

Analiza Wielowymiarowa

Niehierarchiczna analiza skupień

Maciej Nasiński, Paweł Strawiński

Zajęcia 8
2 grudnia 2021

1 Analiza skupień

- Klasyfikacja
- Analiza skupień

2 Niehierarchiczna analiza skupień

- Analiza rozproszenia
- Optymalizacja
- Liczba skupień

Definicja

Cluster analysis is the art of finding groups in data

Kaufmann i Rousseeuw (1990)

- Jest to statystyczna metoda pozwalająca na znajdowanie grup podobnych obiektów w zbiorze danych
- Podstawą grupowania jest podobieństwo pomiędzy obiektami

Definicja

- Analiza skupień jest dziedziną eksploracji danych
- Polega na dzieleniu wielowymiarowego zbioru danych na grupy (podzbiory) w taki sposób, by elementy w tej samej grupie były do siebie podobne, a jednocześnie jak najbardziej odmienne od elementów z pozostałych grup (podzbiorów)
- Analiza skupień znalazła wiele zastosowań w różnych dziedzinach, jak np. klasyfikacja dokumentów (analiza internetu), odkrywanie grup klientów o podobnych zachowaniach (marketing), czy wykrywanie oszustw kredytowych (banki)

Cele analizy

- Uzyskanie grup jednorodnych obiektów, które ułatwiają wyodrębnienie ich cech
- Redukowanie dużej liczby danych pierwotnych do kilku podstawowych kategorii, które mogą być traktowane jako przedmioty dalszej analizy
- Ograniczenie czasu analizy, których przedmiotem będzie uzyskanie cech obiektów typowych
- Poznanie struktury analizowanych danych wielowymiarowych

Klasyfikacja

- Klasyfikacja jest grupowaniem podobnych obiektów
- Klasyfikacja jest ważnym elementem wielu dziedzin nauki, np. biologia, geologia, chemia, astronomia, itd.
- Klasyfikacja pozwala na zrozumienie zależności między obiektami
- Klasyfikacja może być traktowana jako wygodny sposób porządkowania dużych zbiorów danych
- Gdy dane można zaprezentować w formie małej liczby grup obiektów, wówczas etykiety obiektów w zwięzły sposób opisują wzory podobieństw i różnic między obiektami

Numeryczne metody klasyfikacji

- Wykorzystanie metod statystycznych do problemu klasyfikacji wywodzi się z nauk o ziemi
- Celem jest dostarczenie obiektywnej i stabilnej klasyfikacji obiektów
- Zasadniczym celem analizy skupień jest odkrywanie grup w danych

Analiza skupień

- Analiza skupień jest ogólną nazwą eksploracyjnej analizy danych, której celem jest odnalezienie, bądź wyodrębnienie grup lub skupień (ang. *clusters*) w danych
- Głównym celem analizy jest wykrycie w zbiorze danych, tzw. „naturalnych” skupień, czyli skupień, które można w sensowny sposób interpretować
- Analiza skupień jest metodą stworzoną raczej do formułowania hipotez na podstawie danych niż ich statystycznej weryfikacji
- Służy również opisowi wyodrębnionych podzbiorów

Metody analizy skupień

- Analiza niehierarchiczna traktująca grupy danych w sposób równoważny
- Analiza hierarchiczna zakładająca, że grupy danych są zagnieżdżone

Wprowadzenie

- Polega na podziale zbioru danych na określoną *a-priori* liczbę grup (podzbiorów) określanych mianem skupień
- Podział dokonywany jest w rezultacie optymalizacji funkcji kryterium podziału
- Utworzone grupy powinny być homogeniczne i odseparowane
- Homogeniczność oznacza, że grupy powinny być wewnętrznie spójne
- Separowanie oznacza, że grupy powinny być rozłączne i różnić się pod względem cech obiektów

Analiza rozproszenia

Kryteria podziału na grupy oparte są o równość analizy wariancji

$$T = W + B$$

gdzie

- **T** oznacza całkowite rozproszenie,
- **W** oznacza rozproszenie wewnątrzgrupowe
- **B** oznacza rozproszenie międzygrupowe

Analiza rozproszenia

- Całkowite rozproszenie

$$\mathbf{T} = \sum_{m=1}^g \sum_{i=1}^{n_g} (x_{mi} - \bar{x})(x_{mi} - \bar{x})'$$

- Rozproszenie wewnątrzgrupowe

$$\mathbf{W} = \sum_{m=1}^g \sum_{i=1}^{n_g} (x_{mi} - \bar{x}_m)(x_{mi} - \bar{x}_m)'$$

- Rozproszenie międzygrupowe

$$\mathbf{B} = \sum_{m=1}^g n_m (x_m - \bar{x})(x_m - \bar{x})'$$

Kryteria podziału na grupy

- Minimalizacja śladu macierzy \mathbf{W} lub maksymalizacja śladu macierzy \mathbf{B} . Jest to odpowiednik minimalizacji wariancji wewnątrzgrupowej
- Minimalizacja wartości wyznacznika macierzy \mathbf{W}
- Maksymalizacja wartości śladu macierzy \mathbf{BW}^{-1}

Własności kryteriów podziału na grupy

- Wartość kryterium minimalizacji śladu macierzy **W** jest zależna od skali pomiarowej zmiennych oraz dodatkowo wymusza sferyczność struktury skupień
- Wartości dwóch pozostałych kryteriów są niezależne od skali pomiarowej

Wybór algorytmu optymalizacji

- Liczba możliwych podziałów zbioru n obiektów na g grup wynosi

$$N_{n,g} = \frac{1}{g!} \sum_{m=1}^g (-1)^{g-m} \binom{g}{m} m^n$$

- Na przykład
 - $N_{5,2} = 15$
 - $N_{10,3} = 9330$
- Wykonanie obliczeń dla wszystkich możliwych podziałów jest praktycznie niemożliwe przy dzisiejszej mocy obliczeniowej komputerów

Praktyczny algorytm optymalizacji

- 1 Znalezienie początkowego podziału n obiektów na g grup
- 2 Obliczenie zmiany wartości kryterium przy przesunięciu obiektu między grupami
- 3 Wybranie przesunięcia, które skutkuje największym przyrostem wartości funkcji kryterium
- 4 Powtarzanie kroków (2)-(3) do chwili, gdy przyrost wynosi zero.

Początkowe rozwiązanie

- 1 Na podstawie wiedzy *a-priori*
- 2 W sposób losowy
- 3 Na podstawie statystycznej analizy danych
- 4 W praktyce najczęściej wykorzystywana jest metoda k-średnich albo k-median
- 5 **Problem.** Wybór początkowego rozwiązania może wpływać na rozwiązanie końcowe

Algorytm PAM

- Najczęściej wykorzystywaną w praktyce metodą wyboru rozwiązania początkowego jest algorytm PAM (ang. Partitioning Around Medoids)
- PAM jest metodą suboptymalną
- PAM wykorzystuje zachłanne wyszukiwanie, tzn. najlepiej rokujące w danym momencie wyboru rozwiązanie częściowe, które może nie prowadzić do optymalnego rozwiązania, ale jest szybsze niż pełne wyszukiwanie.

Algorytm PAM

- ➊ Podziel zbiór danych na k skupień z wybranymi k medoidami
 - ➋ Oblicz macierz odległości pomiędzy medoidami oraz pozostałymi obserwacjami
 - ➌ Przypisz każdą z obserwacji (nie będącą medoidem) do najbardziej zbliżonego skupienia
 - ➍ Przy użyciu iteracji zastąp jeden z medoidów jednym z niemedoidów i sprawdź, czy odległości wszystkich elementów niebędących medoidami od najbliższych im medoidów są mniejsze
 - ➎ Jeśli nastąpiła przynajmniej jedna zamiana medoidów, wróć do kroku 3, w przeciwnym przypadku zakończ algorytm.
- Po ustaleniu medoidów przypisz każdą pozostałą obserwację do najbliższego jej medoidu

Wybór liczby skupień

- Większość sposobów ustalania liczby skupień ma charakter nieformalny
- Badania właściwości statystycznych kryteriów ustalających optymalną liczbę skupień wykorzystują techniki symulacyjne, przez co ich wyniki nie posiadają ogólnego charakteru
- Literatura wskazuje na dwa kryteria, które posiadają najlepsze właściwości statystyczne

Kryterium Calińskiego i Harabasza

- Caliński i Harabasz (1974) zaproponowali następującą statystykę

$$\text{opt}g = \frac{\text{tr}(\mathbf{B})}{g-1} / \frac{\text{tr}(\mathbf{W})}{n-g}$$

Kryterium Duda i Hart

- Kryterium weryfikuje czy skupienie powinno być podzielone na dwie części
- Niech J_1^2 będzie sumą kwadratów odległości wewnątrz skupienia
- Niech J_2^2 będzie sumą kwadratów odległości wewnątrz optymalnie podzielonego skupienia na dwie części
- Duda i Hart (1973) zaproponowali następującą statystykę

$$L(m) = \left(1 - \frac{J_2^2}{J_1^2} - \frac{2}{\pi p}\right) \left[\frac{n_m p}{2\left(1 - \frac{8}{\pi^2 p}\right)} \right] \sim N(0, 1)$$

Sposób mierzenia odległości

- L_1 , czyli metryka miejska
- L_2 , czyli metryka Euklidesowa
- L_∞ , czyli największa odległość
- odległość Mahalanobisa