$$

6.5. $$\int \left(\frac{3}{1-5x} + 2\sqrt{3x+1}\right) dx$$

6.6. $$\int \left(3^x - 2^{3x+1} + 5e^{-7x}\right) dx$$

6.7. $$\int (2\sin 3x + 5\cos 2x) dx$$

6.8. $$\int (\tan x + 3\cot x) dx$$

6.9. $$\int (2\mathrm{Th}x - 5\mathrm{Coth}x) dx$$

6.10. $$\int (\mathrm{Sh}2x - 4\mathrm{Ch}3x)dx$$

Calcolo degli integrali definiti o indefiniti: precauzioni per l'uso

Si elencano qui alcune elementari (ma fondamentali) attenzioni da avere e alcuni errori grossolani (ma frequenti). L'elenco non è certamente esaustivo, ma vuole essere di stimolo ad affrontare l'argomento con spirito critico.

1. Il risultato è un numero o una classe di funzioni? Di fronte a un simbolo di integrale, per prima cosa chiediamoci: *devo calcolare un integrale definito o indefinito*?

a. Se è un *integrale indefinito*, il risultato è una *famiglia di funzioni*, ad esempio

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

(dove c indica una costante arbitraria).

Errore tipico: dimenticarsi la costante c (significa affermare che la funzione integranda ha una sola primitiva, mentre ne ha infinite!)

b. Se invece è un *integrale definito*, il risultato è *un numero*, ad esempio:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Errore tipico: aggiungere un "$+c$" nel risultato dell'integrale definito (è come affermare: questo integrale vale un numero qualsiasi! Dunque tutti i calcoli fatti sono stati inutili!)

2. Calcolo di integrali definiti mediante sostituzione. Per calcolare un integrale definito, si applica il teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi occorre trovare *una* primitiva dell'integranda, preliminarmente. Per far questo, talvolta si applica il *metodo di sostituzione*. A questo riguardo, tener presente che ci sono due diversi modi corretti di procedere:

a. Mediante opportuna sostituzione, *traformare l'integrale definito in un altro integrale definito*: in questo caso cambia l'integranda *e cambiano anche gli estremi di integrazione*, ad esempio:

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x} dx = \left[\log x = t; \frac{1}{x} dx = dt; t \in [0, \log 2]\right]$$

$$= \int_0^{\log 2} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{3}\log^3 2.$$

Errore tipico: eseguire la sostituzione nell'integranda ma lasciare inalterati gli estremi di integrazione.

b. Oppure, si può lasciare da parte momentaneamente l'integrale definito che si deve calcolare, e si comincia a cercare una primitiva dell'integranda. Nell'esempio precedente, si comincia a calcolare

$$\int \frac{\log^2 x}{x} dx = \left[\log x = t; \frac{1}{x} dx = dt\right] = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3}\log^3 x + c.$$

La cosa importante da osservare è che, in questo caso, una volta trovata la primitiva rispetto alla nuova variabile t (in questo caso, $t^3/3 + c$), occorre ritornare alla variabile originaria x (in questo caso, ricordando che $t = \log x$). A questo punto si calcola l'integrale definito sostituendo gli estremi di partenza nella primitiva trovata:

$$\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x} dx = \left[\frac{1}{3}\log^3 x\right]_1^2 = \frac{1}{3}\log^3 2.$$

Errore tipico: calcolare la primitiva rispetto a t e dimenticasi di tornare alla x*, sostituendo gli estremi* $1, 2$ *(nell'esempio) in* $t^3/3$ *anziché in* $(\log^3 x)/3$.

3. Non dimenticare le regole di derivazione. Dovendo calcolare una primitiva, ricordarsi che si sta effettuando l'operazione inversa della derivata. Occorre quindi tener sempre presenti le regole di derivazione, e non inventarne di inesistenti. Ad esempio:

a. La regola di *integrazione per sostituzione* è una rilettura della regola di *derivazione delle funzioni composte*. Un errore grossolano e frequente è dimenticarsi di questa regola, e scrivere ad esempio:

$$\int \log^2 x dx = \frac{1}{3}\log^3 x + c \quad \textit{FALSO!!}$$

(come se la derivata di $\frac{1}{3}\log^3 x$ fosse semplicemente $\log^2 x$; cosa dice invece la regola di derivazione della funzione composta?)

b. Per *integrare il prodotto* di due funzioni, è utile talvolta la formula di *integrazione per parti*, che è una rilettura della formula di *derivazione del prodotto*. Un errore grossolano è scrivere ad esempio

$$\int x\mathrm{sin}x dx = -\frac{x^2}{2}\mathrm{cos}x + c \quad \textit{FALSO!!}$$

(come se la derivata del prodotto $-\frac{x^2}{2}\mathrm{cos}x$ fosse il prodotto delle derivate dei due fattori: cosa dice invece la formula di derivazione del prodotto?)

4. Riflettere sul segno di un integrale definito. Dovendo calcolare un integrale definito, è bene chiedersi se il risultato numerico trovato è ragionevole, almeno dal punto di vista del *segno*. Ad esempio:

a. Se la funzione integranda è sempre positiva (negativa) sull'intervallo di integrazione, anche l'integrale definito sarà positivo (negativo): un risultato diverso indica che si è commesso un errore.

b. Se l'integrale risulta valere 0, è bene rifletterci sopra (difficilmente questo avviene per caso): la funzione presenta, nell'intervallo di integrazione, qualche simmetria tale da giustificare l'annullamento dell'integrale? (Se è così era meglio osservarlo da subito e non fare calcoli inutili). O si è commesso qualche errore? (Spesso, un errore di segno che porta a cancellare termini che invece si sommano).

c. Se l'integrale ha un significato fisico o geometrico, solitamente il suo segno si può prevedere prima del calcolo. (Ad esempio, una massa si può calcolare come integrale della densità; un risultato negativo è certamente sbagliato).

6.1.B. Integrazione di funzioni razionali

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 5.2.

Il paragrafo citato illustra dettagliatamente la procedura da seguire nei casi di cui ci occuperemo, e si invita a studiarlo con attenzione prima di affrontare i prossimi esempi ed esercizi.

Esempi svolti

Esempio 6.1. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx.$$

Lavoriamo prima sull'integrale indefinito. Poiché è una funzione razionale con il numeratore di grado $\geq$ del grado del denominatore, per prima cosa bisogna eseguire la divisione di polinomi:

$$x^3 : \left(x^2 + x - 2\right) \text{ dà quoziente } (x-1) \text{ e resto } (3x-2),$$

ossia
$$\frac{x^3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2}.$$

Il polinomio $(x-1)$ si integrerà elementarmente; la funzione razionale $\frac{3x-2}{x^2+x-2}$ ha denominatore di 2° grado. Osserviamo che il denominatore ha due radici distinte, ossia si fattorizza come

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2),$$

quindi occorre applicare il metodo dei fratti semplici per riscrivere

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

I coefficienti a, b si determinano ora con i passaggi:

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$3x - 2 = x(a+b) + (2a-b)$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a-b=-2 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{3},\ b = \frac{8}{3},\ \text{quindi}$$

$$\frac{x^3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2}\right)$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+x-2}dx = \int \left[x - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{8}{x+2}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{8}{3}\log|x+2| + c,$$

che è l'integrale indefinito. Calcoliamo ora l'integrale definito:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{8}{3}\log(x+2)\right]_2^3 =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\log 2 + \frac{8}{3}\log 5 - \frac{8}{3}\log 4 = \frac{3}{2} - 5\log 2 + \frac{8}{3}\log 5.$$

Esempio 6.2. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{x+5}{x^2+3x+4}\,dx.$$

Funzione razionale; il numeratore ha grado $<$ del grado del denominatore (non si esegue la divisione); il denominatore ha grado 2 ed è irriducibile. La funzione si integra perciò mediante funzioni logaritmo e arcotangente, con la procedura standard:

a) prima si utilizza la parte in x a numeratore per far comparire la derivata del denominatore:

$$\frac{x+5}{x^2+3x+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3x+4}.$$

Così la prima frazione si potrà integrare mediante il logaritmo del denominatore.

b) Sulla seconda frazione, che ha numeratore costante e denominatore irriducibile, si riscrive il denominatore come somma di quadrati,

$$x^2+3x+4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

e ci si riconduce alla derivata di una funzione arcotangente tenendo presente che

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c;$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x+b}{a}\right) + c.$$

Quindi:

$$\int \frac{x+5}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+3x+4\right) + \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+3x+4\right) + \sqrt{7}\arctan\left(\frac{3+2x}{\sqrt{7}}\right) + c.$$

Esempio 6.3. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx.$$

Funzione razionale; il numeratore ha grado $<$ del grado del denominatore (non si esegue la divisione); il denominatore ha grado 2 ed è un quadrato perfetto:

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2.$$

L'integrale si calcola allora per sostituzione ponendo $t = x+3$:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)^2}dx =$$

$$[x+3 = t; dx = dt]$$

$$= \int \frac{2(t-3)+1}{t^2}dt = \int \frac{2t-5}{t^2}dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{5}{t^2}\right)dt =$$

$$= 2\log|t| + \frac{5}{t} + c =$$

$$= 2\log|x+3| + \frac{5}{x+3} + c$$

che è la primitiva cercata.

Si osservi che l'utilità della sostituzione è permettere, successivamente, di spezzare la frazione in somma di potenze (negative) di t, che si integrano una per una. Tenendo conto di questo, con un po' di osservazione si può raggiungere direttamente l'obiettivo senza nessuna sostituzione, così:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{2(x+3)-5}{(x+3)^2}dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} \right) dx = 2\log|x+3| + \frac{5}{x+3} + c.$$

Esempio 6.4. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^4-1}dx.$$

Funzione razionale; il numeratore ha grado $<$ del grado del denominatore (non si esegue la divisione); il denominatore ha grado > 2, quindi va per prima cosa decomposto in polinomi irriducibili:

$$x^4 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$$

Ora col metodo dei fratti semplici bisogna riscrivere la frazione come somma:

$$\frac{1+2x^2}{x^4-1} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{cx+d}{(x^2+1)}.$$

Si osservi la forma della scomposizione: i denominatori sono i fattori irriducibili del denominatore di partenza; nelle frazioni a secondo membro, il numeratore incognito è sempre di un grado inferiore al denominatore corrispondente. Occorre ora fare denominatore comune a 2° membro e risolvere il sistema di 4 equazioni in 4 incognite, per trovare a, b, c, d.

Un po' di osservazione algebrica può risparmiare fatica: se poniamo $b = -a$ e $c = 0$, otteniamo

$$\frac{1+2x^2}{x^4-1} = \frac{a}{(x-1)} - \frac{a}{(x+1)} + \frac{d}{(x^2+1)} = \frac{2a}{(x^2-1)} + \frac{d}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{x^2(2a+d)+(2a-d)}{x^4-1}$$

che porta al sistema (risolubile) di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2a + d = 2 \\ 2a - d = 1 \end{cases}$$

cioè
$$a = \frac{3}{4}, d = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1 + 2x^2}{x^4 - 1} = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+1)}$$

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^4 - 1} dx = \frac{3}{4}\int \left[\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right] dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)} =$$

$$= \frac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

Esercizi sull'integrazione di funzioni razionali

Si vedano anche gli Esercizi di riepilogo nel § 6.1.G.

6.11.★ $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2+3} dx$

6.12.★ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2+2x+5} dx$

6.13.★ $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+3x+2} dx$

6.14.★ $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+3x+3} dx$

6.15.★ $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+2\sqrt{2}x+2} dx$

6.16.★ $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-1} dx$

6.17.★ $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2(x+1)} dx.$

6.18.★ $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(\frac{x+1}{x^2+4x+7}\right) dx$

6.19. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+3x+3} dx$

6.20. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^3}{x^2+4x+3} dx$

6.1.C. Integrazione per parti

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 5.3.

Il paragrafo citato illustra dettagliatamente la procedura da seguire nei casi di cui ci occuperemo, e si invita a studiarlo con attenzione prima di affrontare i prossimi esempi ed esercizi.

Esempi svolti

Esempio 6.5. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x \, dx.$$

Integriamo per parti, derivando la potenza di x e integrando la funzione trigonometrica:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx =$$

integriamo di nuovo per parti, derivando ancora la potenza di x e integrando la funzione trigonometrica:

$$= -x^2 \cos x + 2\left\{ x \sin x - \int \sin x \, dx \right\} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x \sin x + c.$$

Dalla primitiva calcoliamo ora l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x \, dx = \left[\left(2 - x^2\right)\cos x + 2x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(2 - \frac{\pi^2}{9}\right)\frac{1}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 = -1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int x^n f(x) dx$$

(con n intero positivo) dove $f(x)$ è una delle seguenti:

$$\sin(ax);\ \cos(ax);\ a^x; \mathrm{Sh}(ax); \mathrm{Ch}(ax).$$

In tutti questi casi, si integra per parti n volte, sempre derivando la potenza di x.

Esempio 6.6. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int e^{-x} \sin x \cos x \, dx.$$

Conviene anzitutto riscrivere

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

in modo che l'integranda risulti il prodotto di *due*, e non di tre funzioni. Quindi si integra per parti. La scelta di f' e g in questo primo passaggio non è importante; facciamo così:

$$I = \int e^{-x} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \underset{f'}{e^{-x}} \underset{g}{\sin}(2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) \, dx \right\} =$$

ora integriamo nuovamente per parti; l'importante è scegliere f' e g coerentemente alla scelta fatta al primo passaggio (per noi, f' è l'esponenziale e g la funzione trigonometrica)

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) + \left\{ -e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) \, dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x) - e^{-x} \cos(2x) - 4I.$$

Abbiamo quindi stabilito che:

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x) - e^{-x}\cos(2x) - 4I$$

da cui, risolvendo l'equazione in I,

$$I = \frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x) - e^{-x}\cos(2x)\right\} + c =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{10}(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + c.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$I = \int f(x)g(x)dx$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni tra le seguenti:

$$\sin(ax);\ \cos(ax);\ a^x; \mathrm{Sh}(ax); \mathrm{Ch}(ax).$$

In tutti questi casi, si integra per parti 2 volte (scegliendo coerentemente f' e g nei due passaggi), e così facendo si trova un'equazione in I, che risolta dà la primitiva cercata.

Se sia f che g sono $\sin(ax)$ o $\cos(ax)$ c'è un modo più semplice per trovare la primitiva, mediante le formule di duplicazione o di prostaferesi (si veda il § 6.1.D sull'integrazione di funzioni trigonometriche).

Esempio 6.7. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int x\log^2 x\, dx.$$

Integriamo per parti derivando la funzione logaritmica:

$$\int \underset{f'}{x}\,\underset{g}{\log^2 x}\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2\frac{\log x}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \underset{f'}{x}\,\underset{g}{\log x} dx =$$

integriamo di nuovo per parti, derivando ancora la funzione logaritmica:

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \left(\frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2 + c.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int x^\alpha (\log_a x)^n dx$$

(con n intero positivo, $\alpha \in \mathbb{R}$). In tutti questi casi, si integra per parti n volte, sempre derivando la potenza di $\log_a x$.

Come caso particolare, naturalmente, ci sono gli integrali

$$\int (\log_a x)^n dx$$

in cui si deriva $(\log_a x)^n$ e si integra 1.

Esempio 6.8. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx.$$

Integriamo per parti, derivando $\arctan x$ e integrando la potenza di x:

$$\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3(1+x^2)}dx =$$

come si vede, ci si è ricondotti all'integrale di una funzione razionale, che ora si calcola con i metodi standard:

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left[-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(1+x^2)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log 2.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int x^k \text{arctan} x \, dx$$

(con k intero relativo). In tutti questi casi, si integra per parti una volta derivando arctan$x$, e questo riconduce all'integrazione di una funzione razionale.

Come caso particolare, naturalmente, c'è l'integrale

$$\int \text{arctan} x \, dx$$

in cui si deriva arctan e si integra 1.

Esercizi sull'integrazione per parti

Si vedano anche gli Esercizi di riepilogo nel § 6.1.G.

6.21.★ $\int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx$

6.22.★ $\int_0^1 x^2 \text{Sh} x \, dx$

6.23.★ $\int x \log_2 x \, dx$

6.24.★ $\int x^2 \sin x \cos x \, dx$

6.25.★ $\int 2^x \sin(3x) \, dx$

6.26. $\int_0^\pi x \sin x \, dx$

6.27. $\int e^{-2x} \sin 3x \, dx$

6.28.★ $\int \frac{\text{arctan} x}{x^2} \, dx$

6.29.★ $\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{(x+2)^2} \, dx$

6.30. $\int_0^\pi \sin x \, \text{Ch} x \, dx$

6.1.D. Integrazione di funzioni trigonometriche

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 5.4.

Il paragrafo citato illustra dettagliatamente la procedura da seguire nei casi di cui ci occuperemo, e si invita a studiarlo con attenzione prima di affrontare i prossimi esempi ed esercizi.

Esempi svolti

Esempio 6.9. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\, dx.$$

Osserviamo che se l'integranda si riscrive nella forma:

$$\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\cos x \cdot (1-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}$$

assume l'aspetto $\qquad f(\sin x)\cdot\cos x,$

il che suggerisce di eseguire la sostituzione:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\, dx =$$

$$\sin x = t; \cos x dx = dt; t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dx =$$

ci siamo ricondotti all'integrazione di una funzione razionale, che si effettua con i metodi standard:

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right) dx = [2\arctan t - t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int f(\sin x)\cos x dx; \int f(\cos x)\sin x dx \qquad (*)$$

che si affrontano eseguendo la sostituzione $\sin x = t$ (nel secondo caso, $\cos x = t$). Questo è solo un primo passo che semplifica la forma dell'integrale[1].

Tra i casi particolari interessanti che rientrano in questa classe, ricordiamo gli integrali

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m dx \qquad (**)$$

con n, m interi ≥ 0, e *almeno uno tra n, m dispari.* Usando, se necessario, l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si riconducono a una forma $(*)$.

Esempio 6.10. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx.$$

Si tratta di un integrale di forma $(**)$ ma con n, m entrambi pari, che quindi *non rientra* nella casistica dell'ultimo box. Occorre invece usare le formule di duplicazione per abbassare il grado del polinomio trigonometrico. Poiché

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

si ha: $$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2, \text{quindi:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx.$$

ora non conviene calcolare la primitive dell'integranda, ma invece osservare gli estremi di integrazione per dedurre che l'integrale

[1] I passi successivi dipendono dalla forma di f, e possono rientrare in una qualunque delle situazioni studiate. Se f è una funzione razionale, ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale, ma possono capitare anche altre situazioni (ad es., ridursi ad una integrazione per parti).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x dx$$

è nullo per simmetria (ponendo $2x = t$ si vede che è multiplo dell'integrale $\int_0^{\pi} \cos x dx = 0$), mentre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{4}$$

(integrale definito notevole[2], che useremo spesso). Quindi:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{16}\pi$$

e questo è l'integrale cercato.

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m dx \qquad (*)$$

con n, m interi non negativi, entrambi pari. Si risolvono per successivi abbassamenti di grado, utilizzando le identità trigonometriche

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Se si sta calcolando un integrale definito, è utile tener presenti anche le identità:

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \cos^2(kx) dx = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \sin^2(kx) dx = n\frac{\pi}{4}$$

per ogni n, k interi positivi.

Esempio 6.11. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

[2] v. libro di testo [BPS1], cap.6, §5.4, esempio 5.24.

Si tratta di una funzione razionale di $\cos x, \sin x$, che non rientra in situazioni più semplici già viste. Per queste si può usare la sostituzione notevole:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} =$$

$$\left[t = \tan\frac{x}{2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; t \in [0,1]\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

ora l'integrale è ricondotto a quello di una funzione razionale, che si risolve con le tecniche standard

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{$*$}$$

con R funzione razionale di due variabili. Mediante la sostituzione standard:

$$t = \tan\frac{x}{2};\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

si riconducono all'integrale di una funzione razionale di t.

Per la verità, il metodo precedente porta facilmente a funzioni razionali con polinomi di grado alto, e quindi in pratica difficilmente trattabili; va usato perciò quando non si vedono strade più semplici, e dopo aver semplificato al massimo la funzione.

Esercizi sull'integrazione di funzioni trigonometriche

Si vedano anche gli Esercizi di riepilogo nel § 6.1.G.

6.31.★ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$

6.32.★ $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

6.33.★ $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{2+\cos x}\,dx$

6.34.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}\,dx$

6.35. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(2x)\,dx$

6.36.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{2+\cos^2 x}\,dx$

6.37.★ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{3\sin x}\sin(2x)\,dx$

6.38.★ $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(4x)dx$

6.39. Dovendo calcolare

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin^2 x}\,dx$$

quale delle seguenti operazioni è *più conveniente*?

A la sostituzione $\sin x = t$

B la sostituzione $\cos x = t$

C l'uso delle formule parametriche $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ecc.

6.40. Dovendo calcolare

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\,dx$$

quale delle seguenti operazioni è *più conveniente*?

A la sostituzione $\sin x = t$

B la sostituzione $\cos x = t$

C l'uso delle formule parametriche $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ecc.

6.1.E. Integrazione di funzioni irrazionali

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 5.5.

Il paragrafo citato illustra dettagliatamente la procedura da seguire nei casi di cui ci occuperemo, e si invita a studiarlo con attenzione prima di affrontare i prossimi esempi ed esercizi.

Esempi svolti

Esempio 6.12. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx.$$

Integrale di una funzione irrazionale che coinvolge un'espressione del tipo $\sqrt{a^2-x^2}$; si affronta con la sostituzione $x = a\mathrm{sin}t$. Nel nostro caso:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \left[x = 2\mathrm{sin}t; dx = 2\mathrm{cos}t\,dt; t \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4\mathrm{cos}^2 t}}{4\mathrm{sin}^2 t} 2\mathrm{cos}t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{cos}^2 t}{\mathrm{sin}^2 t}\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{cot}^2 t\,dt =$$

$$\left(\text{ricordando che } (\mathrm{cot}t)' = -1 - \mathrm{cot}^2 t\right)$$

$$= -[t + \mathrm{cot}t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Si noti che nel passaggio $\sqrt{4\mathrm{cos}^2 t} = 2\mathrm{cos}t$ abbiamo sfruttato il fatto che nell'intervallo di integrazione $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ è $\mathrm{cos}t \geq 0$.

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \tag{*}$$

con R funzione razionale di due variabili. Mediante la sostituzione standard:

$$x = a\sin t$$

si riconducono all'integrale di una funzione razionale di $\cos t, \sin t$ che, a sua volta, si tratta coi metodi studiati nel § 6.1.D.

Esempio 6.13. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{4x^2 - 1}\, dx.$$

Integrale di una funzione irrazionale che coinvolge un'espressione del tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$; si affronta con la sostituzione $x = a\mathrm{Ch}t$. Nel nostro caso:

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{4x^2 - 1}\, dx = \left[2x = \mathrm{Ch}t; dx = \frac{\mathrm{Sh}t}{2} dt\right]$$

$$= \int_0^{\mathrm{SettCh}2} \frac{1}{2} \mathrm{Sh}^2 t dt = \frac{1}{4} [\mathrm{Sh}t\mathrm{Ch}t - t]_0^{\mathrm{SettCh}2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sqrt{3} - \mathrm{SettCh}2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{SettCh}2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\log\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

Qualche dettaglio relativo al calcolo appena fatto con le funzioni iperboliche inverse sarà dato nell'Osservazione poco sotto.

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

con R funzione razionale di due variabili. Mediante la sostituzione standard:

$$x = a\mathrm{Ch}t$$

si riconducono all'integrale di una funzione razionale di $\mathrm{Ch}t, \mathrm{Sh}t$, quindi a una funzione razionale di e^t che, a sua volta, mediante la sostituzione $e^t = u$ si può sempre ricondurre all'integrale di una funzione razionale di u.

Analogamente, la classe di funzioni

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$$

con R funzione razionale di due variabili, si tratta mediante la sostituzione standard:

$$x = a\text{Sh}t$$

Osservazione 6.1. Funzioni iperboliche inverse. Quando si calcola l'integrale definito di una funzione irrazionale mediante le sostituzioni $x = a\text{Ch}t$, $x = a\text{Sh}t$, entrano in gioco anche le *funzioni iperboliche inverse*. Ricordiamo che:

$$x = a\text{Ch}t \text{ (per } t > 0) \Rightarrow t = \text{SettCh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$$

$$x = a\text{Sh}t \Rightarrow t = \text{SettSh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right).$$

Capita spesso in queste circostanze di dover calcolare espressioni del tipo

$$\text{Ch}(\text{SettSh}\alpha) \text{ o } \text{Sh}(\text{SettCh}\alpha).$$

Ricordando la relazione $\text{Ch}^2 x = 1 + \text{Sh}^2 x$, si vede subito che

$$\text{Ch}(\text{SettSh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1};$$

$$\text{Sh}(\text{SettCh}\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

il che aiuta a semplificare queste espressioni.

Esempio 6.14. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int x^3 \sqrt{2x^2 + 1}\, dx.$$

L'integranda è una funzione irrazionale del tipo $R\left(x, \sqrt{2x^2+1}\right)$, che in base a quanto visto andrebbe trattato con la sostituzione $\sqrt{2}x = \mathrm{Sh}t$. Si può fare così, ma *in questo caso c'è una strada molto più semplice*, segnalata dalla presenza di una potenza dispari di x che moltiplica la radice quadrata. Eseguiamo la sostituzione:

$$\sqrt{2x^2+1} = t,$$

che porta a $$2x^2+1 = t^2; 4xdx = 2tdt; xdx = \frac{1}{2}tdt;$$

e quindi $$x^3dx = x^2 \cdot xdx = \frac{1}{2}(t^2-1)\frac{1}{2}tdt.$$

Così si ha: $$\int x^3\sqrt{2x^2+1}\,dx =$$

$$= \int t \cdot \frac{1}{2}(t^2-1)\frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4}\int \left(t^4-t^2\right)dt =$$

come si vede l'integrale è stato ridotto a quello di una funzione razionale, senza passare dall'utilizzo di funzioni iperboliche

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\left(2x^2+1\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(2x^2+1\right)^{3/2}\right) + c.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int x^{2n+1}R\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)dx$$

con n intero relativo e R funzione razionale. In questo caso si pone

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} = t,$$

che porta a

$$xdx = tdt; \;\; x^{2n+1}dx = \left(t^2 \mp a^2\right)^n tdt$$

e quindi trasforma l'integrale in quello di una funzione razionale di t.

Occorre rendersi conto che se si cerca di applicare questa sostituzione in un caso in cui non è presente una potenza *dispari* di x fuori dalla radice, ci si trova in un vicolo cieco: provare, nell'Esempio 6.12, a eseguire la sostituzione $t = \sqrt{4 - x^2}$, e nell'Esempio 6.13 a eseguire la sostituzione $t = \sqrt{4x^2 - 1}$. Cosa c'è che non funziona?

Esempio 6.15. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{2/3}}.$$

Si tratta di una funzione razionale delle potenze a esponente frazionario $x^{1/3}, x^{2/3}$. Eseguendo la sostituzione:

$$x^{1/3} = t$$

si riduce l'integrale a quello di una funzione razionale:

$$\int_1^8 \frac{dx}{x^{1/3} + x^{2/3}} =$$

$$x^{1/3} = t; x = t^3; x^{2/3} = t^2;\ dx = 3t^2\, dt;\ t \in [1, 2]$$

$$= \int_1^2 \frac{3t^2}{t + t^2} dt = \int_1^2 \frac{3t}{1 + t} dt = 3\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt =$$

$$= 3[t - \log|1 + t|]_1^2 = 3 - 3\log\frac{3}{2}.$$

L'esempio precedente rientra nel seguente insieme di funzioni:

$$\int R\left(x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, \ldots\right) dx$$

con n_i, m_i interi relativi e R funzione razionale. In questo caso si pone

$$x = t^n$$

con $n =$ minimo comune multiplo dei denominatori $m_1, m_2, \ldots$, che trasforma l'integrale in quello di una funzione razionale di t.

Esercizi sull'integrazione di funzioni irrazionali

Si vedano anche gli Esercizi di riepilogo nel § 6.1.G.

6.41.★ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}dx$

6.42.★ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

6.43.★ $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

6.44. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$

6.45.★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6.46. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

6.47. $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2}dx$

6.48.★ $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}}\,dx$

6.49. Dovendo calcolare

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$$

quale delle seguenti sostituzioni è *più conveniente*?

[A] $\sqrt{1+x^2}=t$
[B] $x=\sin t$
[C] $x=\cos t$
[D] $x=\mathrm{Sh}t$
[E] $x=\mathrm{Ch}t$

6.50. Dovendo calcolare

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

quale delle seguenti sostituzioni è *più conveniente*?

[A] $\sqrt{x^2-1}=t$
[B] $x=\sin t$
[C] $x=\cos t$
[D] $x=\mathrm{Sh}t$
[E] $x=\mathrm{Ch}t$

6.1.F. Simmetrie e valori assoluti nel calcolo di integrali definiti

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 5.1.

Diversamente dalle altre sezioni, qui non ci occupiamo della ricerca delle primitive di una specifica classe di funzioni, ma di alcune osservazioni che riguardano il calcolo di integrali definiti, e presentiamo attraverso esempi.

Esempi svolti

Esempio 6.16. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\left(x^2+2x\right)dx.$$

Anzitutto, per linearità,

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\left(x^2+2x\right)dx = \int_{-1}^{1} e^{-|x|}x^2dx + \int_{-1}^{1} e^{-|x|}2xdx.$$

Ora osserviamo che nel primo integrale la funzione integranda è pari, nel secondo è dispari; l'intervallo di integrazione è simmetrico, perciò:

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}2xdx = 0, \text{ mentre}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}x^2dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|}x^2dx.$$

Osserviamo ora che nell'ultimo integrale il valore assoluto si può togliere, perché l'intervallo di integrazione è ora $[0,1]$, e per $x \in [0,1]$ si ha $e^{-|x|}x^2 = e^{-x}x^2$. Quindi l'integrale di partenza è uguale a:

$$2\int_{0}^{1} e^{-x}x^2dx,$$

che si risolve con due successive integrazioni per parti:

$$2\int_{0}^{1} e^{-x}x^2dx = \left[2e^{-x}\left(-2-2x-x^2\right)\right]_0^1 = 4-\frac{10}{e}.$$

Nell'esempio precedente si è usato un fatto generale:

se f è una funzione dispari in $[-a, a]$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

se f è una funzione pari in $[-a, a]$, allora $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

(Naturalmente, sempre nell'ipotesi che f sia una funzione integrabile).

Esempio 6.17. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\pi} x|\cos x|dx.$$

L'integranda contiene la funzione $|\cos x|$; il valore assoluto rende scomoda l'applicazione della tecnica standard per trattare una funzione come $x\cos x$. Per togliere il valore assoluto, osserviamo che nell'intervallo di integrazione $[0, \pi]$ risulta:

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{per } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x & \text{per } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases} \qquad (*)$$

Quindi, per l'additività dell'integrale, si può anzitutto riscriverlo come

$$\int_0^{\pi} x|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x|\cos x|dx$$

e ora in ciascuno dei due integrali si possono usare le $(*)$ per togliere il modulo (mettendo il segno opportuno all'integranda):

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x dx =$$

con delle consuete integrazioni per parti

$$= [x\sin x + \cos x]_0^{\pi/2} - [x\sin x + \cos x]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(-1 - \frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Esercizi su simmetrie e valori assoluti negli integrali definiti

Si vedano anche gli Esercizi di riepilogo nel § 6.1.G.

6.51.★ $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}|x-1|dx$

6.52.★ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{|x|+\sin x}{1+x^2}\,dx$

6.53.★ $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-2x}|\sin x|\,dx$

6.54.★ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos x\,dx$

6.55.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{|\cos x|}{3-\cos^2 x}\,dx$

6.1.G. Esercizi di riepilogo

Calcolare i seguenti integrali, indefiniti o definiti.

6.56.★ $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x-3}dx$

6.57.★ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4x^2+1}\,dx$

6.58.★ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$

6.59.★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}dx$

6.60.★ $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

6.61.★ $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x}dx$

6.62.★ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x-2}$

6.63.★ $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx$

6.64.★ $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$

6.65. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{2x^2+1}dx$

6.66. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+2x+4}dx$

6.67. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+4x+3}dx$

6.68. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}dx$

6.69. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

6.70. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}\cos x\,dx$

6.71. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

6.72. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x-4}dx$

6.73. $\displaystyle\int_1^2 3x^2\log\sqrt{x}\,dx$

6.74. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6.75. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\sin^2\left(x^2\right)dx$

6.76. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+7}{x^3+x^2+4x+4}dx$

6.77. $\displaystyle\int \frac{2\sin^2 x+1}{\cos^2 x}dx$

6.78. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{-3}{2x^2-x-1}dx$

6.79. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x-4}{2x^2-x-1}dx$

6.80. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4x^2-4}\,dx$

6.81. $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+6x+9}dx$

6.82. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{2-2x^2}\,dx$

6.83. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}dx$

6.84. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \sqrt{2x^2+3}\,dx$

6.85. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\sqrt[6]{x^5}}dx$

6.86. $\displaystyle\int \left(x+x\tan^2 x\right)dx$

6.87. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2x^2-2}}{x}\,dx$

6.88. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+9x+7}{x^2+3x+5}\,dx.$

6.89. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}\,dx.$

6.90. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \sin^3 x}{2+\cos^2 x}\, dx.$

6.91. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \log^2 2x \, dx.$

6.92. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x+2}{x^2+2x+3}\, dx.$

6.93. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(x^2+3x\right) dx.$

6.94. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \sqrt{3x^2-9}\, dx.$

6.95. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\, dx$

6.96.★ $\displaystyle\int_0^2 e^{-x^2} x^3 dx$

6.97.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\, dx$

6.98. $\displaystyle\int x^2 \arctan x \, dx$

6.99.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \sqrt{1-4x^2}\, dx$

6.100.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 x \, dx$

6.101. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+3x-4}\, dx$

6.102.★ $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\, dx$

6.103.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^3 x}{2-\cos^2 x}\, dx$

6.104. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx$

6.105.★ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$

6.106. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{1-4x^2} dx$

6.107. $\displaystyle\int_0^1 \log(2x+1)\, dx$

6.108. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$

6.109. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

6.110.★ $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2+2x-3\right| dx$

6.111. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x}\, dx$

6.112.★ $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{dx}{1+2\mathrm{Ch}x}$

6.113.★ $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx$

6.114.★ $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$

6.115.★ $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

6.116.★ $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|e^{-x^2}\,dx$

6.117.★ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+2x}{1+|x|}\,dx$

6.118.★ $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2}\,dx$

6.119. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin x}\,dx$

6.120. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

6.121.★ $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2 e^{-|x|}\,dx$

6.122. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2|\sin x|\,dx$

6.123.★ $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin^2 x)(3+\cos^2 x)\,dx$

6.124. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x+3\sin^2 x}\right) dx$

6.125. $\displaystyle\int_2^6 \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx$

6.126. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+3x}\,dx$

6.127.★ $\displaystyle\int_2^8 \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x-5}\right) dx$

6.128.★ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+3x)\sin x\,dx$

6.129. $\displaystyle\int e^{-3x}\sin(2x)\,dx$

6.130. $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2+4x+6}\,dx$

6.131. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+4}\right) dx$

6.132.★ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-3x^2}}{x}\,dx$

6.133.★ $\displaystyle\int x\sqrt{2x+3}\,dx$

6.134.★ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\,\sin(2x)\,dx$

6.135.★ $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\log(\cos x)}\,dx$

6.136. $\displaystyle\int x\left(e^{x^2}+2e^{-3x}\right)dx$

6.137.★ $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)\sin x}{2+\sin x}\,dx$

6.138.★ $\displaystyle\int_1^{e} x^2 \log x\,dx$

6.139. $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

6.140. $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

6.141. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x-3}\right)dx$

6.142. $\displaystyle\int \frac{1+x}{x^2+4x+6}\,dx$

6.143. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+4}\,dx$

6.144. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin x\cos x\,dx$

6.145.★ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}\,dx$

6.146.★ $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+2}\,dx$

6.147.★ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|\sin x|}{4-\cos^2 x}\right)dx$

6.148.★ $\displaystyle\int_0^{2} x\sqrt{|3-x^2|}\,dx$

Soluzioni § 6.1.

6.1. $$\frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + \log|x| - 3x^{2/3} + 4x + c$$

6.2. $$\int \left(x^2-1\right)^2 dx = \int \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$$

6.3. $$\log|x+1| + 2\arctan x - 2\arcsin x + c$$

6.4. $$\frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$$

6.5. $$-\frac{3}{5}\log|1-5x| + \frac{4}{9}(3x+1)^{3/2} + c$$

6.6. $$\frac{3^x}{\log 3} - \frac{2^{3x+1}}{3\log 2} - \frac{5}{7}e^{-7x} + c$$

6.7. $$-\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{5}{2}\sin 2x + c$$

6.8. $$-\log|\cos x| + 3\log|\sin x| + c$$

6.9. $$2\log(\mathrm{Ch}x) - 5\log|\mathrm{Sh}x| + c$$

6.10. $$\frac{1}{2}\mathrm{Ch}(2x) - \frac{4}{3}\mathrm{Sh}(3x) + c$$

6.11. $$\int \frac{1+x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

6.12. $$\int_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - 3\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}\log(x^2+2x+5) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\log 8 - \frac{3}{2}\arctan 1\right) - \left(\frac{3}{2}\log 4 - \frac{3}{2}\arctan 0\right) = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{3\pi}{8}.$$

6.13.

$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x+2}{x^2+3x+2};$$

$$\frac{3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{a}{(x+2)} + \frac{b}{(x+1)};$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a+2b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-1 \\ a=4. \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= x - 4\log|x+2| + \log|x+1| + c.$$

6.14.

$$\frac{x^2-3}{x^2+3x+3} = 1 - 3\left(\frac{x+2}{x^2+3x+3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2x+3}{x^2+3x+3} + \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

$$\int \frac{x^2-3}{x^2+3x+3}\,dx =$$

$$= x - \frac{3}{2}\log(x^2+3x+3) - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right] + c =$$

$$= x - \frac{3}{2}\log(x^2+3x+3) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

6.15. $$\int \frac{x^2+3}{x^2+2\sqrt{2}x+2}dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1-2\sqrt{2}x}{\left(x+\sqrt{2}\right)^2} \right) dx = x + \int \frac{1-2\sqrt{2}x}{\left(x+\sqrt{2}\right)^2} dx.$$

$$\int \frac{1-2\sqrt{2}x}{\left(x+\sqrt{2}\right)^2} dx = \left[x+\sqrt{2}=t\right]$$

$$= \int \frac{5-2\sqrt{2}t}{t^2} dt = \int \left(\frac{5}{t^2} - \frac{2\sqrt{2}}{t} \right) dt =$$

$$= -\frac{5}{t} - 2\sqrt{2}\log|t| + c = -\frac{5}{x+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\log\left|x+\sqrt{2}\right| + c.$$

Perciò l'integrale cercato è:

$$I = x - \frac{5}{x+\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\log\left|x+\sqrt{2}\right| + c.$$

6.16. $$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1};$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1};\ (...)$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right);$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-1}\, dx = \int_0^{1/2} \left(x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left|x^2-1\right| \right]_0^{1/2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \log\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.17.

$$\frac{x+3}{x^2(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x+1},$$

che dà il sistema:

$$\begin{cases} c+a=0 \\ a+b=1 \\ b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=3 \\ a=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{x+3}{x^2(x+1)}dx = \int \left(\frac{-2x+3}{x^2} + \frac{2}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x+1}\right)dx = -2\log|x| - \frac{3}{x} + 2\log|x+1| + c.$$

6.18.

$$\int_{-2}^{1} \left(\frac{x+1}{x^2+4x+7}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(\frac{2x+4}{x^2+4x+7}\right) dx - \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x+2)^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x^2+4x+7)\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}(\log 12 - \log 3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}\right) = \log 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.19.

$$\int \frac{x+2}{x^2+3x+3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+3x+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{3+2x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

6.20. Integrale indefinito:

$$\int \frac{x^3}{x^2+4x+3}\, dx = \frac{1}{2}x^2 - 4x - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{27}{2}\log|x+3| + c$$

Integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4x+3}\, dx = -6 - 14\log 3 + \frac{27}{2}\log 5.$$

6.21. $$\int_0^1 x^3e^{-x}\,dx = \left[-x^3e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 3x^2e^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{e} + 3\left\{\left[-x^2e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx\right\} = -\frac{1}{e} - \frac{3}{e} + 6\int_0^1 xe^{-x}dx =$$

$$= -\frac{4}{e} + 6\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx\right\} = -\frac{10}{e} + 6\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 6 - \frac{16}{e}.$$

6.22. $$\int x^2\text{Sh}x\,dx = x^2\text{Ch}x - \int 2x\text{Ch}x\,dx =$$

$$= x^2\text{Ch}x - 2\left\{x\text{Sh}x - \int \text{Sh}x\,dx\right\} =$$

$$= x^2\text{Ch}x - 2x\text{Sh}x + 2\text{Ch}x + c = \left(x^2+2\right)\text{Ch}x - 2x\text{Sh}x + c;$$

$$\int_0^1 x^2\text{Sh}x\,dx = \left[\left(x^2+2\right)\text{Ch}x - 2x\text{Sh}x\right]_0^1 = 3\text{Ch}1 - 2\text{Sh}1 - 2.$$

6.23. $$\int x\log_2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log_2 x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x\log 2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log_2 x - \frac{1}{4\log 2}x^2 + c$$

6.24. $$\int x^2\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int x^2\sin(2x)dx =$$

per parti $$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int x\cos(2x)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}x^2\cos(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + c.$$

6.25. $$I = \int \underset{f}{2^x} \underset{g'}{\sin(3x)}\,dx = -2^x \frac{\cos(3x)}{3} + \int 2^x \frac{\cos(3x)}{3} \log 2\,dx =$$

$$= -2^x \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\log 2}{3}\left[2^x \frac{\sin(3x)}{3} - \int 2^x \frac{\sin(3x)}{3} \log 2\,dx\right] =$$

$$= 2^x\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{\log 2}{9}\sin(3x)\right) - \frac{\log^2 2}{9} I.$$

$$I = \frac{9}{9 + \log^2 2} \cdot 2^x\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{\log 2}{9}\sin(3x)\right) =$$

$$= \frac{2^x}{9 + \log^2 2}(-3\cos(3x) + (\log 2)\sin(3x)).$$

6.26. $$\int_0^{\pi} x \sin x\,dx = \pi.$$

6.27. $$\int e^{-2x} \sin 3x\,dx = -e^{-2x}\left(\frac{3}{13}\cos 3x + \frac{2}{13}\sin 3x\right) + c.$$

6.28. $$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

6.29. $$\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{\log(x+3)}{x+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{\log(x+3)}{x+2} \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{\log(x+3)}{x+2} + \log\left| \frac{x+2}{x+3} \right| \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{\log 4}{3} + \log\frac{3}{4} + \frac{\log 3}{2} - \log\frac{2}{3} = \frac{5}{2}\log 3 - \frac{11}{3}\log 2.$$

6.30. $$\int_0^{\pi} \sin x \operatorname{Ch} x \, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch}\pi + 1).$$

6.31. $$\int \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos^2 x}{1+\cos^2 x} dx = [t = \cos x]$$

$$= -\int \frac{2t^2}{1+t^2} dt = -\int \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = -2t + 2\arctan t + c =$$

$$= -2\cos x + 2\arctan(\cos x) + c.$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = [-2\cos x + 2\arctan(\cos x)]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

6.32. $$\int_0^{\pi/8} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \left[\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \right] =$$

$$\int_0^{\pi/8} \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 dx = \left[2x = t; dx = \frac{dt}{2} \right] = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}\sin^2 t \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{t - \sin t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}\left[\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{2} \right] = \frac{\pi - 2}{64}.$$

6.33. $$\int \frac{1-\sin x}{2+\cos x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{2+\cos x} dx + \int \frac{-\sin x}{2+\cos x} dx = A + B.$$

$$B = \log|2 + \cos x| + c.$$

$$A = \left[t = \tan\frac{x}{2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2}{t^2+3} 2dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

e l'integrale di partenza vale:

$$\log|2 + \cos x| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

6.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}\, dx =$$

$$\cos x = t;\ -\sin x\, dx = dt;\ t \in [1, 0]$$

$$= -\int_1^0 \frac{dt}{(3+t)^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(3+t)^2} = \left[-\frac{1}{3+t}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

6.35.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(2x)\, dx = \frac{4}{15}$$

6.36. L'integrale indefinito è:

$$\int \frac{\cos x}{2+\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\log\left|\sqrt{3} + \sin x\right| - \log\left|\sqrt{3} - \sin x\right|\right) + c$$

e il corrispondente integrale definito è:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{2+\cos^2 x}\, dx = \frac{\log 3}{2\sqrt{3}}.$$

6.37.

$$\int_0^{\pi/2} e^{3\sin x}\sin(2x)\, dx = \int_0^{\pi/2} 2e^{3\sin x}\sin x\cos x\, dx =$$

$$[\sin x = t; \cos x\, dx = dt; t \in (0, 1)]$$

$$= \int_0^1 2e^{3t} t\, dt = \left[2\frac{e^{3t}}{3}t\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{e^{3t}}{3}dt =$$

$$= 2\frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}(e^3 - 1) = \frac{4}{9}e^3 + \frac{2}{9}.$$

6.38. Usando le formule di prostaferesi

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

riscriviamo $\sin(3x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\{\sin 7x - \sin x\}$, da cui

$$\int \sin(3x)\cos(4x)dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin x)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + c.$$

6.39. B

6.40. A

6.41.

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2}x dx =$$

$$\left[\sqrt{3-x^2} = t; 3 - x^2 = t^2; xdx = -tdt; x^2 = 3 - t^2\right]$$

$$= -\int \frac{t}{3-t^2}tdt = \int \frac{t^2}{t^2-3}dt = \int \left(1 + \frac{3}{t^2-3}\right)dt =$$

$$= t + \frac{\sqrt{3}}{2}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt =$$

$$= t + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \sqrt{3-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3}}\right| + c.$$

6.42.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx =$$

$$= \left[x = \mathrm{Sh}t; \sqrt{1+x^2} = \mathrm{Ch}t; dx = \mathrm{Ch}t\, dt\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{Ch}^2 t\, dt}{\mathrm{Sh}^2 t} = \int \mathrm{Ch}t \cdot \frac{\mathrm{Ch}t\, dt}{\mathrm{Sh}^2 t} = \text{(per parti)}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Sh}t} \cdot \mathrm{Ch}t + \int \frac{1}{\mathrm{Sh}t} \cdot \mathrm{Sh}t\, dt = -\frac{\mathrm{Ch}t}{\mathrm{Sh}t} + t + c = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \mathrm{SettSh}x + c.$$

6.43.
$$\int_0^1 x^3\sqrt{4-x^2}\, dx = \left[\sqrt{4-x^2} = t\right]$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^2 (4-t^2)t^2\, dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right]_{\sqrt{3}}^2 =$$

$$= \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(4\sqrt{3} - \frac{9}{5}\sqrt{3}\right) = \frac{64}{15} - \frac{11}{5}\sqrt{3}.$$

6.44.
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\, dx =$$

$$= \mathrm{SettCh}2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \log\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.45
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= [x = 2\mathrm{sin}t; dx = 2\mathrm{cos}t dt] = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\mathrm{sin}^2 t \cdot 2\mathrm{cos}t}{\sqrt{4 - 4\mathrm{sin}^2 t}} dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{sin}^2 t dt = 4\left[\frac{t - \mathrm{sin}t\mathrm{cos}t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.46.
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(2+\sqrt{3}\right)$$

6.47.
$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} dx = \frac{3}{16}\pi$$

6.48.
$$\int_1^4 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}}\,dx =$$
$$\sqrt{x}=t;\, x=t^2;\, dx=2tdt;\; t\in[1,2]$$
$$= \int_1^2 \frac{1+2t^2}{t^2+t}2tdt = 2\int_1^2 \frac{1+2t^2}{t+1}dt =$$
$$= 2\int_1^2 \left(2t-2+\frac{3}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2\left[t^2-2t+3\log|t+1|\right]_1^2 = 6\log 3 + 2 - 6\log 2.$$

6.49. D

6.50. A

6.51.
$$\int_0^2 e^{-x}|x-1|dx = \int_0^1 e^{-x}(1-x)dx + \int_1^2 e^{-x}(x-1)dx;$$
$$\int e^{-x}xdx = -e^{-x}(1+x)+c;$$

perciò: $$\int_0^2 e^{-x}|x-1|dx = [-e^{-x}+e^{-x}(1+x)]_0^1 + [-e^{-x}(1+x)+e^{-x}]_1^2 =$$
$$= [e^{-x}x]_0^1 + [-e^{-x}x]_1^2 = 2e^{-1}-2e^{-2}.$$

6.52.
$$\int_{-1}^1 \frac{|x|+\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+x^2}\,dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx =$$

per simmetria: la prima integranda è pari, la seconda è dispari, l'intervallo è simmetrico
$$= 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx + 0 = \left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \log 2.$$

6.53. $$\int_0^{2\pi} e^{-2x}|\text{sin}x|\,dx = \int_0^{\pi} e^{-2x}\text{sin}x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x}\text{sin}x\,dx =$$

$$\left[-\frac{1}{5}e^{-2x}(\text{cos}x + 2\text{sin}x)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{5}e^{-2x}(\text{cos}x + 2\text{sin}x)\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + 2e^{-2\pi} + e^{-4\pi}\right) \simeq 0.2$$

6.54. $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\text{cos}x\,dx =$$

$$= 2\int_0^{\pi} e^{-x}\text{cos}x\,dx = [e^{-x}(\text{sin}x - \text{cos}x)]_0^{\pi} = e^{-\pi} + 1.$$

6.55. $$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{|\text{cos}x|}{3 - \text{cos}^2 x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cos}x}{2 + \text{sin}^2 x}\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\text{cos}x}{2 + \text{sin}^2 x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan}\frac{\text{sin}x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan}\frac{\text{sin}x}{\sqrt{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\text{arctan}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctan}\frac{1}{2}.$$

6.56. $$\frac{3x}{x^2 + 2x - 3} =$$

$$\frac{3x}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{x(a+b) + (3a-b)}{(x-1)(x+3)}.$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x}{x^2+2x-3}dx = \int \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{9}{4}\log|x+3| + c.$$

6.57. $$\int_0^1 \sqrt{4x^2+1}\,dx =$$

$$2x = \mathrm{Sh}t;\ \sqrt{4x^2+1} = \mathrm{Ch}t;\, 2dx = \mathrm{Ch}t\,dt;\, t \in [0, \mathrm{SettSh}2]$$

$$= \int_0^{\mathrm{SettSh}2} \frac{1}{2}\mathrm{Ch}^2 t\,dt = \frac{1}{4}[\mathrm{Ch}t\mathrm{Sh}t + t]_0^{\mathrm{SettSh}2} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2+\sqrt{5}\right)\right).$$

6.58. $$\frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{(x+1)^2+1}.$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+2x+2\right) - \arctan(x+1) + c.$$

6.59. $$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}dx =$$

$$e^x = t;\ e^x dx = dt;\ t \in [1, e]$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t+3}dt = [\log|t+3|]_1^e = \log\left(\frac{3+e}{4}\right).$$

6.60.
$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$$x = 2\mathrm{sin}t;\ dx = 2\mathrm{cos}t\,dt;\ \mathrm{sin}t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]; t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\mathrm{cos}^2 t\,dt = 2[\mathrm{cos}t\mathrm{sin}t + t]_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.61.
$$\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x}dx =$$

$$= \log x = t;\ \frac{dx}{x} = dt;\ t \in [1,2]$$

$$= \int_1^2 \log t\,dt = [t\log t - t]_1^2 = 2\log 2 - 1.$$

6.62.
$$\frac{x^2+1}{x^2+x-2} = 1 + \frac{3-x}{x^2+x-2};$$

$$\frac{3-x}{x^2+x-2} = \frac{3-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} = \frac{x(a+b)+(2a-b)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x-2}dx = \int \left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= x + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{5}{3}\log|x+2| + c.$$

6.63.

$$\int_1^2 \underset{f'}{x^3}\,\underset{g}{\log x}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= 4\log 2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4\log 2 - \frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = 4\log 2 - \frac{15}{16}.$$

6.64.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx =$$

$$\sqrt{2+x^2} = t;\, 2+x^2 = t^2;\, 2xdx = 2tdt;\, t \in \left[\sqrt{3}, 2\right]$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{t}{t}dt = 2 - \sqrt{3}.$$

6.65. $\sqrt{2}\arctan 2 + \frac{\log 5}{4}$

6.66. $\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

6.67. $\log|x+1| - \log|x+3| + c$

6.68. $\frac{5}{2+x} + 3\log|2+x| + c$

6.69. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

6.70. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{SettSh}1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$

6.71. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \mathrm{SettSh}x + c$

6.72. $\cos x + \frac{3}{4}\log\left|\frac{\cos x - 2}{\cos x + 2}\right| + c$

6.73. $4\log 2 - \frac{7}{6}$

6.74. $-\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + c$

6.75. $-\frac{1}{8} + \frac{\pi}{16}$

6.76. $-\frac{3}{2}\arctan\frac{2}{x} + \log|1+x| + c$

6.77. $-2x + 3\tan x + c$

6.78. $2\log 2$

6.79. $x - \log|x-1| + \log|1+2x| + c$

6.80. $2\sqrt{3} - \log\left(2+\sqrt{3}\right)$

6.81. $x - \frac{6}{3+x} - 6\log|3+x| + c$

6.82. $-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

6.83. $\arctan x + \log|x^2-1| + c$

6.84. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{Sh}1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

6.85. $3x^{1/3} + 6\log\left|x^{1/6} - 1\right| + c$

6.86. $\log|\cos x| + x\tan x + c$

6.87. $\sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

6.88. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{3+2x}{\sqrt{11}}\right) + \frac{1}{2}\log(x^2+3x+5) + c$

6.89. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$

6.90. $-\frac{20}{3} + 3\sqrt{3}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|$

6.91. $\frac{7}{108} - \frac{2}{9}\log 2 + \frac{1}{3}\log^2 2$

6.92. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

6.93. 5

6.94. $\frac{9}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{3}\log 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\log\left(3+\sqrt{6}\right)$

6.95. $\frac{x^2}{2} - 2x + \log(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + c$

6.96. $$\int_0^2 e^{-x^2} x^3 dx = \int_0^2 \underbrace{\left(-2xe^{-x^2}\right)}_{f'} \underbrace{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}_{g} dx = \text{per parti}$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x^2} x\, dx =$$

$$= -2e^{-4} - \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2 = -2e^{-4} - \frac{1}{2}\left(e^{-4} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}e^{-4}.$$

6.97. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x}\, dx =$$

$$[\cos x = t; -\sin x\, dx = dt;\ t \in [1, 0]]$$

$$= \int_1^0 -\frac{1}{4 - t^2}\, dx = \int_0^1 \frac{dt}{(2 - t)(2 + t)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[\frac{1}{2 - t} + \frac{1}{2 + t}\right] dt = \frac{1}{4}[\log|2 + t| - \log|2 - t|]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}(\log 3 - \log 2 + \log 2) = \frac{\log 3}{4}.$$

6.98. $\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1 + x^2) + c.$

6.99. $$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \sqrt{1 - 4x^2}\, dx =$$

$$\sqrt{1 - 4x^2} = t;\ 1 - 4x^2 = t^2; x^2 = \frac{1 - t^2}{4};$$

$$2x\, dx = -\frac{t}{2} dt;\ x\, dx = -\frac{t}{4}\, dt; t \in [1, 0]$$

$$= -\int_1^0 \left(\frac{1-t^2}{4}\right) t \frac{t}{4}\, dt = \frac{1}{16}\int_0^1 (t^2 - t^4) dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{120}$$

6.100.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 x\, dx =$$

$$\left[\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1}{4}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos 4x + 1}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\right) dx = \left[\frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4x} + \frac{3}{8}x\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= \frac{1}{32}\sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{9}{64}\sqrt{3} + \frac{\pi}{16}.$$

6.101. $\frac{3}{5}\log|x-1| + \frac{2}{5}\log|x+4| + c.$

6.102.

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\, dx =$$

$$x = 2\mathrm{Sh}t;\ \sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\mathrm{Ch}^2 t} = 2\mathrm{Ch}t;$$

$$dx = 2\mathrm{Ch}t\, dt;\ t \in [\mathrm{SettSh}1, \mathrm{SettSh}2]$$

$$= \int_{\mathrm{SettSh}1}^{\mathrm{SettSh}2} \frac{2\mathrm{Ch}t}{4\mathrm{Sh}^2 t} 2\mathrm{Ch}t\, dt = \int_{\mathrm{SettSh}1}^{\mathrm{SettSh}2} \frac{\mathrm{Ch}^2 t}{\mathrm{Sh}^2 t}\, dt =$$

$$= \left[t - \frac{\mathrm{Ch}t}{\mathrm{Sh}t}\right]_{\mathrm{SettSh}1}^{\mathrm{SettSh}2} = \mathrm{SettSh}2 - \mathrm{SettSh}1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} =$$

$$= \log\left(2 + \sqrt{5}\right) - \log\left(1 + \sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2}.$$

6.103.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^3 x}{2-\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}\cos x\,dx =$$

$$\sin x = t; \cos x\,dx = dt; t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}dt = \int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2} - 2\right)dt =$$

$$= [4\arctan t - 2t]_0^1 = \pi - 2.$$

6.104. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$.

6.105.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$$

$$t = \tan\frac{x}{2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; x = 2\arctan t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.106. $\frac{\pi}{128}$

6.107. $\frac{3}{2}\log 3 - 1$.

6.108. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}$.

6.109. $\frac{\pi}{4}$.

6.110.
$$\int_0^2 \left|x^2+2x-3\right| dx$$

$$\left|x^2+2x-3\right| = \left|(x-1)(x+3)\right| =$$

$$= \begin{cases} x^2+2x-3 & \text{se } x \le -3, x \ge 1 \\ -x^2-2x+3 & \text{se } -3 \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\int_0^2 \left|x^2+2x-3\right| dx = \int_0^1 \left(-x^2-2x+3\right) dx + \int_1^2 \left(x^2+2x-3\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{8}{3} + 4 - 6 - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = 4.$$

6.111. $\frac{\log^3 2}{3}$.

6.112.
$$\int_0^{\log 2} \frac{dx}{1+2\mathrm{Ch}x} =$$

$$e^x = t;\ dx = \frac{dt}{t};\ t \in [1,2]$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{1+t+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{1}{t^2+t+1}\, dt =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \arctan\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.113.
$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\, dx =$$

$$x = \mathrm{Sh}t;\ dx = \mathrm{Ch}t\, dt;\ t \in [0, \mathrm{SettSh}t]$$

$$= \int_0^{\mathrm{SettSh}1} \mathrm{Sh}^2 t \, \mathrm{Ch}^2 t \, dt.$$

Calcoliamo per parti la primitiva:

$$\int \mathrm{Sh}t \cdot \left(\mathrm{Sh}t \mathrm{Ch}^2 t\right) dt = \mathrm{Sh}t \, \frac{\mathrm{Ch}^3 t}{3} - \int \frac{\mathrm{Ch}^4 t}{3} \, dt =$$

$$= \mathrm{Sh}t \, \frac{\mathrm{Ch}^3 t}{3} - \frac{1}{3}\left(\int \mathrm{Ch}^2 t \, dt + \int \mathrm{Sh}^2 t \, \mathrm{Ch}^2 t \, dt\right) =$$

$$= \mathrm{Sh}t \, \frac{\mathrm{Ch}^3 t}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{Sh}t\mathrm{Ch}t + t}{2} - \frac{1}{3} \int \mathrm{Sh}^2 t \, \mathrm{Ch}^2 t \, dt.$$

Quindi: $$\int_0^{\mathrm{SettSh}1} \mathrm{Sh}^2 t \, \mathrm{Ch}^2 t \, dt = \left[\frac{1}{4} \mathrm{Sh}t \mathrm{Ch}^3 t - \frac{\mathrm{Sh}t\mathrm{Ch}t + t}{8}\right]_0^{\mathrm{SettSh}1} =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\mathrm{SettSh}1\right) = \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\log\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

6.114. $$\int_{-1}^{1} x^3 e^{-x^2} dx = 0$$

perché integranda dispari su intervallo simmetrico.

6.115. $$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \, dx =$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = t; x^2 = t^2 + 4; x \, dx = t \, dt;$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{x \, dx}{x^2} = \frac{t \, dt}{t^2 + 4}; t \in \left[0, \sqrt{5}\right]$$

$$= \int_0^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2 + 4} \, dt = \int_0^{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4}\right) dt =$$

$$= \left[t - 4 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2}\right]_0^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2\arctan \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

6.116.
$$\int_{-2}^{2} |x|e^{-x^2} dx =$$

per simmetria
$$= 2\int_0^2 x\, e^{-x^2} = \Big[- e^{-x^2}\Big]_0^2 = 1 - e^{-4}.$$

6.117.
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2+2x}{1+|x|}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+|x|}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+|x|}\, dx = \text{ per simmetria}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\, dx + 0 = 2\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x + \log|1+x|\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + \log 2\right) = -1 + 2\log 2.$$

6.118.
$$\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2}\, dx =$$

$$\sqrt{x+3} = t; x = t^2 - 3; dx = 2tdt; t \in [1, 2]$$

$$= \int_1^2 \frac{2t(t^2-2)}{t+2}\, dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 2t + 2 - \frac{4}{t+2}\right) dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 4\log|t+2|\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 4 + 4 - \log 4 - \frac{1}{3} + 1 - 2 + 4\log 3\right) = \frac{8}{3} + 8\log\frac{3}{4}.$$

6.119. $2 - 4\log\frac{3}{2}$.

6.120. Integrale indefinito:

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + c;$$

integrale definito: $$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

6.121. $$\int_{-2}^{2} x^2 e^{-|x|}dx =$$

$$= 2\int_0^2 x^2 e^{-x}dx = 2\big[e^{-x}\big(-x^2 - 2x - 2\big)\big]_0^2 = 4 - \frac{20}{e^2}.$$

6.122. $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2|\sin x|dx = 2\left(\pi^2 - 4\right)$$

6.123. $$\int_0^{\pi} \left(\sin^2 x\right)\left(3 + \cos^2 x\right)dx =$$

$$= 3\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,dx = A + B$$

$$A = \frac{3}{2}\pi \text{ (integrale definito notevole);}$$

$$B = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{8}$$

$$A + B = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{13}{8}\pi.$$

6.124. $$\int_0^{\pi/6}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 3\sin^2 x}\right)dx = \left[\log\left(1 + \sin^2 x\right)\right]_0^{\pi/6} = \log\frac{5}{4}.$$

6.125. Integrale indefinito:

$$\int \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx = 3\log|x+3| + \log|x-1| + c$$

Integrale definito:
$$\int_2^6 \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx = 6\log 3 - 2\log 5.$$

6.126.
$$\int \frac{x^2+2}{x^2+3x}\,dx = x + \frac{2}{3}\log|x| - \frac{11}{3}\log|x+3| + c$$

6.127.
$$\int_2^8 \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x-5}\right) dx =$$

$$= \int_2^8 \left(1 + \frac{6-2x}{x^2+4x-5}\right) dx = \int_2^8 \left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x+5}\right) dx =$$

$$= \left[x + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{8}{3}\log|x+5|\right]_2^8 =$$

$$= 6 + \frac{2}{3}\log 7 - \frac{8}{3}\log 13 - \frac{2}{3}\log 1 + \frac{8}{3}\log 7 = 6 + \frac{10}{3}\log 7 - \frac{8}{3}\log 13.$$

6.128.
$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+3x)\sin x\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx + 3\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx =$$

(per le simmetrie)

$$= 0 + 6\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = 6\left\{[-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx\right\} = 6\pi.$$

6.129.
$$\int e^{-3x}\sin(2x)\,dx =$$

$$= e^{-3x}\left(-\frac{2}{13}\cos(2x) - \frac{3}{13}\sin(2x)\right) + c.$$

6.130.
$$\int \frac{1+x}{x^2+4x+6}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+4x+6\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2+x}{\sqrt{2}}\right) + c\,.$$

6.131.
$$\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+4}\right) dx =$$
$$= x - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right) - \log\left(4+2x+x^2\right) + c$$

6.132.
$$\int \frac{\sqrt{1-3x^2}}{x} dx =$$
$$\left[\sqrt{1-3x^2} = t; 1-3x^2 = t^2; -6x\,dx = 2tdt; \frac{dx}{x} = \frac{xdx}{x^2} = -\frac{tdt}{3\left(\frac{1-t^2}{3}\right)}\right]$$
$$= \int -\frac{t^2\,dt}{1-t^2} = \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\right]dt =$$
$$= t + \frac{1}{2}(\log|t-1| - \log|t+1|) + c =$$
$$= \sqrt{1-3x^2} + \frac{1}{2}\left(\log\left(1-\sqrt{1-3x^2}\right) - \log\left(1+\sqrt{1-3x^2}\right)\right) + c,$$
espressione che, usando le proprietà dei logaritmi e inglobando in c eventuali altre costanti, si può riscrivere in varie altre forme, ad esempio
$$\sqrt{1-3x^2} + \log x - \log\left(\sqrt{1-3x^2}+1\right) + c.$$

6.133.
$$\int x\sqrt{2x+3}\; dx =$$
$$\left[\sqrt{2x+3} = t; 2x+3 = t^2; dx = t\,dt; x = \frac{t^2-3}{2}\right]$$

$$= \int \frac{t^2-3}{2} \cdot t \cdot t\, dt = \frac{t^5}{10} - \frac{t^3}{2} + c = \frac{(2x+3)^{5/2}}{10} - \frac{(2x+3)^{3/2}}{2} + c$$

6.134. $$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2 x}\,\sin(2x)\, dx =$$

$$[\sin x = t; \cos x\, dx = dt; \sin(2x) = 2\sin x\cos x; t \in (0,1)]$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, 2t\, dt = \left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

6.135. $$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\log(\cos x)} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{1+\log(\cos x)} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x(1+\log(\cos x))} dx =$$

$$\left[\cos x = t; -\sin x\, dx = dt; t \in \left(1, \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \int_1^{\frac{1}{2}} - \frac{dt}{t(1+\log t)} = [\log(1+\log t)]_{1/2}^1 = -\log(1-\log 2).$$

6.136. $$\int x\left(e^{x^2} + 2e^{-3x}\right) dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{-3x}\left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\right) + c$$

6.137. $$\int \frac{\sin(2x)\sin x}{2+\sin x}\, dx = \int \frac{2\sin^2 x\cos x}{2+\sin x}\, dx =$$

$$[\sin x = t; \cos x\, dx = dt]$$

$$= \int \frac{2t^2}{2+t} dt = \int \left(2t - 4 + \frac{8}{2+t}\right) dt =$$

$$= t^2 - 4t + 8\log|2+t| + c =$$

$$= \sin^2 x - 4\sin x + 8\log(2+\sin x) + c$$

6.138. Per parti:

$$\int_1^e x^2 \log x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

6.139.

$$\int x \arctan x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + c$$

6.140.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + c.$$

6.141.

$$x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{5}{2}\log|x+3| + c$$

6.142.

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+4x+6\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2+x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

6.143.

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+2x+4\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

6.144. Integrale indefinito:

$$\int e^{3x} \sin x \cos x \, dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{13}\cos 2x + \frac{3}{26}\sin 2x\right) + c.$$

Integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin x \cos x \, dx = \frac{3}{26}e^{3\pi/4} + \frac{1}{13}.$$

6.145. $$\int \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}\,xdx = \left[\sqrt{3+x^2} = t; xdx = tdt;\ x^2 = t^2 - 3\right]$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2-3}\,dt = \int \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\right] dt =$$

$$= t + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \sqrt{3+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3}}\right| + c.$$

6.146. $$\int \frac{x-1}{x^2+x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+2\right) - \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + c$$

6.147. $$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{|\sin x|}{4-\cos^2 x}\right)dx = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\right)dx = [\cos x = t]$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\frac{dt}{4-t^2} = \int_0^1 \frac{4}{4-t^2}dt = \int_0^1\left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)dt =$$

$$= \left[\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\right]_0^1 = \log 3.$$

6.148. $$\int_0^2 x\sqrt{|3-x^2|}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3-x^2}\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 x\sqrt{x^2-3}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\left(3-x^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^{3/2}\right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{1}{3}(3)^{3/2} + \frac{1}{3} = \sqrt{3} + \frac{1}{3}.$$

6.2. Integrali generalizzati

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 8.

Esempi svolti

Esempio 6.18. Discutere, *in base alla definizione* di integrale generalizzato, la convergenza o meno dei seguenti integrali:

$$(a)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log x};\quad (b)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x};\quad (c)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2\log x};\quad (d)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\log x}.$$

(a)-(b). Poiché

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \log|\log x| + c,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\log|\log x|]_\varepsilon^{1/2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\log(\log 2) - \log|\log\varepsilon|] = -\infty,$$

perciò l'integrale (a) diverge. Analogamente

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{R\to+\infty} \int_2^R \frac{dx}{x\log x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\log|\log x|]_2^R =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\log(\log R) - \log(\log 2)] = +\infty,$$

e anche (b) diverge.

(c)-(d). Poiché

$$\int \frac{dx}{x\log^2 x} = -\frac{1}{\log x} + c,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\log^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{\log x}\right]_\varepsilon^{1/2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log\varepsilon}\right]=\frac{1}{\log 2},$$

perciò l'integrale (a) converge, e vale

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\log^2 x}=\frac{1}{\log 2}.$$

Analogamente

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\log^2 x}=\lim_{R\to+\infty}\int_2^R\frac{dx}{x\log^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^R=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{\log R}+\frac{1}{\log 2}\right]=\frac{1}{\log 2},$$

e anche (b) converge, al medesimo valore.

Esempio 6.19. Discutere, *in base ai criteri di convergenza* studiati, la convergenza o meno dei seguenti integrali generalizzati:

$$(a)\ \int_{-1}^{1}\cot x\,dx;\quad (b)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}};\quad (c)\ \int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}}dx\ (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$(d)\ \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx;\quad (e)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+e^x};\quad (f)\ \int_1^{+\infty}\frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}dx.$$

(a) La funzione $\cot x$ è continua in $[-1,1]$ tranne che in $x=0$, nel cui intorno è illimitata per $x\to 0$.

Poiché per $x\to 0$

$$\cot x\sim\frac{1}{\sin x}\sim\frac{1}{x}$$

e $\frac{1}{x}$ non è integrabile in un intorno di 0, per il criterio del confronto asintotico anche $\cot x$ non è integrabile, e l'integrale è divergente.

Osservazione 6.2. Integrale generalizzato di una funzione dispari su un intervallo simmetrico. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'integrale definito di una funzione (integrabile) dispari su un intervallo simmetrico è nullo, per motivi di simmetria. La funzione dell'esempio (a) in effetti è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico; l'applicazione dei criteri visti, però, porta a concludere che non è integrabile quindi, in particolare, *non è vero* che il suo integrale è nullo. Attenzione a non applicare il criterio di simmetria appena ricordato senza prima verificare l'*esistenza* dell'integrale.

(b) Nell'intervallo $[-1,1]$ l'integranda è illimitata solo per $x \longrightarrow 0$, dove si ha:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{2/3}},$$

e poiché $\frac{1}{x^{2/3}}$ è integrabile in un intorno di 0, per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente.

(c) Per $x \longrightarrow +\infty$ è

$$\frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x^2}} \sim x^{\alpha-1},$$

che è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha - 1 < -1$, cioè $\alpha < 0$.

(d) La funzione e^{-x^2} è continua in $[0,+\infty)$. Poiché per x abbastanza grande è

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2},$$

per il criterio del confronto, e^{-x^2} è integrabile all'infinito.

Si osservi il tipo di argomento usato: il confronto con $\frac{1}{x^2}$ serve solo a garantire l'integrabilità all'infinito. La funzione $\frac{1}{x^2}$ non è integrabile in un intorno di 0, ma questo non ha importanza perché in un intorno di 0 la funzione e^{-x^2} è integrabile perché limitata, *non perché minore di* $1/x^2$.

(e) Il denominatore è una funzione continua, bisogna capire se si annulla nell'intervallo di integrazione. Un semplice confronto grafico mostra che l'equazione

$$e^x = -x$$

ha esattamente una soluzione nell'intervallo $(-1,1)$. L'ordine con cui la funzione si annulla ci dirà l'ordine di infinito della funzione integranda, e quindi la sua integrabilità o meno. Ma come possiamo stabilire l'ordine con cui si annulla $f(x) = x + e^x$ se non conosciamo neppure in modo esatto il punto in cui si annulla? La risposta porta ad un'osservazione generale:

Osservazione 6.3. Ordine di annullamento di una funzione derivabile. Se f è una funzione derivabile in un intervallo I, la formula di Taylor ci dice che se f si annulla in un punto $\alpha \in I$, si annulla almeno del prim'ordine. Precisamente, poiché

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha),$$

se $f'(\alpha) \neq 0$ allora f ha uno zero del primo ordine in α. Se $f'(\alpha) = 0$ ma, ad esempio, $f''(\alpha) \neq 0$, si può concludere che f si annulla del 2° ordine, e così via. In ogni caso, non può annullarsi di un ordine minore di 1.

Tornando al nostro esempio, poiché

$$f'(x) = 1 + e^x \neq 0 \quad \text{in tutto } \mathbb{R},$$

f si annulla del 1° ordine in α, quindi la funzione $\frac{1}{f(x)}$ non è integrabile in $(-1, 1)$.

(f) La funzione
$$f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}$$

è continua in $(1, +\infty)$, ma va studiata all'infinito e in 1, dove il denominatore si annulla. Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{x-1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$$

che è integrabile; quindi per il criterio del cofronto asintotico, f è integrabile in un intorno di 1. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\log x}{x^{3/2}}$$

che è integrabile all'infinito perché, ad esempio, risulta

$$\frac{\log x}{x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{5/4}}$$

per x abbastanza grande. Quindi f è integrabile anche in un intorno di ∞, pertanto l'integrale converge.

Osservazione 6.4. Convergenza di un integrale e determinazione del suo valore. Quando la convergenza dell'integrale generalizzato di una funzione f viene stabilita mediante confronto con una funzione g integrabile, il valore numerico dell'integrale di f non viene stabilito (in particolare: non è necessariamente uguale al valore dell'integrale di g). Si capisce bene questo fatto pensando che la stima asintotica "legge" solo il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto, mentre il valore numerico dell'integrale dipende dal comportamento della funzione in tutto l'intervallo.

Esercizi

Stabilire la convergenza o meno dei seguenti integrali generalizzati, giustificando le proprie conclusioni. Se l'integrale è convergente, calcolarne il valore quando ciò è possibile.

6.149.★ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \log x}$

6.150.★ $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{\sin(\pi x)}$

6.151.★ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

6.152.★ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\left[\log(1+x^2)-2\log x\right] dx$

6.153.★ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

6.154.★ $\displaystyle\int_0^{1} \log x\, dx$

6.155.★ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x + x}}$

6.156.★ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+x^2)} dx$

6.157.★ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{Sh}x}{x^{3/2}\sqrt{1-x^2}} dx$

6.158.★ Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx.$$

6.159.★ Stabilire per quali valori del parametro reale α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log x}{1+x^2} dx.$$

6.160.★ Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha(1+x^\alpha)} dx.$$

6.161.★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\log x}\, dx$

6.162.★ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+e^{-x}}{2+2x+x^2}\, dx$

6.163.★ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{3/2}(1-x)^{1/2}}\, dx$

6.164.★ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1+x}{2+x^4}\right) dx$

6.165. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$

6.166. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x\sqrt[3]{1-x^2}}\, dx$

6.167. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx$

6.168. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\cos x}\, dx$

6.169. Stabilire al variare del parametro reale α, se il seguente integrale generalizzato converge oppure no.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}\log^\alpha x}$$

6.170. Stabilire al variare del parametro reale α, se il seguente integrale generalizzato converge oppure no.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha|\log x|^{2\alpha}}$$

6.171. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{x+e^{2x}}\, dx$

6.172. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$

6.173. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt[3]{\tan x}\, dx$

Soluzioni § 6.2.

6.149. La funzione è continua in $[2,+\infty)$; per $x \geq 2$ è anche

$$\frac{1}{x^2 \log x} \leq \frac{1}{x^2 \log 2},$$

e per confronto con la funzione $1/x^2$, integrabile all'infinito, l'integrale converge.

6.150. La funzione è illimitata per $x \to 2, x \to 3$. Poiché $\sin(\pi x)$ si annulla almeno del 1° ordine in 2 e 3 (perché è una funzione derivabile, si veda l'Osservazione 6.3), l'integranda ha un infinito almeno del 1° ordine in 2 e 3, perciò l'integrale diverge.

6.151. In $[-1,1]$ l'integranda è continua salvo in $x=0$, in cui è illimitata. Per $x \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

integrabile, perciò l'integrale converge. Inoltre, osservando che l'integranda è dispari e l'intervallo simmetrico, deduciamo che l'integrale è nullo.

Notiamo esplicitamente che non sarebbe stato corretto affermare l'annullarsi dell'integrale per motivi di simmetria senza prima verificare la convergenza dell'integrale stesso. (Si veda l'Osservazione 6.2).

6.152. La funzione integranda è continua in $[1,+\infty)$, occorre solo studiare l'ordine di annullamento all'infinito. Per $x \to +\infty$,

$$\sqrt{x}\left[\log(1+x^2) - 2\log x\right] = \sqrt{x}\log\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = \sqrt{x}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ perciò l'integrale converge.}$$

6.153. La funzione integranda è continua in $(0,1]$, discontinua in 0, con infiniti cambi di segno in ogni intorno di $x=0$. Non possiamo quindi applicare i criteri di convergenza validi per funzioni di segno costante. E' facile tuttavia garantire l'*assoluta integrabilità*:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

integrabile. Quindi per il criterio dell'assoluta integrabilità e il criterio del confronto (applicato a $|f(x)|$, non a $f(x)$), l'integrale è convergente.

6.154. La funzione $\log x \to -\infty$ più lentamente di qualsiasi potenza per $x \to 0^+$, ad esempio possiamo scrivere

$$|\log x| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

in un intorno di 0. Pertanto l'integrale converge.

E' possibile calcolare il valore dell'integrale, ricordando che (integrazione per parti),

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c.$$

Perciò $$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [x\log x - x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-1 + \varepsilon(\log\varepsilon - 1)) = -1.$$

6.155. La funzione $e^x + x$ è derivabile, si annulla in uno e un sol punto $\alpha \in [-1, 1]$ (si veda l'Esempio 6.19 (*e*)); poiché $f'(x) = e^x + 1 \neq 0\ \forall x$, lo zero è esattamente del 1° ordine (v. Osservazione 6.3). Perciò $\sqrt[3]{e^x + x}$ si annulla di ordine $1/3$, la funzione integranda va all'infinito di ordine $1/3$, ed è pertanto integrabile.

6.156. La funzione è continua in $(0, +\infty)$. Per $x \to 0^+$, è

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che è illimitata ma integrabile; per il criterio del confronto asintotico, quindi, la funzione è integrabile in un intorno di 0. Osserviamo che in un intorno di 0 la funzione è positiva, e quindi il criterio di può applicare.

Per studiare il comportamento all'infinito, scriviamo:

$$\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{x(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^3}$$

che è integrabile all'infinito. Per il criterio del confronto e del confronto asintotico, segue che $|f(x)|$ è integrabile all'infinito; per il criterio dell'assoluta integrabilità, f è integrabile.

Pertanto l'integrale converge.

6.157. La funzione è continua in $(0, 1)$. Per $x \to 0^+$, è

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che è illimitata ma integrabile; per il criterio del confronto asintotico, quindi, la funzione è integrabile in un intorno di 0.

Per $x \to 1$, $$f(x) \sim \frac{\mathrm{Sh}1}{\sqrt{2(1-x)}}$$ che è integrabile in 1.

Per il criterio del confronto asintotico, segue che $f(x)$ è integrabile in $(0, 1)$.

6.158. La funzione $f(x) = \frac{\arctan x}{x^\alpha}$ è continua in $(0, \infty)$ e positiva. Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

e l'integrale generalizzato, per il criterio del confronto asintotico, converge in un intorno di 0 se $\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha < 2$.

Per $x \to +\infty$, $$f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^\alpha},$$

e l'integrale generalizzato, per il criterio del confronto asintotico, converge in un intorno di $+\infty$ se $\alpha > 1$. In conclusione, l'integrale generalizzato converge se e solo se $1 < \alpha < 2$.

6.159. Per $x \to 0^+, f(x) \sim x^\alpha \log x$, e l'integrale generalizzato in un intorno di 0 converge se

$$\alpha > -1, \text{diverge se } \alpha \leq -1.$$

Infatti per $\alpha = -1$,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{2}\log^2 x\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0}\left[-\frac{1}{2}\log^2 \epsilon\right] = -\infty$$

mentre per $\alpha > -1$, scrivendo $\alpha = -1 + 2\delta$ abbiamo

$$|x^\alpha \log x| = \frac{1}{x^{1-\delta}}|x^\delta \log x| \leq \frac{1}{x^{1-\delta}}$$

che ha integrale convergente.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{\log x}{x^{2-\alpha}}$, e l'integrale generalizzato in un intorno di $+\infty$ converge se

$$2 - \alpha > 1 \text{ cioè } \alpha < 1, \text{diverge se } \alpha \geq 1.$$

(argomento analogo). In conclusione, l'integrale in $(0, +\infty)$ converge se:

$$\alpha \in (-1, 1), \text{ diverge altrimenti.}$$

6.160. Per $x \to 0^+$, $\quad f(x) \sim \dfrac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \to 0$ per ogni $\alpha > 0$.

Per $x \to +\infty$, $$f(x) \sim \frac{1}{x^{2\alpha}},$$

integrabile per $2\alpha > 1$, cioè $\alpha > 1/2$. L'integrale è convergente per questi valori.

6.161. $f(x) = \frac{\cos x}{\log x}$ è continua in $(0, 1)$; per $x \to 0^+$, $f(x) \to 0$, perciò prolungabile con continuità, e quindi integrabile in $[0, 1 - \varepsilon]$.

Per $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$; $f(x) \sim \frac{\cos 1}{(x-1)}$, non integrabile (infinito del primo ordine). Perciò l'integrale generalizzato *diverge.*

6.162. $f(x) = \frac{x+e^{-x}}{2+2x+x^2}$ è continua in $[0, +\infty)$, perciò integrabile in $[0, k]$ per ogni k. Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$, non integrabile (infinitesimo del primo ordine), perciò l'integrale generalizzato *non converge.*

6.163. Il denominatore si annulla per $x = 0, x = 1$. Per $x \to 0$, $f(x) \sim \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ perciò f è integrabile in un intorno di 0 (infinito di ordine $1/2$). Per $x \to 1$, $f(x) \sim \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/2}}$, integrabile perché infinito di ordine $\frac{1}{2}$. Perciò l'integrale *converge.*

6.164. f continua in $(0, +\infty)$; per $x \to 0^+$, $f(x) \to 0$, perciò f è integrabile su $[0, a]$ per ogni a.
Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$, integrabile all'infinito. Perciò l'integrale *converge.*

6.165. In $x = \pm 1$ infinito di ordine $1/3$, integrabile; in $x = 0$ limitata. L'integrale converge.

6.166. In $x = 0$ infinito di ordine 1, perciò non integrabile. L'integrale diverge.

6.167. In $x = 0$ limitata; per $x \to +\infty$ infinitesimo di ordine $3/2$, integrabile. Perciò l'integrale converge.

6.168. In $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione è limitata; in $x = \frac{3}{2}\pi$ la funzione è infinita di ordine 1, perciò non integrabile. L'integrale diverge.

6.169. In $x = 1$ infinito di ordine α, integrabile se $\alpha < 1$; per $x \to +\infty$ la funzione è integrabile se $2\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$, non integrabile altrimenti. Pertanto l'integrale converge se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

6.170. In un intorno di $x = 0$ la funzione è integrabile se $\alpha \leq 1$; in $x = 1$ la funzione è infinita di ordine 2α, integrabile se $\alpha < \frac{1}{2}$. Quindi l'integrale converge per $\alpha < \frac{1}{2}$.

6.171. Il denominatore si annulla in un unico punto x_0; poiché $(x + e^{2x})' = 1 + 2e^{2x}$ non si annulla mai, in particolare sarà $f'(x_0) \neq 0$; dunque in x_0 il denominatore si annulla del prim'ordine; allora la funzione è infinita del prim'ordine, e non è integrabile. L'integrale diverge.

6.172. In $x = 0$, $x = 2\pi$ la funzione ha un infinito del $1°$ ordine, perciò non è integrabile. L'integrale diverge.

6.173. In $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione ha un infinito di ordine $\frac{1}{3}$, perciò integrabile. L'integrale converge.

6.3. Funzioni integrali

Riferimento: libro di testo [BPS1], cap. 6, § 9.

6.3.A. Insieme di definizione di una funzione integrale

Ricordiamo anzitutto che l'insieme di definizione della funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

è *il più grande intervallo I contenente x_0 e tale che per ogni $x \in I$ la funzione $f(t)$ risulta integrabile (in senso proprio o generalizzato) sull'intervallo* $[x_0, x]$. Sottolineiamo, in particolare, il fatto che l'insieme di definizione di F dev'essere necessariamente un *intervallo,* non un insieme qualsiasi.

Esempi svolti

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni intgrali.

Esempio 6.20.

$$F(x) = \int_{1}^{x} e^{\sqrt{t}}dt.$$

La funzione integranda è continua in $\mathbb{R}$; quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ è integrabile in $[1, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$. (Il fatto che l'integranda non sia integrabile all'infinito non contraddice questo fatto, ma implica che $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ sia infinito).

Esempio 6.21.

$$F(x) = \int_{2}^{x} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

L'integranda è limitata in tutto $\mathbb{R}$, continua tranne un punto di discontinuità a salto in 0, quindi integrabile (in senso ordinario, non generalizzato) in ogni intervallo $[2, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 6.22.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}(t-1)}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 0$, in cui è integrabile, e nell'intorno di $t = 1$, in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[-1, x]$, quindi, è necessario che sia $x < 1$. Perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 1)$.

Esempio 6.23.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{t \cdot \sqrt[3]{t-1}}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è integrabile, e nell'intorno di $t = 0$, in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[-1, x]$, quindi, è necessario che sia $x < 0$. Perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 0)$. Si noti che anche se nell'intorno di 1 la funzione è integrabile, questo punto non può essere raggiunto, perché non appena la variabile x partendo da -1 arriva a 0, l'integrale diverge, e non ha più senso.

Esempio 6.24.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{\sin\left(\sqrt[3]{t-1}\right)} dt.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è integrabile. Perciò F è definita in tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 6.25.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{\sin(t-1)} dt.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 1$, in cui è non è integrabile. Poiché $x_0 = 1$, per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ la funzione non risulta integrabile in $[1, x]$, perciò l'insieme di definizione di F è vuoto (oppure possiamo dire che è ridotto al solo punto $x = 1$, in cui F vale 0).

Esempio 6.26. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(e^t - 1)(1 + t^2)} dt.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 0$, in cui è non è integrabile. Notiamo che f è integrabile a $-\infty$ ($f(t) \sim -1/t^2$). Perciò f risulta integrabile in $(-\infty, x)$ purché sia $x < 0$, e l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 0)$.

Esempio 6.27. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(2 + t)} dt.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = -2$, in cui è non è integrabile. Notiamo che f non è integrabile a $-\infty$ ($f(t) \sim 1/t$). Perciò f non risulta integrabile in $(-\infty, x)$ per nessun x, e l'insieme di definizione di F è vuoto.

Esercizi

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni integrali.

6.174. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(t^2 - 1)} dt$

6.175. $\displaystyle\int_{-2}^x \frac{\sin t}{t(t - 1)} dt$

6.176. $\displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{dt}{t\sqrt[3]{t + 2}}$

6.177. $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt$

6.178. $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^2 - 1}} dt$

6.179. $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt[3]{t + 1}}$

6.180. $\displaystyle\int_{-2}^x \frac{dt}{t\sqrt[3]{t + 1}}$

6.181. $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt[3]{t + 1}} dt$

6.182. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t\sqrt[3]{t + 1}} dt$

6.183.★ $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(\pi t)}{(t^2-1)(t^2-2)} dt$

6.184.★ $\displaystyle\int_\pi^x e^{-\frac{1}{t}} \frac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}} dt$

6.185. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(t - 2)^{1/3}(t - 3)} dt$

6.3.B. Regolarità di una funzione integrale

Il grado di regolarità (continuità, derivabilità, ecc.) di una funzione integrale dipende dal grado di regolarità della funzione integranda, come stabilito dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale[3]. Vediamo esempi ed esercizi su questo aspetto.

Esempio 6.28. Sia

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt[3]{t+1}} \arctan\frac{1}{t}\,dt.$$

Dopo aver determinato l'insieme di definizione di F, stabilire se F è continua, derivabile, determinando i punti di discontinuità e di non derivabilità di F e discutendone la natura.

La funzione integranda $f(t)$ ha un punto di discontinuità a salto in $t = 0$ (integrabile) e un asintoto verticale in $t = -1$ (nel cui intorno è integrabile). Perciò F è definita in tutto $\mathbb{R}$.

La funzione F è continua in tutto $\mathbb{R}$, ed è derivabile tranne che nei punti $x = 0, x = -1$. Poiché per $x \neq 0, -1$ è

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \arctan\frac{1}{x}$$

si vede che in $x = 0$ F' ha una discontinuità a salto, perciò F ha un punto angoloso; per $x \to -1^{\pm}$, $F'(x) \to \mp\infty$, quindi $x = -1$ è punto di cuspide rivolta verso l'alto per F.

Esercizi

Dopo aver determinato l'insieme di definizione di F, stabilire se F è continua, derivabile, determinando i punti di discontinuità e di non derivabilità di F e discutendone la natura.

6.186.
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^{2/3}}\,dt$$

6.187.
$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{|t|} \cos t\,dt$$

[3] v. libro di testo [BPS1], cap. 6, § 9, Teorema 6.10.

6.188. $$F(x) = \int_1^x \frac{(t+1)^3}{t^2-4} \log|t| dt$$

6.189. $$F(x) = \int_0^x \frac{t\sin t}{|t|(|t|-1)} dt$$

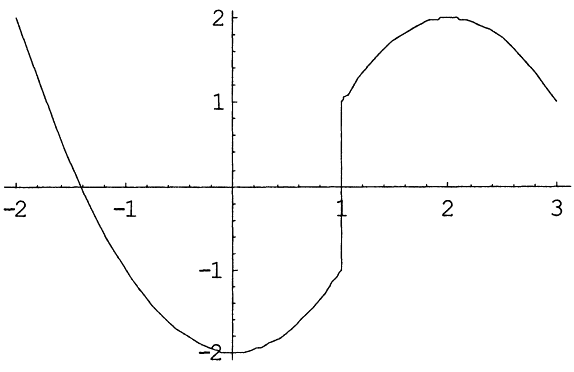
6.190. $$F(x) = \int_0^x \frac{t\sin t}{\sqrt[3]{t-1}} dt$$

6.191.★ $$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(1/t)}{t+1} dt$$

6.192.★ $$F(x) = \int_0^x \frac{|t|e^{-t}}{t^2-1} dt.$$

6.3.C. Grafico della funzione integrale dedotto dal grafico della funzione integranda

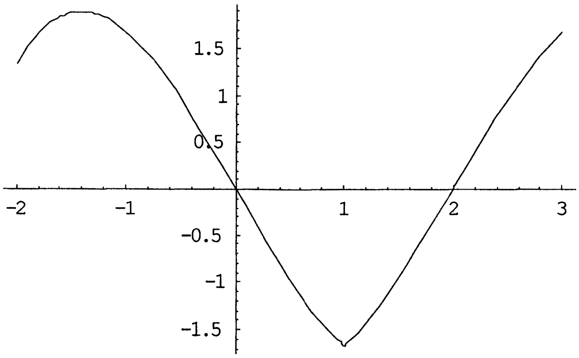
Esempio 6.29. Sia $g(t)$ la funzione il cui grafico è qui rappresentato:



Dedurre dal grafico di $g(t)$ il grafico qualitativo della funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x g(t)\, dt.$$

Grafico di $F(x)$:



Criteri con cui si è tracciato il grafico:

1. Poiché $F(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $F(0) = 0$.

2. Poiché $F'(x) = g(x)$ (dove g è continua), F è crescente (decrescente) sugli intervalli in cui g è positiva (negativa). In particolare:

$x \simeq -1.4$ punto di massimo relativo.

$x = 1$ punto angoloso: $F'(1^-) = -1$; $F'(1^+) = 1$; quindi $x = 1$ è anche punto di minimo relativo.

3. Poiché $F''(x) = g'(x)$, F è concava verso l'alto (il basso) negli intervalli in cui g è crescente (decrescente). Perciò si ha anche:

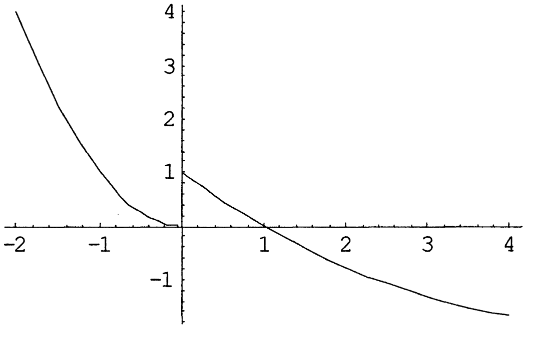
$x = 0$ punto di flesso a tangente obliqua;

$x = 2$ punto di flesso a tangente obliqua. (Il fatto che sia $F(2) = 0$ non si può prevedere in base a un'analisi puramente qualitativa del grafico di f).

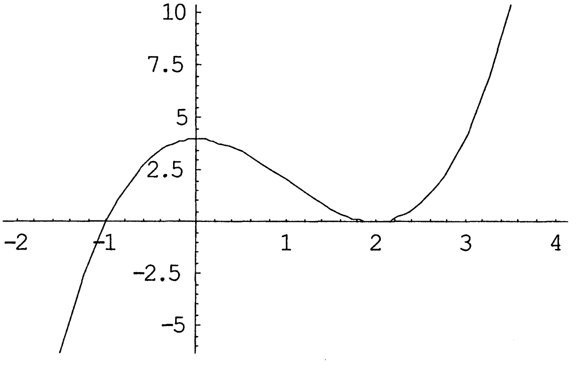
Esercizi

Come nell'esempio precedente, tracciare il grafico di $\int_0^x g(t)\,dt$ a partire dal grafico di g.

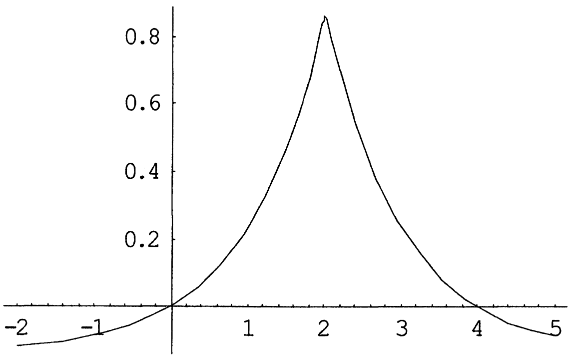
6.193. Grafico di $g(t)$:



6.194. Grafico di $g(t)$:



6.195. Grafico di $g(t)$:



6.196.

a. Studiare sommariamente la funzione

$$f(t) = \sqrt[3]{t-1}\, e^t$$

e tracciarne il grafico.

b. Dedurre dal grafico precedente (ed eventualmente da ulteriori studi) il grafico della funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

6.197.

a. Studiare la funzione

$$f(t) = (1 - |t|)e^t$$

e tracciarne il grafico.

b. Dedurre dal grafico precedente (ed eventualmente da ulteriori studi) il grafico della funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

6.198.

a. Studiare sommariamente la funzione

$$f(t) = \frac{\log t}{1+t^2}$$

e tracciarne il grafico.

b. Dedurre dal grafico precedente (ed eventualmente da ulteriori studi) il grafico della funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Giustificare le proprie conclusioni.

6.3.D. *Comportamento all'infinito di una funzione integrale. Studio di funzione integrale*

Per effettuare uno studio di funzione integrale, agli elementi che abbiamo già discusso manca ancora qualche osservazione su come si può studiare il comportamento di $F(x)$ all'infinito.

Osservazione 6.5. Limite all'infinito di una funzione integrale. Sia

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

e supponiamo che f sia definita almeno in $[x_0, +\infty)$. Allora il limite

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

uguaglia, per definizione, l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt.$$

Se questo converge, esisterà finito $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, anche se in generale non si saprà determinare esattamente. Se l'integrale non converge, il limite sarà infinito (caso più comune) o non esisterà. Un caso particolare è quello in cui per $t \to +\infty$, $f(t) \to m$, costante non nulla. In questo caso (almeno se f è continua per x abbastanza grande) sarà $F'(x) \to m$, cioè $F(x) \sim mx$, come si dimostra calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{mx}$$

col teorema di De L'Hospital. Quindi $F(x)$ tende a infinito con crescita lineare, e potrebbe avere un asintoto obliquo. L'asintoto obliquo esisterà se esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} [F(x) - mx] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} [f(t) \ - m] dt + m x_0$$

ossia: esiste asintoto obliquo $y = mx + q$ per F se l'integrale generalizzato

$$\int_{x_0}^{+\infty} [f(t) \ - m] dt$$

converge. In tal caso, il numero q generalmente non si sa calcolare in modo esatto. Naturalmente discorsi analoghi si possono fare per $x \to -\infty$.

I prossimi esempi ed esercizi illustreranno le varie situazioni che si possono presentare.

Esempio 6.30. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico:

$$F(x) = \int_2^x \left[\frac{1}{3} - e^{-(t-2)^2} \right] dt.$$

La funzione F è definita in tutto $\mathbb{R}$. f è continua in $\mathbb{R}$, quindi F è derivabile con continuità in $\mathbb{R}$.

Per $x \to \pm\infty, F'(x) = f(x) \to \frac{1}{3}$, quindi $F(x) \sim \frac{1}{3}x \to \pm\infty$ con crescita lineare. Per studiare se esiste asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[F(x) - \frac{1}{3}x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\int_2^x \left[\frac{1}{3} - e^{-(t-2)^2} \right] dt - \frac{1}{3}(x-2) - \frac{2}{3} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[-\int_2^x e^{-(t-2)^2} dt - \frac{2}{3} \right] \to \mp \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{3} = q_{1,2}$$

(due diversi limiti finiti per $x \to \pm\infty, q_1 < q_2$), perché l'integrale di e^{-t^2} è convergente[4]. Quindi esistono asintoti obliqui

$$y = \frac{1}{3}x + q_1, y = \frac{1}{3}x + q_2.$$

[4] Abbiamo usato il cambio di variabile:

$$\int_2^{+\infty} e^{-(t-2)^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$F'(x) = \frac{1}{3} - e^{-(x-2)^2} \geq 0$ per $(x-2)^2 \geq \log 3$,

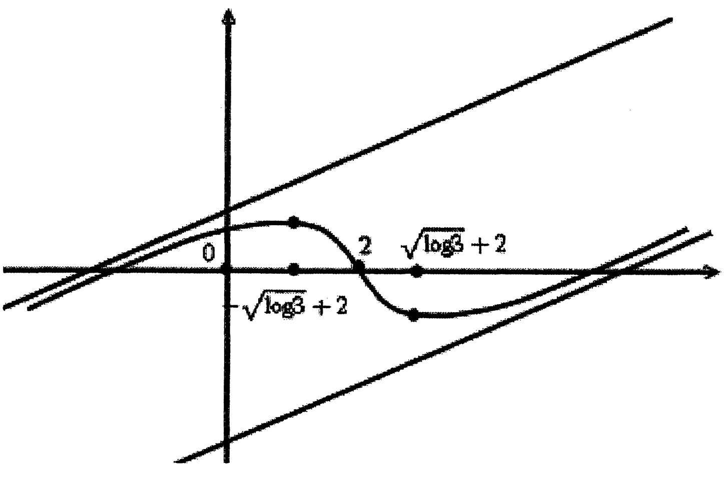
$$x \geq \sqrt{\log 3} + 2; x \leq -\sqrt{\log 3} + 2.$$

$x = \sqrt{\log 3} + 2$ punto di min. relativo.
$x = -\sqrt{\log 3} + 2$ punto di max. relativo.

$$F''(x) = 2(x-2)e^{-(x-2)^2} \geq 0 \text{ per } x \geq 2,$$

quindi $x = 2$ punto di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



Esercizi

Studiare le seguenti funzioni integrali e tracciarne il grafico.

6.199.★ $$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} - 3t}{t+3} dt$$

6.200.★ $$F(x) = \int_0^x e^{-t} \arctan(e^t) dt$$

6.201.★ $$F(x) = \int_0^x e^{t^2-4}(5 - 2t^2) dt$$

6.202.★ $$F(x) = \int_0^x e^t \left| e^{2t} - 4 \right| dt$$

Completare lo studio delle funzioni integrali degli esercizi da 6.186, 6.188, 6.191 e tracciarne il grafico. Si riportano per comodità, qui di seguito, i testi:

6.203. (Es. 6.186) $$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^{2/3}} dt$$

6.204. (Es. 6.188) $$F(x) = \int_1^x \frac{(t+1)^3}{t^2-4} \log|t| dt$$

6.205. (Es. 6.191) $$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(1/t)}{t+1} dt$$

Soluzioni § 6.3.

6.174. $x \in (-1,1)$

6.175. $x \in (-\infty,1)$

6.176. $x \in (-\infty,0)$

6.177. $x \in (-\pi,\pi)$

6.178. $x \in \mathbb{R}$

6.179. $x \in (0,+\infty)$

6.180. $x \in (-\infty,0)$

6.181. $x \in [0,+\infty)$

6.182. insieme vuoto

6.183. La funzione f è continua per $t \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}$, ed è dispari.
Per $t \to 1$,

$$f(t) \sim -\frac{\sin(\pi t)}{2(t-1)};$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{[\sin(\pi t)]'}{[2(t-1)]'} = \lim_{t\to 1}\frac{\pi\cos(\pi t)}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Perciò (De L'Hospital), f è prolungabile con continuità in 1 (e per simmetria in -1).
Per $t \to \sqrt{2}$,

$$f(t) \sim \frac{\sin\left(\pi\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}\left(t-\sqrt{2}\right)} \to +\infty.$$

La funzione ha un infinito del prim'ordine, perciò l'integrale generalizzato diverge in un intorno di $\sqrt{2}$ (e per simmetria, di $-\sqrt{2}$). Ne segue che F è definita in

$$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$$

6.184. f è definita per $t \neq 0, t \neq \pi/2 + k\pi$.
Per $t \to 0^+$ $f(t) \to 0$; per $t \to 0^-$ $f(t) \to +\infty$ in modo esponenziale, perciò non integrabile.
Per $t \to \pi/2 + k\pi$, $\cos t$ si annulla del prim'ordine, $\sqrt[3]{\cos t}$ si annulla di ordine $1/3$, $f(t)$ ha un infinito di ordine $1/3$, integrabile.
Conclusione:
F è definita per $x \geq 0$.
Questo è il più grande intervallo contenente π e contenuto in $[0,+\infty)$.

6.185. $(-\infty,3)$.

6.186. F definita in $\mathbb{R}$. F continua in $\mathbb{R}$, derivabile tranne che in $x = 0$. $F'(x) \to +\infty$ per $x \to 0$, $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente, per F.

6.187. F definita in $\mathbb{R}$. F continua in $\mathbb{R}$, derivabile tranne che in $x = 0$. $F'(x) \to \pm 1$ per $x \to 0$, $x = 0$ è punto angoloso per F.

6.188. F definita in $(-2, 2)$. F continua in $(-2, 2)$, derivabile tranne che in $x = 0$. $F'(x) \to +\infty$ per $x \to 0$, $x = 0$ è punto di flesso a tangente verticale, ascendente, per F.

6.189. F definita in $(-1, 1)$. F continua in $(-1, 1)$, certamente derivabile per $x \neq 0$. $F'(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi F è derivabile anche in $x = 0$.

6.190. F definita in $\mathbb{R}$. F continua in $\mathbb{R}$, derivabile per $x \neq 1$. $F'(x) \to \pm\infty$ per $x \to 1^{\pm}$, quindi $x = 1$ è punto di cuspide rivolta verso il basso per F.

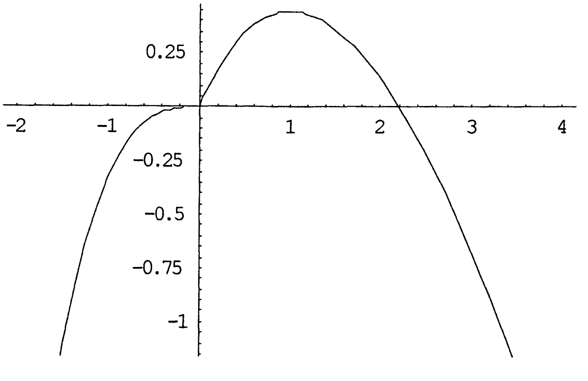
6.191. La funzione f è continua tranne in $t = 0, t = -1$. In $t = 0$ ha una discontinuità a salto (quindi integrabile), mentre in $t = -1$ va all'infinito in modo non integrabile. Pertanto F è definita in $(-1, +\infty)$.

La funzione integrale è continua in tutto il suo insieme di definizione, cioè $(-1, +\infty)$. E' derivabile in $(-1, +\infty)$ per $x \neq 0$. Per $x \to 0^{\pm}$ è $F'(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$, quindi $x = 0$ è un punto angoloso per F.

6.192. La funzione f è continua tranne in $t = 1, t = -1$. In ciascuno di questi punti f va all'infinito in modo non integrabile. Pertanto F è definita in $(-1, 1)$.

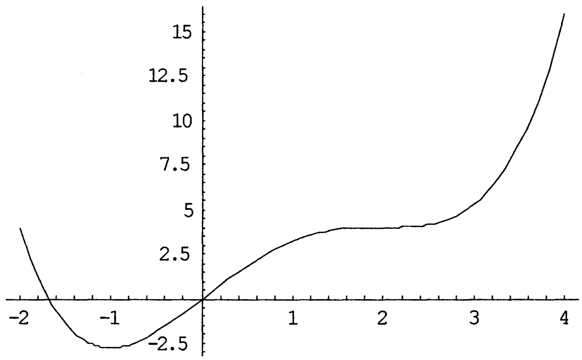
La funzione integrale è continua in tutto il suo insieme di definizione, cioè $(-1, 1)$. E' derivabile in tutto $(-1, 1)$. In $x = 0$, dove f, quindi F', non è derivabile, F non possiede derivata *seconda.*

6.193.



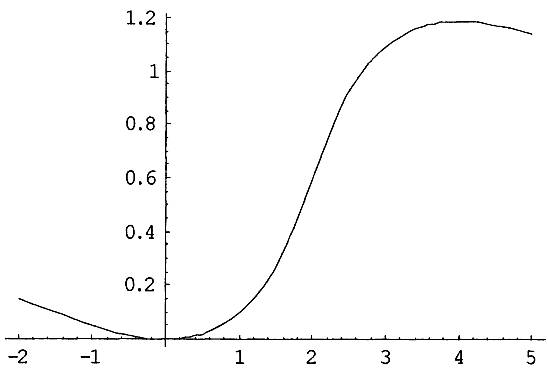
$x = 0$ punto angoloso: $F'(0^-) = 0$, $F'(0^+) = 1$;
$x = 1$ punto di massimo relativo.

6.194.



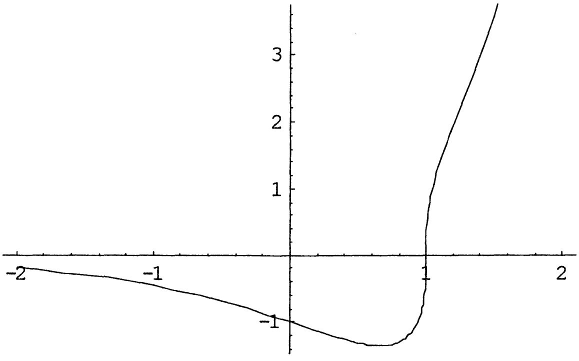
$x = -1$ punto di minimo relativo;
$x = 0$ punto di flesso a tangente obliqua;
$x = 2$ punto di flesso a tangente orizzontale.

6.195.



$x = 0$ punto di minimo relativo;
$x = 2$ punto di flesso a tangente obliqua (in cui la derivata seconda è discontinua);
$x = 4$ punto di massimo relativo.

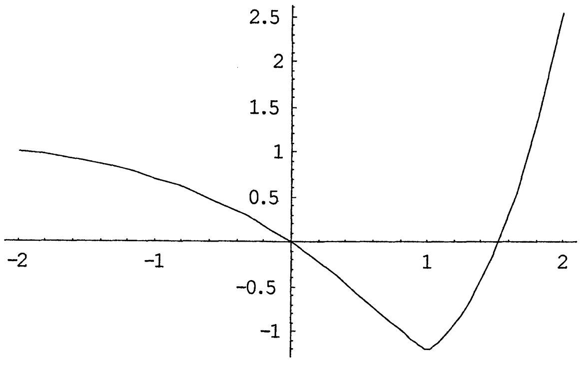
6.196. Grafico di $f(t)$:



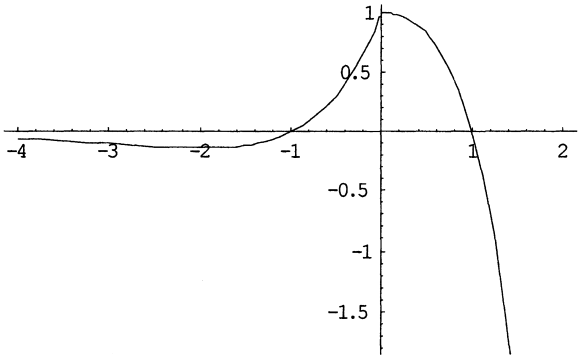
$t = \frac{2}{3}$ punto di minimo; $t = 1$ punto di flesso a tangente verticale; a $-\infty$ la funzione è integrabile.

$x = 1$ punto di minimo (in cui F non ha derivata seconda); $F(0) = 0$; F ha un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; $x = \frac{2}{3}$ punto di flesso.

Grafico di $F(x)$:

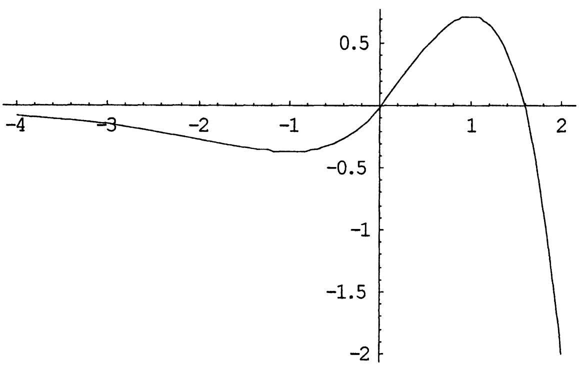


6.197. Grafico di $f(t)$:



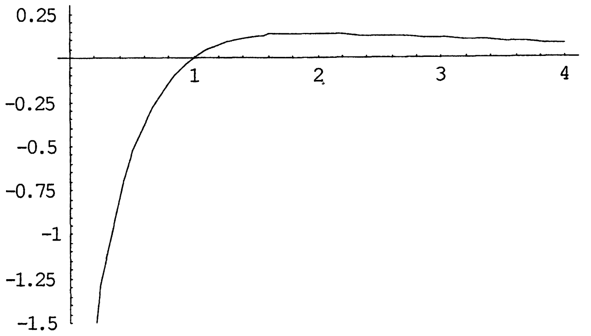
$t = 0$ punto angoloso; f si annulla in $t = \pm 1$; $t = -2$ punto di minimo; per $t \to -\infty$ la funzione è integrabile.

Grafico di $F(x)$:



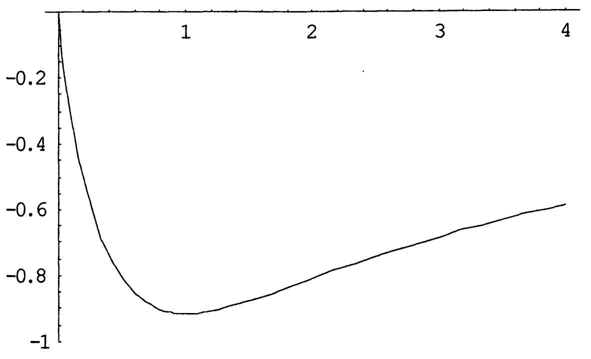
$F(0) = 0$; $x = 1$ punto di massimo; $x = -1$ punto di minimo; $x = -2$ punto di flesso; $x = 0$ punto di flesso (in $x = 0$ F ha retta tangente e cambia c oncavità, perciò è un punto di flesso; tuttavia F'' non esiste in $x = 0$). Per $x \to -\infty$ la funzione ha un asintoto orizzontale (il fatto che tale retta sia proprio $y = 0$ non è prevedibile senza calcolare esplicitamente l'integrale generalizzato $\int_0^{-\infty}(1+t)e^t dt$).

6.198. Grafico di $f(t)$:



Per $t \to 0^+$ asintoto verticale, ma la funzione è integrabile; $f(1) = 0$; per $t \to +\infty$ $f(t) \to 0$ ed è integrabile; $f(t)$ ha un punto di massimo in $t_0 \in (1, 2)$.

Grafico di $F(x)$:



$F(0) = 0$; $x = 0$ punto a tangente verticale; $x = 1$ punto di minimo; $x = t_0$ punto di flesso; per $x \to +\infty$ la funzione ha un asintoto orizzontale.

6.199.
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} - 3t}{t+3} dt$$

La funzione $f(t)$ è illimitata per $t \to -3$ e non integrabile, quindi F è definita in $(-3, +\infty)$.

Poiché per $t \to -3^+$ è $f(t) \sim \frac{e^3+9}{t+3} \to +\infty$, non integrabile, e l'integrale generalizzato è esteso all'intervallo $(0, -3)$ (da destra a sinistra),

$$\lim_{x \to -3^+} F(x) = -\infty.$$

Per $t \to +\infty$, $f(t) \to -3$, perciò $F(x) \sim -3x \to -\infty$ con crescita lineare, cerchiamo se c'è asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x)-3x] = \int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-t}-3t}{t+3}+3\right]dt = \int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-t}+9}{t+3}\right]dt$$

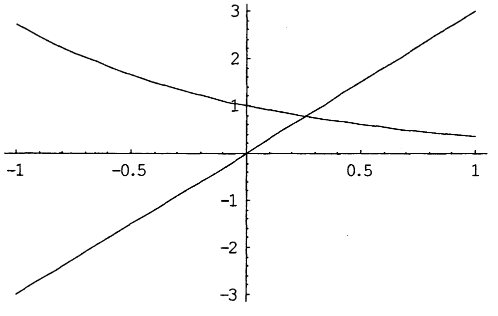
e poiché

$$\frac{e^{-t}+9}{t+3} \sim \frac{9}{t} \text{ non integrabile,}$$

non esiste asintoto obliquo.

$$F'(x) = \frac{e^{-x}-3x}{x+3} \geq 0 \text{ per } e^{-x} \geq 3x,$$

disequazione che con un semplice confronto grafico



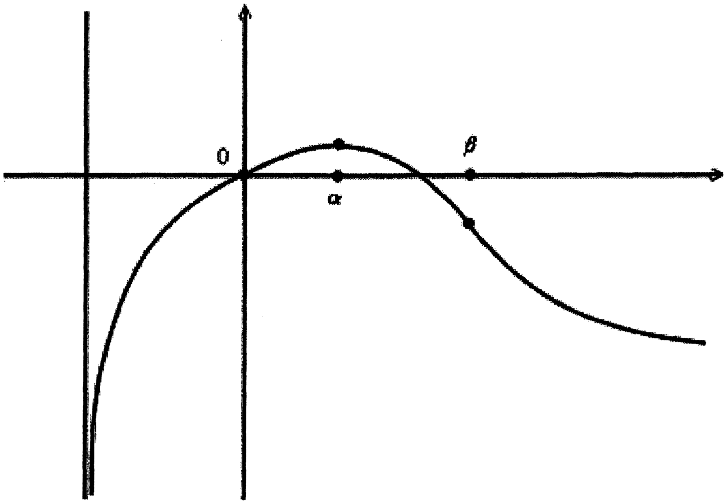
si vede essere soddisfatta per $x \leq \alpha \in (0,1)$. Quindi $x=\alpha$ punto di max. rel.
Inoltre

$$F''(x) = \frac{-e^{-x}(x+3)-(e^{-x}-3x)}{(x+3)^2} = \frac{-e^{-x}(x+4)+3x}{(x+3)^2} \geq 0$$

per

$$\frac{3x}{x+4} \geq e^{-x}, x \geq \beta \in (\alpha,+\infty).$$

Quindi $x = \beta$ punto di flesso a tangente obliqua. Grafico:



6.200. $$F(x) = \int_0^x e^{-t}\arctan(e^t)dt$$

f è continua in tutto $\mathbb{R}$, F è definita in tutto $\mathbb{R}$. Per $t \to \pm\infty$,

$$f(t) \to \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-t} \to 0 & \text{integrabile} \\ 1 \end{cases}$$

Quindi per $x \to +\infty$ è $F(x) \to c$ (asintoto orizzontale), mentre per $x \to -\infty$ è $F(x) \sim x \to -\infty$ con crescita lineare. Cerchiamo eventuale asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to-\infty}[F(x) - x] = \int_0^{-\infty}[e^{-t}\arctan(e^t) - 1]dt.$$

Ora, sfruttando lo sviluppo di MacLaurin di arctan$t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, si ha

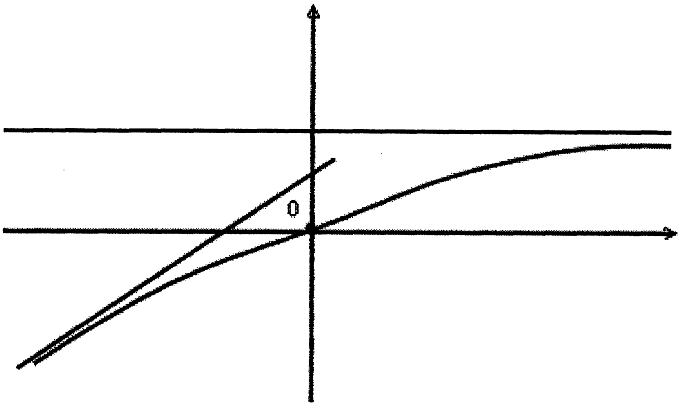
$$[e^{-t}\arctan(e^t) - 1] = e^{-t}\left[e^t - \frac{1}{3}e^{3t} + o(e^{3t})\right] - 1 =$$

$$-\frac{1}{3}e^{2t} + o(e^{2t}) \to 0^-$$

in modo integrabile, per $t \to -\infty$, quindi F ha asintoto obliquo $y = x + q$.

$$F'(x) = e^{-x}\arctan(e^x) > 0 \,\forall x,$$

F sempre crescente. Grafico qualitativo:



6.201.
$$F(x) = \int_0^x e^{t^2-4}(5-2t^2)dt$$

f è definita e continua in $\mathbb{R}$, F è definita in tutto $\mathbb{R}$.
f è pari, quindi $\int_0^x f(t)dt$ è dispari. Studiamola per $x > 0$.
Per $t \to +\infty$, $f(t) \to -\infty$, quindi $F(x) \to -\infty$ con crescita sopralineare.

$$F'(x) = e^{x^2-4}(5-2x^2) \geq 0 \text{ per } x^2 \leq \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

(per $x \geq 0$). $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ punto di massimo relativo.

Simmetrizzando dispari abbiamo che $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ è punto di min. rel.

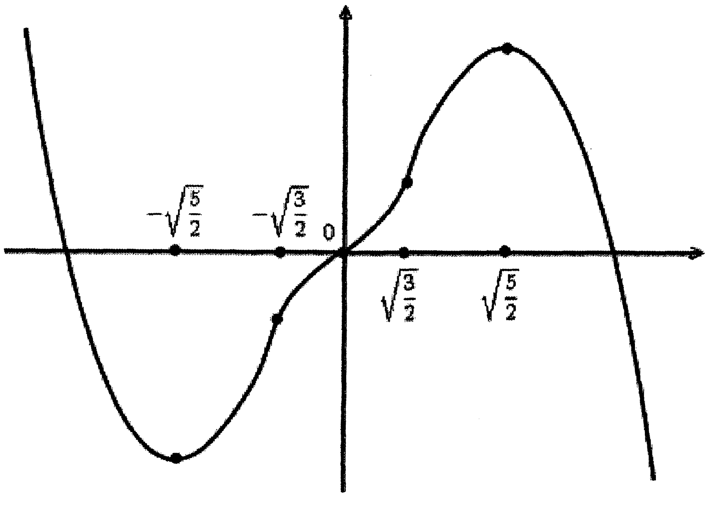
$$F''(x) = e^{x^2-4}(2x(5-2x^2) - 4x) = 2xe^{x^2-4}(3-2x^2) \geq 0$$

per

$$x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Simmetrizzando: F concava verso l'alto per $x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.
$x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ punti di flesso a tangente obliqua.

Grafico:



6.202.
$$F(x)=\int_0^x e^t\left|e^{2t}-4\right|dt$$

f continua in tutto $\mathbb{R}$. F definita in tutto $\mathbb{R}$.

$$\text{Per } t\to\pm\infty,\ f(t)\sim\begin{cases} e^{3t}\to+\infty \\ 4e^t\to 0 \quad \text{integrabile.}\end{cases}$$

Quindi per $x\to\pm\infty$,

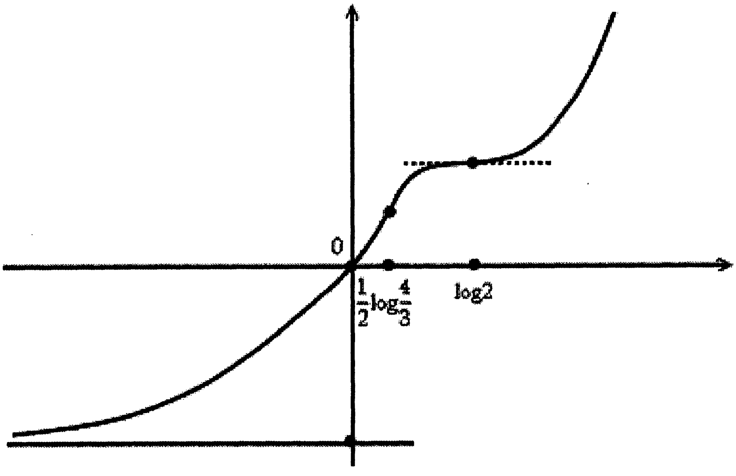
$$F(x)\to\begin{cases} +\infty & \text{con crescita sopralineare} \\ c & \text{asintoto orizzontale.}\end{cases}$$

$F'(x)=e^x|e^{2x}-4|\geq 0\,\forall x$, e $F'(x)=0$ per $x=\log 2$.
$x=\log 2$ punto di flesso a tangente orizzontale.

$$F''(x)=\begin{cases} e^x(3e^{2x}-4) & \text{per } x>\log 2 \\ e^x(4-3e^{2x}) & \text{per } x<\log 2\end{cases}$$

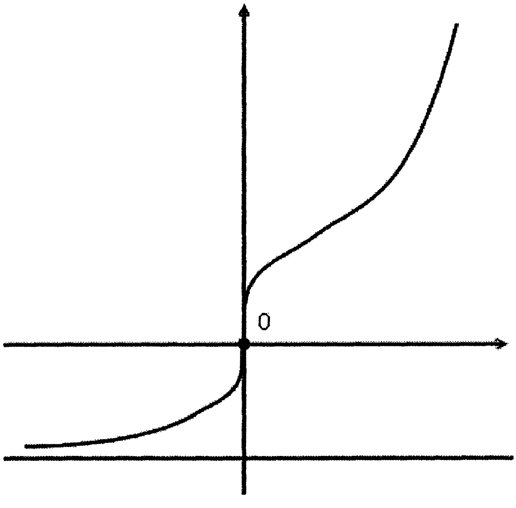
$x=\log 2$ punto di flesso a tangente orizzontale.
Inoltre, $F''(x)\geq 0$ per $x>\log 2$ e per $x\leq\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$.

$x = \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$ punto di flesso a tangente obliqua. Grafico:



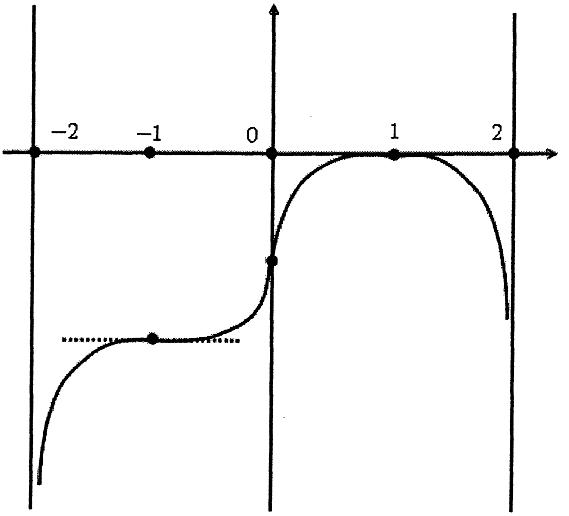
6.203. (Es. 6.186)
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^{2/3}} dt$$

Definita in $\mathbb{R}$, sempre crescente, $F(0) = 0, x = 0$ punto di flesso a tang. vert., $f(x) \to +\infty$ con crescita sopralineare per $x \to +\infty$; $f(x) \to c < 0$ per $x \to -\infty$. Grafico:



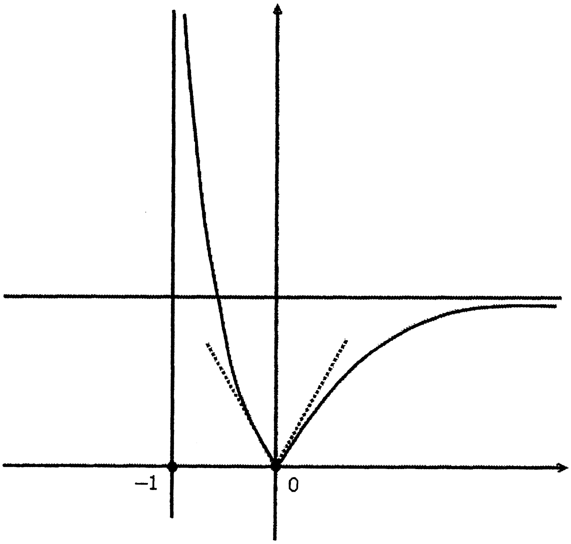
6.204. (Es. 6.188) $$F(x) = \int_1^x \frac{(t+1)^3}{t^2-4} \log|t| dt$$

Definita in $(-2,2)$; $x = 0$ punto di flesso a tang. vert. ascendente.
Per $x \to 2^-$ e $x \to -2^+$, $F(x) \to -\infty$; $x = \pm 2$ asintoti verticali.
$F'(x) \geq 0$ per $x \in (-2,1)$. $x = 1$ punto di massimo relativo (e assoluto), $F(1) = 0$. $F'(-1) = 0$; $x = -1$ punto di flesso a tang. orizz.
$x = 0$ punto di flesso a tangente verticale, ascendente. Grafico:



6.205. (Es. 6.191) $$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(1/t)}{t+1}\,dt$$

Definita in $(-1, +\infty)$. Per $x \to -1^+$, $F(x) \to +\infty$, asintoto verticale. Per $x \to +\infty$, $F(x) \to c > 0$, asintoto orizzontale, perché $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$, integrabile. $x = 0$ punto angoloso e di minimo relativo, $F'(0^\pm) = \pm\frac{\pi}{2}$. Grafico:



Indicazioni bibliografiche di base

Le difficoltà che uno studente può incontrare nel corso di Analisi Matematica 1 talvolta sono dovute, più ancora che alla difficoltà specifica dei contenuti dell'Analisi, alla debolezza sui prerequisiti (lacune sulla matematica scolastica), oppure alla debolezza sul metodo di studio della matematica universitaria (logica, linguaggio matematico, ecc.). In entrambi i casi lo studente che si rende conto di avere queste difficoltà deve decidere di affiancare allo studio dell'analisi un investimento extra del proprio tempo, dedicato al rafforzamento delle proprie "basi".

Un testo suggerito per l'introduzione al *metodo di studio* della matematica universitaria è:

M. Bramanti, G. Travaglini: Matematica: questione di metodo. Zanichelli, 2009.

Alcuni testi suggeriti invece per il *ripasso della matematica scolastica* (prerequisiti) sono i seguenti:

M. Bramanti: PreCalculus. Progetto Leonardo, 1999.

M. P. Aureggi, A. Squellati: Introduzione alla matematica generale. Giappichelli, 1991.

P. Bruno Longo, M. A. Ambrosione: Elementi di matematica. Veschi, 1988.

G. Malafarina: Matematica per i precorsi. McGraw-Hill, 2003.

G. Tommei: Matematica di base. Apogeo, 2010.