

Министерство образования и науки РФ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

На правах рукописи
УДК 519.63

Васюков Алексей Викторович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДЕФОРМАЦИЙ И ПОВРЕЖДЕНИЙ В СЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ
ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН
Петров Игорь Борисович

Москва – 2012

Содержание

Введение	5
Глава 1. Математические модели	13
1.1 Уравнения механики деформируемого твёрдого тела	13
1.2 Приближение линейно упругого тела	16
1.3 Приближение упруго-пластического тела	18
1.3.1 Модель Прандтля-Рейсса	18
1.4 Приближение вязко-упругого тела	20
1.4.1 Модель Максвелла	20
1.4.2 Модель Работнова	20
1.5 Приближение вязко-упруго-пластического тела	22
1.5.1 Модель Кукуджанова	22
1.6 Моделирование композиционных материалов	23
1.7 Преобразование уравнений при смене базиса	26
1.7.1 Исследование матрицы общего вида \mathbf{A}_q	28
1.8 Свойства тензора напряжений	31
1.8.1 Нормальные и касательные напряжения	31
1.8.2 Главные напряжения и инварианты тензора напряжений	31
1.8.3 Гидростатическая и девиаторная часть тензора	33
1.8.4 Инварианты девиатора	34
1.9 Модели разрушения	35
1.9.1 Критерий наибольших нормальных напряжений	35
1.9.2 Критерий наибольших линейных деформаций	35
1.9.3 Критерий Треска	36
1.9.4 Критерий Мизеса	36
1.9.5 Критерий Мора	38
1.9.6 Критерий Друкера-Прагера	41
1.9.7 Адгезионная прочность	43
Глава 2. Численный метод	44
2.1 Решение одномерной задачи	44
2.1.1 Гиперболические свойства системы уравнений	44
2.1.2 Сеточно-характеристический метод	45

2.1.3	Разностные схемы для структурированных сеток	46
2.1.4	Метод на неструктурированных сетках	49
2.1.5	Расчёт граничных узлов	56
2.1.6	Расчёт контактных узлов	57
2.2	Решение многомерной задачи	58
2.2.1	Схема с расщеплением по направлениям	58
2.2.2	Схема с расщеплением первого порядка	59
2.2.3	Схема с расщеплением второго порядка	60
2.2.4	Схема с расщеплением и случайным выбором базиса	61
2.3	Движение сетки	62
2.4	Выделение контактных границ	64
2.5	Расчёт с шагом $\tau > h/\lambda$	68
2.5.1	Необходимость расчёта с шагом $\tau > h/\lambda$	68
2.5.2	Конструирование метода	71
2.5.3	Исследование метода	72
2.5.4	Тестирование метода	75
2.5.5	Работа на неструктурной сетке из тетраэдров .	76
2.5.6	Движение сетки при больших деформациях	78
2.6	Параллельная версия метода	79
2.6.1	Необходимость разработки параллельной версии . . .	79
2.6.2	Реализация параллельной версии	80
2.6.3	Тестирования производительности MPI	82
2.6.4	Синхронизация шага по времени	83
2.6.5	Синхронизация узлов	84
2.6.6	Параллельный детектор столкновений	86
2.6.7	Синхронизация тетраэдров	87
2.6.8	Производительность параллельной версии	88
Глава 3. Волновые процессы в средах сложной структуры		90
3.1	Постановка задачи	90
3.2	Объёмные волны	92
3.2.1	Аналитическое решение	92
3.2.2	Расчёт продольной волны (P-волны)	94
3.2.3	Расчёт поперечной волны (S-волны)	96
3.3	Поверхностные волны	98

3.3.1	Отражение плоской волны от свободной границы	98
3.3.2	Волны Рэлея	99
3.3.3	Волны Лэмба	101
3.3.4	Отражение сферической волны от свободной границы	105
3.3.5	Расчёт отражения сферической волны	107
3.3.6	Расчёт волны Лэмба	108
3.4	Волны на контактной границе	109
3.4.1	Преломление на плоской контактной границе	109
3.4.2	Волны Стоунли	113
3.4.3	Волны Лява	113
3.4.4	Расчёт волн Стоунли	116
3.4.5	Расчёт контакта независимых тел	116
3.5	Генерация волн разных типов	119
3.6	Волновые процессы и критерии разрушения материала	120
3.7	Расчёт многослойной конструкции	122
3.8	Взаимодействие падающей волны с поврежденной зоной	126

Глава 4. Низкоскоростной удар по композитной конструкции 129

4.1	Постановка задачи	130
4.2	Удар по элементу обшивки	134
4.3	Удар по элементу обшивки со стрингером	136
4.4	Анализ волновой картины для обоих постановок	138
4.5	Анализ максимальных напряжений разных типов	142
4.6	Интегральное воздействие и области разрушений	146
4.7	Несимметричный удар по конструкции со стрингером	150
4.8	Сравнение последствий удара для разных постановок	154

Глава 5. Волновые процессы в сложных биологических средах 156

5.1	Задача о черепно-мозговой травме	157
5.2	Задача о динамическом нагружении коленного сустава	177
5.3	Задача об ударе по грудной клетке в защитной конструкции	182

Заключение 187

Список использованных источников 189

Введение

Актуальность темы

Задачи деформаций и разрушения сложных конструкций представляют особый интерес для многих областей техники. Механика разрушения ставит множество как академических проблем, касающихся механизмов разрушения материалов различных типов, так и инженерных задач, связанных с требованиями обеспечить необходимые уровни надежности различных изделий.

Решение задач прочности конструкций сложной формы и реологии при непростых условиях нагружения трудно представить без применения компьютерного моделирования и эффективных численных методов. На сегодняшний день наиболее широкое распространение для данного класса задач получил метод конечных элементов (МКЭ) [27]. Основные параметры, используемые для описания условий разрушения в расчётах прочности методом конечных элементов, – коэффициент интенсивности напряжений, J -интеграл, раскрытие в вершине трещины [14]. Применение МКЭ и данных критериев позволяет эффективно решать статические задачи прочности.

Однако, для определения деформаций и повреждений в сложных конструкциях при динамической нагрузке требуется разработка методов, учитывающих волновые процессы при соударении. Особенно актуальна эта задача для многослойных и неоднородных материалов, в которых итоговая сложная картина повреждений формируется в результате множественных взаимодействий упругих и пластических волн как с внешними, так и с внутренними контактными границами. Ярким примером таких материалов являются современные композиты [41, 42].

На сегодняшний день композиционные материалы активно внедряются во многих областях техники. Их использование открывает новые перспективы в авиастроении, космической отрасли, машиностроении и других отраслях благодаря сочетанию лёгкости и высокой прочности. В том числе активно рассматривается возможность применения композиционных материалов в ответственных силовых конструкциях оперения, крыла и фюзеляжа самолёта, что позволит значительно снизить массу конструкции. Благодаря этому станет возможной реализация новых конструктивно-силовых

схем и компоновок летательных аппаратов и улучшения их характеристик.

В связи с этим важными задачами являются как разработка новых усовершенствованных композиционных материалов, так и создание методик и норм проверки их прочностных характеристик и надёжности в эксплуатации. Существующие методы проверки монолитных изделий из металлов и сплавов оказываются неэффективны для композитов в силу их сложной внутренней структуры.

Данная работа непосредственно связана с одной из актуальных прикладных задач прочностных испытаний композиционных материалов – изучение поведения материала при динамической нагрузке. В силу анизотропности свойств композиционные материалы после действия нагрузки могут заметно терять прочность даже при отсутствии видимых повреждений. Это обусловлено появлением микротрещин, которые впоследствии, объединяясь, превращаются в макротрещины. Так, возникающее после нагрузки расслоение материала может быть визуально не заметно, хотя делает образец непригодным к дальнейшему использованию.

Разрушение композиционных материалов может происходить как в объеме (при сжатии, растяжении, сдвиге), так и на контактных границах между матрицей и наполнителем. В зависимости от типа нагрузки разрушение может носить деформационный или волновой характер. Динамическое воздействие вызывает распространение упругих волн в образце. В случае композиционного материала множественные переотражения волн от внутренних контактных границ между слоями создают сложную волновую картину. Интерференция прямых, отражённых и преломлённых волн формирует итоговые области максимальных нагрузок в конструкции.

В связи с этим для моделирования необходимо использовать численный метод решения системы уравнений механики деформируемого твёрдого тела, позволяющий получить полную волновую картину с высоким временным и пространственным разрешением с учётом влияния контактных границ. Указанными свойствами обладает сеточно-характеристический численный метод, применяемый в данной работе [2, 6, 10].

Для моделирования реальных инженерных конструкций необходимо разработать и реализовать численные методы, позволяющие выполнять расчёты в областях сложной геометрии. Для решения задач большой размерно-

сти требуется параллельная реализация используемых численных методов, обладающая высокой эффективностью при использовании на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах.

Цели работы

1. Разработка математических моделей для задачи низкоскоростного удара по инженерной конструкции, выполненной из композиционных материалов.
2. Разработка сеточно-характеристического метода, позволяющего выполнять расчёты на сетке из тетраэдров с шагом $\tau > h/\lambda$ (здесь τ – шаг по времени, h – минимальное расстояние от узла сетки до соседних узлов, λ – максимальное по модулю собственное число управляющей системы уравнений).
3. Разработка параллельной версии сеточно-характеристического метода с явным выделением контактных границ, обеспечивающей высокую эффективность при использовании на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах.
4. Создание комплекса программ для решения прикладных задач. Интеграция комплекса с существующими сторонними программами задания геометрии объектов и визуализации результатов расчётов, являющимися стандартом де-факто среди инженеров-практиков.
5. Исследование волновых процессов в средах сложной структуры, численное решение задач об объёмных волнах, поверхностных волнах, волнах на контактной границе.
6. Исследование волновых процессов в элементе композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта, приводящих к повреждениям конструкции при низкоскоростном ударе.

Научная новизна

1. Разработан метод численного моделирования на неструктурированной сетке действия низкоскоростного удара на конструкцию сложной

формы в трёхмерной постановке. Разработанный метод позволяет проводить моделирование волновых процессов в конструкции при динамическом внешнем воздействии с учетом взаимодействия волновых фронтов, влияния внешних и внутренних границ, различия реологических свойств слоёв. Особенностью метода является возможность выполнять расчёты с шагом $\tau > h/\lambda$ в трёхмерной постановке. Разработанный метод исследован на аппроксимацию и устойчивость. Проведено тестирование реализации метода.

2. Разработанный сеточно-характеристический метод реализован в виде параллельного вычислительного комплекса, позволяющего выполнять моделирование как на стандартном оборудовании, так и на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах.
3. Выполнено исследование волновых процессов в многослойных средах различной структуры, моделирующих панель из полимерного композиционного материала. Исследование включает в себя как аналитическое, так и численное изучение процессов, протекающих в многослойной среде при динамическом нагружении. Получены поля скоростей и напряжений, области потенциальных разрушений различных типов, обусловленные распространением и взаимодействием волновых фронтов в материале.
4. Выполнено численное моделирование натурного эксперимента по динамическому нагружению элемента композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта. Проведены расчеты для двух постановок эксперимента – удар по отдельному элементу обшивки и удар по элементу обшивки со стрингером. Для задачи со стрингером рассмотрены постановки с центральным и нецентральным ударом. Проведен анализ причин разрушения композиционных авиационных материалов. Для всех постановок получены области концентрации напряжений, вызванные волновыми процессами в ходе соударения. Определены зоны потенциальных повреждений конструкции, обусловленные разными механизмами разрушения материала. Для элемента обшивки без стрингера размер разрушенной области составляет 50-60 мм, для элемента обшивки со стрингером 25-30 мм при центральном ударе

и 20-25 мм при нецентральном ударе.

5. Получено, что наличие стрингера существенно разгружает элемент обшивки при динамическом воздействии и уменьшает размер потенциально повреждённых областей. Данный результат важен, так как при действии статической нагрузки наличие стрингера напротив вызывает концентрацию напряжений и приводит к разрушению при меньшей силе воздействия.
6. Разработанный численный метод применен для решения ряда задач биомеханики. Получены области потенциальных повреждений тканей организма человека в задачах о черепно-мозговой травме, о динамическом нагружении коленного сустава и об ударе по торсу в защитной конструкции.

Практическая ценность

Результаты численного моделирования действия низкоскоростного удара на конструкцию из полимерного композиционного материала могут быть использованы для экспериментальной проверки предложенных математических моделей и численного метода. В работе сформулированы критерии для сравнения численного и натурного эксперимента, учитывающие механические свойства распространённых полимерных матриц.

После экспериментальной верификации разработанные модели и методы могут быть использованы при создании методик и норм проверки прочностных характеристик композиционных материалов.

Полученные результаты по взаимодействию упругой волны с разрушенной областью конструкции могут быть использованы при разработке методов неразрушающего контроля состояния изделий из композиционных материалов.

Кроме того, разработанный параллельный программный комплекс может быть использован для моделирования динамического воздействия на комплексные силовые конструкции из композиционных материалов в тех случаях, когда проведение натурных испытаний затруднительно.

Полученные результаты в части задач биомеханики могут быть использованы при разработке защитного снаряжения различных видов.

Работа поддержана рядом государственных и коммерческих грантов.

1. Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»)». НИР5. «Разработка физико-математических моделей, алгоритмов и эффективных методов решения задач механики сплошных сред на супер-ЭВМ»;
2. Грант РФФИ 10-01-92654-ИНД_а «Математическое моделирование сложных задач на высокопроизводительных вычислительных системах», 2010–2011гг.
3. Грант РФФИ 11-01-00723-а «Разработка численных методов моделирования динамических задач биомеханики на современных высокопроизводительных вычислительных системах», 2011–2013гг.
4. Грант РФФИ 10-01-00572-а «Разработка алгоритмического обеспечения и вычислительных методов для численного решения задач динамики деформируемых сред на многопроцессорных ЭВМ нового поколения», 2010–2012гг.

Публикации

Научные результаты диссертации опубликованы в 12 работах ([29] - [40]), из которых две ([36] и [37]) – в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертации.

Апробация

Результаты работы были доложены, обсуждены и получили одобрение специалистов на следующих научных конференциях:

1. Научные конференции Московского физико-технического института «Проблемы фундаментальных и прикладных, естественных и технических наук в современном информационном обществе» (МФТИ, Долгопрудный, 2006–2011);

2. I международная конференция «Математические модели и численные методы в биоматематике» (Институт вычислительной математики РАН, Москва, 2010);
3. II международная конференция «Математические модели и численные методы в биоматематике» (Институт вычислительной математики РАН, Москва, 2011);
4. Расширенный семинар «Вычислительная физика: алгоритмы, методы и результаты» (представительство Института космических исследований РАН, Таруса, 2011);
5. The 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC 2011) (Российский университет дружбы народов, Москва, 2011);
6. Российско-индийский семинар «Новые достижения математического моделирования» (Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, 2011);
7. Международный авиационно-космический семинар им. С.М. Белоцерковского (Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Москва, 2012).

Результаты работы были доложены, обсуждены и получили одобрение специалистов на научных семинарах в следующих организациях:

1. Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского (Москва–Жуковский, 2011, 2012);
2. Научно-исследовательский институт природных газов и газовых технологий – Газпром ВНИИГАЗ (Москва, 2011);
3. Институт вычислительной математики РАН (Москва, 2010, 2011);
4. Институт автоматизации проектирования РАН (Москва, 2011).

Личный вклад соискателя в работах с соавторами

В части моделей соискателем разработана математическая модель панели из полимерного композиционного материала для задачи о низкоскоростном ударе по элементу композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта. Также выполнено исследование свойств матрицы общего вида A_q , возникающей при программной реализации модели.

В части численных методов соискателем предложен и реализован сеточно-характеристический метод, позволяющий выполнять расчёты с шагом $\tau > h/\lambda$ в трёхмерной постановке. Выполнено исследование разработанного метода на аппроксимацию и устойчивость. Проведено тестирование реализации метода.

В части программной реализации метода и разработки параллельного вычислительного комплекса соискателем разработан и реализован алгоритм параллельной версии численного метода, предложен алгоритм параллельного детектора столкновений, выполнена интеграция программного комплекса с программами задания геометрии объектов (Gmsh, Tetgen, Ani3D) [79] и визуализации результатов расчётов (Paraview, Mayavi).

В части проведения расчетов и анализа результатов соискателем выполнено численное исследование волновых процессов в многослойных средах, моделирующих панель из полимерного композиционного материала, получены области потенциальных разрушений, обусловленных распространением волновых фронтов в материале. Проведено численное моделирование натурного эксперимента по динамическому нагружению элемента композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта для двух постановок эксперимента – удар по отдельному элементу обшивки и удар по элементу обшивки со стрингером. Для задачи со стрингером рассмотрены постановки с центральным и нецентральным ударом. Выполнен анализ областей концентрации напряжений, вызванных волновыми процессами в ходе соударения. Определены зоны потенциальных повреждений конструкции, обусловленные разными механизмами разрушения материала.

Проведено численное исследование волновых процессов в покровах мозга при динамическом нагружении для многокомпонентной и упрощенных моделей. Выполнены расчеты задач о черепно-мозговой травме, о нагружении коленного сустава, об ударе по торсу в защитной конструкции.

Глава 1

Математические модели

1.1 Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

Для математического моделирования волновых процессов в деформируемом твёрдом теле используется система динамических уравнений [15, 16] в виде

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \nabla_j \sigma_{ij} + f_i && \text{(уравнения движения)} \\ \sigma_{ij} &= q_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + F_{ij} && \text{(реологические соотношения).} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность среды, v_i – компоненты скорости смещения, σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, ∇_j – ковариантная производная по j -й координате, f_i – массовые силы, действующие на единицу объёма, F_{ij} – правая часть, используемая, например, для описания диссипации в моделях с учётом вязкости.

В случае малых деформаций тензор скоростей деформаций $e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ выражается через компоненты скорости смещения линейным образом [21]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \quad (1.2)$$

Вид компонент тензора 4-го порядка q_{ijkl} и правой части F_{ij} определяется реологией среды.

Для замыкания системы уравнений (1.1) её необходимо дополнить уравнением состояния, определяющим зависимость плотности от напряжений:

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p}{K}}, \quad (1.3)$$

где $p = -\frac{1}{3} \sum \sigma_{kk}$ – давление, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – коэффициент всестороннего сжатия, λ и μ – параметры Ламе.

Параметры Ламе зависят от материала и связаны с модулем продольной

упругости и коэффициентом Пуассона следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G &= \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь E – модуль продольной упругости, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

В простейшем случае линейной упругости $q_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ и $F_{ij} = 0$. Тогда в приближении малых деформаций и в отсутствии внешних сил в трехмерном пространстве и декартовых координатах уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Очевидно, что уравнения (1.5) можно переписать в матричной форме:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T$ – вектор искомых функций, x, y, z – независимые пространственные переменные, t – время.

Аналогично можно записать более общую систему (1.1) в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{f}. \quad (1.7)$$

Здесь \vec{f} – вектор правых частей, размерность которого равна размерности исходной системы, а выражения для компонентов зависят от реологии среды. Точный вид матриц \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z также зависит от реологии среды.

1.2 Приближение линейно упругого тела

Для линейно упругого тела тензор q_{ijkl} и правая часть F_{ij} в (1.1) принимают следующий вид [21]:

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ F_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В этом соотношении λ и μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для линейно упругого тела матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z в (1.7) принимают следующий вид.

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Приближение упруго-пластического тела

1.3.1 Модель Прандтля-Рейсса

Для упруго-пластического тела используется модель Прандтля-Рейсса с условием текучести Мизеса. Тогда тензор q_{ijkl} и правая часть F_{ij} в (1.1) имеют более сложный вид [11, 62]:

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{I\mu\sigma_{ij}\sigma_{kl}}{K^2}, \\ F_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В этом соотношении λ и μ – параметры Ламе, K – предел текучести на сдвиг, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, I – параметр модели, который определяется следующим образом:

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2 < 2K^2 \\ 1, & \text{если } S \geq 2K^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Для линейно упругого тела матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z в (1.7) имеют существенно более сложный вид, так как компоненты тензора q_{ijkl} зависят от компонентов тензора σ . Значения σ_{ij} в общем случае различны в каждой точке пространства в каждый момент времени. Это приводит к тому, что невозможно упростить вид матриц аналитически и получить их покомпонентную запись в терминах λ, μ, ρ , как это было сделано для линейно упругого тела. Значения ненулевых элементов каждой матрицы необходимо вычислять в каждой точке пространства в каждый момент времени в соответствии с (1.9) и (1.10), используя текущие значения σ_{ij} в данной точке.

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1111} & -\frac{q_{1112}+q_{1121}}{2} & -\frac{q_{1113}+q_{1131}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1211} & -\frac{q_{1212}+q_{1221}}{2} & -\frac{q_{1213}+q_{1231}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{1311} & -\frac{q_{1312}+q_{1321}}{2} & -\frac{q_{1313}+q_{1331}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{2211} & -\frac{q_{2212}+q_{2221}}{2} & -\frac{q_{2213}+q_{2231}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{2311} & -\frac{q_{2312}+q_{2321}}{2} & -\frac{q_{2313}+q_{2331}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_{3311} & -\frac{q_{3312}+q_{3321}}{2} & -\frac{q_{3313}+q_{3331}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{q_{1112}+q_{1121}}{2} & -q_{1122} & -\frac{q_{1123}+q_{1132}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{1212}+q_{1221}}{2} & -q_{1222} & -\frac{q_{1223}+q_{1232}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{1312}+q_{1321}}{2} & -q_{1322} & -\frac{q_{1323}+q_{1332}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{2212}+q_{2221}}{2} & -q_{2222} & -\frac{q_{2223}+q_{2232}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{2312}+q_{2321}}{2} & -q_{2322} & -\frac{q_{2323}+q_{2332}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{3312}+q_{3321}}{2} & -q_{3322} & -\frac{q_{3323}+q_{3332}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \\ -\frac{q_{1113}+q_{1131}}{2} & -\frac{q_{1123}+q_{1132}}{2} & -q_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{1213}+q_{1231}}{2} & -\frac{q_{1223}+q_{1232}}{2} & -q_{1233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{1313}+q_{1331}}{2} & -\frac{q_{1323}+q_{1332}}{2} & -q_{1333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{2213}+q_{2231}}{2} & -\frac{q_{2223}+q_{2232}}{2} & -q_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{2313}+q_{2331}}{2} & -\frac{q_{2323}+q_{2332}}{2} & -q_{2333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_{3313}+q_{3331}}{2} & -\frac{q_{3323}+q_{3332}}{2} & -q_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Приближение вязко-упругого тела

1.4.1 Модель Максвелла

Для вязко-упругого тела при использовании модели Максвелла тензор q_{ijkl} и правая часть F_{ij} в (1.1) принимают следующий вид [20]:

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ F_{ij} &= -\frac{\sigma_{ij}}{\tau_0}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом соотношении λ и μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, τ_0 – время релаксации.

Для вязко-упругого тела матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z в (1.7) принимают вид, полностью совпадающий со случаем линейно упругого тела (см. раздел 1.2). Отличия только в правой части уравнений, в которой для вязко-упругого тела возникают члены, отвечающие за диссипацию.

1.4.2 Модель Работнова

При использовании модели Работнова наследственной вязко-упругой среды тензор q_{ijkl} и правая часть F_{ij} в (1.1) принимают следующий вид [17, 48]:

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ F_{ij} &= -(L^* + M^*)\sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В этом соотношении λ и μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. Правая часть имеет достаточно сложный вид и описывает поведение материала с учетом истории его нагружения. Оператор L^* учитывает вязкие эффекты, оператор M^* – накопление повреждений. Вид операторов:

$$\begin{aligned} L^*\sigma_{ij} &= \int_0^T K_L(1-\tau)\sigma_{ij}d\tau, \\ M^*\sigma_{ij} &= \int_0^T K_M(1-\tau)\sigma_{ij}d\tau, \\ K_L(1-\tau) &= \rho(1-\tau)^{-\alpha}, \\ K_M(1-\tau) &= m(1-\tau)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь $K_L(1 - \tau)$ и $K_M(1 - \tau)$ – разностные ядра Абеля.

При использовании модели Работнова уравнения перестают быть локальными, для поиска решения на временном слое $n + 1$ требуется интегрирование, вообще говоря, за все время жизни среды.

Для модели Работнова матрицы $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ в (1.7) принимают вид, полностью совпадающий со случаем линейно упругого тела (см. раздел 1.2). Отличия только в правой части уравнений, в которой возникают члены, отвечающие за вязкие эффекты и накопление повреждений.

1.5 Приближение вязко-упруго-пластического тела

1.5.1 Модель Кукуджанова

Для вязко-упруго-пластического тела при использовании модели Кукуджанова тензор q_{ijkl} и правая часть F_{ij} в (1.1) принимают следующий вид [7, 12, 13]:

$$\begin{aligned} q_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ F_{ij} &= -\frac{2\mu}{\tau_0\sigma_{kl}\sigma_{kl}}F(\sigma_{kl}, \sigma_{kl}, K)\sigma_{ij}, \\ F(\sigma_{kl}, \sigma_{kl}, K) &= \frac{(\sigma_{kl}, \sigma_{kl})^{1/2} - (2K)^{1/2}}{\tau_0(\sigma_{kl}, \sigma_{kl})^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

В этом соотношении λ и μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера, τ_0 – время релаксации, K – предел текучести на сдвиг.

Для вязко-упруго-пластического тела матрицы \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z в (1.7) принимают вид, полностью совпадающий со случаем линейно упругого тела (см. раздел 1.2). Отличия только в правой части уравнений.

1.6 Моделирование композиционных материалов

Композиционными называют материалы, состоящие из двух или более компонентов или фаз и удовлетворяющие следующим условиям:

- доля каждого компонента составляет не менее 5% по объему;
- свойства компонентов существенно различаются, как следствие свойства композита отличаются от свойств исходных компонентов;
- композит получен путем смешения исходных компонентов.

В зависимости от того, как именно компоненты формируют итоговый материал, композиты могут иметь принципиально разную структуру [41]. На рис. 1 схематично показаны некоторые типы композитов.

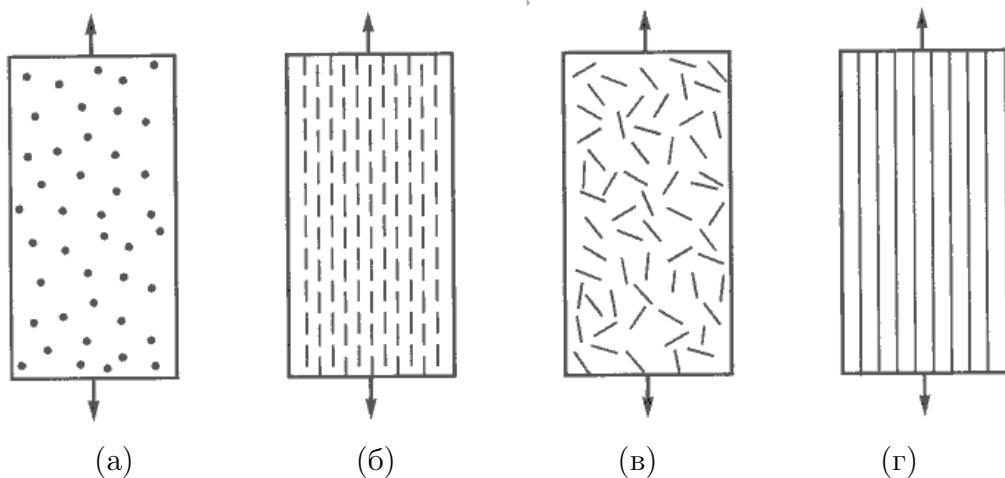


Рисунок 1 — Типы композитов. а – наполненный случайно распределенными частицами. б – однонаправленные короткие волокна. в – случайно ориентированные короткие волокна. г – однонаправленные длинные волокна.

Свойства композитов определяются двумя факторами – свойствами исходных компонентов и структурой их упаковки в итоговый композиционный материал. Для большинства композитов характерно наличие нескольких уровней структуры. Обычно можно выделить макроструктуру, микроструктуру и наноструктуру.

К макроструктуре относятся элементы структуры, размер которых соизмерим с размером итогового изделия. Например, в плетеной композитной ткани макроструктура включает в себя форму тканевых полос и метод

плетения. К микроструктуре относятся элементы размером от единиц до сотен микрон. Этот уровень включает в себя волокна и матрицу, частицы наполнителя, поры, трещины и т.д. Наноструктура оперирует отдельными атомами и молекулами.

Принципиальные свойства композитов, отличающие их от других классов материалов, формируются как правило на микроуровне. На этом уровне композит состоит из двух (или более) компонентов. Непрерывная фаза называется матрицей, второй компонент – наполнителем или армирующей фазой.

Матрица может быть керамической, металлической или полимерной. Очевидно, что механические свойства композитов с матрицами разных классов значительно отличаются. Полимеры являются самыми легкими из всех типов, но при этом менее жесткие и прочные. Керамические матрицы прочные, жесткие и хрупкие. Металлы занимают среднее положение по прочности и жесткости, при этом они пластичны.

Наполнитель как правило прочнее и жестче матрицы. Исключения встречаются, но они довольно редки. Форма наполнителя и его упаковка в значительной степени определяют механические свойства итогового композита. Различают два основных типа наполнителей – волокнистые и дисперсные (см. рис. 1).

Механические свойства композита (жесткость, прочность) зависят от многих факторов [46, 47]. Основными, безусловно, являются свойства матрицы и наполнителя и доля наполнителя в матрице. Для волокнистых композитов также важны форма, размер и ориентация волокон. Для прочности композита, помимо прочности компонентов, также принципиальна адгезионная прочность между матрицей и волокнами. Причем на свойствах композита плохо оказывается как слишком низкая, так и слишком высокая адгезия. Если адгезионная прочность низкая, то нагрузка не передается от матрицы к волокнам, что приводит к быстрому разрушению матрицы. Но если адгезия слишком высока, волокна совсем не отслаиваются от матрицы, и композит становится хрупким [24, 25].

Таким образом, при рассмотрении свойств композита приходится учитывать множество факторов и параметров. Для определения эффективных характеристик композиционных материалов в настоящее время как пра-

вило применяются многомасштабные методы, разработанные под руководством Н.С. Бахвалова [43]. Многомасштабные методы позволяют осреднить упругие характеристики материала и заменить его эквивалентной однородной средой с эффективными характеристиками [44, 45].

В данной работе для моделирования разрушения композиционных материалов применяется сочетание использования осредненных характеристик и прямого численного моделирования без осреднения. Так при моделировании обшивки самолета, состоящей из нескольких композитных субпакетов, каждый отдельный субпакет заменяется однородной средой с эффективными характеристиками, но при этом границы между отдельными субпакетами выделяются явно, что позволяет учесть отражение и преломление упругих волн на контактных границах.

1.7 Преобразование уравнений при смене базиса

При практической реализации численного метода для решения системы (1.7) достаточно часто возникает необходимость смены базиса. Это может быть связано, например, с необходимостью случайного выбора направления координатных осей. Случайный выбор базиса используется для того, чтобы исключить наличие выделенных направлений, которые приводят к анизотропии численного решения. Еще одной частой причиной смены базиса является расчет областей с границей сложной формы. В этом случае при расчете граничных точек метод может требовать определенной ориентации осей базиса относительно внешней нормали в данной точке границы.

Исследуем, как преобразуются уравнения при смене базиса. Для этого рассмотрим исходный базис $\vec{x} = (x, y, z)^T$ и новый базис $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)^T$. Пусть \mathbf{G} - матрица, столбцами которой являются координаты векторов нового базиса $\vec{\xi}$ в старом базисе \vec{x} .

Тогда координаты точек, их скорости, а также компоненты тензора напряжений при переходе между базисами преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{r}_x &= \mathbf{G}\vec{r}_\xi, \\ \vec{v}_x &= \mathbf{G}\vec{v}_\xi, \\ \vec{\sigma}_x &= \mathbf{G}\sigma_\xi\mathbf{G}, \\ \vec{r}_\xi &= \mathbf{G}^{-1}\vec{r}_x, \\ \vec{v}_\xi &= \mathbf{G}^{-1}\vec{v}_x, \\ \vec{\sigma}_\xi &= \mathbf{G}^{-1}\sigma_x\mathbf{G}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь индекс x относится к величинам, заданным в старом базисе, а индекс ξ – в новом.

При программной реализации того или иного метода решения системы (1.7) удобно задавать входные параметры и получать результаты в некоторой фиксированной декартовой системе координат \vec{x} , так как такой формат является естественным для предметной области. Что принципиально с точки зрения реализации метода – уравнения (1.7) записаны в форме, независимой от выбора той или иной системы координат. Поэтому можно хранить состояние среды (компоненты скорости и напряжения) в фиксированном

базисе \vec{x} , а вычисления вести в некотором локальном базисе $\vec{\xi}$, удобном с точки зрения алгоритма численного метода и локальной конфигурации узлов расчётной сетки. В этом случае необходимо лишь специально указать, какие операторы подставлять вместо компонент градиента.

Переход к производным по направлениям нового базиса в (1.7) приводит к следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \\
&\quad + \mathbf{A}_y \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \mathbf{A}_z \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \\
&= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{A}_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathbf{A}_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{A}_z \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{A}_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{A}_y + \frac{\partial \eta}{\partial z} \mathbf{A}_z \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{A}_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{A}_y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \mathbf{A}_z \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta}. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.7) после замены базиса имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\xi_x \mathbf{A}_x + \xi_y \mathbf{A}_y + \xi_z \mathbf{A}_z) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + (\eta_x \mathbf{A}_x + \eta_y \mathbf{A}_y + \eta_z \mathbf{A}_z) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} + \\
+ (\zeta_x \mathbf{A}_x + \zeta_y \mathbf{A}_y + \zeta_z \mathbf{A}_z) \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} = \vec{f}. \tag{1.17}
\end{aligned}$$

Или, после замены обозначений:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_\xi \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + \mathbf{A}_\eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} + \mathbf{A}_\zeta \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} = \vec{f}. \tag{1.18}$$

Из вида уравнений (1.17) и (1.18) очевидным образом возникает задача исследования матрицы общего вида:

$$\mathbf{A}_q = q_x \mathbf{A}_x + q_y \mathbf{A}_y + q_z \mathbf{A}_z, \tag{1.19}$$

где \mathbf{A}_q – обобщенный вид матрицы, возникающей при переходе в новую систему координат, q_x – производные базисных векторов нового базиса по

старому базису. В случае, когда оба базиса ортонормированные,

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.17), (1.18) и (1.19) верны и в случае произвольных базисов, в том числе неортогональных, но соотношение (1.20) в этом случае уже не выполняется.

1.7.1 Исследование матрицы общего вида \mathbf{A}_q

Рассмотрим частный, но важный случай линейно упругого тела. Он представляет отдельный интерес, так как позволяет получить все необходимые соотношения в аналитическом виде явным образом, и таким образом исследовать, как отражается смена базиса на полной схеме построения численного метода. Кроме того, для большинства рассмотренных моделей вид матриц \mathbf{A}_{x_i} совпадает с их видом для линейно упругого тела.

В случае линейной упругости в обобщенную матрицу (1.19) входят матрицы $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$, явный вид которых приведен в разделе 1.2. Получаем следующий вид обобщенной матрицы A_q (с точностью до знака):

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}q_x & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}q_x & 0 & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho}q_x & 0 & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z \\ (\lambda + 2\mu)q_x & \lambda q_y & \lambda q_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu q_y & \mu q_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu q_z & 0 & \mu q_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q_x & (\lambda + 2\mu)q_y & \lambda q_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu q_z & \mu q_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q_x & \lambda q_y & (\lambda + 2\mu)q_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.21)$$

Полученная матрица имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}
-\mathbf{A}_q &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}q_x & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho}q_x & 0 & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho}q_x & 0 & \frac{1}{\rho}q_y & \frac{1}{\rho}q_z \end{pmatrix}, \\
\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)q_x & \lambda q_y & \lambda q_z \\ \mu q_y & \mu q_x & 0 \\ \mu q_z & 0 & \mu q_x \\ \lambda q_x & (\lambda + 2\mu)q_y & \lambda q_z \\ 0 & \mu q_z & \mu q_y \\ \lambda q_x & \lambda q_y & (\lambda + 2\mu)q_z \end{pmatrix} \quad (1.22)
\end{aligned}$$

При нахождении собственных значений и векторов по методу Челнокова [4] задача сводится к нахождению их для матрицы $\mathbf{C}^T \mathbf{B}^T$, которая имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)q_x^2 + \mu q_y^2 + \mu q_z^2 & (\lambda + \mu)q_x q_y & (\lambda + \mu)q_x q_z \\ (\lambda + \mu)q_x q_y & \mu q_x^2 + (\lambda + 2\mu)q_y^2 + \mu q_z^2 & (\lambda + \mu)q_y q_z \\ (\lambda + \mu)q_x q_z & (\lambda + \mu)q_y q_z & \mu q_x^2 + \mu q_y^2 + (\lambda + 2\mu)q_z^2 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Собственные числа имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Таким образом, при смене базиса собственные числа λ_i меняются в $q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$ раз. Если оба базиса ортонормированные, то соотношение (1.20) выполняется и собственные числа не меняются при смене базиса. В случае же перехода в неортонормированный базис собственные числа могут меняться в широком диапазоне.

От λ_i напрямую зависит, какие точки на предыдущем шаге по времени будут нужны для реконструкции решения на новом временном слое. Чем

больше значения λ_i , тем больше угол наклона характеристики (см. разделы 2.1.1 и 2.1.2). При увеличении λ_i следует ожидать уменьшения допустимого шага по времени (при использовании курантовского ограничения на шаг $\lambda\tau/h \leq 1$), либо (при попытке сохранить шаг по времени неизменным) еще более неприятных последствий, таких как появление непредусмотренных характеристик, выводящих за пределы расчетной области. Действительно, экспериментально было получено, что при попытке использовать неортогональный базис для расчета граничных узлов происходит увеличение λ_i при переходе в новый базис и проявляются оба эти эффекта.

1.8 Свойства тензора напряжений

1.8.1 Нормальные и касательные напряжения

Вектор напряжения \mathbf{T} , действующий на произвольную площадку, заданную нормалью \mathbf{n} , имеет вид

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.25)$$

Нормальная часть напряжения очевидно равняется скалярному произведению вектора напряжения и нормали к площадке. Выражая через компоненты тензора напряжений и компоненты вектора нормали получаем

$$\sigma_n = \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} = T_i^{(\mathbf{n})} n_i = \sigma_{ij} n_i n_j. \quad (1.26)$$

Величина касательного напряжения к данной площадке выражается через полный вектор напряжения и нормальную составляющую напряжения

$$\tau_n = \sqrt{(T^{(\mathbf{n})})^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{T_i^{(\mathbf{n})} T_i^{(\mathbf{n})} - \sigma_n^2}, \quad (1.27)$$

где

$$(T^{(\mathbf{n})})^2 = T_i^{(\mathbf{n})} T_i^{(\mathbf{n})} = (\sigma_{ij} n_j) (\sigma_{ik} n_k) = \sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k. \quad (1.28)$$

1.8.2 Главные напряжения и инварианты тензора напряжений

В любой точке напряженно-деформированного тела есть три направления, называемые главными. Если воспринимать вектор главного направления \mathbf{n} как вектор нормали к некоторой площадке, то действующий на данную площадку вектор напряжения оказывается перпендикулярен к ней. Таким образом, вектор напряжения оказывается параллельным вектору главного направления, а касательные напряжения к данной площадке отсутствуют. Таким образом, три главных направления и соответствующие им три главных напряжения составляют базис, в котором тензор напряжений имеет диагональный вид.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - соответственно три главных напряжения.

Если вектор напряжения параллелен нормали, то получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} &= \lambda \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} \\ \sigma_{ij} n_j &= \lambda n_i \\ \sigma_{ij} n_j - \lambda n_i &= 0 \\ (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Решение полученной системы

$$\det|\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

дает характеристическое уравнение

$$\det|\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \quad (1.32)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk}, \\ I_2 &= \det \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}), \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}) = \\ &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{31}^2\sigma_{22} \end{aligned} \quad (1.33)$$

В силу симметрии тензора напряжений уравнение имеет три действи-

тельных корня λ_i . Полученные корни являются главными напряжениями:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \sigma_3 &= \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \sigma_2 &= I_1 - \sigma_1 - \sigma_3.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Из вида характеристического уравнения следует, что величины I_1, I_2, I_3 не зависят от того, в какой системе координат записан тензор напряжений σ_{ij} . Поэтому они называются инвариантами тензора напряжения. Через главные напряжения инварианты записываются в более простом виде:

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3.\end{aligned}\tag{1.35}$$

1.8.3 Гидростатическая и девиаторная часть тензора

Тензор напряжений удобно представить в виде суммы двух тензоров

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij}\tag{1.36}$$

Здесь первый компонент представляет собой гидростатическую часть напряжения

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3}I_1\tag{1.37}$$

Этот компонент напряжения отвечает за сжатие тела и изменение его объема.

Второй компонент - девиатор тензора напряжений - имеет вид

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}.\tag{1.38}$$

Девиатор отвечает за изменение формы тела без изменения объема.

В матричной форме записи девиатор имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.8.4 Инварианты девиатора

Девиатор тензора напряжений имеет главные напряжения, главные направления и инварианты точно так же, как сам тензор напряжения. Процедура их поиска полностью аналогична. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det|s_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0, \quad (1.40)$$

где J_1, J_2, J_3 - инварианты девиатора, которые могут быть записаны через компоненты и собственные значения исходного тензора напряжений σ_{ij} и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, или через компоненты и собственные значения девиатора s_{ij} и s_1, s_2, s_3 :

$$\begin{aligned} J_1 &= s_{kk} = 0, \\ J_2 &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} = -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 = \\ &= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 = \\ &= \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2, \\ J_3 &= \det(s_{ij}) = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = s_1s_2s_3 = \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.9 Модели разрушения

1.9.1 Критерий наибольших нормальных напряжений

При использовании данного критерия пластическое деформирование пластического материала или разрушение хрупкого материала наступает при достижении наибольшим по модулю главным напряжением предельного значения σ_* . Предельная поверхность в этом случае представляет собой куб в пространстве модулей главных напряжений.

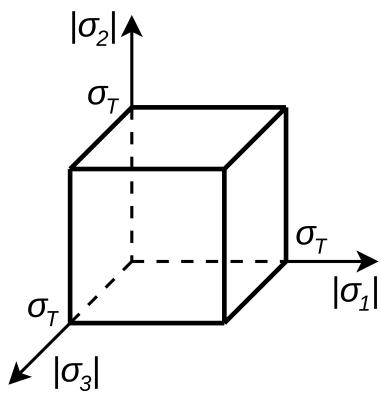


Рисунок 2 — Предельная поверхность для критерия нормальных напряжений.

Данный критерий удовлетворительно описывает разрушение хрупких материалов при напряженных состояниях, близких к одноосным. Явления пластического течения данный критерий описывает неудовлетворительно. Таким образом, области срабатывания данного критерия в хрупких материалах можно рассматривать как области потенциального разрушения отколом, а также области зарождения трещин [22, 23].

1.9.2 Критерий наибольших линейных деформаций

При использовании данного критерия пластическое деформирование пластического материала или разрушение хрупкого материала наступает при достижении наибольшей по модулю линейной деформацией удлинения предельного значения ϵ_* . Предельная поверхность при этом имеет вид четырехгранной призмы в пространстве главных напряжений.

Данный критерий не получил большого распространения и имеет на практике достаточно нишевые области применения в тех задачах, которые так или иначе сводятся к плоскому деформированному состоянию [26].

1.9.3 Критерий Треска

Критерий Треска основывается на наибольших касательных напряжениях. При использовании данного критерия пластическое деформирование пластического материала или разрушение хрупкого материала наступает при достижении наибольшим касательным напряжением предельного значения

$$\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3 > \tau_* . \quad (1.42)$$

Предельная поверхность для критерия Треска имеет в пространстве главных напряжений вид шестигранной призмы, равнонаклонённой к осям координат.

Критерий Треска удовлетворительно описывает пластическое деформирование металлов. Разрушения хрупких материалов данный критерий описывает не очень хорошо. Таким образом, области срабатывания данного критерия можно рассматривать как области потенциального разрушения для материалов, для которых свойственно пластическое разрушение сдвигом.

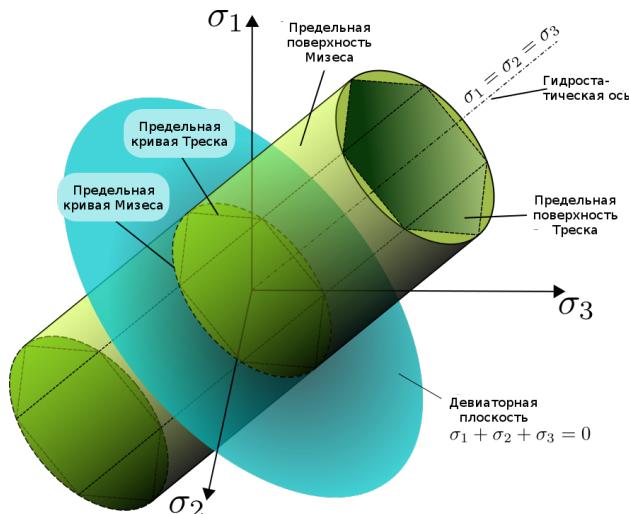


Рисунок 3 — Предельные поверхности для критерия Треска и критерия Мизеса.

1.9.4 Критерий Мизеса

Критерий Мизеса основывается на максимальной удельной энергии изменения формы. В случае линейной упругости полная удельная энергия деформированного тела представляется в виде суммы удельной энергии

изменения объема и удельной энергии изменения формы. По определению критерия Мизеса пластическое деформирование пластического материала или разрушение хрупкого материала наступает при достижении удельной энергией изменения формы определенного значения.

Математически критерий Мизеса выражается через девиатор тензора напряжений:

$$J_2 \geq k^2, \quad (1.43)$$

где J_2 - второй инвариант девиатора, а k - предел текучести на сдвиг. Отсюда следует простая запись критерия Мизеса через компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} k^2 \leq J_2 &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} = -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 = \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Или через главные напряжения:

$$k^2 \leq \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.45)$$

Величина эквивалентного напряжения (напряжение Мизеса) в этом случае имеет вид:

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}. \quad (1.46)$$

Предельная поверхность для критерия Мизеса имеет в пространстве главных напряжений вид цилиндра, равнонаклонённого к осям координат. Внутрь цилиндра вписана шестигранная призма, соответствующая критерию Треска. Максимальное различие критериев соответствует максимальному расстоянию между окружностью и вписанным в нее шестиугольником

$$\frac{\delta}{R} = \frac{R(1 - \cos(\pi/6))}{R} = 0.134. \quad (1.47)$$

Таким образом, для решения технических задач критерии Мизеса и Треска можно считать эквивалентными. Принципиально, что критерии Мизеса и

Треска зависят только от девиатора тензора напряжений, но не зависят от гидростатической части тензора.

Критерий Мизеса, так же как и критерий Треска, удовлетворительно описывает разрушение пластических материалов сдвигом и переход пластических материалов в состояние пластического течения. Из двух близких критериев - Мизеса и Треска - в дальнейшем используется критерий Мизеса, так как его удобнее реализовывать численно.

1.9.5 Критерий Мора

Критерий Мора сформулирован для материалов, обладающих разными пределами прочности при сжатии и при растяжении. Критерий учитывает как нормальные, так и касательные напряжения.

В основе критерия Мора лежит теория сухого трения Кулона. Критерий Мора основан на предположении, что разрушение возникает вследствие возникновения внутреннего скольжения в среде. Критерий предполагает, что скольжение возникает на площадках, проходящих через ось σ_2 в пространстве главных напряжений. Также предполагается, что напряжение σ_2 не влияет на возникновение скольжения, поэтому возникновение скольжения полностью описывается максимальным и минимальным главными напряжениями σ_1 и σ_3 . При этом если внутреннее скольжение возникает на некоторой площадке, то на нее действуют предельные нормальное и касательное напряжения σ_n и τ_n , причем значение τ_n зависит от σ_n . Таким образом, в соответствии с критерием Мора, пластическое течение или хрупкое разрушение материала наступает тогда, когда касательное напряжение в плоскости скольжения увеличивается до определенного значения, зависящего от нормального напряжения в той же плоскости.

Математическая формулировка критерия Мора:

$$\tau_n = \sigma_n \tan(\phi) + c, \quad (1.48)$$

где σ_n - нормальное напряжение, τ_n - касательное напряжение, ϕ - угол внутреннего трения, c - коэффициент когезии. Нетрудно заметить, что при $\phi = 0$ критерий Мора переходит в критерий Треска.

При этом

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_m - \tau_m \sin \phi, \\ \tau &= \tau_m \cos \phi,\end{aligned}\tag{1.49}$$

где

$$\begin{aligned}\tau_m &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\end{aligned}\tag{1.50}$$

Таким образом, критерий может быть альтернативно записан в форме:

$$\tau_m = \sigma_m \sin \phi + c \cos \phi.\tag{1.51}$$

В трехмерном случае критерий имеет более сложный вид:

$$\begin{aligned}\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} &= \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right] \sin(\phi) + c \cos(\phi) \\ \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} &= \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right] \sin(\phi) + c \cos(\phi) \\ \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} &= \left[\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right] \sin(\phi) + c \cos(\phi)\end{aligned}\tag{1.52}$$

Предельная поверхность в этом случае в пространстве главных напряжений имеет вид конуса, сечение которого девиаторными плоскостями представляют собой шестиугольники.

Математическая формулировка по-прежнему имеет вид (1.48), но τ_n и σ_n теперь имеют смысл нормального и касательного напряжения к некоторой произвольной площадке в трехмерном пространстве.

Если рассматриваемая площадка задана нормалью

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3,\tag{1.53}$$

где \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ - ортонормированный базис, то напряжение, действующее

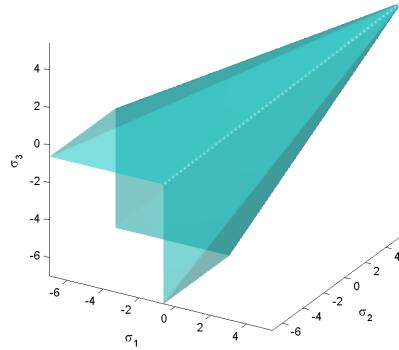


Рисунок 4 — Предельная поверхность для критерия Мора с параметрами $c = 2, \phi = -\pi/9$.

на площадку, имеет вид

$$\mathbf{t} = n_i \sigma_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (1.54)$$

Величина напряжения очевидно

$$|\mathbf{t}| = \sqrt{(n_j \sigma_{1j})^2 + (n_k \sigma_{2k})^2 + (n_l \sigma_{3l})^2}, \quad (1.55)$$

а нормальная составляющая

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = n_i \sigma_{ij} n_j. \quad (1.56)$$

В этом случае касательная составляющая выражается как

$$\tau = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma^2} \quad (1.57)$$

В покомпонентной записи получаем:

$$\begin{aligned} \sigma &= n_1^2 \sigma_{11} + n_2^2 \sigma_{22} + n_3^2 \sigma_{33} + 2(n_1 n_2 \sigma_{12} + n_2 n_3 \sigma_{23} + n_3 n_1 \sigma_{31}), \\ \tau &= ((n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} + n_3 \sigma_{31})^2 + (n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{23})^2 + \\ &\quad + (n_1 \sigma_{31} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33})^2 - \sigma^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Если базисные векторы $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ сонаправлены с главными напря-

жениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то получаем окончательное выражение в виде

$$\begin{aligned}\sigma &= n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2 + n_3^2\sigma_3, \\ \tau &= \sqrt{(n_1\sigma_1)^2 + (n_2\sigma_2)^2 + (n_3\sigma_3)^2 - \sigma^2} = \\ &= \sqrt{n_1^2n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2n_3^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2n_1^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}\quad (1.59)$$

1.9.6 Критерий Друкера-Прагера

Критерий Друкера-Прагера задается следующей формулой:

$$\sqrt{J_2} = A + B I_1, \quad (1.60)$$

где I_1 — первый инвариант тензора напряжений, а J_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений. Константы A, B определяются экспериментально.

С эквивалентным напряжением Мизеса и с гидростатической частью тензора критерий Друкера-Прагера связан следующим соотношением

$$\sigma_e = a + b p, \quad (1.61)$$

где σ_e — эквивалентное напряжение Мизеса, p — гидростатическое напряжение, a, b - константы материала.

Через главные напряжения критерий может быть выражен следующим образом:

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (1.62)$$

При этом для случая одноосного растяжения получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_t = A + B \sigma_t, \quad (1.63)$$

а для одноосного сжатия:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_c = A - B \sigma_c. \quad (1.64)$$

Из этих уравнений следует связь параметров A, B с пределами прочности при одноосном сжатии и одноосном растяжении:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} \right),$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sigma_c + \sigma_t} \right). \quad (1.65)$$

Предельная поверхность Друкера-Прагера представляет собой сглаженный вариант предельной поверхности Мора.

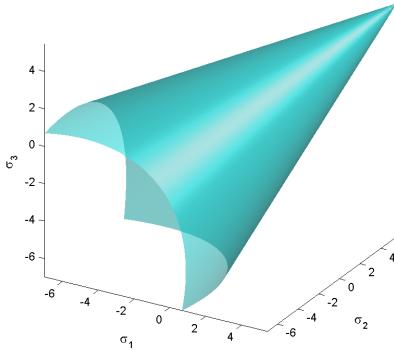


Рисунок 5 — Предельная поверхность для критерия Друкера-Прагера с параметрами $c = 2, \phi = -\pi/9$.

Если поверхность Друкера-Прагера описывает поверхность Мора, то связь коэффициентов A, B с коэффициентом когезии и углом внутреннего трения имеет вид

$$A = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)},$$

$$B = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}. \quad (1.66)$$

Если поверхность Друкера-Прагера вписана в поверхность Мора, то

уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \\ B &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

В более сложных случаях критерий может иметь второй порядок относительно инварианта I_1 и, соответственно, гидростатической части тензора:

$$J_2 = (A + B I_1)^2 = a + b I_1 + c I_1^2 \quad (1.68)$$

1.9.7 Адгезионная прочность

Отдельное место среди критериев разрушения занимает адгезионная прочность. Если все рассмотренные ранее критерии описывают разрушение изотропного материала, то адгезионная прочность относится к разрушению контакта между телами (или областями одного тела). Адгезионная прочность описывает такие явления как разделение слоев композита или выдергивание волокон из матрицы композита.

Критерий разрушения контакта строится аналогично рассмотренным критериям наибольших нормальных и касательных напряжений. Только рассматриваются теперь напряжения не в объеме материала, а на контактной границе границе.

Глава 2

Численный метод

Перед тем, как перейти к исследованию полной задачи (1.7) в трёхмерной постановке, рассмотрим одномерное уравнение вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0. \quad (2.1)$$

2.1 Решение одномерной задачи

2.1.1 Гиперболические свойства системы уравнений

Если матрица \mathbf{A} имеет полный набор вещественных собственных значений, то такое уравнение называется гиперболическим, и его решения соответствуют процессам, которые носят волновой характер [5, 6, 9]. Спектральное исследование матриц \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z проведено в [4], где показано, что для них существует полный набор собственных значений и собственных векторов.

В этом случае для любой из матриц \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{A}_z существует разложение:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – матрица, строки которой $\vec{\omega}_i^T$ являются собственными для матрицы \mathbf{A} и удовлетворяют соотношениям

$$\vec{\omega}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \vec{\omega}_i^T \quad (2.3)$$

или, что то же самое, транспонированные строки $\boldsymbol{\Omega}$ являются собственными векторами для матрицы \mathbf{A}^T

$$\mathbf{A}^T \vec{\omega}_i = \lambda_i \vec{\omega}_i. \quad (2.4)$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda} = diag\{\lambda_i\}$ – диагональная матрица соответствующих собственных значений.

Домножив уравнение (2.1) слева на $\boldsymbol{\Omega}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \vec{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \vec{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

которое после перехода к инвариантам Римана $\vec{v} = \Omega \vec{u}$ приобретает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

и тем самым распадается на n одномерных уравнений вида

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) представляется в виде суммы плоских волн, движущихся со скоростями λ_i .

2.1.2 Сеточно-характеристический метод

После перехода к инвариантам Римана получено 9 независимых уравнений переноса вида (2.7) [1]. Рассмотрим уравнение такого вида подробнее. Вдоль характеристических кривых Γ , таких что

$$\frac{dx}{dt} = \lambda, \quad (2.8)$$

уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{dv_i}{dt} = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, значения инвариантов Римана переносятся с временного слоя n на временной слой $n+1$ вдоль характеристических кривых Γ . При этом очевидно, что значения λ_i будут разные в зависимости от вида матрицы \mathbf{A} , который определяется используемыми реологическими соотношениями.

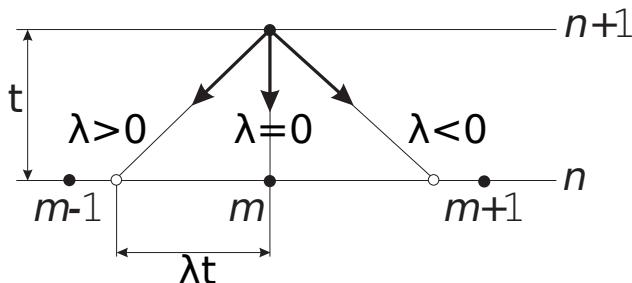


Рисунок 6 — Принципиальная схема сеточно-характеристического метода.

Алгоритм поиска значений исходных переменных \vec{u} в некоторой точке

x_m^{n+1} на новом временном слое состоит в следующем. Сначала для матрицы \mathbf{A} необходимо найти собственные числа λ_i , которые определяют наклон характеристик (2.8), выпущенных из точки x_m^{n+1} . После этого для каждой характеристики Γ_i можно определить точку x_{i*}^n пересечения с временным слоем n .

В точке x_{i*}^n тем или иным способом определяются значения переменных \vec{u}_{i*}^n . Способы реконструкции могут быть различными, в данной работе используется интерполяция по сеточному шаблону на предыдущем временном слое (подробнее см. ниже). По найденным значениям \vec{u}_{i*}^n вычисляется i -ый инвариант Римана v_{i*}^n в точке x_{i*}^n . Значение инварианта вдоль Γ_i будет перенесено в точку x_m^{n+1} на новом временном слое:

$$v_{im}^{n+1} = v_{i*}^n. \quad (2.10)$$

После того, как в точке x_m^{n+1} описанным образом найдены все 9 инвариантов Римана, можно найти в ней исходные переменные \vec{u} . Так как по определению $\vec{v} = \Omega \vec{u}$, то

$$\vec{u}_m^{n+1} = \Omega^{-1} \vec{v}_*^n, \quad (2.11)$$

где \vec{v}_*^n – вектор, составленный из значений v_{i*}^n , подсчитанных в соответствующих точках на временном слое n . Как описано выше, точки, из которых берутся разные компоненты этого вектора, различны.

2.1.3 Разностные схемы для структурированных сеток

При использовании структурированных прямоугольных сеток для уравнения (2.1) выполняются описанные математические преобразования, приводящие к 9 одномерным уравнениям для инвариантов Римана. После этого для решения каждого из полученных независимых уравнений используется та или иная известная разностная схема на структурированной сетке.

Схема Куранта-Изаксона-Рис. Данная схема строится на трёхточечном сеточном шаблоне $(m-1, m, m+1)$ и позволяет явно выразить значение u_m^{n+1} на новом временном слое:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} \Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega (u_{m+1}^n - u_m^n) - \frac{\tau}{h} \Omega^{-1} \Lambda^- \Omega (u_m^n - u_{m-1}^n). \quad (2.12)$$

Схема обладает первым порядком аппроксимации по времени и пространству $O(h, \tau)$, является монотонной и обеспечивает минимальное размытие волнового фронта среди всех схем первого порядка [6].

Схема Лакса-Вендрофа. Данная схема является единственной схемой второго порядка точности на шаблоне $(m-1, m, m+1)$. Схема записывается в виде:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{2h} A(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \frac{\tau^2}{2h^2} A^2(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n). \quad (2.13)$$

Так как схема имеет второй порядок аппроксимации, она обеспечивает более точное воспроизведение формы волнового фронта по сравнению со схемами первого порядка. Однако, она не является монотонной, что приводит к появлению нефизичных численных осцилляций на разрывах точного решения.

Гибридная схема. Для сочетания достоинств и преодоления недостатков обеих схем используется гибридная схема [8], являющаяся их линейной комбинацией. Гибридная схема имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = & u_m^n - \frac{\tau}{2h} A(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \\ & + \frac{1}{2}((1-a)\frac{\tau}{h}\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega + a\frac{\tau^2}{h^2}A^2)(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При $a = 0$ схема переходит в схему Куранта-Изаксона-Рис и имеет первый порядок аппроксимации. При $a = 1$ схема переходит в схему Лакса-Вендрофа и имеет второй порядок аппроксимации. Если параметр a выбирается фиксированно из диапазона $0 < a < 1$, то схема называется гибридизированной, а полученной численное решение является некоторым усреднением решений первого и второго порядка. Схема называется гибридной, если значение a выбирается независимо в каждой точке сетки на каждом временном шаге в зависимости от локальных свойств численного решения.

В данной работе использовался критерий переключения опорных схем, предложенный Р.П. Федоренко и основанный на локальной гладкости ре-

шения:

$$\frac{(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)}{2} \leq K \frac{(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2}. \quad (2.15)$$

Параметр переключения K подбирается в зависимости от задачи. В данной работе использовалось значение $K = 0.5$. Если условие (2.15) не выполнено, решение считается разрывным и параметр a принимает в данной точке значение 0. Если условие (2.15) выполнено – параметр принимает значение 1.

В результате применения такого подхода гладкие участки решения считаются схемой второго порядка, а разрывные – схемой первого порядка. Гибридная схема позволяет получить минимальное размытие точного решения, но при этом избежать нефизичных осцилляций на разрывных решениях. На рис. 7 приведение сравнение схемы первого порядка, второго порядка, гибридной схемы и точного решения. Приведено решение задачи о распространении прямоугольного импульса нагрузки в однородной среде. Ширина импульса составляет 40 узлов сетки, к моменту, изображённому на рисунке, импульс прошел 200 узлов сетки от первоначального положения.

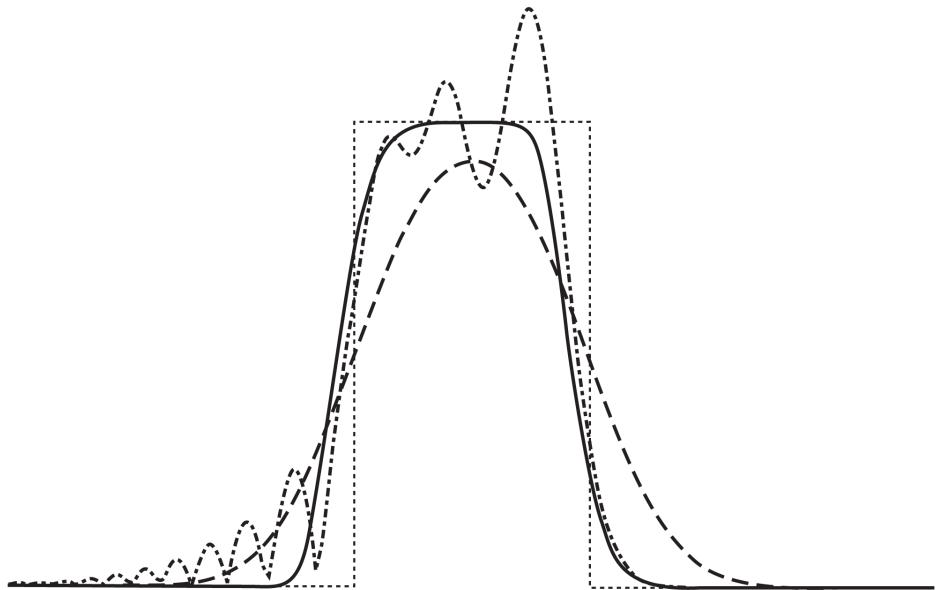
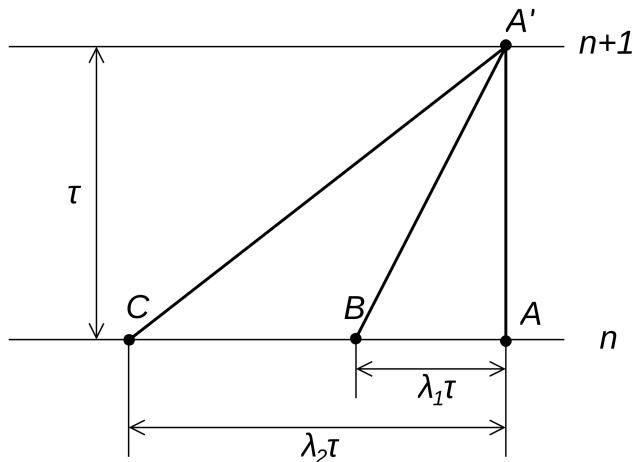


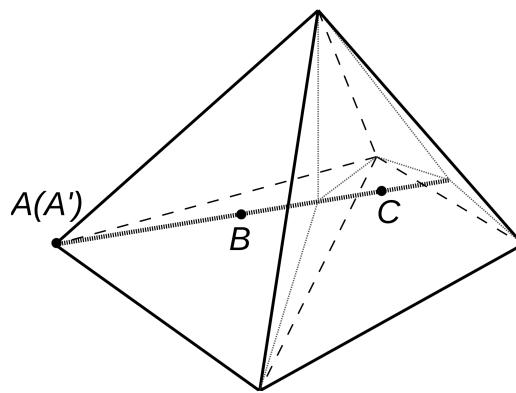
Рисунок 7 — Распространение прямоугольного импульса. Штриховая линия – решение по схеме Куранта-Изаксона-Рис. Штрих-пунктирная линия – решение по схеме Лакса-Вендрофа. Сплошная линия – решение с использованием гибридной схемы. Точками показано точное решение.

2.1.4 Метод на неструктурированных сетках

Идея сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках также основана на переносе инвариантов Римана вдоль направления характеристик [6]. В ходе расчёта для каждой характеристики, выпущенной из точки на новом временном слое, по углу наклона λ и шагу по времени τ определяется ячейка сетки на старом временном слое, в который попала данная характеристика. Простейшей формой ячейки неструктурированной сетки для двумерной постановки является треугольник, а для трёхмерной – тетраэдр. В дальнейшем изложении будем ориентироваться на сетки из тетраэдров (рис. 8).



(a) Расчет внутреннего узла. Все характеристики, выходящие из узла на новом временном слое, попадают внутрь области. Под точками на временных слоях n и $n + 1$ подразумеваются точки в трехмерном пространстве.



(б) Расчет внутреннего узла. Положение необходимых точек в тетраэдрах при неподвижной сетке.

Рисунок 8 — Характеристики на неструктурированной сетке.

После того, как определён тетраэдр, в который попала характеристика, необходимо восстановить значение в точке пересечения характеристики со старым времененным слоем. Для этого используется интерполяция значений в нужной точке по рассматриваемому тетраэдру. Подход к построению интерполяции высоких порядков на неструктурированных тетраэдральных сетках описан в работе Петрова И.Б. и Фаворской А.В. [28]. Здесь описывается конструирование схемы интерполяции, непосредственно использующейся в данной работе.

Пусть искомая функция, задающая распределение в тетраэдре, является полиномом заданной степени N . Для линейной интерполяции (первый порядок точности по пространству) потребуется восстановить четыре коэффициента: постоянный член и множители перед x, y, z . Для квадратичной – десять: те же четыре плюс еще шесть коэффициента перед $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$. Для общего случая полинома степени N количество коэффициентов в нем задается формулой $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$.

В произвольном тетраэдре $ABCD$ проведем плоскости, параллельные его сторонам, которые делят каждую из его сторон на N частей (рис. 9). Количество точек внутри тетраэдра, в которых плоскости пересекаются между собой и со сторонами тетраэдра, равно $\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$. Именно эти точки пересечения мы выберем в качестве опорных, храня в них значения полинома, используемые для восстановления его величины во всех прочих точках.

Обозначим координаты вершин тетраэдра символами $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$, а ссылаясь на опорные точки будем при помощи r_{abcd} . Индекс состоит из четырёх частей, каждая из которых описывает место пересечения плоскости, проходящей через опорную точку и параллельной определённой стороне, с соответствующим ребром тетраэдра (рис. 9). Для индексов любой опорной точки справедливо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, a + b + c + d = N$.

Координаты опорной точки r_{abcd} могут быть выражены через координаты вершин тетраэдра с использованием любой тройки индексов из четырех, достаточно взять систему координат с центром в одной из вершин и осями, проходящими через 3 другие.

Пусть необходимо реконструировать значение функции в произвольной точке \vec{r} (обозначим её буквой F), которая может находиться как внутри

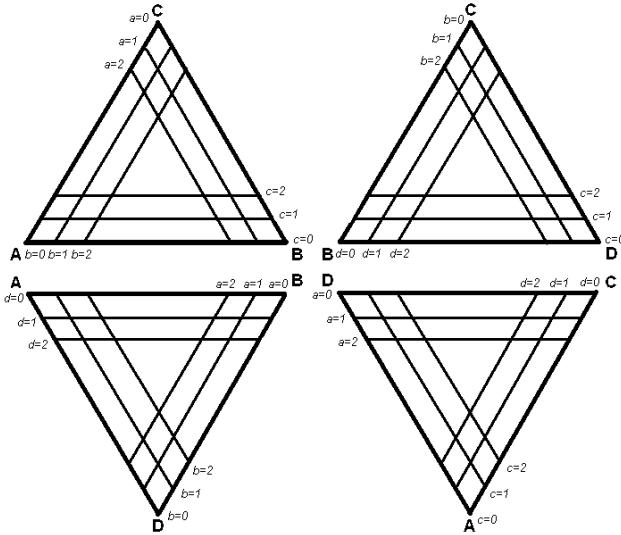


Рисунок 9 — Равномерное распределение опорных точек в тетраэдре (изображены стороны тетраэдра с проекциями плоскостей и их нумерацией).

тетраэдра, так и за его пределами. Введём в рассмотрение объёмы четырёх тетраэдров, которые формируются гранями исходного тетраэдра $ABCD$ и отрезками, соединяющими его вершины с точкой F .

Обозначим V_i площадь того тетраэдра, одной из граней которого является грань исходного тетраэдра $ABCD$, противоположная его вершине i . Если \vec{r} лежит внутри $ABCD$, то все четыре объёма V_i положительны, в противном случае один или два «объёма» могут быть отрицательными. Но даже в этом случае, независимо от положения \vec{r} , их сумма будет равна объёму тетраэдра $ABCD$. Введём также относительные объёмы тех же тетраэдров $\nu_i = V_i/V$, где V – объём тетраэдра $ABCD$. Величины этих объёмов для точки \vec{r} , лежащей внутри $ABCD$, могут изменяться от нуля до единицы.

Значение функции в искомой точке $\phi(\vec{r})$ необходимо выразить через значения $\phi_{abcd} = \phi(r_{abcd})$, которые она принимает в опорных точках:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{a,b,c,d} w_{abcd}(\vec{r}) \phi_{abcd}, \quad (2.16)$$

где $w_{abcd}(\vec{r})$ – вес опорной точки r_{abcd} , также являющейся полиномом степени N . Вес обращается в единицу в одной опорной точке и в ноль во всех остальных опорных точках. Следующая функция веса удовлетворяет

поставленным условиям:

$$w_{abcd}(\vec{r}) = \frac{\prod_{i=1}^N \nu_{T_i}(r) - \frac{n_i}{N}}{\prod_{i=1}^N \nu_{T_i}(r_{abcd}) - \frac{n_i}{N}}, \text{ где } T_i \in \{A, B, C, D\}, 0 \leq n_i \leq N \quad (2.17)$$

при условии правильного подбора величин T_i, n_i . Принципиально, что если индексы двух опорных точек совпадают с точностью до перестановки, то функции их весов совпадают с точностью до той же перестановки величин в T_i .

Интерполяция первого порядка. Опорные точки для линейной интерполяции – $r_{1000}, r_{0100}, r_{0010}, r_{0001}$ (рис. 10).

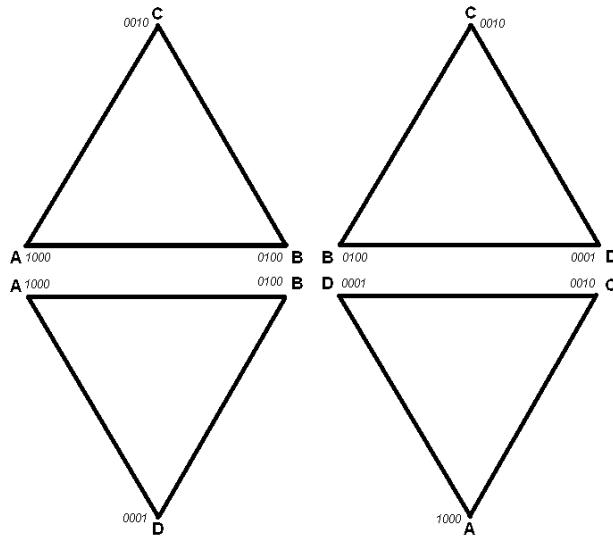


Рисунок 10 — Опорные точки для интерполяции первого порядка.

Найдём $w_{1000}(r)$ (рис. 11):

$$w_{1000}(r) = \frac{\nu_{T_1}(r) - n_1}{\nu_{T_1}(r_{1000}) - n_1}. \quad (2.18)$$

Пусть $r = r_{0001}$. Подбираем T_1 и n_1 :

$$0 = \frac{\nu_{T_1}(r_{0001}) - n_1}{\nu_{T_1}(r_{1000}) - n_1} = \frac{\nu_A(r_{0001}) - n_1}{\nu_A(r_{1000}) - n_1} = \frac{0 - n_1}{1 - n_1} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = \nu_A(r_{0001}). \quad (2.19)$$

Выполнив аналогичную процедуру для остальных весов, получаем:

$$\begin{aligned} w_{1000}(r) &= \nu_A(r) & w_{0100}(r) &= \nu_B(r), \\ w_{0010}(r) &= \nu_C(r) & w_{0001}(r) &= \nu_D(r). \end{aligned} \quad (2.20)$$

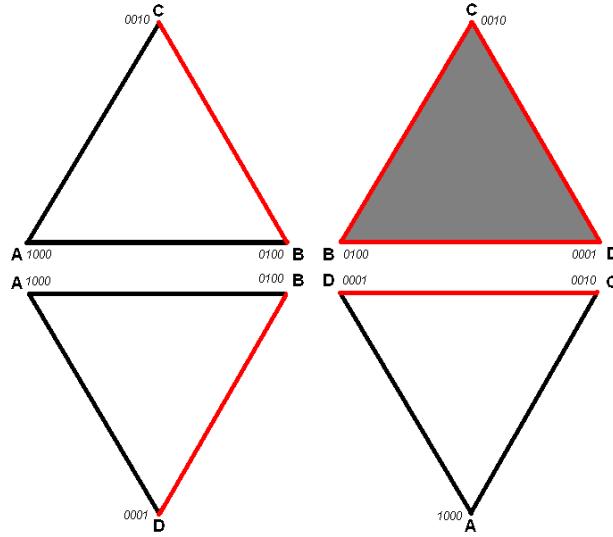


Рисунок 11 — К вычислению весов для интерполяции первого порядка.

Интерполяция второго порядка. Опорные точки для квадратичной интерполяции — $r_{2000}, r_{0200}, r_{0020}, r_{0002}, r_{1100}, r_{0110}, r_{0011}, r_{1001}, r_{1010}, r_{0101}$ (рис. 12).

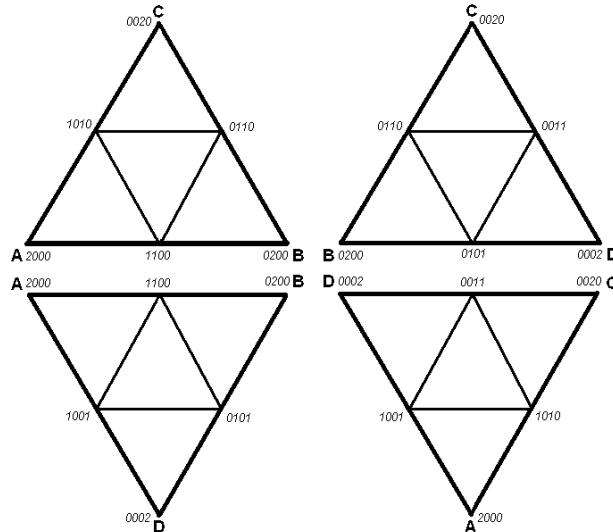


Рисунок 12 — Опорные точки для интерполяции второго порядка.

Найдём $w_{2000}(r)$:

$$w_{2000}(r) = \frac{\nu_{T_1}(r) - \frac{n_1}{2}}{\nu_{T_1}(r_{2000}) - \frac{n_1}{2}} \frac{\nu_{T_2}(r) - \frac{n_2}{2}}{\nu_{T_2}(r_{2000}) - \frac{n_2}{2}}. \quad (2.21)$$

Пусть $r = r_{0002}$. Подбираем T_1 и n_1 (см. рис. 13а).

$$0 = \frac{\nu_{T_1}(r_{0002}) - \frac{n_1}{2}}{\nu_{T_1}(r_{2000}) - \frac{n_1}{2}} = \frac{\nu_A(r_{0002}) - \frac{n_1}{2}}{\nu_A(r_{2000}) - \frac{n_1}{2}} = \frac{0 - \frac{n_1}{2}}{1 - \frac{n_1}{2}} = \frac{0 - \frac{0}{2}}{1 - \frac{0}{2}} = \nu_A(r_{0002}). \quad (2.22)$$

Таким образом, первый множитель $\nu_A(r)$.

Пусть $r = r_{1100}$. Подбираем T_2 и n_2 (см. рис. 13б).

$$0 = \frac{\nu_{T_2}(r_{1100}) - \frac{n_2}{2}}{\nu_{T_2}(r_{2000}) - \frac{n_2}{2}} = \frac{\nu_A(r_{1100}) - \frac{n_2}{2}}{\nu_A(r_{2000}) - \frac{n_2}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{n_2}{2}}{1 - \frac{n_2}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\nu_A(r_{1100}) - 1. \quad (2.23)$$

Таким образом, второй множитель $2\nu_A(r) - 1$.

Итого для веса $w_{2000}(r)$ получаем $w_{2000}(r) = \nu_A(r)(2\nu_A(r) - 1)$. Остальные веса вершин тетраэдра получаются перестановкой индексов в данной формуле.

Найдём $w_{1100}(r)$:

$$w_{1100}(r) = \frac{\nu_{T_1}(r) - \frac{n_1}{2}}{\nu_{T_1}(r_{1100}) - \frac{n_1}{2}} \frac{\nu_{T_2}(r) - \frac{n_2}{2}}{\nu_{T_2}(r_{1100}) - \frac{n_2}{2}}. \quad (2.24)$$

Пусть $r = r_{0002}$. Подбираем T_1 и n_1 (см. рис. 13в).

$$0 = \frac{\nu_{T_1}(r_{0002}) - \frac{n_1}{2}}{\nu_{T_2}(r_{1100}) - \frac{n_1}{2}} = \frac{\nu_A(r_{0002}) - \frac{n_1}{2}}{\nu_A(r_{1100}) - \frac{n_1}{2}} = \frac{0 - \frac{n_1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{n_1}{2}} = \frac{0 - \frac{0}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{0}{2}} = 2\nu_A(r_{0002}). \quad (2.25)$$

Таким образом, первый множитель $2\nu_A(r)$.

Пусть $r = r_{2000}$. Подбираем T_2 и n_2 (см. рис. 13г).

$$0 = \frac{\nu_{T_2}(r_{2000}) - \frac{n_2}{2}}{\nu_{T_2}(r_{1100}) - \frac{n_2}{2}} = \frac{\nu_B(r_{2000}) - \frac{n_2}{2}}{\nu_B(r_{1100}) - \frac{n_2}{2}} = \frac{0 - \frac{n_2}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{n_2}{2}} = \frac{0 - \frac{0}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{0}{2}} = 2\nu_B(r_{2000}). \quad (2.26)$$

Таким образом, второй множитель $2\nu_B(r)$.

Итого для веса $w_{1100}(r)$ получаем $w_{1100}(r) = 4\nu_A(r)\nu_B(r)$. Остальные веса дополнительных вершин получаются перестановкой индексов в данной формуле.

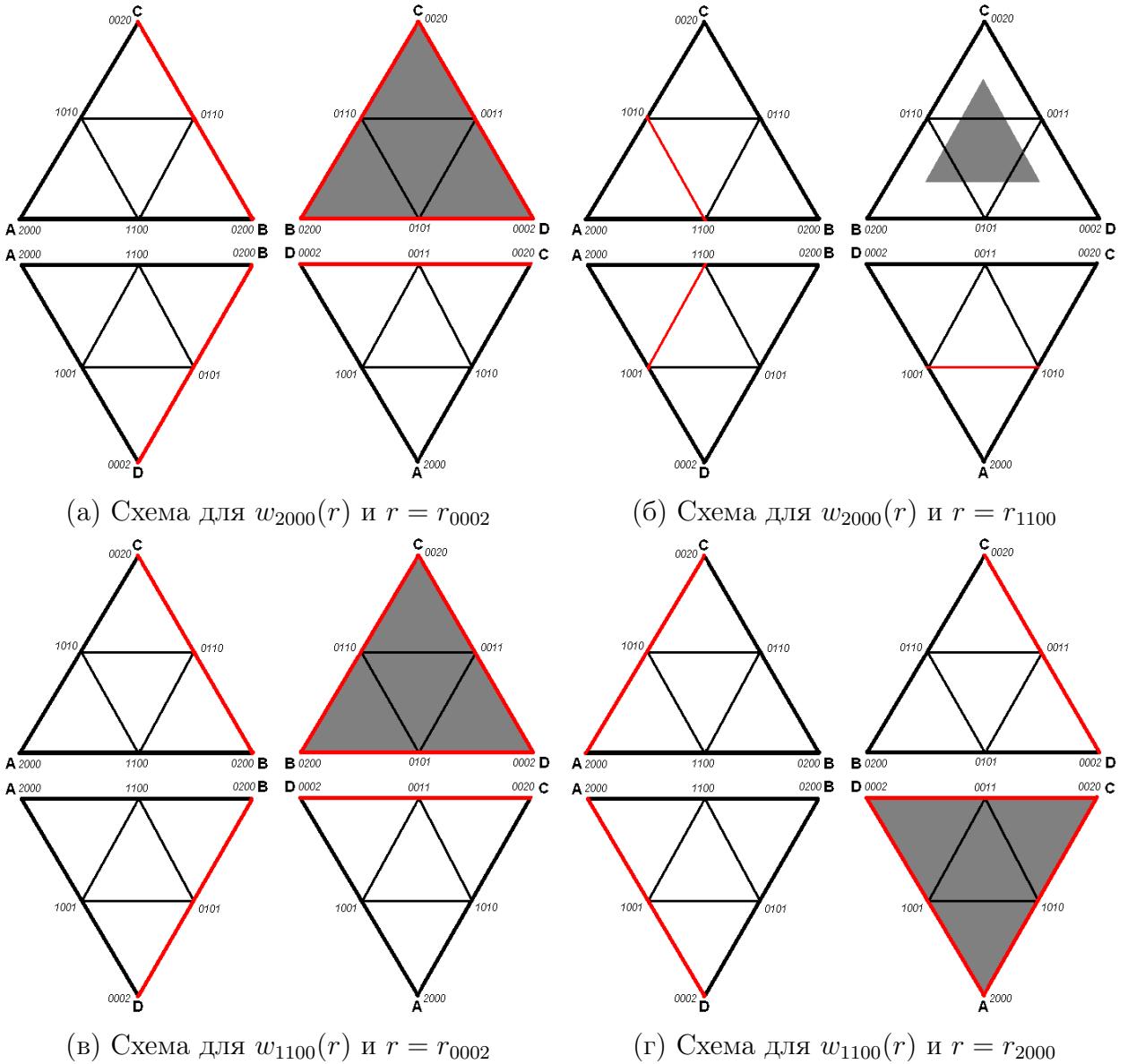


Рисунок 13 — К вычислению весов для интерполяции второго порядка.

Итоговые веса для интерполяции второго порядка:

$$\begin{aligned}
 w_{2000}(r) &= \nu_A(r)(2\nu_A(r) - 1) & w_{0200}(r) &= \nu_B(r)(2\nu_B(r) - 1), \\
 w_{0020}(r) &= \nu_C(r)(2\nu_C(r) - 1) & w_{0002}(r) &= \nu_D(r)(2\nu_D(r) - 1), \\
 w_{1100}(r) &= 4\nu_A(r)\nu_B(r) & w_{0110}(r) &= 4\nu_B(r)\nu_C(r), \\
 w_{0011}(r) &= 4\nu_C(r)\nu_D(r) & w_{1001}(r) &= 4\nu_D(r)\nu_A(r), \\
 w_{1010}(r) &= 4\nu_A(r)\nu_C(r) & w_{0101}(r) &= 4\nu_B(r)\nu_D(r). \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

Интерполяция более высоких порядков. Формулы для интерполяции более высоких порядков строятся аналогично. В данной работе используются схемы первого и второго порядка, поэтому вывод для более высоких

порядков не приводится.

Гибридизация схемы. Гибридная схема на неструктурированной сетке строится принципиально так же, как для структурированной. Используются две опорные схемы – разобранные выше схемы с интерполяцией первого и второго порядка. В зависимости от локальной гладкости численного решения происходит переключение между схемами – на гладких участках используется схема второго порядка, в области разрывов происходит переключение на схему первого порядка [32, 34].

2.1.5 Расчёт граничных узлов

Описанный метод подходит для расчёта внутренних узлов сетки, т.е. только в том случае, если все характеристики, выпущенные из узла, не выводят за пределы области интегрирования. В случае, когда узел находится на границе расчётной области, применяется иной подход для решения задачи. Рассматриваемая система уравнений в граничных узлах области интегрирования имеет ровно три [4] выводящие характеристики. Поэтому для корректной постановки задачи требуется задание граничных условий для каждого внешнего узла сетки в количестве, равном числу выводящих характеристик.

Границные условия могут быть различными. В данной работе используется ряд граничных условий.

Свободная граница:

$$\sigma_\tau = \sigma_n = 0. \quad (2.28)$$

Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжение в граничной точке.

Заданная внешняя сила:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= \sigma_{\tau 0}, \\ \sigma_n &= \sigma_{n0} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь σ_{n0} и $\sigma_{\tau 0}$ – заданные извне нормальное и тангенциальное напряжение в граничной точке.

Заданная скорость границы:

$$\vec{v} = \vec{v}_0. \quad (2.30)$$

Здесь \vec{v}_0 – заданный извне вектор скорости в точке границы.

2.1.6 Расчёт контактных узлов

Расчёт контактной границы между двумя телами в целом аналогичен расчёту границы тела. Однако, в точке контакта присутствуют два узла – по одному из каждого контактирующего тела. В каждом из них 6 уравнений исходной системы корректны, а 3 несовместны, так как соответствуют выводящим характеристикам [61, 65].

Так как тела контактируют, для значений функции в двух рассматриваемых узлах есть уравнений связей. Уравнения связей должны задавать 6 условий, чтобы компенсировать 3 несовместные уравнения в каждом узле. В результате получается система из 18 уравнений (6 у каждого узла и 6 уравнений связей) с 18 неизвестными (по 9 в каждом узле). Решая эту систему, получаем согласованные значения функции в обоих контактирующих узлах. Уравнения связей могут быть различными, задавая различные условия контакта [63, 64].

В данной работе используется ряд контактных условий.

Скольжение тел друг относительно друга:

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ \sigma_n &= \tilde{\sigma}_n, \\ \sigma_\tau &= \tilde{\sigma}_\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжение в граничной точке. Символы с чертой относятся к первому телу, без черты – ко второму.

Слипание тел:

$$\begin{aligned} v_n &= \tilde{v}_n, \\ v_\tau &= \tilde{v}_\tau. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2 Решение многомерной задачи

2.2.1 Схема с расщеплением по направлениям

Система (1.7) (или что то же самое (1.17)) позволяет построить схему для решения трёхмерной задачи, если построены и исследованы одномерные схемы для задач:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_{\xi_j} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_j} = 0. \quad (2.33)$$

Такой подход называется расщеплением по направлениям и был предложен Р.П. Федоренко [8]. Идея метода решения исходной задачи состоит в замене исходной системы уравнений (1.7) одномерными системами – тремя в случае отсутствия в исходной системе правой части и четырьмя, если правая часть имеется:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = \vec{f}. \quad (2.37)$$

Обозначим $F(\mathbf{A}_{\xi_1}, \mathbf{A}_{\xi_2}, \mathbf{A}_{\xi_3}, \vec{f})$ оператор перехода между временными слоями n и $n+1$, а $F_j(\mathbf{A}_{\xi_j}), j = 1..3$ и $F_4(\vec{f})$, $j = 4$ – оператор, соответствующий j -ому уравнению в расщеплённой системе.

Необходимо сконструировать оператор F из операторов $f_j, j = 1..4$, обеспечив при этом аппроксимацию и устойчивость итоговой схемы, а также приемлемую вычислительную сложность алгоритма при его реализации.

Как разобрано выше, для каждой одномерной задачи существует ограничение на шаг по времени

$$\tau_j \leq \frac{\min(h)}{\max(|\lambda_j|)}, \quad (2.38)$$

где $\min(h)$ – минимальная высота тетраэдра в сетке, а $\max(|\lambda_j|)$ – максимальное по модулю собственное число матрицы \mathbf{A}_{ξ_j} . Теоретически, в этом соотношении можно заменить $\min(h)$ на $\min(h_j)$ – минимальное расстояние

в направлении j -ой оси координат от узла сетки до точки пересечения с ближайшей гранью соседнего тетраэдра. Это расстояние может быть несколько больше, чем абсолютный минимум высоты по сетке $\min(h)$, и за счет этого обеспечивать несколько больший допустимый шаг по времени. Однако, на практике в силу случайной ориентации как тетраэдров сетки, так и координатных осей, потенциальное преимущество мало и не стоит того, чтобы усложнять алгоритм расчёта как логически из-за добавления новых элементов, так и вычислительно из-за необходимости постоянно определять новые точки пересечения.

При выполнении условия на τ_j схема, соответствующая оператору F_j , устойчива и имеет свой порядок аппроксимации по времени и пространству для одномерной задачи. Теперь рассмотрим различные варианты составления оператора F из F_j .

2.2.2 Схема с расщеплением первого порядка

В простейшем случае можно сложить операторы F_j с коэффициентами a_j . При таком подходе получаем:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}_{\xi_1}, \mathbf{A}_{\xi_2}, \mathbf{A}_{\xi_3}, \vec{f}) &= \sum_j a_j F_j\left(\frac{1}{a_j} \mathbf{A}_{\xi_j}\right), \\ \sum_j a_j &= 1, \\ a_j &> 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Такая схема обеспечивает первый порядок аппроксимации итогового оператора F , если в качестве F_j были выбраны схемы как минимум первого порядка. В выборе a_j присутствует определённый произвол, что позволяет использовать их для получения максимального шага по времени.

Действительно, собственные числа матриц $\mathbf{A}_{\xi_j}^* = \frac{1}{a_j} \mathbf{A}_{\xi_j}$ будут в a_j раз отличаться от собственных чисел исходных матриц \mathbf{A}_{ξ_j} . Максимально допустимый шаг по времени

$$\tau \leq \max \tau_j = \frac{\min(h)}{\max(|\lambda_j^*|)} = \frac{\min(h)a_j}{\max(|\lambda_j|)}. \tag{2.40}$$

Таким образом, для максимизации допустимого шага получаем условие:

$$\frac{a_1}{\max(|\lambda_1|)} = \frac{a_2}{\max(|\lambda_2|)} = \frac{a_3}{\max(|\lambda_3|)}. \quad (2.41)$$

Откуда следует

$$a_j = \frac{\max(|\lambda_j|)}{\max(|\lambda_1|) + \max(|\lambda_2|) + \max(|\lambda_3|)},$$

$$\tau = \frac{\min(h)}{\max(|\lambda_1|) + \max(|\lambda_2|) + \max(|\lambda_3|)} \quad (2.42)$$

Видно, что при таком конструировании расщепления получается вычислительно простой алгоритм – требуется только вычислить независимое воздействие операторов F_j на временном слое n , чтобы потом получить значение на временном слое $n+1$ как их сумму. Однако, схема обеспечивает только первый порядок аппроксимации F , даже если отдельно F_j имеют более высокий порядок. Кроме того, допустимый шаг по времени заметно уменьшается (как правило, в 3 раза, так как $\max(|\lambda_j|)$ одинаково для всех матриц \mathbf{A}_{ξ_j} .

2.2.3 Схема с расщеплением второго порядка

Для обеспечения второго порядка аппроксимации итоговой схемы необходимо операторы F_j не сложить, а перемножить

$$F(\mathbf{A}_{\xi_1}, \mathbf{A}_{\xi_2}, \mathbf{A}_{\xi_3}, \vec{f}) = F_1(\mathbf{A}_{\xi_1})F_2(\mathbf{A}_{\xi_2})F_3(\mathbf{A}_{\xi_3}). \quad (2.43)$$

С точки зрения реализации это означает, что сначала к значениям на временном слое n применяется первый оператор, потом к результату действия первого оператора – второй, к результату второго – третий. Значения, полученные после применения всех операторов, являются значениями на новом временном слое $n + 1$:

$$\vec{u}' = F_1(\mathbf{A}_{\xi_1})\vec{u}^n,$$

$$\vec{u}'' = F_2(\mathbf{A}_{\xi_2})\vec{u}',$$

$$\vec{u}^{n+1} = F_3(\mathbf{A}_{\xi_3})\vec{u}''. \quad (2.44)$$

Допустимый шаг по времени определяется минимальным допустимым

шагом по времени для схем F_j :

$$\tau = \min_j(\tau_j) = \min_j\left(\frac{\min(h)}{\max(|\lambda_j|)}\right) = \frac{\min(h)}{\max_j \max(|\lambda_j|)}. \quad (2.45)$$

Таким образом, расщепление данного вида обеспечивает второй порядок аппроксимации и не приводит к уменьшению допустимого шага по времени. Однако, если использовать схему в виде (2.43), то очевидным образом возникает несимметрия решения, так как направления координатных осей перестают быть равноправными.

Метод симметризации схемы достаточно очевиден – необходимо использовать не одно произведение операторов, которое порождает выделенные направления, а усреднять все возможные перестановки операторов F_j :

$$F(\mathbf{A}_{\xi_1}, \mathbf{A}_{\xi_2}, \mathbf{A}_{\xi_3}, \vec{f}) = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k} F_i(\mathbf{A}_{\xi_i}) F_j(\mathbf{A}_{\xi_j}) F_k(\mathbf{A}_{\xi_k}). \quad (2.46)$$

Такая схема становится симметричной, но теперь приходится считать действие операторов F_j 18 раз вместо 3 раз.

2.2.4 Схема с расщеплением и случайным выбором базиса

Альтернативным способом симметризации схемы (2.43) является случайный выбор базиса. В этом случае схема расщепления обеспечивает второй порядок аппроксимации многомерной задачи и возможность использовать большое значение τ . Случайный выбор базиса обеспечивает отсутствие выделенных направлений и симметричность решения. За счет этого на каждом временном шаге требуется вычислять только 3 оператора F_j .

Обратной стороной такого подхода, который проявляется при практической реализации метода, является тот факт, что в случайно выбранном базисе из-за изменения направлений осей постоянно меняются точки на предыдущем временном слое, в которые попадают характеристики и по которым производится реконструкция решения. В результате требуется искать эти точки заново после смены базиса на каждом шаге. Однако, при разумной организации структур данных, вычислительная сложность этой операции достаточно невелика и такой подход оказывается значительно экономичнее, чем вычисление операторов F_j дополнительные 15 раз.

2.3 Движение сетки

В случае конечных деформаций существует несколько подходов к описанию движения точек среды.

Эйлерова сетка строится однократно и в дальнейшем не изменяется. Это может быть наилучшим решением для тел с фиксированными границами. Для решения задач с конечными деформациями границ выбирают наиболее простую форму эйлеровой сетки — декартову решетку, потому что, независимо от формы ячеек, неподвижные узлы и ребра сетки не будут совпадать в каждый момент времени с движущимися границами, и неизбежны сложности, описанные для декартовых решеток.

Точки лагранжевой сетки смещаются вместе с точками тела, поэтому границы тела всегда совпадают с сеточными линиями. Однако при наличии сдвиговых деформаций в теле, ячейки лагранжевой сетки могут постепенно вырождаться и пересекать друг друга. Численные методы при вырождении сетки обнаруживают неустойчивость и счет приходится прекращать. Поэтому неизбежен подход, называемый лагранжева сетка с перестройкой, в котором, как только детектируется приближение сетки к вырожденному состоянию, производится построение новой сетки, а значения в новых узлах интерполируются из прежних значений. Процедура интерполяции сама по себе приводит к потере точности решения, поэтому желательно перестраивать сетку как можно реже. Ниже будет предложен альтернативный способ решения проблемы больших деформаций, который вместо перестроения сетки использует динамический выбор сеточного шаблона в зависимости от локальных свойств решения.

Подвижная сетка является обобщением лагранжевой, ее точки движутся от слоя к слою с ненулевыми скоростями и смещаются как относительно неподвижной системы координат, так и относительно точек тела. Их движение может быть подобрано таким образом, чтобы исключить вырождение сетки со временем. Однако использование подвижной сетки требует вносить изменения в решаемые уравнения для учета конвективных членов.

Расчет на лагранжевой сетке из тетраэдров подразумевает, что скорость смещения вершин сетки совпадает со скоростью среды. Но в методах второго порядка и выше вводятся дополнительные узлы, отличные от вершин,

движение которых задается линейной интерполяцией движений вершин тетраэдра, в котором они расположены. Даже если скорость всех вершин является лагранжевой, то узлы, не совпадающие с вершинами, смещаются относительно точек среды. Это означает, что при их расчете необходимо учитывать конвективные члены. Отличие скорости этих узлов от скорости среды невелико: $O(h^2)$, где h — мелкость сетки. Собственные значения матриц при поправке на конвекцию также изменятся на $O(h^2)$.

Отличие мест пересечения характеристики до и после поправки со слоем t^n составит $\tau O(h^h 2) = O(\tau^3)$, такого же порядка и отличие в восстанавливаемом интерполяцией решении. Поэтому в методе второго порядка можно не рассматривать отличие движения узлов в центре ребер от лагранжевых — это не понизит степень аппроксимации, а в методах третьего порядков и выше поправка необходима.

2.4 Выделение контактных границ

При взаимном движении тел, а также в задачах с конечными деформациями отдельной задачей становится построение алгоритма явного выделения контактных границ. Стандартный подход (именно он использован в этой работе) к реализации состоит из двух этапов:

- грубое (см. рис. 14) определение областей потенциально возможного контакта при помощи AABB (Axis-aligned bounding box – ограничивающий параллелепипед, выровненный по осям);
- уточнение контактирующих узлов внутри найденных областей.

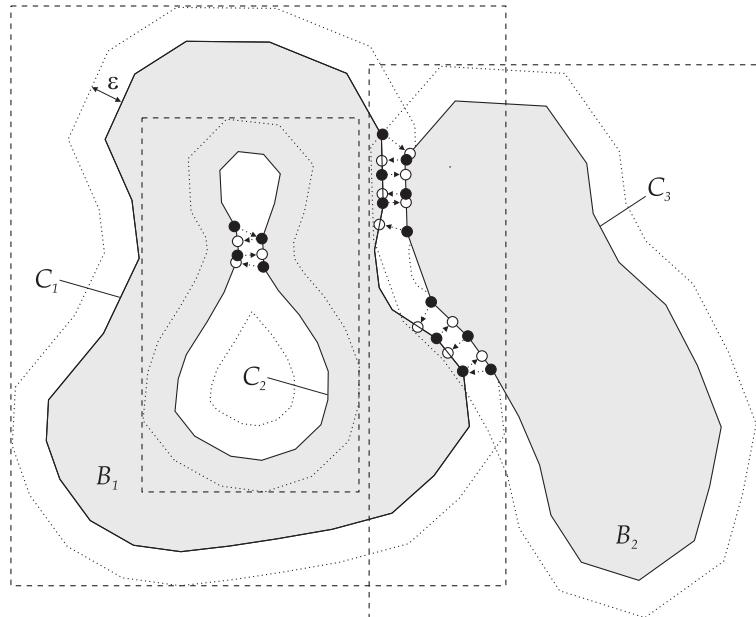


Рисунок 14 — Использование AABB для грубого определения областей контакта. На рисунке изображены тела B_1 и B_2 , а также AABB, построенные для контуров C_1 и C_2 этих тел. Контакты ищутся в пересечении разных AABB.

По пересечению AABB определяются пары «потенциально» находящихся в контакте тел. Затем для каждой найденной пары проводится уточнение зоны контакта: проверяются «на контакт» все пары узлов одного тела и треугольников поверхности другого. Пары «контактирующих» узлов и треугольников определяются полным перебором по «кандидатов», попавших внутрь пересечения AABB. Под контактом точки и треугольника здесь понимается следующее: считаем, что треугольник и точка контактируют, если зона влияния (сфера заранее выбранного радиуса) точки пересекает

треугольник (см. рис. 15). Если треугольник и точка находятся в контакте,

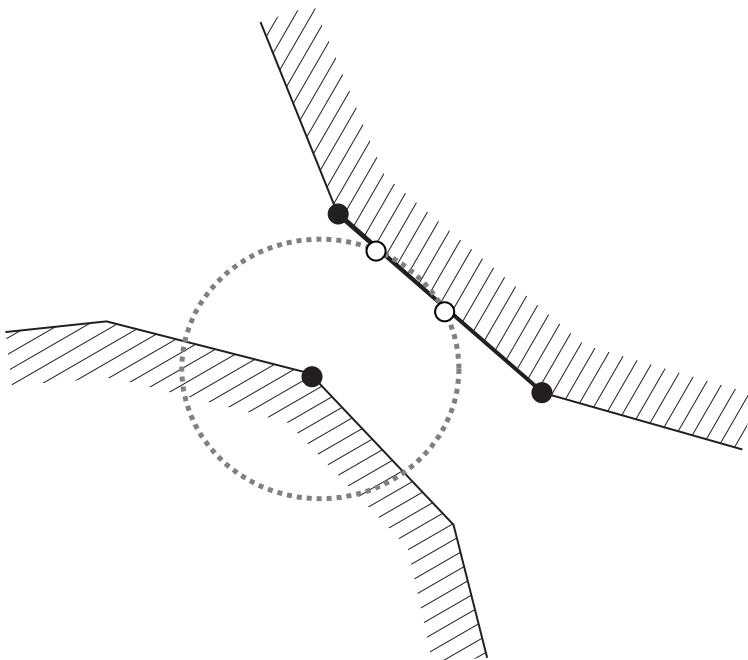


Рисунок 15 — Определение контакта.

то следующим шагом строится парный виртуальный узел — этот узел лежит внутри контактирующего треугольника так, чтобы прямая проходящая через реальный и виртуальный узлы, являлась нормалью к треугольнику (см. рис. 16). После того, как виртуальный узел построен, получаются значения всех величин в нём. Для этого в данной работе использовалась линейная интерполяция при помощи барицентрических координат. Задача заключается в следующем (см. рис. 17): есть треугольник и точка, лежащая в его плоскости, в трёхмерном пространстве, нужно, используя известные значения в вершинах треугольника, определить значение в точке. В работе используется следующий подход для реализации интерполяции:

- поворотом осей координат добиваемся того, чтобы все четыре точки имели одинаковую координату \tilde{x} ;
- используем интерполяцию в плоскости через барицентрические координаты.

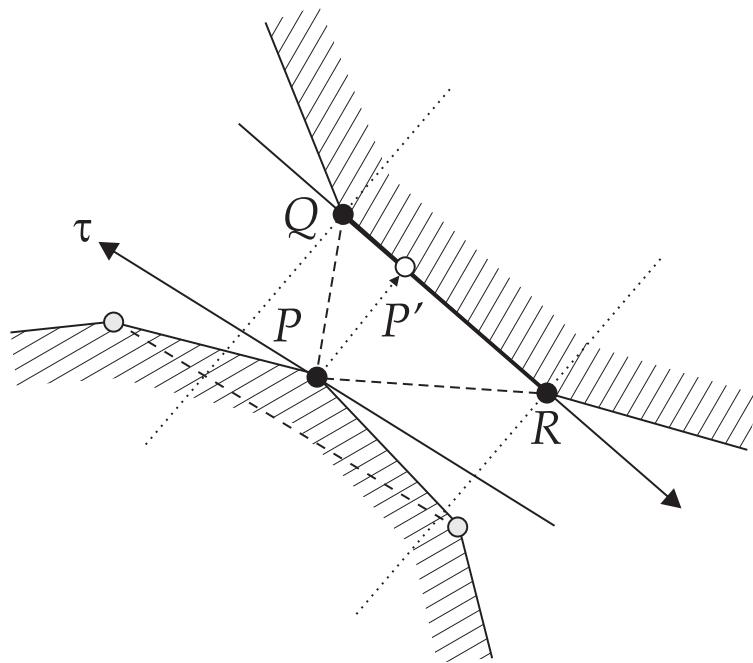


Рисунок 16 — Построение виртуальных узлов при обработке контактирующих границ.

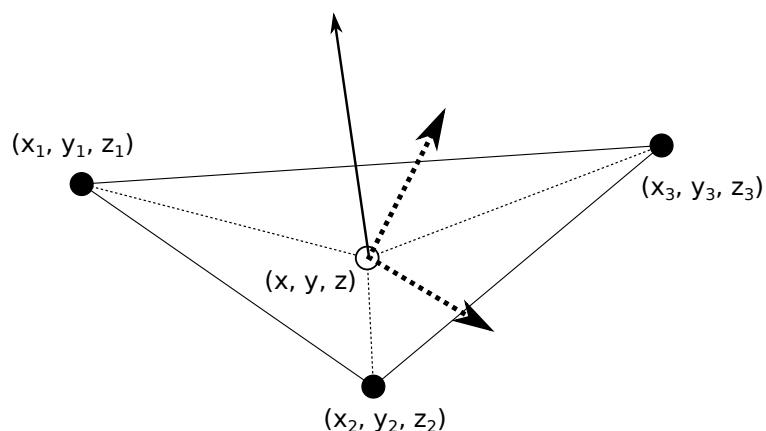


Рисунок 17 — Выбор новых осей координат при интерполяции в треугольнике.

Пусть $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – нормаль к плоскости треугольника, тогда в системе координат с базисными векторами:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (n_1, n_2, n_3), \\ \vec{e}_2 &= (n_3, 0, -n_1), \\ \vec{e}_3 &= (n_1 * n_2, -n_1^2 - n_3^2, n_2 * n_3)\end{aligned}\tag{2.47}$$

все четыре точки имеют одинаковую координату \tilde{x} . Такую систему координат невозможно использовать, если $n_1 = n_3 = 0$, но в этом случае все точки имеют одинаковую координату y , поэтому, сделав замену

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= y \\ \tilde{y} &= x \\ \tilde{z} &= z,\end{aligned}\tag{2.48}$$

придём опять к ситуации, когда все четыре точки имеют одинаковую координату x . После этих преобразований значение в точке (x, y, z) может быть вычислено по формуле

$$v = v_1 * \lambda_1 + v_2 * \lambda_2 + v_3 * \lambda_3,\tag{2.49}$$

где v_1, v_2, v_3 – значения в вершинах треугольника, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – барицентрические координаты

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(y_2 - y_3)(x - x_3) + (x_3 - x_2)(y - y_3)}{(y_2 - y_3)(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_3)}, \\ \lambda_2 &= \frac{(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)}{(y_2 - y_3)(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_3)}, \\ \lambda_3 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Эта интерполяция обладает первым порядком точности, что согласуется с порядком точности остальных частей алгоритма.

2.5 Расчёт с шагом $\tau > h/\lambda$

2.5.1 Необходимость расчёта с шагом $\tau > h/\lambda$

Одной из принципиальных проблем, с которыми сталкивается метод характеристик на сетках из тетраэдров при попытке расчета им реальных задач, является низкое качество сеток, создаваемых стандартными генераторами сеток. Данный вопрос практически всегда остается за рамками в любых публикациях по теме сеточно-характеристических методов, так как не связан непосредственно с конструированием самого метода. Тем не менее, для практики эта проблема крайне важна, поэтому остановимся на ней подробнее.

Если подходить к вопросу формально, то сеточно-характеристический метод может использоваться на любой сетке из тетраэдров. Однако, как было рассмотрено выше, для сеток из тетраэдров имеет место ограничение на шаг по времени, аналогичное курантовскому шагу для равномерной прямоугольной сетки. Так для каждого узла сетки:

$$\tau \leq \frac{\min(h)}{\max(|\lambda|)}, \quad (2.51)$$

где $\min(h)$ – минимальная высота тетраэдра, в которые входит данный узел, $\max(|\lambda|)$ – максимальное по модулю собственное число матрицы \mathbf{A} для данного узла.

С практической точки зрения крайне нежелательна ситуация, когда τ оказывается малым для отдельных узлов сетки, так как это накладывает ограничения на шаг по времени для всей сетки. Разумеется, необходимо различать случай, когда малый шаг по времени продиктован объективными требованиями высокого разрешения по времени и пространству, и случай, когда он является нежелательным следствием тех или иных проблем. В данный момент мы сосредоточимся на втором случае.

В таблице 1 приведены данные по сеткам из тетраэдров, созданных в кубе с ребром 10 с помощью различных генераторов. Во всех случаях было задано значение мелкости сетки $h_* = 0.25$. В идеальном случае бы-ла бы построена сетка из правильных тетраэдров одинакового размера с высотами ровно равными h_* . Если такое оказалось бы возможно, то шаг по времени точно соответствовал бы ожидаемому $\tau_* \leq h_*/\lambda$ и зависел бы

только от реологии среды (значения λ). Очевидно, что в случае реальной геометрии построить сетку полностью из правильных тетраэдров одного размера невозможно, поэтому следует ожидать появления тетраэдов размером несколько больше или меньше, чем заданный, а также тетраэдов с искажениями относительно правильной формы. Полученная в итоге минимальная высота тетраэдра определяет шаг по времени для всей сетки $\tau \leq \min(h)/\lambda$. В связи с этим логично ввести критерий качества сетки в следующем виде:

$$q = \frac{\min(h)}{h_*}, \quad (2.52)$$

где h_* – заданная желаемая мелкость сетки, а $\min(h)$ – минимальная высота в сетке, фактически выданной генератором.

Для идеальной сетки $q = 1$. В случае не слишком больших отклонений от единицы сетку можно считать «достаточно хорошей» для расчёта. Однако, как видно из таблицы 1, на практике даже для простейшей геометрии q находится в диапазоне $0.00065 \leq q \leq 0.126$. Это приводит к неоправданному падению шага по времени на 1-3 порядка и, соответственно, к необоснованному росту требуемого объема вычислений. Приведенные гистограммы распределения высот тетраэдров в полученных сетках (рис. 18) показывают, что проблема не связана с наличием единичных вырожденных тетраэдров, а носит систематический характер.

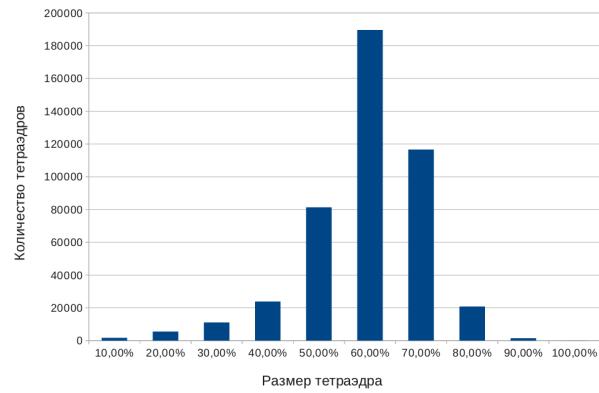
Причиной такого низкого качества сеток является тот факт, что все существующие генераторы сеток ориентированы на построение сеток для метода конечных элементов. Для МКЭ критерии качества сетки совершенно иные – для эффективной работы метода требуется, чтобы их углы были максимально близки к правильным, а линейные размеры при этом могут быть любыми. Соответственно, ориентированные на МКЭ алгоритмы построения сеток оказываются неэффективными с точки зрения сеточно-характеристического метода.

Очевидным способом решения данной проблемы может быть разработка алгоритмов построения сеток, ориентированных на улучшения качества в терминах сеточно-характеристического метода. Однако в данной работе предлагается другой подход – модификация метода для обеспечения эффективной работы на сетке низкого качества. Данный подход, как будет

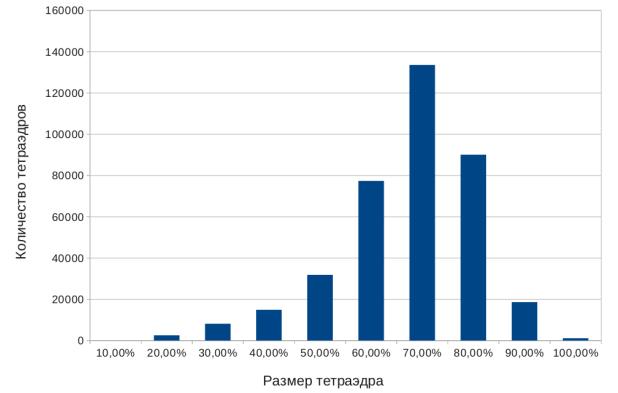
рассмотрено ниже, может применяться не только для решения проблемы малого шага по времени из-за низкого качества изначальной сетки, но и в случае деградации шага по времени из-за вырождения сетки в зоне больших деформаций.

Таблица 1 — Качество сеток, созданных различными генераторами в кубе с ребром 10

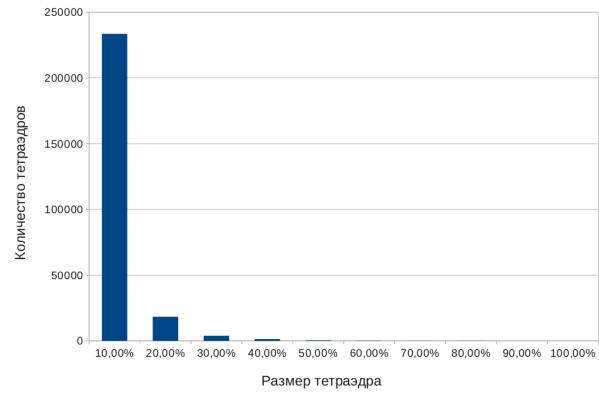
Генератор	Заданное H	$\min(H)$	$\max(H)$
gmsh	0.25	0.000845531	0.307492
tetgen	0.25	0.0315793	0.279029
Ani3D	0.25	$1.08e^{-8}$	3.63429
Ani3D + косметика	0.25	0.000162557	3.7205



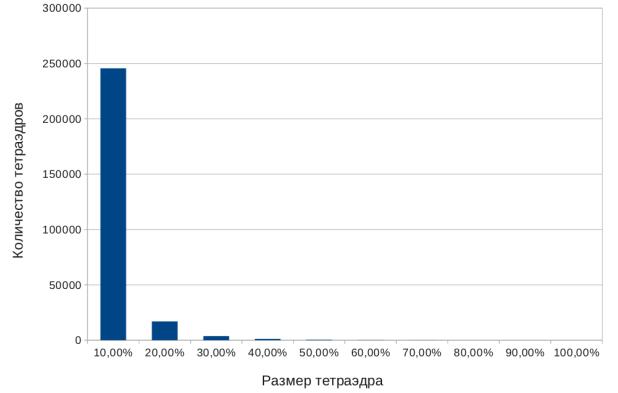
(а) Генератор gmsh.



(б) Генератор tetgen.



(в) Генератор Ani3D.



(г) Генератор Ani3D с сеточной косметикой.

Рисунок 18 — Сетка в кубе, созданная различными генераторами.
Распределение тетраэдров по размеру.

2.5.2 Конструирование метода

Рассмотрим одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \lambda \neq \text{const.} \quad (2.53)$$

Введем в области интегрирования разностную сетку и обозначим $u_m^n = u(t^n, x_m)$. Обратим внимание, что мы изначально предполагаем неравномерность сетки. Это соответствует как случаю с изначально сеткой низкого качества, так и случаю больших деформаций и вырождения сетки. Кроме того, мы рассматриваем случай разных значений λ в разных точках расчетной области. Такая ситуация имеет место, если среда изначально неоднородная или если большие деформации вызвали значительное локальное изменение плотности в точке.

Особенностью предлагаемого метода является тот факт, что на данном этапе не будем выбирать фиксированный сеточный шаблон. Необходимые точки на предыдущем временном слое, по которым выполняется реконструкция значений на следующем шаге по времени, будут определяться в ходе вычислений отдельно для каждой рассчитываемой точки, исходя из локальных свойств решения в ней.

Пусть из тех или иных соображений был выбран шаг по времени τ , такой что характеристика из точки u_m^n на новом временном слое не попадает в отрезок $(u_{m-1}^n; u_{m+1}^n)$. Такая ситуация имеет место в «маленьких» тетраэдрах сетки низкого качества, если шаг по времени был выбран ориентируясь на «средние» тетраэдры сетки.

В этом случае найдем тот отрезок $(u_{m-k-1}^n; u_{m-k}^n)$, в котором выпущенная характеристика пересекает временной слой n . Точку пересечения обозначим x^* . Также введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_{m-k} - x_{m-k-1} &= h_k, \\ x_m - x^* &= \lambda \tau = l_0, \\ x_m - x_{m-k} &= l_k. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Нормируя l_k и l_0 на h_k получаем:

$$\begin{aligned} q_0 &= l_0/h_k = \lambda\tau/h_k = \sigma, \\ q_k &= l_k/h_k, \end{aligned} \tag{2.55}$$

где σ – аналог классического числа Куранта для равномерной сетки.

Рассмотрим простейший случай линейной интерполяции значения в точке u_*^n по точкам u_{m-k-1}^n и u_{m-k}^n . Получаем для значения на новом временном слое u_m^{n+1} следующее выражение:

$$u_m^{n+1} = u_*^n = (q_k + 1 - q_0)u_{m-k}^n + (q_0 - q_k)u_{m-k-1}^n. \tag{2.56}$$

2.5.3 Исследование метода

Чтобы найти порядок аппроксимации по времени и по пространству используем разложение $u_{m+\mu}^{n+\nu}$ в ряд Тейлора. Обозначим:

$$\begin{aligned} q_0 - q_k &= \sigma_k, \\ \frac{h_k}{l_0} &= \alpha, \\ \frac{l_k}{l_0} &= \beta, \end{aligned} \tag{2.57}$$

где очевидно $\alpha < 1$, $\beta < 1$.

Раскладывая (2.56) в ряд Тейлора в окрестности $u = u_m^n$ до второго

порядка малости получаем:

$$\begin{aligned}
u + u_\tau \tau + u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} &= (1 - \sigma_k)(u - l_k u_x + u_{xx} \frac{l_k^2}{2}) + \\
&\quad + \sigma_k(u - (l_k + h_k)u_x + u_{xx} \frac{(l_k + h_k)^2}{2}) \\
u_\tau \tau + u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} &= (1 - \sigma_k)(-l_k u_x + u_{xx} \frac{l_k^2}{2}) + \\
&\quad + \sigma_k(-(l_k + h_k)u_x + u_{xx} \frac{(l_k + h_k)^2}{2}) \\
u_\tau \tau + u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} &= -u_x((1 - \sigma_k)l_k + \sigma_k(l_k + h_k)) + \\
&\quad + \frac{u_{xx}}{2}((1 - \sigma_k)l_k^2 + \sigma_k(l_k + h_k)^2) \\
u_\tau \tau + u_x(l_0) &= -u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} + \frac{u_{xx}}{2}(l_k^2 + 2\sigma_k l_k h_k + \sigma_k h_k^2) \\
u_\tau \tau + u_x \lambda \tau &= -u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} + \frac{u_{xx}}{2}(l_k(l_k + \sigma_k h_k) + \sigma_k h_k(l_k + h_k)) \\
u_\tau \tau + u_x \lambda \tau &= -u_{\tau\tau} \frac{\tau^2}{2} + \frac{u_{xx}}{2}(l_k l_0 + \sigma_k h_k l_0(\alpha + \beta)) \\
u_\tau + u_x \lambda &= -u_{\tau\tau} \frac{\tau}{2} + \frac{u_{xx}}{2} \lambda(l_k + \sigma_k h_k(\alpha + \beta)) \\
u_\tau + u_x \lambda &= O(\tau) + O(h)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Таким образом, схема имеет первый порядок по времени и по пространству. Этого следовало ожидать, так как используемая линейная интерполяция имеет первый порядок точности.

Для исследования устойчивости воспользуемся методом Фурье [3]. Рассмотрим $u_m^n = v^n e^{im\phi}$. Подставив его в (2.56) получим:

$$\begin{aligned}
v^{n+1} e^{im\phi} &= (q_k + 1 - q_0)v^n e^{i(m-k)\phi} + (q_0 - q_k)v^n e^{i(m-k-1)\phi} \\
v^{n+1} e^{im\phi} &= v^n e^{im\phi}((q_k + 1 - q_0)e^{-ik\phi} + (q_0 - q_k)e^{-i(k+1)\phi}) \\
u_m^{n+1} &= u_m^n((q_k + 1 - q_0)e^{-ik\phi} + (q_0 - q_k)e^{-i(k+1)\phi}).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Таким образом, оператор перехода от слоя n к слою $n + 1$ имеет вид:

$$\lambda = e^{-ik\phi}(1 + (q_k - q_0)(1 - e^{-i\phi})). \tag{2.60}$$

Необходимое условие устойчивости Неймана:

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 &\leq 1 \\
|1 + (q_k - q_0)(1 - e^{-i\phi})|^2 &\leq 1 \\
|1 + (q_k - q_0)(1 - \cos(\phi)) + i(q_k - q_0)\sin(\phi)|^2 &\leq 1 \\
(1 + (q_k - q_0)(1 - \cos(\phi)))^2 + ((q_k - q_0)\sin(\phi))^2 &\leq 1 \\
(1 + q_k - q_0)^2 - 2(1 + q_k - q_0)(q_k - q_0)\cos(\phi) + (q_k - q_0)^2 &\leq 1 \\
1 + 2(q_k - q_0) + 2(q_k - q_0)^2 - 2(1 + q_k - q_0)(q_k - q_0)\cos(\phi) &\leq 1 \\
(q_k - q_0)^2 - (q_k - q_0)(1 + q_k - q_0)\cos(\phi) + (q_k - q_0) &\leq 0 \\
(q_k - q_0)(q_k - q_0 + 1)(1 - \cos(\phi)) &\leq 0 \\
(q_k - q_0)(q_k - q_0 + 1) &\leq 0
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
-1 &\leq q_k - q_0 \leq 0, \\
q_k &\leq q_0 \leq q_k + 1.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Таким образом, схема устойчива при

$$k \leq \sigma \leq k + 1. \tag{2.63}$$

Так как все коэффициенты схемы неотрицательны, то она также является монотонной в соответствии с критерием Фридрихса.

Полученное условие де-факто эквивалентно условию попадания характеристики в отрезок, по которому производится интерполяция. Если для реконструкции решения используется интерполяция более высоких порядков, то необходимый сеточный шаблон будет расширяться. Например, для интерполяции второго порядка необходимо использовать три точки на временном слое n . В этом случае можно выбрать любой из трехточечных шаблонов, включающих в себя $x^* = (u_{m-k-2}^n; u_{m-k}^n)$ или $(u_{m-k-1}^n; u_{m-k+1}^n)$. В общем случае, в соответствии с [6], все схемы с порядком аппроксимации выше первого не будут монотонны.

2.5.4 Тестирование метода

На рис. 19 приведены результаты тестирования описанной схемы. Рассматривалась задача распада разрыва. Использовалась равномерная сетка по пространству. Приведены графики для расчетов с $\lambda\tau/h = 1.0$ (классический шаблон «уголок» с курантовским шагом) и $\lambda\tau/h = 1.5$ (описанная выше схема).

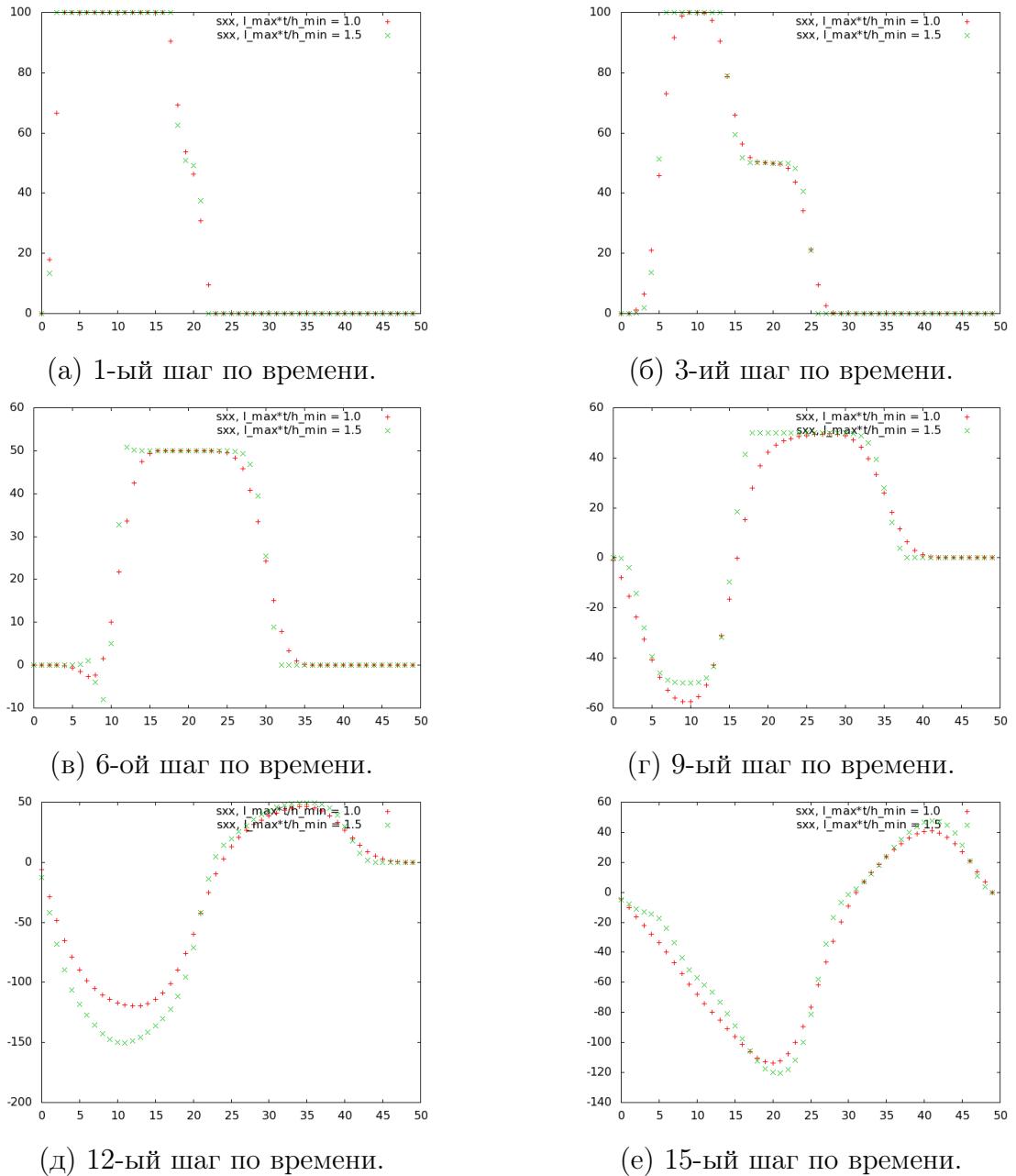


Рисунок 19 — Тестирование одномерной схемы с шагом $\lambda\tau/h = 1.5$.

2.5.5 Работа на неструктурированной сетке из тетраэдров

Для решения многомерной задачи с большим шагом по времени ($\lambda\tau/h > 1$) используется описанный выше метод для одномерной задачи и схема расщепления по пространственным переменным. Схема расщепления конструируется ровно так же, как для случая с классическим курантовским шагом. Используется случайный выбор базиса для симметризации решения без излишнего увеличения вычислительной сложности задачи.

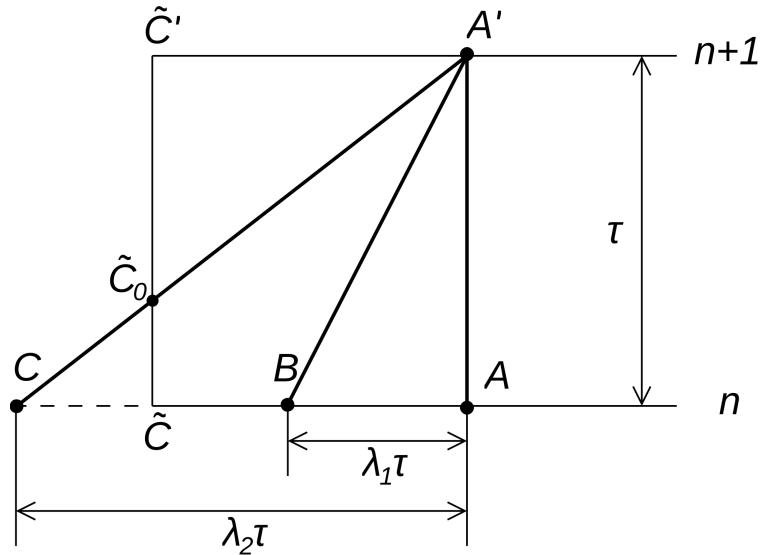
Расчёт внутренних, граничных и контактных узлов при таком подходе не вызывает проблем – для каждой одномерной схемы находятся элементы сетки на прошлом временном слое, в которые попали характеристики. Для внутренних узлов все 9 характеристик оказываются внутри расчётной области, из соответствующих точек переносятся инварианты Римана и по ним восстанавливается решение на новом временном слое. Для граничных узлов 6 характеристик попадают внутрь области, а 3 уравнения, соответствующие выводящим характеристикам, заменяются на граничные условия. Для узлов на контактной границе решается система из 18 уравнений, записанных в двух соприкасающихся узлах, – постановка контактных условий и расчёт полностью аналогичны описанному выше для случая с классическим курантовским шагом.

Отдельного подхода при расчёте с шагом по времени $\tau > h/\lambda$ требуют приграничные узлы. Они являются внутренними для расчётной области и должны рассчитываться по схеме для внутренних узлов – по 9 значениям инвариантов Римана, перенесённым с прошлого временного слоя, и без привлечения граничных или контактных условий. Однако, в силу большого шага по времени, для узлов, расположенных достаточно близко к границе области, могут возникать характеристики, которые выходят за границы области на предыдущем временном слое.

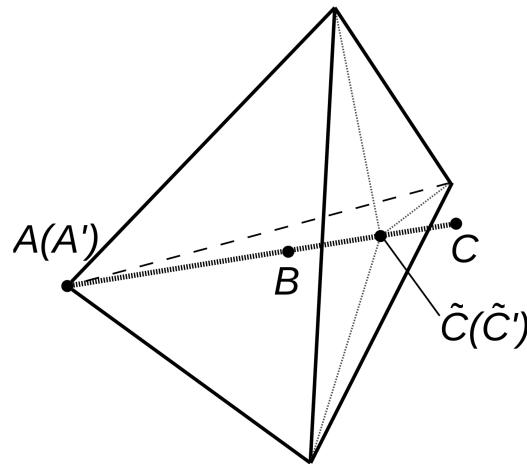
В этом случае требуется переносить значения инвариантов Римана из виртуальных узлов, расположенных между временными слоями n и $n + 1$. Иллюстрация такой ситуации приведена на рис. 20.

Для одной из характеристик точка пересечения с предыдущим времененным слоем оказалась за границей области интегрирования (точка C). В этом случае значение переносится из точки \tilde{C}_0 , значение в которой интерполируется по точкам \tilde{C}, \tilde{C}' , причем точка \tilde{C} находится на старом времен-

ном слое, а точка \tilde{C}' – на новом. Очевидно, что при таком подходе при реализации метода требуется предусмотреть в алгоритме расчёта последовательность вычисления значений на новом временном слое – сначала вычисляются значения в граничных узлах, после чего начинается расчёт внутренних точек.



- (а) Расчет узла, близкого к границе. Возникают выводящие характеристики, для расчета требуются оба временных слоя. Под точками на временных слоях n и $n + 1$ подразумеваются точки в трехмерном пространстве.



- (б) Расчет узла, близкого к границе. Положение необходимых точек в тетраэдрах при неподвижной сетке.

Рисунок 20 — Расчет узла, близкого к границе.

2.5.6 Движение сетки при больших деформациях

Одной из традиционных проблем при расчёте задач с конечными деформациями является вырождение шага по времени из-за искажения ячеек расчётной сетки. Традиционный подход к решению этой проблемы – перестройка сетки при появлении деформаций, переинтерполяция на новую сетку и продолжение счёта на новой сетке.

Предложенный метод расчёта с $\tau > h/\lambda$ позволяет предложить альтернативный подход к решению данной проблемы – при искажении ячеек расчётной сетки просто продолжается счёт с прежним шагом по времени, для искажённых ячеек сетки соотношение $\lambda\tau/h$ может принимать достаточно большие значения, что обрабатывается внутренней логикой метода.

Все выполненные в рамках данной работы расчёты используют именно такой подход.

2.6 Параллельная версия метода

2.6.1 Необходимость разработки параллельной версии

Однопроцессорная версия алгоритма имеет весьма ограниченную применимость: основным ограничивающим фактором является объём оперативной памяти, доступной на локальном вычислительном узле. Границы применимости однопроцессорной версии можно получить при помощи следующих предположений:

- используемые типы данных – float (4 байта) и int (4 байта);
- в каждом узле сетки хранится 3 значения вектора скорости, 6 значений тензора, по 3 значения координат в локальной и подвижной системах, 4 значения параметров реологии среды;
- в процессе расчёта каждого временного шага требуется хранить копию расчётов предыдущего временного слоя, для записи результатов на жёсткий диск необходима третья копия;
- каждый узел хранит информацию о «локальной» топологии сетки для быстрого доступа к соседним тетраэдрам и треугольникам (в среднем по пять значений типа int для каждого типа элементов).

Суммарно имеем следующий расход памяти на хранения одного узла — 228 байт. В этих расчётах не учитываются расходы на хранения топологии всей сетки, ввиду сложности проведения оценки. Таким образом получаем, что при доступном объёме памяти в 1 Гб для одного вычислительного узла с максимальной скоростью можно проводить расчёты на сетках с числом узлов 1-2 миллиона. Под максимальной скоростью здесь понимается следующее: при расчёте на сетках указанного выше размера все необходимые данные могут быть полностью помещены в оперативной памяти, скорость доступ к которой на порядки выше скорости чтения с жёсткого диска.

Характерный размер сетки для решаемой задачи $\sim 2 \cdot 10^6$ узлов (5 слоёв, каждый из которых имеет размер 201x201x10). Стоит отдельно отметить, что размеры этой задачи лежат на самой нижней границе характерных размеров задач, решение которых представляет практический интерес. Поставленную задачу уже весьма проблематично решить на одном вычис-

лительном узле ввиду ограниченного размера доступной для вычислений оперативной памяти.

Другой причиной необходимости создания параллельной версии алгоритма является характер роста вычислительной сложности при увеличении числа узлов сетки ($O(n^3)$). Отсюда следует, что при уменьшении характерных размеров задачи вдвое сложность вычислений возрастает в 8 раз. Очевидно, что задачи такого класса необходимо решать при помощи параллельных версий алгоритмов, чтобы обеспечить хотя бы небольшую масштабируемость.

Таким образом, создание параллельной версии алгоритма становится необходимым условием численного моделирования задач подобного рода.

2.6.2 Реализация параллельной версии

На данный момент существуют два принципиально различных подхода к реализации параллельных вычислений [78]:

- взаимодействие через разделяемую память (shared memory);
- взаимодействие при помощи обмена сообщениями.

Первый метод позволяет «распараллелить» алгоритм при помощи минимальных усилий, так как не требует существенных изменений в логике расчёта. Каждый вычислительный узел при таком подходе имеет доступ ко всей памяти, необходимой для расчёта задачи, которая физически находится на *разных* узлах. Таким образом, при использовании разделяемой памяти пропадает необходимость синхронизации вычислительных узлов (в смысле пересылок данных), для организации взаимодействия используются различные механизмы захвата управления (к примеру, семафоры или мьютексы). Недостатком такого подхода является чисто техническое ограничение масштабируемости алгоритма: требуется вычислительный кластер с необходимым объёмом оперативной памяти, доступной для работы в разделяемом режиме.

Второй подход требует существенной переработки логики алгоритма, так как необходимо явным образом проводить синхронизацию вычислительных узлов. При этом каждый вычислительный узел использует только

доступную локально оперативную память, а всю необходимую информацию запрашивает посредством сообщений во время выполнения. Алгоритмы, построенные по этому принципу, обладают заметно большей масштабируемостью: на данный момент многие вычислительные кластеры имеют более тысячи процессоров.

В данный момент доступ к кластерам, построенным для вычислений с использованием разделяемой памяти, весьма ограничен, доступные же кластеры не обладают необходимым для серьёзного расчёта числом процессоров. Поэтому в основе параллельной версии алгоритма, описываемого в работе, лежит обмен сообщениями между вычислительными узлами. В качестве конкретной реализации этой парадигмы выбран протокол MPI, признанный де-факто стандартом в области высокопроизводительных вычислений.

Для реализации параллельных вычислений исходная геометрия разбивается на зоны, которые распределяются между вычислительными узлами. Один узел может производить одновременный расчёт нескольких зон. Для обеспечения согласованности расчёта вычислительные узлы обмениваются необходимой информацией о значениях и топологии сеток на границах зон. Для получения максимальной эффективности при параллельном расчёте следует учитывать следующие условия:

- для увеличения времени полезного использования кластера необходимо, чтобы время расчёта очередного временного слоя на каждом вычислительном узле было примерно одинаково, так как в противном случае наиболее «быстрые» узлы проводят некоторые время в ожидании, при этом не проводя никаких расчётов;
- для увеличения скорости синхронизации и расчёта контактных границ крайне желательно, чтобы зоны имели простую геометрию;
- граничные части сеток различных зон должны быть построены согласованно (в идеале должны совпадать топологически) для уменьшения потерь точности, связанных с интерполяцией;
- расчёт каждого временного слоя должен быть максимально «параллельным» в том смысле, что синхронизации происходят редко и согласованно, а данные передаются большими объёмами.

2.6.3 Тестирования производительности MPI

Для выбора правильных API для построения параллельной версии был проведён ряд тестов производительности обмена сообщениями при помощи MPI. Одним из наиболее важных вопросов, ответ на которых хотелось получить был следующий: каков оптимальный объём сообщения для пересылки? Иными словами, нужно было выяснить, при каких размерах посылаемого сообщения время, затрачиваемое на пересылку одного байта, минимально. Ниже приведены графики (см. рис. 21 и рис. 22 зависимости затрат на пересылку одного байта в зависимости от размера сообщения).

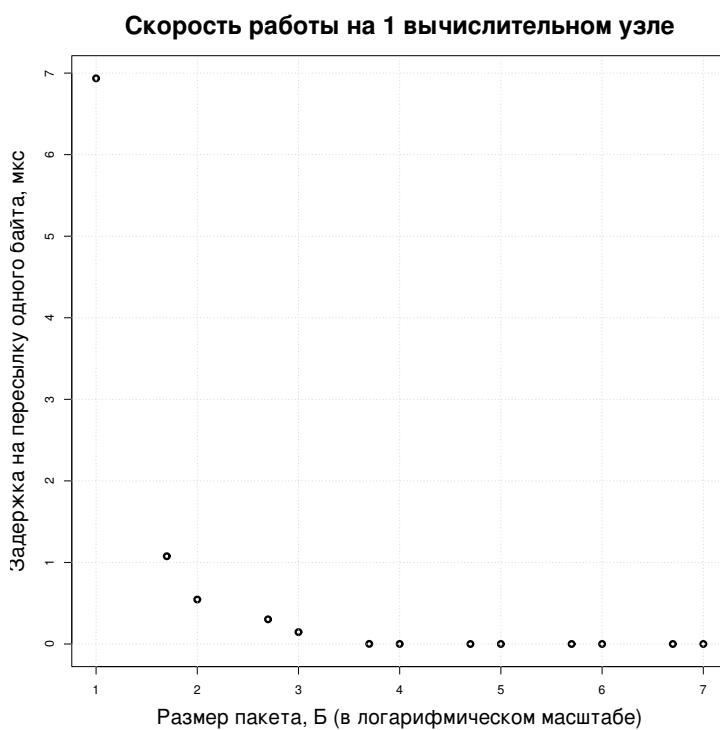


Рисунок 21 — Затраты на пересылки при использовании одного вычислительного узла.

Как видно из графиков, для пересылки данных посредством MPI выгодно использовать большие объёмы сообщений. В первую очередь это связано с ростом доли накладных расходов на пересылку сообщения при уменьшении его размера. Другими факторами, снижающими скорость передачи, могут служить буферизация исходящих сообщений, а также блокировки вызывающего процесса при синхронной передаче данных. По результатам проведённых тестов были сделаны следующие выводы:

- данные нужно передавать большими объёмами, так как скорость в

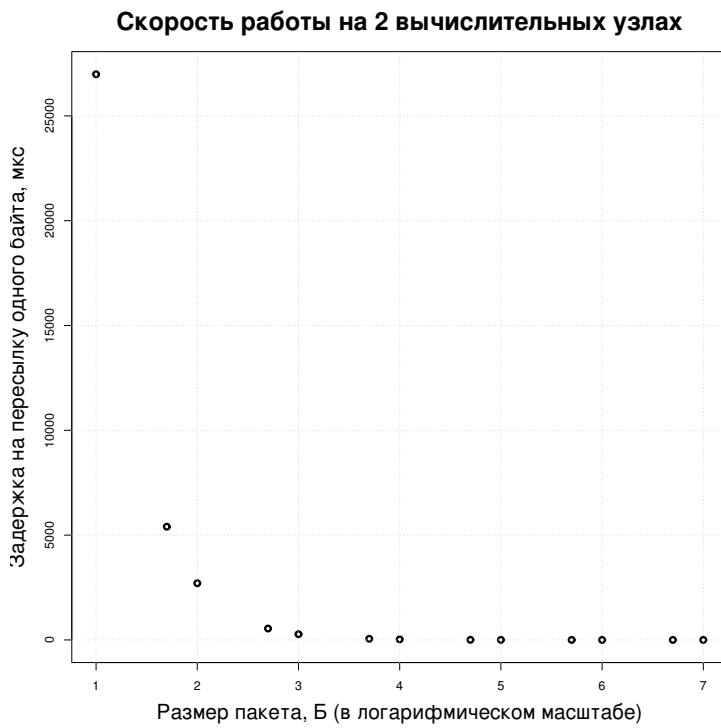


Рисунок 22 — Затраты на пересылки при использовании двух вычислительных узлов.

таких случаях выше;

- следует использовать асинхронную передачу данных, возможно, с инициацией приёма до момента посылки данных;
- для ускорения процесса синхронизации крайне желательно использовать «родные» функции коллективного обмена данными вместо самостоятельной реализации подобного функционала;
- следует в полной мере использовать возможности MPI по созданию пользовательских типов данных для уменьшения объёмов памяти, требуемых для хранения временных структур данных, а также для уменьшения временных затрат на копирование данных внутри вычислительного узла.

2.6.4 Синхронизация шага по времени

Перед расчётом очередного временного слоя необходимо синхронизировать шаг по времени между всеми вычислительными узлами. В текущей реализации метода с целью увеличения скорости расчёта вводится ограни-

чение на максимально возможный шаг по времени:

$$\tau_{max} = \frac{h_{min}}{\lambda_{max}}, \quad (2.64)$$

где h_{min} – минимальная высота тетраэдра в сетке, а λ_{max} – максимальное значение коэффициента Ляме в локальной сетке. Так как для расчётов используются неструктурированные тетраэдральные сетки, максимально допустимый шаг по времени может различаться для разных зон. Поэтому в начале расчёта каждого временного слоя вычислительные узлы выбирают максимально допустимый шаг по времени для локальных сеток, после чего выбирают минимальный из всех полученных. Дальнейший расчёт на всех вычислительных узлах ведётся с одним и тем же шагом по времени. Для выполнения этой операции крайне удобным оказалось использовать встроенную в MPI функцию коллективного обмена:

```
float DataBus :: get_max_possible_tau( float local_time_step )
{
    MPI::COMM_WORLD.Barrier();

    float max_tau;
    MPI::COMM_WORLD.Allreduce(&local_time_step, &max_tau, 1, MPI::FLOAT, MPI::
        MIN);
    *logger << "Time step synchronized, value is: " < max_tau;

    return max_tau;
}
```

Листинг 1 — Синхронизация шага по времени.

2.6.5 Синхронизация узлов

Как было сказано ранее, при параллельных вычисления исходная сетка делится между вычислительными узлами. При этом нередки ситуации, когда одно физическое тело «разрезано» на несколько зон. В этом случае получаем следующее: часть узлов, необходимых для расчёта сетки А, принадлежат сетке Б (см. рис. 23). Именно эти узлы (на этапе загрузки они помечаются как REMOTE) необходимо синхронизировать. В текущей реализации не используется динамическое перестроение сеток, поэтому на протяжении всего расчёта набор REMOTE узлов не меняется. Это позволяет на этапе загрузки провести первичную обработку сеток, получить

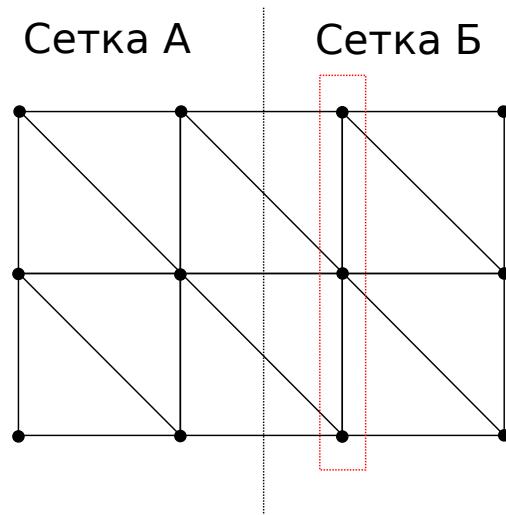


Рисунок 23 — REMOTE узлы на сетках.

список REMOTE узлов для каждой пары сеток и создать пользовательские типы MPI для дальнейших пересылок между вычислительными узлами. Характерный код создания пользовательских типов MPI:

```

...
MPI::COMM_WORLD.Recv(
    &local_numbers[info[1]][info[2]][0] ,
    info[0] ,
    MPI::INT ,
    status .Get_source() ,
    TAG_SYNC_NODE_TYPES
    ...
MPI_NODE_TYPES[info[1]][info[2]] = MPI_ELNODE.Create_indexed(
    info[0] ,
    &lengths[0] ,
    &local_numbers[info[1]][info[2]][0]
);
MPI_NODE_TYPES[info[1]][info[2]].Commit();

```

Листинг 2 — Создание пользовательских типов MPI.

После этого пересылка всех узлов выполняется так:

```
for (int i = 0; i < zones_info.size(); i++)
    if (get_proc_for_zone(i) != proc_num)
        for (int j = 0; j < zones_info.size(); j++)
            if (local_numbers[i][j].size())
            {
                reqs.push_back(
                    MPI::COMM_WORLD.Isend(
                        &mesh_set->get_mesh_by_zone_num(j)->nodes[0],
                        1,
                        MPI_NODE_TYPES[i][j],
                        get_proc_for_zone(i),
                        TAG_SYNC_NODE+100*i+j
                    )
                );
            }
        }
```

Листинг 3 — Синхронизация REMOTE узлов.

2.6.6 Параллельный детектор столкновений

Параллельная версия алгоритма выделения контактных границ принципиально не отличается от последовательной. На первом шаге расчёта контактных границ все вычислительные узлы синхронизируют AABB локальных зон, для чего используется вызов стандартной функции MPI:

```
void DataBase::sync_outlines()
{
    MPI::COMM_WORLD.Barrier();
    int *displ = (int *)malloc(sizeof(int)*procs_total_num);
    displ[0] = 0;
    for (int i = 1; i < procs_total_num; i++)
        displ[i] = displ[i-1]+ mesh_set->meshes_at_proc[i-1];
    MPI::COMM_WORLD.Allgatherv(
        mesh_set->get_local_mesh(0),
        mesh_set->meshes_at_proc[proc_num],
        MPI_MESH_OUTLINE, mesh_set->get_mesh(0),
        mesh_set->meshes_at_proc,
        displ,
        MPI_MESH_OUTLINE
    );
    free(displ);
}
```

Листинг 4 — Синхронизация AABB.

После этого каждый вычислительный узел определяет пары «потенциально» находящихся в контакте зон – одной локальной и одной удалённой. Затем для каждой найденной пары проводится уточнение зоны контакта: проверяются «на контакт» все пары локальных узлов и удалённых треугольников. Для этого проводится синхронизация треугольников, попавших в зону контакта. Идея здесь схожа с той, что используется при синхронизации удалённых узлов, но имеет некоторые отличия:

- т.к. номера треугольников, попавших в зону контакта, заранее не известны, необходимо на первом шаге получить их;
- затем, чтобы использовать только одну пересылку на зону контакта, необходимо создать пользовательский тип MPI;
- последний шаг – отправка найденных треугольников получателю.

После того, как все треугольники в зоне контакта получены с удалённого вычислительного узла, полным перебором определяются пары «контактирующих» узлов и треугольников, строятся виртуальные узлы и интерполируются значения в них. Эта часть алгоритма не отличается от последовательной версии.

2.6.7 Синхронизация тетраэдров

Синхронизация тетраэдров необходима для реконструкции локальной топологии сетки, что требуется для правильного расчёта контактной границы. Идеи реализации схожи с теми, что были описаны выше:

- вычислительный узел получает список треугольников, для которых нужно синхронизировать тетраэдры;
- по списку треугольников строится список тетраэдров, которые необходимо передать удалённому вычислительному узлу;
- создаётся пользовательский тип MPI и за одну пересылку осуществляется синхронизация тетраэдров.

2.6.8 Производительность параллельной версии

Для измерения производительности параллельной версии алгоритма были проведены расчёты одной и той же тестовой задачи на разном числе вычислительных узлов с разным способом расчёта контактной границы. В качестве тестовой задачи была взята задача о распространении волн в 24-слойной преграде. Каждый слой представляет собой прямоугольный параллелепипед размера 120x120x5 точек. На рисунках 24 и 25 представлены зависимости производительности и эффективности от числа используемых вычислительных узлов.

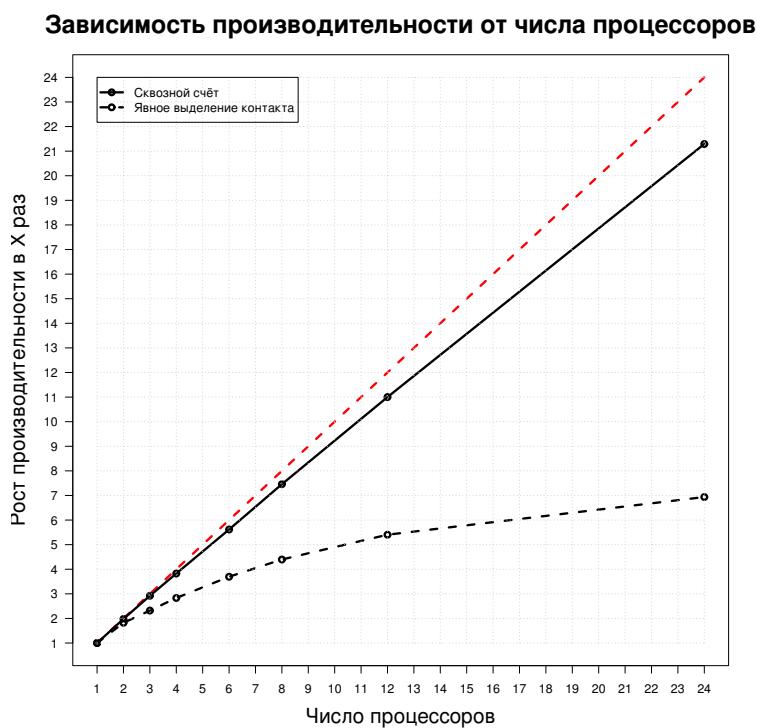


Рисунок 24 — Зависимость производительности от количества вычислительных узлов.

Как видно из графиков, использование сквозного счёта даёт практически линейный рост производительности с эффективным временем использования кластера в $\sim 90\%$. Расчёт с явным выделением контакта даёт производительность в $\sim 30\%$. Это в первую очередь связано с очень большой площадью контактирующих поверхностей. Так, в тестовом примере $\sim 40\%$ узлов исходной сетки принимают участие в расчёте контакта. При этом распределение контактирующих поверхностей по вычислительным узлам неоднородно: слои, находящиеся «в центре» имеют по две контактирующих поверхности, а «крайние» слои лишь по одной.

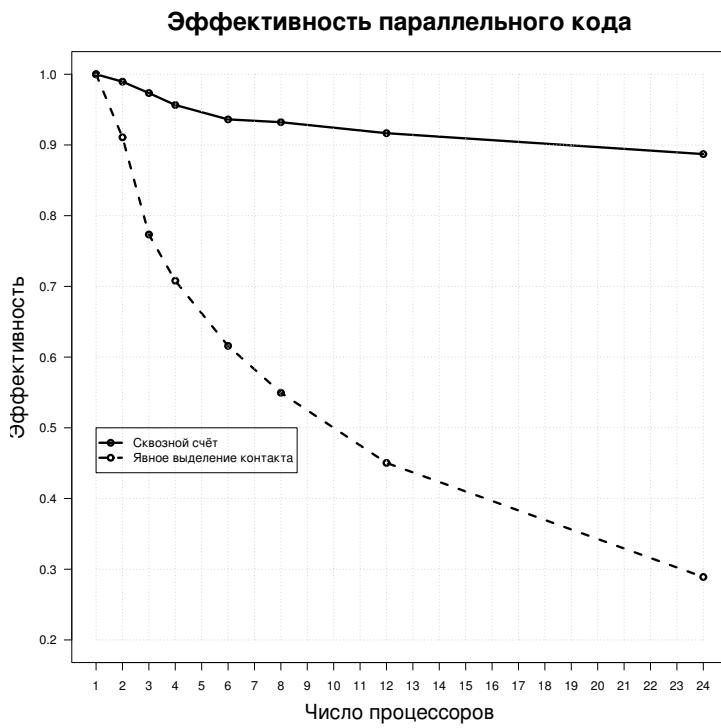


Рисунок 25 — Зависимость эффективности использования кластера от количества вычислительных узлов.

Полученные характеристики производительности следует воспринимать как оценочные для верхней и нижней границ. Соответственно, ожидаемая эффективность при расчёте реальных задач должна составить $\sim 60\%$. Этот результат является вполне приемлемым, так как позволяет обеспечить расчёт больших областей с высокой точностью при разумном КПД.

Глава 3

Волновые процессы в средах сложной структуры

3.1 Постановка задачи

В данном разделе рассматриваются волновые процессы в средах разной структуры – от однородных до многослойных. Аналитически и численно исследуются различные типы волн, их распространение в среде, взаимодействие со свободными и контактными границами, связь волновых процессов с моделями разрушения.

При численном моделировании используются следующие подходы, общие для всех рассмотренных задач:

Размерность задачи

Моделирование выполнялось как в двумерной, так и в трёхмерной постановке. В двумерной постановке предполагалось наличие осевой симметрии задачи. Такой вариант расчёта позволял эффективно моделировать трехмерную задачу, однако для этого удар должен быть строго в центре препятствия, ударник мог двигаться строго по нормали к поверхности препятствия, ударник и препятствие должны обладать осевой симметрией.

Геометрия препятствия и ударника

В двумерной постановке с осевой симметрией модельный ударник представлял из себя тело вращения – шарик, цилиндр либо цилиндр со скруглённой нижней частью. Препятствие полагалось круговой цилиндрической пластиной – монолитной или состоящей из параллельных слоёв.

Параметры удара

Задавалась начальная скорость ударника подлета к препятствию V_0 .

Реология материалов преграды

Каждый отдельный слой в преграде рассматривался как однородный и изотропный, в основе описания которого лежало линейное уравнение связи напряжений и деформаций в виде закона Гука для изотропных тел. Полимерные слои описывались реологическими соотношениями для вязкоупругого материала. Количественные параметры приведены отдельно для каждого расчёта.

Реология ударника

Относительно деформационных свойств ударника задача решалась в двух вариантах. Допускалась, что либо ударник – абсолютно твердое тело, либо – такое же деформируемое тело как и преграда. Для абсолютно твёрдого ударника воздействие на преграду задавалось граничным условием на нормальные и касательные компоненты напряжения в зоне контакта, ударник как отдельное тело не моделировался. Деформируемый ударник моделировался явным образом как отдельное тело, в котором строилась своя сетка. Количественные параметры приведены отдельно для каждого расчёта.

Контактные границы между слоями преграды

На контактных границах предполагалось полное слипание.

Контакт ударника и преграды

Абсолютно жёсткий ударник моделировался условиями на компоненты скорости узлов преграды в зоне контакта. Для деформируемого ударника полагалось, что контакт между индентором и преградой удовлетворяет условию свободного скольжения. Нормальная по отношению к площадке соприкосновения скорость движения приравнивалась скорости движения ударника в проекции на то же направление. Вторым условием служило равенство нулю касательных к поверхности контакта напряжений. Вычисление состояния точек деформируемого ударника велось теми же средствами, что и для преграды.

Начальные условия и условия на неконтактных границах

В начальные моменты времени напряжения в преграде и ударнике отсутствуют, преграда покоятся, все точки ударника имеют одинаковую скорость V_0 . Все границы считаются свободными, на них отсутствуют нормальные и касательные напряжения всюду, кроме точек, в которых осуществлялось взаимодействие ударника с преградой.

Используемая сетка

При решении задачи использовалась неструктурированная сетка, состоящая из треугольников двумерной постановки и тетраэдров в трёхмерной постановке. Сетка во всех случаях лагранжева, скорости движения ее узлов совпадают с рассчитанной скоростью тела в данном узле.

Перестроение сетки не использовалось, в зоне больших деформаций использовалась описанная выше схема для расчёта деформированных элементов с фиксированным временным шагом в случае $\lambda\tau/h > 1$.

3.2 Объёмные волны

3.2.1 Аналитическое решение

Для изотропного однородного упругого тела уравнения движения можно представить как дифференциальное уравнение в векторной форме:

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho (\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}) = 0, \quad (3.1)$$

где λ, μ – параметры Ламе, ρ – плотность, \vec{u} – вектор перемещений, \vec{F} – объёмная сила.

Рассмотрим безграничную среду и представим массовые силы и поле перемещений в виде:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \nabla \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}, \\ \vec{u} &= \nabla \phi + \operatorname{rot} \vec{\psi}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

После подстановки и изменения порядка дифференциальных операторов

ров получаем

$$\nabla[c_1^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Phi] + \text{rot}[c_2^2 \Delta \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} + \vec{\Psi}], \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \\ c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, векторное поле \vec{u} является решением уравнения, если функции ϕ и ψ удовлетворяют соотношениям

$$c_1^2 \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\Phi, \quad (3.5)$$

$$c_2^2 \Delta \vec{\psi} - \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = \vec{\Psi}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим ситуацию, когда $\vec{\Psi} \equiv 0$, а начальное условия $t = t_0, \phi = 0$. Тогда для определения ϕ получается однородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Это означает, что $\phi \equiv 0$. Следовательно, волне, описываемой такими условиями, не происходит вращения частиц среды, т.е. каждая из них движется поступательно. Такие волны называются продольными.

Аналогично, для $\Phi \equiv 0$ мы получим волны, для которых объемное расширение равно нулю. Такие волны называются поперечными или волнами сдвига. Заметим, что при распространении продольные волны не генерируют поперечных, и наоборот. Скорости распространения их фронтов – c_1 и c_2 соответственно.

3.2.2 Расчёт продольной волны (Р-волны)

Пусть плоская Р-волна в среде распространяется вдоль оси z. В этом случае аналитическое решение даёт следующие соотношения на параметры волны:

$$\begin{aligned}
 v_z &= -f(z) \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = C_p, \\
 v_x &= v_y = 0, \\
 \sigma_{zz} &= f(z)(\lambda + 2\mu), \\
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = f(z)\lambda, \\
 \sigma_{ij} &= 0 \text{ для } i \neq j.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $f(z)$ - произвольная функция, зависящая только от z и задающая форму волны. Для расчёта распространения Р-волны в кубе были использованы следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 70000, \\
 \mu &= 10000, \\
 \rho &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

На графиках (см. рис. 26) представлены результаты численного расчёта. Получено совпадение параметров волны с аналитическим решением:

$$\begin{aligned}
 v_z &= C_p = 300, \\
 \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{xx}} &= \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{yy}} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} = \frac{9}{7}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

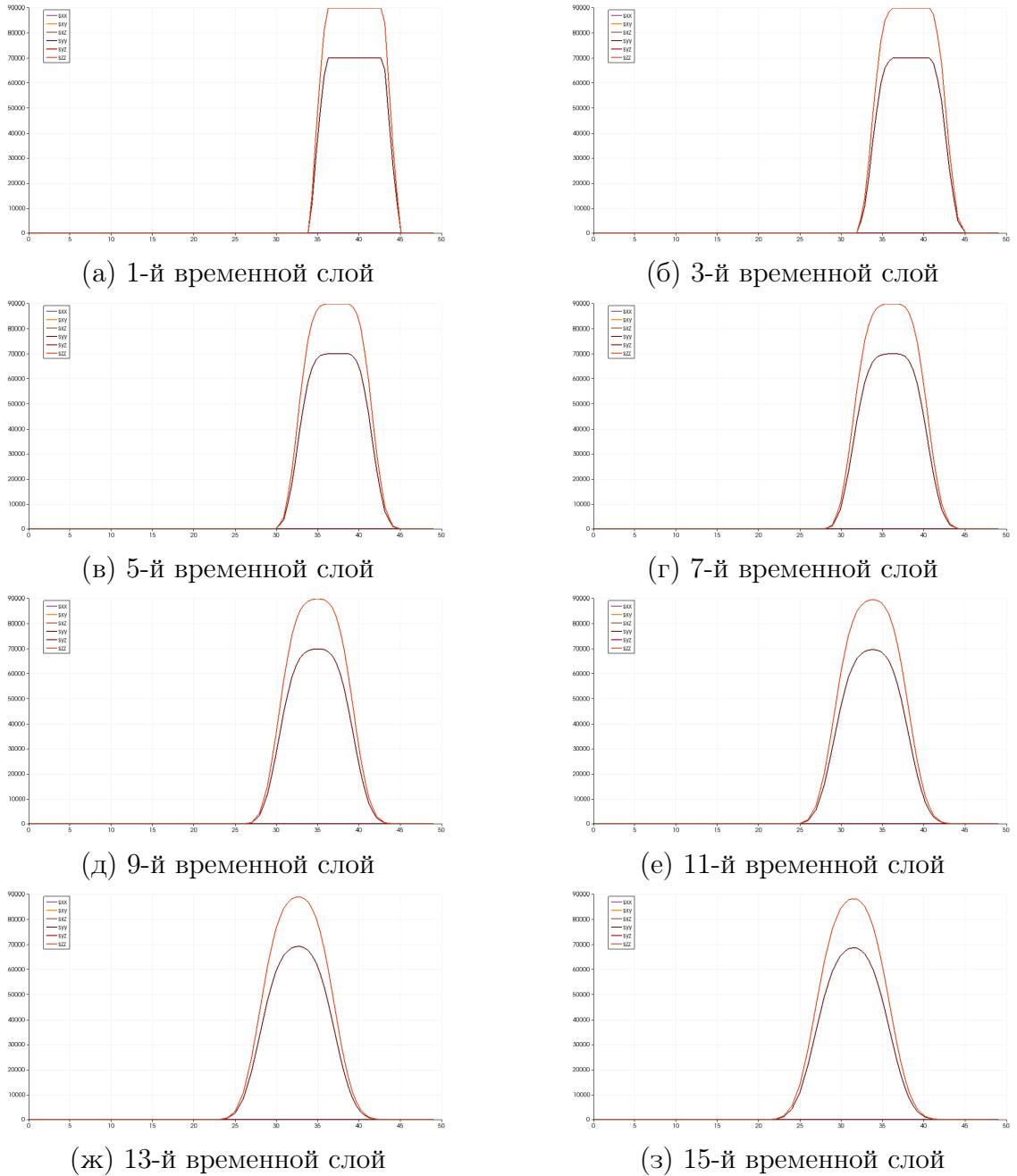


Рисунок 26 — Распространение Р-волны. Изображены компоненты тензора напряжений.

3.2.3 Расчёт поперечной волны (S-волны)

Пусть плоская S-волна в среде распространяется вдоль оси z. В этом случае аналитическое решение соответствующего одномерного уравнения дает следующие соотношения на параметры волны:

$$\begin{aligned} v_z &= -f(z) \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = C_s, \\ v_x &= v_y = 0, \\ \sigma_{ij} &= f(z)\mu \text{ для одной из пар } i \neq j, \\ \sigma_{ij} &= 0 \text{ для } i = j. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь $f(z)$ - произвольная функция, зависящая только от z и задающая форму волны. Для расчёта распространения S-волны в кубе были использованы следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \lambda &= 70000, \\ \mu &= 10000, \\ \rho &= 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

На графиках (см. рис. 27) представлены результаты численного расчёта. Получено совпадение скорости волны с аналитическим решением:

$$v_z = C_s = 100. \tag{3.12}$$

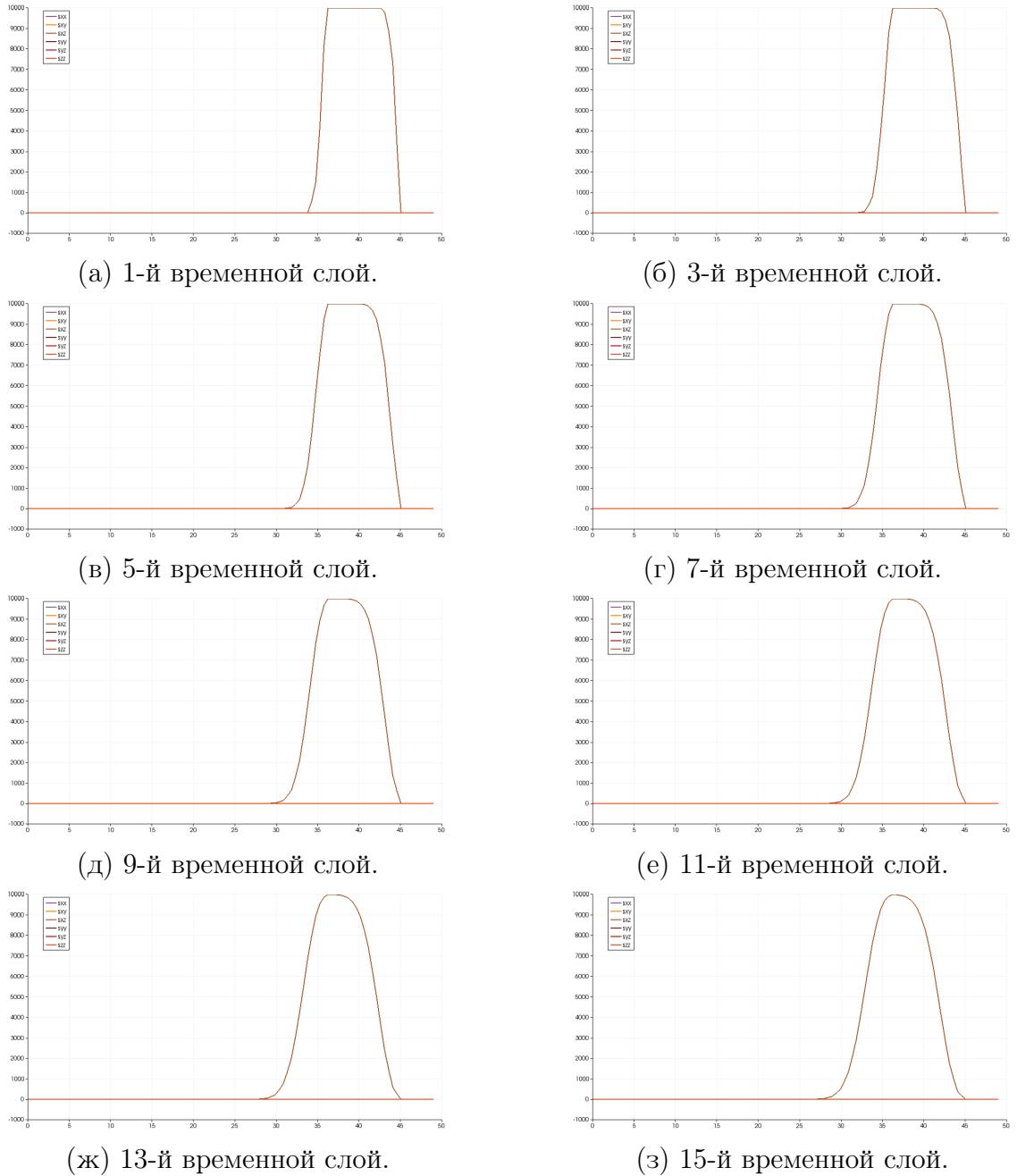


Рисунок 27 — Распространение S-волны. Изображены компоненты тензора напряжений.

3.3 Поверхностные волны

3.3.1 Отражение плоской волны от свободной границы

При наличии в среде границ картина заметно усложняется. Однако для прямолинейного фронта и прямолинейно границы существует точное решение, а в остальных интересующих нас случаях можно, в некотором приближении, свести нелинейную границу и нелинейный фронт к наборам линейных участков [50].

Рассмотрим упругое полупространство с бесконечной плоской свободной границей. В отличие от среды, бесконечной во всех направлениях, мы можем наблюдать три вида волн: P-волны, SH-волны и SV-волны. P-волны – это продольные волны, в них частицы вещества движутся поступательно. SH- и SV-волны – поперечные, их фронт распространяется с одинаковой скоростью, перпендикулярной скоростям частиц вещества. Разница между ними заключается в том, что мгновенная скорость частиц в SH-волне параллельна плоскости границы. Соответственно, в SV-волне она направлена под углом к границе. Заметим, что в двухмерной постановке задачи SH-волны наблюдать нельзя.

В однородной среде эти волны распространяются независимо, но при отражении от границы ситуация меняется. SH-волны распространяются и отражаются так же независимо, а P- и SV-волны генерируют друг друга при отражении. Приведем математические соотношения для падающих (P, SV) и отраженных волн.

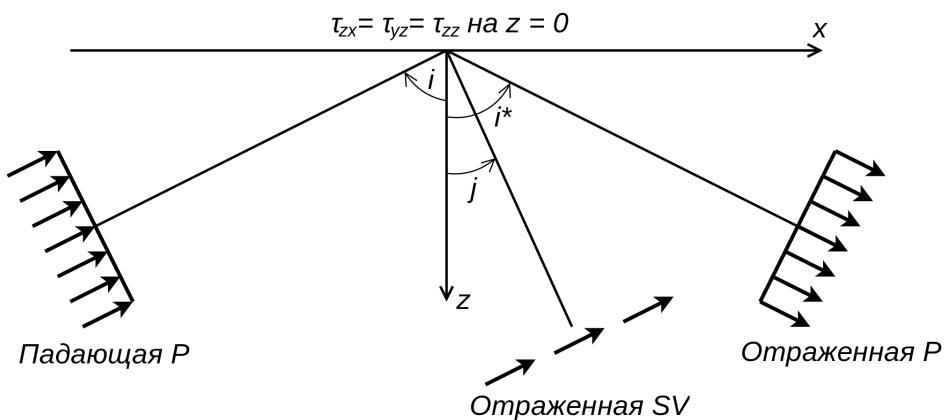


Рисунок 28 – Система лучей и координаты, используемые при изучении отраженных волн.

Из условие свободной границы мы получаем, что $i = i^*$ (углы падения

и отражения P-волны равны), $\frac{\sin i}{\alpha} = \frac{\sin j}{\beta} = p$. Здесь p обозначает лучевой параметр, α – скорость продольной волны, β – скорость поперечной волны.

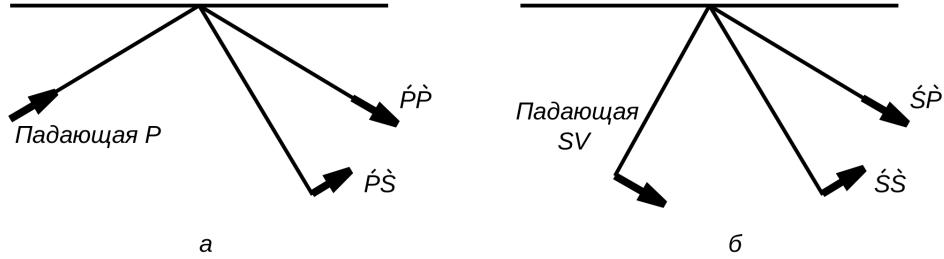


Рисунок 29 – Обозначения и правило знаков для коэффициентов отражения плоских волн P и SV от свободной поверхности.

Для указанных волн получаются следующие амплитудные соотношения для потенциалов:

$$\begin{aligned}\dot{P}\dot{P} &= \frac{-(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 + 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}{(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 + 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}, \\ \dot{P}\dot{S} &= \frac{4\frac{\alpha}{\beta} p \frac{\cos i}{\alpha} (\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)}{(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 + 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\dot{S}\dot{P} &= \frac{4\frac{\beta}{\alpha} p \frac{\cos j}{\beta} (\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)}{(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 + 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}, \\ \dot{S}\dot{S} &= \frac{(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 - 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}{(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2)^2 + 4p^2 \frac{\cos i}{\alpha} \frac{\cos j}{\beta}}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Чтобы получить амплитудные отношения для смещений, нужно коэффициент $\dot{P}\dot{S}$ умножить на α/β , $\dot{S}\dot{P}$ – на β/α , $\dot{P}\dot{P}$ и $\dot{S}\dot{S}$ – на 1.

SH-волну отражается, сохраняя прямолинейность фронта, под углом, равным углу падения, с прежней амплитудой.

3.3.2 Волны Рэлея

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях упругого двухмерного полупространства в вакууме в отсутствие объемных сил [52] (ось x_1 направлена вдоль границы, x_2 – вглубь среды). Попробуем найти решение уравнений

(1.3) в виде

$$\begin{aligned}\phi &= Ae^{-\alpha x_2 + iq(x_1 - ct)}, \alpha > 0, \\ \psi_3 &= Be^{-\beta x_2 + iq(x_1 - ct)}, \beta > 0, \psi_1 = \psi_2 = 0,\end{aligned}\quad (3.15)$$

где q – заданная частота, c – фазовая скорость, при граничных условиях $x_2 = 0, \sigma_{22} = \sigma_{11} = 0$. Предполагаем, что на бесконечности стремится к нулю. После подстановки получаем:

$$\begin{aligned}u_1 &= (iqAe^{-\alpha x_2} - \beta Be^{-\beta x_2})e^{iq(x_1 - ct)}, \\ u_2 &= (-\alpha Ae^{-\alpha x_2} - iqBe^{-\beta x_2})e^{iq(x_1 - ct)}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

После применения закона Гука, получим выражения для компонентов тензора напряжений на границе:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \mu q^2 \left[\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B \right] e^{iq(x_1 - ct)}, \\ \sigma_{12} &= \mu q^2 \left[-2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B \right] e^{iq(x_1 - ct)}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям, нужно положить

$$\begin{aligned}\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B &= 0, \\ -2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B &= 0.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Определитель линейной однородной системы относительно А и В должен быть равен нулю.

$$\begin{aligned}R &= (2 - k)^2 - 4\sqrt{(1 - k)(1 - \gamma k)} = 0, \\ k &= \frac{c^2}{c_2^2}, \\ \gamma &= \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Это уравнение определяет фазовую скорость c . Она не зависит от частоты q , а зависит лишь от соотношения $\frac{c_2}{c_1}$. Можно показать, что при любом

соотношении уравнение имеет корень, причем меньший единицы [51].

Таким образом, при любом соотношении коэффициентов Ляме в полу-пространстве будет наблюдаться приповерхностная волна, распространяющаяся со скоростью, меньшей, чем скорость поперечных волн. Любая фиксированная точка изучаемого тела или породы при этом будет двигаться по эллипсу. Поскольку переносимая ими энергия сконцентрирована у поверхности, ее рассеивание происходит медленнее, чем в объемных волнах. Поэтому волны данного типа можно наблюдать на значительном удалении от источника возмущения.

3.3.3 Волны Лэмба

Волнами Лэмба называют упругие возмущения, распространяющиеся в твердой пластинке (слое) со свободными границами, у которых есть смещение как в направлении распространения волны, так и перпендикулярно плоскости пластинки [54]. Иногда их называют нормальными волнами в пластинке.

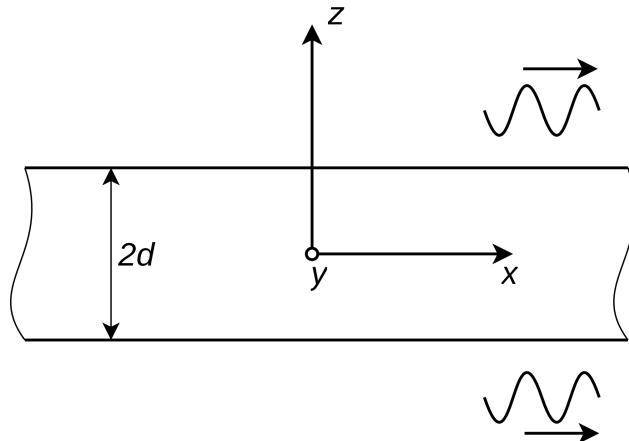


Рисунок 30 — Обозначения к задаче о распространении волн в пластинке.

Потенциалы, описывающие продольные и поперечные волны, имеют вид:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где U и W – компоненты смещения. Запишем их в следующей форме:

$$\begin{aligned}\phi &= A_s \operatorname{ch} qze^{ikx} + B_a \operatorname{sh} qze^{ikx}, \\ \psi &= D_s \operatorname{sh} sze^{ikx} + C_a \operatorname{ch} sze^{ikx}, \\ q &= \sqrt{k^2 - k_l^2}, \\ s &= \sqrt{k^2 - k_t^2}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Здесь A_s, B_a, D_s, C_a – произвольные постоянные, k – волновое число Лэмба. Кроме того, компоненты тензора напряжения σ_{xz} и σ_{zz} должны обращаться в ноль на $z = \pm d$. Следовательно

$$\begin{aligned}(k^2 + s^2) \operatorname{ch} qdA_s + (k^2 + s^2) \operatorname{sh} qdB_a + 2iks \operatorname{sh} sdC_a + 2iks \operatorname{ch} sdD_s &= 0, \\ (k^2 + s^2) \operatorname{ch} qdA_s - (k^2 + s^2) \operatorname{sh} qdB_a - 2iks \operatorname{sh} sdC_a + 2iks \operatorname{ch} sdD_s &= 0, \\ 2ikq \operatorname{sh} qdA_s + 2ikq \operatorname{ch} qdB_a - (k^2 + s^2) \operatorname{ch} sdC_a - (k^2 + s^2) \operatorname{sh} sdD_s &= 0, \\ -2ikq \operatorname{sh} qdA_s + 2ikq \operatorname{ch} qdB_a - (k^2 + s^2) \operatorname{ch} sdC_a + (k^2 + s^2) \operatorname{sh} sdD_s &= 0.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Отсюда мы получаем два характеристических уравнения, которые определяют собственные значения волнового числа k .

$$\begin{aligned}(k^2 + s^2)^2 \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd - 4k^2 qs \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sd &= 0, \\ (k^2 + s^2)^2 \operatorname{sh} qd \operatorname{ch} sd - 4k^2 qs \operatorname{ch} qd \operatorname{sh} sd &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Следовательно, для искомых потенциалов:

$$\begin{aligned}\phi &= A_s \operatorname{ch} q_s z e^{ik_s x} + B_a \operatorname{sh} q_a z e^{ik_a x}, \\ \psi &= \frac{2ik_s q_s \operatorname{sh} q_s d}{(k_s^2 + s_s^2) \operatorname{sh} s_s d} A_s \operatorname{sh} s_s z e^{ik_s x} + \frac{2ik_a q_a \operatorname{ch} q_a d}{(k_a^2 + s_a^2) \operatorname{ch} s_a d} B_a \operatorname{ch} s_a z e^{ik_a x}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 U &= U_s + U_a, \\
 W &= W_s + W_a, \\
 U_s &= Ak_s \left(\frac{\operatorname{ch} q_s z}{\operatorname{sh} q_s d} - \frac{2q_s s_s}{k_s^2 + s_s^2} \frac{\operatorname{ch} s_s z}{\operatorname{sh} s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t - \pi/2)}, \\
 W_s &= -Aq_s \left(\frac{\operatorname{sh} q_s z}{\operatorname{sh} q_s d} - \frac{2k_s^2}{k_s^2 + s_s^2} \frac{\operatorname{sh} s_s z}{\operatorname{sh} s_s d} \right) e^{i(k_s x - \omega t)}, \\
 U_a &= Bk_a \left(\frac{\operatorname{sh} q_a z}{\operatorname{ch} q_a d} - \frac{2q_a s_a}{k_a^2 + s_a^2} \frac{\operatorname{sh} s_a z}{\operatorname{ch} s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t - \pi/2)}, \\
 W_a &= -Bq_a \left(\frac{\operatorname{ch} q_a z}{\operatorname{ch} q_a d} - \frac{2k_a^2}{k_a^2 + s_a^2} \frac{\operatorname{ch} s_a z}{\operatorname{ch} s_a d} \right) e^{i(k_a x - \omega t)}. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

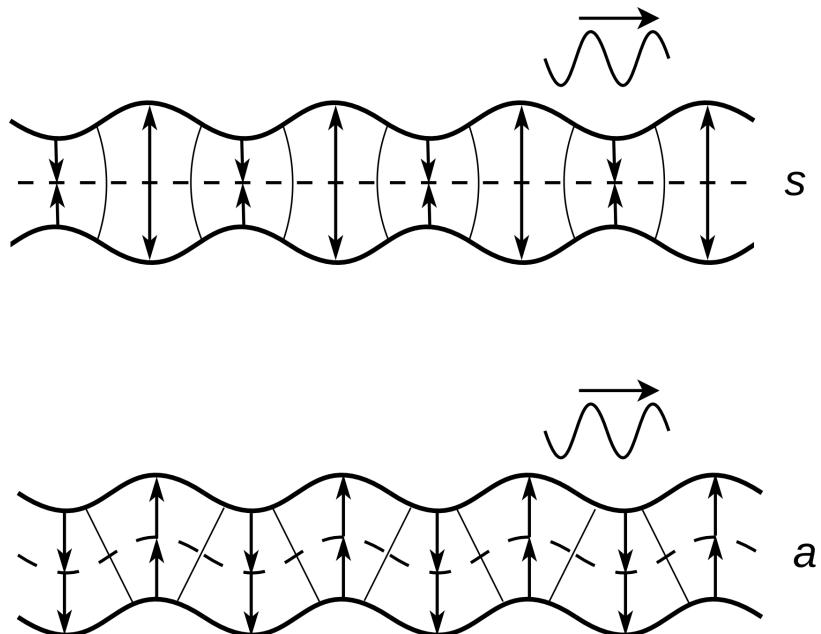


Рисунок 31 — Симметричные и антисимметричные волны.

Легко заметить, что полученные выражения описывают две группы волн, каждая из которых удовлетворяет волновым уравнениям движения и граничным условиям, т.е. может распространяться в пластинке независимо от другой. Первая группа волн (индекс s) описывает волны, в которых движение происходит симметрично плоскости $z = 0$. Соответственно, вторая – антисимметричные.

В пластинке толщиной $2d$ может существовать определенное количество симметричных и антисимметричных волн Лэмба, отличающихся фазовыми и групповыми скоростями. Это количество определяется числом ве-

щественных корней уравнений. Каждый корень определяет волновое число и фазовую скорость соответствующей волны. Мнимые корни соответствуют экспоненциально затухающим движениям пластиинки.

Заметим, что при увеличении пластиинки свойства волн s_0 и a_0 (нулевые волны) меняются: они становятся все более «похожи» одна на другую. При стремлении толщины пластиинки к бесконечности их фазовые скорости стремятся к фазовой скорости рэлеевской волны. Смещения становятся локализованными вблизи свободных границ пластиинки. При интерференции вблизи от излучателя, где разность фаз между ними близка к нулю, их суммарное акустическое поле подобно акустическому полю рэлеевской волны, поэтому такую совокупность волн s_0 и a_0 можно назвать квазирэлеевской волной. По мере удаления от излучателя разность фаз между этими компонентами растет, и достигает на некотором расстоянии L величины π .

$$L = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8(1 - \eta_R^2)} + \frac{1}{8(1 - \eta_R^2 \xi^2)} + \frac{1}{2 - \eta_R^2} \right) e^{2kR^d \sqrt{1 - \eta_R^2}} \quad (3.26)$$

На этом расстоянии квазирэлеевская волна, локализованная первоначально около той поверхности слоя, где расположен излучатель, «переходит» на противоположную поверхность. На расстоянии $2L$ происходит обратный «переход». Величина L возрастает с увеличением толщины слоя, стремясь к бесконечности при стремлении толщины d к бесконечности. То есть квазирэлеевская волна превращается в рэлеевскую.

3.3.4 Отражение сферической волны от свободной границы

Предположим, что однородное изотропное упругое тело со скоростями объемных волн α и β и плотностью ρ занимает полупространство $z > 0$. В точке $z = h, x = 0, y = 0$ расположен точечный источник Р-волны. Исследуем задачу о волнах Р- и SV-, упрощенную осевой симметрией относительно вертикальной прямой, проходящей через источник [53].

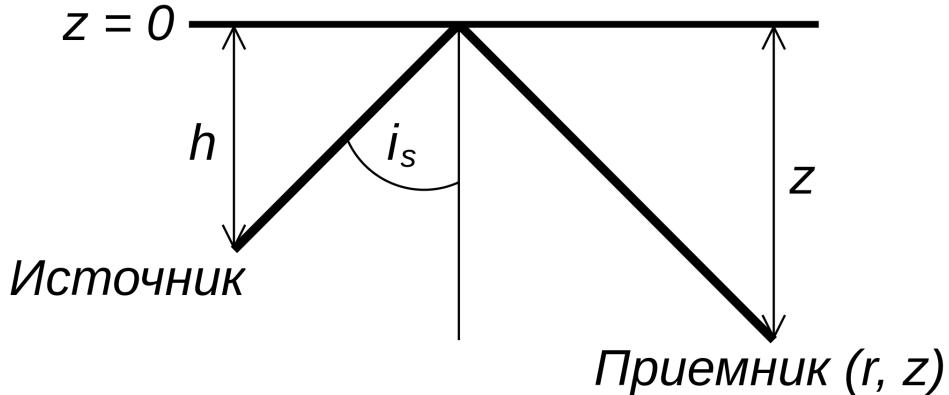


Рисунок 32 — Геометрия и обозначения к задаче об отражении сферической волны от свободной поверхности.

Тогда вектор смещения

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \psi)^T, \quad (3.27)$$

а потенциалы удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где Φ и Ψ – потенциалы объёмной силы:

$$\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla\Phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \Psi)^T. \quad (3.29)$$

Источник генерирует только Р-волну:

$$\Phi = A 4\pi \rho \alpha^2 \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) e^{-i\omega t}, \quad \Psi = 0, \quad (3.30)$$

то есть

$$\phi^*(\vec{x}, t) = A \frac{1}{R} \exp[i\omega(\frac{R}{\alpha} - t)], \quad (3.31)$$

где $\phi^*(\vec{x}, t)$ – падающая волна, $R = (x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{1/2}$.

Сумма падающей и отражённой P-волны:

$$\begin{aligned}\phi &= Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp(i\omega\xi|z - h|) dp + \\ &+ Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \dot{P} \dot{P} \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp(i\omega\xi(z + h)) dp.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Отраженная SV-волна:

$$\phi = Ai\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty \left(\frac{1}{i\omega p} \frac{\beta}{\alpha} \dot{P} \dot{S} \right) \frac{p}{\xi} J_0(\omega pr) \exp(i\omega\xi(\xi h + \eta z)) dp. \quad (3.33)$$

Обобщенное отражение P-волны распадается, с увеличением расстояния, на три различных типа P-волн: отраженная P-волна, поверхностная S-волна и P-компоненты рэлеевской волны. Из тех же уравнений мы можем получить оценку расстояния формирования волны Рэлея:

$$\tan i_s = \frac{r}{z + h} < \frac{C_R}{(\alpha^2 - C_R^2)^{1/2}}. \quad (3.34)$$

Аналогично, на три типа распадается отраженная SV-волна.

3.3.5 Расчёт отражения сферической волны

Для проверки изотропии схемы и корректности расчёта при отражении от границы был произведён расчёт модельной задачи об отражении сферической волны от свободной поверхности. Параметры расчёта:

$$\begin{aligned}\lambda &= 20000, \\ \mu &= 10000, \\ \rho &= 1.\end{aligned}\tag{3.35}$$

На рис. 33 изображены результаты расчётов. Видны три группы волн – исходная волна, распространяющаяся вглубь полупространства, отражённая продольная волна со сферическим фронтом, отражённая поперечная волна со сферическим фронтом и «окном» на нормали к поверхности.

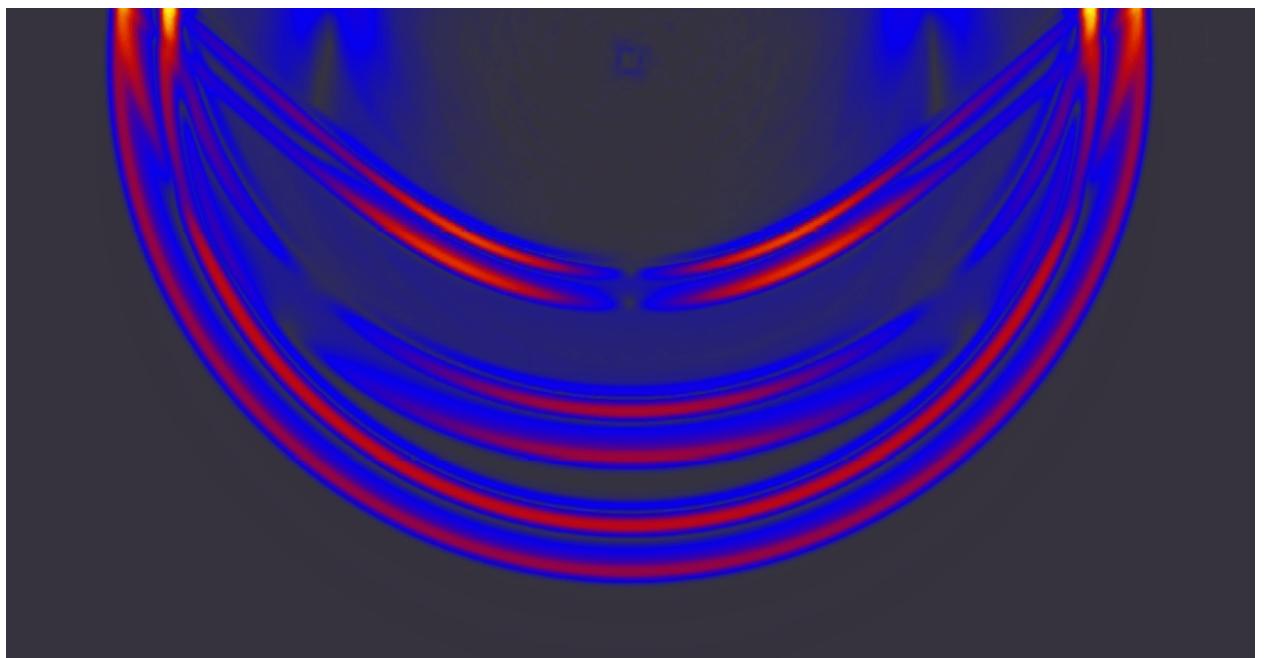


Рисунок 33 – Отражение сферической волны от свободной границы.

3.3.6 Расчёт волны Лэмба

Для проверки работы метода в случае пластины малой толщины был выполнен расчёт модельной задачи об ударе по тонкой пластине. Параметры расчёта:

$$\begin{aligned}\lambda &= 20000, \\ \mu &= 10000, \\ \rho &= 1, \\ P = \sigma_n &= -10000,\end{aligned}\tag{3.36}$$

где $P = \sigma_n$ – значение внешнего давления, действующей на пластину по нормали к её поверхности.

На рис. 34 изображены результаты расчётов. Видно распространение возмущения по пластине, конечные деформации в пластине, формирование волны Лэмба (квазирэлеевской волны).

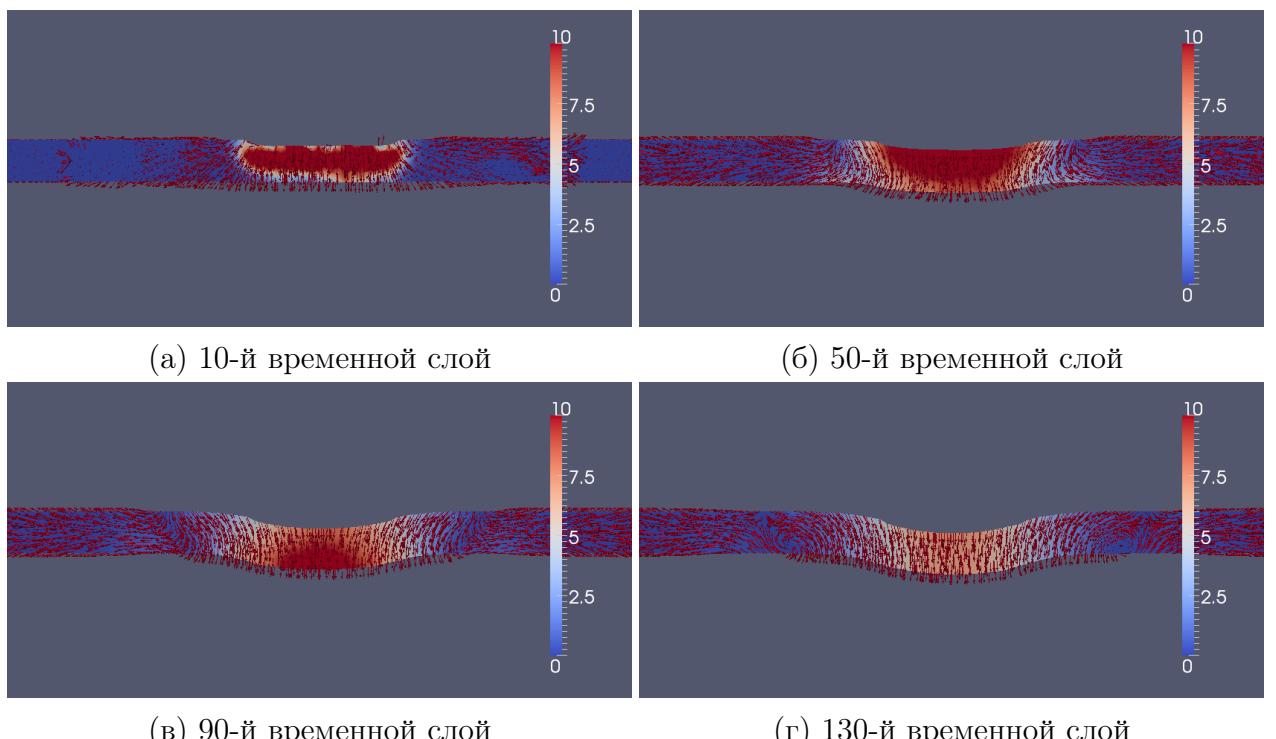


Рисунок 34 — Формирование волны Лэмба. Цветом показан модуль скорости.

3.4 Волны на контактной границе

3.4.1 Преломление на плоской контактной границе

Аналогично случаю со свободной границей, рассмотрим прохождение плоского волнового фронта через плоский контакт между двумя бесконечными средами. Условие на контакте считается полным слипанием: все компоненты скорости и напряжений равны. В случае контакта мы также рассматриваем P-, SV- и SH-волны. SH-волны распространяются, преломляются и отражаются так же независимо, а P- и SV-волны так же генерируют друг друга при отражении и преломлении [50].

Приведем математические соотношения для падающих, преломленных и отраженных SH-волн. Обозначения приведены на рисунке 35.

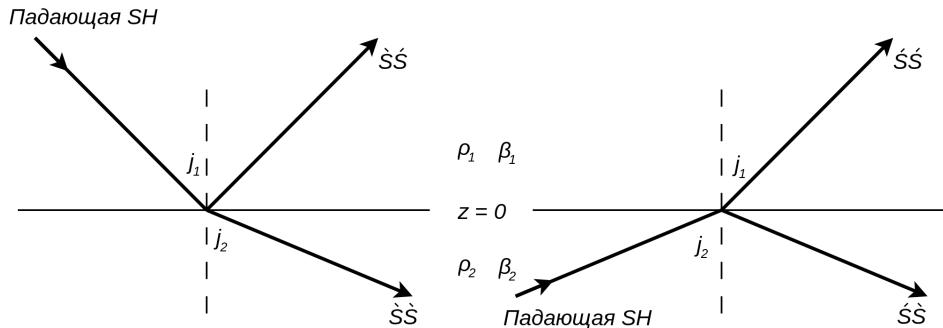


Рисунок 35 — Обозначения для четырех возможных коэффициентов отражения и преломления для задачи о падении волн SH.

Исходя из непрерывности у-компоненты смещения и уз-компоненты напряжения мы находим коэффициенты рассеяния:

$$\begin{aligned}\dot{S}S &= \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 - \rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\Delta}, \\ \acute{S}\acute{S} &= \frac{2\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\Delta}, \\ \dot{S}\acute{S} &= \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\Delta}, \\ \acute{S}\dot{S} &= -\dot{S}S,\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\Delta = \rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2.$$

Приведем математические соотношения для падающих, преломленных и отраженных P- и SV-волн. Обозначения приведены на рисунке 36.

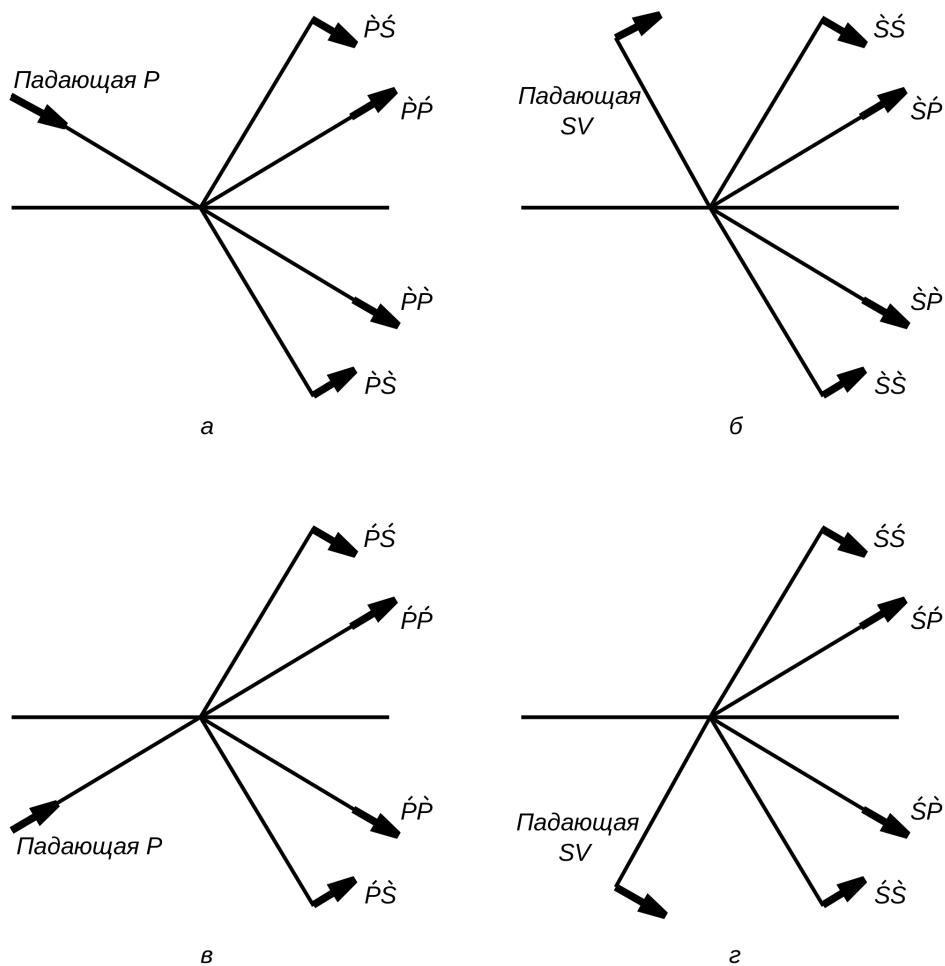


Рисунок 36 — Обозначения для 16 возможных коэффициентов отражения и преломления, возникающих в задачах о волнах Р- и SV- на жесткой границе между двумя различными твердыми полупространствами.

Коэффициенты рассеяния удобно представить в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}\acute{P} & \dot{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\ \dot{P}\acute{S} & \dot{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \dot{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\ \dot{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix}$$

где каждый столбец представляет собой четыре волны, рассеянные на границе, на которую падает волна определенного типа. Из непрерывности

$u_x, u_y, \tau_{zx}, \tau_{zz}$ получаем четыре уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}
& \sin i_1(\dot{P}_1 + \dot{P}'_1) + \cos j_1(\dot{S}_1 + \dot{S}'_1) = \\
& = \sin i_2(\dot{P}_2 + \dot{P}'_2) + \cos j_2(\dot{S}_2 + \dot{S}'_2), \\
& \cos i_1(\dot{P}_1 - \dot{P}'_1) - \sin j_1(\dot{S}_1 - \dot{S}'_1) = \\
& = \cos i_2(\dot{P}_2 - \dot{P}'_2) - \sin j_2(\dot{S}_2 - \dot{S}'_2), \\
& 2\rho_1\beta_1^2 p \cos i_1(\dot{P}_1 - \dot{P}'_1) + \rho_1\beta_1(1 - 2\beta_1^2 p^2)(\dot{S}_1 - \dot{S}'_1) = \\
& = 2\rho_2\beta_2^2 p \cos i_2(\dot{P}_2 - \dot{P}'_2) + \rho_2\beta_2(1 - 2\beta_2^2 p^2)(\dot{S}_2 - \dot{S}'_2), \\
& \rho_1\alpha_1(1 - 2\beta_1^2 p^2)(\dot{P}_1 + \dot{P}'_1) - 2\rho_1\beta_1^2 p \cos j_1(\dot{S}_1 + \dot{S}'_1) = \\
& = \rho_2\alpha_2(1 - 2\beta_2^2 p^2)(\dot{P}_2 + \dot{P}'_2) - 2\rho_2\beta_2^2 p \cos j_2(\dot{S}_2 + \dot{S}'_2). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

В результате получаем коэффициенты матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned}
\dot{P}\dot{P} &= [(b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2})F - (a + d \frac{\cos i_1 \cos j_2}{\alpha_1 \beta_2})Hp^2]/D, \\
\dot{P}\dot{S} &= -2 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} (ab + cd \frac{\cos i_2 \cos j_2}{\alpha_2 \beta_2})p\alpha_1/(\beta_1 D), \\
\dot{P}\dot{P} &= 2\rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} F\alpha_1/(\alpha_2 D), \\
\dot{P}\dot{S} &= 2\rho_1 \frac{\cos i_1}{\alpha_1} Hp\alpha_1/(\beta_2 D), \\
\dot{S}\dot{P} &= -2 \frac{\cos j_1}{\beta_1} (ab + cd \frac{\cos i_2 \cos j_2}{\alpha_2 \beta_2})p\beta_1/(\alpha_1 D), \\
\dot{S}\dot{S} &= -[(b \frac{\cos j_1}{\beta_1} - c \frac{\cos j_2}{\beta_2})E - (a + d \frac{\cos i_2 \cos j_1}{\alpha_2 \beta_1})Gp^2]/D, \\
\dot{S}\dot{P} &= -2\rho_1 \frac{\cos j_1}{\beta_1} Gp\beta_1/(\alpha_2 D), \\
\dot{S}\dot{S} &= 2\rho_1 \frac{\cos j_1}{\beta_1} E\beta_1/(\beta_2 D), \\
\dot{P}\dot{P} &= 2\rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} F\alpha_2/(\alpha_1 D), \\
\dot{P}\dot{S} &= -2\rho_2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} Gp\alpha_2/(\beta_1 D), \\
\dot{P}\dot{P} &= -[(b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c \frac{\cos i_2}{\alpha_2})F + (a + d \frac{\cos i_2 \cos j_1}{\alpha_2 \beta_1})Gp^2]/D, \\
\dot{P}\dot{S} &= 2 \frac{\cos i_2}{\alpha_2} (ac + bd \frac{\cos i_1 \cos j_1}{\alpha_1 \beta_1})p\alpha_2/(\beta_2 D), \\
\dot{S}\dot{P} &= 2\rho_2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} Hp\beta_2/(\alpha_1 D), \\
\dot{S}\dot{S} &= 2\rho_2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} E\beta_2/(\beta_1 D), \\
\dot{S}\dot{P} &= 2 \frac{\cos j_2}{\beta_2} (ac + bd \frac{\cos i_1 \cos j_1}{\alpha_1 \beta_1})p\beta_2/(\alpha_2 D), \\
\dot{S}\dot{S} &= [(b \frac{\cos j_1}{\beta_1} - c \frac{\cos j_2}{\beta_2})E + (a + d \frac{\cos i_1 \cos j_2}{\alpha_1 \beta_2})Hp^2]/D,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

где

$$\begin{aligned}
E &= b \frac{\cos i_1}{\alpha_1} + c \frac{\cos i_2}{\alpha_2}, \\
F &= b \frac{\cos j_1}{\beta_1} + c \frac{\cos j_2}{\beta_2}, \\
G &= a - d \frac{\cos i_1}{\alpha_1} \frac{\cos j_2}{\beta_2}, \\
H &= a - d \frac{\cos i_2}{\alpha_2} \frac{\cos j_1}{\beta_1}, \\
D &= EF + GH p^2 = \det M(\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2), \\
a &= \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2), \\
b &= \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1 \beta_1^2 p^2, \\
c &= \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2 \beta_2^2 p^2, \\
d &= 2(\rho_2 \beta_2^2 + \rho_1 \beta_1^2).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.4.2 Волны Стоунли

При определенном соотношении параметров материалов сред по аналогии с волнами Рэлея возникают волны Стоунли. Например, такие волны могут всегда существовать на границе твердого тела и жидкости. Так же, как и волны Рэлея, волны Стоунли имеют вихревую структуру (каждая точка движется по эллипсу), не зависят от частоты и, следовательно, не обладают дисперсией.

3.4.3 Волны Лява

Рассмотрим упругий слой постоянной толщины H с упругими постоянными λ, μ и плотностью ρ , лежащий на упругом полупространстве с параметрами λ^*, μ^* и плотностью ρ^* [49]. Будем предполагать, что скорость распространения поперечных волн в слое меньше соответствующей скорости в полупространстве.

Пусть граница слоя $x_2 = -H$ свободна от нагрузки. Тогда при $x_2 = -H$ верно

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \tag{3.41}$$

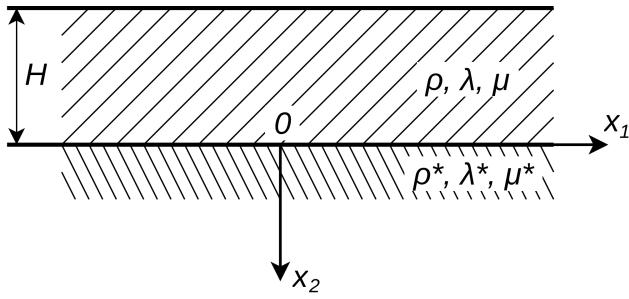


Рисунок 37 — К формированию волны Лява.

а на границе раздела

$$u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*, u_3 = u_3^*, \sigma_{22} = \sigma_{22}^*, \sigma_{12} = \sigma_{12}^*, \sigma_{23} = \sigma_{23}^*. \quad (3.42)$$

Потребуем, чтобы при $x_2 \rightarrow \infty$, смещения стремились к нулю (гранич-ная волна), причем отличны от нуля были только компоненты u_3 и u_3^* , не зависящие от x_3 . Такая волна, если существует, является поперечной. Из волнового уравнения получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{c_{2*}^2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

То есть при $x_2 = -H$ верно $\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$, а при $x_2 = 0$ верно $u_3 = u_3^*, \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \mu^* \frac{\partial u_3^*}{\partial x_2}$.

Будем искать такие решения, которые описываются синусоидальным законом:

$$\begin{aligned} u_3 &= f(x_2) e^{iq(x_1 - ct)}, \\ u_3^* &= f_*(x_2) e^{iq(x_1 - ct)}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где q — заданная частота, c — неизвестная фазовая скорость. После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} f'' + q^2 \alpha^2 f &= 0, \alpha = \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1}, \\ f_*'' - q^2 \beta^2 f_* &= 0, \beta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{2*}^2}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} f(x_2) &= A \sin \alpha q x_2 + B \cos \alpha q x_2, \\ f_*(x_2) &= C e^{-\beta q x_2} + C_1 e^{\beta q x_2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Для ограниченности решения $f_*(x_2)$ следует принять $C_1 = 0$, тогда $f_*(x_2) = C e^{-\beta q x_2}$. Из граничных условий следует, что $B = C$, $A = -\frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha} C$. В итоге получаем

$$\operatorname{tg} \alpha q H = \frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha}. \quad (3.47)$$

Отсюда мы можем определить отношение c/c_2 как функцию параметров qH , c_2/c_{*2} , μ_*/μ . Тогда окончательные формулы для перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_3 &= C \left(\cos \alpha q x_2 - \frac{\mu_* \beta}{\mu \alpha} \sin \alpha q x_2 \right) e^{iq(x_1 - ct)}, \\ u_3^* &= C e^{-q \beta x_2 + iq(x_1 - ct)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким образом, мы получили волну, бегущую в направлении оси x_1 со скоростью c . Перемещения в волне лежат в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, и параллельны границам слоя. Существенно отметить, что фазовая скорость их зависит от частоты, т.е. эти волны имеют дисперсию. Аналогично волнам Рэлея, волны Лява концентрируются вблизи поверхности раздела. Поэтому они затухают медленнее, чем объемные волны, и могут наблюдаться на значительном удалении от источника.

3.4.4 Расчёт волн Стоунли

Для проверки работы метода для многослойной конструкции с различными реологическими свойствами слоёв был выполнен расчёт модельной задачи об ударе по пятислойной преграде.

Параметры расчёта:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 20000, & \lambda_2 &= 5000, \\ \mu_1 &= 10000, & \mu_2 &= 2000, \\ \rho_1 &= 1, & \rho_2 &= 1, \\ m &= 0.1, & v_0 &= 500. \end{aligned} \quad (3.49)$$

где λ_1, μ_1, ρ_1 – параметры 1-го, 3-го и 5-го слоёв, λ_2, μ_2, ρ_2 – параметры 2-го и 4-го слоёв, m – масса ударника, v_0 – начальная скорость ударника.

На рис. 38 изображены результаты расчётов. Видно формирование характерных вихревых волн в слоях.

3.4.5 Расчёт контакта независимых тел

Для проверки расчета контактных границ и взаимодействия тел был выполнен расчёт задачи об ударе по пластине с явным моделированием пластины и ударника на отдельных сетках.

Параметры расчёта:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 70000, & \lambda_2 &= 30000, \\ \mu_1 &= 10000, & \mu_2 &= 5000, \\ \rho_1 &= 1, & \rho_2 &= 1, \\ v_0 &= 10. & & \end{aligned} \quad (3.50)$$

где λ_1, μ_1, ρ_1 – параметры ударника, λ_2, μ_2, ρ_2 – параметры пластины, v_0 – начальная скорость ударника.

На графиках (см. рис. 39) изображены поля скоростей в пластине и ударнике.

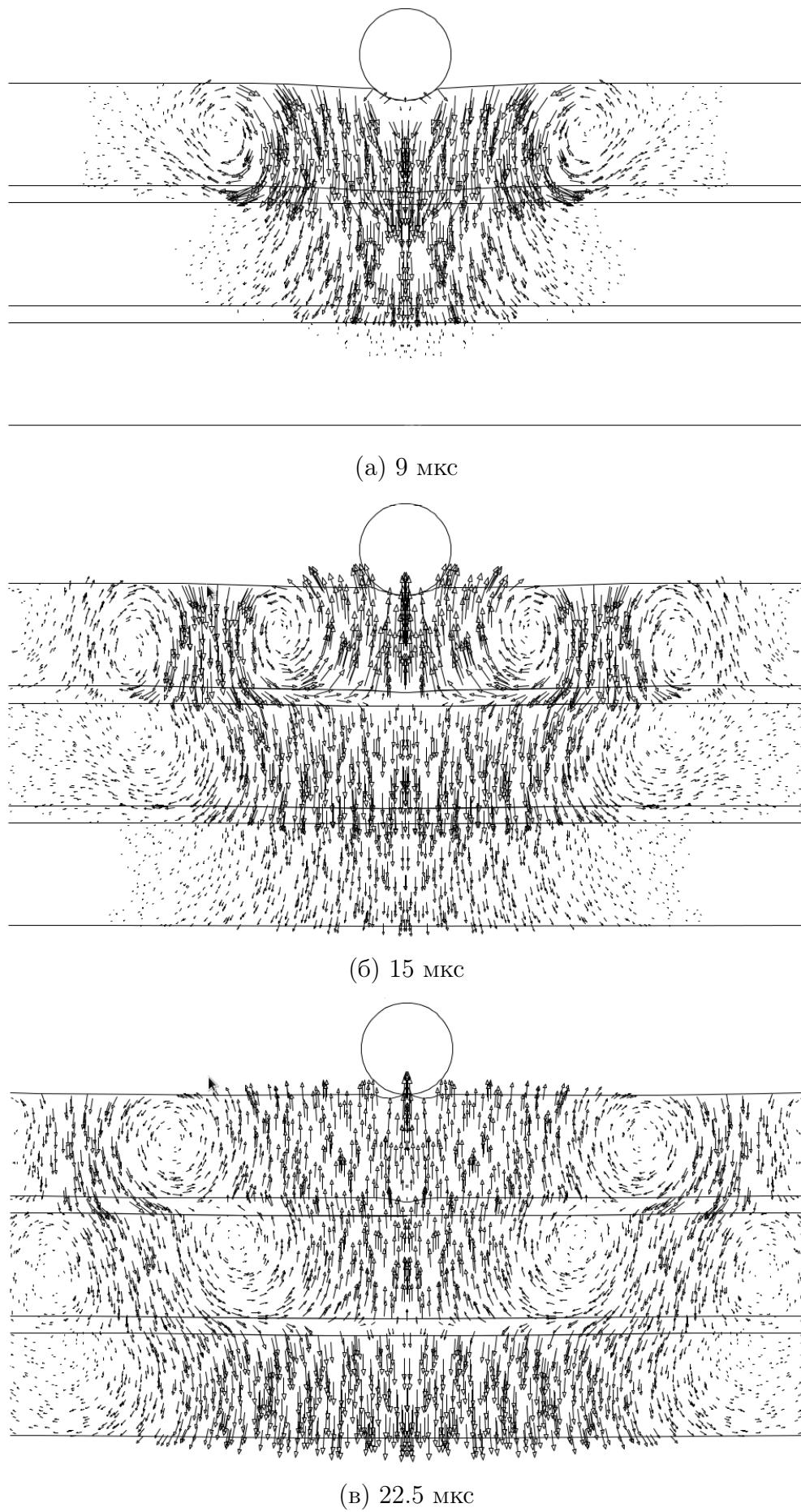
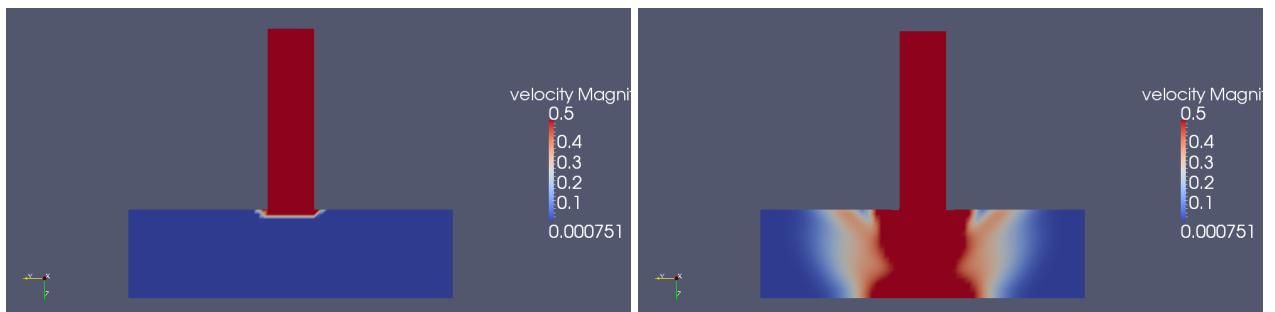
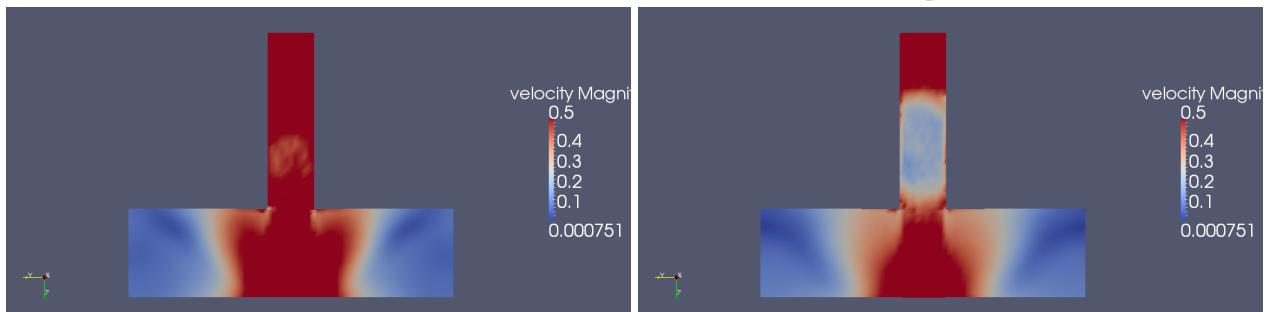


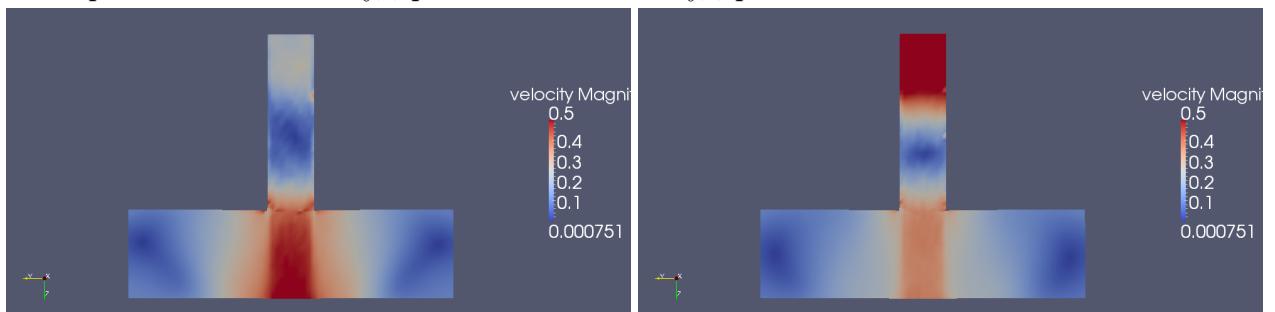
Рисунок 38 — Формирование волн Стоунли в многослойной преграде.



(а) 1-й временной слой. Начало взаимодействия. (б) 40-й временной слой. Отражение волны от тыльной поверхности пластины.



(в) 120-й временной слой. Проникновение отражённой волны в ударник. (г) 160-й временной слой. Нижняя половина ударника остановилась.



(д) 200-й временной слой. Полная остановка ударника. (е) 240-й временной слой. Начало отскока ударника.

Рисунок 39 — Задача контакта двух независимых тел. Цветом изображен модуль скорости.

3.5 Генерация волн разных типов

При численном эксперименте мы можем смоделировать любой тип волны с любым видом ее фронта, задав соответствующие начальные условия. Однако для сравнения с вещественным экспериментом более удобно моделировать волновые процессы в постановке, приближенной к реальной. Чаще всего это означает, что берется невозмущенная среда конечной протяженности, и задается протяженное во времени возмущение на границе.

В 1904 году Лэмб дал точное решение задачи, в которой источник возмущения действовал как импульс, приложенный к участку свободной границы твердого полупространства по нормали к ней [52]. При таком воздействии мы наблюдаем три волновых фронта: продольная волна со сферическим фронтом, поперечная волна со сферическим фронтом и «окном» на нормали к поверхности, волна Рэлея. На данный момент термин «задача Лэмба» часто относят к более общему случаю произвольного источника в среде с одной границей.

Поперечные и продольные волны с прямолинейным фронтом, а также их отражение от свободной границы и преломление на контакте, удобно рассматривать при воздействии на более широкую область, чем в задаче Лэмба. Если брать достаточно большую область воздействия и далеко относить границы моделируемого тела, то возмущения на границах за время моделирования не успеют дойти до интересующего нас участка.

Генерация волн Рэлея и Лэмба может производиться большим количеством разных способов [54]. Они достаточно внимательно исследуются в технике, особенно в задачах ультразвуковой дефектоскопии. Заметим, что при моделировании можно обойтись более простыми методами: например, прямоугольный импульс, аналогичный задаче Лэмба. Объемные волны, «паразитные» по отношению к изучению поверхностных волн, могут быть легко отсечены после расчета.

3.6 Волновые процессы и критерии разрушения материала

Различные критерии разрушения описаны в разделе 1.9. Далее используются четыре критерии – максимальное сжатие, максимальное растяжение, максимальное сдвиговое напряжение, энергия формоизменения (эквивалентное напряжение Мизеса). Данные критерии имеют ясный физический смысл, не требуют введения дополнительных констант и покрывают основные сценарии разрушения материала. Как отмечено в разделе 1.9, существуют сценарии, в которых данные критерии разрушения соотносятся с практикой неудовлетворительно, и требуется применение критериев Мора и Друкера-Прагера. Такие случаи необходимо рассматривать отдельно, в том числе определять необходимые константы для материалов.

Для тестирования работы критериев разрушения был проведен расчет соударения ударника и монолитной преграды. Параметры расчёта:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 70000, & \lambda_2 &= 30000, \\ \mu_1 &= 30000, & \mu_2 &= 15000, \\ \rho_1 &= 8, & \rho_2 &= 6, \\ v_0 &= 1000. \end{aligned} \tag{3.51}$$

где λ_1, μ_1, ρ_1 – параметры ударника, λ_2, μ_2, ρ_2 – параметры пластины, v_0 – начальная скорость ударника.

В результате множественного отражения волн в материале формируется итоговое распределение напряжений. Таким образом, можно выделить области срабатывания критериев разрушения различных типов. Результаты расчёта представлены на рис. 40. Показаны максимальные значения напряжений в каждой точке за всё время соударения.

Область наибольшей концентрации сжимающих и сдвиговых напряжений локализуется в месте удара и имеет характерные размеры порядка размера ударника. Растягивающие напряжения действуют как в области удара (на этапе отскока), так и в тыльных областях ударника и пластины. Сдвиговые напряжения, помимо области удара, образуют откольный конус с тыльной стороны пластины. Распределение сдвиговых напряжений и напряжения Мизеса качественно совпадают.

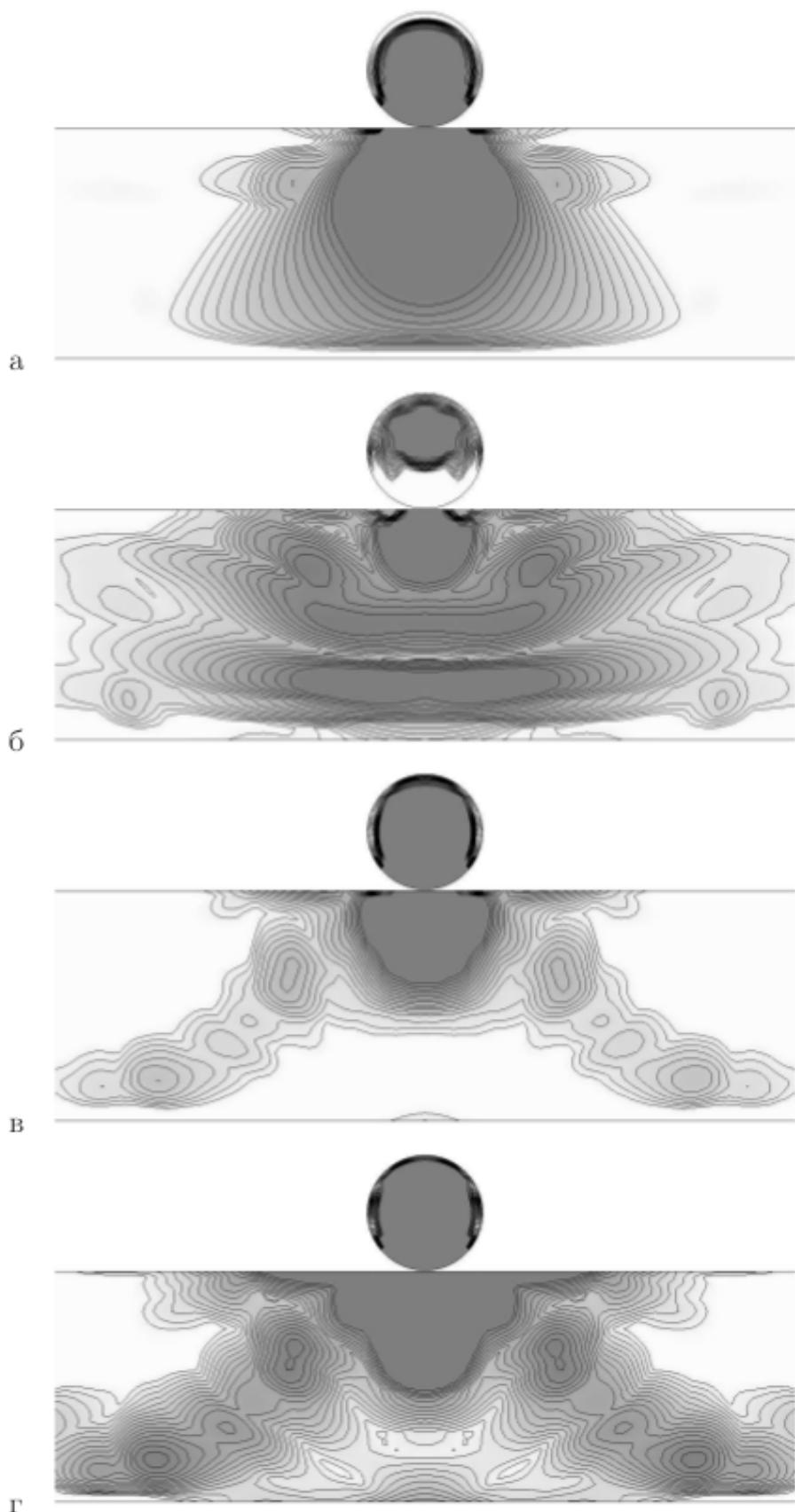


Рисунок 40 — Тестирование критериев разрушения: а - сжимающие напряжения, б - растягивающие напряжения, в - сдвиговые напряжения, г – напряжение Мизеса.

3.7 Расчёт многослойной конструкции

Первым приближением реальной композитной конструкции может выступать многослойная среда. Рассмотрим модель композита в следующем приближении – структура композитной панели состоит из трёх субпакетов, соединённых эпоксидной смолой. При этом каждый субпакет изотропен по своим свойствам, толщина субпакетов и склеек одинакова.

Для расчёта данной пятислойной конструкции использовались обезразмеренные параметры, приведённые в таблице 2.

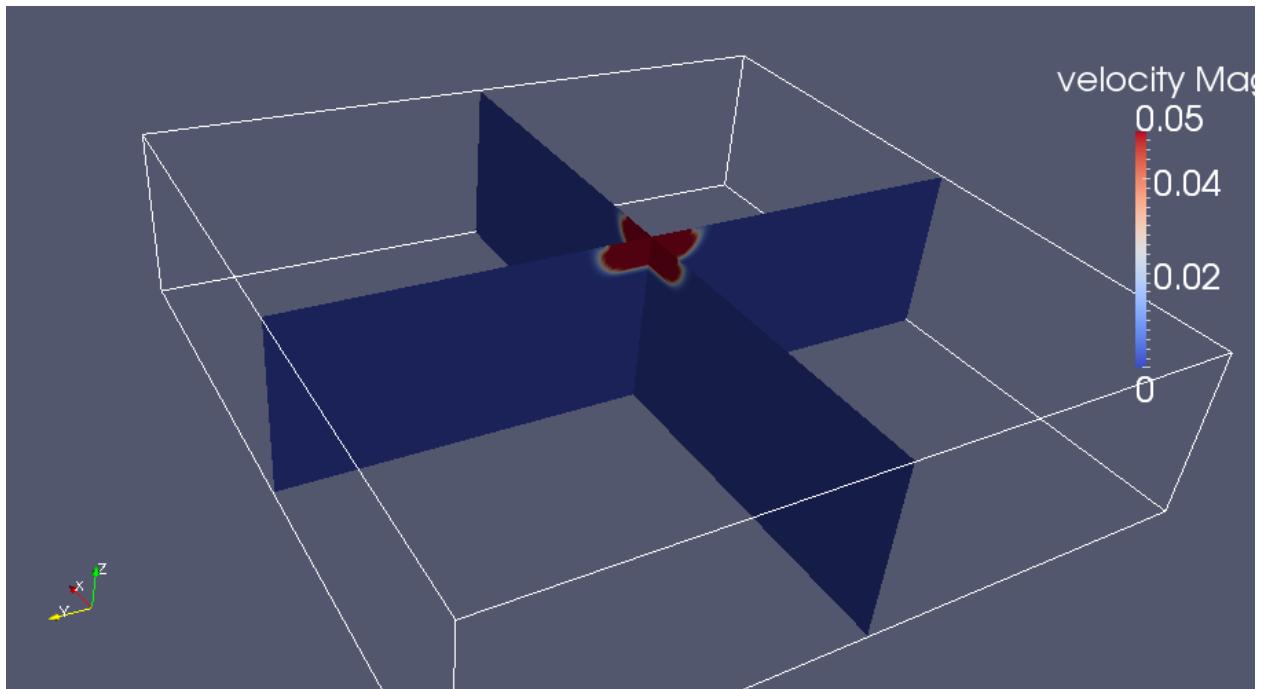
Таблица 2 – Безразмерные характеристики слоёв

Слой	ρ	λ	μ
Эпоксидная смола	1.25	1440	960
Субпакет	1.25	4620	3080

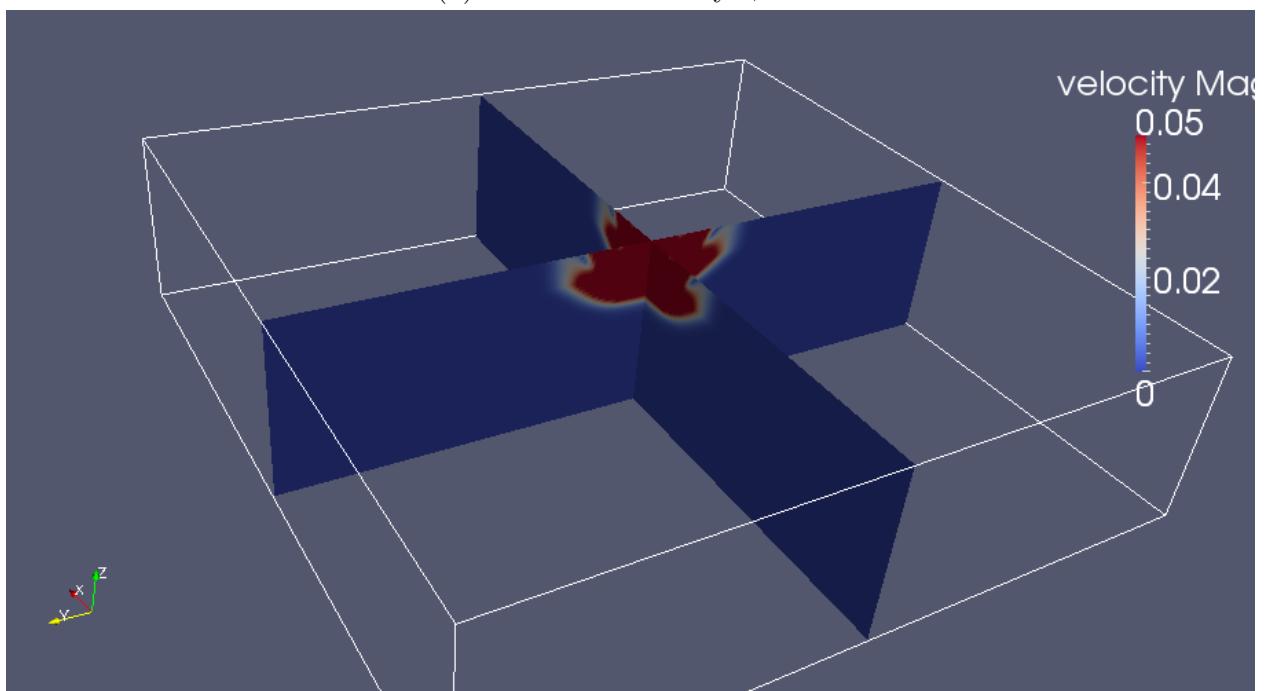
Давление в зоне воздействия ударника задавалось равным 50 МПа (50 единиц в безразмерных величинах).

На рис. 41 и 42 показаны результаты численного расчёта данной задачи. Изображён процесс прохождения волны через конструкцию, видно отражение и преломление на границах раздела слоёв.

На рис. 43 видна сформировавшаяся волновая картина – волна, созданная начальным возмущением, отраженные от границ волны, поверхностные волны и волны на внутренних контактных границах. Так как волны, распространяющиеся вдоль поверхности и контактных границ, затухают заметно медленнее объёмных волн, то можно ожидать, что в области, удалённой от места первоначального удара, именно они будут вносить основной вклад в итоговые напряжения. Следовательно, в дальней зоне большую роль в общей прочности конструкции будет играть критерий адгезионной прочности между слоями.

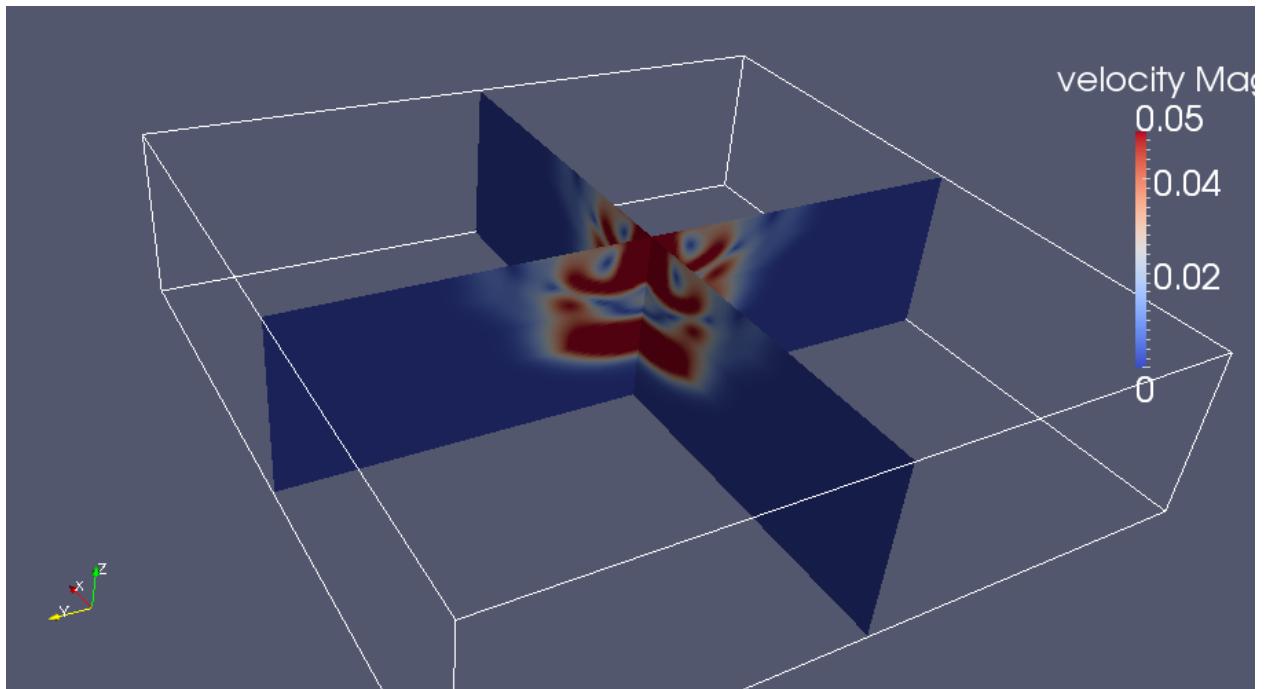


(а) Начальное возмущение.

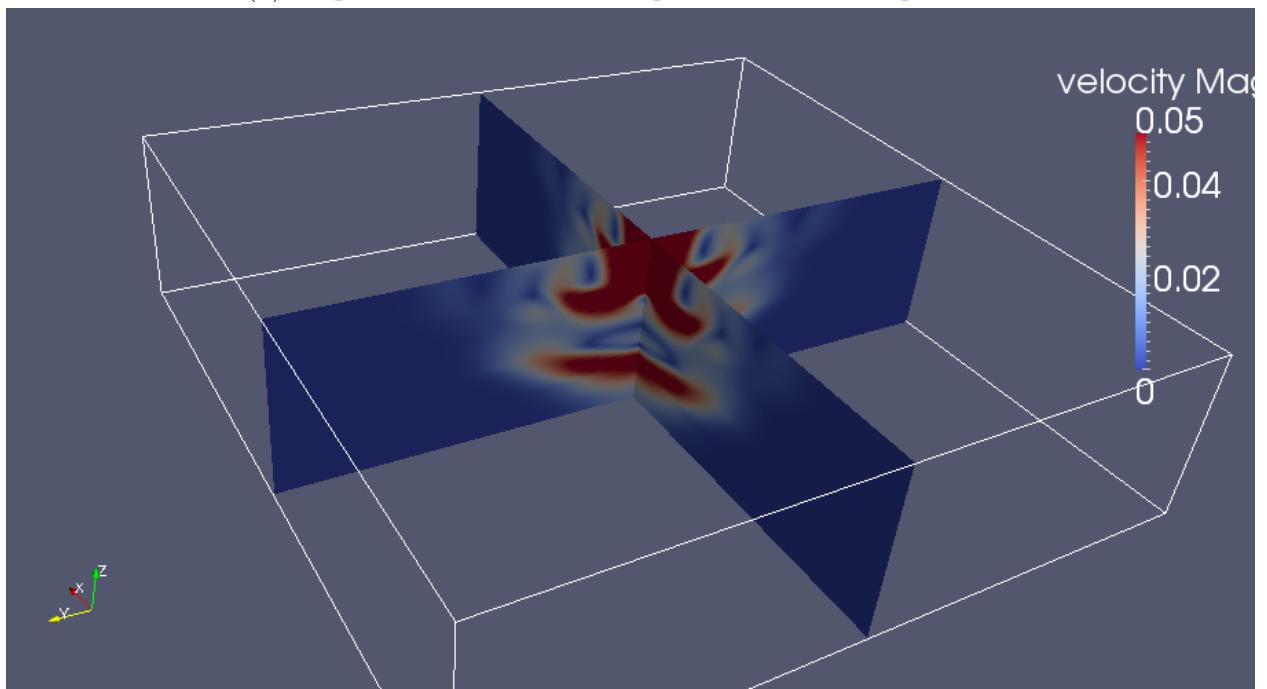


(б) Отражение волны от первой контактной границы.

Рисунок 41 — Прохождений волной первого слоя преграды. Цветом изображён модуль скорости в двух взаимно перпендикулярных срезах.

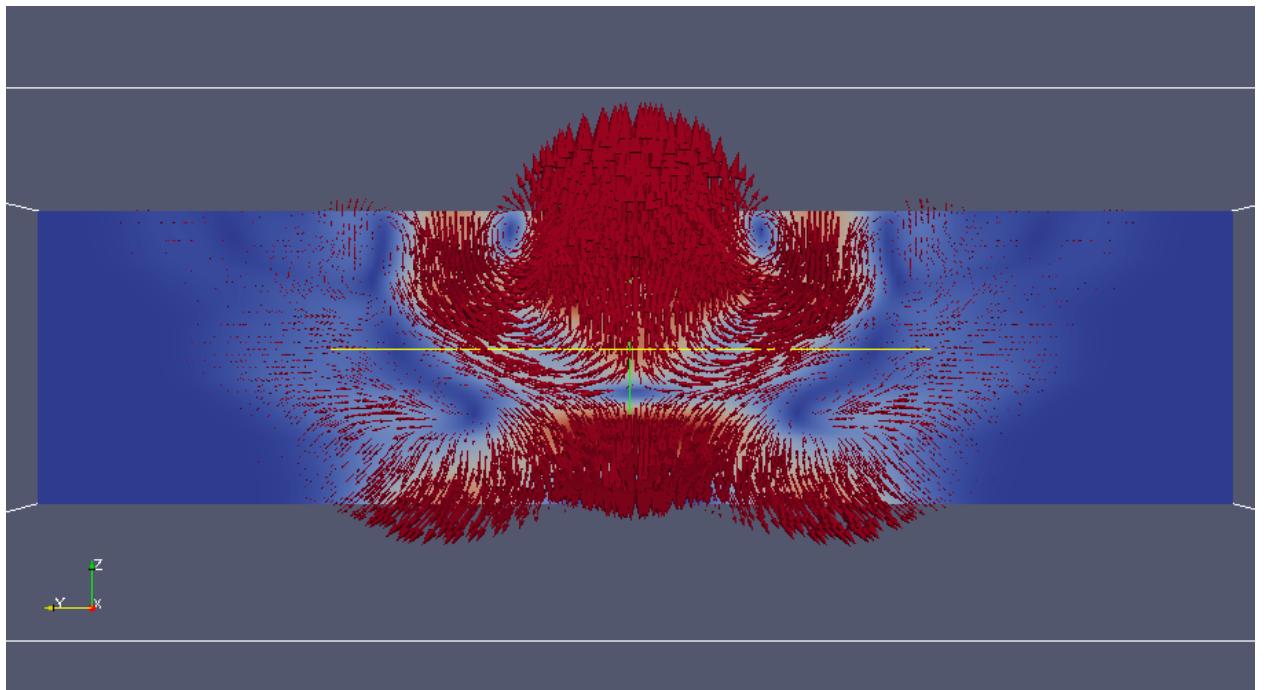


(а) Отражение волны от второй контактной границы.

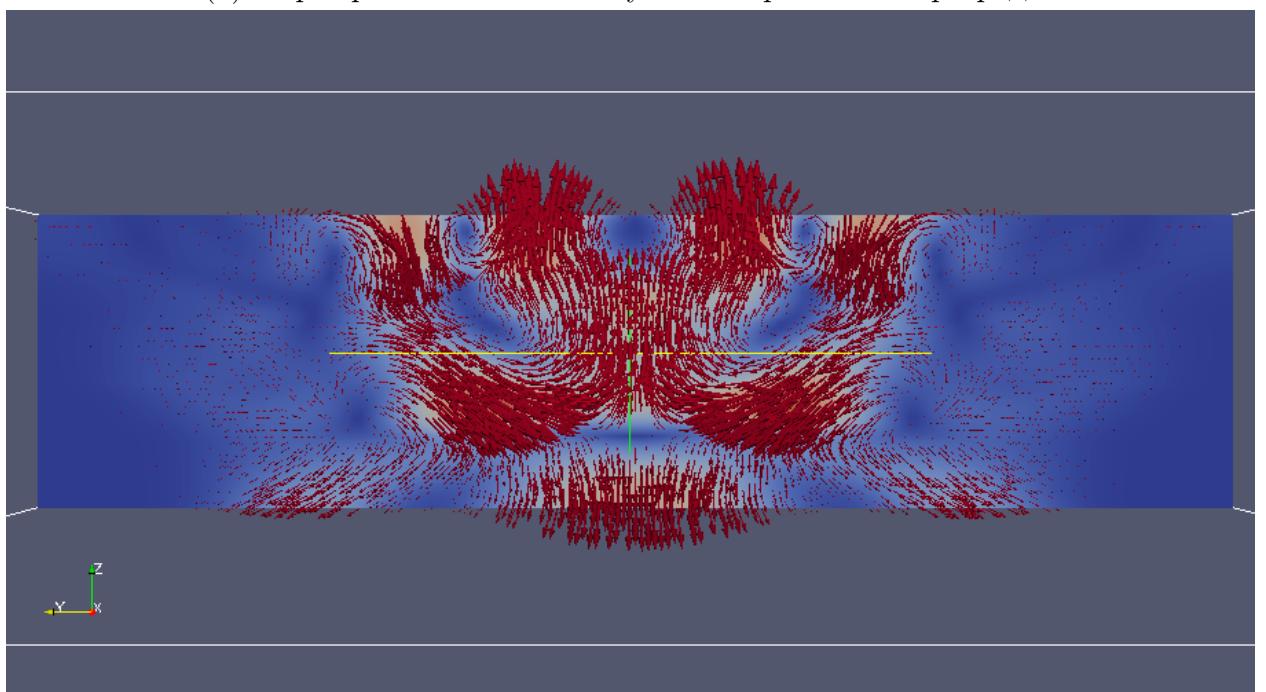


(б) Отражение волны от третьей контактной границы.

Рисунок 42 — Прохождений волной последующих слоёв преграды. Цветом изображён модуль скорости в двух взаимно перпендикулярных срезах.



(а) Формирование волны Стоунли в первом слое преграды.



(б) Распространение волны Стоунли в первом слое преграды. Формирование волн Стоунли в третьем и пятом слоях.

Рисунок 43 — Поверхностные волны в конструкции. Цветом изображён модуль скорости. Стрелками обозначены поля скоростей.

3.8 Взаимодействие падающей волны с поврежденной зоной

Отдельной задачей является моделирование тела с повреждениями. Данная задача важна при определении последствий повторных ударов по конструкции. В этом случае конструкция может уже не являться сплошной, в ней содержатся трещины, зоны раздробленного материала и другие повреждения.

Реологические характеристики поврежденных зон заметно отличаются от характеристик окружающего материала. С одной стороны, это приводит к тому, что остаточная прочность конструкции может заметно снизиться по сравнению с первоначальной. С другой стороны, появившиеся неоднородности оказывают влияние на волновую картину при повторных воздействиях и могут заметно ее искажать.

В данной работе рассматривается взаимодействие волны нагрузки с зоной разрушенного материала. Расчетная область с сеткой представлена на рис. 44. Разрушенная зона и окружающий неповрежденный материал моделируются явным образом на отдельных сетках. На контактной границе стоит условие полного слипания.

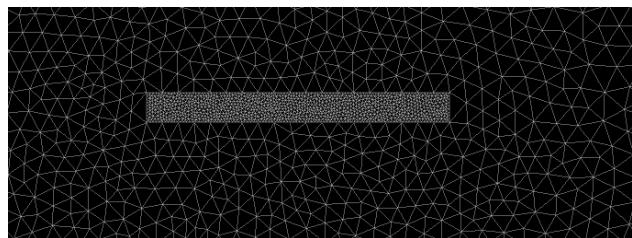


Рисунок 44 — Расчетная область с сеткой.

Материал исходной среды принимается хрупким, что соответствует эпоксидной матрице композита. В этом случае разрушенная зона представляет собой раздробленный материал. Через зону разрушения такого типа продольные волны проходят медленнее, чем через окружающую неповрежденную среду, а поперечные волны практически не проходят. В связи с этим раздробленная зона моделируется изменением характеристик материала - параметр λ уменьшается в два раза, параметр μ принимается близким к нулю [18, 19].

Характеристики материалов приведены в табл. 3

Таблица 3 — Характеристики исходного и разрушенного материала

Материал	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа	c_p , м/с	c_s , м/с
Матрица (эпоксидная смола)	1250	1.44	0.96	1640	876
Разрушенная матрица	1250	0.73	0.01	775	89

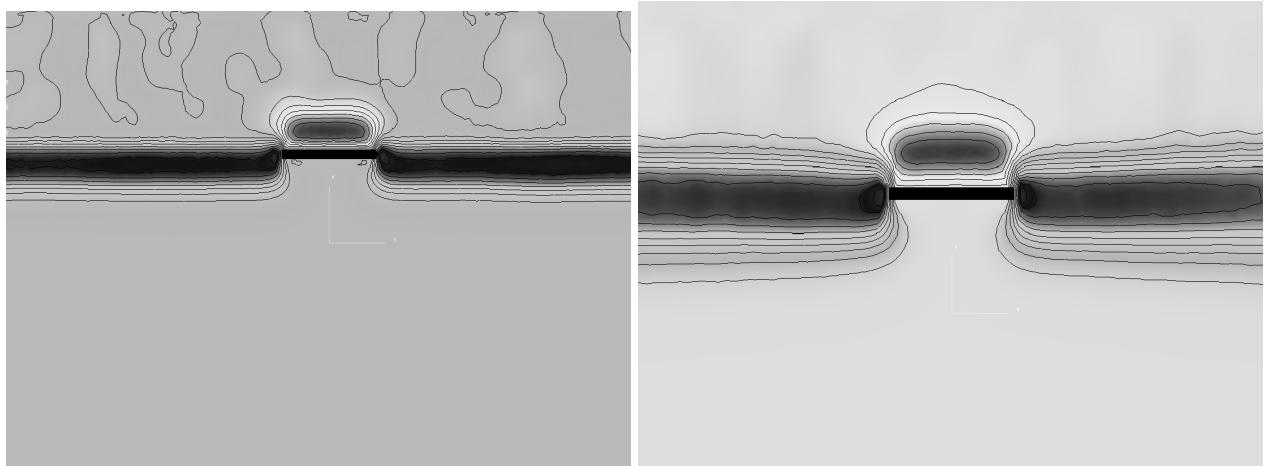
Разрушенная область имеет малые размеры по сравнению с полной конструкцией, что требует использовать в ней крайне мелкую сетку. Использование сетки такой же мелкости для расчета всего окружающего материала ведет к резкому увеличению требуемого объема как оперативной памяти в ходе расчёта, так и места на диске для сохранения результатов.

В связи с этим кажется разумным использовать сетки разной мелкости - более мелкую в малой разрушенной области и более грубую в неразрушенном окружающем материале [33]. Очевидно, что при этом точность решения в окружающей среде будет ниже, но в большинстве случаев это приемлемо. Более тонким вопросом является расчёт контактной границы в случае сеток разной мелкости. Описанный алгоритм с использованием виртуальных узлов позволяет считать контактную границу между сетками любой мелкости, но точность при этом, очевидно, будет определяться интерполяцией виртуальных узлов на более грубой сеткой.

Для тестирования совместного использования сеток разной мелкости было выполнено два расчёта. В первом расчёте мелкость сеток одинакова для разрушенной области и окружающего материала - используется мелкая сетка, размер элементов выбирается таким образом, чтобы на толщине разрушенной области (минимальный характерный размер задачи) было около десяти ячеек. Во втором расчёте используются сетки разной мелкости - внутри разрушенной области сетка такая же, как в первом случае, а сетка в окружающем материале в пять раз грубее.

На рис. 4б показан начальный этап отражения волны от разрушенной области. Видно, что из-за сильного отличия реологических параметров волна отражается практически полностью. Форма фронта для однородной мелкой сетки и для сеток разной мелкости не отличается.

На рис. 4б показан завершающий этап прохождения волнового фронта через раздробленную область. Форма фронта уже практически восстановилась после обтекания неоднородности. Видно, что при использовании неоднородной сетки интенсивность волны, отраженной от раздробленной

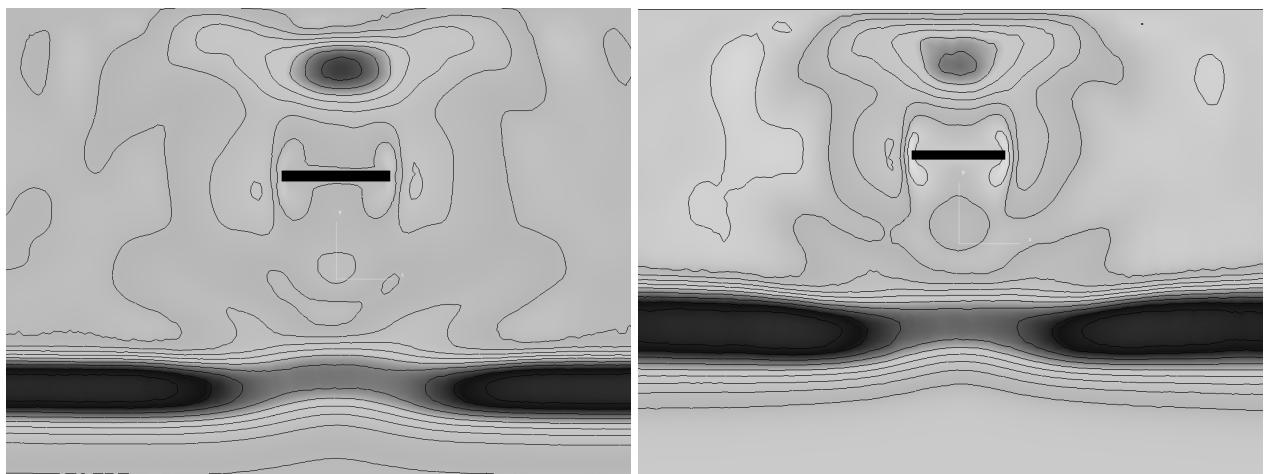


(а) Однородная мелкая сетка.

(б) Сетки разной мелкости.

Рисунок 45 — Начальный этап отражения волны нагрузки от раздробленной области. Напряжения в окружающем материале.

области, несколько ниже. Уменьшение интенсивности прошедшего фронта, соответственно, тоже выражено менее явно. Тем не менее, на качественном уровне картина совпадает в обоих расчётах, нефизичных эффектов от использования неоднородных сеток не наблюдается.



(а) Однородная мелкая сетка.

(б) Сетки разной мелкости.

Рисунок 46 — Отражённая волна и восстановление фронта проходящей волны за раздробленной областью.

Глава 4

Низкоскоростной удар по композитной конструкции

В данном разделе приведены результаты численного моделирования низкоскоростного удара по композитной конструкции.

Низкоскоростной удар (от метров в секунду до десятков метров в секунду) как правило не приводит к пробиванию и разрушению композитной панели. Однако, характеристики конструкции значительно ухудшаются, вплоть до полной непригодности к дальнейшей эксплуатации. Это связано с внутренними повреждениями и разрушениями в композитном материале. Так, многослойные материалы после нагрузок могут заметно терять прочность даже при отсутствии видимых повреждений. Это обусловлено появлением внутренних микротрещин, которые впоследствии, объединяясь, превращаются в макротрещины. Возникающие после нагрузки повреждения материала могут быть визуально не заметны, хотя делают образец непригодным к дальнейшему использованию.

Сложное внутреннее строение и многоуровневость структуры композитных материалов вносят несколько принципиальных факторов, влияющих на их прочностные свойства.

Во-первых, динамическое воздействие по конструкции вызывает в ней распространение упругих и пластических волн нагрузки. В случае композитного материала множественные переотражения волн от внутренних контактных границ формируют сложную волновую картину. Интерференция большого количества прямых, отражённых и преломлённых волн определяет итоговые области максимальных нагрузок в конструкции. Таким образом, внутреннее строение композита влияет на локализацию областей повреждений.

Во-вторых, наличие микроструктуры композита (уровень отдельных волокон в матрице) приводит к появлению зон концентрации напряжений. В результате могут заметно снижаться предельные значения напряжений, которые выдерживают матрица и волокна в составе композитной конструкции, по сравнению с аналогичными значениями для изотропных образцов из тех же материалов.

В связи с приведёнными фактами одной из актуальных прикладных задач, связанных с прочностными испытаниями композитных материалов, является задача о получении волновой картины в конструкции при непробивающем ударе.

4.1 Постановка задачи

Геометрия конструкции

Рассматривается задача о динамическом нагружении элемента композитной обшивки крыла самолёта. На рис. 47 приведена схема строения обшивки и силового кессона крыла.

Обшивка толщиной 6.5 мм состоит из 3 композитных субпакетов, стрингер толщиной 13 мм – из 6 аналогичных субпакетов.

Каждый субпакет состоит из 11 монослоёв со взаимной ориентацией при укладке $45/0/-45/0/0/90/0/0/-45/0/45$. Каждый моносвой имеет следующий состав: 60% – ориентированные длинные углепластиковые волокна; 40% – матрица (эпоксидная смола).

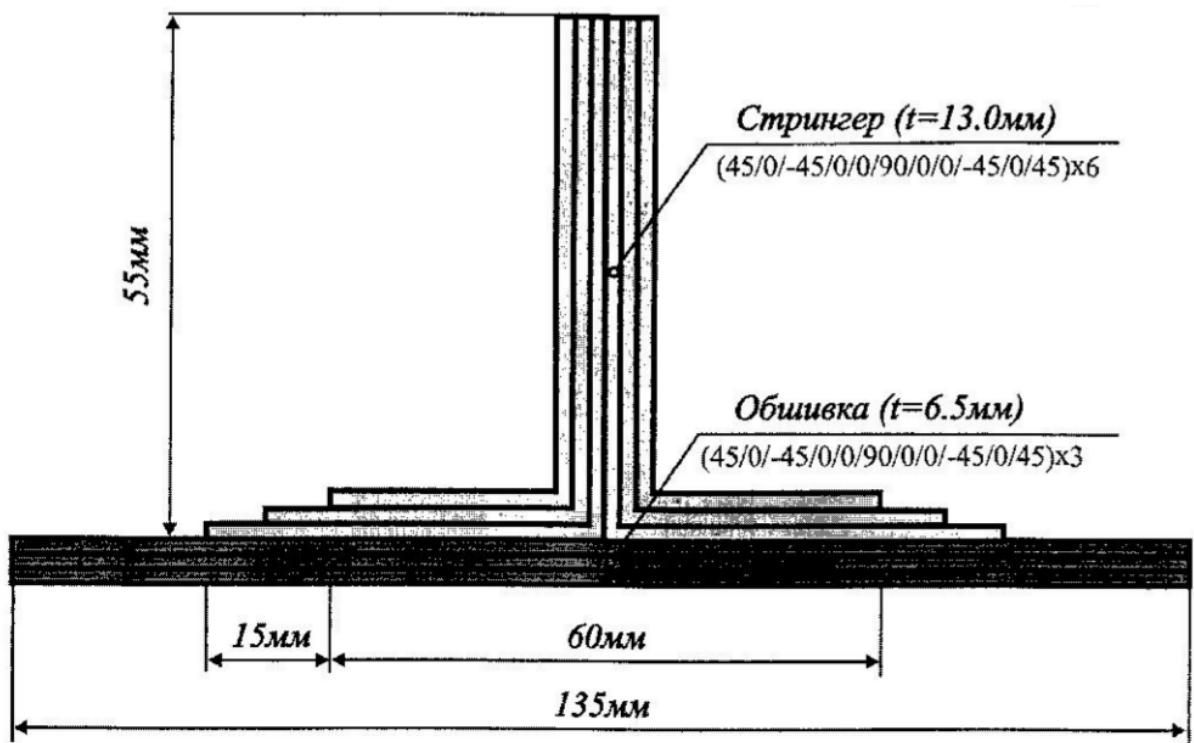


Рисунок 47 — Обшивка и силовой кессон крыла.

Параметры воздействия

В эксперименте по непробивающему воздействию на обшивку нагрузка создается стальным ударником цилиндрической формы с диаметром закругления на конце 25.4 мм. Характерный пример профиля нагрузки при испытаниях приведен на рис. 48.

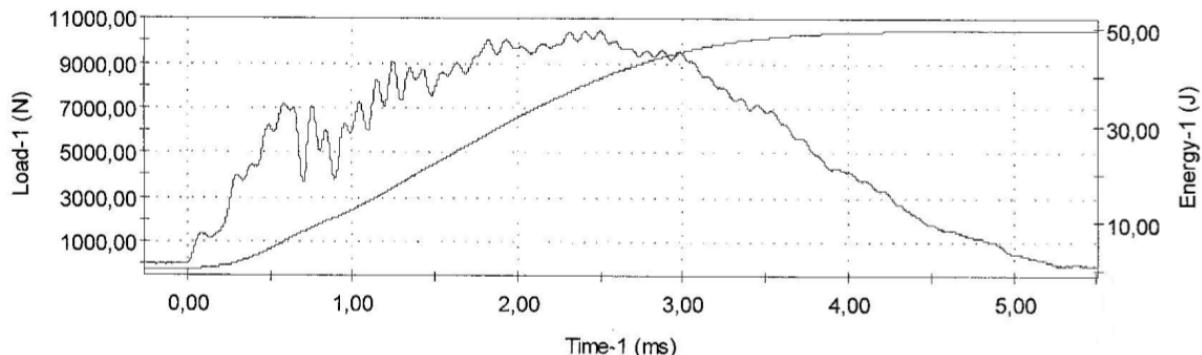


Рисунок 48 — Пример профиля нагрузки на обшивку крыла при испытаниях.

В численном эксперименте задавалась начальная скорость ударника перед контактом с элементом обшивки равная 6 м/с.

Реология материалов преграды и ударника

Каждый отдельный субпакет в преграде рассматривается как однородный и изотропный, в основе описания которого лежит линейное уравнение связи напряжений и деформаций в виде закона Гука для изотропных тел. Конструкция состоит из композитных субпакетов, соединённых эпоксидной смолой. В данном приближении характеристики субпакетов принимаются равными характеристикам монослоёв, из которых они составлены. Анизотропия ниже структурного уровня субпакета, обусловленная укладкой монослоёв внутри субпакета, не рассматривается.

Ударник считается деформируемым твёрдым телом, так же как и преграда, и моделируется явным образом.

Характеристики всех материалов приведены в табл. 4.

Начальные и граничные условия

В начальные моменты времени напряжения в конструкции и ударнике отсутствуют, конструкция покоятся, все точки ударника имеют одинаковую

Таблица 4 — Упругие характеристики слоёв и ударника

Материал	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа	c_p , м/с	c_s , м/с
Монослой (субпакет)	8.5	0.32	1580	5.72	3.22	2775	1425
Эпоксидная смола	2.5	0.30	1250	1.44	0.96	1640	876
Сталь	200	0.28	7800	99.43	78.13	5725	3165

скорость \vec{v}_0 , направленную по нормали к элементу обшивки.

Все неконтактные границы конструкции и ударника считаются свободными, на них отсутствуют нормальные и касательные напряжений всюду, кроме точек, в которых осуществляется взаимодействие ударника с преградой.

Контактные границы

Контактные границы между слоями преграды считаются с условием полного слипания. На контактирующих поверхностях задаётся равенство компонентов скорости.

Контакт между ударником и преградой полагается удовлетворяющим условию свободного скольжения. Нормальная по отношению к площадке соприкосновения скорость движения приравнивается к скорости движения ударника в проекции на то же направление. Вторым условием служит равенство нулю касательных к поверхности контакта напряжений. Вычисление состояния точек деформируемого ударника ведётся тем же методом, что и для преграды.

Используемая сетка

При решении задачи используется неструктурированная сетка, состоящая из тетраэдров. Сетка лагранжева, скорости движения ее узлов совпадают с рассчитанной скоростью тела в данном узле.

Перестроение сетки не используется, в зоне деформаций используется описанная выше схема для расчёта деформированных тетраэдров с фиксированным временным шагом в случае $\lambda\tau/h > 1$.

Критерии разрушения

В конструкции выделяются области потенциальных разрушений в соответствии с критерием наибольших нормальных напряжений, критерием наибольших сдвиговых напряжений, критерием Мизеса (см. раздел 1.9). Прочностные характеристики субпакетов приведены в табл. 5. Разрушение ударника не рассматривается, так как при низкоскоростном ударе повреждения стального ударника не ожидается.

Таблица 5 — Прочностные характеристики монослоёв

Тип нагрузки	Предельно допустимая нагрузка, МПа
Растяжение вдоль волокон	2630
Сжатие вдоль волокон	1530
Растяжение поперёк волокон	86
Сжатие поперёк волокон	213
Сдвиг	112

Были проведены расчеты для двух постановок эксперимента - удар по отдельному элементу обшивки и удар по элементу обшивки со стрингером.

4.2 Удар по элементу обшивки

Вид расчетной области приведен на рис. 49. Часть расчётной сетки показана на рис. 50. Характеристики материалов приведены в табл. 4 и 5. Скорость ударника в обоих расчётах составляет 6 м/с. На рис. 51 показана общая форма полученного трёхмерного возмущения в конструкции

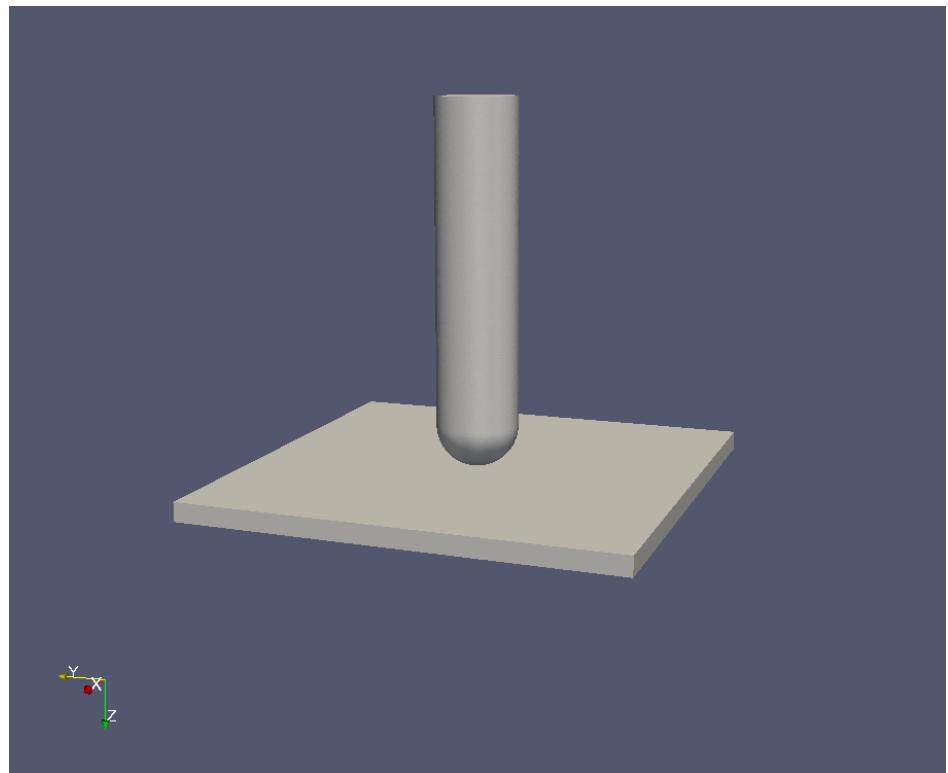


Рисунок 49 — Удар по элементу обшивки. Вид расчетной области.

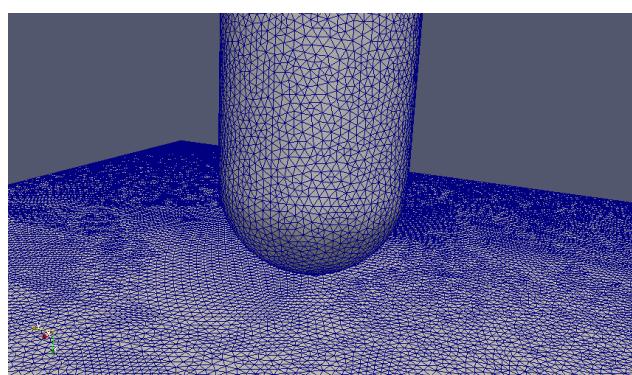


Рисунок 50 — Расчётная сетка. Поверхностная сетка в элементе крыла и в ударнике в районе места удара.

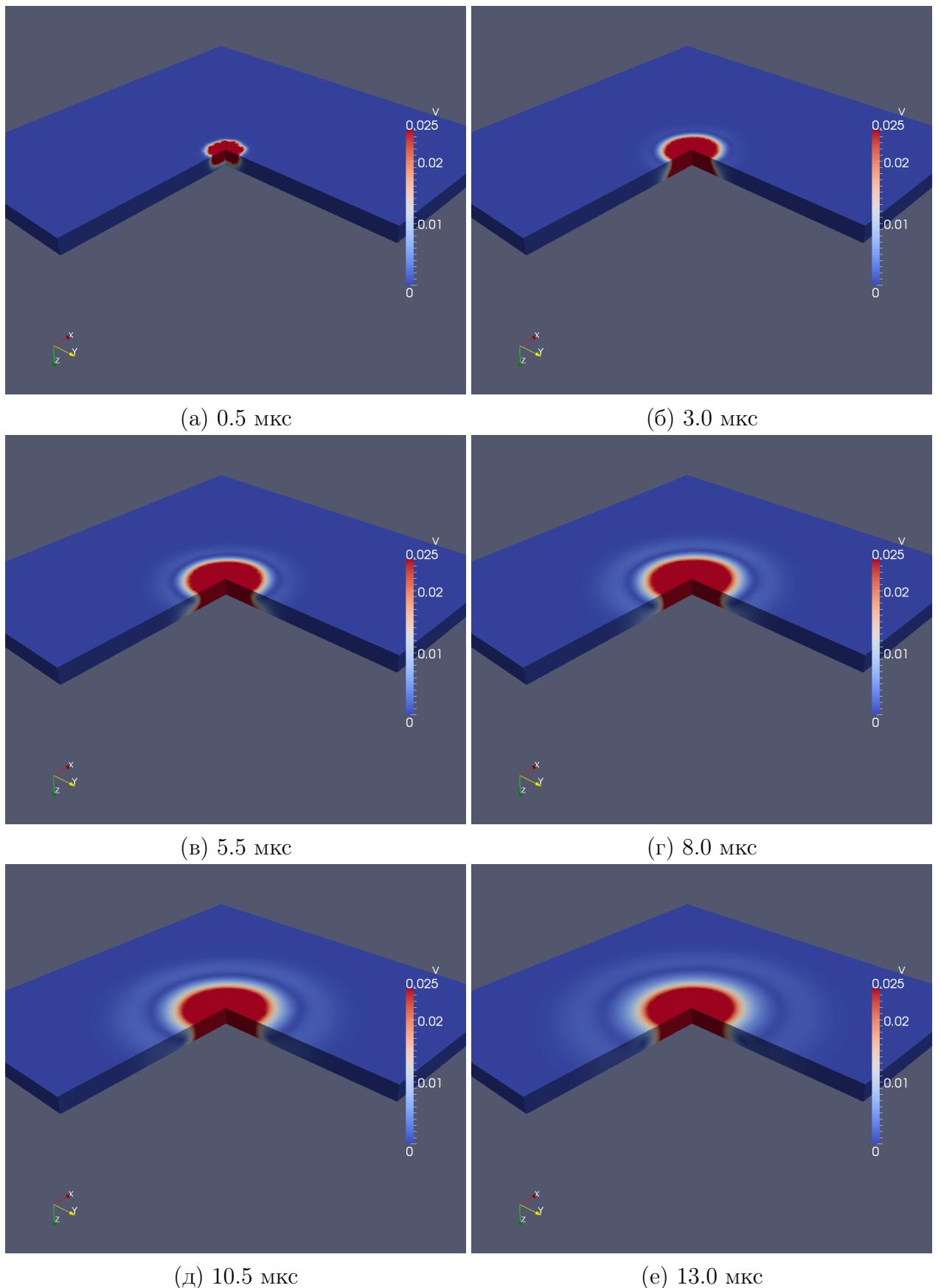


Рисунок 51 – Распространение возмущений в элементе обшивки. Общая картина. Цветом показан модуль скорости.

4.3 Удар по элементу обшивки со стрингером

Вид расчетной области приведен на рис. 52. Часть расчётной сетки показана на рис. 50. Характеристики материалов приведены в табл. 4 и 5. Скорость ударника в обоих расчётах составляет 6 м/с. На рис. 53 показана общая форма полученного трёхмерного возмущения в конструкции

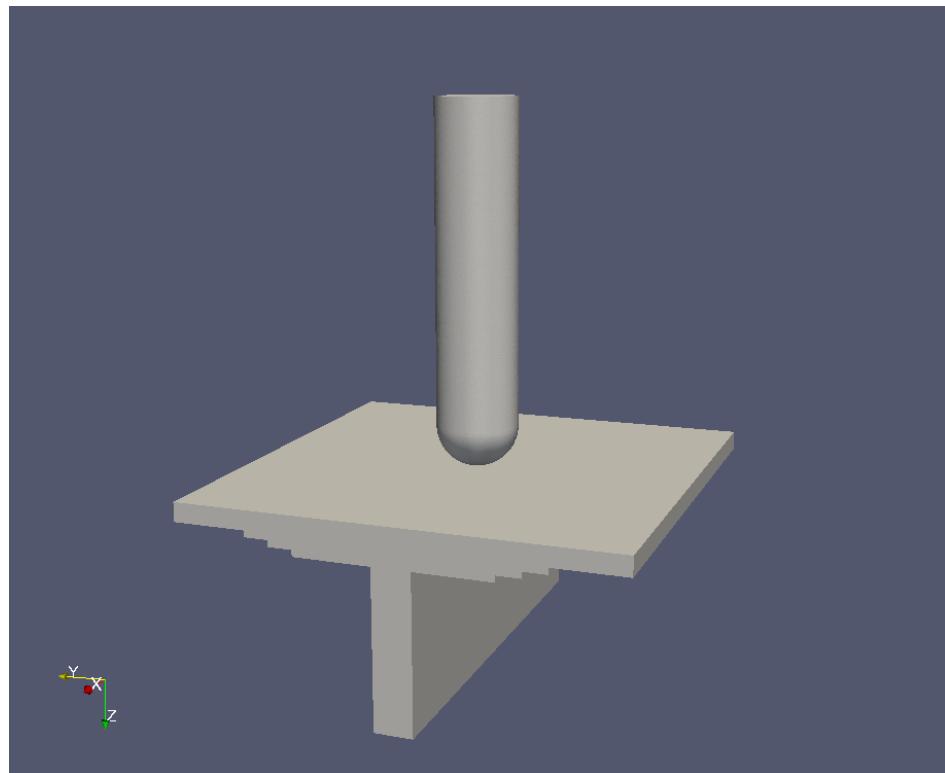


Рисунок 52 — Удар по элементу обшивки со стрингером. Вид расчетной области.

Наглядно видно, что при наличии стрингера возмущение активно проникает в него. Это приводит к большей диссиpации энергии первоначальной волны в конструкции.

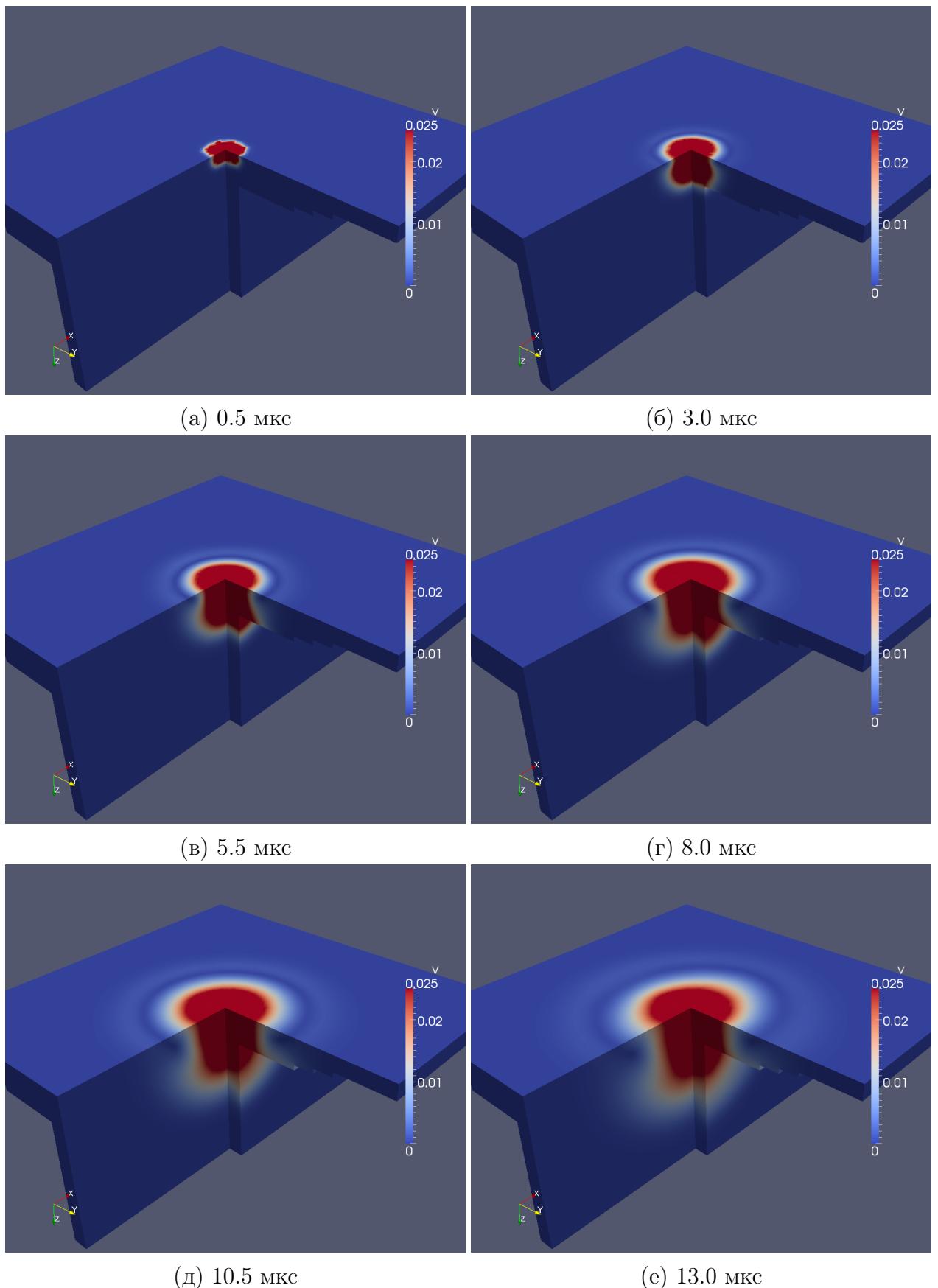


Рисунок 53 — Распространение возмущений в элементе обшивки и стрингере. Общая картина. Цветом показан модуль скорости.

4.4 Анализ волновой картины для обоих постановок

На рис. 54 - 56 показано распространение напряжений в зоне удара как для отдельного элемента обшивки, так и для конструкции со стрингером.

В начальный момент (рис. 54) фронт волны близок к сферическому, геометрические размеры определяются площадью контакта между ударником и пластиной, а точная форма – строением элемента обшивки.

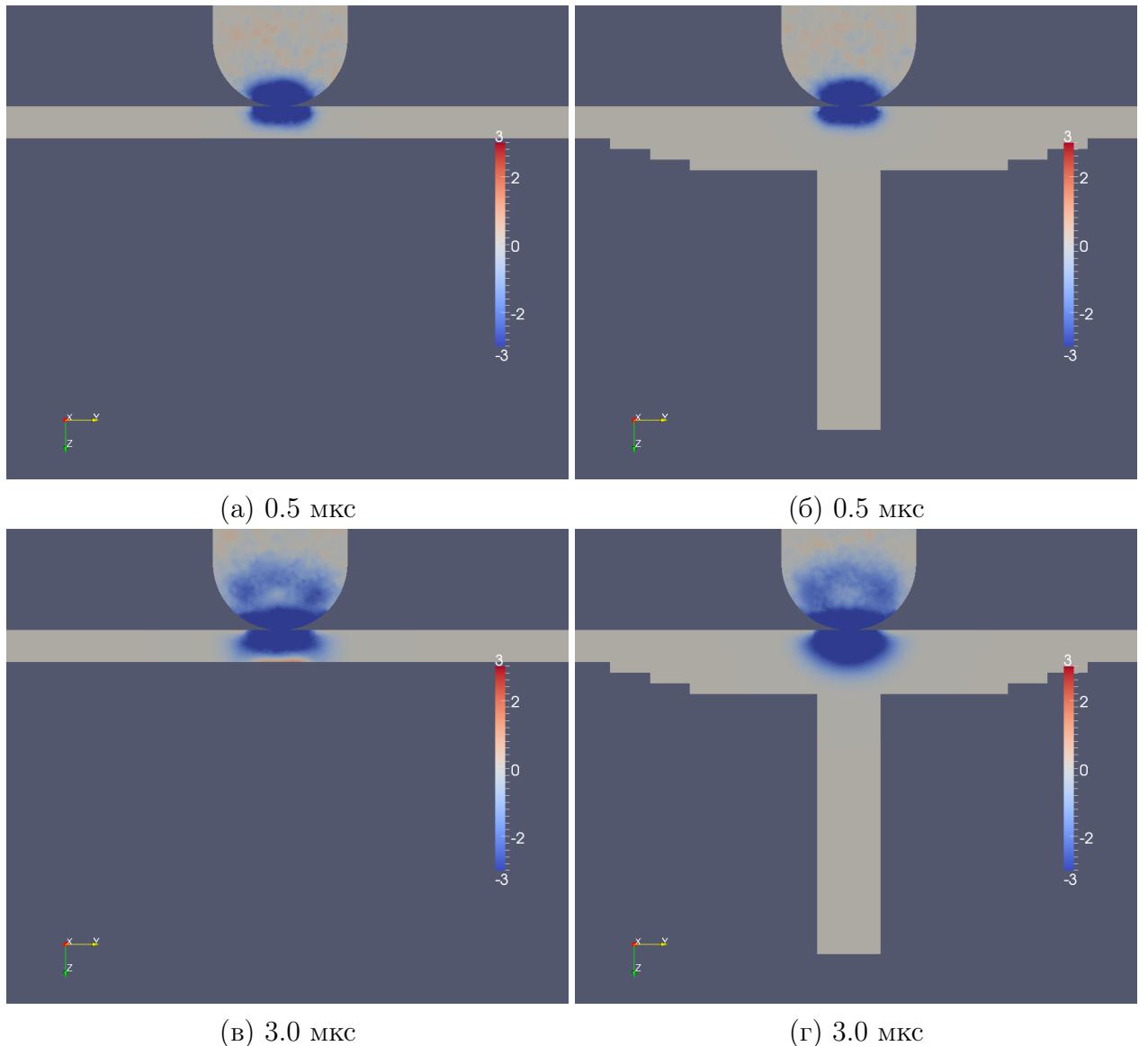


Рисунок 54 — Начальный момент удара. Цветом показаны напряжения. Синий соответствует сжатию, красный – растяжению.

К концу данной стадии соударения волна сжатия проходит элемент обшивки. Для постановки без стрингера начинается отражение волны от противоположной свободной границы, полная волновая картина в образце представляет сумму падающей и отражённой волн. Для постановки со

стрингером начинается проникновение волны в стрингер. В данной области субпакеты, составляющие стрингер, ориентированы параллельно субпакетам обшивки (см. рис. 47), поэтому форма фронта не меняется.

На следующей стадии соударения (рис. 55) в постановке без стрингера формируется волна растяжения, отражённая от свободной границы (рис. 55а). Также заметно более слабая волна растяжения формируется в области, непосредственно прилегающей к зоне контакта (рис. 55в и 55г).

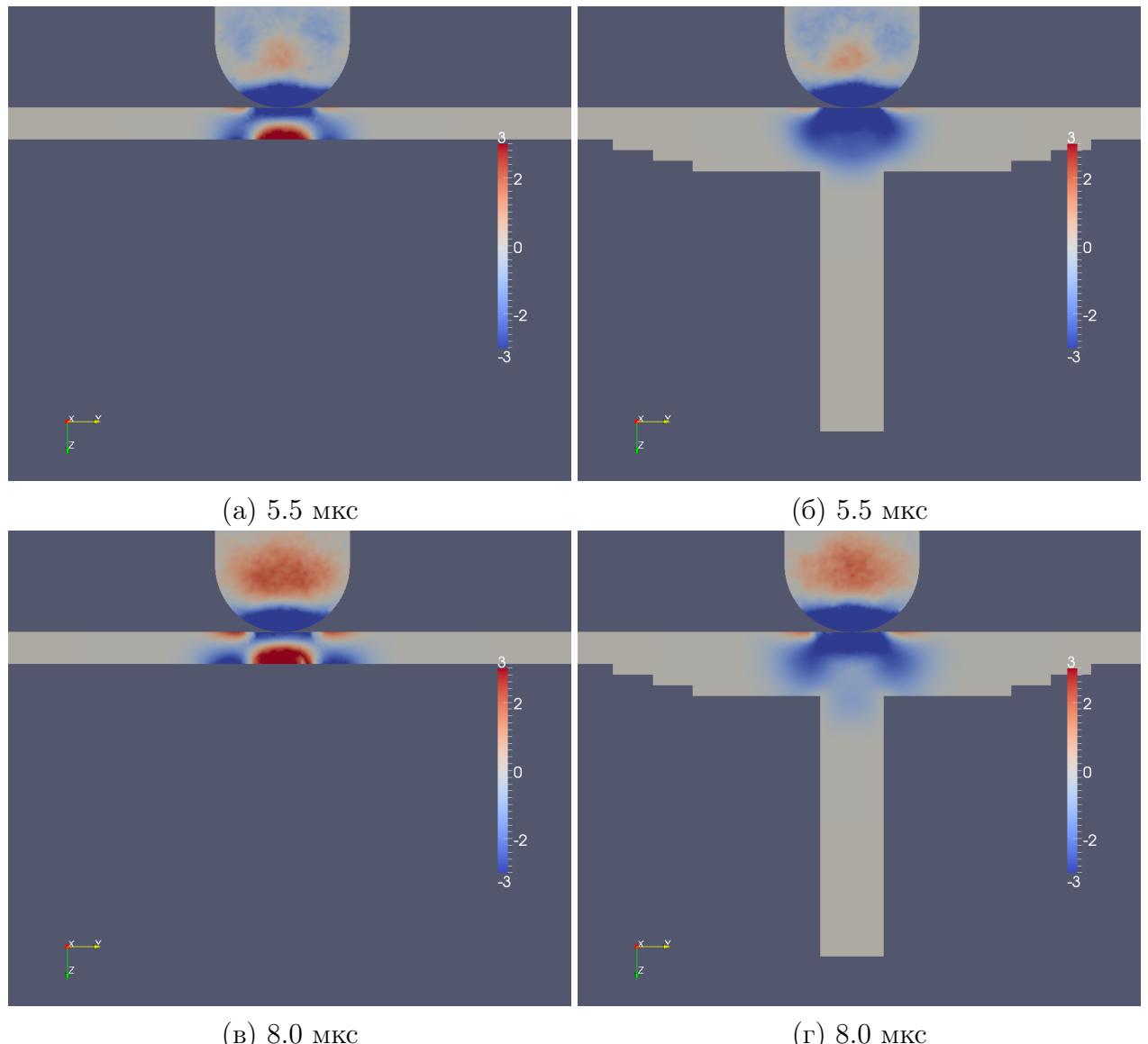


Рисунок 55 — Проникновение волны в конструкцию. Цветом показаны напряжения. Синий соответствует сжатию, красный – растяжению.

Для постановки со стрингером исходная волна сжатия еще не достигла свободной поверхности, от которой могло бы произойти заметное отражение. В результате наблюдаются менее выраженные области растяжения

(рис. 56б и 56г), обусловленные волной растяжения в зоне контакта и относительно слабыми волнами, отражёнными от границ между субпакетами. На рис. 56г видно изменение формы фронта первоначальной волны. Это связано с тем, что волна дошла до зоны, где субпакеты стрингера ориентированы перпендикулярно субпакетам обшивки (см. рис. 47).

При дальнейшем прохождении волны (рис. 56) картина максимальных напряжений качественно не меняется.

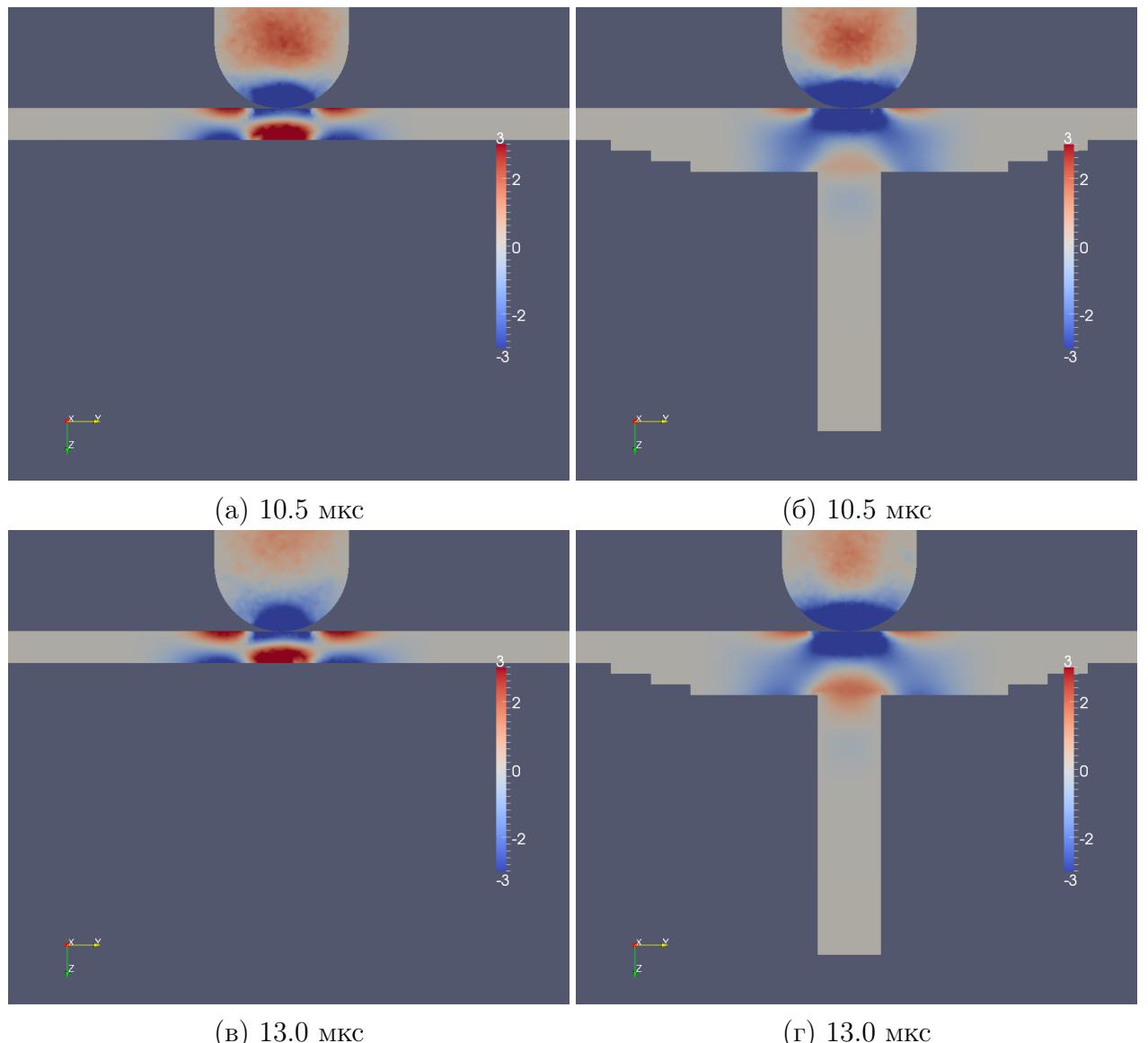


Рисунок 56 — Проникновение волны в конструкцию. Цветом показаны напряжения. Синий соответствует сжатию, красный – растяжению.

В постановке без стрингера наблюдается многократное переотражение волн от параллельных свободных поверхностей и внутренних контактных границ. Одновременно с этим амплитуда волн затухает по мере удаления от

места удара. Интерференция всех волн формирует распределение сжатий и растяжений (рис. 56а, 56в), характерное для удара по многослойной конструкции.

В постановке со стрингером происходит отражение волны от свободных поверхностей в районе изгиба субпакетов стрингера (рис. 55б, 55г). Отражение в целом заметно менее выражено, чем в постановке без стрингера. Это связано как с тем, что волна уже ослаблена отражением от контактных границ, так и геометрией области – значительная часть энергии волны проходит в стрингер без взаимодействия со свободной границей.

4.5 Анализ максимальных напряжений разных типов

На рис. 57 цветом показаны максимальные значения сжатия в каждой точке конструкции за все время соударения. Сжатия очевидным образом концентрируются в месте удара. Зона максимального сжатия имеет характерный размер порядка диаметра области контакта между ударником и пластиною.

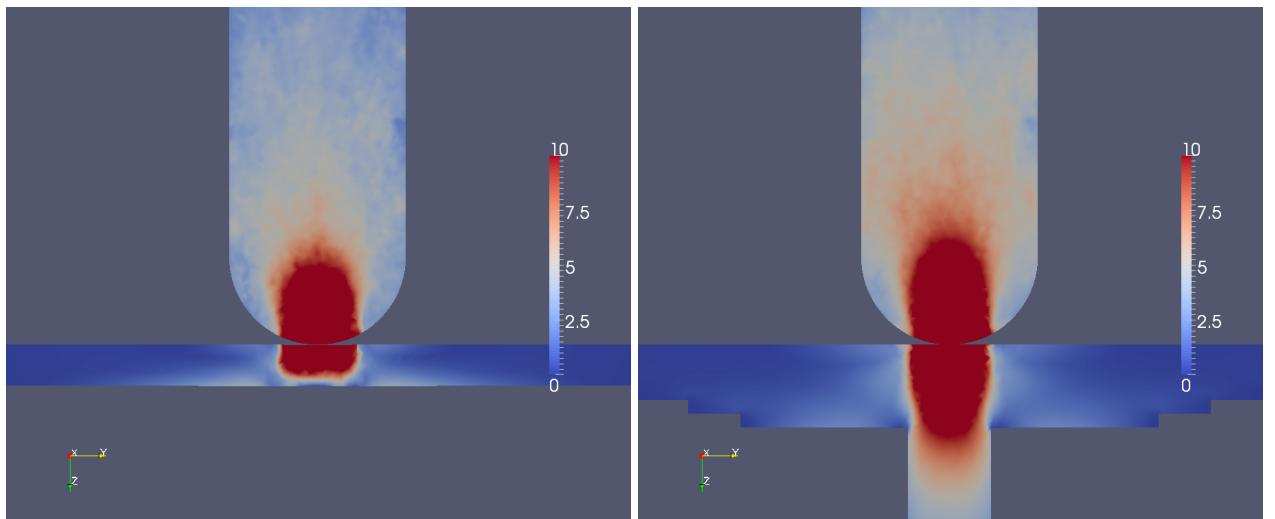


Рисунок 57 — Максимальные сжатия (по модулю) за всё время соударения.

В случае конструкции без стрингера дополнительно видны относительно слабые области сжатия на обратной поверхности элемента обшивки, вызванные волнами, испытавшими два отражения – первое от противолежащей свободной поверхности, второе от поверхности, по которой приходится удар.

В случае конструкции со стрингером видно заметное проникновение волны сжатия в основание стрингера. Вторичные зоны сжатия выражены значительно слабее, чем без стрингера, из-за большого количества переотражений от внутренних контактных границ.

Амплитуда максимального сжатия совпадает в обоих постановках. Диаметр зоны потенциальных разрушений составляет 16-20 мм.

Отдельно стоит отметить, что в субпакетах элемента обшивки сжатие действует поперёк волокон, а в основании стрингера – вдоль волокон (см. рис. 47). Так как прочность монослоёв на сжатие в направлении волокон почти на порядок больше, чем поперёк них, то основные разрушения в

конструкции стоит ожидать в элементе обшивки. В основании стрингера могут быть разрушены участки субпакетов, параллельные обшивке, но разрушение самого стрингера маловероятно.

На рис. 58 цветом показаны максимальные значения растяжения в каждой точке конструкции за все время соударения.

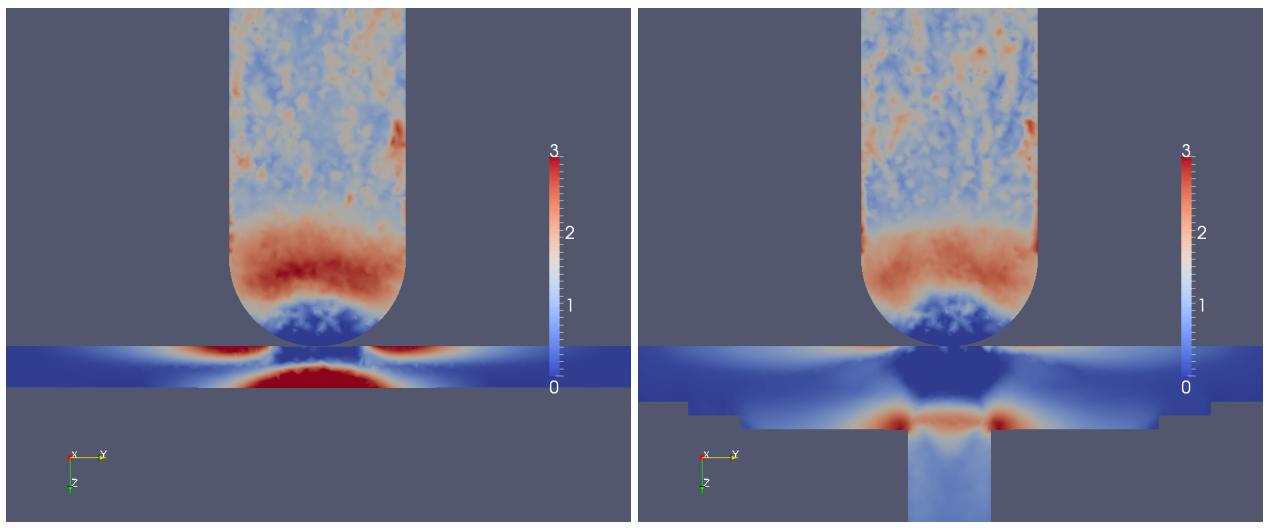


Рисунок 58 — Максимальные растяжения (по модулю) за всё время соударения.

В случае конструкции без стрингера растягивающие напряжения выражены достаточно явно. Это связано с многократным переотражением волн в тонкой конструкции при относительно слабом рассеивании и затухании. Волны растяжения от первого и второго отражения имеют значительную амплитуду, что видно на рисунке.

Принципиально, что волны растяжения в обшивке действуют поперёк направления волокон в субпакетах обшивки. Сопротивление монослоёв такому типу нагрузки минимально. Диаметр зоны потенциальных разрушений оказывается заметно больше размеров ударника и составляет около 50 мм

В случае конструкции со стрингером столь ярко выраженные зоны растягивающих напряжений не формируются, так как волна нагрузки большей частью проходит в стрингер, который за счёт этого разгружает обшивку. У основания стрингера при отражении от свободных поверхностей формируются две зоны растягивающих напряжений – в районе изгиба субпакетов стрингера и поперёк стрингера. В изгибе субпакетов напряжения

достаточно велики и при этом действуют поперёк направления волокон. В этой зоне можно ожидать появления разрушений. Зона растяжения поперёк стрингера ориентирована таким образом, что нагрузка действует вдоль волокон, которые хорошо выдерживают такую нагрузку. В этой зоне разрушения маловероятны.

На рис. 59 цветом показаны максимальные значения сдвиговых напряжений в каждой точке конструкции за все время соударения.

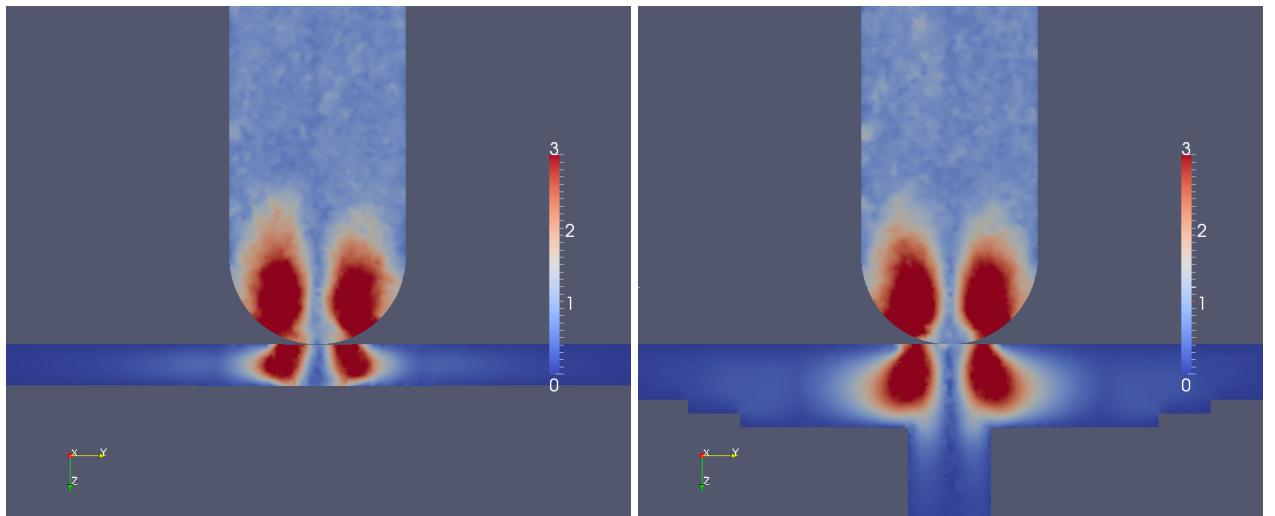


Рисунок 59 — Максимальные сдвиговые напряжения (по модулю) за всё время соударения.

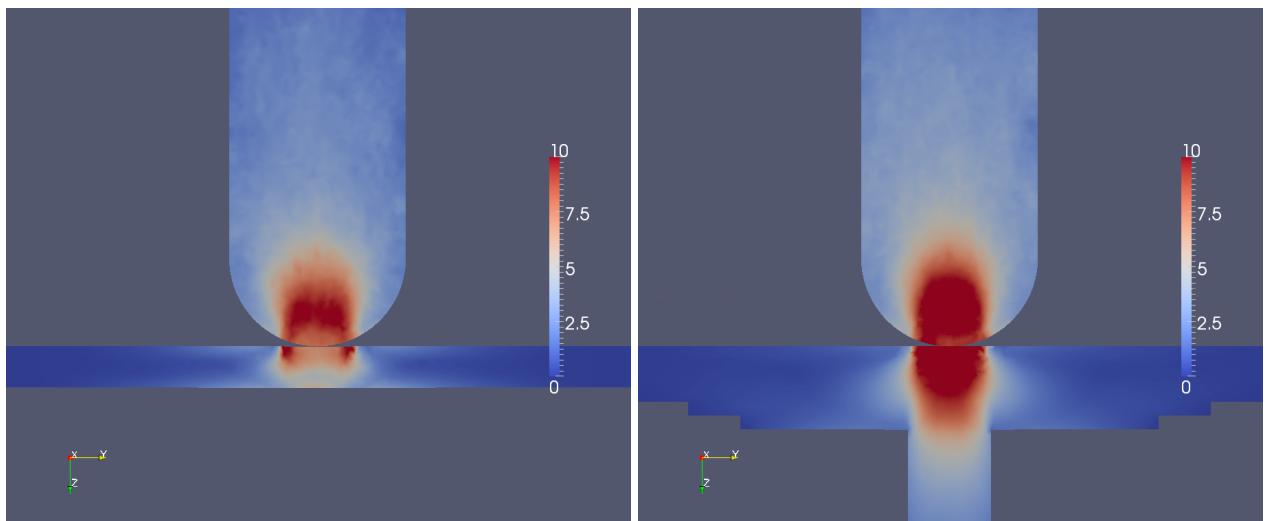
Сдвиговые напряжения локализуются на периферии зоны максимального сжатия. В однородной среде зона максимальных сдвиговых напряжений имеет форму конуса, расходящегося от места удара (см. рис. 40). В случае многослойной среды, моделирующей композит, из-за переотражений волн формируется зона, по форме более близкая к колоколу. Вследствие этого характерный размер зоны действия сдвиговых напряжений зависит от толщины пластины.

На качественном уровне картина оказывается одинаковой как для одиночного элемента обшивки, так и для элемента обшивки со стрингером. Количественно размер повреждённой зоны оказывается несколько больше во втором случае из-за большей толщины конструкции в месте удара. Для первой постановки характерный размер зоны составляет 20 мм, для второй – 25-30 мм.

Во всей области действия максимальных сдвиговых нагрузок структура

композита такова, что направление сдвига приходится поперёк волокон. Монослои композита не очень хорошо держат нагрузку такого вида, поэтому разрушения в данной области возможны.

На рис. 60 цветом показаны максимальные значения эквивалентного напряжения Мизеса в каждой точке конструкции за все время соударения.



(а) Элемент обшивки.

(б) Элемент обшивки и стрингер.

Рисунок 60 — Максимальное эквивалентное напряжение Мизеса (по модулю) за всё время соударения.

Как рассмотрено выше, напряжение Мизеса характеризует девиаторную часть тензора напряжений. Нагрузки такого типа связаны с изменением формы вещества без изменения его объёма. В однородной среде зона максимальных напряжений Мизеса с хорошей точностью совпадает с зоной максимальных сдвиговых напряжений (см. рис. 40) и так же как и она имеет форму конуса, хотя и несколько большего и с более ярко выраженным максимумом в точке удара.

Для композита рассматриваемой структуры получено, что характер распределения напряжений Мизеса несколько меняется. Область принимает колоколообразную форму, аналогично сдвиговым напряжениям. Кроме того, значительно более ярко по сравнению с изотропной средой выражен максимум непосредственно в зоне удара.

В постановке без стрингера напряжения Мизеса значительно меньше, чем при наличии стрингера, так как отражения от близкой свободной поверхности быстро компенсируют девиаторную часть нагрузки, переводя её в растяжения.

4.6 Интегральное воздействие и области разрушений

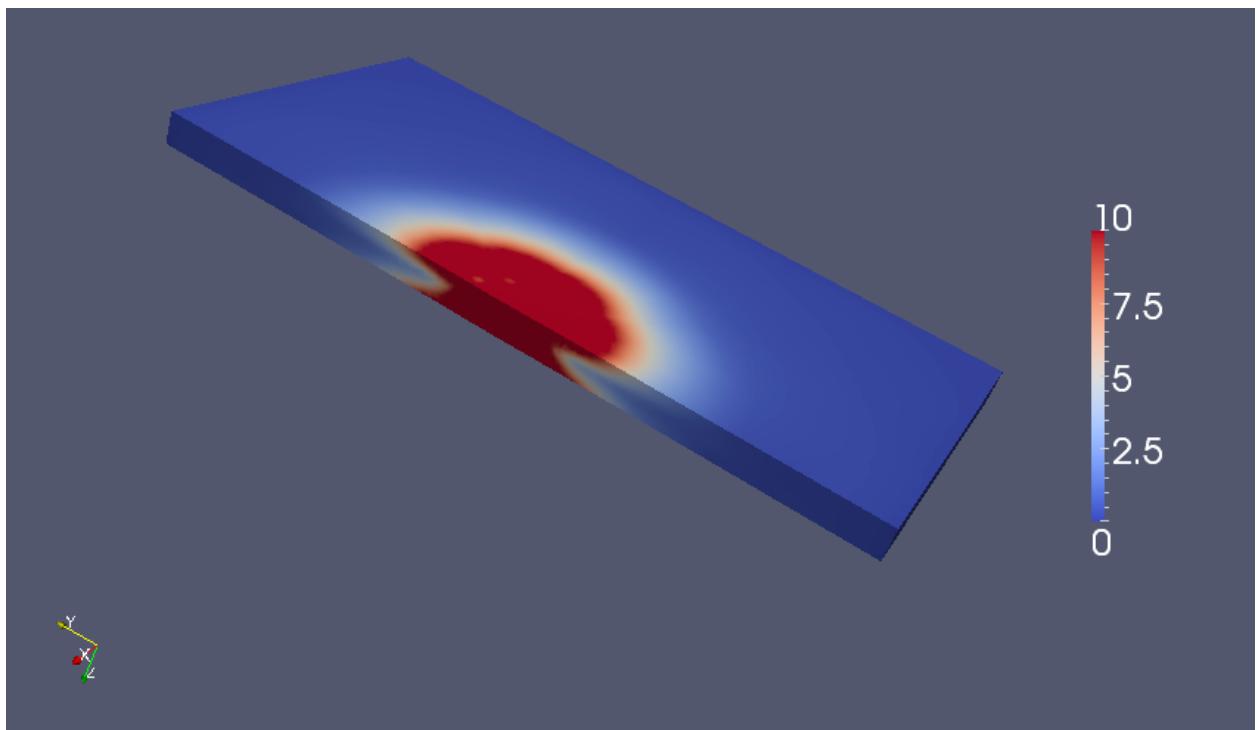
Для оценки итоговых областей разрушений необходимо учитывать разрушения всех приведённых типов. При этом, как видно из таблицы 5, устойчивость монослоёв при нагрузках разных типов значительно отличается. В качестве интегральной характеристики воздействия использовался параметр

$$\sigma^* = \sum k_i \max(\sigma_i), \quad (4.1)$$

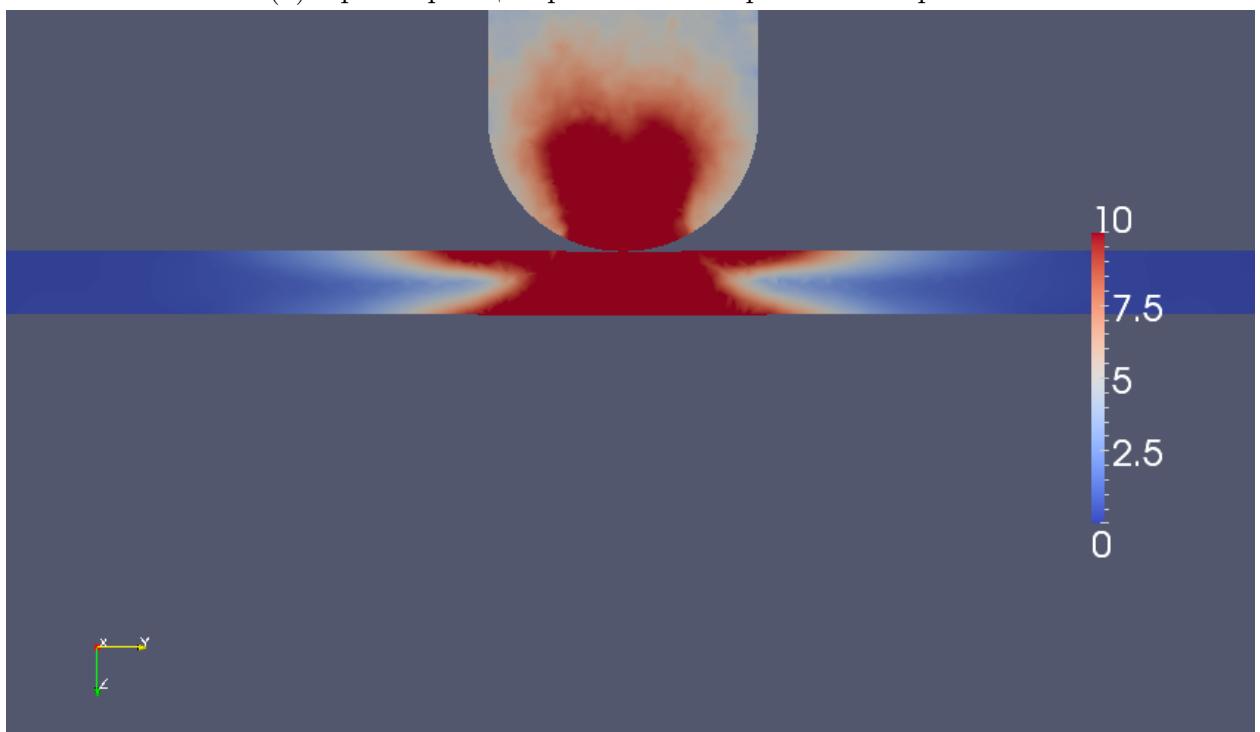
где суммирование ведётся по типам нагрузки (сжатие, растяжение, сдвиг, изменение формы), $\max(\sigma_i)$ – максимальное значение напряжения данного типа в данной точке за всё время воздействия, k_i – коэффициент нормировки. Коэффициенты нормировки k_i для напряжений различных типов были выбраны обратно пропорционально пределу прочности монослоёв при нагрузках соответствующего типа. Для упрощения оценки использовались следующие значения: сжатие – 1, сдвиг и изменение формы – 2, растяжение – 3.

Вообще говоря, в случае динамической нагрузки пределы прочности могут заметно отличаться от указанных значений. Соответственно, следует корректировать и вклад напряжений разных типов в итоговое распределение разрушений. Тем не менее, для низкоскоростного удара воспользуемся этими данными.

Интегральная оценка областей потенциального разрушения материала для постановки с отдельным элементом обшивки приведена на рис. 61. Размер разрушенной области заметно превышает размер ударника и составляет 50-60 мм. По форме разрушенная область представляет собой цилиндр с утоньшением посередине. Как было показано выше, разрушения на оси удара (10-15 мм от оси симметрии удара) связаны со сжатием и сдвигом. Разрушения в более дальней области (15-30 мм от оси симметрии удара) обусловлены волнами растяжения.



(а) Срез через центр элемента параллельно грани.



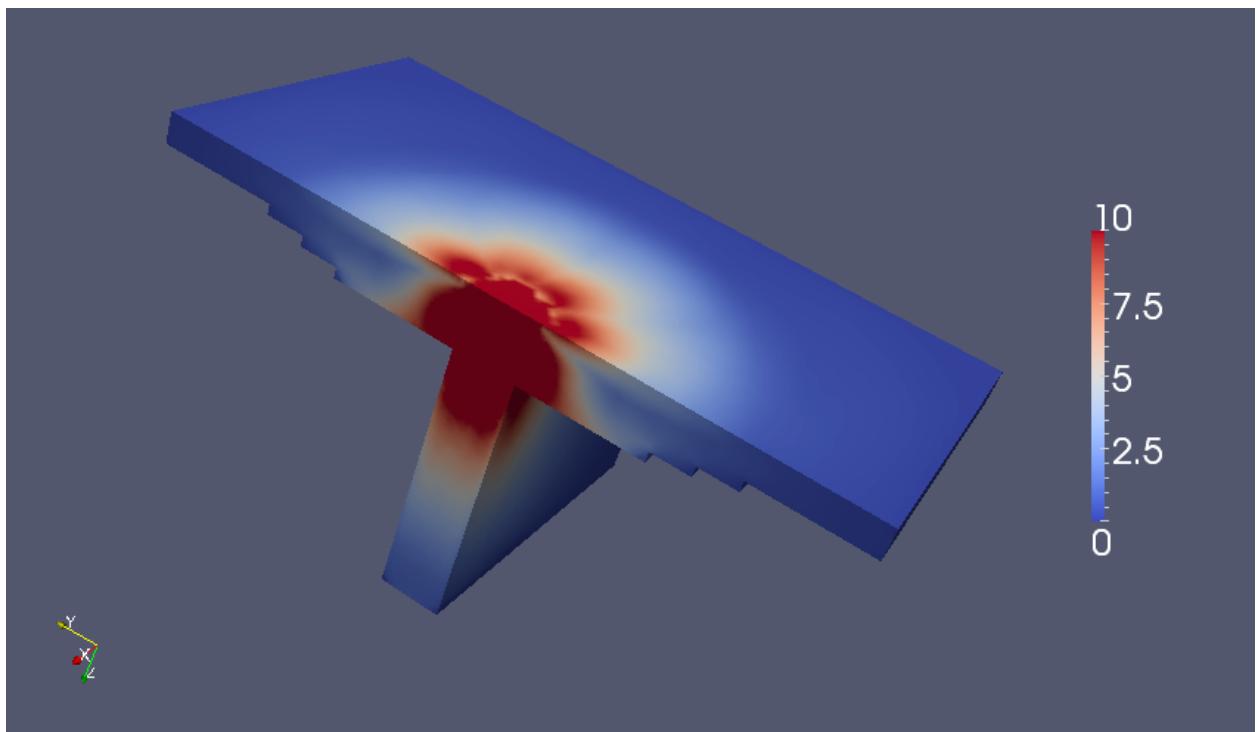
(б) Сечение через центр элемента параллельно грани.

Рисунок 61 — Области разрушений в элементе обшивки.

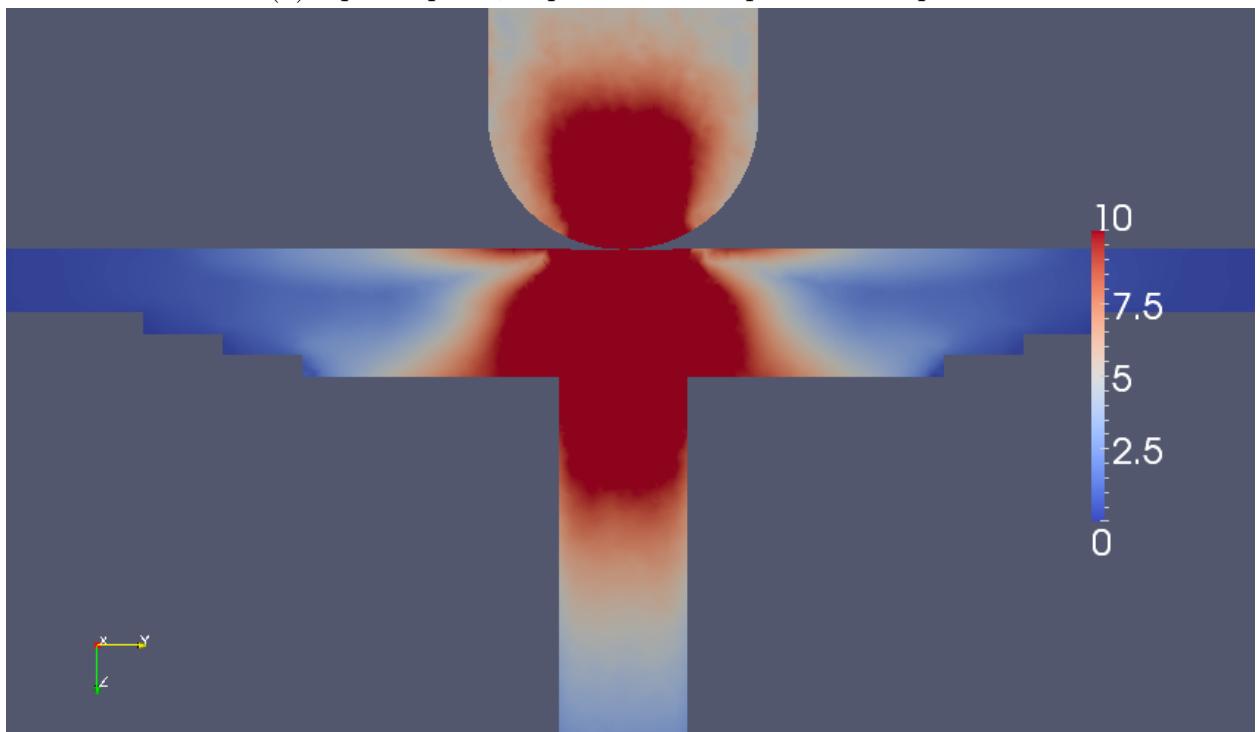
Интегральная оценка областей потенциального разрушения материала для постановки с элементом обшивки и стрингером приведена на рис. 62. Размер разрушенной области порядка размера ударника – 25 мм. По форме разрушенная область представляет собой колокол, уходящий вглубь конструкции. Как было показано выше, разрушения обусловлены сжатием, сдвигом и изменением формы.

Отдельный комментарий необходим относительно отмеченной области разрушения в стрингере. Значения напряжений в данной области действительно достаточно велики, однако воздействие направлено вдоль волокон (см. рис. 47). Предел прочности в направлении волокон монослоя выдерживает практически на порядок лучше, чем поперёк волокон (5), поэтому на практике разрушения в стрингере маловероятны.

Таким образом, в случае динамического воздействия разрушения в конструкции со стрингером оказываются заметно меньше за счёт того, что волны напряжения уходят в стрингер, и это разгружает элемент обшивки. Данный факт отдельно интересен в связи с тем, что при статической нагрузке наличие стрингера напротив приводит к концентрации напряжений и разрушению элемента обшивки при более слабом внешнем воздействии.



(а) Срез через центр элемента параллельно грани.



(б) Сечение через центр элемента параллельно грани.

Рисунок 62 — Области разрушений в элементе обшивки и стрингере.

4.7 Несимметричный удар по конструкции со стрингером

Дополнительно были выполнены расчёты для несимметричного удара по элементу обшивки со стрингером. Вид расчётной области представлен на рис. 63. Точка удара в этой постановке смещена от оси прикрепления стрингера на 30 мм перпендикулярно плоскости стрингера. Все остальные параметры объектов без изменений.

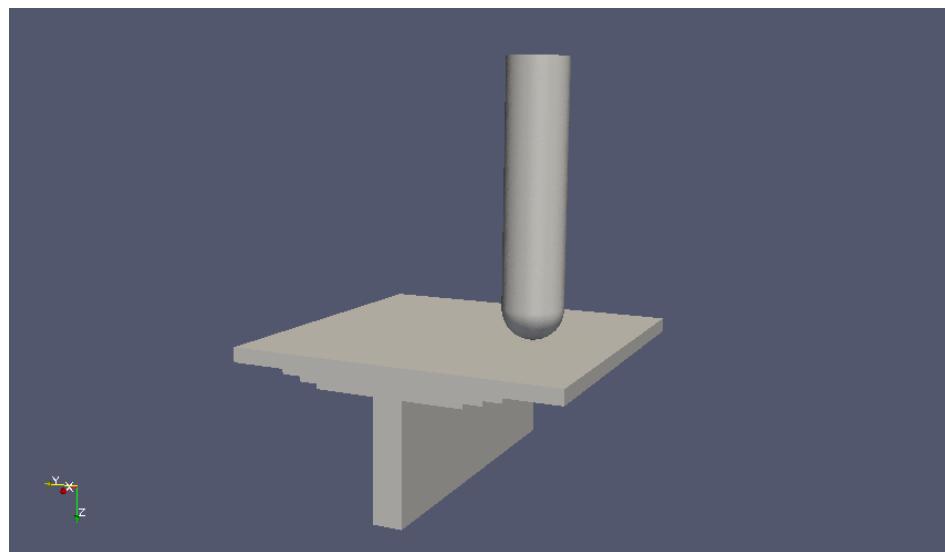
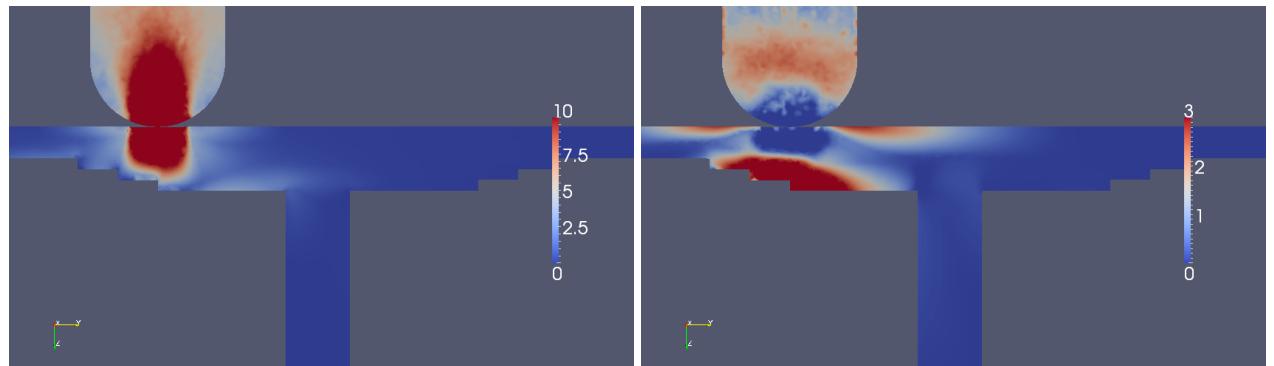


Рисунок 63 — Несимметричный удар по элементу обшивки со стрингером. Вид расчетной области.

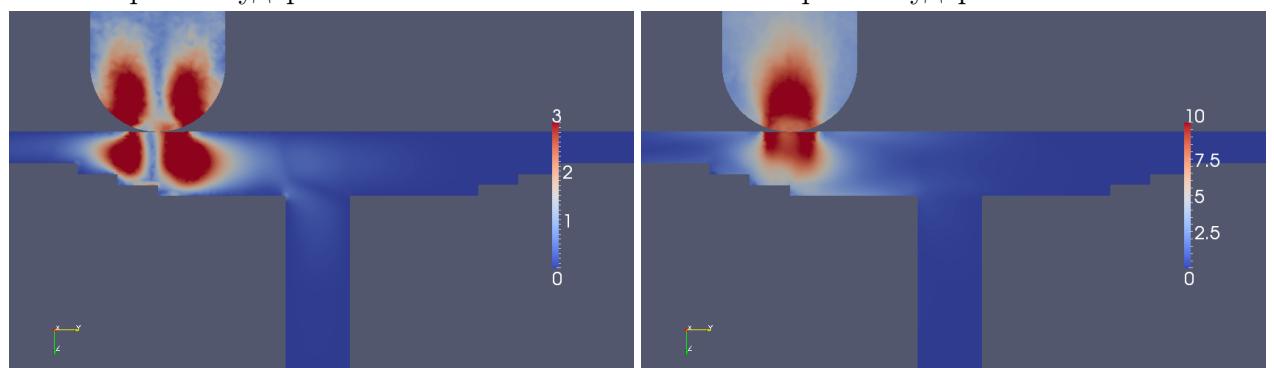
Данная постановка интересна по двум причинам. Во-первых, в ходе эксплуатации композитных изделий следует ожидать по большей части несимметричных ударов. Во-вторых, сравнение результатов воздействия при центральном и нецентральном ударах по конструкции со стрингером позволяет выполнить верификацию полученных результатов и уточнить, какие типы нагрузок преимущественно вызывают разрушения.

Полученные значения максимальных напряжений представлены на рис. 64. Распределение максимальных сжатий, сдвигов и напряжений Мизеса хорошо совпадает с аналогичными распределениями для удара по элементу обшивки без стрингера. Этот результат вполне логичен, так как общий вид конструкции тот же – тонкая пластина, в которой наблюдаются множественные переотражения на малой толщине. Детали геометрии области отличаются – больше толщина и больше контактных границ, обратная свободная поверхность не плоская. Это влияет на точную форму волновых

фронтов, но не меняет принципиальную картину. Стрингер расположен в стороне от зоны удара и не разгружает конструкцию, так как наиболее сильные волны до него не доходят, а диссипация слабых многократно отражённых и преломлённых волн не оказывается на зонах потенциальных разрушений.



(а) Максимальное сжатие (по модулю) за всё время соударения. (б) Максимальное растяжение (по модулю) за всё время соударения.



(в) Максимальное сдвиговое напряжение (по модулю) за всё время соударения. (г) Максимальное напряжение Мизеса (по модулю) за всё время соударения.

Рисунок 64 — Максимальные нагрузки при нецентральном ударе.

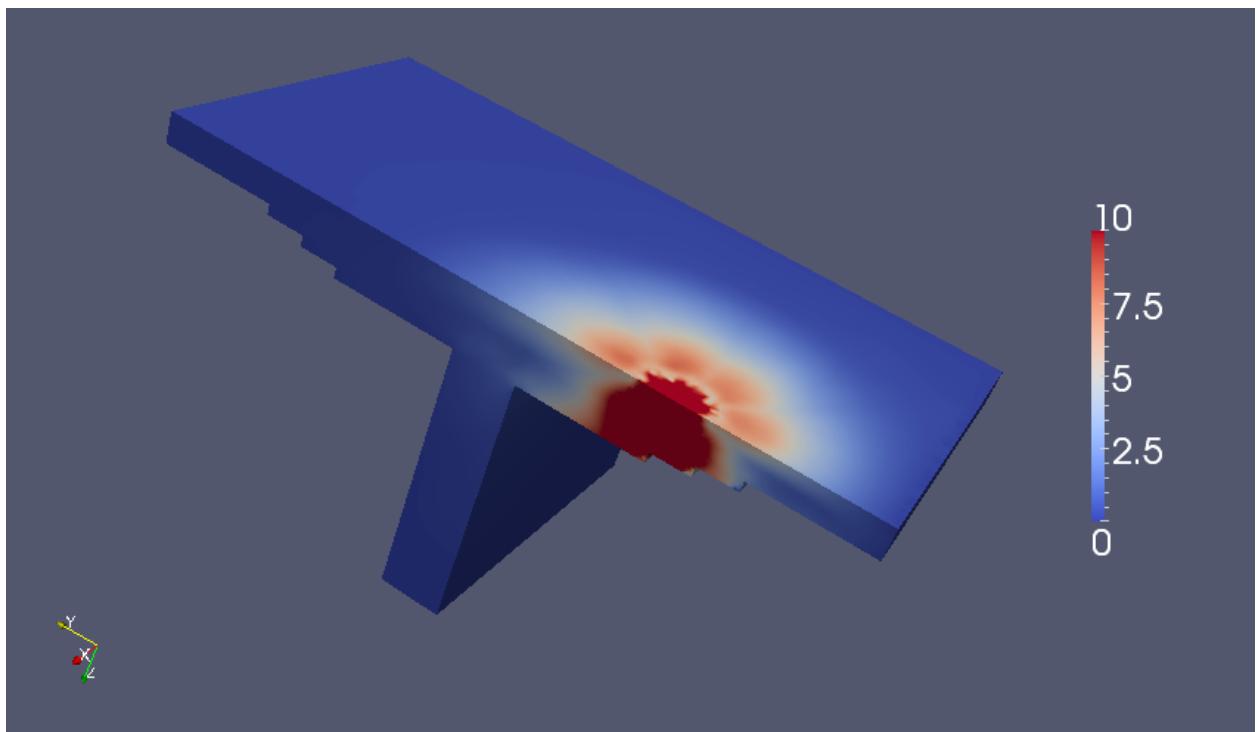
Иначе обстоит дело для волн растяжения – их распределение принципиально отличается от рассмотренных постановок с центральными ударами.

В рассматриваемой постановке зона контакта ударника и пластины находится напротив края крепления стрингера. Первоначальная волна сжатия отражается как от тыльных поверхностей субпакетов (параллельных внешней поверхности обшивки), так и от кромок субпакетов стрингера (расположенных перпендикулярно к поверхности обшивки). В результате каждого такого отражения формируется волна растяжения. Три такие волны движутся вверх, и три – вправо. При сложении этих волн формируется итоговая область растягивающих напряжений (рис. 64б).

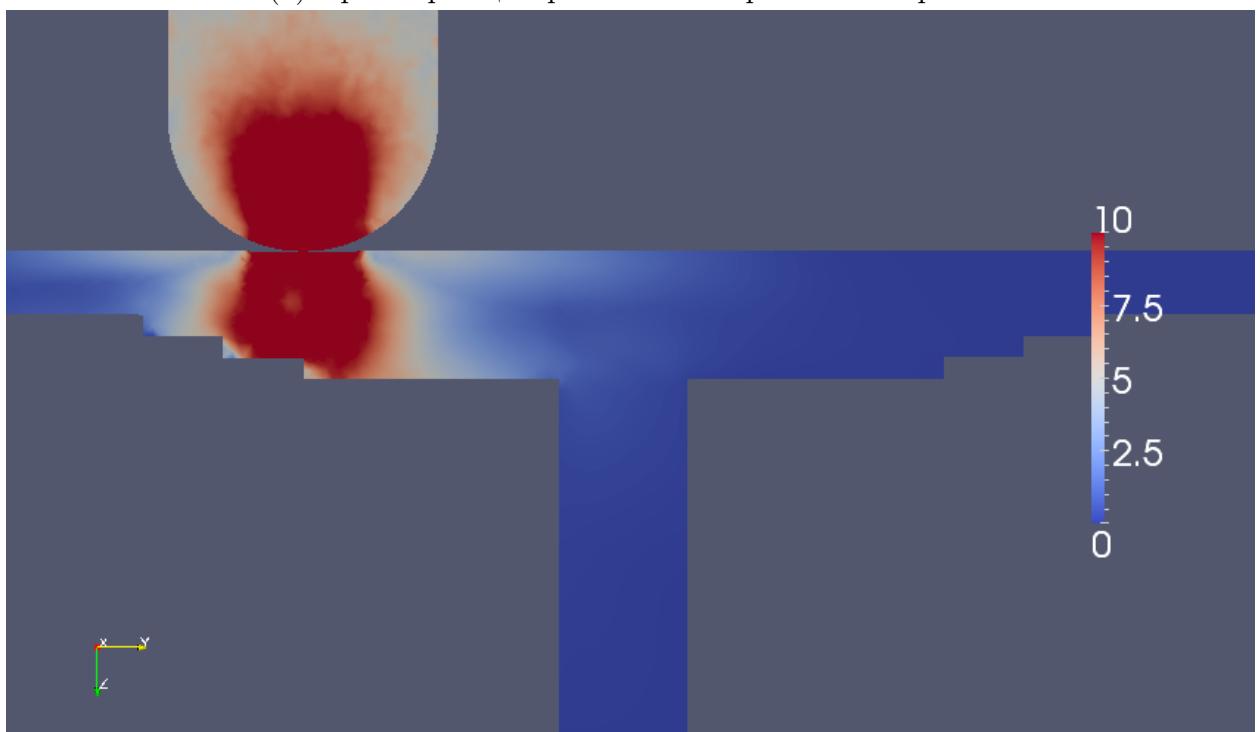
Амплитуда растягивающих напряжений в области края крепления стрин-

гера из-за сложения волн оказывается в 2.5 раза больше, чем значение на тыльной поверхности для конструкции без стрингера. При этом на верхней границе образца растягивающие напряжения оказываются заметно меньше (в 1.5-2 раза) по сравнению с элементом обшивки без стрингера.

Интегральная оценка воздействия и потенциальные зоны разрушения при нецентральном ударе показаны на рис. 65. Форма области близка к колоколу, но при этом является достаточно узкой – её диаметр не превышает диаметра ударника и составляет 20-25 мм.



(а) Срез через центр элемента параллельно грани.



(б) Сечение через центр элемента параллельно грани.

Рисунок 65 — Области разрушений при нецентральном ударе.

4.8 Сравнение последствий удара для разных постановок

Основные результаты в части концентрации напряжений разных видов, которые могут привести к разрушению конструкции, представлены в таблице 6.

Таблица 6 — Области концентрации напряжений

Постановка задачи	Диаметр разрушенной области, мм	Чем обусловлено разрушение
Элемент обшивки без стрингера, центральный удар	50-60	Сжатие и сдвиг в центральной зоне, растяжение в периферийной зоне
Элемент обшивки со стрингером, центральный удар	25-30	Сжатие, сдвиг, напряжение Мизеса
Элемент обшивки со стрингером, нецентральный удар	20-25	Сжатие и сдвиг на внешней поверхности, растяжение на тыльной поверхности

Формы областей концентрации напряжений приведены на рис. 61, 62 и 65 соответственно.

Получено, что наличие стрингера существенно разгружает элемент обшивки при динамическом воздействии и уменьшает размер потенциально повреждённых областей. Данный результат представляет интерес, так как при действии статической нагрузки наличие стрингера напротив вызывает концентрацию напряжений и приводит к разрушению при меньшей силе воздействия.

При сравнении численного и натурного эксперимента целесообразно обратить внимание на два критерия – интегральная характеристика воздействия (рис. 66) и максимальные растягивающие напряжения (рис. 67). Первый критерий описывает общее воздействие на конструкцию. Максимальные растягивающие напряжения отдельно интересны, так как по заявленным прочностным характеристикам монослоёв можно ожидать, что именно нагрузку такого типа данный композиционный материал будет выдерживать хуже всего.

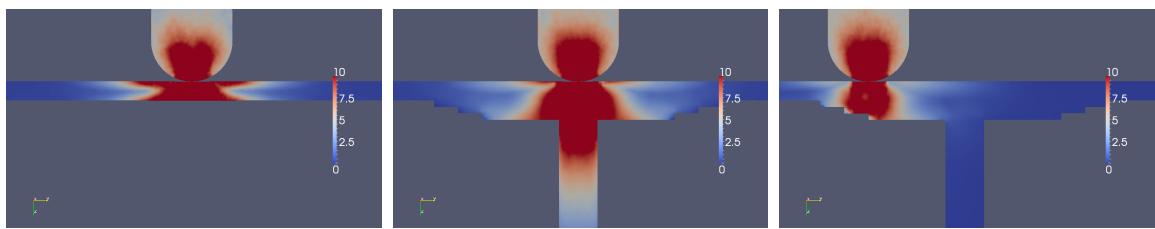


Рисунок 66 — Потенциальные области разрушений по критерию интегрального воздействия.

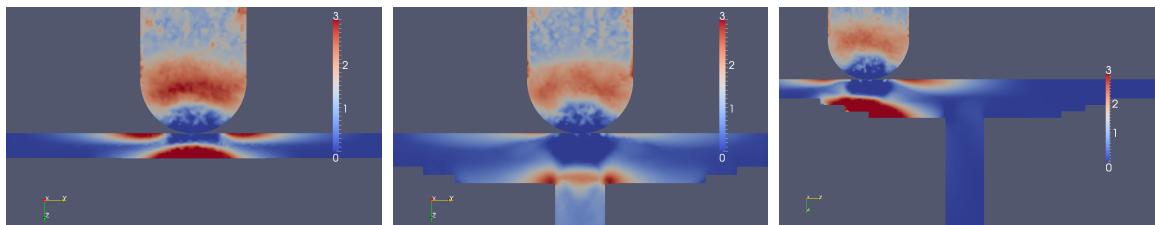


Рисунок 67 — Потенциальные области разрушений по критерию растягивающих напряжений.

Глава 5

Волновые процессы в сложных биологических средах

Численное изучение физиологических и патологических процессов, происходящих в организме человека, позволяет получить новые качественные и количественные характеристики функционирования органов в различных условиях и протекающих в них нормальных и патологических процессов, что необходимо для прогнозирования их развития, предсказания последствий патологий, выдачи медицинских рекомендаций и разработки новых принципов диагностики на ранних стадиях различных заболеваний.

На сегодняшний день медицина является экспериментальной наукой, ориентированной на констатацию фактов и выдачу рекомендаций в части операционных или медикаментозных средств для ослабления патологических процессов. Проблема построения математических моделей функционирования различных органов остается практически открытой.

Наиболее сложной проблемой при построении моделей органов и процессов в них является экспериментальная верификация расчетных данных, так как соответствующие эксперименты практически отсутствуют. Более того, некоторые процессы в данной области изучать экспериментально крайне затруднительно, если вообще возможно. По этой причине и появились предложения со стороны медицинских специалистов изучать подобные процессы методами численного моделирования.

Математическое моделирование, как метод исследования в данном случае обладает рядом очевидных достоинств: небольшая стоимость численного эксперимента, доступная широта диапазона изменения основных параметров, полнота получаемой в результате картины динамики скоростей, напряжений и деформаций во всем объеме рассматриваемой системы [74].

5.1 Задача о черепно-мозговой травме

В данном разделе рассматривается задача о численном моделировании сеточно-характеристическим методом механических процессов, протекающих в системе череп-мозг при различных динамических воздействиях. Эта задача является актуальной с точки зрения выяснения механизмов повреждаемости тканей мозга при различных типах внешней нагрузки.

Объяснение явлениям, наблюдаемым при черепно-мозговой травме (далее по тексту — ЧМТ) может дать только изучение сложных процессов, протекающих в неоднородной биологической конструкции, которую представляет из себя голова человека (рис. 68). Слоистая конструкция покровов головного мозга ослабляет действие продольных упругих волн (за счёт пористого слоя черепной коробки), поперечных упругих волн (за счёт слоя ликвора под костной частью), напряжений, вызванных нормальными, а также скользящими ударами. Можно предположить, что именно сложная волновая картина, обусловленная как геометрическими особенностями анатомии черепа, так и различием механических свойств компонентов системы череп-мозг, определяет пространственное распределение областей напряжений [60].

Из нейрохирургической практики известно, что области поражения мозга при черепно-мозговой травме не всегда совпадают с областями, прилежащими к месту удара [59]. Примером этому является известный феномен «противоудара» — при ударе затылком область поражения мозга локализуется в любой части головы человека.

На сегодняшний день не существует теории, которая предложила бы механизм повреждения мозга при ЧМТ и давала бы исчерпывающее объяснение всем фактам из клинической практики. Наиболее распространеными и успешными являются две теории — механическая и кавитационная.

Механическая теория объясняет возникновение зон поражения в области «противоудара» кинематикой костных пластинок. Согласно этой теории в момент удара пластинчатая кость в области крыши орбиты, больших и малых крыльев основной кости испытывает значительные деформации (до 1 см). Совершая возвратное движение, костная пластина вызывает поражение мозгового вещества. Однако ряд фактов не согласуется с этой теорией. Во-первых, у ряда больных при КТ-исследованиях в первые часы

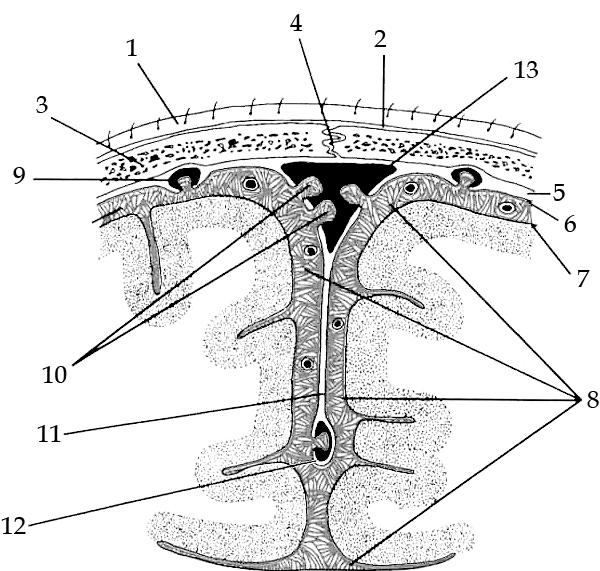
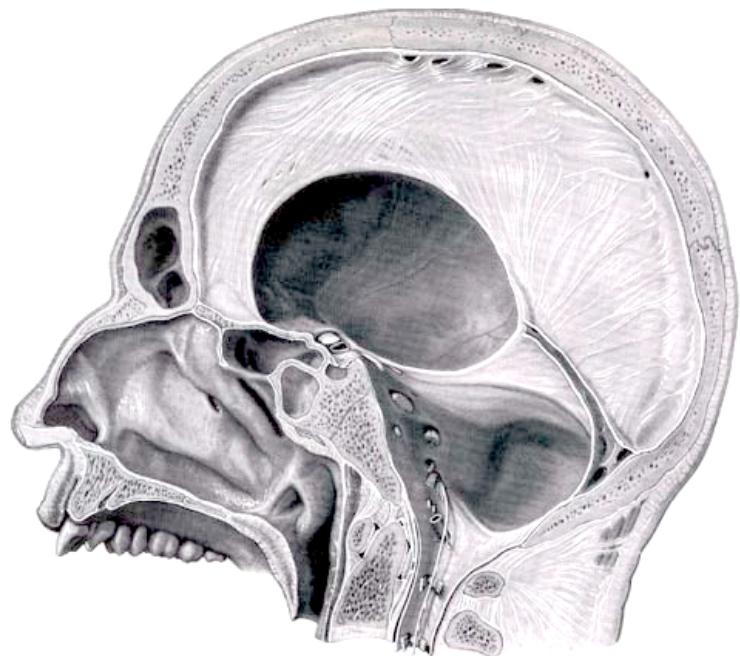


Рисунок 68 — а – кости и твердая оболочка, сагиттальное сечение; б – оболочки мозга (фронтальный срез): 1 – кожа, 2 – надкостница, 3 – кость черепа, 4 – продольный шов, 5 – твердая оболочка, 6 – паутинная оболочка, 7 – сосудистая оболочка, 8 – субарахноидальное пространство, 9 – венозная впадина, 10 – арахноидальные грануляции, 11 – серп большого мозга, 12 – нижний сагиттальный синус (расстояния между оболочками преувеличены)

после травмы очагов ушибов мозга не обнаруживается, они возникают позже. Кроме того, такие очаги располагаются не только на поверхностях мозга, непосредственно прилегающих к костным пластинам, но и на полусовых и конвекситальных поверхностях, где с мозгом граничит не пластинчатая, а губчатая кость, которая при травме таких колебательных движений не совершает и мозг повредить не может.

Кавитационная теория строится на предположении, что вследствие ротационного движения мозга или смещения по инерции его массы на противоположной стороне образуется вакуум. Отрицательное давление, действующее в течение нескольких милисекунд, вызывает в текущей жидкости (крови) появление пузырьков газа (кавитацию). Перемещаясь с потоком крови в область более высокого давления, кавитационный пузырек «схлопывается», вызывая при этом гидродинамическую ударную волну, которая и разрушает стенки сосуда. Кавитационная теория хорошо объясняет развитие во времени очагов поражения и отсутствие в начальные моменты времени в них крови и травматически поврежденных клеток. Однако неясно, насколько кавитационные эффекты действительно имеют место в крови сосудов мозга. За пределами теории также тот факт, что локализация повреждений происходит в основном в лобной и височной долях.

По результатам анализа работ, опубликованных в печатных и электронных изданиях, можно сделать вывод о том, что подавляющее количество исследовательских работ в области моделирования ЧМТ было проведено за рубежом с применением различных вариаций методов конечных элементов (МКЭ) (в частности, [70], [71], [72], [73]). Подробный обзор зарубежных работ, посвященных численному исследованию ЧМТ, выполнен в [58].

Несмотря на то, что моделирование головного отдела человека с помощью МКЭ в последние десять лет интенсивно развивается, оно еще далеко от того, чтобы иметь возможность объяснить механизмы повреждения мозга и предсказать последствия ЧМТ. Такие вопросы, как реология биоматериалов, составляющих голову человека, механическое взаимодействие поверхностей мозга и черепа, воздействие желудочков и пустот на распределение напряжений, рассмотрение многослойного строения оболочек мозга с воспроизведением его точной геометрии требуют дальнейшего исследования.

В работе [66] был предложен ряд двумерных моделей для трансверсального и сагиттального сечений для анализа влияния различий в механических свойствах белого и серого вещества на распределение максимальных сдвиговых напряжений. Автор показал, что различие в механических свойствах серого и белого веществ, а также включение в модель желудочек необходимо для соответствия вычисленного распределения максимальных сдвиговых напряжений наблюдаемым аксональным повреждениям в белом веществе. В данной модели желудочки описывались жидкостными элементами, а модуль Юнга белого вещества был на 60% больше, чем серого.

В исследовании [67] использовалась двумерная модель вертикального сечения головы человека. Контакт череп-мозг моделировался двумя способами – жесткое сцепление и скольжение с возможностью отрыва. Кроме того, большое отверстие также моделировалось тремя способами – жесткое сцепление, скольжение с возможностью отрыва, незакрепленное. Сравнение с экспериментом показало наилучшее соответствие величины давления в месте удара в случае скользящего контакта, в то время как модели с жестким сцеплением показали результат, наиболее далекий от действительности. Ни одна из моделей не показала соответствия давлений в месте противоудара, что может объясняться неспособностью контактного алгоритма противостоять растягивающим нагрузкам. Авторы заключили, что величины давления как в месте удара, так и в месте противоудара намного более чувствительны к способу моделирования контакта череп-мозг, чем к наличию или отсутствию свободного большого отверстия.

Смещение мозга относительно черепа описаны более пятидесяти лет назад. Это вызывало особый интерес к численному моделированию этого явления. Моделирование внутричерепной жидкости линейно-упругими элементами с малым сдвиговым модулем [66] показало, что этот подход вносит дополнительные касательные напряжения между черепом и мозгом, а также снижают устойчивость вычислений вследствие вырождения элементов. Другим подходом является введение контактных условий на границе череп-мозг. Конкретные условия различаются у разных авторов, от жесткого сцепления до скольжения с трением. Было проведено некоторое количество сравнительных исследований с использованием различных контактных условий [69]. Все они приводят к заключению, что эффект

ударного воздействия на голову человека чувствителен к способу моделирования взаимодействия череп-мозг.

Основные трудности, возникающие в большинстве современных МКЭ моделей ударных воздействий на черепно-мозговой отдел человека, возникают в связи с высокой чувствительностью результата к аккуратному моделированию контактных взаимодействий черепа и мозга, а также к учету различных структурных неоднородностей в мозге [57].

Кроме того, методы конечных элементов изначально предназначены для расчета статических процессов, в то время как в данной задаче существенную роль играют динамические волновые процессы.

Это дает основание полагать, что применение иных классов численных методов может служить эффективным средством повышения точности существующих моделей. Одним из таких классов является класс сеточно-характеристических методов, известных более аккуратной формулировкой граничных и контактных условий, а также способностью более адекватно описывать сложные волновые картины распространения возмущений в сильно гетерогенной среде. В то же время наличие сложной геометрии свидетельствует о необходимости обобщения и распространения существующих сеточно-характеристических методов на случай нерегулярных сеток и трех пространственных переменных.

Изучение черепно-мозговой травмы сеточно-характеристическими численными методами было начато в работе [55]. В данной работе авторы рассматривают общие подходы к численному моделированию различных динамических задач биомеханики, в том числе представлены расчеты распространения возмущений в системе череп-мозг на примере двухкомпонентных двумерных моделей (сагиттальная и трансверсальная проекции). Полученные результаты показывают перспективность использования сеточно-характеристических методов – на использованной простейшей модели видны возможности формирования зон удара и противоудара, что согласуется с данными клинической практики.

Дальнейшее развитие применение сеточно-характеристических численных методов для моделирования ЧМТ получило в работах [56]. Работа [58], по-видимому, является наиболее полной на сегодняшний день в данной области. В данной работе сформулирован ряд двумерных математиче-

ских моделей механической реакции системы череп-мозг на ударное воздействие, позволяющих численно определить распределение в пространстве пиковых механических нагрузок и деформаций тканей мозга. В работе проведен анализ влияния некоторых параметров на результат моделирования.

- Геометрия компонентов системы. В работе использовались три модели: простейшая двухкомпонентная модель череп-мозг, модель с учетом желудочков большого мозга, модель с учетом желудочков и серпа большого мозга. Получено, что все рассмотренные компоненты оказывают заметное влияние на рассматриваемые биомеханические процессы.
- Различные варианты контактных условий на границе череп-мозг. Использовались условия полного слипания и свободного скольжения. При использовании условий свободного скольжения получены результаты, гораздо лучше соответствующие данным клинической практики. Этот факт очевидно связан с тем, что в реальной системе между черепом и мозгом расположен слой внутричерепной жидкости. Таким образом, реальное контактное условие - «два твердых тела через тонкий слой жидкости», которое при малых относительных скоростях тел хорошо приближается условием свободного скольжения. Аналогичные результаты получены в работах [67] и [69].
- Зависимость максимальных отрицательных и положительных, а также сдвиговых напряжений от направления удара для разных моделей. Получено, что отрицательные и положительные напряжения слабо зависят от использованных геометрических моделей и условий на контактных границах, в то время как для сдвиговых нагрузок зависимость от них значительная.

Также в работе [58] получено, что зоны повреждений мозга гораздо лучше коррелируют с зонами максимальных сдвигов, чем с зонами сжатий и растяжений. Об этой же особенности говорят и результаты работ [66] и [68]. В свете этого факта особенно интересной становится отмеченная выше зависимость расположения зон максимальных сдвигов от направления удара и от использованной модели.

Механические процессы в покрывах мозга при ударе

В задаче о черепно-мозговой травме можно выделить несколько характерных особенностей.

- Большое различие в механических свойствах компонентов биологической системы. Например, модули Юнга костной ткани и мозгового вещества различаются на порядки.
- Неоднородность внутреннего строения отдельных компонентов. Кости, к примеру, состоят из двух типов ткани – компактной и губчатой, которые заметно отличаются по своим свойствам.
- Большое количество компонентов системы и их сложная геометрия.

Указанные особенности сильно затрудняют моделирование всей системы череп-мозг целиком. Поэтому естественно детально рассмотреть составляющие данной системы по отдельности. Это позволит лучше понять происходящие процессы на микроуровне, а также определить, какие из их свойств и особенностей являются важными для рассматриваемой полной задачи о ЧМТ.

В данной частной задаче исследовались волновые процессы, происходящие в покрывах мозга при динамическом нагружении. Рассматривалось прохождение волны нагрузки через череп и ликвор до мозга [30].

Данные о строении покровов мозга были взяты из [77], соответствующий срез приведен на рис. 69.

При моделировании череп был принят состоящим из трех однородных слоев костной ткани – внешнего из компактной, промежуточного из губчатой и внутреннего из компактной, также в модель были включены внутричерепная жидкость (ликвор) и мозговое вещество (рис. 70).

Моделировался нормальный удар медленно летящим шариком по черепу. Рассматривалась прямоугольная область, представляющая собой небольшую часть покровов мозга и собственно мозгового вещества (рис. 70). На правой границе, соответствующей внешней стенке черепа, ставилось условие свободной границы (нулевые касательные и нормальные напряжения). На трех остальных границах, которые на самом деле свободными не являются, также ставилось условие свободной границы, но при этом геометрия

области выбиралась таким образом, чтобы за рассматриваемое время возмущение не успело дойти до этих границ. Расчет различных слоев костной ткани черепа, внутричерепной жидкости и мозгового вещества производился сквозным образом.

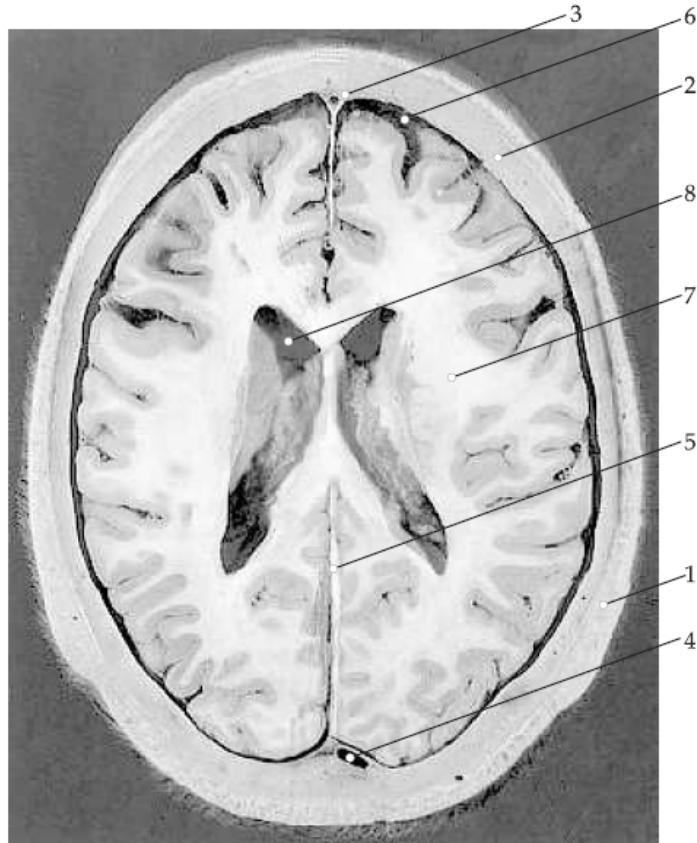


Рисунок 69 — Трансверсальное сечение головы человека. 1 – мягкие ткани, 2 – кости черепа, 3 – твердая оболочка (dura mater), 4 – синусы, 5 – серп большого мозга (falx cerebri), 6 – ликвор, 7 – серое и белое мозговое вещество, 8 – желудочки мозга

Данные обо всех включенных в модель компонентах представлены в таблице 7.

Коэффициент λ для ликвора пересчитан из скорости звука, μ взят ненулевым, чтобы не создавать вычислительных проблем.

Шарик и череп считались на двух разных сетках. Контактная граница между ними выделялась явным образом, на ней ставились условия свободного скольжения – равенство нормальных напряжений и нормальных компонент скорости и нулевые касательные напряжения.

Влияние различных слоев покровов мозга на распространение волны детально изучалось на одномерной модели. Внешняя нагрузка при этом

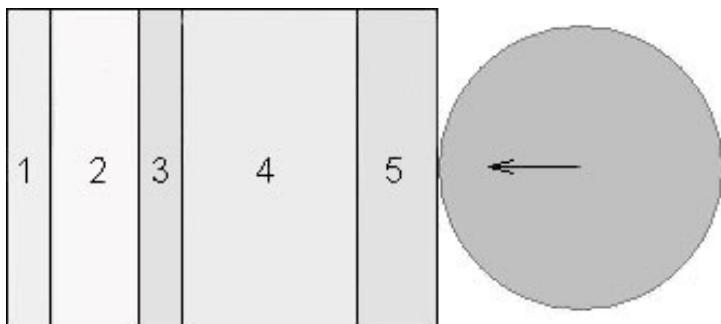


Рисунок 70 — Вид расчетной области (размер по вертикали не соблюден). 1 – мозговое вещество, 2 – ликвор, 3 – внутренний слой компактной костной ткани, 4 – слой губчатой костной ткани, 5 – внешний слой компактной костной ткани.

Таблица 7 — Механические характеристики рассматриваемых биологических материалов

Компонент	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа
Компактная костная ткань	1.60	7900	5270
Губчатая костная ткань	1.50	3975	2650
Ликвор	1.00	1700	0.001
Мозговое вещество	1.02	1700	0.23

задавалась в виде прямоугольного импульса длительности 15 мкс. В этом случае амплитуда первичной волны не меняется со временем, что позволяет сделать картину волновых процессов более четкой. На рис. 71 представлены графики зависимости напряжения от координаты в различные моменты времени. Ось направлена по внешней нормали, ноль соответствует поверхности черепа. На графиках видно влияние различных слоев покровов мозга на распространение волны и отражение от контактных границ.

Основные расчеты были сделаны на двумерной модели. Моделировался удар шариком из жесткого пластика сантиметрового диаметра, налетающим со скоростью 3 м/с перпендикулярно стенке черепа. Разумеется, такой удар не приводит к травмам. Но принципиальная картина волновых процессов не зависит от скорости шарика, поэтому ее можно выбрать малой для удобства расчетов. На рис. 72 изображены изолинии напряжений в различные моменты времени.

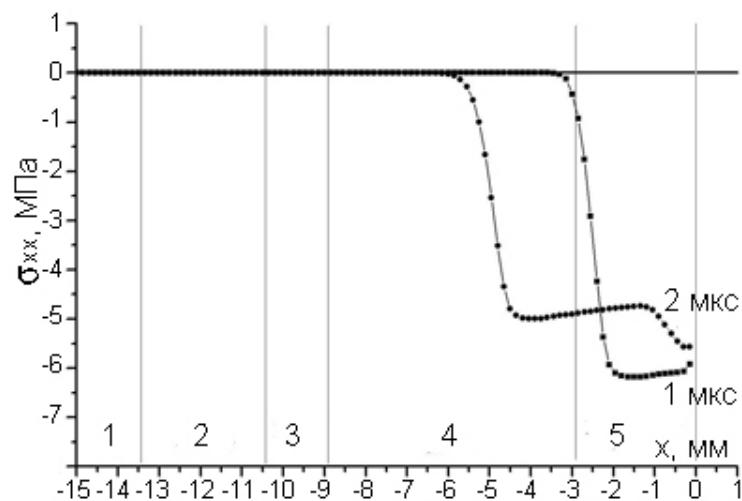
На рис. 73 представлены одномерные графики зависимости напряжений от координаты. Ось направлена по внешней нормали, ноль соответствует

поверхности черепа.

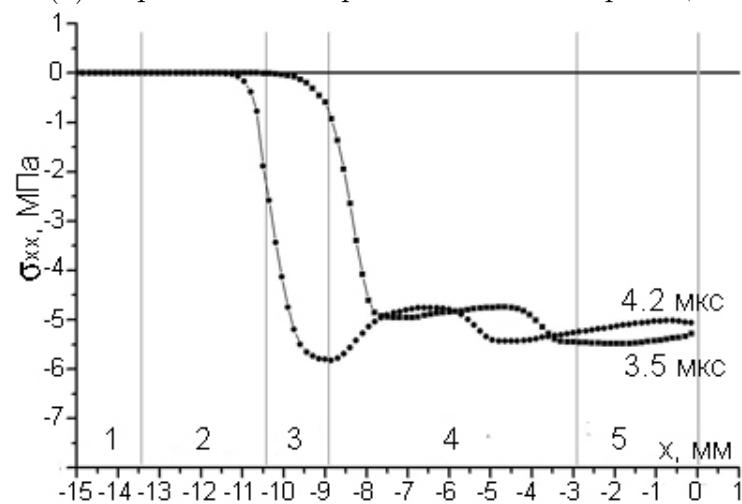
Видно, что покровы мозга уменьшают напряжения во много раз. Сдвиговые напряжения полностью снимаются ликвором, нормальные напряжения ослабляются в стенке черепа на порядки. Отдельно стоит отметить, что нормальные напряжения, действующие вдоль оси u , концентрируются в слоях компактной костной ткани (рис. 73в).

Эффективности покровов мозга как защитной конструкции также способствует то, что коэффициенты Ламе для мозгового вещества на порядки меньше, чем для остальных компонентов системы, при лишь небольших различиях плотности. Это приводит к тому, что возмущения в черепе и ликворе распространяются намного быстрее, чем в мозге. В результате диссипация возмущений в покровах мозга происходит гораздо быстрее, чем их проникновение в мозг. На рис. 72 видно, что за время от 15 мкс до 25 мкс после удара возмущения практически не заходят вглубь мозга, а по ликвору и черепу они за это же распространяются на довольно большие расстояния [38, 39].

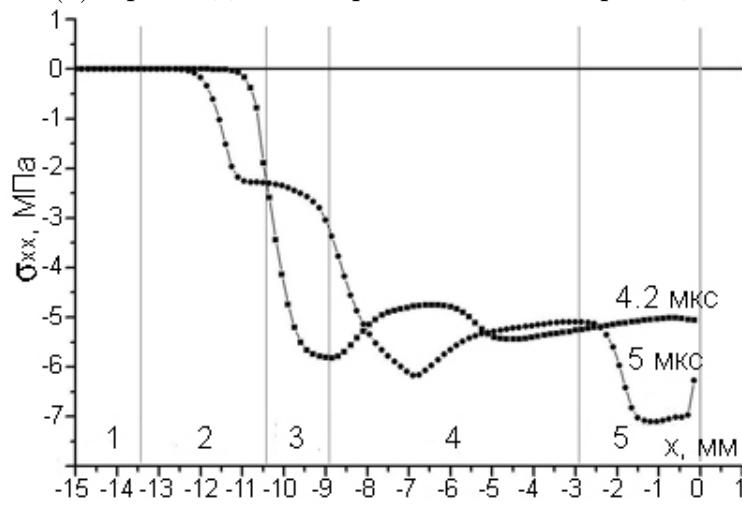
Также был выполнен количественный анализ результатов расчетов. В одномерном случае получено, что череп и ликвор снижают нагрузки на мозг в 20-30 раз по сравнению с нагрузками в месте нанесения удара. В двумерном случае нагрузки снижались в 300-400 раз, что связано с отмеченной выше большой скоростью диссипации возмущений. В трехмерном случае следует ожидать еще большего снижения нагрузок.



(а) Отражение от первой контактной границы



(б) Прохождение второй контактной границы



(в) Прохождение возмущения в ликвор

Рисунок 71 — Зависимость напряжения от координаты. 1 — мозговое вещество, 2 — ликвор, 3 — внутренний слой компактной костной ткани, 4 — слой губчатой костной ткани, 5 — внешний слой компактной костной ткани.

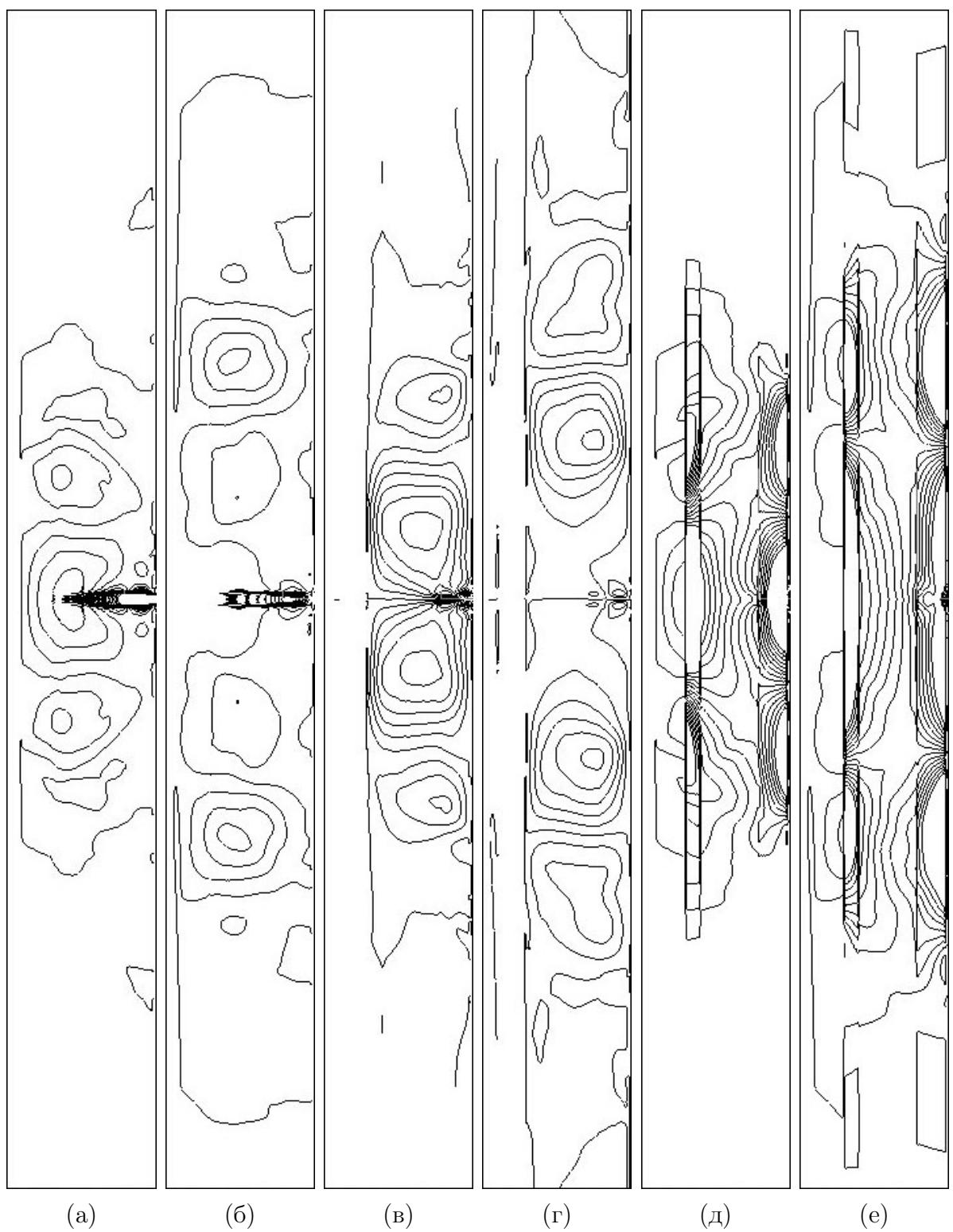


Рисунок 72 – Изолинии напряжений. а – σ_{xx} при $t = 15$ мкс., б – σ_{xx} при $t = 25$ мкс., в – σ_{xy} при $t = 15$ мкс., г – σ_{xy} при $t = 25$ мкс., д – σ_{yy} при $t = 15$ мкс., е – σ_{yy} при $t = 25$ мкс. Ось x направлена вправо, ось y – вверх. Шарик налетает справа.

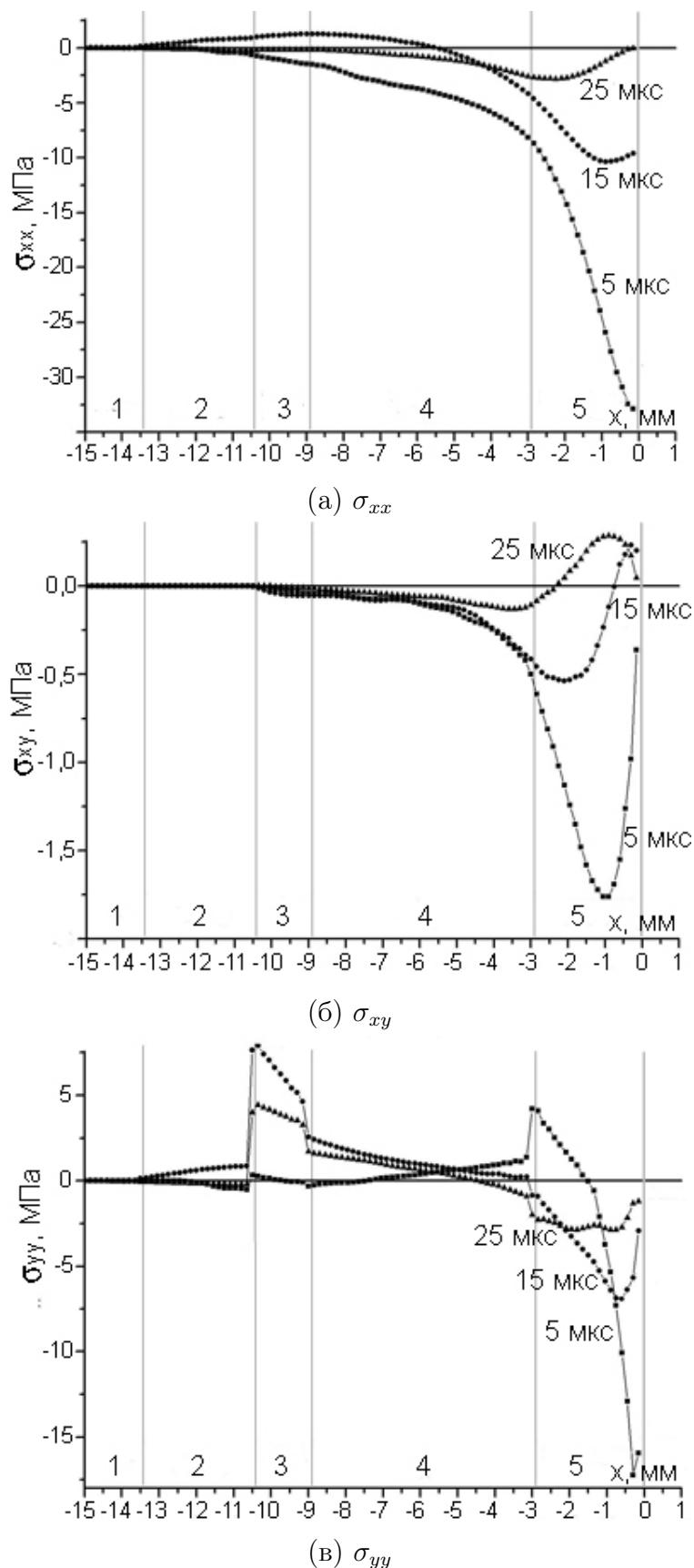


Рисунок 73 — Зависимость напряжения от координаты. 1 — мозговое вещество, 2 — ликвор, 3 — внутренний слой компактной костной ткани, 4 — слой губчатой костной ткани, 5 — внешний слой компактной костной ткани.

Упрощенная модель покровов мозга

Картина распространения возмущений в стенке черепа носит явно выраженный волновой характер, наблюдается многократное отражение волн от контактных границ между отдельными компонентами. Соответственно, внутреннее строение рассматриваемой системы может оказывать сильное влияние на происходящие процессы. Таким образом, кажется логичным при дальнейшем моделировании использовать введенную многокомпонентную модель покровов мозга. Но этот подход наталкивается на две сложности.

- Введенная многокомпонентная модель требует сильного измельчения расчетной сетки, что ведет к уменьшению шага интегрирования.
- Механические параметры отдельных компонент системы известны неточно. При этом неясно, насколько сильно их изменение скажется на итоговой картине.

Поэтому перед применением многокомпонентной модели разумно рассмотреть, насколько ее введение влияет на различные стадии процесса, и понять, когда ее использование разумно, а когда будет слабо сказываться на итоговых результатах [31].

В многокомпонентной модели череп был принят состоящим из трех однородных слоев костной ткани, также в модель были включены внутричерепная жидкость (ликвор) и мозговое вещество (рис. 70). Для сравнения использовались две упрощенные модели. В первой из них слои 3, 4, 5 (рис. 70) были объединены в один слой, состоящий из компактной костной ткани. Во второй модели слои объединялись так же, но итоговый слой состоял из губчатой ткани. Таким образом три модели (многокомпонентная и две упрощенные) позволили рассмотреть влияние как сложности модели (числа слоев), так и механических характеристик материала черепа.

Для подробного рассмотрения распространения волн и их взаимодействия с контактными границами была выполнена серия одномерных расчетов. Внешняя нагрузка в одномерном случае задавалась в виде бесконечного прямоугольного импульса 10 МПа.

На рис. 74 и 75 представлены графики зависимости напряжения от координаты в различные моменты времени для различных моделей. Ось

направлена по внешней нормали к черепу, ноль соответствует поверхности черепа. На графиках видно влияние различных слоев покровов мозга на распространение волны и отражение от контактных границ.

Из двух рассмотренных моделей с однородным черепом приведены графики только для одной – для модели с черепом из компактной костной ткани – так как качественный вид графиков для этих двух моделей одинаков.

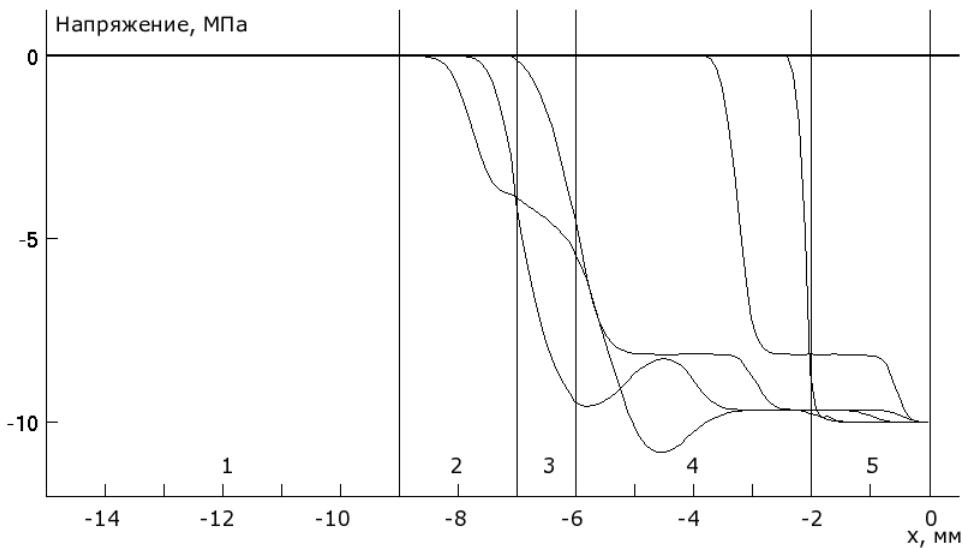


Рисунок 74 — Многокомпонентная модель. 1 – мозговое вещество, 2 – ликвор, 3 – внутренний слой компактной костной ткани, 4 – слой губчатой костной ткани, 5 – внешний слой компактной костной ткани.

Из графиков на рис. 74 и 75 видно, что волновые картины для разных моделей кардинально различаются. Большее количество контактных границ в многокомпонентной модели определяет существенно более сложную волновую картину.

В двумерной постановке моделировался удар шариком из жесткого пластика сантиметрового диаметра, налетающим со скоростью 3 м/с перпендикулярно стенке черепа. Принципиальная картина волновых процессов не зависит от скорости шарика, поэтому ее можно выбрать малой для удобства расчетов.

На правой границе, соответствующей внешней стенке черепа, (рис. 70) ставилось условие свободной границы. На трех остальных границах также ставилось условие свободной границы, но при этом геометрия области

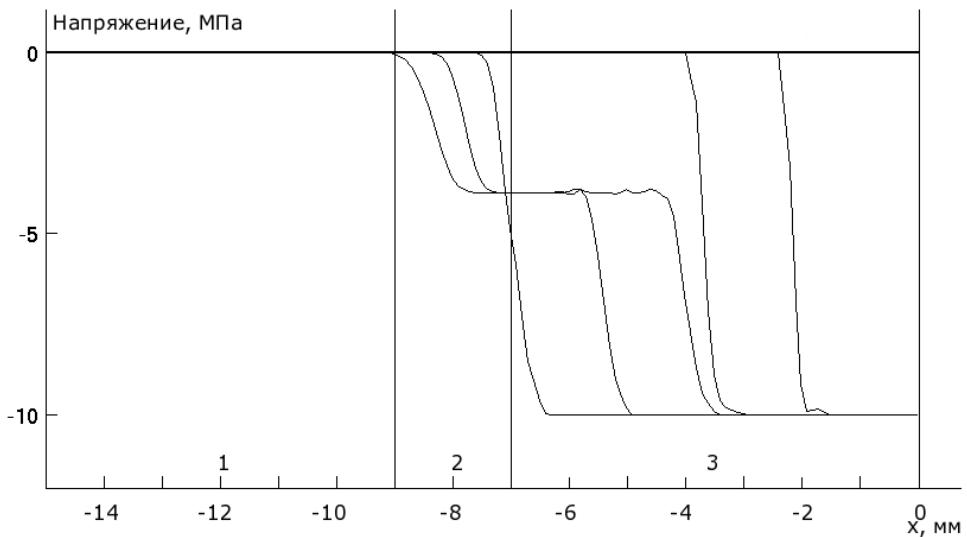


Рисунок 75 — Модель с однородным черепом из компактной костной ткани. 1 — мозговое вещество, 2 — ликвор, 3 — череп из компактной костной ткани.

выбиралась таким образом, чтобы за рассматриваемое время сильное возмущение не успело дойти до этих границ. Расчет различных слоев костной ткани черепа, внутричерепной жидкости и мозгового вещества производился сквозным образом.

На рис. 76 изображены изолинии напряжений в различные моменты времени, полученные с использованием упрощённой модели. Для много-компонентной модели аналогичные картины приведены выше на рис. 72. Видно, что на начальной стадии, пока картина еще носит ярко выраженный волновой характер, распределение напряжений в случае использования разных моделей покровов мозга сильно отличается.

На относительно больших временах (в 10–15 раз больших, чем время прохождения волны через покровы мозга), когда волновые процессы выражены уже относительно слабо и возмущения в заметной степени проникают в мозг, основную роль начинает играть различие механических свойств черепа и мозга. Так как оно на порядки больше, чем различие свойств компонент черепа между собой, то на этой стадии внутреннее строение черепа мало влияет на итоговую картину. Результаты расчетов по разным моделям на этом этапе отличаются между собой незначительно.

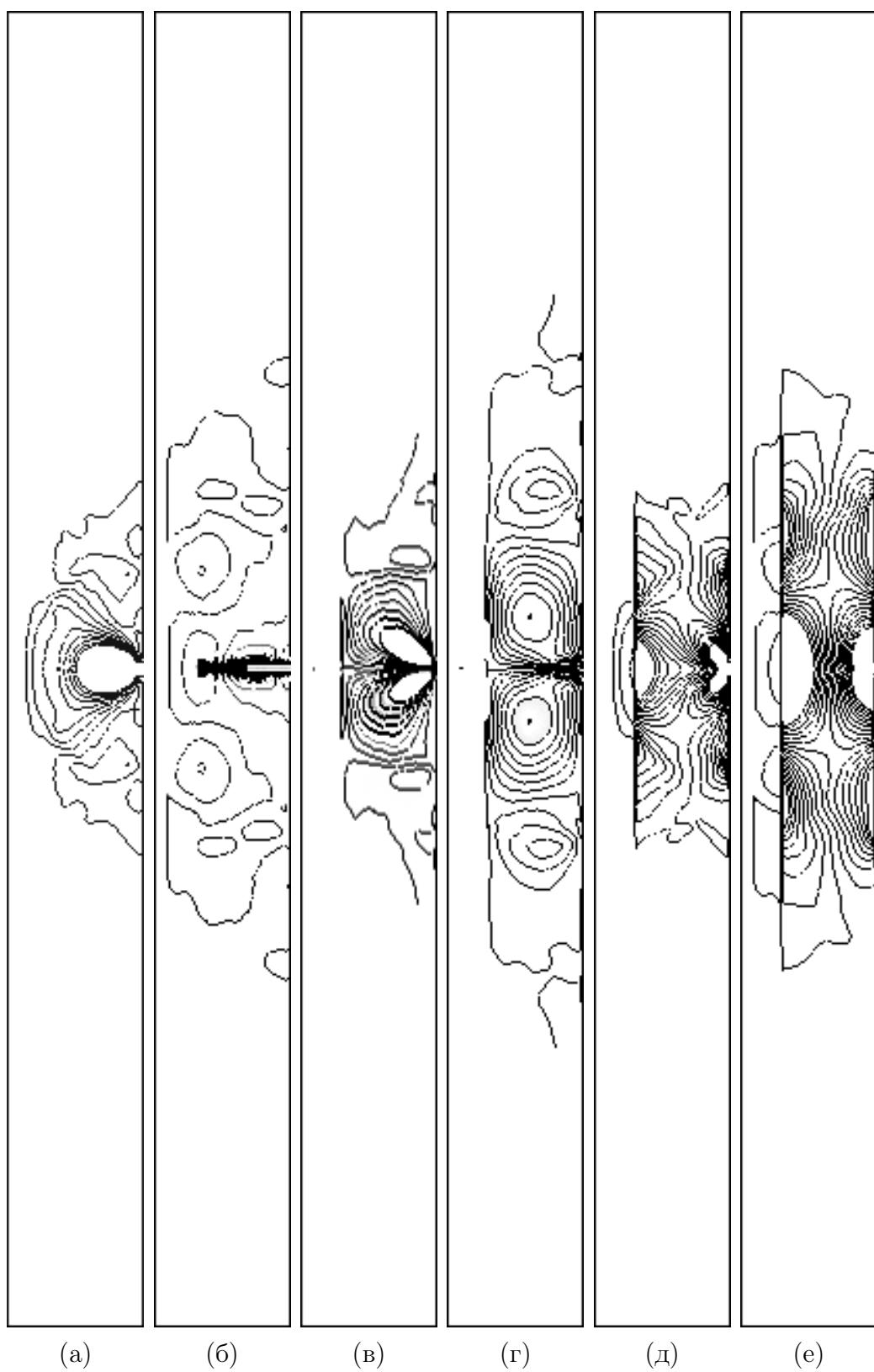


Рисунок 76 — Модель с однородным черепом из компактной костной ткани. Изолинии напряжений. а — σ_{xx} при $t = 7.5$ мкс., б — σ_{xx} при $t = 12.5$ мкс., в — σ_{xy} при $t = 7.5$ мкс., г — σ_{xy} при $t = 12.5$ мкс., д — σ_{yy} при $t = 7.5$ мкс., е — σ_{yy} при $t = 12.5$ мкс. Ось x направлена вправо, ось y — вверх. Шарик налетает справа.

Моделирование системы череп-мозг

Для моделирования системы череп-мозг использовалось несколько моделей головы человека. Простейшей из них является двухкомпонентная модель (рис. 77а), в которой ткани кости и мозга описываются однородными изотропными материалами, имеющими усредненные механические свойства. Более сложные модели учитывают наличие желудочка (рис. 77б) и мембранны твердой оболочки (рис. 77в). Соответствующие расчетные сетки приведены на рис. 78.

Реологические свойства биоматериалов приведены в таблице 7. Поведение костного материала моделировалась как изотропная линейноупругая сплошная среда со средними свойствами пластинчатой и губчатой кости.

Моделирование взаимодействия между черепом и мозгом является сложной задачей ввиду того, что в действительности мозг имеет большое количество различных по механическим свойствам оболочек, складчатых структур, врастущих друг в друга, с полостями, заполненными жидкостью (ликвором). В данной работе применялся метод явного выделения контактного разрыва с контактными условиями скольжения.

Внешняя нагрузка задавалась как соударение системы череп-мозг с абсолютно жесткой неподвижной преградой с заданной начальной скоростью (1–3 м/с).

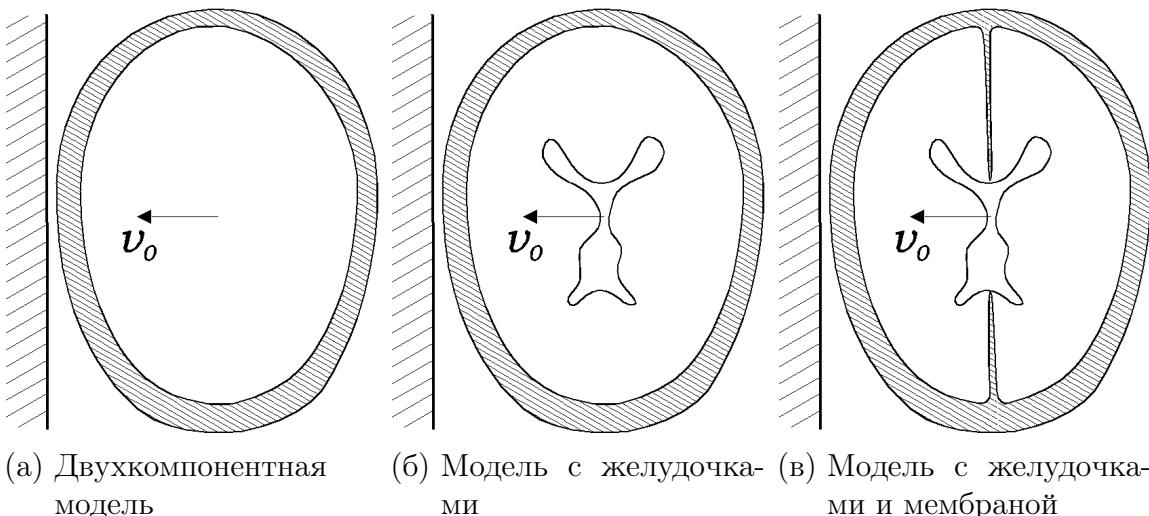
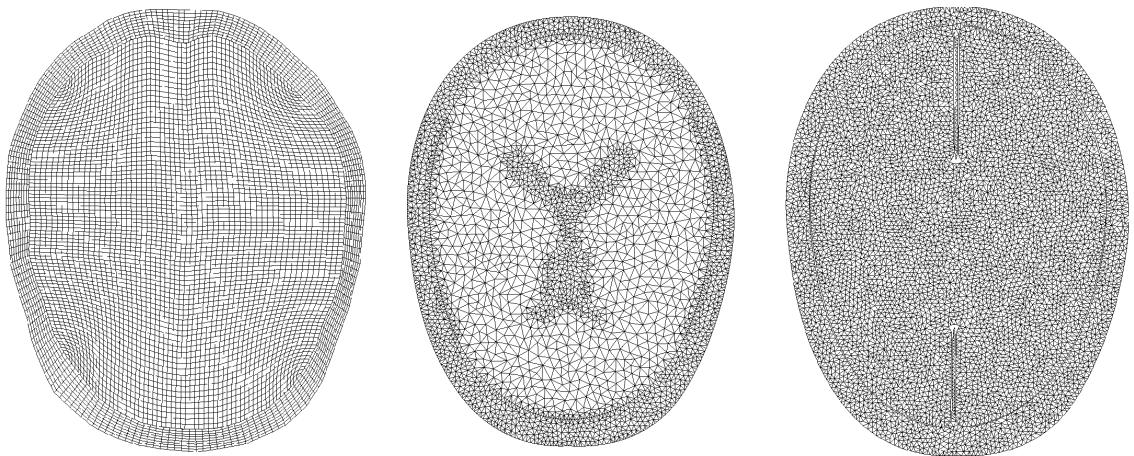


Рисунок 77 — Использованные модели головы человека.

На рис. 79 приведены интегральные характеристики механического воздействия на мозг при боковом ударе, полученные с помощью двухкомпо-



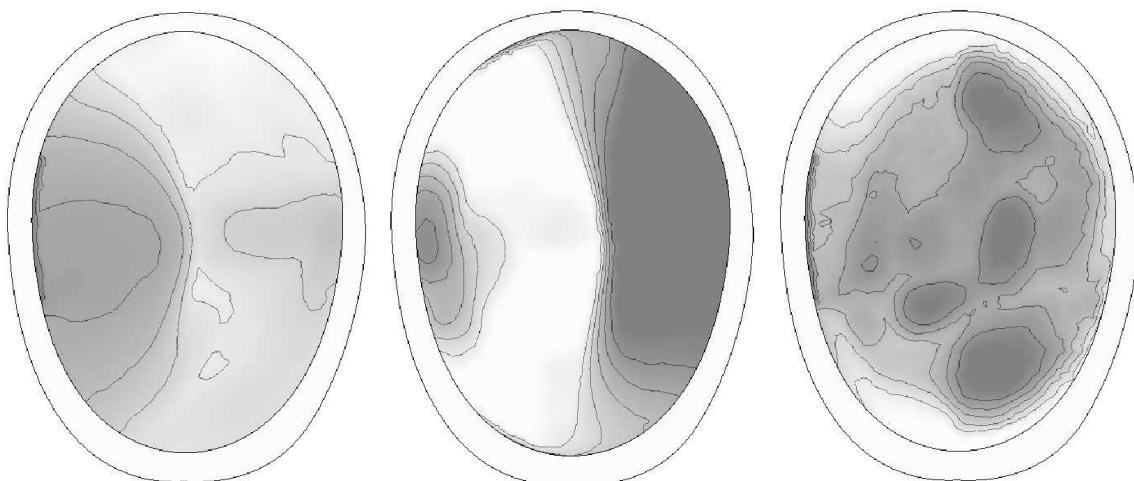
(а) Двухкомпонентная модель

(б) Модель с желудочками

(в) Модель с желудочками и мембранный

Рисунок 78 — Расчетные сетки для моделей головы человека.

нентной модели с условием свободного скольжения на границе череп-мозг. Наиболее опасными представляются концентрации максимальных растягивающих (рис. 79б) и сдвиговых напряжений (рис. 79в). В частности, упомянутое выше явление противоудара продемонстрировано на рис. 79в – наиболее опасные повреждения мозгового вещества локализуются в области положительных напряжений.



(а) Максимальное напряжение сжатия

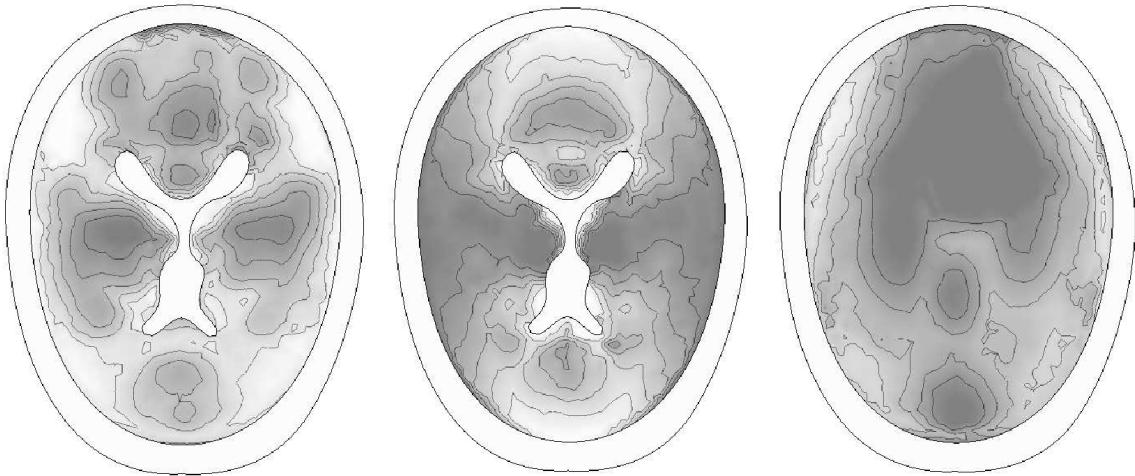
(б) Максимальное напряжение растяжения

(в) Максимальное сдвиговое напряжение

Рисунок 79 — Результаты расчета двухкомпонентной модели.

На рис. 80 приведены распределения сдвиговых напряжений при ударе снизу, полученные с помощью разных моделей. Использование условия полного слипания на границе череп-мозг приводит к концентрации сдвиговых напряжений вдоль контактной границы на боковых поверхностях,

в то время как скользящий контакт полностью их снимает. Учет наличия желудочеков оказывает слабое влияние на распределение областей максимального сжатия и растяжения, но существенно влияет на распределение сдвиговых нагрузок. Наличие мембраны является более существенным для локализации областей сжатия-растяжения при боковых ударах.



(а) Полное слипание на (б) Свободное скольжение (в) Двухкомпонентная контактной границе на контактной границе модель, слипание

Рисунок 80 — Распределение сдвиговых напряжений для разных моделей.

5.2 Задача о динамическом нагружении коленного сустава

Колени – очень уязвимая часть организма человека. Отдельное внимание при рассмотрении повреждений коленного сустава следует уделить мениску. Заметное изнашивание или тем более разрыв мениска делает работу коленного сустава практически невозможной. Кроме того, мениск плохо снабжается кровью, поэтому сам по себе он не заживает и не восстанавливается. Мениск выполняет не только функцию амортизатора, но и заполняет пространство между костями.

Колено представляет собой сложную механическую структуру (рис. 81), поэтому процессы повреждения, протекающие в нём, тоже сложны. С помощью численного моделирования можно воспроизвести травмы, характер их развития. Другое не менее важное применение моделирования в данной задаче – численное воспроизведение хирургической операции, например пересадки мениска.

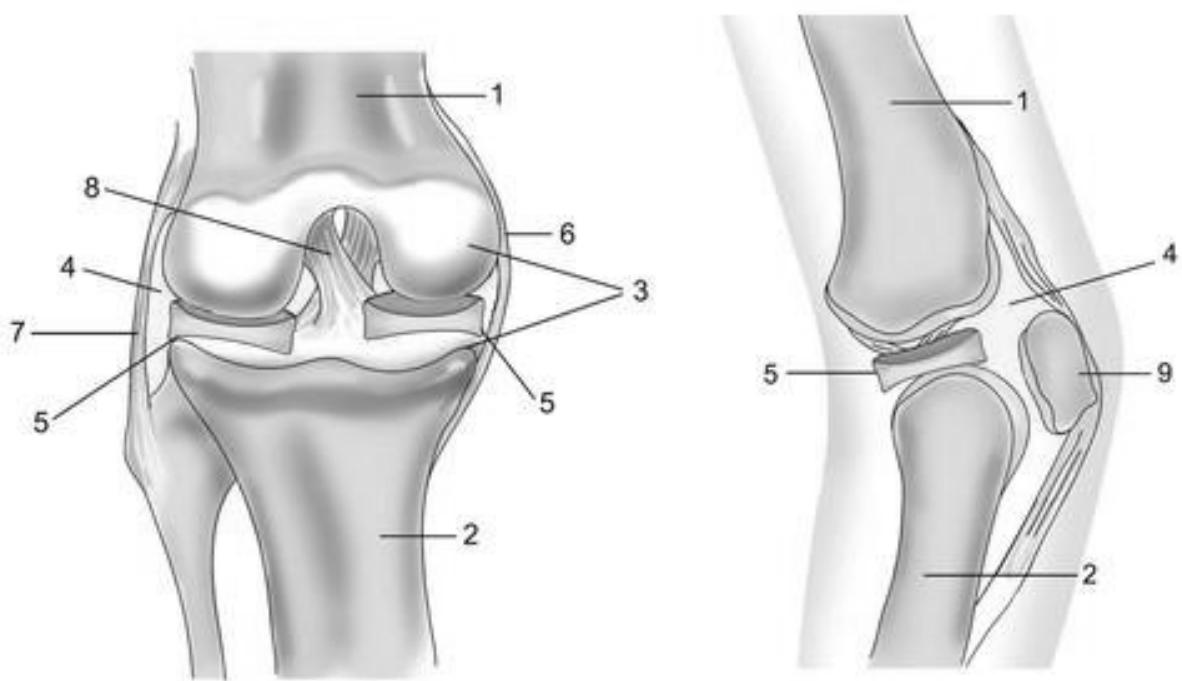


Рисунок 81 – Строение коленного сустава: 1 - бедренная кость, 2 - большая берцовая кость, 3 - хрящи, 4 - полость с жидкостью, 5 - внутренний и внешний мениски, 6 - внешняя связка, 7 - внутренняя связка, 8 - крестообразная связка, 9 - надколенник.

Наиболее распространенные травмы коленного сустава при относительно слабых воздействиях – повреждения мягких тканей, к которым относятся гематомы, растяжения и разрыв связок и мениска, а также вывихи коленной чашечки и коленного сустава. Эти травмы являются следствиями прямого воздействия на колено, скручивания ноги или чрезмерного сгибания.

В рамках данной работы рассматривается модель согнутого коленного сустава (рис. 82а), включающая берцовую кость, бедренную кость, коленную чашечку и мениск [35]. Соответствующая расчетная сетка приведена на рис. 82б. Значения параметров биологических сред приведены в таблице 8.

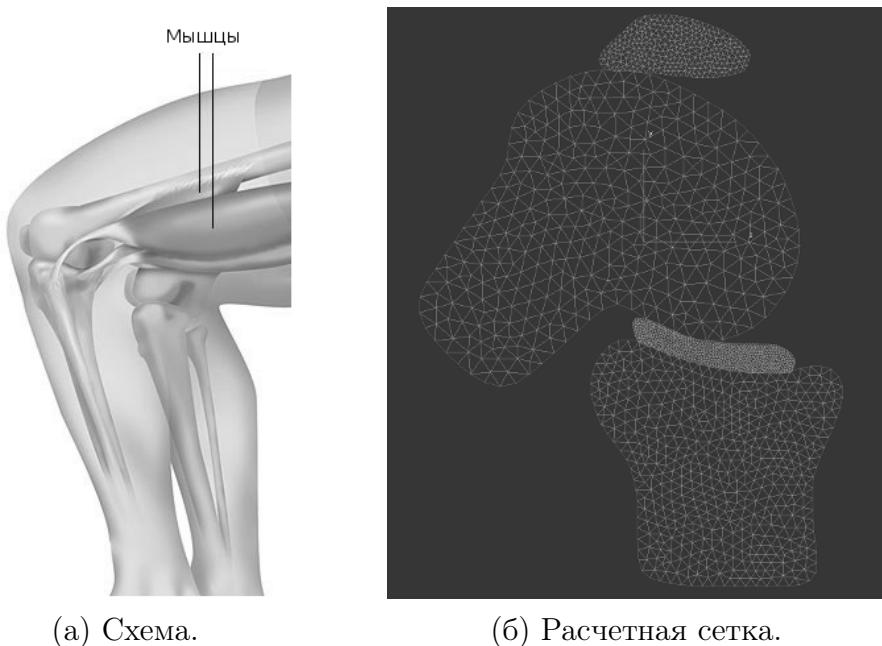


Рисунок 82 — Согнутый коленный сустав.

Таблица 8 — Механические характеристики в задаче о коленном суставе

Компонент	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа
Костная ткань	1.60	2100	2700
Мягкие ткани мениска	1.10	100	70

В первом расчете скорость соударения составляла 3 м/с, направление удара составляло 45 градусов с горизонталью. Распределение напряжений показано на рис. 83. При этой скорости удара напряжения, возникающие в кости, значительно меньше предела прочности костной ткани. Однако, напряжения сжатия и растяжения в мениске достигают 1-2 МПа, что согласно [75] может вызывать повреждения менисковой ткани. Сдвиговые напряжения не превышают 1 МПа, что не представляет опасности ни для костной, ни для менисковой тканей.

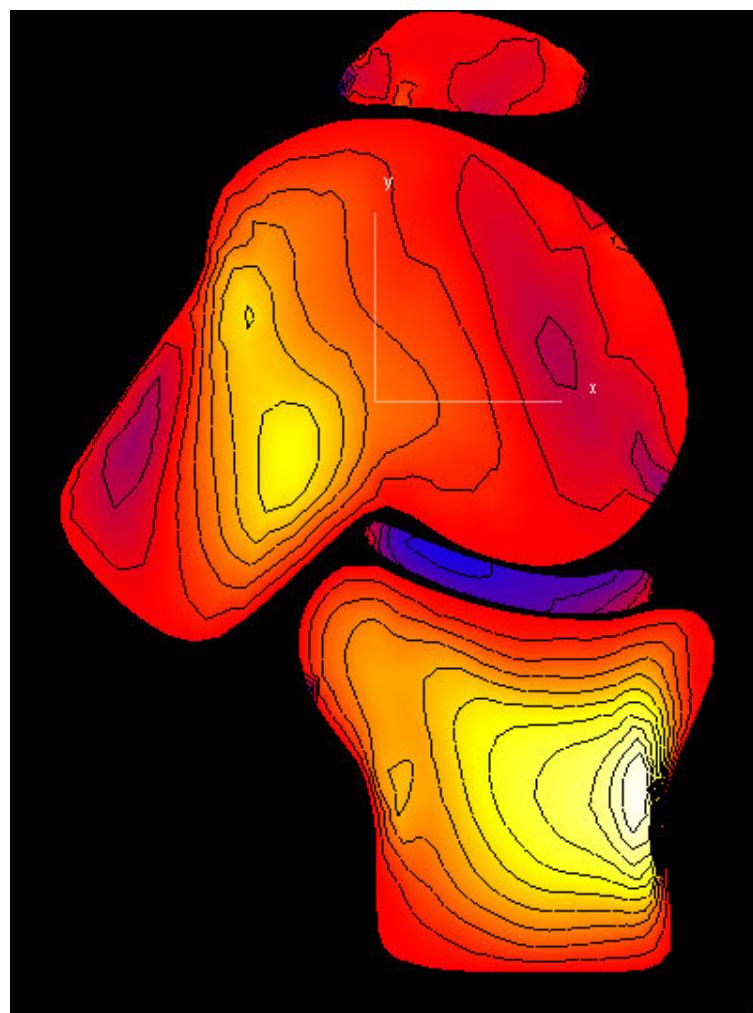
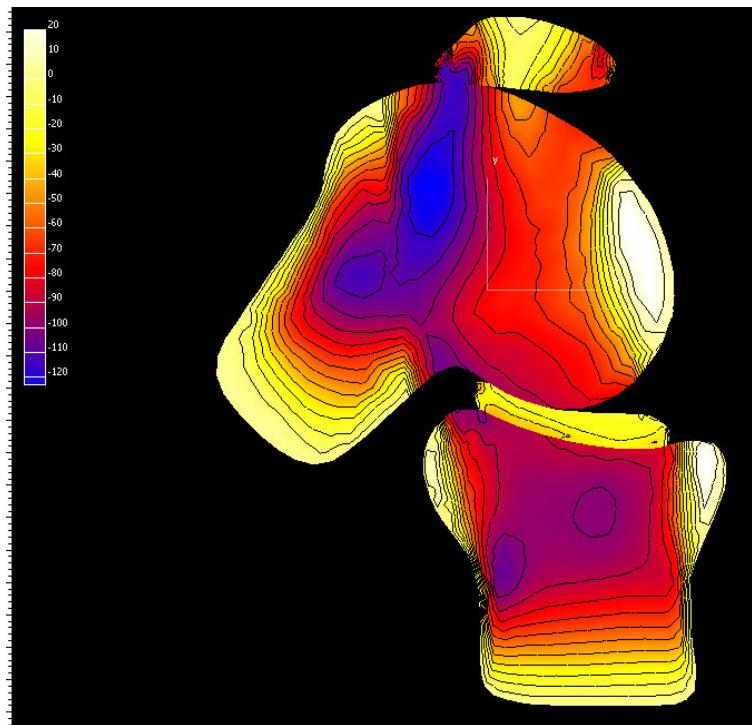
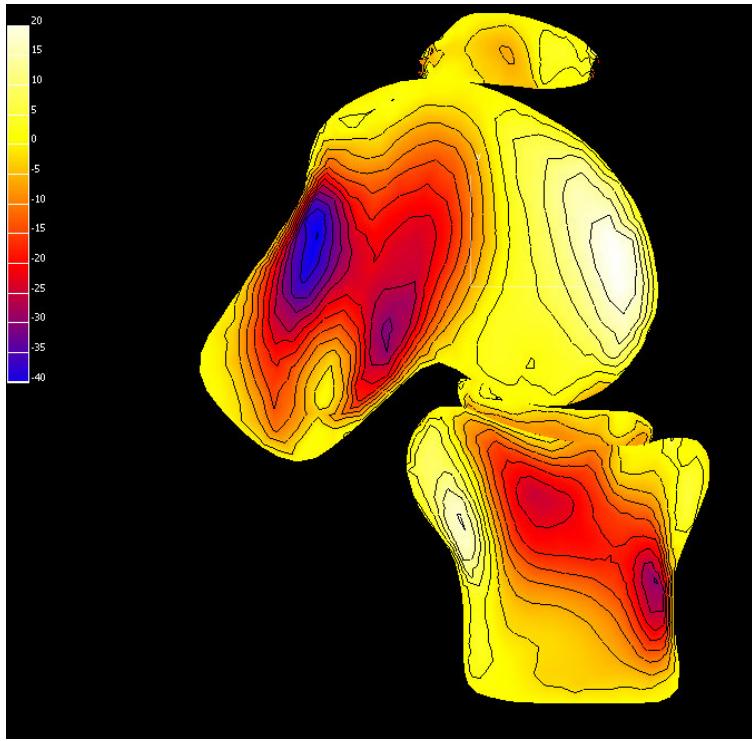


Рисунок 83 — Распределение напряжений сжатия / растяжения. Скорость удара 3 м/с.

Во втором расчете скорость составляла 9 м/с. Распределение напряжений показано на рис. 84.



(а) Начальный момент удара



(б) Завершающая стадия удара

Рисунок 84 — Распределение напряжений сжатия / растяжения. Скорость удара 9 м/с.

При такой скорости в кости возникают напряжения сжатия до величин порядка сотни МПа, что не превышает предела прочности костной ткани. Однако, напряжение растяжения костная ткань выдерживает значительно хуже, при нагрузке растяжения порядка 50-70 МПа уже могут возникать переломы [76]. Области максимальных растяжений на рисунке 84 показаны белым, в этих областях возможны переломы.

Одной из характерных травм при ударе по коленному суставу является перелом мыщелка большеберцовой кости. Механизм формирования данной травмы схематически изображен на рис. 85. Видно, что области повреждений с хорошей точностью совпадают с зонами максимальных растягивающих напряжений, полученными в расчете (см. рис. 84).

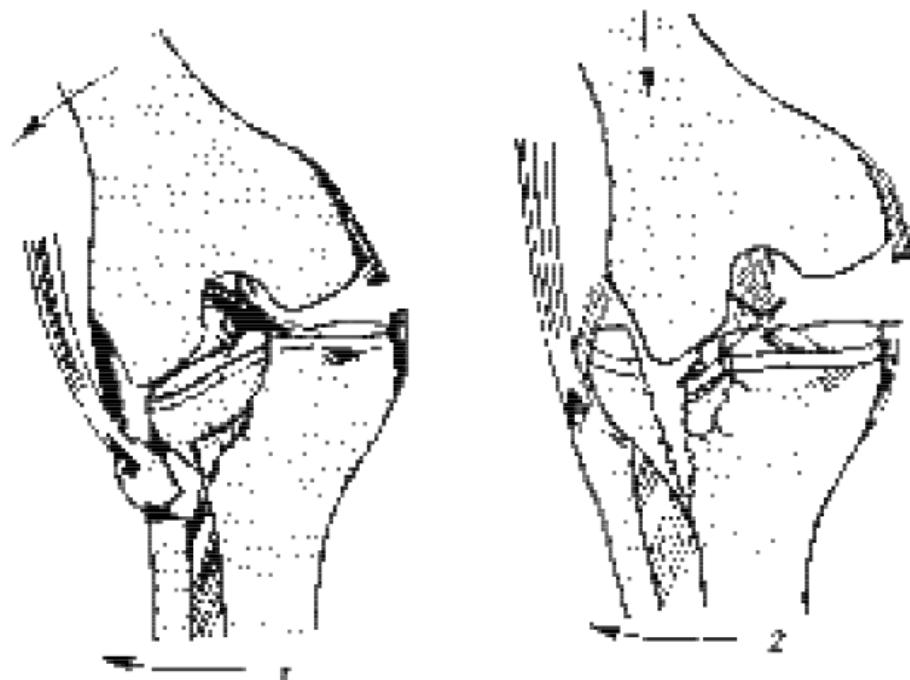


Рисунок 85 — Механизм повреждения при двух типах перелома наружного мыщелка большеберцовой кости.

5.3 Задача об ударе по грудной клетке в защитной конструкции

В медицинской практике известны случаи внезапной остановки сердца молодых спортсменов в результате низкоинтенсивного непроникающего воздействия тупого предмета на прекардиальную область (в основном не очень сильные удары в грудь хоккейной шайбой или бейсбольным мячом). Патогенез этих смертей неясен. Вероятно, удар в грудь попадает в уязвимый период сердечного цикла и вызывает желудочковую тахикардию или фибрилляцию желудочков. Подобные травмы приводили к летальному исходу даже в тех случаях, когда на спортсменах присутствовала защитная амуниция. Следовательно, существующие на сегодняшний день средства защиты неэффективны при определенных типах воздействия. Соответственно, требуется исследование возможных факторов остановки сердца при таких воздействиях, что позволит разработать новые типы протекторов грудной клетки.

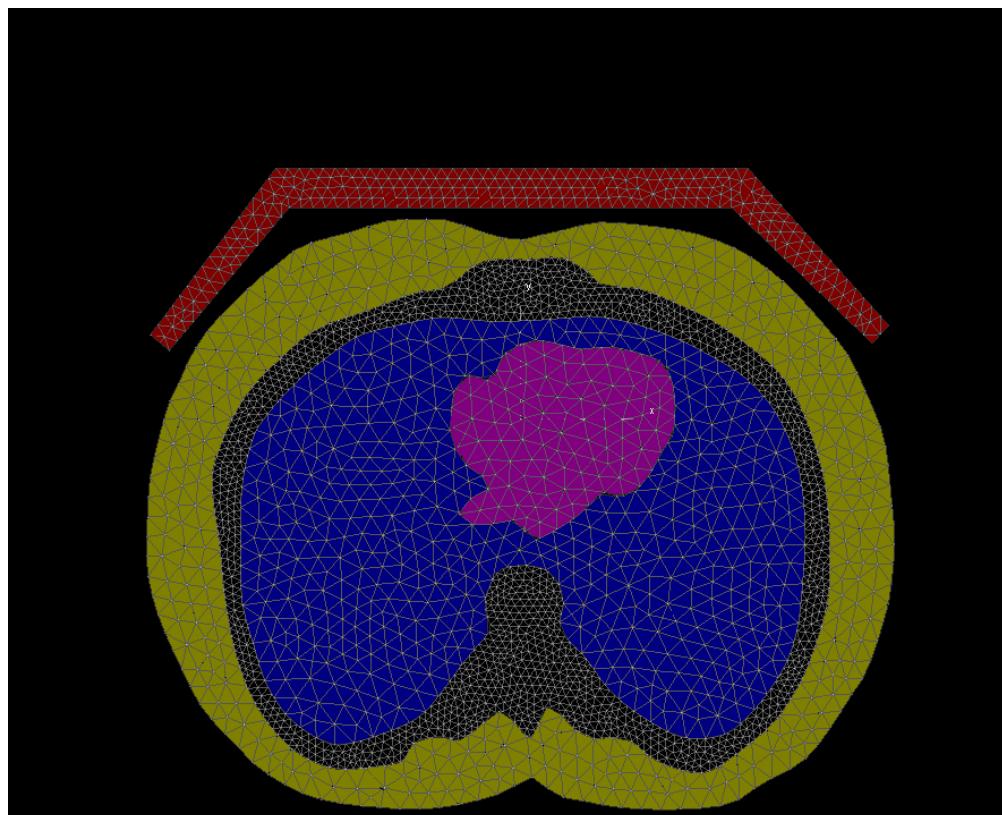


Рисунок 86 — Модель грудной клетки: мышечная ткань, костная ткань ребер, мягкие ткани внутренних органов, сердечная мышца.

В рамках данной работы рассматривается модель грудной клетки, включающая сердце, слой мягких тканей внутренних органов, рёбра и слой мягких тканей мышц (рис. 86). Параметры костной ткани и мягких тканей приведены в таблице 9. Контактное условие на границах между тканями грудной клетки – полное слипание. Контактное условие между тканями грудной клетки и защитной амуницией – свободное скольжение. Рассматривается удар под углом 45 градусов со скоростью 4 м/с.

Таблица 9 — Механические характеристики в задаче о грудной клетке

Компонент	ρ , кг/м ³	λ , ГПа	μ , ГПа
Костная ткань	1.60	2100	2700
Мягкие ткани	1.10	100	70

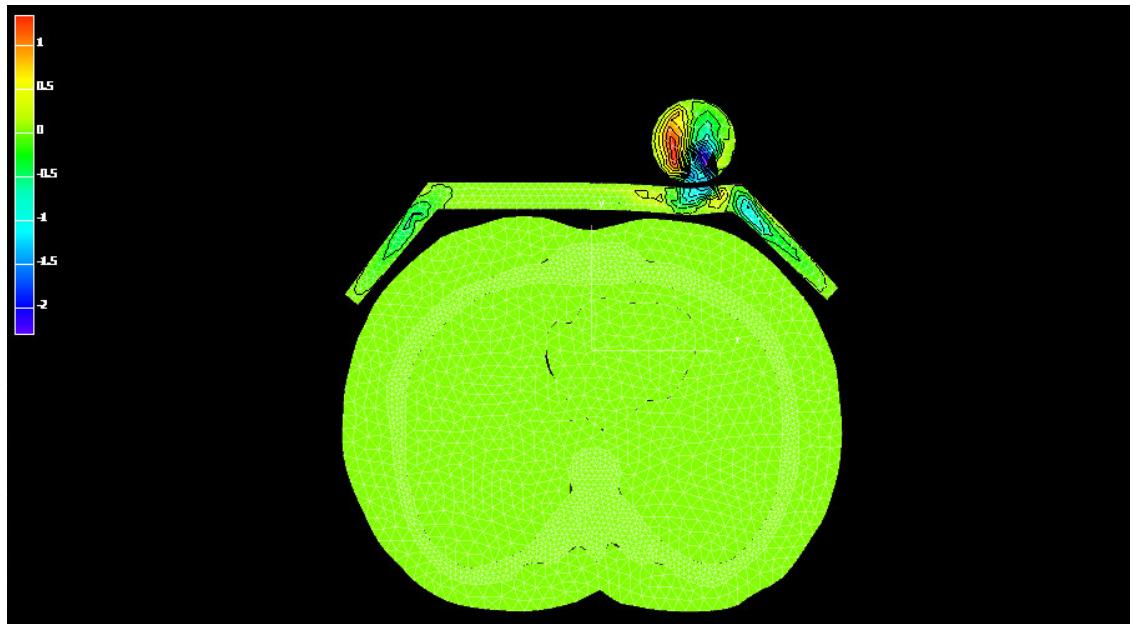
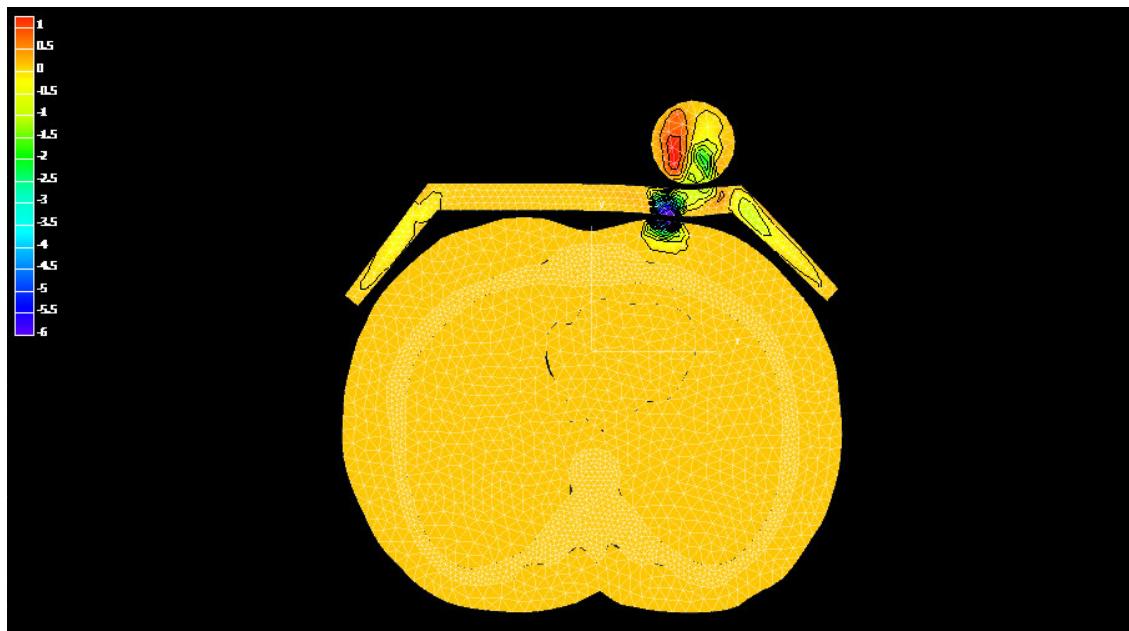
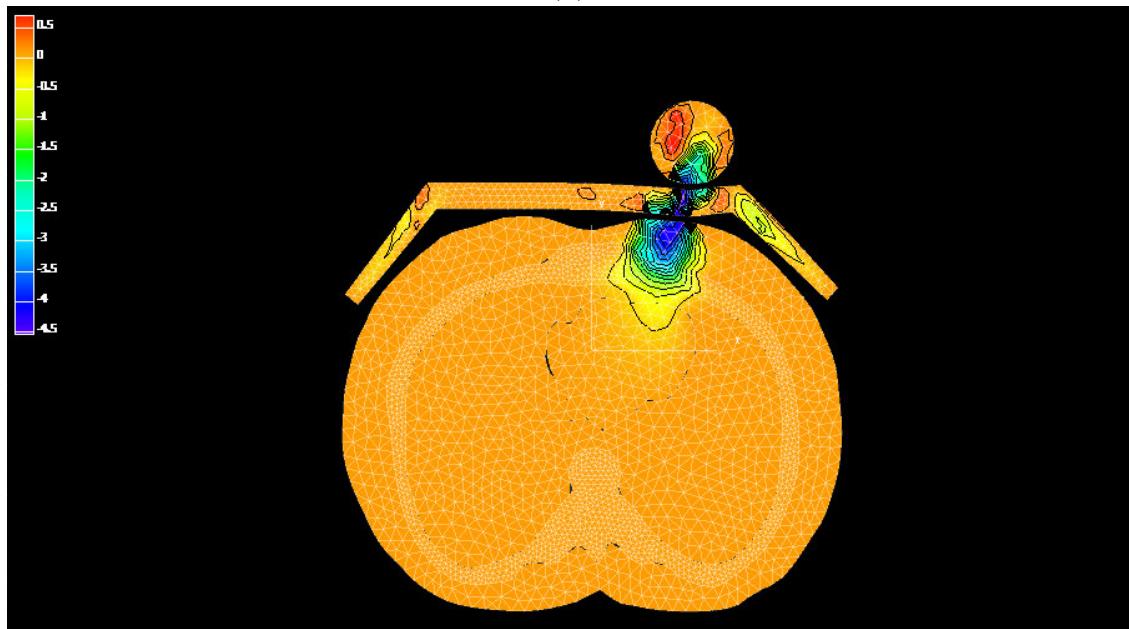


Рисунок 87 — Прохождение волны через защитную конструкцию.

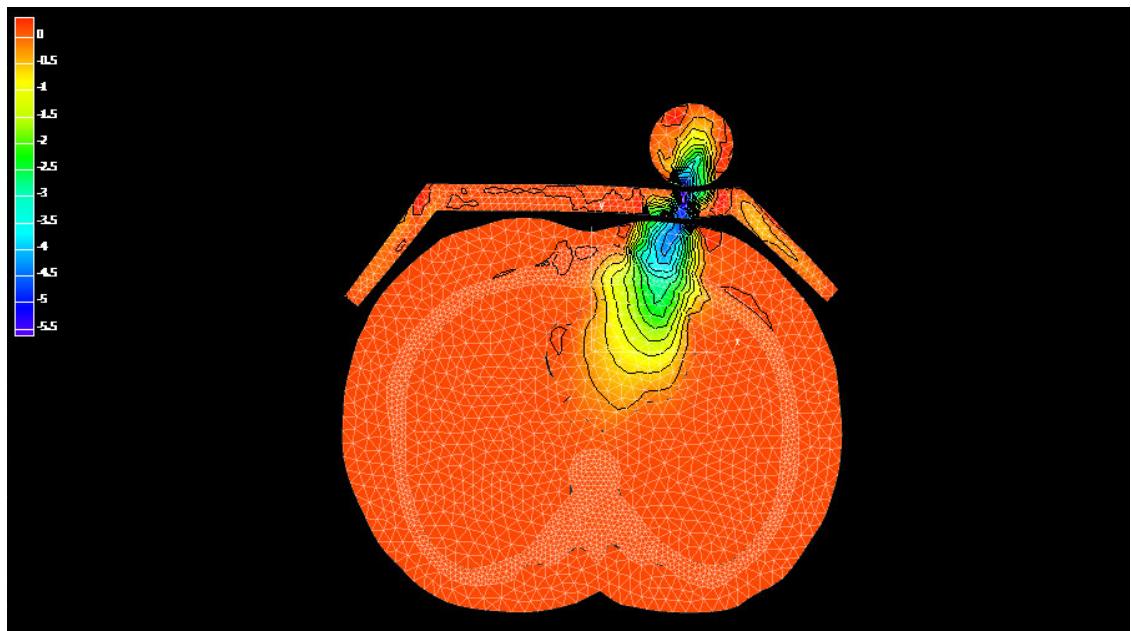


(а)

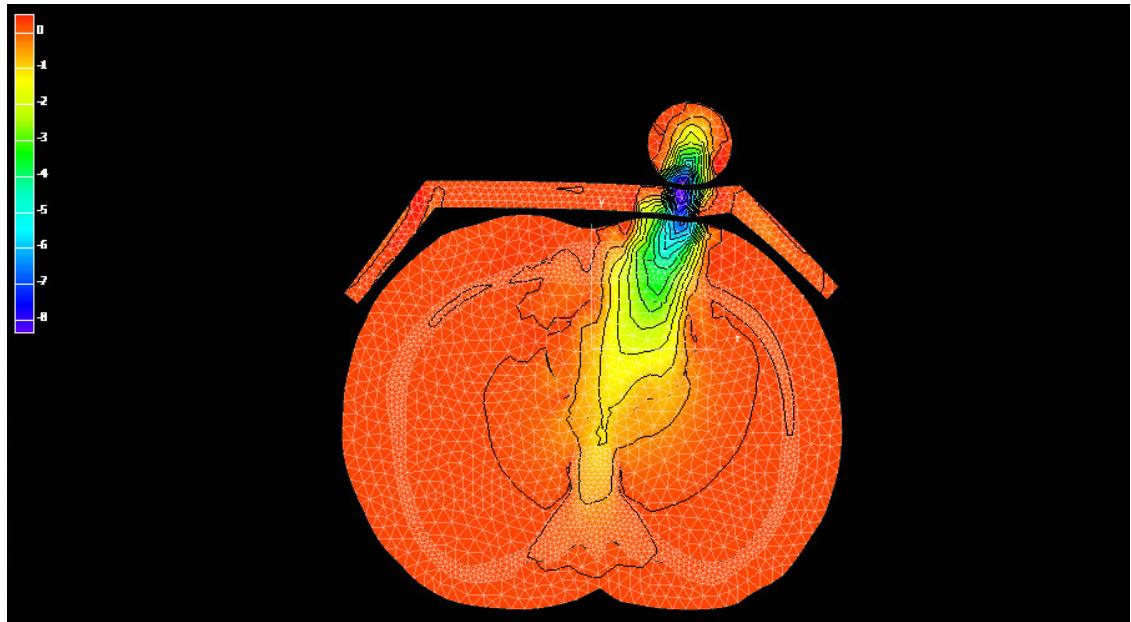


(б)

Рисунок 88 — Проникновение возмущения в мягкие ткани.

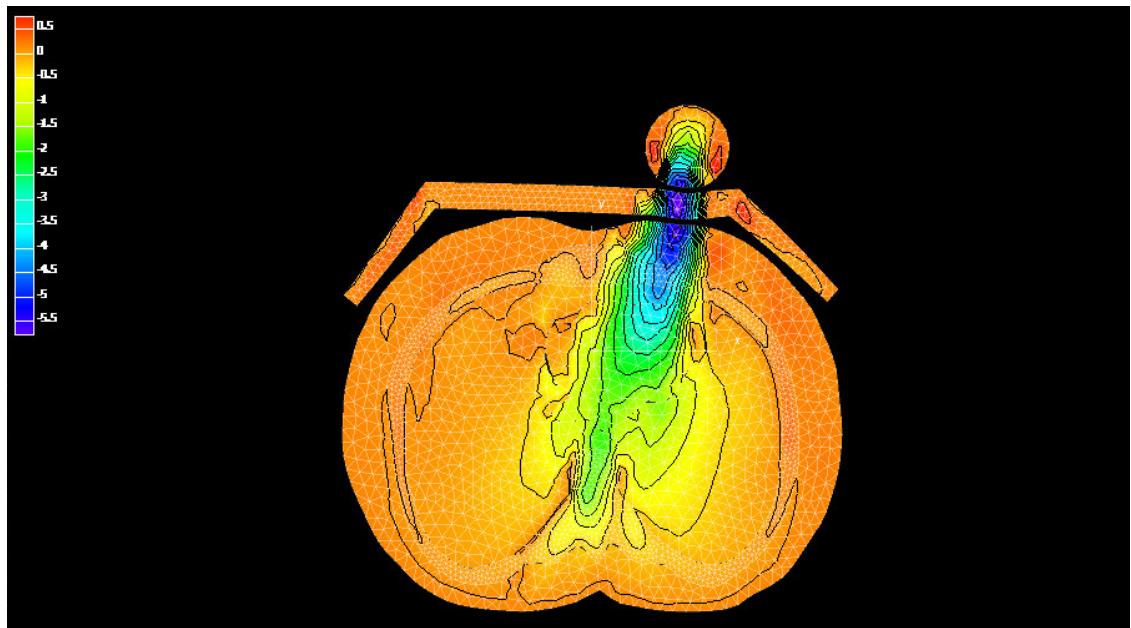


(а)

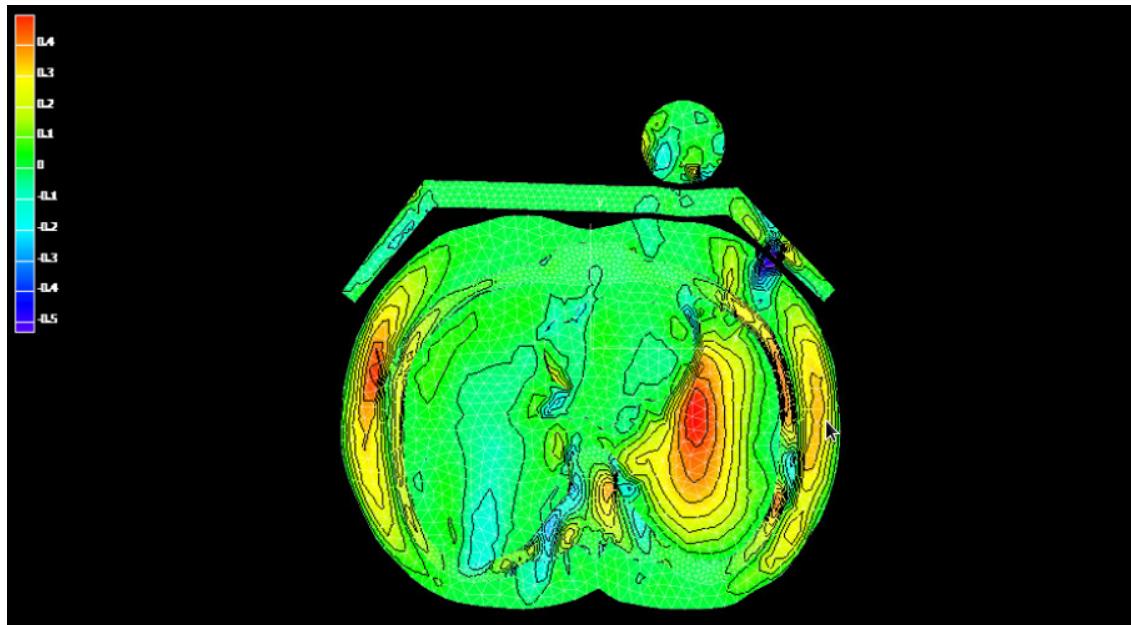


(б)

Рисунок 89 — Прохождение возмущения через костную ткань в область сердечной мышцы.



(а) Момент максимальной концентрации напряжений в области сердечной мышцы



(б) Завершающая стадия соударения, отскок ударника

Рисунок 90 — Поздние стадии соударения

Заключение

Основные результаты и выводы диссертации

1. Разработана математическая модель панели из полимерного композиционного материала для задачи о низкоскоростном ударе по элементу композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта. Модель может быть использована в том числе для более сложных инженерных конструкций, выполненных из композиционных материалов.
2. Разработан сеточно-характеристический метод на сетке из тетраэдров для моделирования удара по конструкции сложной формы в трёхмерной постановке. Разработанный метод позволяет проводить моделирование волновых процессов в конструкции при динамическом внешнем воздействии с учетом взаимодействия волновых фронтов, влияния внешних и внутренних границ, различия реологических свойств слоёв. Особенностью метода является возможность выполнять расчёты с шагом $\tau > h/\lambda$ (здесь τ – шаг по времени, h – минимальное расстояние от узла сетки до соседних узлов, λ – максимальное по модулю собственное число упределяющей системы уравнений). Разработанный метод исследован на аппроксимацию и устойчивость. Проведено тестирование реализации метода.
3. Разработанный сеточно-характеристический метод реализован в виде параллельного вычислительного комплекса, позволяющего выполнять моделирование как на стандартном оборудовании, так и на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах. Для явного выделения контактных границ при параллельном расчете разработан параллельный алгоритм детектора столкновений.
4. Реализованный параллельный вычислительный комплекс интегрирован с существующими программами задания геометрии объектов (Gmsh, Tetgen, Ani3D) и визуализации результатов расчётов (Paraview, Mayavi), являющимися стандартом де-факто среди инженеров-практиков.
5. Выполнено исследование волновых процессов в многослойных средах сложной структуры, моделирующих панель из полимерного компо-

зиционного материала. Исследование включает в себя как аналитическое, так и численное изучение процессов, протекающих в многослойной среде при динамическом нагружении (задачи об объёмных волнах, поверхностных волнах, волнах на контактной границе). Получены поля скоростей и напряжений, области потенциальных разрушений различных типов, обусловленные распространением и взаимодействием волновых фронтов в материале.

6. Выполнено численное моделирование натурного эксперимента по динамическому нагружению элемента композитной обшивки и силового кессона крыла самолёта. Проведены расчеты для двух постановок эксперимента – удар по отдельному элементу обшивки и удар по элементу обшивки со стрингером. Для задачи со стрингером рассмотрены постановки с центральным и нецентральным ударом. Проведен анализ причин разрушения композиционных авиационных материалов. Для всех постановок получены области концентрации напряжений, вызванные волновыми процессами в ходе соударения. Определены зоны потенциальных повреждений конструкции, обусловленные разными механизмами разрушения материала. Для элемента обшивки без стрингера размер разрушенной области составляет 50-60 мм, для элемента обшивки со стрингером 25-30 мм при центральном ударе и 20-25 мм при нецентральном ударе. Получено, что наличие стрингера существенно разгружает элемент обшивки при динамическом воздействии и уменьшает размер потенциально повреждённых областей. Данный результат важен, так как при действии статической нагрузки наличие стрингера напротив вызывает концентрацию напряжений и приводит к разрушению при меньшей силе воздействия.
7. Разработанные математические модели и численный метод применены для решения ряда задач биомеханики. Получены области потенциальных повреждений тканей организма человека в задачах о черепно-мозговой травме, о динамическом нагружении коленного сустава и об ударе по торсу в защитной конструкции.

Список использованных источников

1. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984г., Т. 24, № 5, с. 722-739.
2. Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С. О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // Механика твердого тела – 1989, N 4, с. 89-95.
3. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006г., Т. 46, № 9, с. 1638-1667.
4. Челноков Ф.Б. Численное моделирование деформационных процессов в средах со сложной структурой: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук – М., 2005
5. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Физико-математическая литература. 1994, 442 с.
6. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988, 288 с.
7. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М. МФТИ, 2008. - 215 с.
8. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.:Изд-во Моск. физ. -техн. ин-та, 1994, 528 с.
9. Чушкин П.И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – Труды ВЦ АН СССР, 1968, с. 121.
10. Петров И.Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // Механика твердого тела – 1986, N 4, с. 118-124.

11. Иванов В.Д., Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами – Матем. Моделирование № 2:11, 1990, С. 10 – 29
12. Петров И.Б., Иванов В.Д., Суворова Ю.В. Численное решение двухмерных динамических задач наследственной теории вязкоупругости. // Механика композитных материалов, 1989, №3, с. 419–424.
13. Петров И.Б., Иванов В.Д., Суворова Ю.В. Расчет волновых процессов в наследственных вязкоупругих средах. // Механика композитных материалов, 1990, №3, с. 447–450.
14. Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. // М.: Мир, 1986. - 334 с.
15. Новацкий В. К. Теория упругости. — М. : Мир, 1975, с. 105-107.
16. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 1. — М. : Наука, 1970, с. 143.
17. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
18. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов. // Прикладная математика и механика, 1960, Т. XXIV, с. 1057–1072.
19. Под.ред. Вовка А.А. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. // Киев, Наукова думка, 1984. - 279 с.
20. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. // Новосибирск, Научная книга, 1998. - 280 с.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
22. Griffith A.A. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser A, 1920, Vol. 221, P. 163.
23. Orowan E. Rep. Prog. Phys., 1949, Vol. 12, P. 185-232.

24. Регель В.Г., Слуцкер А.П., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твёрдых тел. М., 1974.
25. DeTeresa J., Allen S.R., Farris R.J. and Porter R.S. J. Material Science, 1984. V. 19. P. 57.
26. Селиванов В.В. Механика разрушения деформируемого тела. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. - 420 с.
27. Парトン В.З. Механика разрушения: от теории к практике. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. - 240 с.
28. Петров И.Б., Фаворская А.В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. // Журнал Информационные технологии. - 2011. - №9. - С. 30–32.
29. Агапов П.И., Васюков А.В., Петров И.Б. Компьютерное моделирование волновых процессов в покровах мозга при черепно-мозговой травме. // Сборник научных трудов «Процессы и методы обработки информации». М.: МФТИ, 2006. С. 154–163.
30. Агапов П.И., Васюков А.В. Компьютерное моделирование биомеханических процессов в покровах мозга. // Труды 49-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Часть VII. Управление и прикладная математика. М.: «Солар», 2007. С. 41–42.
31. Васюков А.В., Петров И.Б. Компьютерное моделирование биомеханических процессов в покровах мозга при динамическом нагружении. Сравнение механических моделей. // Сборник научных трудов «Моделирование процессов обработки информации». М.: МФТИ, 2007. С. 67–76.
32. Васюков А.В., Петров И.Б. О разработке параллельной версии сеточно-характеристического метода для трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела. // Сборник научных трудов «Модели и методы обработки информации». М.: МФТИ, 2009. С. 13–17.

33. Васюков А.В., Петров И.Б., Стрижевская А.Д. Компьютерное моделирование волновых процессов в гидроупругих средах сеточно-характеристическим методом. // Сборник научных трудов «Модели и методы обработки информации». М.: МФТИ, 2009. С. 18–22.
34. Васюков А.В., Петров И.Б., Черников Д.В. О сеточно-характеристическом численном методе на неструктурированных сетках для задач механики деформируемого твердого тела в случае трех пространственных переменных. // Сборник научных трудов «Информационные технологии: модели и методы». М.: МФТИ, 2010. С. 52–57.
35. Болоцких Ю.В., Васюков А.В., Петров И.Б. О численном решении некоторых задач биомеханики. // Сборник научных трудов «Информационные технологии: модели и методы». М.: МФТИ, 2010. С. 58–64.
36. Васюков А.В., Петров И.Б. Моделирование механических факторов черепно-мозговых травм сеточно-характеристическим численным методом. // Вестник Российского государственного университета им. И.Канта. Калининград: БФУ им. И.Канта, 2010, вып.10. С. 42–51.
37. Васюков А.В., Петров И.Б. Компьютерное моделирование последствий механических черепно-мозговых травм. // Информационные технологии, 2011, №5. С. 58–62.
38. I. Petrov, Y. Bolotskikh and A. Vasyukov. Modeling of Dynamic Problems in Biomechanics. // Math. Model. Nat. Phenom. 2011, Vol. 6, No. 7, pp. 70–81.
39. Igor Petrov, Alexey Vasyukov, Dmitry Chernikov, Yulia Bolotskikh. Modeling of dynamic problems in biomechanics using HPC clusters. // The 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation. Book of Abstracts. – M.: PFUR, 2011 – P. 342.
40. Васюков А.В. О решении задач динамической прочности трубопроводов под давлением с использованием параллельной версии сеточно-характеристического численного метода на неструктурированных сетках. // Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук

в современном информационном обществе». Том 2. Управление и прикладная математика. М.: МФТИ, 2011. С. 60–61.

41. Баженов С.Л., Берлин А.А., Кульков А.А., Ошмян В.Г. Полимерные композиционные материалы. - Долгопрудный: Издательский дом Интеллект, 2010, 352 с.
42. Миллс Н. Конструкционные пластики - микроструктура, характеристики, применения. - Долгопрудный: Издательский дом Интеллект, 2011, 512 с.
43. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах — математические задачи механики композиционных материалов. 1984
44. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // Известия РАН. Физическая серия – Т. 75, №11. - 2011. – с. 1551-1556.
45. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование.- Т.24, №5, - 2012.
46. Розен Б.У., Дау Н.Ф. Механика разрушения волокнистых композитов, в кн. Разрушение. Т. 7. Ч. 1. М.: Мир, 1967, С. 300.
47. Гузь А.Н. Бабич И. Устойчивость волокнистых материалов. В кн. Механика материалов. Киев: Наукова Думка, 1982. С. 120.
48. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. Механика композит. материалов, 1983. №3. С. 548.
49. Аменадзе Ю.А. Теория упругости. – М.:Высшая школа, 1976, 272с.
50. К. Аки, П.Ричардс. Количественная сейсмология : теория и методы. - М. : Мир, 1983.
51. В.И. Тищенко. Характеристики волн Рэлея от глубинных источников. Межведомственный научный сборник "Динамические системы" Выпуск 19.

52. H. Lamb, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Phil. Trans. Roy. Soc. London A203 (1904), 1–42.
53. Lapwood E. R. The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium, Phil. Trans. Roy. Soc. London A242 , 63–100.
54. И.А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. -М.: Наука, 1966.
55. Агапов П.И., Обухов А.С., Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Компьютерное моделирование биомеханических процессов сеточно-характеристическим методом // Управление и обработка информации: модели процессов. Сб. ст. – М.: МФТИ, 2001 и сайт <http://www.cs.mipt.ru/index.php?id=27>
56. Агапов П. И., Петров И. Б. Расчет областей повреждения мозга при черепно-мозговой травме // Сборник "Компьютер и мозг. Новые технологии"– М.: Наука, 2005, С. 28 – 38.
57. Агапов П. И. Анализ результатов численного моделирования черепно-мозговой травмы // Процессы и методы обработки информации: Сб. ст. – М.: МФТИ, 2005. – С. 186 – 193.
58. Агапов П.И. Численное моделирование механических факторов черепно-мозговой травмы: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук – М., 2005
59. Агапов П.И., Белоцерковский О.М., Петров И.Б. Численное моделирование последствий механического воздействия на мозг человека при черепно-мозговой травме // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2006, том 46, № 9, с. 1711-1720.
60. Белоцерковский О.М., Агапов П.И., Петров И.Б. Моделирование последствий черепно-мозговой травмы // Медицина в зеркале информатики – М.: Наука, 2008, С. 113 – 124.
61. Квасов И.Е., Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Расчет волновых процессов в неоднородных пространственных конструкциях // Матем. Моделирование, 21:5, 2009г., с. 3-9.

62. Иванов В.Д., Кондауров В.Н., Холодов А.С. Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами. // Математическое моделирование, 2003, Т. 15, № 10.
63. Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2003, том 43, N 10, с. 1562-1579.
64. Matyushev N.G., Petrov I.B. Mathematical Simulation of Deformation and Wave Processes in Multilayered Structures // Computational Mathematics and Mathematical Physics – 2009, Vol. 49, N 9, P. 1615-1621.
65. Агапов П.И., Петров И.Б., Челноков Ф.Б. Численное исследование задач механики деформируемого твёрдого тела в неоднородных областях интегрирования // Обработка информации и моделирование: Сб. ст. – М.: МФТИ, 2002 и сайт <http://www.cs.mipt.ru/index.php?id=27>.
66. Zhou C., Khalil T. B., King A. I. A new model comparing impact responses of the homogeneous and inhomogeneous human brain // 39th Stapp Car Crash Conf. / Society of Automotive Engineers. – 1995. – Pp. 121 – 137.
67. Kuijpers A. H., Claessens M. H., Sauren A. A. The influence of different boundary conditions on the response of the head to impact: a two-dimensional finite element study // J. Neurotrauma. – Vol. 12, no. 4. – Pp. 715 – 724.
68. Chu C., Lin M., Huang H.M., Lee M.C. Finite element analysis of cerebral contusion // J. Biomechanics. – 1994. – Vol. 27. – Pp. 187–194.
69. Claessens M. H. A. Finite Element Modeling of the Human Head under Impact Conditions: Ph.D. thesis / Eindhoven University of Technology. – 1997.
70. Nahum A. M., Smith R. W., Ward C. C. Intracranial pressure dynamics during head impact // 21th Stapp Car Crash Conf. / Society of Automotive Engineers. – 1977.

71. Ueno K., Melvin J.W., Lundquist E., Lee M.C. Two dimensional finite element analysis of human brain impact responses: Application of scaling law. // BED vol. 13 ASME. – 1989. – Pp. 123 – 124.
72. Ruan J. S., Khalil T., King A. I. Human head dynamic response to side impact by finite element modeling // J. Biomechanical Engineering. – Vol. 113, no. 3. – Pp. 276 – 283.
73. Willinger R. Modal analysis of a finite element model of the head // IRCOBI Conf. – Verona: 1992. – Pp. 283 – 297.
74. Петров И.Б. О численном моделировании биомеханических процессов в медицинской практике. // Информационные технологии и вычислительные системы – 2003, No 1-2, С. 102 – 111.
75. D'Lima D. Realistic Simulation Probes Biomechanics of Knees // сайт <http://www.designworldonline.com/articles/4317/314/Realistic-Simulation-Probes-Biomechanics-of-Knees.aspx>
76. Бегун П.И., Афонин П.Н. Моделирование в биомеханике // М.: Высшая школа – 2004
77. Рожен Й., Йокочи Ч., Лютьен-Дреколль Э. Большой атлас по анатомии – Сайт <http://www.medbook.net.ru>
78. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007
79. Geuzaine C. and Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pages 1309-1331, 2009