Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 9. Tydzień rozpoczynający się 4. lub 16. maja

Zadania

1. Niech zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależne i niech mają ten sam rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Niech $Y_i = X_1 + \ldots + X_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wykazać, że dla gęstości zmiennej $(Y_1, \ldots, Y_n)$ zachodzi wzór $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \lambda^n \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.
2. Dla gęstości $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n)$ z poprzedniego zadania wykazać, że gęstość brzegowa $f_n(y_n)$ względem zmiennej Y_n wyraża się wzorem $f_{Y_n}(y_n) = \lambda^n \dfrac{y_n^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda y_n)$, gdzie $0 < y_n$.
3. Metodą MLE znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że znana jest wartość parametru a.
4. Metodą MLE znaleźć estymator parametru θ rozkładu jednostajnego na przedziale $[\theta - a; \theta + a]$, przy założeniu, że nie jest znana wartość parametru a.
5. Niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_5$ mają ten sam, ciągły, rozkład. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo $P(X_1 < X_2 > X_3 < X_4 < X_5)$. Wykazać, że p nie zależy od gęstości rozkładu $f(x)$ zmiennych X_k. Obliczyć wartość p.
6. X, Y, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U[0,1]$. Obliczyc $P(X \geqslant YZ)$.
7. X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Znaleźć rozkład (3-wymiarowy) zmiennej $(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3)$.
8. (2p.) Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o tym samym, ciągłym rozkładzie. Mówimy, że w chwili j notujemy rekord ($j \leqslant n$), jeśli $X_j \geqslant X_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant j$. Niech zmienna losowa Z będzie liczbą rekordów w ciągu $\{X_k\}$. Wykazać, że $\mathrm{E}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

   [Do zadań 9–10] Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:
   $$f(x, y) = 1, \quad 0 <\leqslant x, y \leqslant 1.$$
9. Znaleźć gęstość zmiennej $Z = {}^{X}\!/_{Y}$.
10. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą cyfrą znaczącą Z jest 1.

---

11. **(E2)** Załóżmy, że niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady, odpowiednio, $\mathrm{Gamma}(b, p)$ i $\mathrm{Gamma}(b, q)$. Niech $U = X + Y$ oraz $V = \dfrac{X}{X+Y}$. Wykazać, że
    (a) Zmienne U i V są niezależne.
    (b) $X + Y$ ma rozkład $\mathrm{Gamma}(b, p + q)$.
    (c) Zmienna V ma rozkład $\mathrm{Beta}(p, q)$, tzn. $f(x) = \dfrac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $x \in [0, 1]$.
12. **(E2)** Zmienna losowa X ma dyskretny rozkład jednostajny
    $$P(X = i) = \frac{1}{100}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 99, 100\}.$$

Zmienne losowe Y oraz Z określone są następująco

$$Y = \begin{cases} 1, & 2|X \vee 3|X, \\ 0, & \text{wpw}, \end{cases} \qquad Z = \begin{cases} 1, & 3|X, \\ 0, & \text{wpw}. \end{cases}$$

Znaleźć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y i Z. (Odp.: $\rho = {}^{33}/_{67}$)

Witold Karczewski