

FORMULARIO

È assegnato l'endomorfismo tale che:

$$\begin{cases} f(1, 1, 1) = (-1, 2h-1, -1) \\ f(1, 0, 1) = (-1, h, 0) \\ f(0, 1, 1) = (0, h-1, -1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(e_1+e_2) &= (-1, 2h-1, -1) & f(e_1) &= \dots \\ f(e_1) + f(e_3) &= (-1, h, 0) & f(e_2) &= \dots \\ f(e_2) + f(e_3) &= (0, h-1, -1) & f(e_3) &= \dots \end{aligned}$$

$$\text{Dato l'endomorfismo } f(x, y, z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (0, h+1, 0) \\ f(e_2) &= (h, h, -1) \\ f(e_3) &= (0, -1, h) \end{aligned}$$

STUDIO $\text{Im } f + \text{ker } f$

Iniettive $\dim \text{ker } f = 0$ / suriettive $\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Im } f$
 dim $\text{Im } f = f(A)$ ISOMORFISMO

Suriettiva + iniettiva

$$C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} \text{null. ass.} \\ \vdots \\ \vdots \\ \times \end{matrix} = 0$$

(detta dal determinante)

Eq. cart. $\text{Im } f$, dove $\text{Im } f = \{(C_1, \dots, C_n) \mid C_n \rightarrow \begin{vmatrix} \text{null. ass.} \\ \vdots \\ \vdots \\ \times \end{matrix} = 0\}$

\rightarrow se $\dim \text{Im } f = 1$, allora $\text{Im } f = \{(C_2)\}$

SEMPLICITÀ

SOLUZIONI POLINOMIO CARATTERISTICO

$$\det M(f-T) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{matrice} \\ \uparrow \\ \text{DET.} \end{array} \quad \begin{array}{l} T = \dots \\ T = \dots \\ T = \dots \\ T = \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{AUTOVARI} \\ \sum \\ T = \dots \\ T = \dots \\ T = \dots \\ T = \dots \end{array}$$

Se $m_\lambda = 1$ allora $g_\lambda = 1$ ($0 \leq g_\lambda \leq m_\lambda$)

Se $m_\lambda > 1$ allora calcolo $g_\lambda = \dim V_\lambda = \dim (\ker f)$

Se $m_\lambda = g_\lambda$, f è semplice e diagonalizzabile.

\hookrightarrow Se un AUTOVALORE T ha il parametruo h si devono fare le condizioni e vedere quando gli autovvalori sono diversi fra loro

$$1 \neq 2^\circ, 2 \neq 3^\circ, 3 \neq 1^\circ$$

(MATTR. DIAGONALE, ha solo gli autovvalori sulla diagonale.)

(MATTR. DIAGONALIZZABILE, ha gli autovettori (in ordine) in colonna)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Dai qui possiamo pure ricavare la legge
 $f(x, y, z, t) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x + (h-1)z, (h-1)y, 2z, hy + ht)$

II° METODO PER TRAVERE LA CONTROIMAGINE USANDO LA RIDUZIONE DELLA MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\text{MATR. COMPLETA} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 1 \end{array} \right)$$

condizione $R \neq 0$

$R_4 \rightarrow R_4 - \frac{h}{h-1} R$

VETTORE DI CUOVOGLIO LA CONTROIMAGINE

$$0 \rightarrow R_4$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ hy + hz = 1 \\ hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ hy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad g^{-1}(1, 1, 0, 0) = \{(1, 0, \frac{1}{h}, 0)\}$$

LEVO LE CONDIZ. NELLA MATRICE $h = 1$

{ etc...

Una MATRICE ridotta per riga non può fornire una base

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$M(3) \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$\text{Im } f, \text{ker } f. \quad h \in \mathbb{R}$
 $f = ?$

$$(h)(h-1) - h - [-h] = (h)(h-1) - h + h \neq 0$$

$$h \neq 0$$

$$h-1 \neq 0 \Rightarrow h \neq 1$$

$$\rho = 3 \rightarrow \dim \text{Im } f = 3 \rightarrow \dim \text{ker } f = n - \rho = 0$$

f è iniettiva + suriettiva \rightarrow ISOMORFISMO.

EQ. CART. IMMAGINE.

linee libere sono 3

$$\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z\}$$

NON C'È EQUAZIONE
CARTESIANA.

Eq. cartesiana ker f . è quella BANALE

$$\text{ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}$$

$(1 \neq 0, -1)$

$$h \neq 0 \quad M(3) \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$$\det = -1 \quad \rho = 2 \quad \dim \text{Im } f = 2, \dim \text{ker } f = 1$$

f non è iniettiva e non è suriettiva

Eq. cart. Imf . dove $\text{Imf} = \{C_2, C_3\}$

$$\begin{array}{l} C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow -x - y - [z - x] \\ C_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \rightarrow x - y - z + x \\ x - y - z = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y = z \end{array}$$

$y = -z$ $\forall x, z$

$$\text{Imf} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\} \nparallel_{x, z}$$

Base $\text{Imf} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$

Eq. cart. Kerf.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y+0=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

\nparallel_x

$h=0$

$$\text{Kerf} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} \nparallel_x$$

Base Kerf = $\{(1, 0, 0)\}$

$h = -1$

$$M(g) \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det = 2 + 1 - 15 = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{cases} \dim \text{Imf} = 3 \\ \dim \text{Kerf} = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{ISOMORFISMO}} \quad P=3$$

$$\text{Imf} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base } \text{Im} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

$h = -1$

$$\text{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\}$$

SEMPLICITÀ con $h=0$

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{pmatrix}$$

$$(-T)(1-T)(-1-T) = -T^3$$

$$\rightarrow (-T)(1-T)(-1-T) = -T = 0 \rightarrow -T \stackrel{T^2 = 1}{=} -T$$

$$T^3 = 0 \quad m_0 = 3$$

$$0 < g_1 \leq m_x$$

go da calcolare

$$V_0 = \dim \text{Ker} f_0 = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$\text{H} x$

$$\dim \text{Ker} f_0 = 1$$

$$\dim \text{Ker} f_0 = g_0$$

$$m_0 = 3$$

$$g_0 = 1$$

$$m_0 \neq g_0$$

f NON E' SEMPLICE

La MATRICE ASSOCIAТА $M(f)$ non e' DIAGONALIZZABILE

ESAME 22/02/21 ALGEBRA

I

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

- 1) Studiare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
- 2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

INIZIO

RISUO? NO?

RISUO

se $h \neq -1$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} R_3 = R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$f = ?$

$$\dim(\text{Im } f) = 2, \dim(\text{ker } f) = n - \text{r} = 3 - 2 = 1$$

$$\text{Im } f = \{(c_1, c_2)\}$$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 1 & h+1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \det = 0$$

Eq. cart.

$$(h+1)x = 0, (h+1)y = 0, z = 0 \quad \forall x, y$$

$$\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \quad \forall x, y$$

$\ker f = A X = \mathbb{O}$, $h \neq -1$

M
RIBOTTA

$$\begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ (h+1)y + (h+1)z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\dim \ker f = 1$

$$\begin{aligned} (h+1)x &= -y - hz \\ (h+1)y &= -(h+1)z \quad \nexists z \end{aligned}$$

$$\ker f = \left\{ \left(\frac{-y - hz}{h+1}, \frac{-(h+1)z}{h+1}, z \right) \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

Eq. cart. \leftarrow $\ker f$.

Tolgo la condizione, quindi $h = -1$

$$\begin{pmatrix} h+1 & -1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r1} \leftrightarrow \text{r2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho < 3$$

$$\rho < 2 \text{ perché } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-1) = 0$$

$\rho = 1$, scelgo a_{12} , cioè $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $\dim \text{Im } f = 1$
 $\Rightarrow \dim \ker f = n - \rho = 2$

$$\text{Im } f = \{(c_2)\} = \text{Im } f = \{(1, 0, 1)\}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \{ y = z \quad \forall x, z \}$$

$$\ker f = \{(x, z, z)\}$$

$$\text{Base } \ker f = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

Per $h = -1$, $M(f)$ è DIAGONALIZZABILE? Avremo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Polinomio caratter.}$$

PUNTO 2

$$\begin{pmatrix} 0 - T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -T & 1 & -T \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = (-T)^2 (-1-T) = 0$$

$$(-T)^2 = 0 \rightarrow T = 0$$

$$m_0 = 2$$

$\rightarrow g_0$ da calc.

$$-1-T = 0 \rightarrow T = -1$$

$$m_{-1} = 1$$

$\rightarrow g_{-1} = 1$ ok ✓

$$V_0 = \ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \{ y = z \quad \forall x, z \}$$

$$\ker f = \{(x, z, z)\}$$

$$\text{Base } \ker f = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

$$\dim \ker f_0 = 2 \quad m_0 = 2 \quad g_0 = 2$$

MAT-DIAG.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f è SEMPLICE. La matrice è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZANTE

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ - & | & | \\ . & | & | \\ , & | & | \end{pmatrix}$$

AUTOSPAZIO $V_{-1} = \ker f_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 0 & (-1) & -1 \\ 0 & 0 & (-1) \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(-1)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ker$$

0

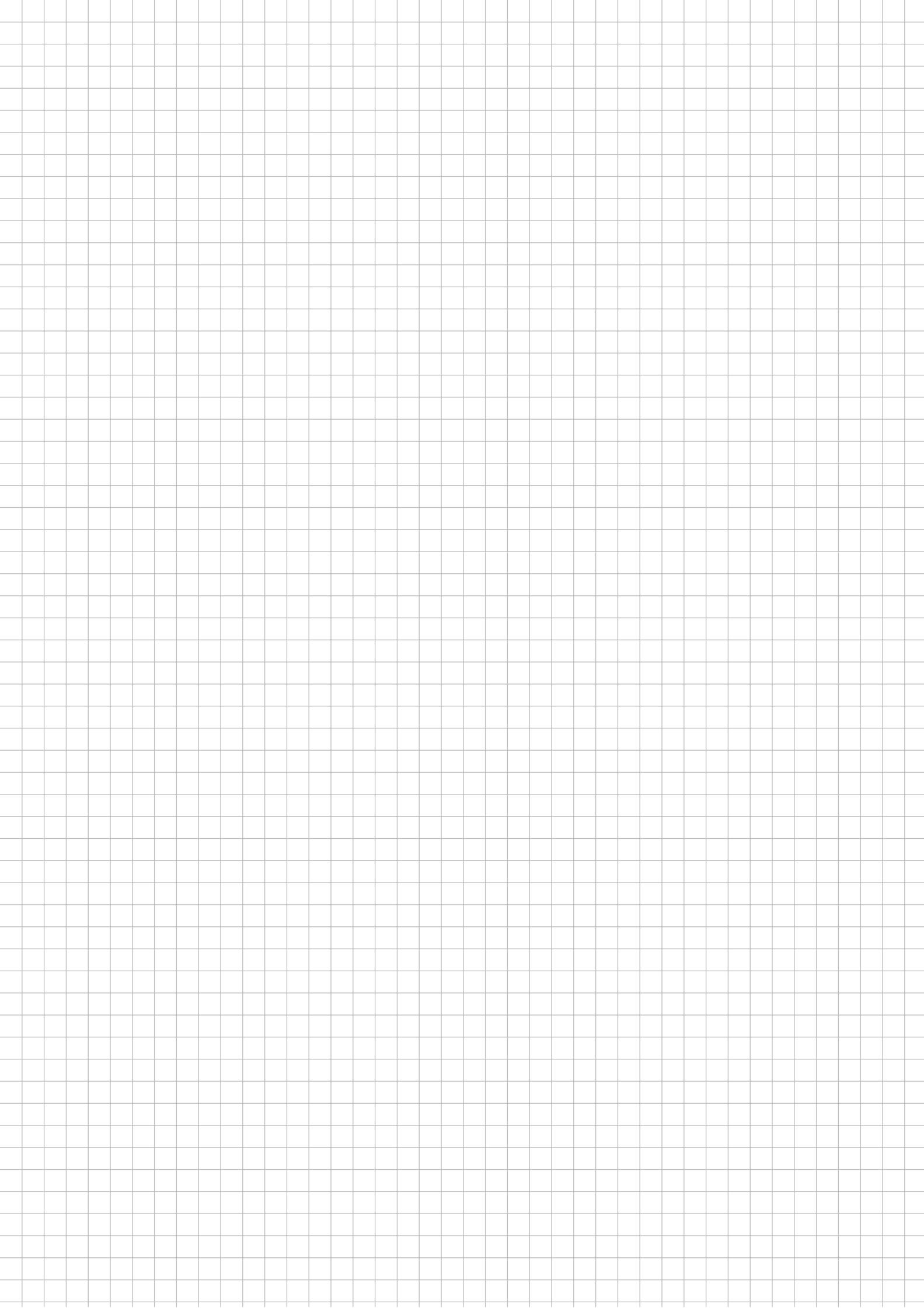
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ - \end{cases} \quad \underline{x=0} \quad z \quad \text{+} \quad \text{+} \quad \text{+}$$

$\ker = \{(z, 0, z)\}$ AUTOVETTORI

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 1)$$

| | |
|---|-----------------|
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | MATRICE |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | DIAGONALIZZANTE |

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Prova d'esame

E' dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (0, y + hz, hx + hy + z)$$

con h parametro reale.

- 1) Studiare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
- 2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per f .

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$\det = 0$
 $f < 3$

$p(M(f)) = 2$ perché $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ h & h \end{vmatrix} = -h \Rightarrow h \neq 0$ Condizione

$\rightarrow \dim \text{Im } f = 2, \dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$

Equaz. cartesiana $\text{Im } f$. dove $\text{Im } f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & h \\ x & y & z \end{vmatrix} \Rightarrow -xh = 0 \text{ per mantenere } f < 3$$

$x=0 \quad \forall y, z$

$$\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\} \rightarrow \text{Im } f = (0, y, z)$$

$$\text{Base } \text{Im } f = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ con } h \neq 0$$

STUDIO $\text{Ker } f$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y+hz=0 \\ hx+hy+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ hx + h(-hz) + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -hz \\ h_x - h^2 z + z = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} hx + (-h^2 + 1)z = 0 \\ hx = (h^2 - 1)z \end{array} \right. \quad \begin{cases} y = -hz \\ h \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{h}{h^2 - 1}z, y = -hz \right\}$$

$$\text{Base Ker } f = \left\{ \left(\frac{h^2 - 1}{h}, -h, 1 \right) \right\}$$

Tolgo la condizione, $h \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{Im } f = \{C_2, C_3\}$

$\dim \text{Ker } f = 2$

$\dim \text{Im } f = 3 - 2 = 1$

$$\text{Im } f = \{C_2, C_3\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} x=0 \\ \forall y, z. \end{array}$$

$$\text{Im } f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \right\} \quad \text{di } h=0$$

$$\text{Base Im } f = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

STUDIO Ker.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 0=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \forall x$$

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0 \right\}$$

$$\text{Base Ker } f = \{(1, 0, 0)\} \quad \text{con } h \neq 0$$

Semplicità e base di autovettori

$$\begin{pmatrix} 0-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{pmatrix}$$

\rightarrow Polin. Caratteristico.

$$\begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & h \\ h & h & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-T) - [(h^2)(-T)] = 0$$

$$= (1-T)^2(T) + h^2 T = 0$$

$$(-T)(h-T)^2 + h^2 T = 0$$

$$T(1-T)^2 - h^2 T = T[(1-T)^2 - h^2] = 0$$

"diff. di quadrati"

$$T[(1-T)+h](1-T)-h]T = 0$$

$$(1-T+h)(1-T)-h = 0 \quad \vee \quad T = 0$$

$$\begin{array}{ll} (1-T)+h = 0 & 1-T+h = 0 \rightarrow T = 1+h \\ (1-T)-h = 0 & 1-T-h = 0 \rightarrow T = 1-h \end{array}$$

AUTOVALORI

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\circ} \quad T=0 \quad m_0=1 \rightarrow g_0=1 \\ 2^{\circ} \quad T=1+h \quad m_{1+h}=1 \rightarrow g_{1+h}=1 \\ 3^{\circ} \quad T=1-h \quad m_{1-h}=1 \rightarrow g_{1-h}=1 \end{array} \right\} f \text{ è semplice}$$

ho il parametro "h". Se i 3 autovetori sono distinti fra loro allora f è semplice. Quando sono distinti?

$$1^{\circ} \neq 2^{\circ}$$

$$0 \neq 1+h$$

$$h \neq -1$$

$$2^{\circ} \neq 3^{\circ}$$

$$1+h \neq 1-h$$

$$2h \neq 0$$

$$3^{\circ} \neq 1^{\circ}$$

$$1-h \neq 0$$

$$h \neq 1$$

CONDIZIONI

Se $h \neq 1, -1, 0$ f è semplice, quindi diagonalizzabile

Cosa succede se tolgo le condizioni?

STUDIO PER $h = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1 \quad f=2$$

STUDIO SEMPLICITÀ

Polin. corrett. l'avevo calcolato prima con h .

$$T[(1-T)+h](1-T)-h]T = 0$$

$$\begin{aligned} 1-T = 0 &\rightarrow T = 1 \\ 1-T = 0 &\rightarrow T = 1 \\ T = 0 &\rightarrow T = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} m_1 = 2 \\ m_0 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow g_1 = 1 \text{ da calcolare} \quad g_0 = 1 \text{ ok } \checkmark$$

$$V_1 = \dim \ker f_1 \rightarrow \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \quad \ker f_1 = (0, y, z) \quad \dim \ker f_1 = ?$$

2 inc. libere

$$m_1 = \dim \ker f_1 = 2$$

f è semplice, A è diagonalizzabile

STUDIO $h=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T((1-T)+h)(1-T)-h \stackrel{!!}{=} T = 0$$

$$2-T=0 \rightarrow T=2, m_2=1 \rightarrow g_2=1 \text{ ok } \checkmark$$

$$\begin{cases} -T=0 \\ T=0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0=2 \\ m_1=1 \end{array} \right. \rightarrow g_0 \text{ da calcolare}$$

$$V_0 = \ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

~~OK~~

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=-z \\ x=-z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y=-z \\ x=0 \end{array} \right. \quad \forall z$$

$$V_0 = \{(0, -z, z)\} \quad \dim V_0 = 1$$

f non è semplice
f non è diagonalizzabile

STUDIO PER $h=-1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T((1-T)+h)(1-T)-h \stackrel{!!}{=} T = 0$$

-1 -1

$$\begin{cases} -T=0 \\ T=0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_0=2 \\ m_1=1 \end{array} \right. \rightarrow g_0 = \text{da calcolare}$$

$$2-T=0 \rightarrow T=2, m_2=1, g_2=1 \text{ ok } \checkmark$$

$$V_0 = \ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y-z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ -x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y=z \\ x=0 \end{matrix}$$

$$V_0 = \{(0, z, z)\} \quad \dim V_0 = 1 \neq m_0 = 2$$

f non è semplice

A non è diagonalizzabile

BASE DI AUTOVETTORI. RICAVO DELL'AUTOSPAZIO quando f è semplice

f è semplice quando $h \neq 0, 1, -1$ e $h = 0$

Per $h \neq 0, 1, -1$ avevo gli autovalori

$$(h-T+h)(h-T-h) = 0 \quad \vee \quad T=0 \quad m_0 = 1$$

$$\begin{cases} (1-T)+h=0 \\ (1-T)-h=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-T+h=0 \\ 1-T-h=0 \end{cases} \quad \begin{cases} T=1+h \\ T=1-h \end{cases} \quad \begin{cases} m_{1+h}=1 \\ m_{1-h}=1 \end{cases}$$

Calcolo gli autospazi, che sono ③

1 AUTO SPAZIO $V_0 = \ker f_0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h & h & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker \rightarrow$

$$\begin{cases} 0=0 \\ y-hz=0 \\ hx+hy-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ (hx+hy-hz)-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=hz \\ (hx+h^2-1)z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = hz \\ hx = -\left(\frac{h^2-1}{h}\right)z \end{cases} \quad V_2$$

$$V_2 = \left\{ \left(-\frac{h^2-1}{h}z, hz, z \right) \right\}$$

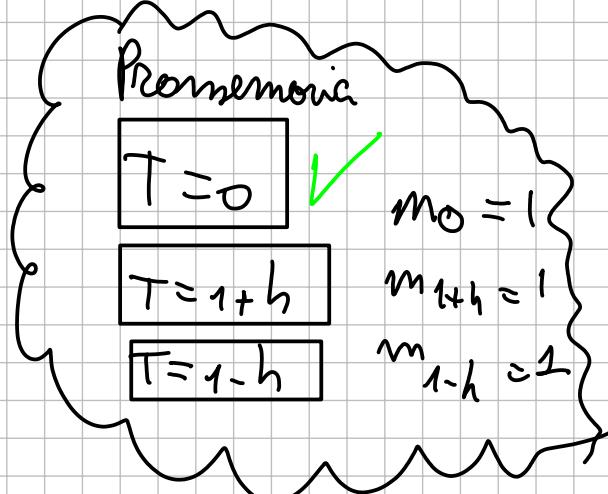
$$u_1 = \left(\frac{-h^2-1}{h}, h, 1 \right) \text{ AUTOVETTORE 1}$$

Cerco il 2° AUTO SPAZIO

$$V_{1+h} = \ker f_{1+h}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & h \\ h & h & 1+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1-h & 0 & 0 \\ 0 & -h & h \\ h & h & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Sono con $h \neq 1, -1, 0$

$$\begin{cases} (-1-h)x = 0 \\ -h y + hz = 0 \\ hx + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ ky = hy - z = y \\ 0 + hy - hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = y \\ hz - hz = 0 \end{cases} \quad \text{t.y}$$

$$V_{1+h} = \{(0, y, y)\} \text{ AUTOVETTORE n° 2}$$

$$u_2 = (0, 1, 1)$$

Cerco il 3° AUTO SPAZIO di $T = 1-h$

$$V_{1-h} = \ker f_{1-h} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-(1-h)h & h \\ h & h & 1-(1-h) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1+h & 0 & 0 \\ 0 & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (-1+h)x=0 \\ hy + hz = 0 \\ hx + hy + hz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ hy = \frac{-hz}{h} = y = -z \\ hx - h + hz = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{1-h} = \{(0, -z, z)\} \quad M_3 = (0, -1, 1) \text{ AUTOVETTORE 3}$$

Base AUTOVETTORI $= \{u_1, u_2, u_3\}$

MATRICE DIAGONALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

MATRICE DIAGONALIZZANTE P

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{-h^2-1}{h} & 0 & 0 \\ h & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \left(\frac{-h^2-1}{h}, h, 1 \right) \text{ AUTOVETTORE 1}$$

$$M_2 = (0, 1, 1) \text{ AUTOVETTORE 2}$$

$$M_3 = (0, -1, 1) \text{ AUTOVETTORE 3}$$

E' dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (hy, \underline{(h+1)x + hy - z}, -y - hz)$$

con h parametro reale.

- 1) Studiare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
- 2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$.

PUNTO 1

TROVIAMO LA MATRICE.

$$\begin{aligned}f(e_1) &= (0, h+1, 0) \\f(e_2) &= (h, h, -1) \\f(e_3) &= (0, -1, -h)\end{aligned}$$

PARTENZA

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$

$$\dim \text{Im } f = \rho M(f)$$

$$\det_{3 \times 3} = -[(h)(h+1)(-h)] = (-h)(h+1)(h) \neq 0$$

COND

$$\begin{array}{ccc} -h \neq 0 & h \neq 0 & h+1 \neq 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ h \neq 0 & h \neq 0 & h \neq -1 \end{array}$$

$f(M(f)) = 3$

Per $h \neq 0, -1$ $\rho M(f) = 3$, quindi $\dim \text{Im } f = 3$.

$$\dim \text{Ker } f = n - \rho = 0$$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ \mathbb{R}^3 & 3 \end{matrix}$

3 incognite libere.

Eq. cartesiana di $\text{Im } f$ non c'e' perche' vale $\forall x, y, z,$

Eq. cartesiana $\text{Ker } f$: e' quella banale: $x=y=z=0$

f e' un isomorfismo

$\begin{cases} \text{suriettiva} \Rightarrow \dim \text{Im } f = \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^3 \\ \text{iniettiva} \Rightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \end{cases}$

Tolgo le condizioni:

$h=0$ PARTENZA

$$N(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho < 3$

?
 $f = 2$ vedo le 2×2 e vedo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$f = 2, \dim \text{Im } f = 2 \rightarrow \dim \text{Ker } f = 3-2 = 1$

Eq. cartesiane $\text{Im } f$ dove $\text{Im } f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{aligned} C_1 &\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ C_2 &\rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} = 0 \\ x, y, z &\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\} \rightarrow \text{Im } f = \{(0, y, z)\}$ R.
 Base $\text{Im } f = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ PER $h=0$

Eq. cartesiane $\text{Ker } f$ ($\dim \text{Ker } f = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 inc. libera

Sistema

$$\begin{cases} z=0 \\ x-z=0 \\ -y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \quad \text{H.z.}$$

$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z, y=0\}$ R.
 Base $\text{Ker } f = \{(1, 0, 1)\}$ PER $h=0$

Tolgo la II condizione

$$h = -1$$

$M(f)$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$f < 3$ (colonna nulla)

?
 $f = 2$, vedo le 2×2 e vedo $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$f = 2$ per $h = -1$
 $\dim \text{Im } f = 2 \rightarrow \dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$

Eq. cart. $\text{Im } f$, dove $\text{Im } f = \{(C_2, C_3)\}$

$C_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ det $\neq 0$ affinche' f sia 2
 $C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

$x, y, z \rightarrow$
 $\det \rightarrow z - x - (-y + x) = 0$
 $= z - x + y - x = 0 \rightarrow -2x + z + y = 0$

B.

Per $h = -1$, $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x - y\} \quad t \ x, y$

Base $\text{Im } f = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$

Eq. cartesiana Kerf. con $\dim \text{Kerf} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A • $\bar{X} = 0$

Sistema

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ -(0) - z = 0 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \forall x \end{cases}$$

Per $h = -1$, $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\} \cong \{x\}$
Base $\text{Ker } f = \{(1, 0, 0)\}$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$.

PUNTO 2

PARTENZA

$$N(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$h \neq 0$

Condizione

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + h \cdot \frac{1}{h} - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dots \\ (h+1)x + 1 - hz = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x = hz - 1 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{hz - 1}{h+1} \\ hz = \frac{-1 - 3h}{h} \end{cases} \quad \rightarrow \frac{-1 - 3h}{h^2}$$

$$f^{-1}(1, 0, 3) = \left(\frac{h^2 - 1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1 - 3h}{h^2} \right) \text{ con } h \neq 0$$

$$\text{Con } h = 0 \text{ ho } \begin{cases} hy = 1 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 1 \\ \dots \end{cases} \quad \text{Sist. imposs. } f^{-1}(1, 0, 3) = \emptyset$$

DA CANCELLARE. → PROVO CRANER ↗

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{array} \right) \quad \boxed{h \neq 0}$$

R RIDUCIB

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & h & 0 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{array} \right) \quad \boxed{h \neq -1}$$

$$R_2 = R_2 - \frac{h}{h+1} R_1$$

$$R_3 = R_3 + \frac{1}{h} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right) \quad \text{MATRICE RIDOTTIA}$$

Riprovo sistema

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x - z = 0 \\ -hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x - z \Rightarrow x = \frac{z}{h+1} \\ z = -\frac{3}{h} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1, 0, 3) = \left(\frac{z}{h+1}, \frac{1}{h}, -\frac{3}{h} \right)$$

$$\frac{z}{h+1} \rightarrow \frac{-\frac{3}{h}}{h+1}$$

$$-\frac{3}{h} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3}{h^2+h}$$

DA CONTROLLARE

PARTENZA

$$M(g) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$$-[-(-h)(h)(h+1)]$$

$$-[-(-h^2)(h+1)]$$

$$-[-h^3 - h^2]$$

$$h^3 + h^2$$

$$\det A \neq 0$$

$$x = \frac{|B_1|}{|A|}$$

$$y = \frac{|B_2|}{|A|}$$

$$z = \frac{|B_3|}{|A|}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 3 & -1 & -h \end{pmatrix} = -h^2 - 3h - [1] =$$

$$\frac{-h^2 - 3h - 1}{h^3 + h^2} = x$$

PARTENZA

$$M(g) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + h\left(\frac{1}{h}\right) - z = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$h \neq 0$$

$$h+1 \neq 0 \quad h \neq -1$$

$$\begin{cases} \dots \\ (h+1)x + 1 - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x = \frac{z-1}{h} \\ hz = -\frac{1}{h} - \frac{3}{h+1} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ hz = \frac{-1-3h}{h} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ z = \frac{-1-3h}{h^2} \end{array} \right.$$

$$f^{-1}(1, 0, 3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1-3h}{h^2} \right) \text{ con } h \neq -1, 0$$

$$\frac{\frac{-1-3h}{h^2}-1}{h+1} = \frac{-1-3h-h^2}{h^2+h}$$

$$\frac{-1-3h-h^2}{h+1} \cdot \frac{1}{h+1} = \frac{-3h^2-3h-1}{h^2+2h+2}$$

E' dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (hy, \underline{(h+1)x + hy - z}, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$.

$\dim \text{Im } f$. } el + generico
dim $\text{Ker } f$. } BAS,

eq. cartesiane $\text{Im } f, \text{Ker } f$.

CERCO $M(f)$ SIAMO IN $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (0, h+1, 0) \\ f(e_2) &= (h, h, -1) \\ f(e_3) &= (0, -1, -h) \end{aligned}$$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} P=3$$

MATRICE MAIN!

$$|M(f)| = (-h)(h)(h+1) \neq 0$$

$\dim \text{Im } f = 3 \rightarrow \dim \text{Ker } f = m - f \rightarrow 3 - 3 = 0$, la f è suriettiva e imiettiva

$$-h=0 / h \neq 0 / h+1 \neq 0 \implies \boxed{h \neq 0} \text{ e } \boxed{h \neq -1}$$

CONDIZIONI

$\dim \text{Ker } f = 0$ $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$

Cerco eq. Cartesiane $\text{Im } f$
 \hookrightarrow DATO CHE $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$, non ci sono equazioni cart.

3 inc.
libere

Quindi eq. cart. $\text{Im } f = \forall x, y, z$.

Eq. cart. $\text{Ker } f \rightarrow x=y=z=0$ perché $\dim \text{Ker } f = 0$, l'eq. cart. è banale

Tolgo condizione $\rightarrow h=0$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \rightarrow M(f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rho(M(f)) < 3$$

$$\det(M(f)) = -1 \text{ con } \boxed{h=0} \implies$$

$$\rho(M(f)) = 2, \dim \text{Im } f = 2, \dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$$

se $h \neq 0$

$$\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$$

$$z - x - (-y + x) = 0$$

$$z - x + y - x = 0$$

$$-2x + y + z = 0 \rightarrow y = 2x - z$$

Eq. cart. Imm $y = 2x - z$ $\forall x, z$. se $h = -1$

Eq. cart ker.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \forall x$$

Eq. cart ker. $y = 0, z = 0 \forall x$
con $h = -1$

Calcolo controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$

M(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ (h+1)x + h\left(\frac{1}{h}\right) - z = 0 \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases} \quad \text{CONDIZIONE}$$

$$(h+1)x + 1 - z = 0 \rightarrow (h+1)x = \frac{z-1}{h+1}$$

$$hz = -\frac{1}{h} - 3 \rightarrow hz = \frac{-1 - 3h}{h^2}$$

Con $h \neq 0$, $f^{-1}(1, 0, 3) = \left(\frac{z-1}{h+1}, \frac{1}{h}, \frac{-1 - 3h}{h^2}\right)$

Tolgo la condizione, $h = 0$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} hy = 1 \\ \dots \\ \dots \end{cases}} \quad \text{SIST. IMPOSS.}$$

Per $h = 0$, $f^{-1}(1, 0, 3) = \emptyset$

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0), u_3 = (0, 1, 0, 0), u_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^4 sono assegnati i vettori
 $u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0), u_3 = (0, 1, 0, 0), u_4 = (0, 0, 0, 1)$
e l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} f(u_1) = (1, 0, 0, 0) \\ f(u_2) = (h, 0, 2, 0) \\ f(u_3) = (0, h-1, 0, h) \\ f(u_4) = (0, 0, 0, h) \end{cases}$$

con h parametro reale.

- Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando le equazioni cartesiane di $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.

TROVO LA MATRICE con $f(e_i)$...

$$\begin{cases} f(e_1) = (1, 0, 0, 0) \\ f(e_1) + f(e_3) = (h, 0, 2, 0) \rightarrow f(e_3) - (-1, 0, 0, 0) = \\ f(e_2) = (0, h-1, 0, h) \\ f(e_4) = (0, 0, 0, h) \end{cases} = (h-1, 0, 2, 0)$$

$$\begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & \dots \end{matrix}$$

$$M(f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

MATRICE PRINCIPALE

f

CALCOLO Dim $\text{Im } f$.

$$\dim \text{Im } f = P(A)$$

VEDO SE $\det_{4 \times 4} \neq 0$

LA PLACE n°1

$$\det M(f) = a_{11} \cdot A_{11}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 0 & h \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2(h-1)(h) \neq 0 \\ 2h(h-1) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2h \neq 0 & h-1 \neq 0 \\ h \neq 0 & h \neq 1 \end{matrix}$$

CONDIZIONI

$$\det M(f) = 1 \cdot 2h(h-1) = 2h(h-1) \neq 0$$

$$P(M(f)) = 4$$

$$\dim \text{Im } f = 4 \rightarrow \dim \text{Ker } f = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{Ker } f = \{0\}$$

NON CI SONO EQ. CARTESIANE PER $\text{Im } f \rightarrow$ non ci sono inc. indipendenti

EQ. CARTESIANA $\text{Im } f = \forall x, y, z, t \quad \text{Se } h \neq 1, 0$

EQ. CARTESIANA $\text{Ker } f$ è banale $\Rightarrow x=0, y=0, z=0, t=0$ se $h \neq 0, 1$

TOLGO CONDIZIONE $h \neq 0$, $\rightarrow h \approx 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\dim \text{Im } f = ? \quad f = 4? \quad \text{vediamo la } 4 \times 4 \text{, colonna nulla}$$

Vedo le 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow \neq 0 \dim \text{Im } f = 3$$

$\dim \text{Ker } f = n - p = \boxed{1}$

EQ. CARTESIANA IMMAGINE f

$$c_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \quad \det = 0 \text{ per } f = 3$$

$$c_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \quad \det = a_{44} \cdot A_{44} \rightarrow -2t = 0 \rightarrow \boxed{t = 0}$$

$$A_{44} = (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-2}$$

EQ. CART. $\text{Im } f \rightarrow \boxed{t = 0}$ con $h = 0$

CALCOLO eq. cart. kerf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \rightarrow z = 0 \\ \cancel{0=0} \quad \forall t \end{array} \right.$$

$\text{Ker } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = 0, z = 0\} \nparallel t \text{ con } h = 0$

TOLGO LA CONDIZIONE $h+1 \rightarrow h=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cancel{h-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & \cancel{h} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f < 4 \text{ (righe nulli)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad p = 3 = \dim \text{Im } f$$

$$\dim \text{Ker } f = n - p = \boxed{1}$$

EQ. CART. Imf

$$G \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per mantenere } P = 3$$

$$\det = a_{24} \cdot \boxed{A_{24}} \rightarrow A_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = - (2y) = \boxed{-2y}$$

$$\det = 1 \cdot (-2y) = \boxed{-2y} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

EQ. CART. Imf $\rightarrow y = 0$ con $h = 1$

Calcolo eq. cart. Kerf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ 0 = 0 \\ \underline{z = 0} \\ y + t = 0 \end{matrix}$$

EQ. CART. Kerf $\Rightarrow x = 0, y = -t, z = 0 \quad \forall t$, con $h = 1$

BASE Kerf $= (0, -1, 0, 1)$

- Detta $i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

$$i(x, y, z) = (x, y, 0, z)$$

studiare l'applicazione lineare

$$g = f \circ i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

e determinare $g^{-1}(1, 0, 0, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$\leftarrow 2^{\circ}$ PARTE

$$i(x, y, z) = (x, y, 0, z)$$

BASE CANONICA

$$i = (1, 0, 0) = (\overbrace{1, 0, 0, 0})$$

$$i = (0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$$

$$i = (0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$$

$M(i)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

$M(f)$

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix} \quad g = f \circ i$$

$\text{Im } f$, $\text{Ker } f$, invertiva / surietta
 \downarrow
 BASE BASE

$$h \neq 1 \quad R_4 = R_4 - \frac{h}{h-1} R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad P = 3 \quad \dim \text{Im } f = 3$$

$$\dim \text{Ker } f = n - P =$$

$$g^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ (h-1)y=0 \\ 0 \neq 0 \\ hy + hz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ 0+0=1 \Rightarrow 0=1 \end{cases} \quad g^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$h \neq 0$

$$\boxed{h=0} \quad \begin{cases} x=1 \\ (0-1)y=0 \\ 0y + 0z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ -y=0 \Leftrightarrow y=0 \\ 0+0=1 \end{cases} \quad \text{sist. IMPOSSIBILE}$$

$$\text{R. per } h \neq 0, g^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

$$\text{Per } h=0, g^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 1 \end{pmatrix} = \emptyset$$

1. È assegnato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$1^{\circ} \quad f(1, 1, 1) = (-1, 2h-1, -1)$$

$$2^{\circ} \quad f(-1, 0, 1) = (-2, h, 0) \quad h \in \mathbb{R}$$

$$3^{\circ} \quad f(0, 1, -1) = (0, h-1, -1)$$

Studiare la SEMPLICITÀ di f nei casi $h=0$ e $h=1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori

$$1^{\circ} \quad \underbrace{f(e_1) + f(e_2)}_{\text{circled}} + f(e_3) = (-1, 2h-1, -1)$$

$$2^{\circ} \quad \underbrace{f(e_1) + f(e_3)}_{\text{circled}} = (-2, h, 0)$$

$$3^{\circ} \quad \underbrace{f(e_2) + f(e_3)}_{\text{circled}} = (0, h-1, -1)$$

$$(-2, h, 0) + f(e_2) = (-1, 2h-1, -1)$$

$$1^{\circ} \quad f(e_2) = (-1, 2h-1, -1) + (2, -h, 0) = (1, h-1, -1)$$

$$3^{\circ} \quad f(e_3) = (0, h-1, -1) - (1, h-1, -1) = (-1, 0, 0)$$

$$2^{\circ} \quad f(e_1) = (-2, h, 0) - (-1, 0, 0) = (-1, h, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ h & h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

STUDIO LA SEMPLICITÀ $m_\lambda = g_\lambda$ in caso di $h=0$ e $h=1$

I CASO: $h=0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix}$$

con $h=0$

Calcolo il Polinomio caratteristico
 $\det(P - T I) = 0$

$$\begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 0 & -1-T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix}$$

$$\det = (-1-T)^2 (-T) = 0$$

$$(-1-T)^2 = 0 \rightarrow T = -1$$

$$-T = 0 \rightarrow T = 0$$

$g_1 = ?$
 $m_1 = 2 \rightarrow$ DA CALCOLARE
 $m_0 = 1 \rightarrow g_0 = 1 \checkmark$ FATTO

$$0 < g_1 < m_1$$

Calcolo autospazio $V_1 = \text{Ker } f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{(x, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

zinc. libere.

$$\dim V_1 = 2 = g_1 \equiv m_1$$

Risposta 1: Per $h=0$ f_1 semplice

Se è semplice, esiste una base, quindi autovetori

$$V_1 = \begin{matrix} u_1 (1, 0, 0) \\ u_2 (0, 1, 1) \end{matrix}$$

$$V_0 = \text{Ker } f_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 0 - z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -z$$

$$V_0 = \{(-z, 0, z)\} \xrightarrow{\text{BASE}} u_3 (-1, 0, 1)$$

Autovetori per $h=0$ $\{u_1 (1, 0, 0), u_2 (0, 1, 1), u_3 (-1, 0, 1)\}$

II CASO $\rightarrow h = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solco il fl. Cor.

$$A = \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & 0-T & 0 \\ 0 & -1 & 0-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-T & 1 & -1 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & -1 & -T \end{pmatrix}$$

$$\det = (-T)^2 (-1-T) + 1+T = 0$$

$$= -(1+T)(T)^2 + (1+T) = 0$$

$$= (1+T)[(-T)^2 + 1] = 0 \quad \begin{cases} 1+T = 0 \Rightarrow T = -1 \quad m_{-1} = 2 \\ -T^2 + 1 = 0 \Rightarrow T = 1 \quad m_1 = 1 \\ T^2 = 1 \quad \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

OK
 $g_1 = 1$

$$V_{-1} = \ker g_{-1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1-(-1) & 1 & -1 \\ 1 & 0+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = z \\ x = -y \\ -z + z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{+2} \Rightarrow V_{-1} = \{-y, z, z\}_{\text{libere}}^2$$

$\dim V_{-1} = g_{-1} = 1 \neq m_{-1}$

$\{$ non è semplice

2

2. Dato l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$g(x, y, z) = (-x+y, hx+hy+z, 2x+hz)$$

al sottosistema di $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$, capovolgere $g^{-1}(0, 1, 0)$ al sottosistema di $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$
 "LA CONTROIMMAGINE DI $(0, 1, 0)$ "

$$g(x, y, z) = (-x+y, hx+hy+z, 2x+hz) \text{ con } (1, 0, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(e_1) = (-1, h, 2) \\ f(e_2) = (1, h, 0) \\ f(e_3) = (0, 1, h) \end{array} \right\} \rightarrow M(g) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \{ v \in V / g(v) = (0, 1, 0) \}$$

$$M(g) \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+y=0 \\ hx+hy+z=1 \\ 2x+hz=0 \end{array} \right.$$

SISTEMA 3×3
 CRAMER

$$\det A \neq 0$$

$$\frac{\det B_1}{\det A} / \frac{\det B_2}{\det A} / \frac{\det B_3}{\det A}$$

$$\det M(g) = -h^2 + 2 - h^2 = -2h^2 + 2 = 2(-h^2 + 1) \neq 0$$

$$-h^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow -h^2 \neq -1$$

$$\begin{cases} h \neq 1 \\ h \neq -1 \end{cases}$$

sist. determinante

$$B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = -(h) \Rightarrow x = -\frac{h}{2(-h^2 + 1)}$$

RISULTATO con condizioni

$$B_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix} = -h \Rightarrow y = -\frac{h}{2(-h^2 + 1)}$$

$$g^{-1} = \left\{ -\frac{h}{2(1-h^2)}, -\frac{h}{2(1-h^2)}, -\frac{1}{(1-h^2)} \right\}$$

con $h \neq \pm 1$

$$B_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow -\frac{z}{2(-h^2 + 1)} = \frac{1}{(-h^2 + 1)}$$

Tolgo la condizione $h \neq \pm 1$

$$\boxed{h=1} \quad M(g) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h_1 & h_1 & 1 \\ 2 & 6 & h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det $M(g) \neq 0$? (per CRAMER)

$$|M(g)| = -1 + 2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ NO CRAMER.}$$

SISTEMA $A X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+y=6 \\ x+y+z=1 \\ 2x+z=0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -x+y+1=0 \Rightarrow 0=1 \\ x+y-2x \Rightarrow -x+y=1 \rightarrow (y)=x+1 \\ (z)=-2x \end{array} \right. \text{IMPOSSIBILE}$$

Tolgo la condizione $h \neq -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h-1 & h-1 & 1 \\ 2 & 6 & h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

det $\neq 0$? $\rightarrow -1 + 2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ NO SOLUZIONI

Per $h \neq \pm 1$, $g^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-h}{2(1-h^2)} \\ \frac{-h}{2(1-h^2)} \\ \frac{1}{(1-h^2)} \end{array} \right\}$

Per $h=1, -1$, $g^{-1} = \emptyset$