Słów kilka o problemie chińskiego listonosza

i jego NP-trudnych wariantach

Mateusz Nizwantowski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

May 10, 2023

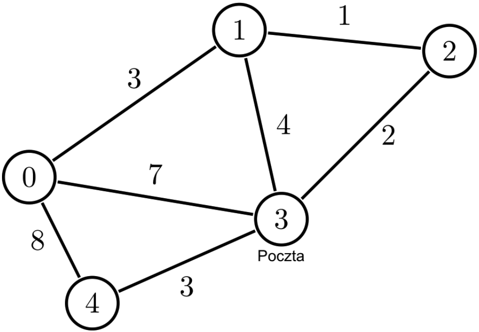
Wstęp

Chiński listonosz

No więc, co to tak właściwie jest?

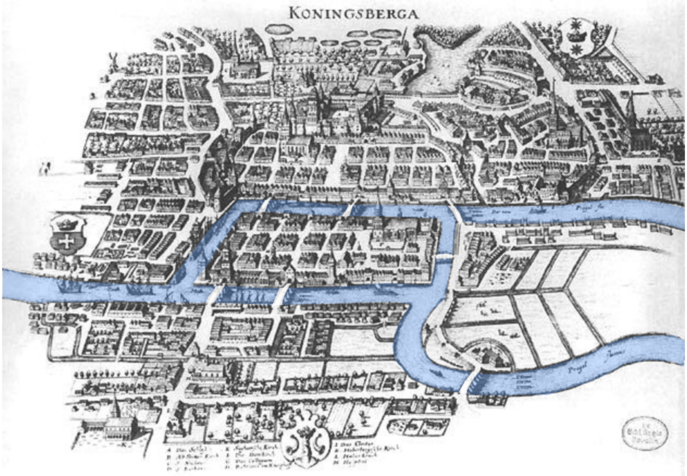
"Listonosz musi dostarczyć listy do danej dzielnicy. Musi przejść przez wszystkie ulice w okolicy i wrócić na pocztę. Jak może zaplanować swoją trasę, aby pokonać jak najkrótszą odległość?" - Kwan Mei-Ko, 1960

Bardziej matematyczna definicja



Cel: znaleźć cykl przechodzący przez wszystkie krawędzie z najmniejszą wagą

Chiński listonosz vs mosty w Królewcu



Rozwiązanie

Wysokopoziomowy schemat rozwiązania

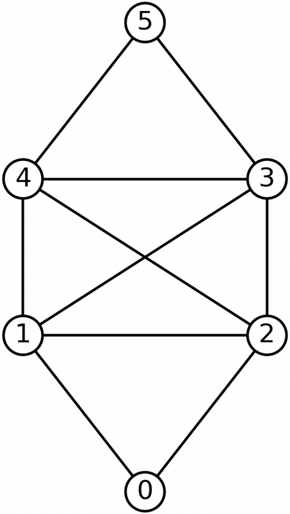
Zakładamy, że graf G jest spójny

- Jeżeli G jest eulerowski to rozwiązanie problemu chińskiego listonosza stanowi cykl Eulera
- Jeżeli G jest półeulerowski to rozwiązaniem problemu jest ścieżka Eulera wraz z minimalną ścieżką (o najmniejszej sumie wag krawędzi) łączącą wierzchołki nieparzystego stopnia.
- Jeżeli G posiada przynajmniej 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, to z tych wierzchołków grafu G należy utworzyć graf H, w taki sposób aby graf H był grafem pełnym z wagami na krawędziach odpowiadającymi najmniejszej ścieżce pomiędzy wierzchołkami w grafie G. W grafie H należy znaleźć minimalne skojarzenie doskonałe i uzupełnić o nie graf G. Graf G jest teraz multigrafem eulerowskim w którym rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza jest cykl Eulera.

Algorytm Fleury'ego intuicja

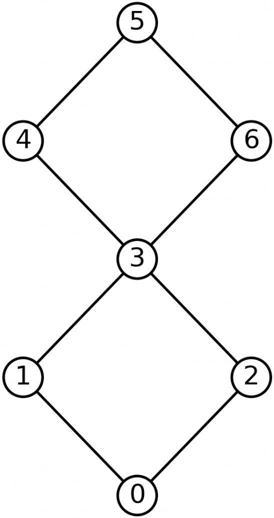
Algorytm Fleury'ego

1. Upewnij się, że graf ma co najwyżej 2 nieparzyste wierzchołki.
2. Jeśli nie ma nieparzystych wierzchołków, zacznij od dowolnego. Jeśli są 2 to zacznij od jednego z nich.
3. Każdą kolejną krawędź, po której przechodzisz, wybierz spośród krawędzi wychodzących z wierzchołka, w którym aktualnie się znajdujesz. Wybieraj krawędź, po której jeszcze nie przeszedłeś. Jeśli masz wybór między mostem a nie-mostem, zawsze wybieraj nie-most.
4. Zatrzymaj się, gdy skończą ci się krawędzie.

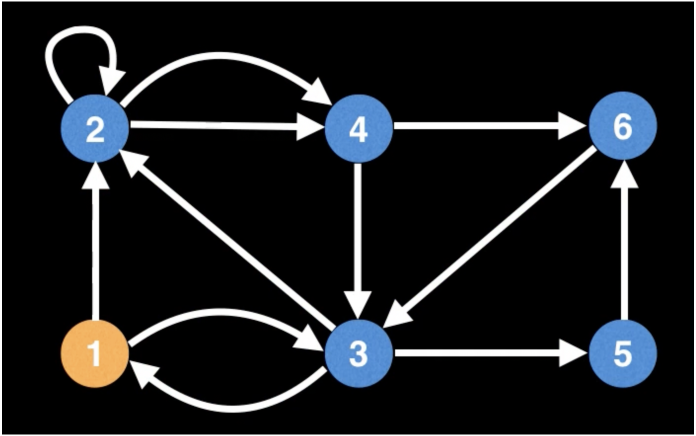


Algorytm Hierholzera

1. Upewnij się, że graf ma co najwyżej 2 nieparzyste wierzchołki.
2. Jeśli nie ma nieparzystych wierzchołków, zacznij od dowolnego. Jeśli są 2 to zacznij od jednego z nich.
3. Zainicjuj stos i dodaj tam pierwszy wierzchołek
4. Dopóki stos nie jest pusty:
   a. Sprawdź, czy wierzchołek na szczycie stosu ma sąsiada, którego jeszcze nie odwiedzono. Jeśli tak, to dodaj ten wierzchołek na stos i usuń krawędź łączącą oba wierzchołki z grafu.
   b. Jeśli wierzchołek na szczycie stosu nie ma więcej nieodwiedzonych sąsiadów, usuń go ze stosu i dodaj go do listy wynikowej.
5. lista wynikowa to szukana ścieżka

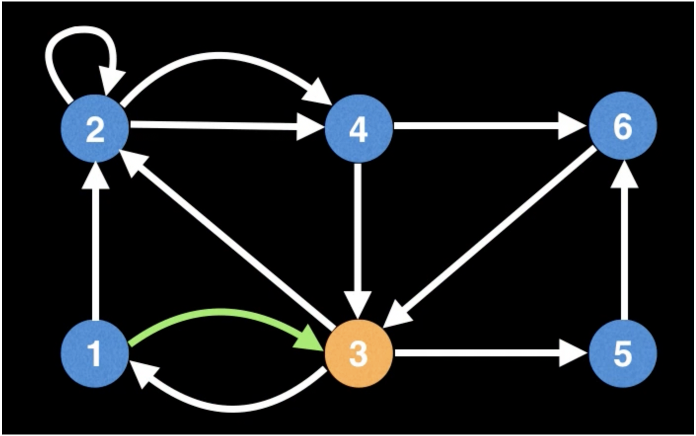


Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



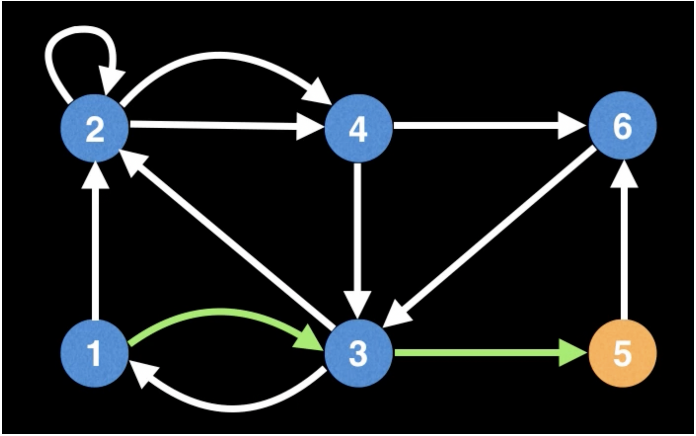
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



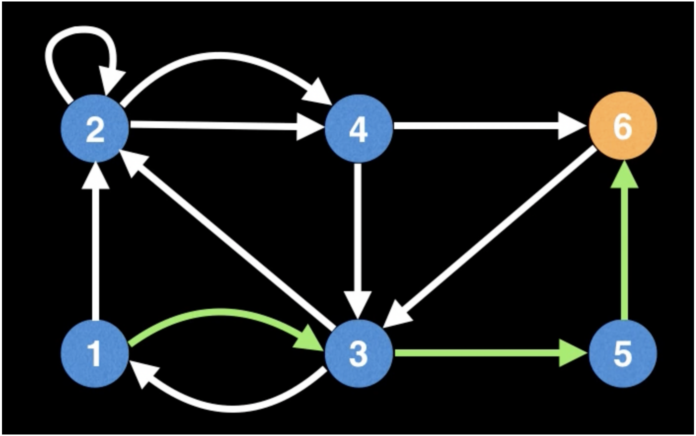
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



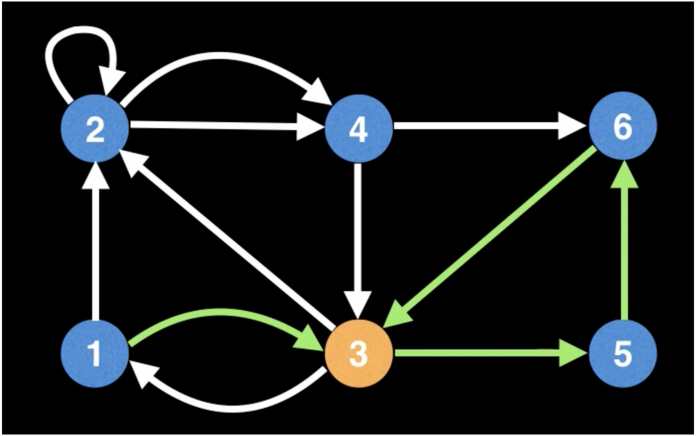
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



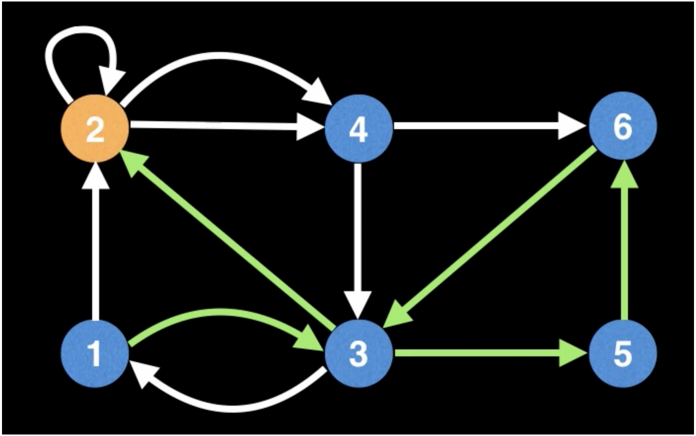
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



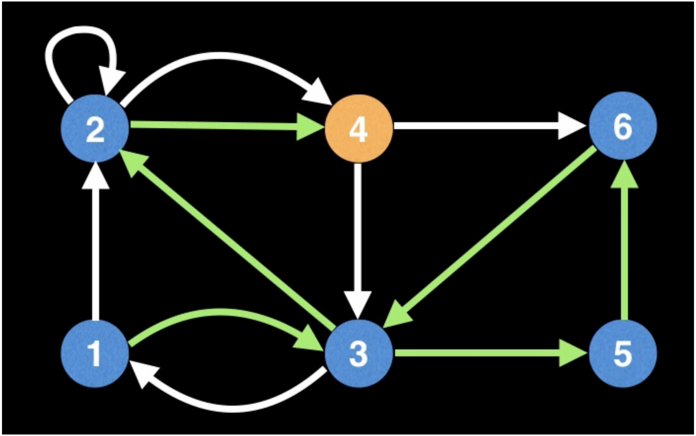
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



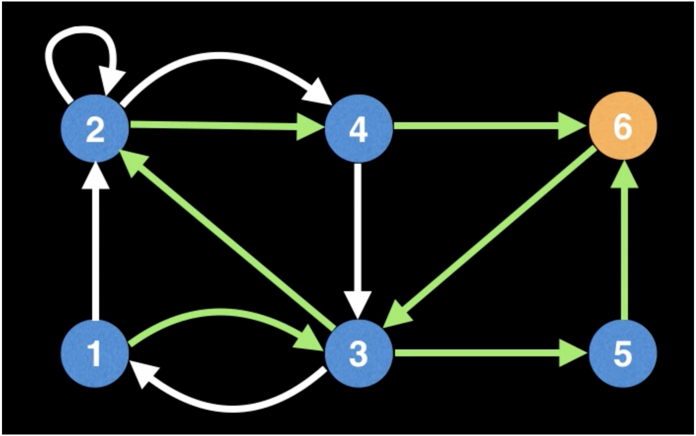
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



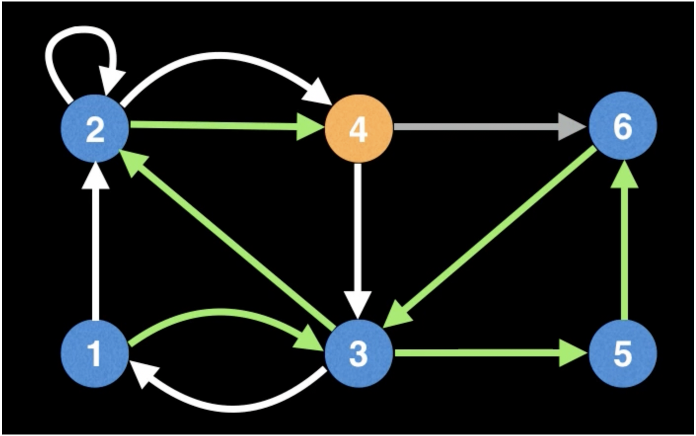
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



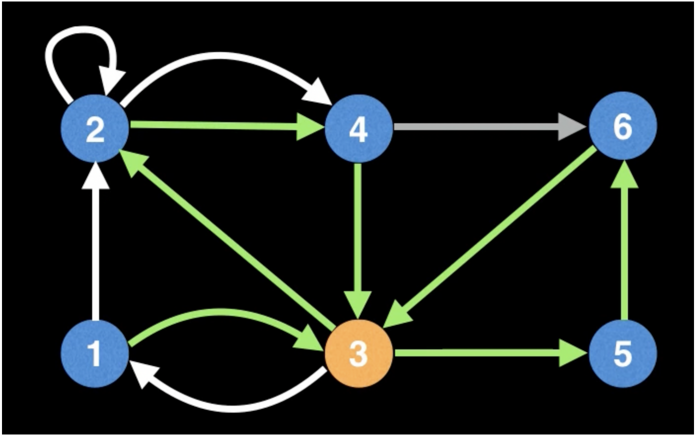
solution = [ ]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



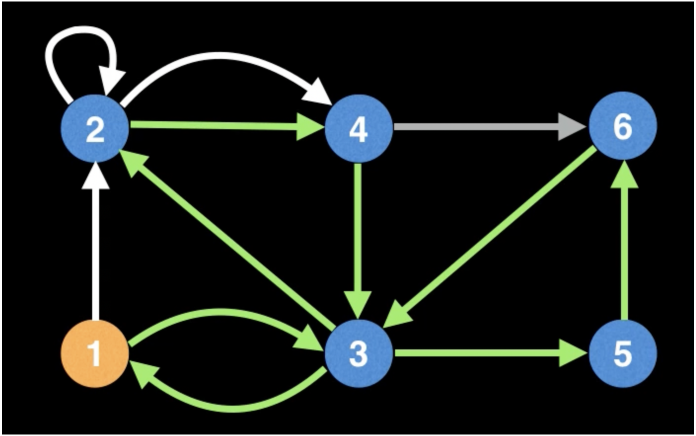
solution = [6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



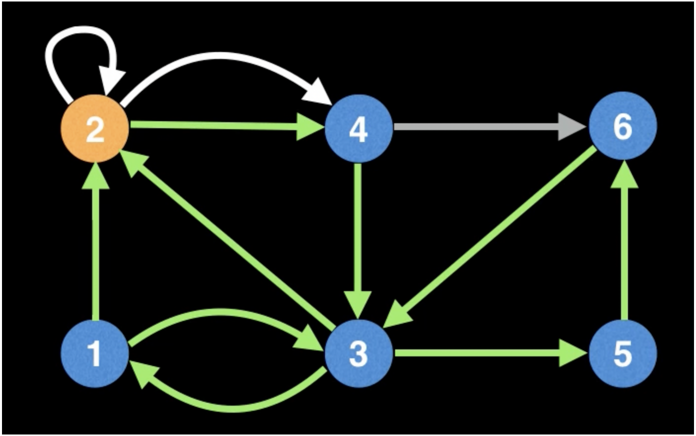
solution = [6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



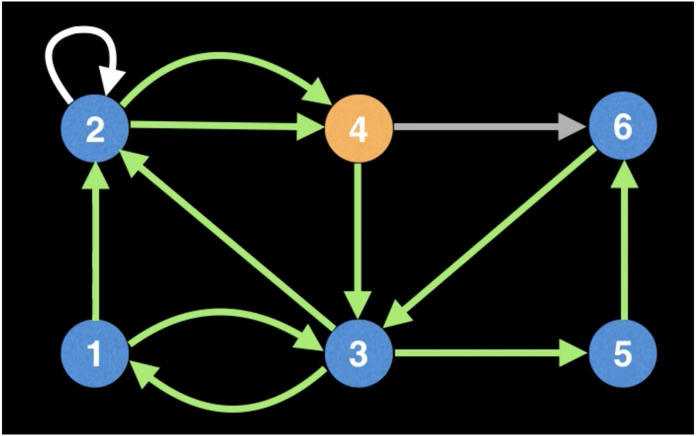
solution = [6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



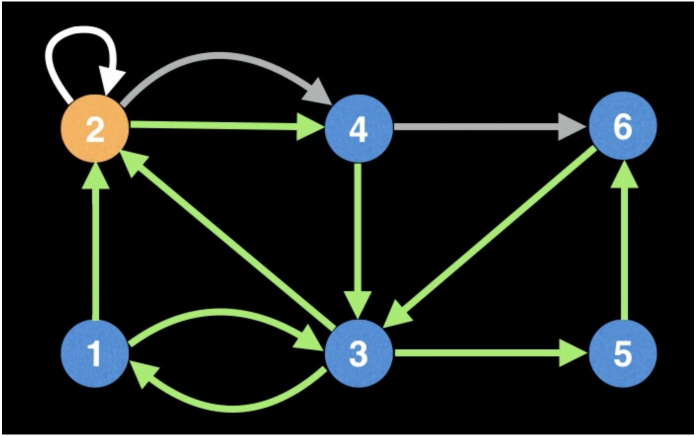
solution = [6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



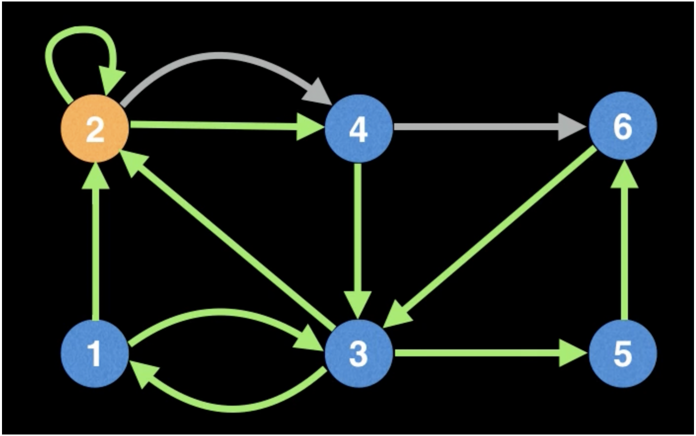
solution = [6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



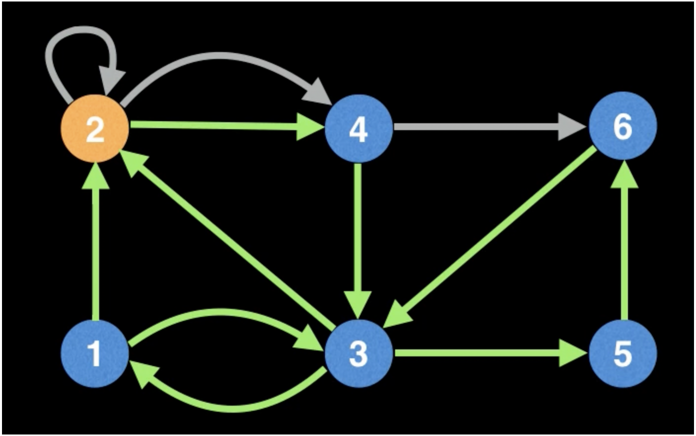
solution = [4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



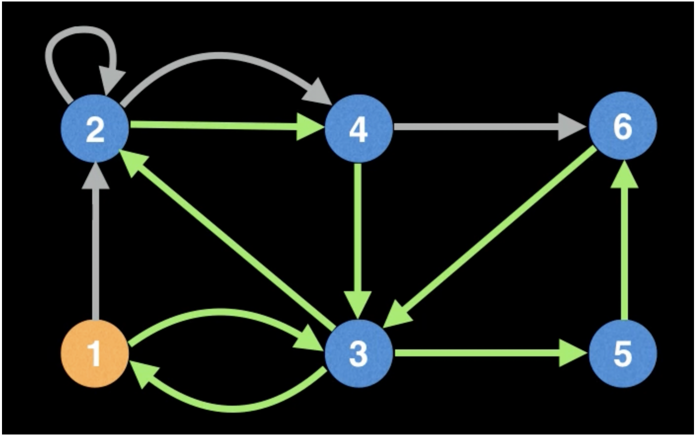
solution = [4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



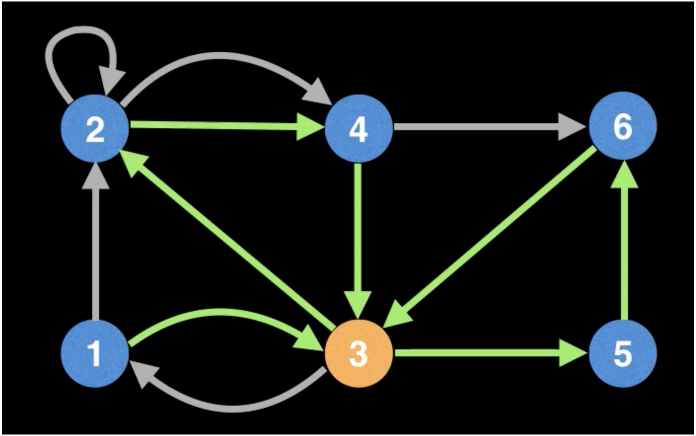
solution = [2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



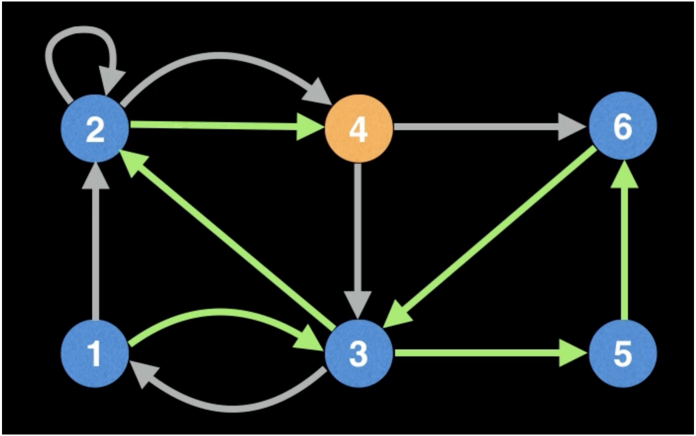
solution = [2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



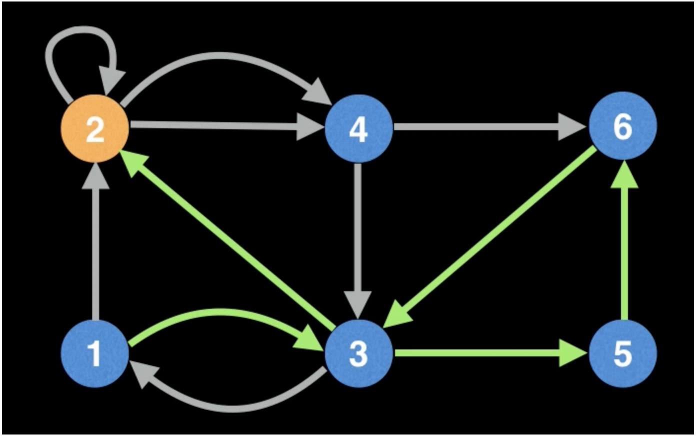
solution = [1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



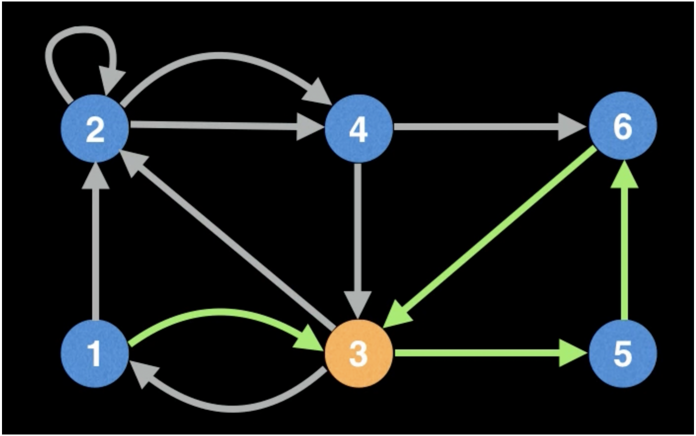
solution = [3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



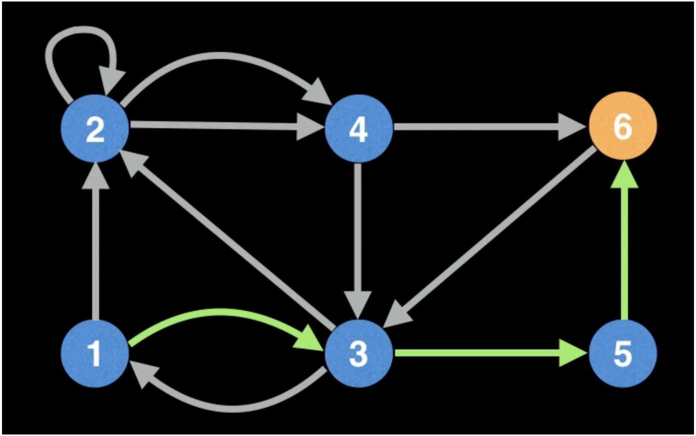
solution = [4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



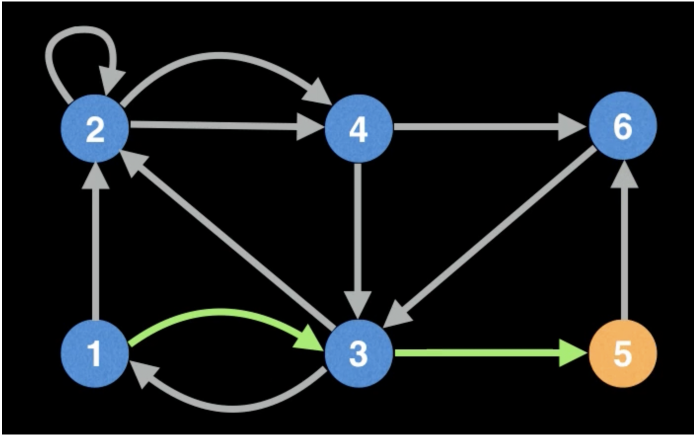
solution = [2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



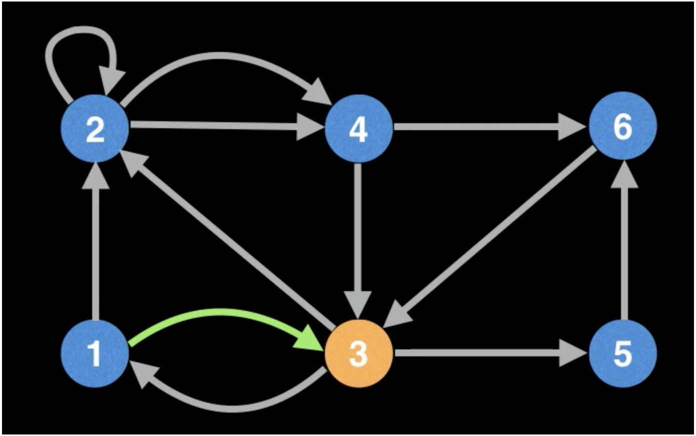
solution = [3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



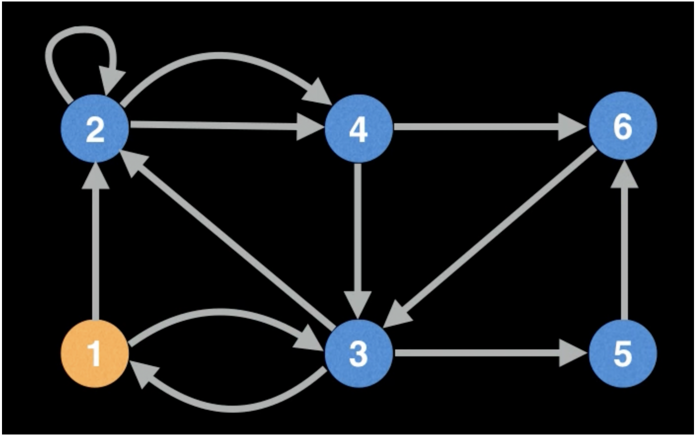
solution = [6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



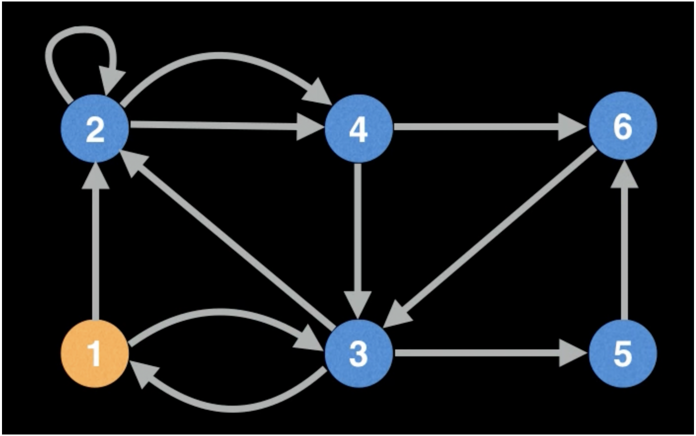
solution = [5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



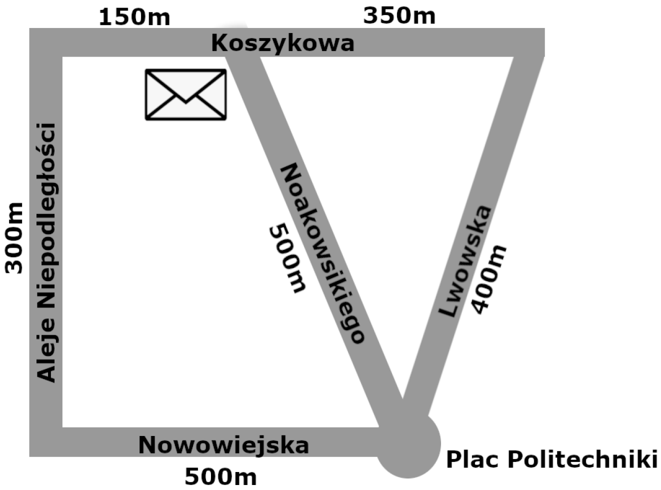
solution = [3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

Algorytm Hierholzera dla grafów skierowanych



solution = [1, 3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 6]

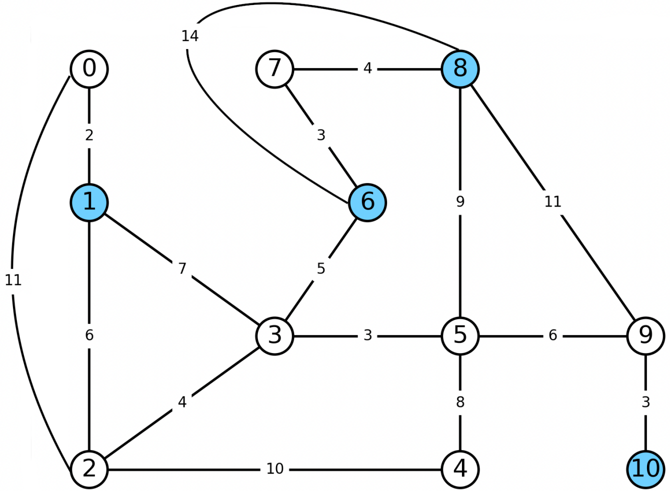
Co zrobić jak jest pół eulerowski?



A co gdy G ma więcej niż 2 nieparzyste wierzchołki

Jeżeli G posiada przynajmniej 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, to z tych wierzchołków należy utworzyć graf H, w taki sposób aby H był grafem pełnym z wagami na krawędziach odpowiadającymi najmniejszej ścieżce pomiędzy wierzchołkami w grafie G. W H należy znaleźć minimalne skojarzenie doskonałe i uzupełnić o nie graf G. G jest teraz multigrafem eulerowskim w którym rozwiązaniem problemu chińskiego listonosza jest cykl Eulera.

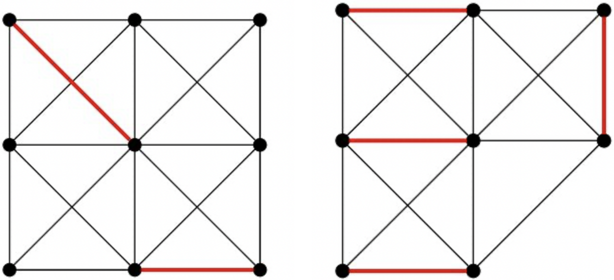
tworzenie grafu H



Skojarzenia

Zbiór krawędzi *M* w grafie *G* nazywamy **skojarzeniem**, jeśli żadne dwie krawędzie należące do *M* nie mają wspólnego wierzchołka.

Skojarzenie **doskonałe** to takie skojarzenie M, że gdy każdy wierzchołek grafu G jest końcem jednej krawędzi skojarzenia M. Spostrzeżenie: aby takowe istniało to graf G, musi on mieć parzystą liczbę wierzchołków.



Skojarzenie w grafie (czerwone krawędzie)

Skojarzenie doskonałe

Blossom algorithm

Nikczemny test szefa to przy tym nic

Dla masochistów pozycja [1]

Co dalej?

Warianty i modyfikacje

- Mixed Chinese postman problem (MCPP or MCP) [2]

  "MIXED CHINESE POSTMAN is NP-complete, even if the input graph is planar, each vertex has degree at most three, and each edge and arc has cost one." - Christos Papadimitriou, 1976

  Istnieje wielomianowy algorytm przybliżony tworzący rozwiązania nie gorsze niż 1.5 optymalnego rozwiązania.
- Windy postman problem (WPP) [3]
- k-Chinese postman problem (k-CPP)
- Rural Postman Problem (RPP)

Bibliografia

William Cook and Andre Rohe.
Computing minimum-weight perfect matchings.
INFORMS Journal on Computing, 1999.

Maria Gordenko and Sergey Avdoshin.
Some approaches to solving the np-hard mixed chinese postman problem.
ISP RAS, 2017.

Kwan Mei-Ko.
On the windy postman problem.
Discrete Applied Mathematics, 1984.