

Słów kilka o problemie chińskiego listonosza i jego NP-trudnych wariantach

Mateusz Nizwantowski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

May 7, 2023



Wstęp



Chiński listonosz



Image ID: W013KE
www.alamy.com

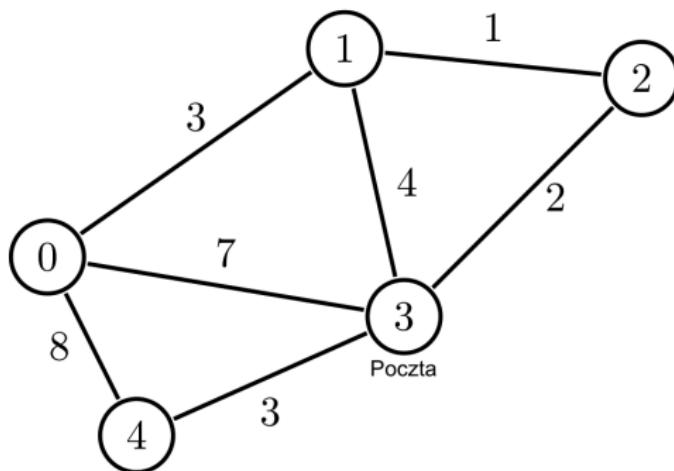


No więc, co to tak właściwie jest?

"Listonosz musi dostarczyć listy do danej dzielnicy. Musi przejść przez wszystkie ulice w okolicy i wrócić na pocztę. Jak może zaplanować swoją trasę, aby pokonać jak najkrótszą odległość?" - Kwan Mei-Ko, 1960

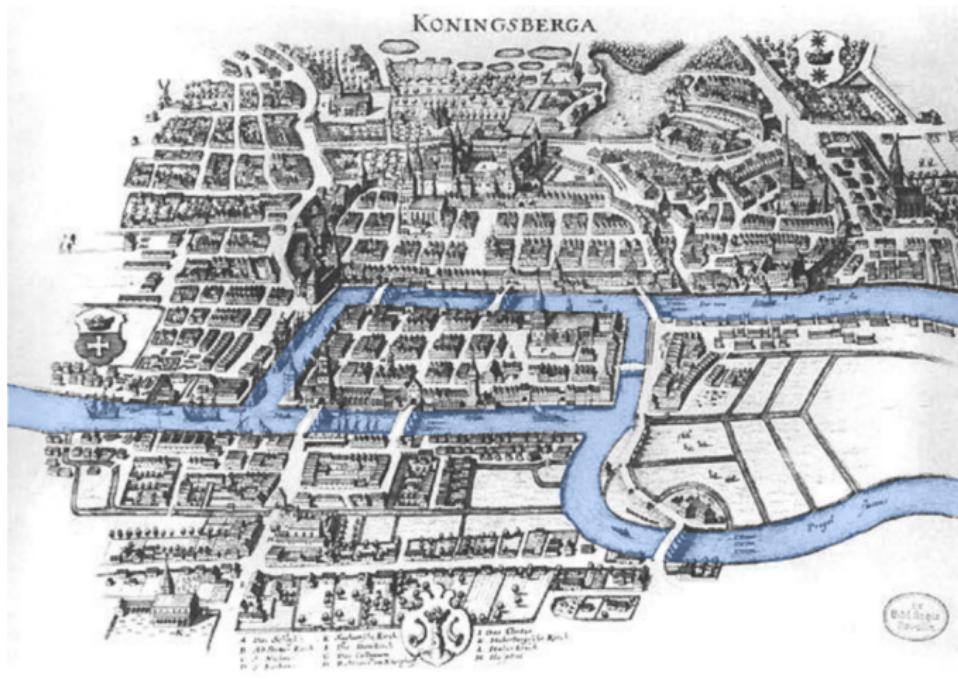


Bardziej matematyczna definicja



Cel: znaleźć cykl przechodzący przez wszystkie krawędzie z najmniejszą wagą

Chiński listonosz vs mosty w Królewcu



Rozwiązanie



Wysokopoziomowy schemat rozwiązania

Zakładamy, że graf G jest spójny

- Jeżeli G jest eulerowski to rozwiązanie problemu chińskiego listonosza stanowi cykl Eulera
- Jeżeli G jest półeulerowski to rozwiązaniem problemu jest ścieżka Eulera wraz z minimalną ścieżką (o najmniejszej sumie wag krawędzi) łączącą wierzchołki nieparzystego stopnia.
- Jeżeli G posiada przynajmniej 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, to z tych wierzchołków grafu G należy utworzyć graf H, w taki sposób aby graf H był grafem pełnym z wagami na krawędziach odpowiadającymi najmniejszej ścieżce pomiędzy wierzchołkami w grafie G. W grafie H należy znaleźć minimalne skojarzenie doskonale i uzupełnić o nie graf G. Graf G jest teraz multigrafem eulerowskim w którym rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza jest cykl Eulera.

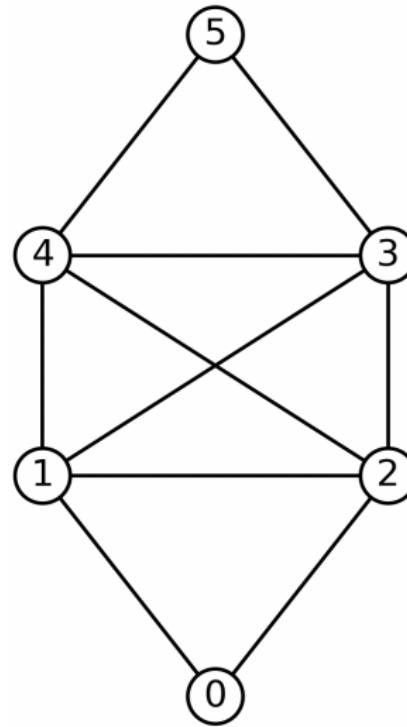


Algorytm Fleury'ego intuicja



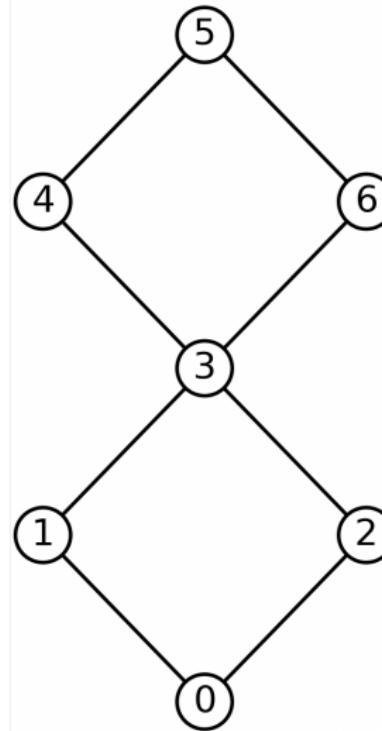
Algorytm Fleury'ego

- 1 Upewnij się, że graf nie ma lub ma 2 nieparzyste wierzchołki.
- 2 Jeśli nie ma nieparzystych wierzchołków, zaczni od dowolnego. Jeśli są 2 to zaczni od jednego z nich.
- 3 Każdą kolejną krawędź, po której przechodzisz, wybierz spośród krawędzi wychodzących z wierzchołka, w którym aktualnie się znajdujesz. Wybieraj oczywiście krawędź, po której jeszcze nie przeszedłeś. Jeśli masz wybór między mostem a nie-mostem, zawsze wybieraj nie-most.
- 4 Zatrzymaj się, gdy skończą ci się krawędzie.

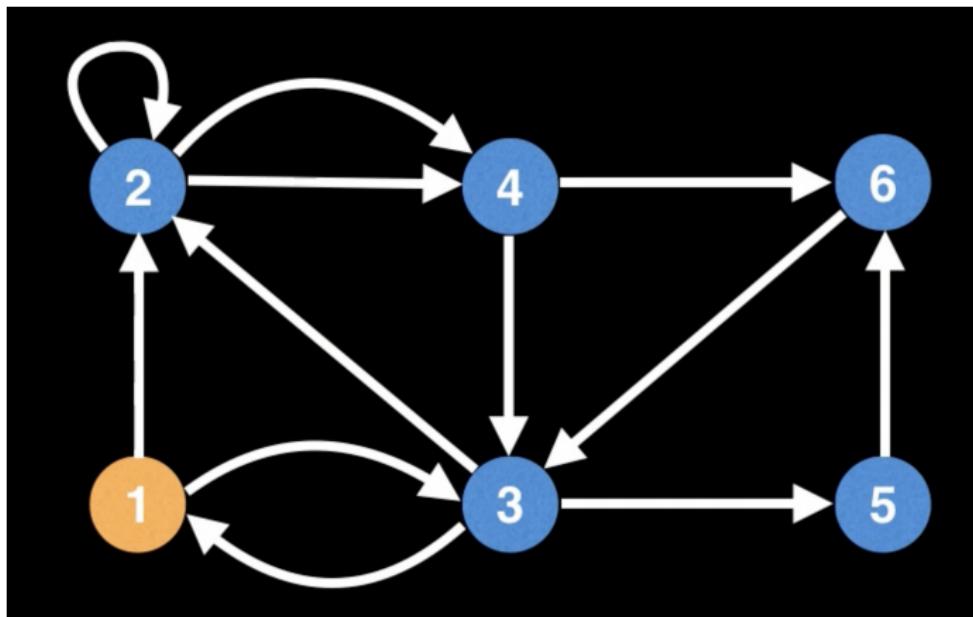


Algorytm Hierholzera

- 1 Upewnij się, że graf nie ma lub ma 2 nieparzyste wierzchołki.
- 2 Jeśli nie ma nieparzystych wierzchołków, zacznij od dowolnego. Jeśli są 2 to zacznij od jednego z nich.
- 3 Zainicjuj stos i dodaj tam pierwszy wierzchołek
- 4 Dopóki stos nie jest pusty:
 - a Sprawdź, czy wierzchołek na szczytce stosu ma sąsiada, którego jeszcze nie odwiedzono. Jeśli tak, to dodaj ten wierzchołek na stos i usuń krawędź łączącą oba wierzchołki z grafu.
 - b Jeśli wierzchołek na szczytce stosu nie ma więcej nieodwiedzonych sąsiadów, usuń go ze stosu i dodaj go do listy wynikowej.
- 5 lista wynikowa to szukana ścieżka



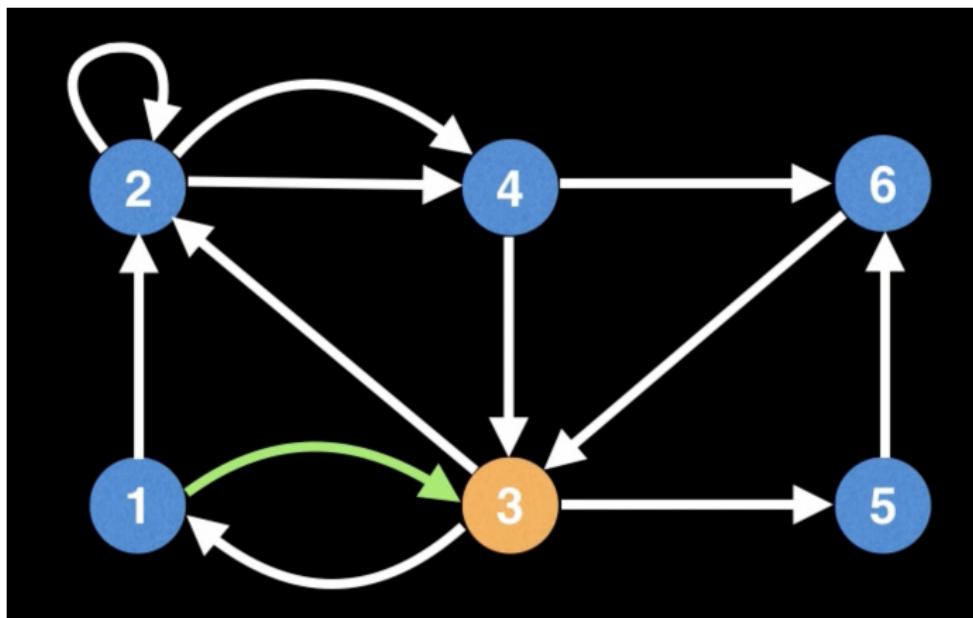
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



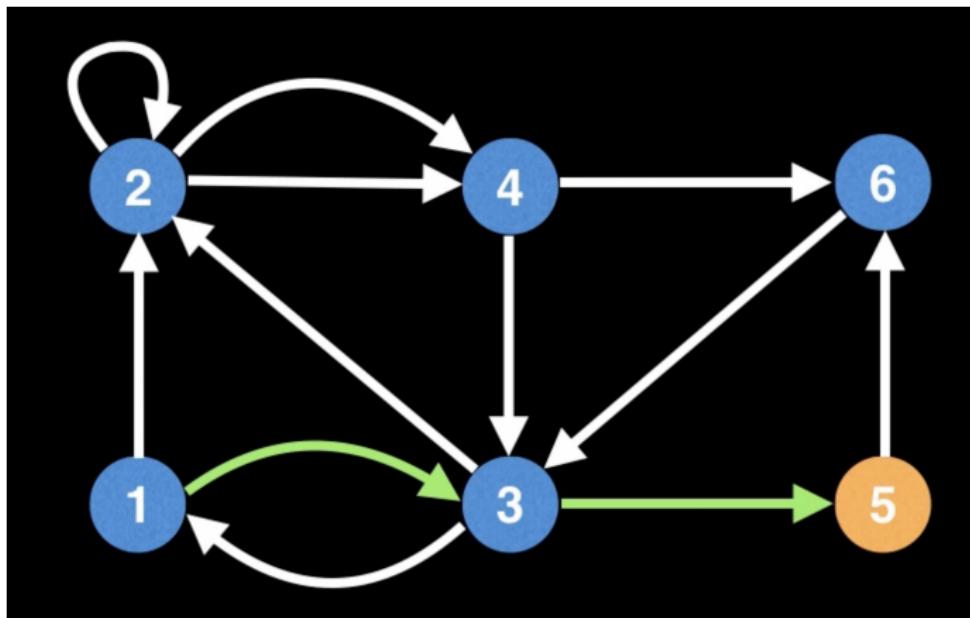
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



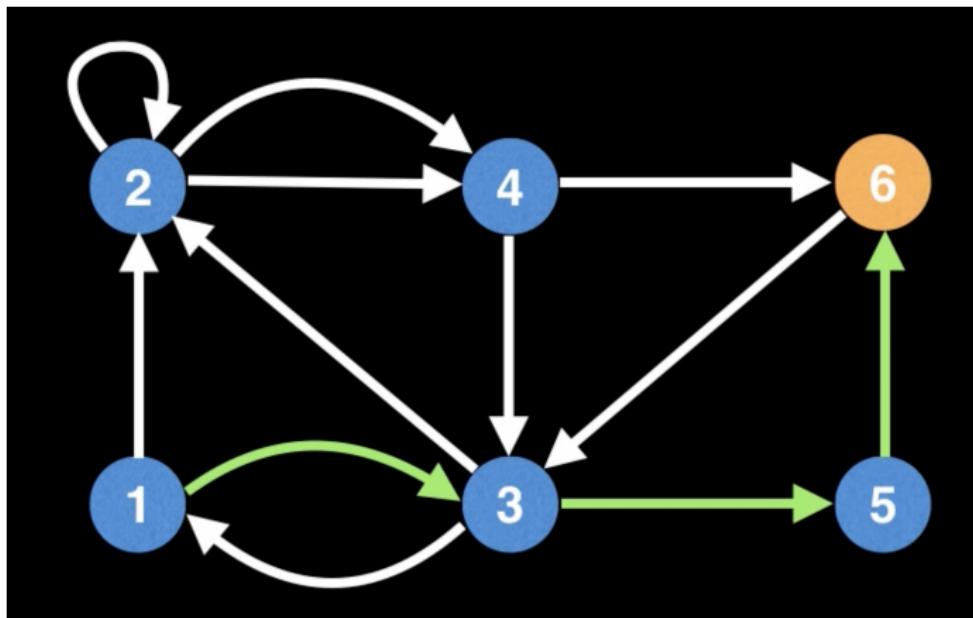
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



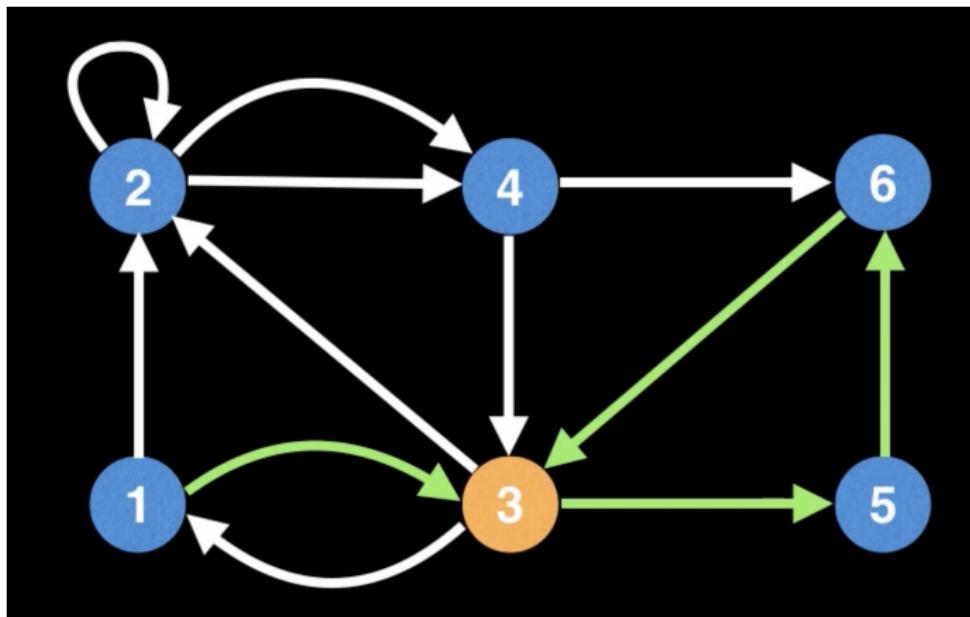
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



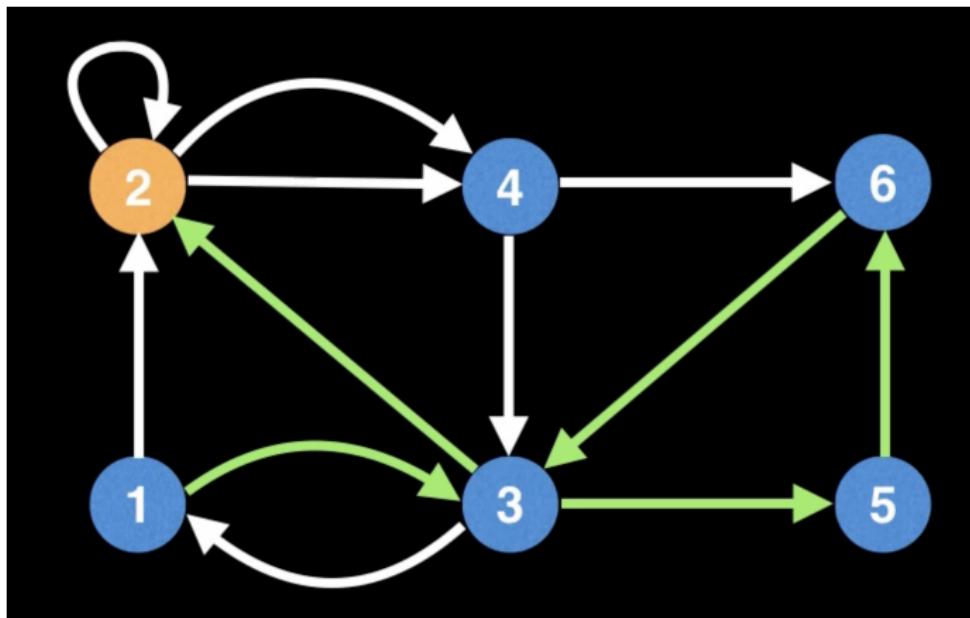
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



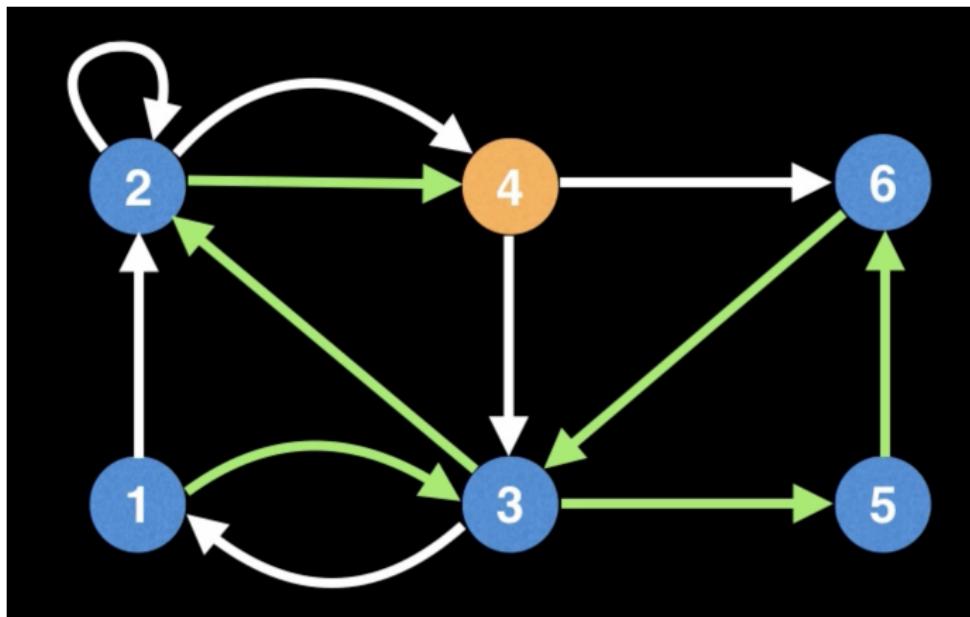
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



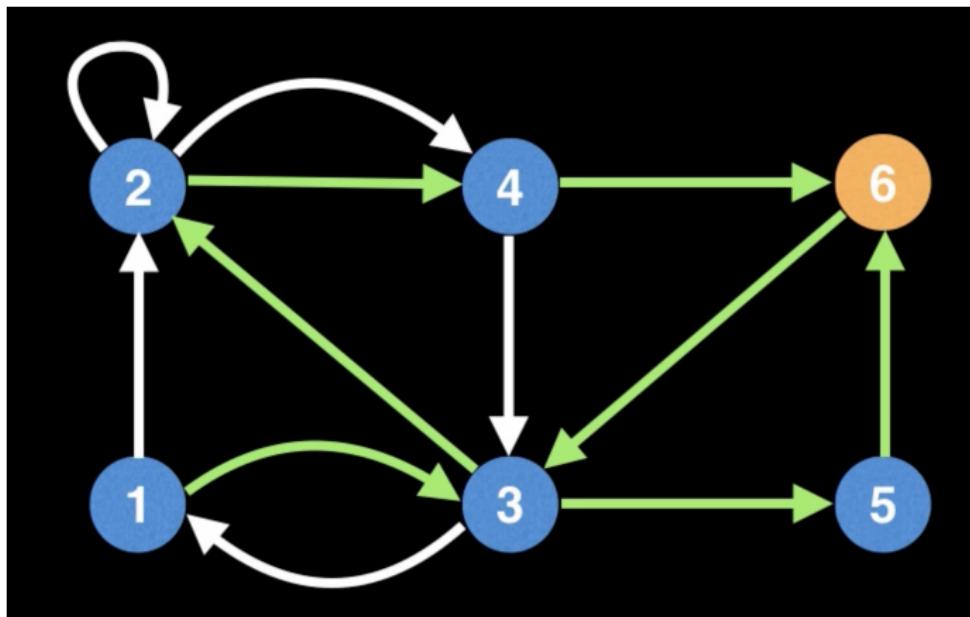
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



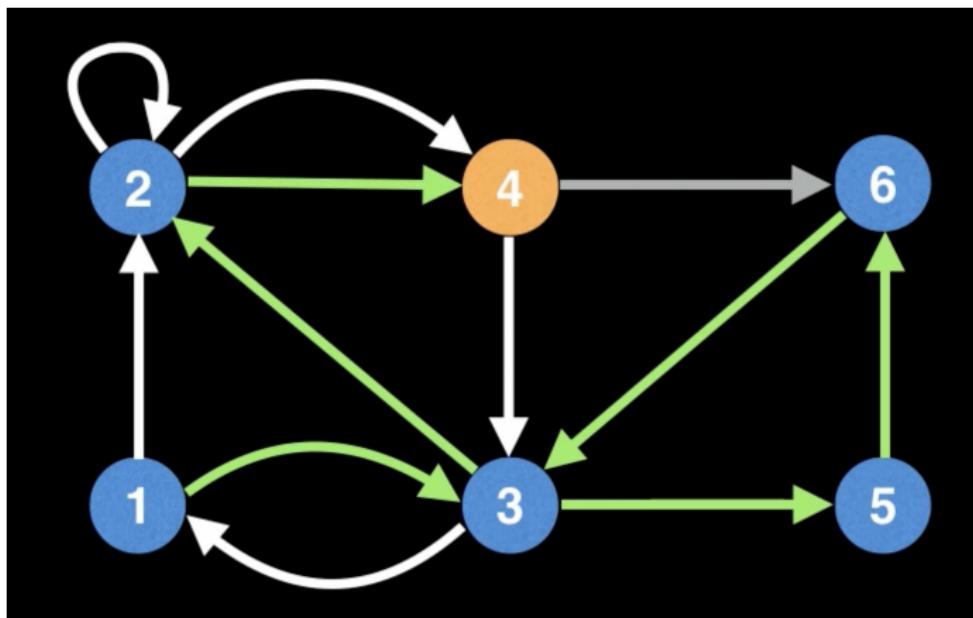
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = []



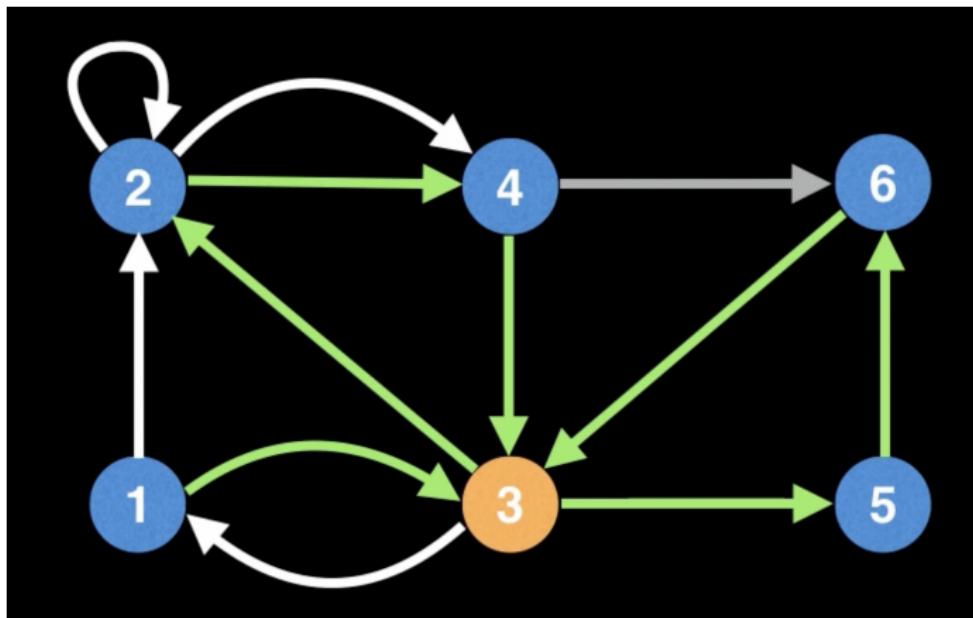
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6]



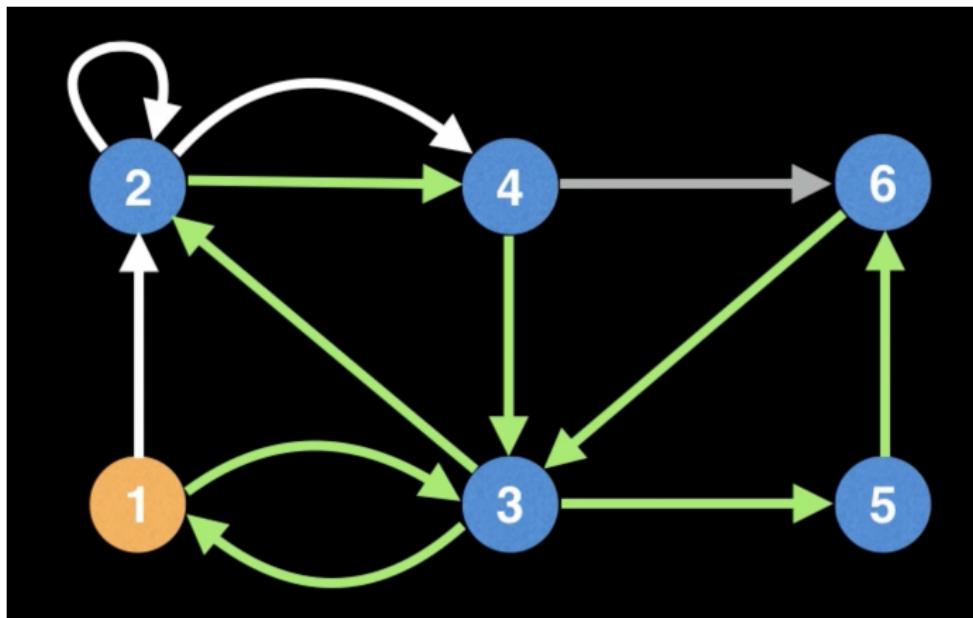
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6]



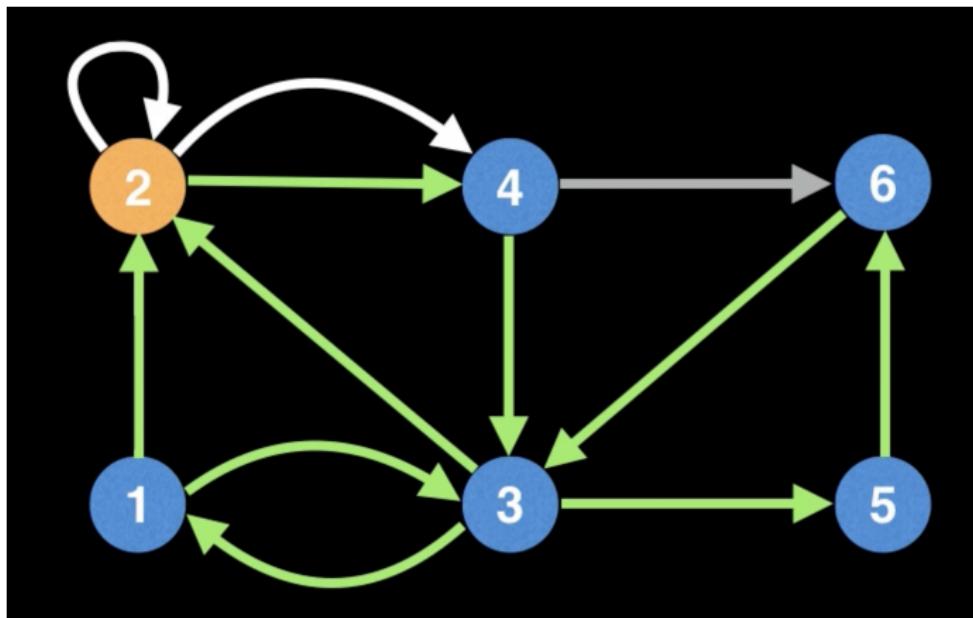
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6]



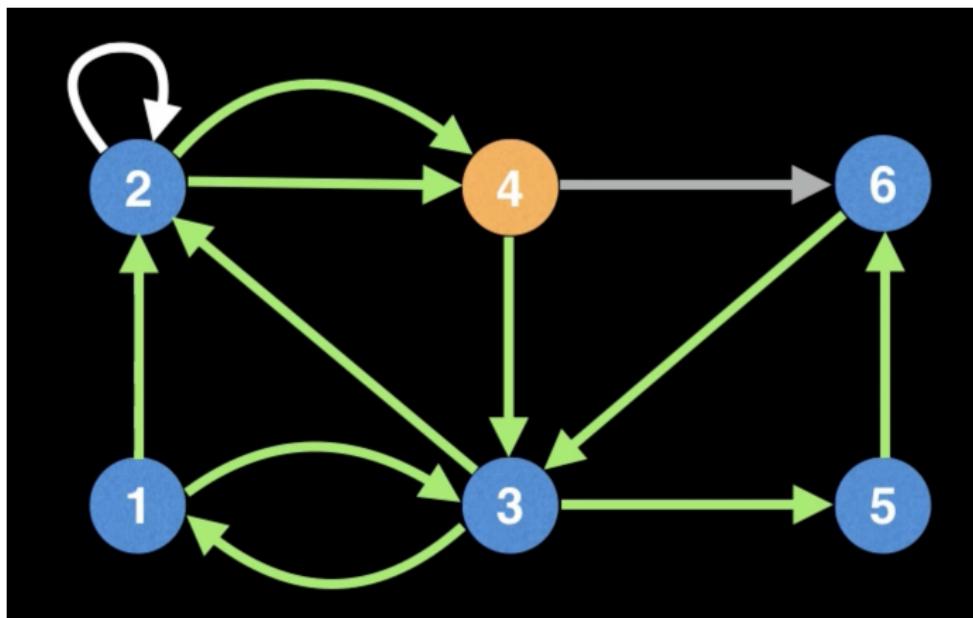
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6]



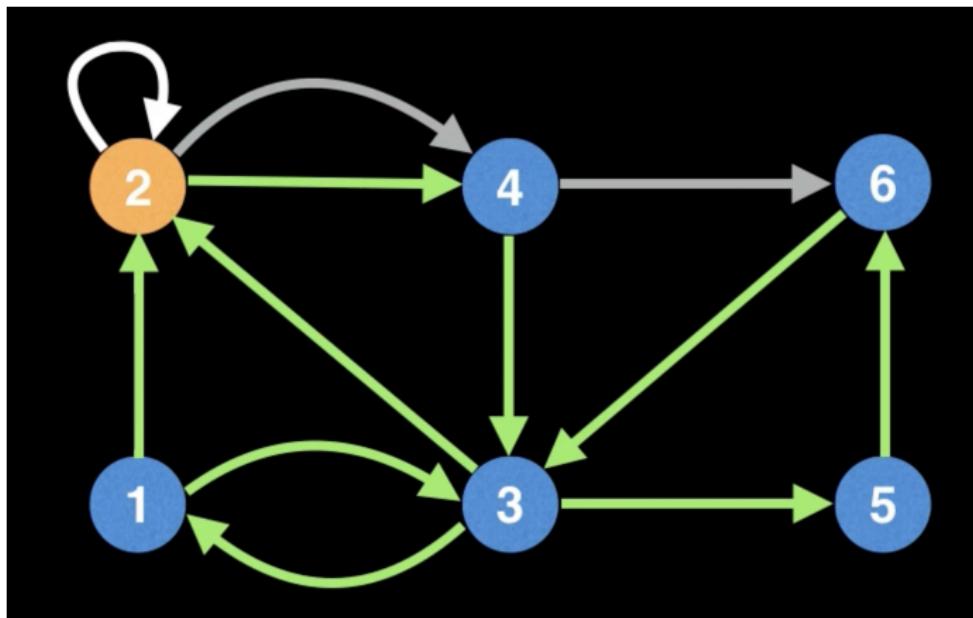
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6]



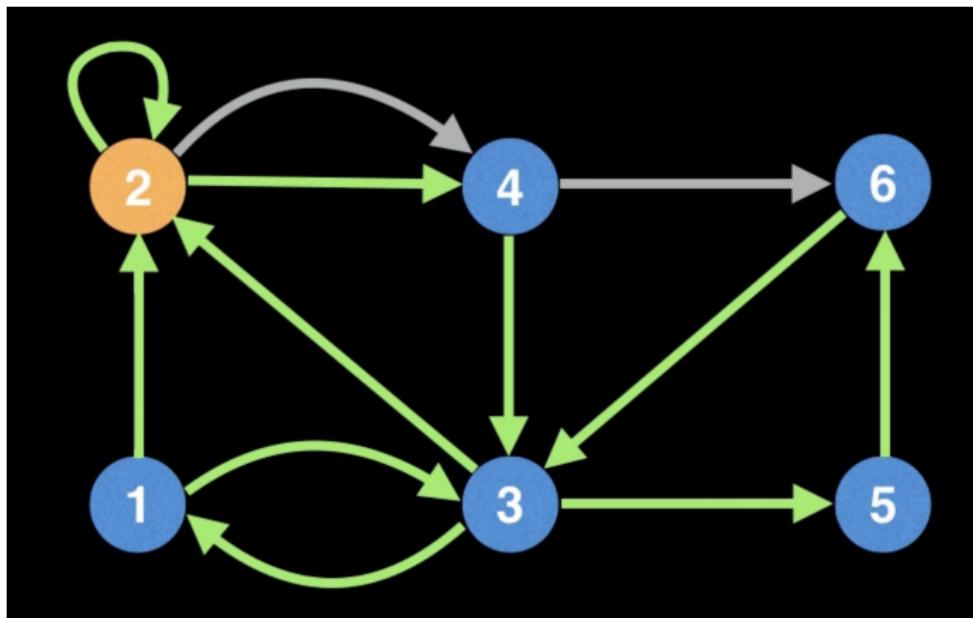
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [4, 6]



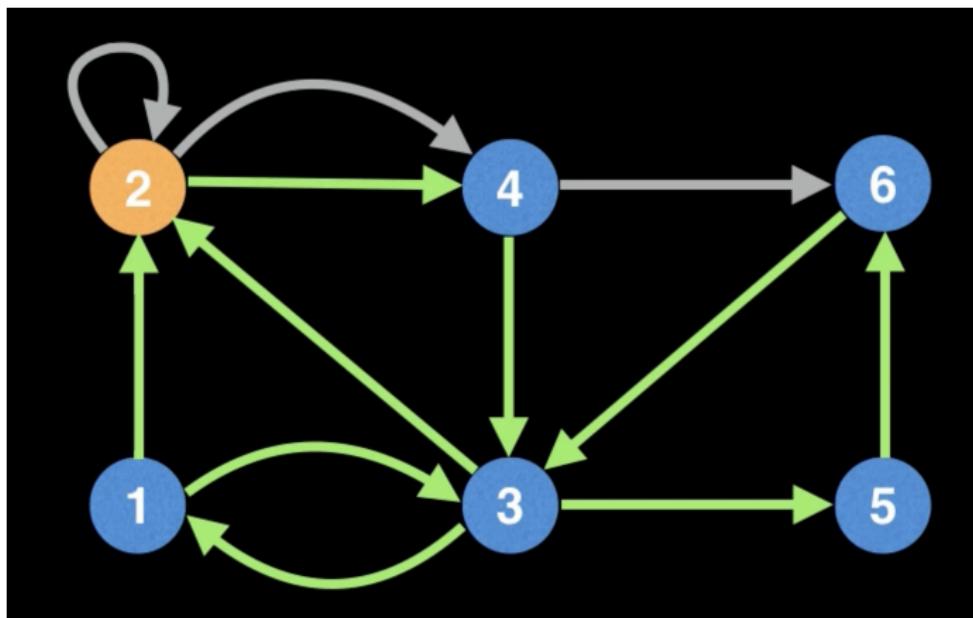
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [4, 6]



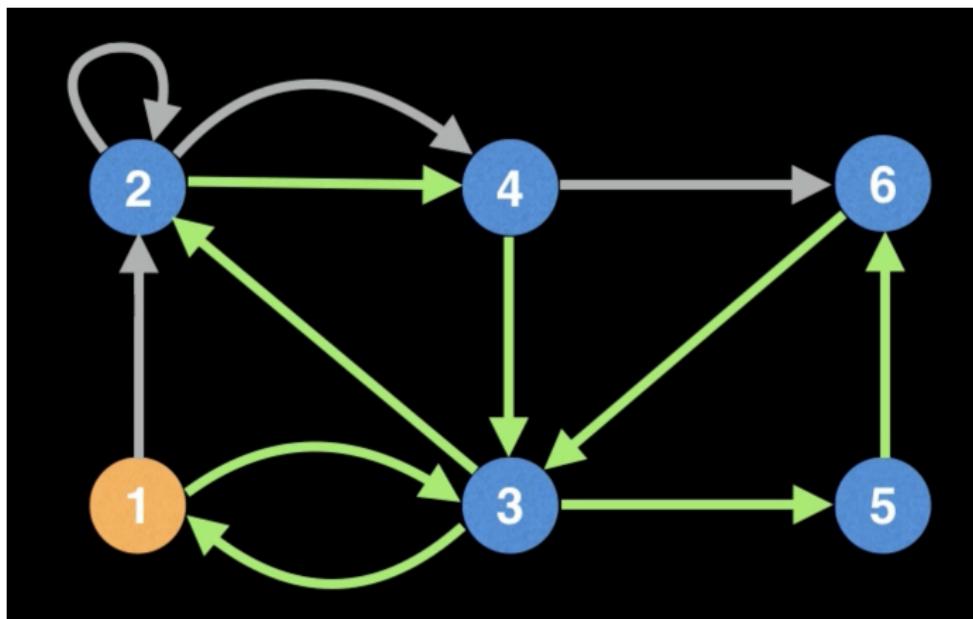
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [2, 4, 6]



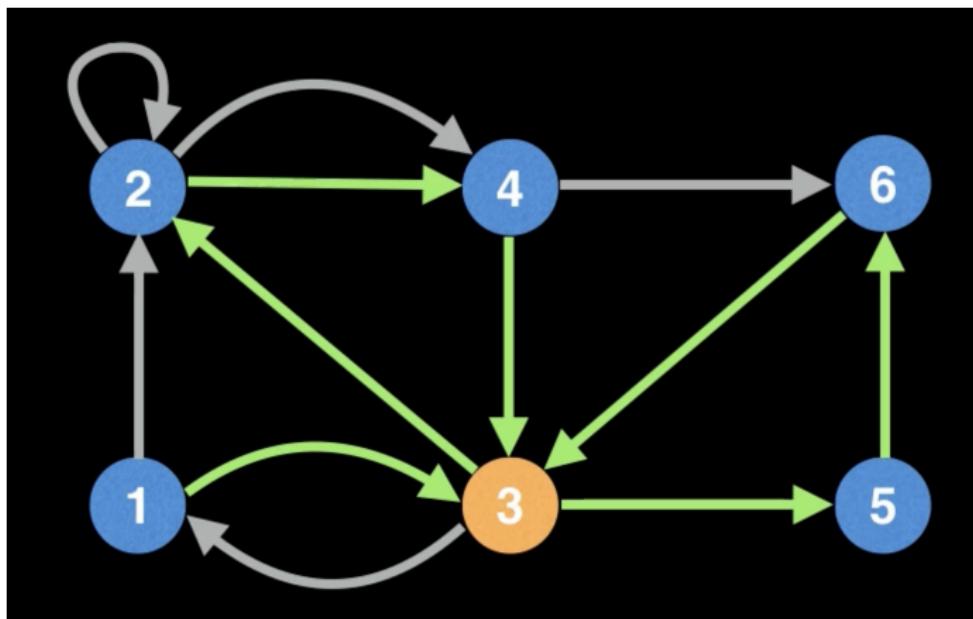
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [2, 2, 4, 6]



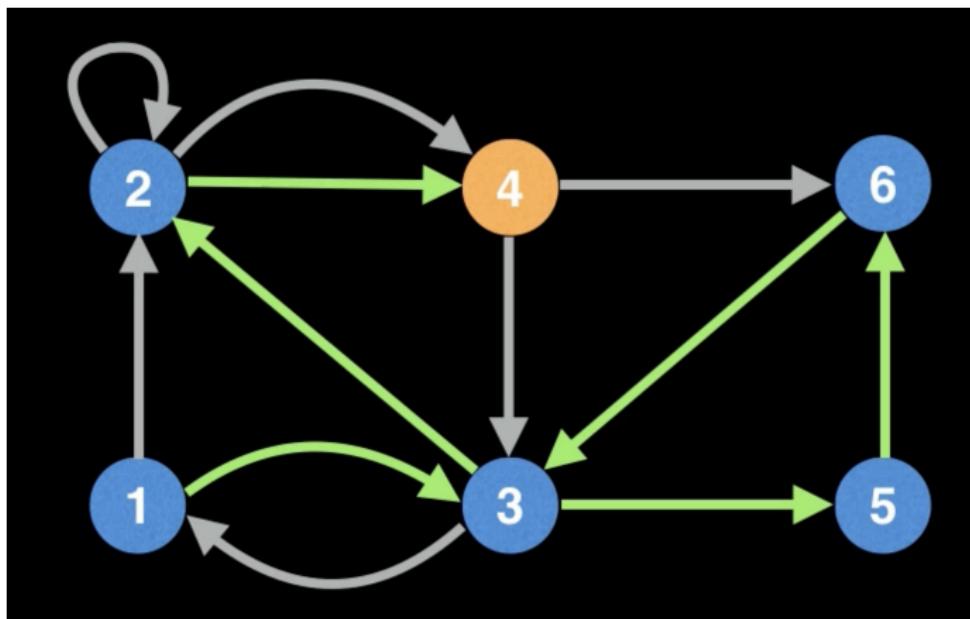
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [1, 2, 2, 4, 6]



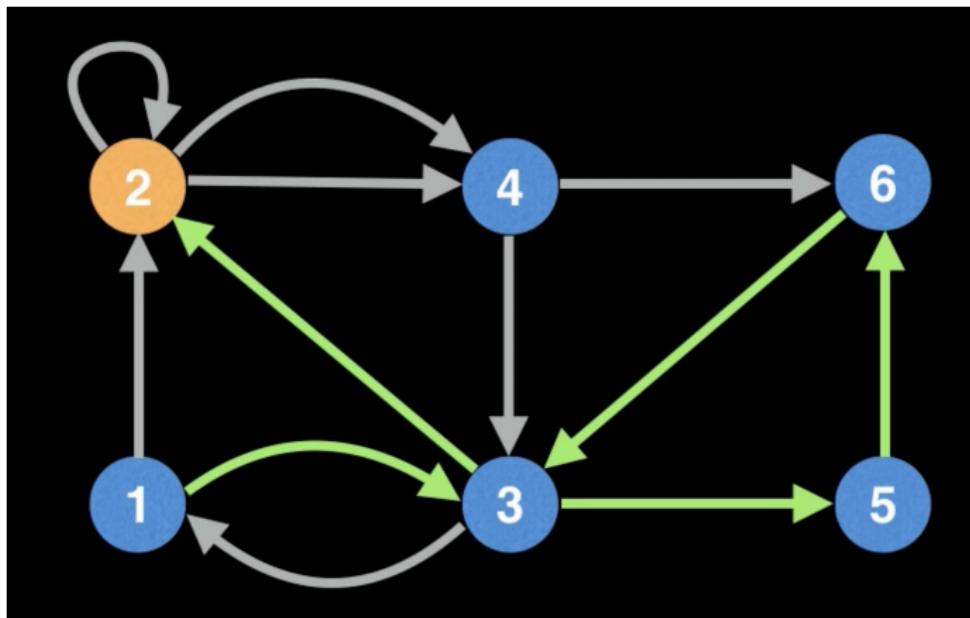
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [3, 1, 2, 2, 4, 6]



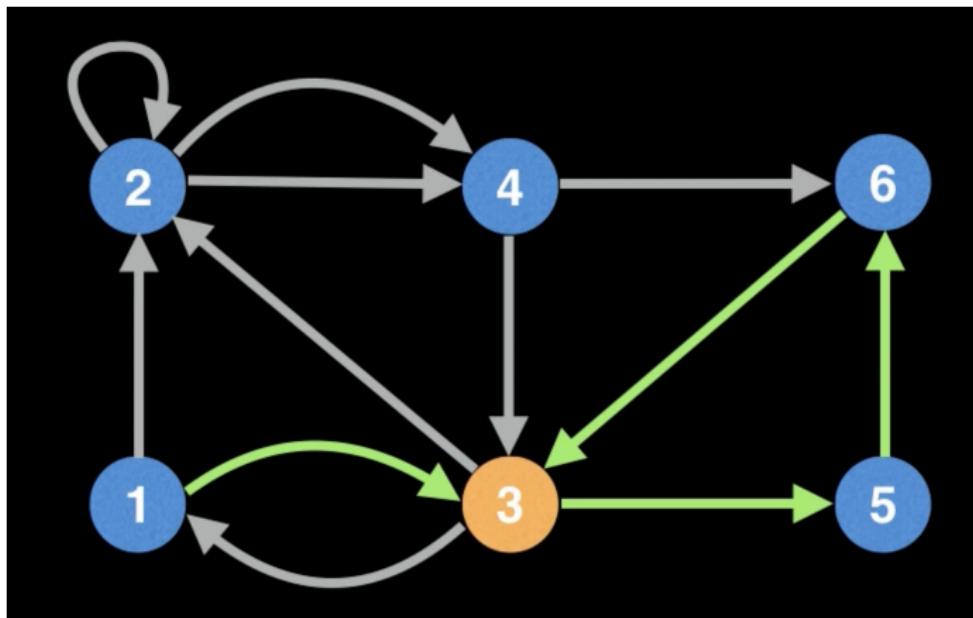
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



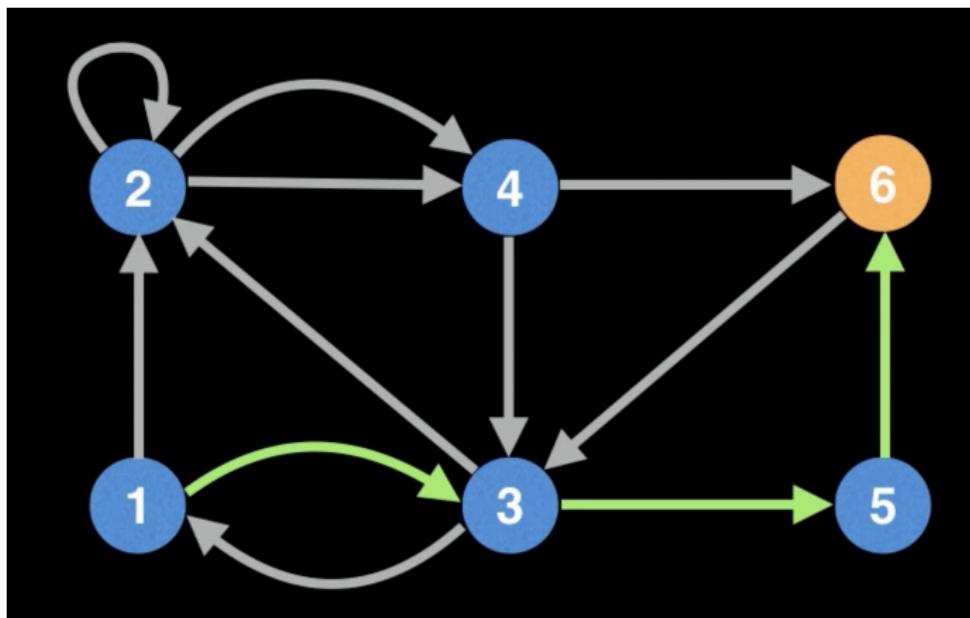
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



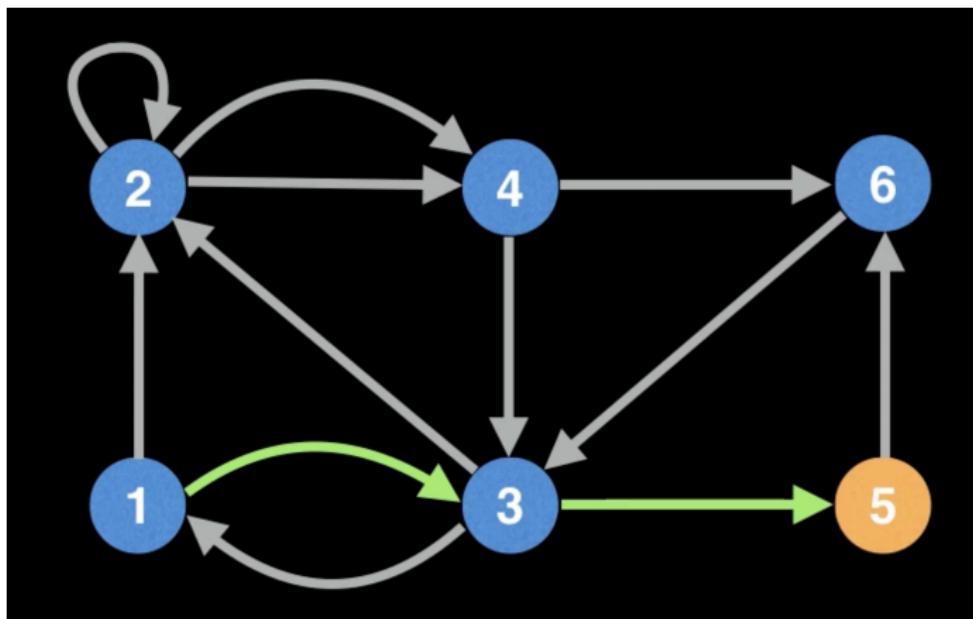
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



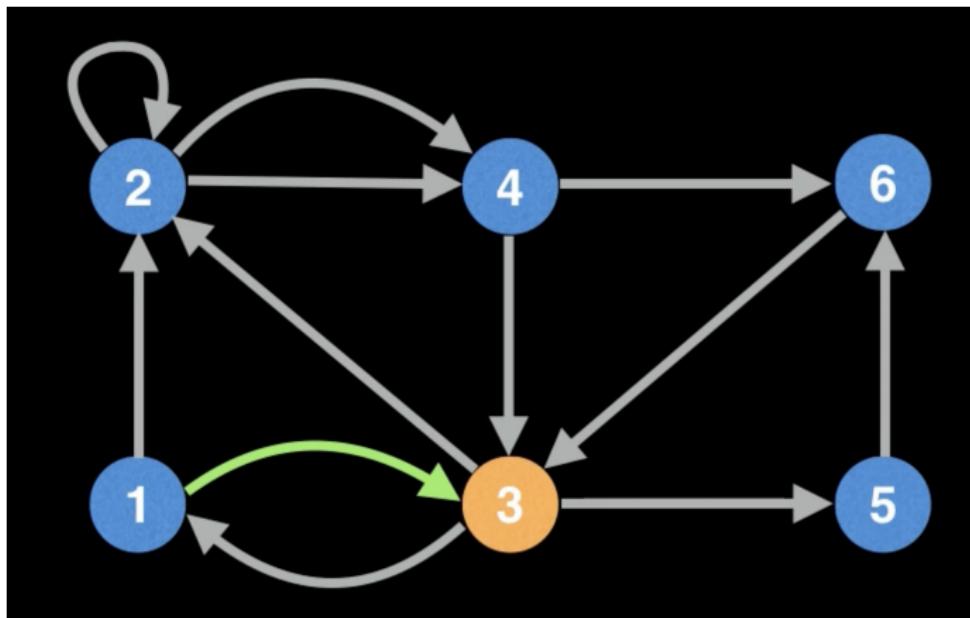
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



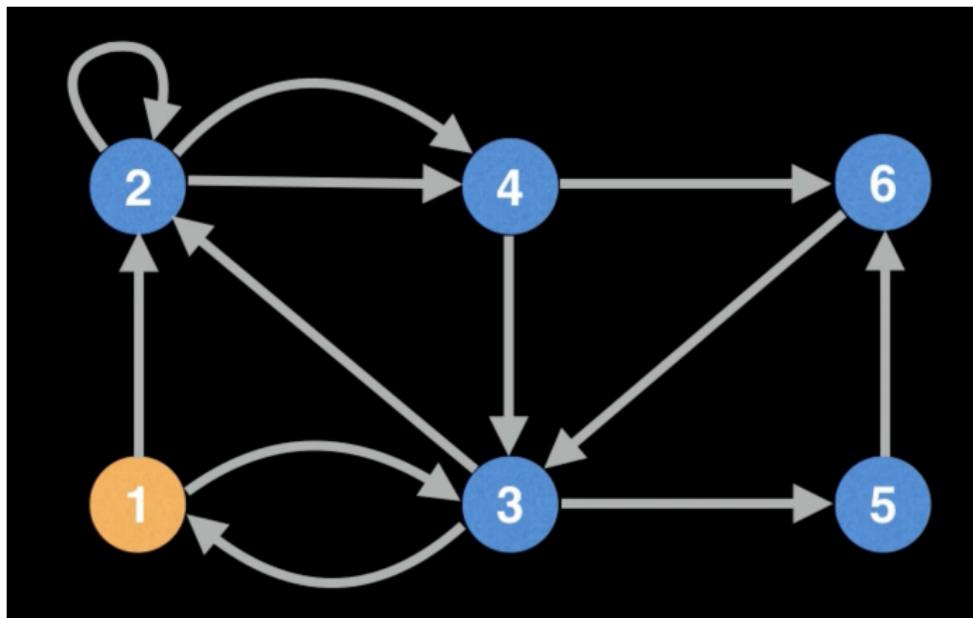
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



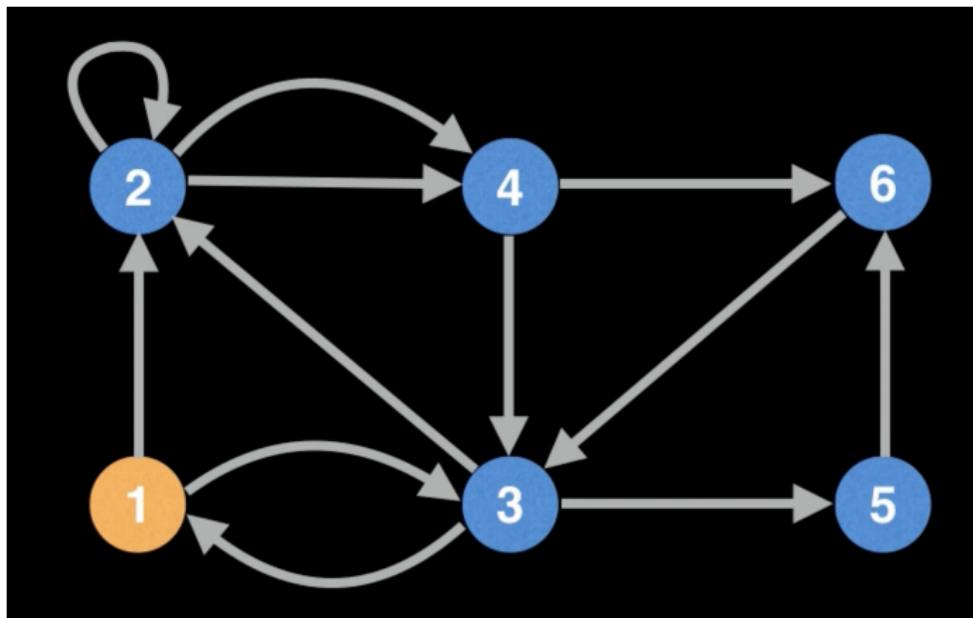
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



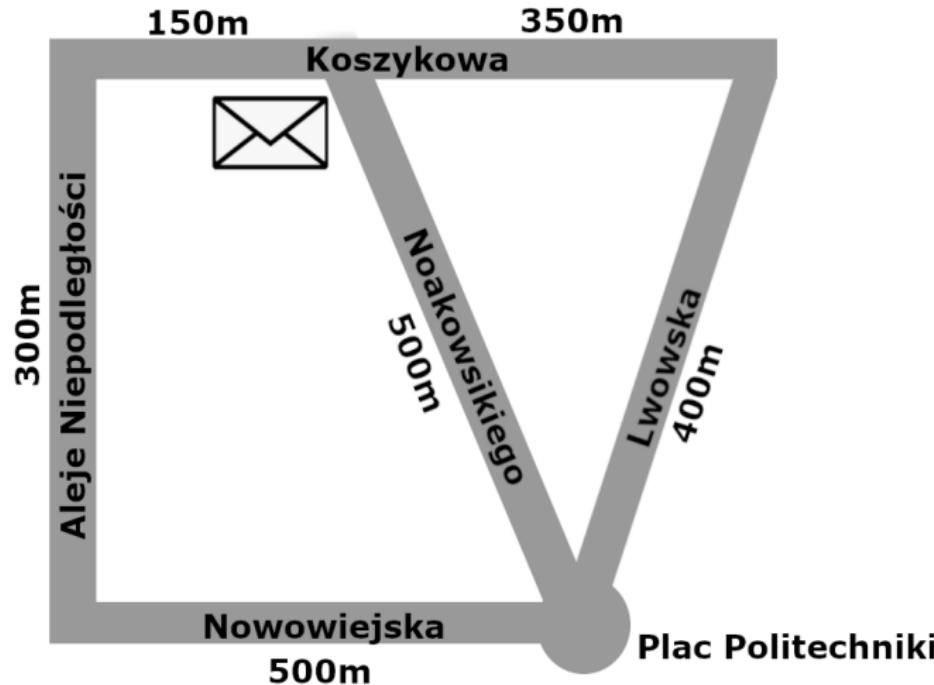
Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [1, 3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]



Co zrobić jak jest pół eulerowski?

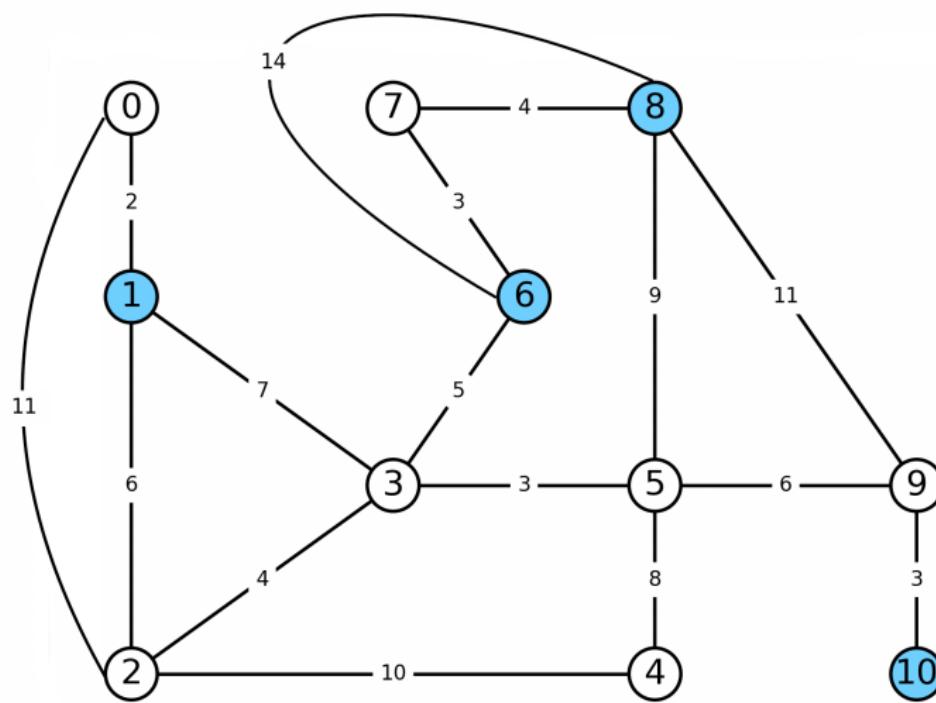


A co gdy G ma więcej niż 2 nieparzyste wierzchołki

Jeżeli G posiada przynajmniej 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, to z tych wierzchołków należy utworzyć graf H, w taki sposób aby H był grafem pełnym z wagami na krawędziach odpowiadającymi najmniejszej ścieżce pomiędzy wierzchołkami w grafie G. W H należy znaleźć minimalne skojarzenie doskonałe i uzupełnić o nie graf G. G jest teraz multigrafem eulerowskim w którym rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza jest cykl Eulera.



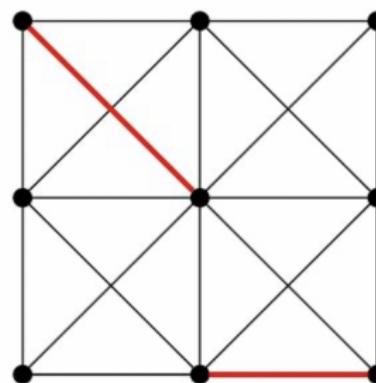
tworzenie grafu H



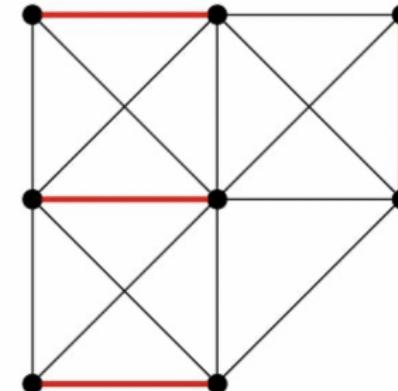
Skojarzenia

Zbiór krawędzi M w grafie G nazywamy **skojarzeniem**, jeśli żadne dwie krawędzie należące do M nie mają wspólnego wierzchołka.

Skojarzenie **doskonałe** to takie skojarzenie M , że gdy każdy wierzchołek grafu G jest końcem jednej krawędzi skojarzenia M . Spostrzeżenie: aby takowe istniało to graf G , musi on mieć parzystą liczbę wierzchołków.



Skojarzenie w grafie
(czerwone krawędzie)



Skojarzenie doskonałe



Blossom algorithm

Nikczemny test szefa to przy tym nic



Co dalej?



Warianty i modyfikacje

- Mixed Chinese postman problem (MCPP or MCP)

"MIXED CHINESE POSTMAN is NP-complete, even if the input graph is planar, each vertex has degree at most three, and each edge and arc has cost one." - Christos Papadimitriou, 1976

Istnieje wielomianowy algorytm przybliżony tworzący rozwiązania nie gorsze niż 1.5 optymalnego rozwiązania.

- Windy postman problem (WPP)
- k-Chinese postman problem (k-CPP)
- Rural Postman Problem (RPP)



Bibliografia

- Publikacja Edmonsa z 1973 w której rozwiązuje CPP
- Publikacja o szukaniu minimalnych skojarzeń doskonałych
- Więcej o windy postman problem
- Więcej o mixed postman problem
- Mini o CPP
- Szerzej o problemie marszrutyzacji

