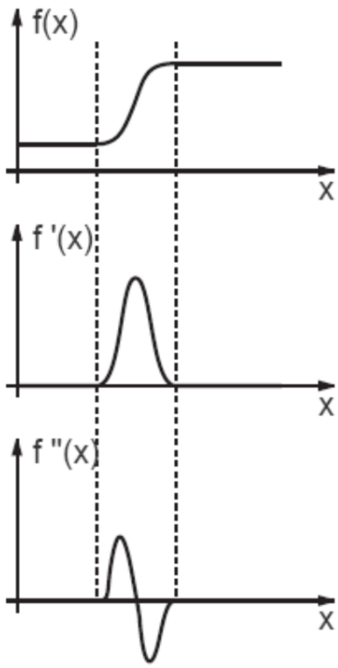
20-12-2022

- Come detto in precedenza Prewitt e Sobel si riferiscono alla derivata prima.

Edge detector basato sulla derivata seconda

Quando la derivata prima tende a crescere vuol dire che si ha un bordo perchè si ha una "variazione". Invece, quando la derivata è nulla allora non si hanno variazioni, quindi non si hanno bordi.

Se ho un segnale monodimensionale e calcolo la derivata seconda, scopro che in corrispondenza del lato(bordo) essa passa per lo zero.



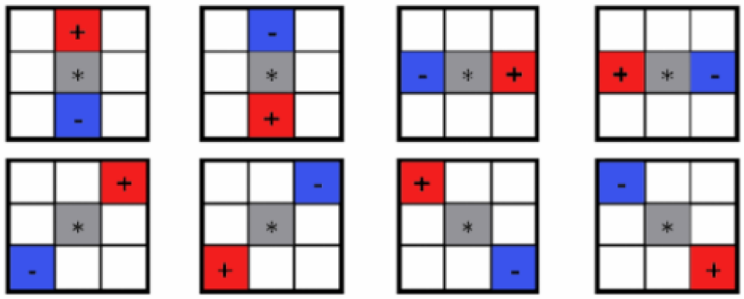
Laplaciano

Un kernel di un edge detector basato sulla derivata seconda f'' è il Laplaciano ed è così fatto:

$$Laplaciano = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Questo kernel **non da informazioni sulla direzione dei bordi**, *ovvero se sono orizzontali / verticali*, quindi non esiste la versione $Laplaciano_x$ o $Laplaciano_y$ e ciò si può capire vedendo la matrice che è simmetrica rispetto al centro.
- Per trovare il punto del bordo bisogna verificare che ci sia il passaggio per lo 0 (**zero-crossing**) dopo aver applicato per convoluzione il kernel Laplaciano

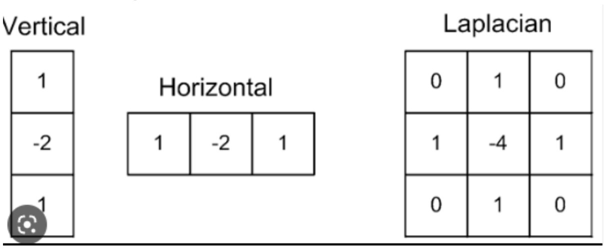
In una raster, lo zero-crossing si può vedere con questi 8 casi:



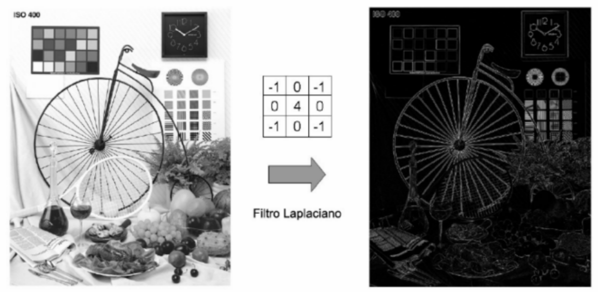
Dove l'asterisco grigio è il posto dove si cerca di verificare il passaggio per lo 0.

> L'idea è che da un lato si hanno valori <0 e dall'altro >0

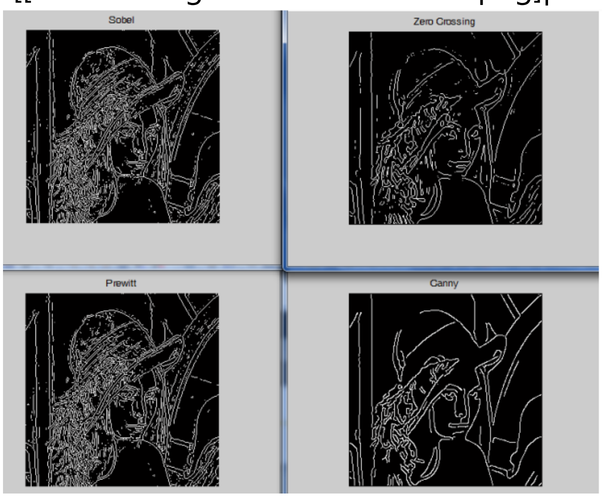
Per esempio:



Applicando Laplaciano si ottengono i seguenti risultati:



![[Pasted image 20221220103253.png]|300]



Considerazioni

- Con lo zero-crossing(*Laplaciano*) risulta un po' più pulita rispetto alle applicazioni di Sobel e Prewitt. La derivata seconda individua meglio gli edge a differenza della derivata prima
- *Canny* non si studia, richiede passaggi non lineari e non invariante per traslazione.

- *Sobel*, Prewitt e *Laplaciano* **si usano di più per immagini con POCHI COLORI** ma si *possono usare anche per fotorealismo* però, in questi casi, si usano più spesso algoritmi più complessi.

FILTRI DI SHARPENING

> Il termine *sharpering* significa *affilatura*.

Sono filtri che **migliorano la nitidezza** (ovvero aumentano il contrasto fra zone uniformi e di conseguenza aumentano gli edge) e **diminuiscono la sfocatura** dell'immagine.
La diretta **conseguenza** dell'applicazione di questo filtro è **l'aumento del rumore.**

> L'idea è quella estrarre gli edge dall'immagine e poi in loro corrispondenza viene fatta un'operazione.
> Ma a volte gli edge extractor generano rumore quindi quando uso filtro sharpering metto in evidenza anche qualcosa che non sia edge perchè vengono messi in evidenza tanti artefatti.

Il kernel dei filtri di sharpening è il seguente:

-1	0	-1
0	5	0
-1	0	-1

Questo kernel ha la caratteristica di **avere la somma degli elementi al suo interno è uguale a 1**.

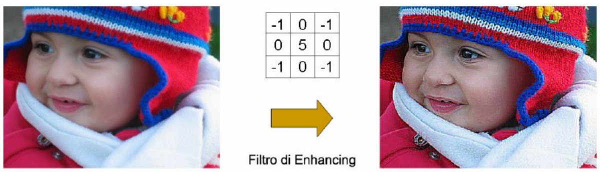


IMAGE ENHANCEMENT NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

- Generalmente assegno un valore a pixel in base alla sua posizione nello spazio.
- *Avendo 1 spazio a 2D, che valore di luminanza trovo in posizione (x,y)?*
- La relazione con i valori è data dalla posizione. Il **DOMINIO SPAZIALE** è proprio questo.
  - Si hanno anche altre possibilità per descrivere un'immagine (UN segnale).

Un altro dominio importante è il **DOMINIO DELLE FREQUENZE**, cioè quel dominio che contiene dei valori che non indicano più luminanza ma altro.
Il dominio delle frequenze è il dominio dove posso **descrivere in maniera precisa** questi valori.

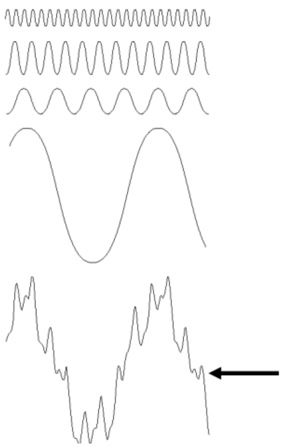
- Per trovare il dominio delle frequenze serve **Trasformata di Fourier*.
    - *Egli voleva risolvere sistemi con equazioni sul calore.*
- *Fourier* affermava, inoltre, che se prendo una **FUNZIONE PERIODICA** (*cioè che si ripete rispetto all'asse per cui varia*) essa **può essere espressa come somma di seni e/o coseni di differenti frequenze e ampiezze.** In questo caso si usa la **SERIE DI FOURIER**.
    - *Per quanto sia complicata la funzione, se è periodica (e ha altre condizioni matematiche che sono soddisfatte per teoria), essa la posso scrivere come somma di seni-coseni con diversi pesi.*
- *Ognuno dei seni-coseni che fattore moltiplicativo ha davanti a se? (cioè quale peso hanno?)*
    - Per **IMMAGINI NON PERIODICHE**, si può sempre scrive come somma di seni e/o coseni ma per farlo **serve applicare** la **TRASFORMATA DI FOURIER**.

Come trovare i pesi

I pesi che si devono trovare sono quelli delle varie funzioni *seno/coseno* che permettono di scrivere l'immagine originale come somma di *seni/coseni*?

- Il dominio delle frequenze è una matrice dove, per ogni cella, ci sono valori dei pesi dei sen-cos.
    - Ogni cella è assegnata a una funzione *seno/coseno* per una certa frequenza.

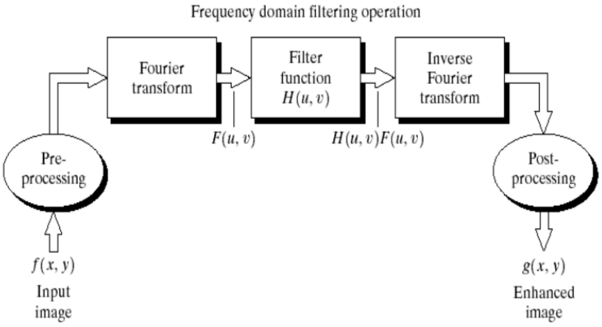
Esempio:



Questa funzione è la somma delle 4 funzioni periodiche di cui sopra.

> C'è da considerare che **posso sempre tornare al dominio di partenza** se cambio dominio perchè la funzione calcola gli stessi valori solo che vengono espressi in diverso modo.

Il processo della Trasformata segue questo schema:



- ho immagine di input (potrei *pre-processarla*)
- il filtro si applica punto a punto e ha la stessa dimensione dell'immagine
- **Anti-Trasformata permette di tornare al dominio spaziale CON delle modifiche** (*che dipendono da H*)

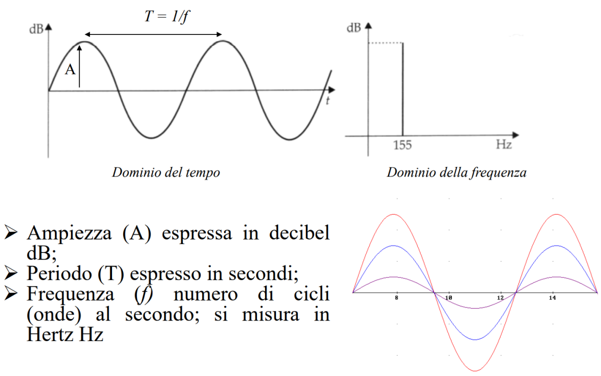
Discrete Fourier Transform DFT

La **Trasformata di Fourier Discreta** si usa per **semplificare il lavoro**.
La **complessità computazionale** sarà **alta** anche se si possono **ottenere gli stessi risultati** con un algoritmo chiamato **Fast Fourier Trasform** (**FFT**) (*però non lo studiamo*).

Quindi si ha che:

- Un'immagine può essere vista come una funzione discreta in due dimensioni i cui valori rappresentano il livello di grigio di un determinato pixel.
- La funzione "immagine" può essere vista come un segnale, cioè una funzione variabile in un dominio con una propria frequenza (costante o variabile).

Nel caso di 1D si ha:



Se a una **funzione seno appli**k20-12-2022-pt2**co la Trasformata** di Fourier allora **ottengo solo l'ampiezza del seno** come **COEFFICIENTE** e non succede *NULLA*.

Nel caso 2D si ha:

La coppia trasformata antitrasformata della sequenza bidimensionale $f(x,y)$ assume la seguente forma:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per \;\; u = 0,1,\dots,M-1 \; v = 0,1,\dots,N-1$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per \; x = 0,1,\dots,M-1 \;\; y = 0,1,\dots N-1$$

dove:

- F è la **trasformata.**
- f è l'**antitrasformata che permette di tornare al dominio di partenza**
- $F(u,v)$ rappresenta: F in posizione (u,v);
- La **doppia sommatoria** (accede una alla volta a tutti i pixel);
- $f(x,y)$ è valore di **luminanza** del pixel;
- $e^{-i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$ è un numero immaginario;

Quindi **nel dominio delle frequenze** ho una **matrice di numeri complessi**.

L'idea è la seguente:

- La matrice iniziale è f (*di numeri **reali**)
- applico la trasformata discreta di F
- ottengo una matrice F (*di numeri **complessi***)

> *Ma abbiamo detto che dovevano esserci seni/coseni. Dove sono?*

Formula di Eulero

Analizzando i numeri complessi che si ottengono si ha che:

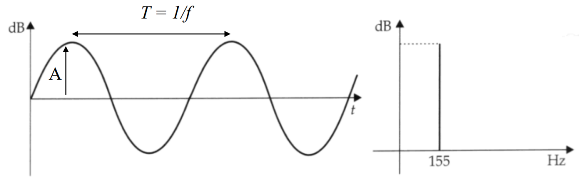
$$e^{ix} = cos(x) + isen(x) \qquad e^{-ix} = cos(x) - isen(x)$$

Quindi quello scritto nella formula è numero complesso in **FORMA ESPONENZIALE**.

Dato che la trasformata F ha valori complessi, può essere espressa in termini della sua parte reale e della sua parte immaginaria:

- **SPETTRO DELLA TRASFORMATA**: (cioè quella matrice dove sono messi i *moduli dei numeri complessi*, quindi è l'**insieme dei moduli**)
  - $|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$
- **ANGOLO DI FASE:** (ovvero la matrice che contiene tutte le **fasi**, detti anche *angoli*)
  - $\phi(u,v) = tan^{-1}[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}]$
- **POTENZA SPETTRALE**: (ovvero il *modulo al quadrato*)
  - $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$

Nel caso precedente possiamo vedere che la funzione a sinistra ha come spettro della trasformata il grafico che è immediatamente alla sua destra. Ovvero:



Dominio del tempo *Dominio della frequenza*

Esempio 1D

DATA :

1	2	4	4

$\boxed{N=4}$

Formula nel caso di 1D

$$\boxed{F(u)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\,e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}}$$

$$\boxed{u=0} \longrightarrow F(0)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\,e^{\cancel{-i2\pi\left(\frac{0\cdot x}{4}\right)}^{\,0}} \rightarrow F(0)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\cdot 1$$

$$\boxed{F(0)}=\frac{1}{4}\left(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\right)=\frac{1}{4}\left(1+2+4+4\right)=\boxed{\frac{11}{4}}$$

u=0	u=1	u=2	u=3
$\frac{11}{4}$	...	...	...

$$u=1 \longrightarrow F(1)=\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\,e^{-i\cancel{2}^{1}\pi\frac{x\cdot 1}{\cancel{4}_{2}}} = \boxed{\frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\,e^{-i\frac{1}{2}x\pi}}$$

$$F(1)=\frac{1}{4}\left(\underbrace{f(0)}_{1}e^{0\pi}+\underbrace{f(1)}_{2}e^{-i\frac{1}{2}\pi}+\underbrace{f(2)}_{4}e^{-i\pi}+\underbrace{f(3)}_{4}e^{-i\frac{3}{2}\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2e^{-\frac{1}{2}\pi}+4e^{-i\pi}+4e^{-i\frac{3}{2}\pi}\right)=$$

$$=\underbrace{\overset{\theta=0}{\frac{1}{4}}}_{\rho}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\rho}e^{-\overset{\theta}{\frac{1}{2}\pi}}+\underbrace{1}_{\rho}e^{-i\overset{\theta}{\pi}}+\underbrace{1}_{\rho}e^{-i\overset{\theta}{\frac{3}{2}\pi}}=$$

I 4 addendi complessi in forma esponenziale li trasformo in forma cartesiana:

1) $\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$

2) $\boxed{\rho = \frac{1}{2}}, \boxed{\theta = -\frac{1}{2}\pi} \to \boxed{a = \rho \cos\theta}, \boxed{b = \rho \sin\theta} \to a = \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right), b = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$ .... ecc...

3) ...

4) ...

Sommo i 4 numeri convertiti in forma cartesiana:

RISULTATO : $\boxed{-3+i2}$

$u=0$	$u=1$	$u=2$	$u=3$
$\frac{11}{4}$	$-3+i2$	...	...

$u=2$ ....

Considerazioni applicazione della Trasformata

- Per calcolare tutti gli n coefficienti n mi serve complessità n^2
- $F(0)$ rappresenta il **VALORE MEDIO**.

Proprietà DFT

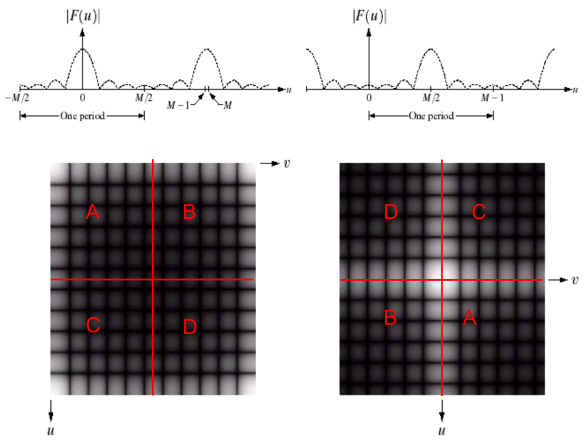
- **PROPRIETA' DI SEPARABILITA'**: se devo calcolare $F(u, v)$ posso calcolare:

$$F(u,v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x,v) e^{\frac{-i 2 \pi u x}{M}}$$

- Dove: $$g(x,v) = \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{\frac{-i 2 \pi v y}{N}} \right]$$

- In particolare:
    - $g(x, v)$ calcola i pixel al variare della y, quindi calcolo **tutto rispetto a una dimensione soltanto** cioè permette di calcolare i coefficienti in **2 passaggi**:
        - calcolare una **FUNZIONE INTERMEDIA**
        - usare la funzione intermedia per fare i calcoli
    - **VANTAGGI**: i valori con $g(x, y)$ già li ho calcolati prima cosi posso calcolare $F(u, v)$

- **PROPRIETA' DI TRASLAZIONE** (**SHIFT**): è una proprietà *significativo* in 2D
  - divido in 4 quadranti il risultato che ottengo dopo aver applicato la formula e li sposto cambiandoli fra loro lungo le diagonali
  - traslando si nota che $F(0, 0)$ si sposta e finisce al centro.

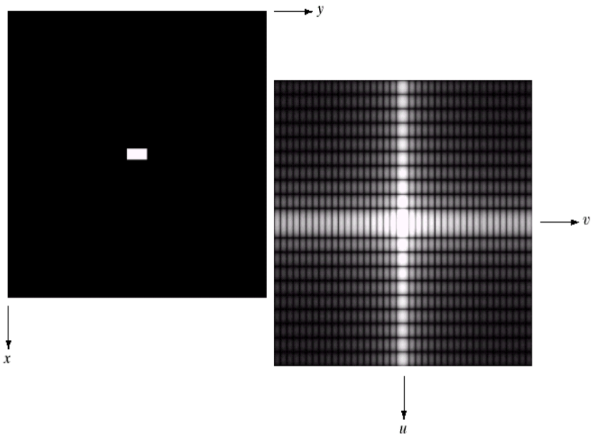


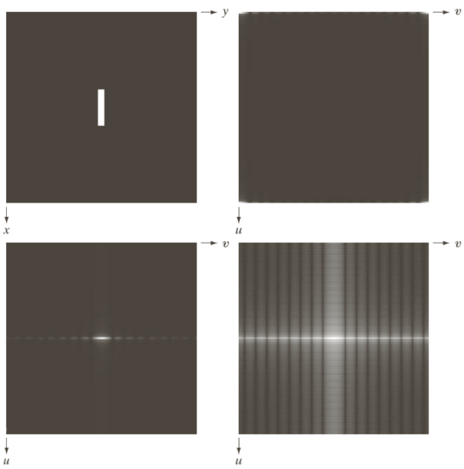
- I valori che **in origine** stanno ai **bordi** (sono i coefficienti delle componenti a **bassa frequenza**), via via che mi avvicino al **centro** trovo i componenti con **alta frequenza**.
- Dopo la traslazione succede il contrario: al **CENTRO ho BASSE FREQUENZE** (**e anche il valore medio**) e man mano che mi allontano trovo le **ALTE FREQUENZE** (cioè ai **BORDI**).

> Solitamente si lavora con la **versione traslata** dove al centro ho valore medio e via via che mi allontano trovo alte frequenze perchè così si ha una **costruzione più semplice dei filtri**.

Esempio di traslazione

- La trasformata di un piccolo rettangolo bianco su uno sfondo nero sarà dunque (dopo la traslazione):



- 

a b
c d

FIGURE 4.24
(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

- Se sposto il rettangolo (mantenendo l'angolo) lo spettro non cambia. Infatti:

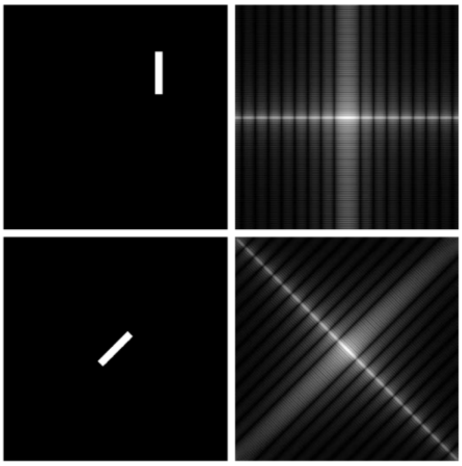


FIGURE 4.25 (a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

La **Trasformata non è sensibile alla traslazione ma alla rotazione**. ciò si evince guardando il modulo.

- **PROPRIETA' DEL VALOR MEDIO**:

Il valore della trasformata nell'origine, cioè nel punto $(u,v)=(0,0)$ è dato da:

$$F(0,0) = \frac{1}{NxN}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad \bar{f}(x,y) = \frac{1}{NxN}F(0,0)$$

Come si può vedere non è altro che la media di $f(x,y)$. Il valore della trasformata di Fourier di un'immagine $f(x)$ nell'origine è uguale alla media dei valori di grigio contenuti nell'immagine.
$F(0,0)$ prende anche il nome di *componente continua* o componente DC.

ALGORITMO Fast Fourier Transform (FFT)

> (Non è una formula ma un algoritmo).

Al posto di fare n^2 operazioni ne fa $(n\ logn)$. Non vediamo l'implementazione o altro ma basta sapere solo questo

FREQUENZE: Low e High

- Dopo la traslazione trovo le basse frequenze al centro e via via che mi allontano trovo le più alte.
- Invece, senza traslazione trovo una situazione opposta.

In un immagine, se ho **ALTE FREQUENZE**, vuol dire che ho **MOLTI EDGE** (**molte strutture** con **contrasto elevato**, tante **variazioni di colore** una dopo l'altra a poca distanza).

Generalmente:

- Se ho **basse frequenze** , allora ho **zone uniformi**

- Se ho **alte frequenze** allora ho **variazioni** più o meno **brusche** e quindi ho **bordi o rumore**.

> Un **edge detector** rileva le zone dove ci sono **alte frequenze** (trova punti dove ci sono variazioni improvvise). **Corrisponde anche a un uso di filtro PASSA-ALTO**

RANGE DINAMICO

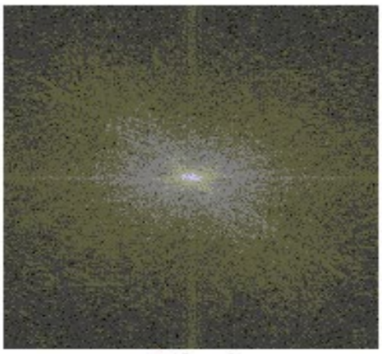
> In caso di RGB si calcolano 3 trasformate di Fourier.

Dopo aver applicato la trasformata posso ottenere come risultato un modulo uguale a 0 nella cella di una matrice oppure un valore massimo di 6.47×10^6.
Come si gestiscono variazioni di questo tipo?

Se dovessi rappresentarlo avrei:

$f(x,y)$

$|F(u,v)|$



$D(u,v)$

Nell'immagine centrale avrei un puntino bianco al centro. Ed è cosi effettivamente perchè si aveva un range $[0,\ 6.47 \times 10^6]$ che viene trasformato in un range $[0, 255]$

Normalizzazione lineare

La formula della normalizzazione lineare è:

$$x' = \frac{x - min}{(max - min)} \times 255$$

Al centro ho quel valore perchè è $F(0,0)$ e in questo punto si accumula più energia per definizione di Trasformata. **Per questo motivo si normalizza non linearmente ma logaritmicamente**

Normalizzazione logaritmica

- Tutti i valori sono molto lontani dal massimo e quindi si ha questo risultato. Per questo motivo si applica una normalizzazione cosi:

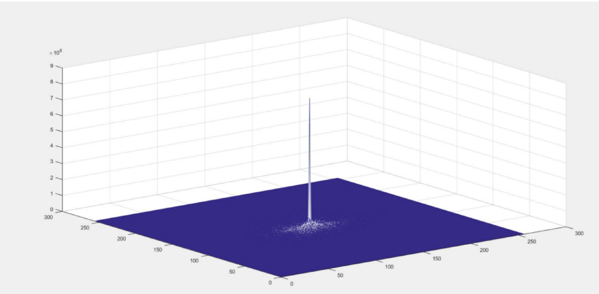
$$D(u,v) = c\ log(1 + F(u,v))$$

- ..e in questo modo ottengo l'immagine a destra, ovvero $D(u,v)$

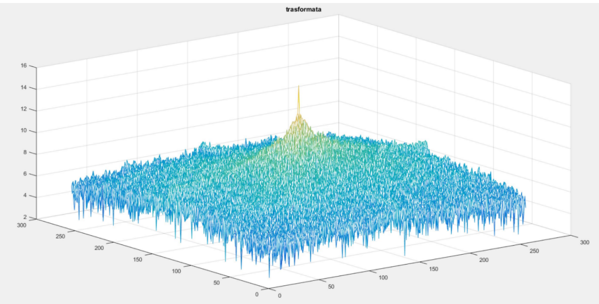
> La **parte centrale** è sempre **più luminosa** mentre la **parte periferica** ha **valori più bassi**.

> Per questo riusciamo a capire che **tutte le trasformate che vedremo saranno traslate**.

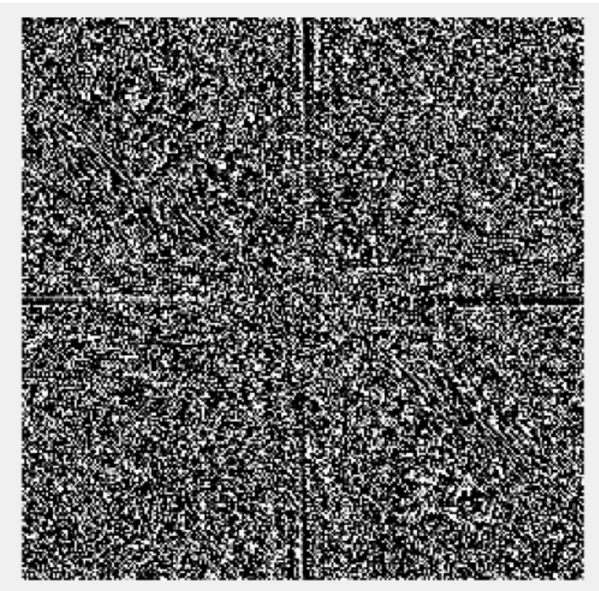
Modulo di Lena **senza logaritmo**:



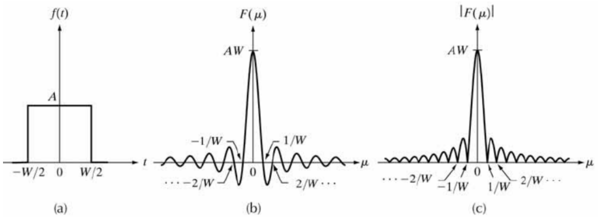
Logaritmo del modulo di Lena:

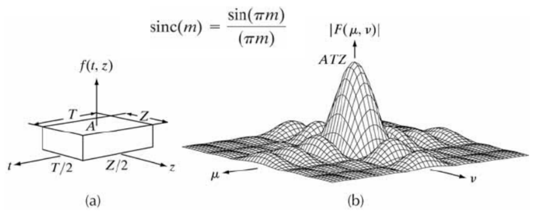


Fase di Lena:



Trasformata di una funzione matematica della funzione *rettangolo* (cioè un impulso):



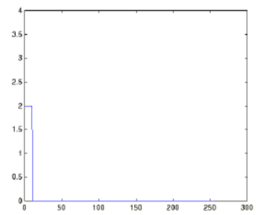


- $sinc(m)$ è **seno cardinale** di m
- se applico la trasformata ad (a) ottengo la funzione parallelepipedo (b) che diventa la funzione $sinc$ in piu dimensioni.
- (c) è lo spettro alla fine della funzione rettangolo.

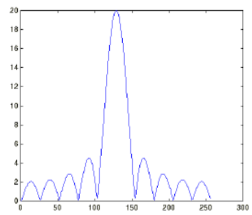
> alcuni filtri applicati al dominio delle frequenze che sono semplici da implementare ma producono artefatti perchè sono fatti in modo da tagliare delle frequenze (producendo gradini) che assomigliano a questi impulsi che creano effetti ondulatori.

- la funzione rettangolo ha la trasformata che è $sinc$, cioè seno cardinale.

Un esempio di trasformata discreta nel caso 1D: un impulso approssimato da un rettangolo di lato 10 e altezza 2, su una finestra complessiva di 256 valori di x:

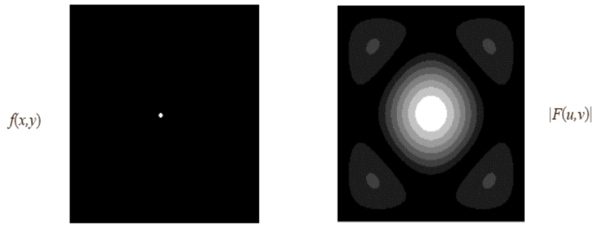


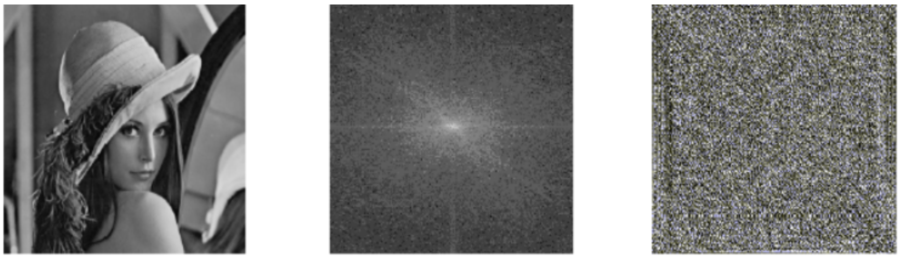
$f(x), x = 0, \ldots, 255$



$|F(u)|, x = 0, \ldots, 255$

Un esempio di trasformata discreta nel caso 2-D: un **impulso** approssimato da un piccolo cerchio bianco su fondo nero, in un'immagine di circa 200 x 200 pixels. I differenti livelli di grigio nell'immagine di intensità dello *spettro* evidenziano le ampiezze decrescenti dei diversi lobi.





$f(x,y)$ $|F(u,v)|$ $\Phi(u,v)$

La visualizzazione dello spettro riguarda in realtà non $|F(u,v)|$ ma una sua versione compressa logaritmicamente. Altrimenti si vedrebbe solo un puntino al centro.

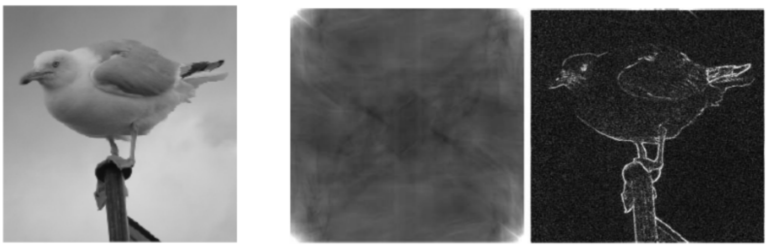
L'ampiezza contiene l'informazione relativa al fatto che una certa struttura periodica è presente nell'immagine.

La fase contiene l'informazione relativa al dove le strutture periodiche evidenziate nella DFT sono collocate. Quindi è molto più significativa di quello che possa sembrare nell'immagine.

Ho sempre bisogno di **modulo e fase** (*anche per tornare indietro*).
Spesso i filtri usano sempre lo **spettro**(**modulo**) e la fase no.

Ricostruzione

Ricostruzione da solo modulo



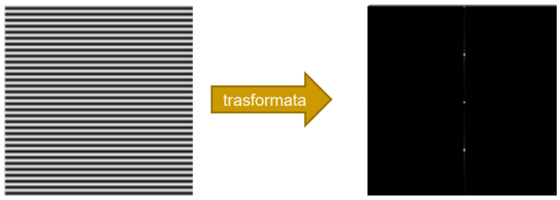
Ricostruzione da sola fase

Per ricostruire:

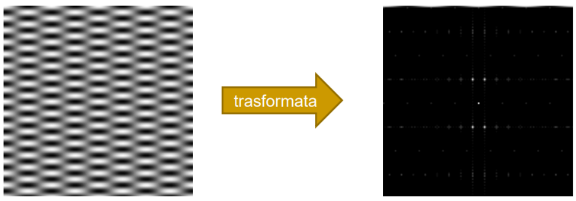
- calcolo trasformata dell'immagine
- IMMAGINE CENTRALE: calcolo ampiezza(**spettro**) e nel primo caso **azzero la fase** e faccio l'anti-trasformata solo con modulo.
- IMMAGINE A DESTRA: **azzero lo spettro** e uso solo la fase.

La fase dice dove sono gli elementi quindi se devo ricostruire con un solo elemento **ha più senso usare sempre la fase** che ci fa minimamente **ricordare** com'era **l'immagine iniziale**.

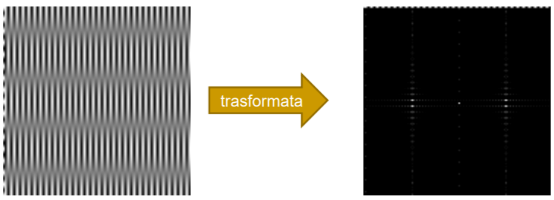
- Questa è un'mmagine fatta apposta per far far comparire quella a sinistra.
- I livelli di grigio oscillano seguendo un coso ondulatorio. la Trasformata traslata ha dei picchi, appunto.
- Ci sono altri elementi a destra o sinistra dovuta al fatto che la sinusoide è discreta e non corrisponde esattamente alla funzione seno.



- Mi trovo più vicino ai bordi perchè ho una frequenza più alta e l'immagine a destra mostra 3 punti allineati in verticale perchè la variazione della sinusoide avviene verticalmente



- Ho variazioni lungo x e lungo y.
- Nello specifico lungo y ha una frequenza più alta rispetto alla variazione lungo la x.



VANTAGGI E NOTE DELLA TRASFORMATA

Nello spazio delle frequenze è possibile:

- **sopprimere frequenze indesiderate**
- ridurre lo spazio occupato dai dati (**compressione**) pur limitando la degenerazione del segnale (JPEG, MPEG, DivX, MP3)
- **rigenerare segnali degradati.**

La **trasformazione diretta** può essere vista come un processo di **analisi**:

- il segnale $f(x)$ viene **scomposto** nelle sue componenti elementari, che sono nella forma dei **vettori di base**. I coefficienti della trasformata specificano quanto di ogni componente di base è presente nel segnale.

Nella **trasformazione inversa**, mediante un processo di **sintesi**, il segnale viene **ricostruito**, come **somma pesata delle componenti di base**:

- il peso di ogni vettore di base nella ricostruzione del segnale è rappresentato dal corrispondente coefficiente della trasformata.

Il coefficiente della trasformata è una misura della correlazione tra il segnale ed il corrispondente vettore di base. La **trasformazione** non comporta perdita di informazione: essa fornisce solo una **rappresentazione alternativa del segnale originale.**