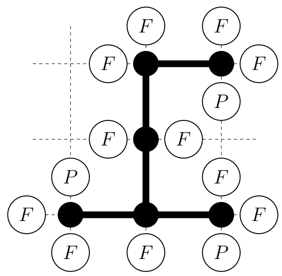
Percolation de premier passage

Lucas Gerin | Cours doctoral (Modal'X, Mai 2013)

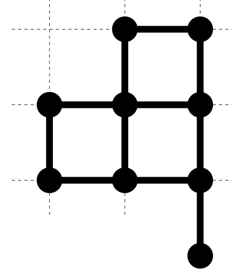
Motivation : Modèle d'Eden et percolation de premier passage

Nous allons commencer par considérer un objet aléatoire discret très simple : le modèle d'Eden (c'est un physicien, rien à voir avec le jardin). Fixons un paramètre $p \in (0,1)$, et considérons la suite $\{E(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$ de sous-ensembles de $\mathbb{Z}^2$ définie de la façon suivante.

- $E(0) = \{0\}$.
- Connaissant $E(t)$, on lance indépendamment sur chaque arête qui "sort" de $E(t)$ une pièce qui tombe sur "pile" avec probabilité p. Pour chaque pièce qui tombe sur pile, le sommet de l'arête correspondante qui n'appartenait pas $E(t)$ est rajouté pour donner $E(t+1)$.



Un exemple de $E(t)$ avec les pièces



Le $E(t+1)$ correspondant

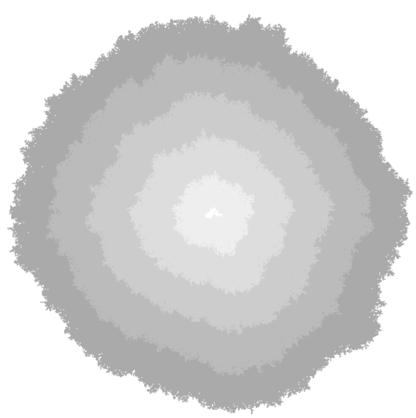


Figure 1 – Le modèle d'Eden pour $p = 0.02$, représenté à différents temps jusqu'à 10^6.

On peut se demander à quelle vitesse croît $E(t)$, et s'il a une forme particulière. Le modèle d'Eden fait partie d'une famille d'objets que l'on appelle parfois *processus de croissance aléatoires*. Nous allons plutôt voir ce modèle comme un objet statique : fixons un sommet x, on va étudier l'instant T_x où x est colorié.

Si pour chaque sommet y voisin de x on note $g_{(x,y)}$ le nombre de fois où il a fallu lancer la pièce qui est entre x et y avant de tomber sur pile, les variables g sont des géométriques de paramètre p indépendantes et on a

$$T_x = \min_{y \sim x} \left\{ T_y + g_{(x,y)} \right\},$$

où $y \sim x$ signifie que le min est pris sur les 4 voisins de x dans $\mathbb{Z}^2$. Mais en "remontant" ainsi cette équation jusqu'à l'origine, on peut vérifier que T_x peut s'écrire

$$T_x = \inf_{\gamma : 0 \to x} \sum_{(x_i, x_{i+1}) \in \gamma} g_{(x_i, x_{i+1})},$$

où l'inf est pris sur l'ensemble de tous les chemins dans $\mathbb{Z}^2$ allant de 0 à x, et la somme est prise sur les arêtes de γ. On pourrait prendre bien sûr n'importe quelle loi positive sur les arêtes à la place de la loi géométrique, c'est justement la *Percolation de Premier Passage*.

1 Le modèle de la Percolation de Premier Passage

On se donne $\{\tau_e, e \text{ arêtes de } \mathbb{Z}^2\}$ une famille de variables aléatoires **positives** indépendantes de même loi τ. On suppose que τ a une **espérance finie**. Pour une arête e, τ_e est appelé *temps de passage* de l'arête e.

Pour un *chemin* γ allant de x à y

$$\gamma : x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_k = y$$

le temps de passage $\tau(\gamma)$ du chemin γ est, par extension, la somme des temps de passage de ses arêtes :

$$\tau(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{(x_i, x_{i+1})}.$$

Et ainsi les $\{\tau_e\}$ définissent une distance [(i)] aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$:

$$D(x, y) = \inf_{\gamma : x \to y} \tau(\gamma),$$

où l'inf est pris sur tous les chemins qui vont de x à y.

On peut voir cet objet comme un modèle de propagation d'un liquide dans un milieu poreux aléatoire : si l'on injecte initialement du liquide en l'origine $\vec{0}$, et que l'on suppose que le liquide met un temps τ_e pour traverser l'arête e, alors la première goutte arrive en x à l'instant $D(\vec{0}, x)$.

Les exemples à avoir en tête pour la loi des temps de passages sont :

- Temps de passage géométriques ($\mathbb{P}(\tau = k) = p(1-p)^{k-1}$), et alors $D(\vec{0}, x)$ est le T_x du modèle d'Eden de paramètre p.

(i). Ce n'est pas pas tout à fait une distance car deux sommets différents peuvent être à distance nulle si $\mathbb{P}(\tau = 0) > 0$.

– Temps de passage *Bernoulli* :

$$\tau = \begin{cases} a & \text{avec probabilité } 1-p \\ b & \text{avec probabilité } p \end{cases}$$

avec $a < b$.

– Temps de passage exponentiels (τ de densité e^{-u})

Le modèle a été introduit par Hammersley et Welsh [9], les questions qui se posent naturellement sont les suivantes :

1. Que peut-on dire de $D(x, y)$ lorsque x, y sont éloignés ? Par exemple, si l'on note $\vec{n} = (n, 0)$, quel est l'ordre de grandeur de $D(\vec{0}, \vec{n})$ quand n tend vers l'infini ? Comment évolue son espérance ?
2. Et sa variance ?
3. À quoi ressemble une géodésique entre $\vec{0}$ et $\vec{n}$?
4. Quelle est la forme des grandes boules (aléatoires) de D ?

On a de quoi s'occuper avec la première question, les trois autres sont essentiellement des problèmes ouverts.

2 Croissance linéaire : utilisation de la sous-additivité

À partir de maintenant, on se concentre sur la distance entre $\vec{0}$ et $\vec{n}$, et on note

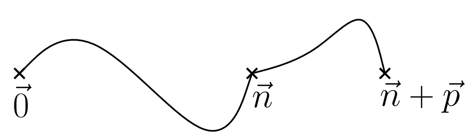
$$D_n = D(\vec{0}, \vec{n}), \qquad d_n = \mathbb{E}[D_n].$$

Un examen rapide du cas des temps de passage de Bernoulli montre que $na \leq D_n \leq nb$. Pour des lois τ plus générales, on voit en considérant le chemin qui "va tout droit" de $\vec{0}$ à $\vec{n}$ que

$$D_n \leq \tau_{\vec{0}\to\vec{1}} + \tau_{\vec{1}\to\vec{2}} + \cdots + \tau_{\vec{n}-\vec{1}\to\vec{n}},$$

et donc $\mathbb{E}[D_n] \leq n\mathbb{E}[\tau]$. Tout ceci suggère que D_n (ou en tout cas son espérance) se comporte linéairement en n. Le but de cette partie est de le démontrer, et l'outil essentiel est la *sous-additivité*.

Plaçons-nous dans le cas général de temps de passage quelconques, et faisons l'observation élémentaire suivante : si l'on colle le meilleur chemin $\vec{0} \to \vec{n}$ et le meilleur chemin $\vec{n} \to \vec{n} + \vec{p}$



on obtient un chemin $\vec{0} \to \vec{n} + \vec{p}$, mais qui n'est peut-être pas optimal. Ceci démontre tout de même que

$$D(\vec{0}, \vec{n} + \vec{p}) \leq D(\vec{0}, \vec{n}) + D(\vec{n}, \vec{n} + \vec{p}) \tag{1}$$

(c'est tout simplement l'inégalité triangulaire pour D). En prenant pour commencer l'espérance des deux côtés on obtient $d_{n+p} \leq d_n + d_p$: (d_n) est une suite **sous-additive**.

Lemme (Fekete (1923))**.** *Soit (u_n) une suite sous-additive de réels positifs, alors $(u_n/n)_{n\geq 1}$ converge. Plus précisément,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}.$$

Démonstration. Soit $p \geq 1$ un entier fixé et, pour $n \geq p$, $n = pq_n + r_n$ la division euclidienne de n par p. Par sous-additivité, on a

$$u_n = u_{pq_n+r_n} \leq u_{pq_n} + u_{r_n} \leq q_n u_p + u_{r_n}.$$

En passant à la limite supérieure, on obtient $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \limsup_n \frac{q_n}{n} u_p + \frac{u_{r_n}}{n}$. Pour le premier terme, on a bien sûr $q_n/n \sim 1/p$. Pour le deuxième terme, (r_n) ne prend que p valeurs différentes, et donc u_{r_n}/n tend vers zéro. Finalement, $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p}$, et en prenant l'inf sur p : $\limsup_n \frac{u_n}{n} \leq \inf_p \frac{u_p}{p} \leq \liminf_p \frac{u_p}{p}$, et ces trois quantités sont égales. □

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Proposition 1 (L'espérance évolue linéairement)**.** *Pour la percolation de premier passage de loi τ d'espérance finie, il existe une constante $\mu(\tau)$, appelée* constante de temps*, telle que*

$$\mu(\tau) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{n})]}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{n})]}{n} \in [0, +\infty[.$$

Remarque .
1. *À ce stade, rien ne permet d'exclure que pour certaines lois τ l'on ait $\mu(\tau) = 0$, auquel cas d_n croît sous-linéairement. Dans le cas Bernoulli par exemple, on a $D_n \geq na$ et donc $\mu \geq a$.*
2. *Pour que $\mu(\tau)$ soit finie, il n'est en fait pas nécessaire que τ soit intégrable, mais seulement que la plus petite de 4 arêtes indépendantes le soit : $\mathbb{E}[\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}] < \infty$.*
3. *La remarque sur le "chemin qui va tout droit" implique que $\mu(\tau) \leq \mathbb{E}[\tau]$. On a même la majoration $\mu \leq \mathbb{E}[D(\vec{0}, \vec{1})]$, qui est parfois un peu meilleure.*
4. *La suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\geq 0}$ n'est en général pas sous-additive. On peut très bien avoir D_{n+p} beaucoup plus grand que $D_n + D_p$, par exemple si les quatre arêtes sortant de $\vec{n} + \vec{p}$ ont des temps de passage très grands.*

La convergence de $\mathbb{E}[D_n]/n$ vers une constante n'empêche bien sûr pas la suite de variables aléatoires D_n/n de très mal se comporter, il est donc assez naturel d'essayer de démontrer cette convergence dans un sens beaucoup plus fort : une convergence en probabilité ou presque-sûre.

Pour cela, et dès l'article initial, Hammersley et Welsh [9] ont eu l'idée de démontrer un "Lemme de Fekete aléatoire", mais l'énoncé le plus satisfaisant est dû à Kingman (ii).

Théorème 1 (Théorème sous-additif de Kingman (1968))**.** *Soit $\{X_{m,n} : m < n\}$ une famille de variables aléatoires vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tous $m < p < n$,*

$$X_{m,n} \leq X_{m,p} + X_{p,n}.$$

(ii) *La famille $\{X_{m+1,n+1}\}_{m,n\geq 0}$ a même loi que $\{X_{m,n}\}_{m,n\geq 0}$.*

(iii) *Pour chaque n, $\mathbb{E}[X_{0,n}] < \infty$.*

Alors, il existe une variable aléatoire X telle que, presque-sûrement et dans L^1,

$$\frac{X_{0,n}}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X.$$

(ii). C'est un résultat de théorie ergodique, une preuve moderne et assez courte, mais forcément difficile, se trouve dans [15]. Pour une discussion sur les hypothèses, il faut lire [12].

On applique le Théorème de Kingman à $X_{m,n} = D(\vec{m}, \vec{n})$. L'indépendance des temps de passage sur les arêtes assure alors une condition d'ergodicité, et la limite X est en réalité une variable aléatoire constante. Le résultat principal est donc que, presque-sûrement et dans L^1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(\vec{0}, \vec{n})}{n} = \mu(\tau) = \inf_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}[D_n]}{n}. \tag{2}$$

Pour prévenir d'éventuelles déceptions, il faut dire tout de suite qu'à part le cas où $\mu = 0$ (que nous allons traiter immédiatement), il n'y **aucune loi** τ pour laquelle on sache calculer $\mu(\tau)$.

3 $\mu = 0$ vs $\mu > 0$: mini-mini-cours de percolation

La première question qui se pose est de savoir si la croissance n'est pas par hasard sous-linéaire, c'est-à-dire si la constante de temps μ est bien strictement positive. C'est le cas si τ est une variable continue, la condition nécessaire et suffisante est la suivante :

Théorème 2 (Kesten [11]). *La constante de temps μ est nulle si et seulement si $\mathbb{P}(\tau = 0) \geq 1/2$.*

Pour ceux qui connaissent, l'apparition du 1/2 a bien sûr beaucoup à voir avec le fait que c'est le seuil critique pour la percolation par arête dans $\mathbb{Z}^2$.

Nous allons montrer un résultat un peu plus faible, ce sera ainsi l'occasion de faire de la percolation "classique".

Proposition 2 ($\mu = 0$: une version facile). *Si $\mathbb{P}(\tau = 0) > 2/3$ alors $\mu = 0$.*

Démonstration. On note

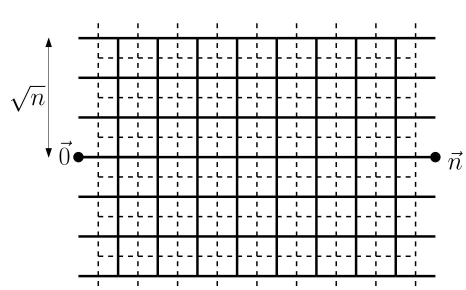
$$p = \mathbb{P}(\tau > 0), \qquad 1 - p = \mathbb{P}(\tau = 0).$$

et on dit qu'une arête est *nulle* quand son temps de passage vaut zéro.
Nous allons montrer qu'avec grande probabilité il y a un chemin $\vec{0} \to \vec{n}$ qui emprunte seulement $o(n)$ arêtes non nulles. Plus précisément, considérons dans $\mathbb{Z}^2$ la boîte $B_n = [0; n] \times [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, nous allons montrer la chose suivante :

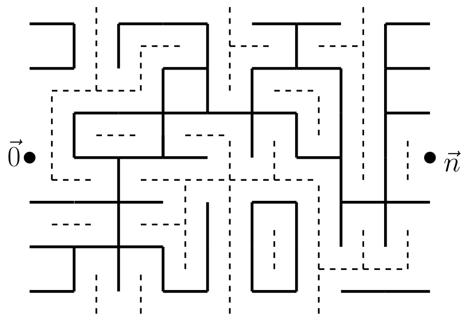
Lemme . *Soit A_n l'événement "il existe un chemin inclus dans la boîte, constitué uniquement d'arêtes nulles, qui va du bord gauche au bord droit". Pour n assez grand,*

$$\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - (3p)^{\sqrt{n}}.$$

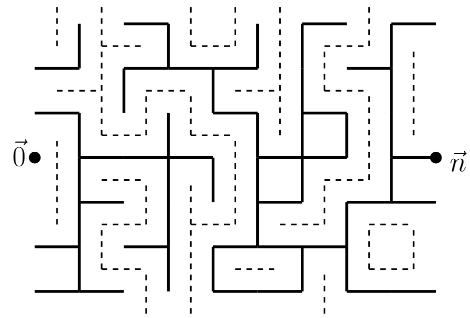
Preuve du Lemme. Dessinons B_n et dessinons aussi sa "boîte duale" en pointillés :



On ne garde dans la boîte que les arêtes nulles et à chaque fois on efface l'arête "duale" associée. Alors de deux choses l'une :



A_n : il y a un chemin **d'arêtes nulles** dans la boîte du bord gauche au bord droit



non A_n : alors il y a chemin dans la boîte duale qui va du bord haut au bord bas et **qui ne coupe que des arêtes non nulles**

Et donc

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{\mathcal{C}^\star} \mathcal{C}^\star \text{ ne passe que par des arêtes non nulles }),$$

où l'union se fait sur les chemins **auto-évitants** formés d'arêtes duales traversant la boîte de haut en bas. Puisque $\mathbb{P}(\cup) \leq \sum \mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq \sum_{\ell \geq 2\sqrt{n}} n 3^\ell p^\ell,$$

où l'on a sommé les chemins $\mathcal{C}$ selon leur longueur ℓ, et il y a moins que $n \times 3^\ell$ tels chemins (le n est là pour choisir le point de départ du chemin sur le bord haut de la boîte). Pour conclure,

$$\mathbb{P}(\text{non } A_n) \leq n(3p)^{2\sqrt{n}} \frac{1}{1-3p},$$

qui, pour n assez grand, est plus petite que $(3p)^{\sqrt{n}}$. $\square$

On finit la preuve :

$$\begin{array}{rcccc} \mathbb{E}[D_n] = & \mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{A_n \text{ est réalisé}}] & + & \mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{A_n \text{ n'est pas réalisé}}] \\ \leq & 2\sqrt{n}\ \mathbb{E}[\tau] & + & 3n\mathbb{E}[\tau](1-\mathbb{P}(A_n)) \\ \leq & 2\sqrt{n}\ \mathbb{E}[\tau] & + & 3n\mathbb{E}[\tau](3p)^{\sqrt{n}}. \end{array}$$

En effet,

- Si A_n est réalisé, on peut passer par un chemin dont les arêtes non nulles sont uniquement sur les bords gauche et droit. Les temps de passage de ces (au plus) $2\sqrt{n}$ arêtes sont des τ_i indépendantes de ce qui se passe dans la boîte.
- Si A_n n'est pas réalisé, on peut toujours contourner la boîte en $\sqrt{n} + n + \sqrt{n} \leq 3n$ arêtes.

Finalement $\mu = \lim \mathbb{E}[D_n/n] = 0$. $\square$

Inversement, si peu d'arêtes valent zéro, alors $\mu > 0$, pour une raison de dénombrement. Là aussi c'est un argument vraiment typique de percolation, et il remonte à Hammersley (1965). Pour ne pas trop epsiloniser la discussion, nous allons considérer des temps de passage Bernoulli 0/1, mais la preuve s'adapte facilement pour toute loi. On note

$$p = \mathbb{P}(\tau = 1), \qquad 1 - p = \mathbb{P}(\tau = 0).$$

Proposition 3 ($\mu > 0$, une version facile)**.** *Pour de la PPP avec des temps de passage Bernoulli 0/1, si $1 - p < 1/4$, alors $\mu > 0$.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ petit (on le choisira plus tard), nous allons trouver $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(D_n \leq n\delta\right) \leq \exp(-cn), \tag{3}$$

et la Proposition en découlera, par Borel-Cantelli ou plus simplement parce que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[D_n] \geq \frac{1}{n}\mathbb{E}[D_n \mathbf{1}_{D_n \geq n\delta}] \geq \frac{1}{n} n\delta(1 - e^{-cn}) \to \delta.$$

Montrons (3) : dire que D_n est inférieur à $n\delta$, c'est dire qu'il existe un chemin auto-évitant $\vec{0} \to \vec{n}$ avec $\ell \geq n$ arêtes, dont le temps de passage est inférieur à $n\delta$. Par $\mathbb{P}(\cup) \leq \sum \mathbb{P}$, cela donne, en notant $\tau_1, \tau_2, \ldots$ des temps de passage Bernoulli indépendants,

$$\mathbb{P}\left(D_n \leq n\delta\right) \leq \sum_{\ell \geq n} 3^\ell \underbrace{\mathbb{P}\left(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta\right)}_{\text{compense le } 3^\ell\text{ ?}}.$$

Avec le Lemme suivant (pas optimal) c'est gagné :

Lemme (Inégalité à la Chernov)**.** *Si $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell$ sont des Bernoulli avec $1 - p \leq 1/4$, alors pour tout entier n et tout réel $\delta > 0$ on a*

$$\mathbb{P}\left(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta\right) \leq e^{3\delta n} \times 0,3^\ell.$$

On a en effet

$$\mathbb{P}\left(D_n \leq n\delta\right) \leq e^{3\delta n} \sum_{\ell \geq n} 0,9^\ell \leq c^{\text{ste}} e^{3\delta n} 0,9^n.$$

Si δ est assez petit, le terme de droite décroît exponentiellement vite vers zéro. □

Mini-mini-mini-cours d'inégalités de concentration

Je montre le Lemme. La technique, due à Chernov, est très utile. On utilise le fait que, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $u \mapsto \exp(-\lambda u)$ est décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta\right) = \mathbb{P}\left(e^{-\lambda \sum_i \tau_i} \geq e^{-\lambda n\delta}\right)$$

L'inégalité de Markov (iii) appliquée à la variable $e^{-\lambda \sum_i \tau_i}$ donne ensuite

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_\ell \leq n\delta\right) &\leq e^{\lambda n\delta}\mathbb{E}[e^{-\lambda \sum_i \tau_i}] \\ &\leq e^{\lambda n\delta}\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_1}]^\ell \\ &= e^{\lambda n\delta}(pe^{-\lambda} + (1-p))^\ell.\end{aligned}$$

Maintenant je choisis $\lambda = 3$, on a $pe^{-\lambda} + (1-p) \leq e^{-3} + 1/4 \leq 0,3$.

(iii). Pour une variable aléatoire Z positive et un réel $a > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{E}[Z]/a$.

4 Autres questions en PPP

Pour finir, je signale rapidement quelques problèmes historiques ou actuels en PPP. Pour plus de détails, je conseille [4].

Existence d'une forme limite

Pour revenir à la motivation initiale, on peut essayer de décrire l'évolution des grandes boules aléatoires
$$B_t := \left\{ x \in \mathbb{Z}^2, D(\vec{0}, x) \leq t \right\}.$$
Alors, si $\mu > 0$, il y a une sorte de loi des grands nombres pour B_t :

Théorème 3 (Richardson (1973), puis Cox-Durrett (1981))**.** *On suppose que τ est tel que $\mu > 0$ et que $\mathbb{E}[\min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}^2] < \infty$. Il existe alors un ensemble non vide $B^\star \subset \mathbb{R}^2$ compact convexe et déterministe tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,*
$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)B^\star \subset \frac{1}{t} B_t \subset (1+\varepsilon)B^\star, \text{ pour } t \text{ assez grand} \right) = 1.$$

Les outils principaux sont les suivants :

1. La convergence (2) peut en réalité s'écrire dans toutes les directions : pour tout $\vec{x} \in \mathbb{Z}^2$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(\vec{0}, n\vec{x})}{n} = \mu(\vec{x}) = \inf_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}[D(\vec{0}, n\vec{x})]}{n}.$$
2. On démontre que $\mu(.)$ peut se prolonger en une norme sur $\mathbb{Q}^2$, puis sur $\mathbb{R}^2$.
3. Un candidat pour $B^\star$ est alors la boule pour $\mu(.)$ de rayon 1. Pour le confirmer, il faut avoir une sorte de contrôle uniforme des distances : on montre que $\limsup_{|x|\to\infty} \frac{D(\vec{0},\vec{x})-\mu(x)}{|x|} = 0$.

Mais bien sûr, puisqu'on ne connaît jamais μ, on ne connaît jamais $B^\star$. On sait simplement que, chaque B_t ayant une loi invariante par symétrie axiale ou verticale, $B^\star$ est symétrique par rapport aux deux axes.

On attribue à Eden la conjecture suivante : pour des temps de passage exponentiels (c'est donc la version continue du modèle d'Eden présenté au tout début), $B^\star$ est une boule euclidienne. On pense aujourd'hui que ce n'est pas le cas, voir [6] : il y est montré que l'on va "trop vite" le long des axes : $\mu_d \approx \log(d)/d$.

μ comme fonction de τ

Dans la mesure où on ne sait calculer $\mu(\tau)$ pour aucune loi τ non triviale (sauf quand $\mu = 0$), on cherche à savoir si au moins elle dépend continûment de τ. C'est vrai sans aucune hypothèse :

Théorème 4 (Cox-Kesten (1981))**.** *Si (τ_n) est une suite de lois sur $[0, +\infty)$ convergeant faiblement vers τ, alors $\mu(\tau_n) \to \mu(\tau)$.*

Il y a même une notion d'ordre sur les lois τ qui rend $\tau \mapsto \mu(\tau)$ strictement croissante : si $\tilde{\tau}$ est strictement plus variable que τ alors $\mu(\tilde{\tau}) < \mu(\tau)$ (voir [13] pour la définition et le résultat optimal).

Fluctuations et Relation KPZ

Le problème ouvert le plus célèbre en percolation de premier passage est celui des fluctuations de D_n. Pour des raisons de classe d'universalité que je n'ai jamais vraiment comprises, il est acquis par la communauté que $\mathrm{Var}(D_n) \approx n^{2/3}$. Le meilleur résultat connu aujourd'hui est le suivant :

Théorème 5 (Benjamini-Kalai-Schramm [3] et Benaïm-Rossignol [2])**.** *Pour une grande famille de temps de passages discrets et continus,*

$$\mathrm{Var}(D_n) \leq c^{ste} \frac{n}{\log(n)}.$$

Les preuves reposent sur des inégalités fonctionnelles et de concentration dans des espaces produits. Pour la borne inférieure, Newman et Piza [14] ont démontré que, pour certaines lois, $\mathrm{Var}(D_n) \geq c^{\mathrm{ste}} \log(n)$.

Récemment, Chatterjee a réalisé une avancée très spectaculaire en démontrant rigoureusement un cas particulier de ce que les physiciens appellent la relation KPZ (celle de Kardar-Parisi-Zhang, pas l'autre). Cette relation relie l'exposant des fluctuations et l'*exposant de dispersion*. Si γ_n est le meilleur chemin $\vec{0} \to \vec{n}$ et $\mathrm{Haut}(\gamma_n)$ en est l'ordonnée maximale, alors

Théorème 6 (Relation KPZ en Percolation de Premier Passage, Chatterjee [5])**.** *Pour une grande famille de temps de passages continus, il est équivalent de démontrer que*

$$\mathrm{Var}(D_n) \approx n^{2/3} \quad \textit{et que} \quad \mathrm{Haut}(\gamma_n) \approx n^{2/3}.$$

Une conséquence d'un travail que nous avons réalisé avec A.-L.Basdevant et N.Enriquez [1] est que dans la percolation de premier passage sur un graphe de dimension 2 très particulier la variance est effectivement de l'ordre de $n^{2/3}$. Notre argument consiste à exprimer la quantité D_n comme une fonctionnelle d'un certain système de particules, le TASEP, dont on sait que la variance est en $n^{2/3}$.

PPP et modèles de compétition

On peut construire à partir de la PPP avec une loi τ continue un *modèle de compétition* sur $\mathbb{Z}^2$ entre deux couleurs (les "liquides" de tout à l'heure). Imaginons que $\vec{0}$ est colorié en bleu et $\vec{1}$ en rouge, on dit que $x \in \mathbb{Z}^2$ est bleu si

$$D(\vec{0}, x) < D(\vec{1}, x),$$

rouge sinon. Il y a clairement une probabilité positive que l'une des deux couleurs "perde" : elle n'occupe qu'une partie finie de l'espace (bleu a beaucoup de chances de perdre si, par exemple, chacune des 4 arêtes autour de $\vec{0}$ vaut plus de 10^{100}). On se demande s'il y a une probabilité positive de "match nul" : les deux couleurs survivent. Cela a été démontré par Häggström et Pemantle [8] pour la loi exponentielle, puis par Garet et Marchand [7] et Hoffman [10] pour d'autres lois continues.

Là aussi il y a beaucoup d'extensions possibles, notamment si l'une des couleurs avance plus vite que l'autre, voir [4].

Références

[1] A.-L. Basdevant, N. Enriquez, L. Gerin. Distances in the highly supercritical percolation cluster (2011). *Annals of Probability*, à paraître.

[2] M.Benaïm, R.Rossignol. Exponential concentration for first passage percolation through modified Poincaré inequalities. *Annales de l'IHP : Probabilités et Statistiques*, vol.44 (2008) n.3 p.544-573.

[3] I.Benjamini, G.Kalai, O.Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Annals of Probability*, vol.31 (2003) n.4 p.1970-1978.

[4] N.D. Blair-Stahn. First passage percolation and competition models (2010). `arXiv:1005.0649`.

[5] S.Chatterjee. The universal relation between scaling exponents in first-passage percolation. *Annals of Mathematics*, à paraître.

[6] O.Couronné, N.Enriquez, L.Gerin. Construction of a short path in high dimensional first-passage percolation. *Electronic Communications in Probability*, vol.16 (2011) p.22-28.

[7] O.Garet, R.Marchand. Coexistence in two-type first-passage percolation models. *Annals of Applied Probability*, vol.15 (2005) n.1A p.298-330.

[8] O.Häggström, R.Pemantle. First passage percolation and a model for competing spatial growth. *Journal of Applied Probability*, vol.35 (1998) p.683-692.

[9] J.M.Hammersley, D.J.A.Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. (1965) *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California*, Berkeley, Calif. p.61-110.

[10] C.Hoffman. Coexistence for Richardson type competing spatial growth models. *Annals of Applied Probability*, vol.15 (2005) n. 1B p.739-747.

[11] H.Kesten. *Aspects of first passage percolation*. École d'été de probabilités de Saint-Flour 1984, p.125-264, Lecture Notes in Math. 1180, Springer (1986).

[12] J.F.C.Kingman. Subadditive ergodic theory. *Annals of Probability*, vol.1 (1973) p.883-909.

[13] R.Marchand. Strict Inequalities for the Time Constant in First Passage Percolation. *Annals of Applied Probability*, vol.12 (2002) n.3 p.1001-1038 .

[14] C.M.Newman, M.S.T. Piza. Divergence of Shape Fluctuations in Two Dimensions. *Annals of Probability*, vol. 23 (1995) n.3 p.977-1005.

[15] J.M.Steele. *Probability theory and combinatorial optimization*. SIAM, Philadelphia (1997).