装订线 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2017～2018 学年第二学期考试试卷

考试科目:　热学　　　　　得分 ____________

学生所在系:__________ 姓名:__________ 学号:__________

可能要用到的常数、热力学关系和数学公式：$R=8.31J\bullet mol^{-1}\bullet K$；

$k=1.38\times10^{-23}J\bullet K^{-1}$；$N_A=6.02\times10^{23}mol^{-1}$；$(\frac{\partial U}{\partial V})_T=T(\frac{\partial P}{\partial T})_V-P$

$T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$；$dQ=-\kappa\cdot\frac{dT}{dx}\cdot dA$；$\frac{dp}{dT}=\frac{l}{T(V_2-V_1)}$；

1. 一个热容C为常数的物体，与温度为T_1的巨大热源形成热平衡。利用一可逆制冷机在物体和热源间工作，从物体吸热使其降温至T_2，向热源释放热量，

1）外界需对制冷机做多少功？

2）假设上述对制冷机做的功全部来源于ν摩尔单原子理想气体的准静态绝热膨胀过程，该过程使理想气体的体积增大至初态的八倍，求解理想气体的末态温度T_f。

3）第 2）小题中理想气体做功前后的熵差是多少？（共 18 分，3 小题分别是 8 分、7 分、3 分）

（请刘国柱老师检查一下）

解答：

1）物体放出热量$Q=C(T_1-T_2)$

物体的熵变为$\Delta S_a=\int_{T_1}^{T_2}\frac{CdT}{T}=C\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

热源的温度保持不变，其熵变是 $\Delta S_b=\frac{Q+W}{T_1}=\frac{C(T_1-T_2)+W}{T_1}$

上述过程可逆，物体、热源、可逆制冷机构成的总系统与外界绝热，总熵变为零，

即 $\Delta S=\Delta S_a+\Delta S_b+0=C\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)+\frac{C(T_1-T_2)+W}{T_1}=0$

得 $W=CT_1\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)-C(T_1-T_2)$

2）理想气体准静态绝热膨胀，温度从 T_i 变成 T_f，由热力学第一定律知，其内能的变化等于对外界所做的功，即

$$\Delta U=W=CT_1\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)-C(T_1-T_2)=\frac{3}{2}\nu R\left(T_i-T_f\right)$$

在绝热过程中理想气体状态参量满足泊松方程 $T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}\Rightarrow T_i=T_f\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma-1}$

热容比 $\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{C_V+\nu R}{C_V}=1+\frac{\nu R}{3\nu R/2}=1+\frac{2}{3}\Rightarrow\gamma-1=\frac{2}{3}$

因此 $T_i=T_f\left(8\right)^{2/3}=4T_f$

综合以上，可得 $T_f=\frac{CT_1\ln\left(T_1/T_2\right)-C(T_1-T_2)}{9\nu R/2}$

3）理想气体准静态绝热膨胀过程是等熵过程，熵差等于零。

2. 一颗孤立的岩石行星，位于远离其他恒星的星际空间。该行星由于自引力作用而呈球状，其半径为 R。行星内部明显分为两层岩石结构，在半径 $R/2$ 到 R 之间为 A 类岩石，密度为 ρ_1，导热系数为 κ_1；在 $R/2$ 以内为 B 类岩石，密度为 ρ_2，导热系数为 κ_2。B 类岩石由于含有某种放射性元素，具有恒定的单位质量热产生率 H (单位时间单位质量产生的热量)。试求该行星中心温度。假设行星内部已建立稳定的温度场，行星表面温度为 T_0。（共 12 分）

（请王慧元老师检查一下）

解：行星内部半径 $R/2$ 到 R 之间，从半径为 r 的球面向外传输的热量 Q

$$Q=-\kappa_1 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \qquad (1) \quad 1\text{分}$$

因行星内部已建立稳定的温度场，且 $R/2$ 到 R 之间无热量产生，Q 为常量且由行星内层产生

$$Q=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3\rho_2 H=\frac{\pi R^3}{6}\rho_2 H \qquad (2) \quad 1\text{分}$$

式(1,2)联立可得

$$-\kappa_1 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\frac{\pi R^3}{6}\rho_2 H \qquad (3)$$

积分可得

$$T=\frac{HR^3\rho_2}{24\kappa_1}\frac{1}{r}+C_1 \qquad (4) \quad 1\text{分}$$

又 $r=R$ 时 $T=T_0$，得上式中的积分常数为 $C_1=T_0-\frac{HR^3\rho_2}{24\kappa_1}\frac{1}{R}$， 1 分

$$T=\frac{HR^3\rho_2}{24\kappa_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+T_0 \qquad (5) \quad 1\text{分}$$

当 $r\le R/2$ 时，经过半径为 r 的球面向外传输的热量满足

$$Q(r)=\frac{4\pi}{3}r^3\rho_2 H=-\kappa_2 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \qquad (6) \quad 2\text{分}$$

积分可得

$$T=-\frac{\rho_2 H}{6\kappa_2}r^2+C_2 \qquad (7) \quad 1\text{分}$$

由于 $r=R/2$ 温度的连续性得上式中的积分常数为

$$C_2=\frac{HR^2\rho_2}{24}\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}\right)+T_0 \qquad (8) \quad 1\text{分}$$

从而

$$T=-\frac{\rho_2 H}{6\kappa_2}r^2+\frac{HR^2\rho_2}{24}\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}\right)+T_0 \qquad (9) \quad 1\text{分}$$

由上式得行星中心(r=0)温度$T(0)=\frac{HR^2\rho_2}{24}\left(\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_2}\right)+T_0$。2 分

3. 处于热力学平衡态的经典理想气体分子符合麦克斯韦速率分布，一个气体分子的能量处在ϵ与$\epsilon+d\epsilon$内的概率为$g(\epsilon)d\epsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{kT})^{3/2}\sqrt{\epsilon}exp(-\frac{\epsilon}{kT})d\epsilon$。现任取两个分子，

（1）试求两个分子的总能量$\epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2$处在$\epsilon$与$\epsilon+d\epsilon$之间的概率$\psi(\epsilon)d\epsilon$（提示：可以使用三角函数代换进行积分）;

（2）证明两个分子的总能量的平均值$\bar{\epsilon}=3kT$。（共 12 分）

解：

两个分子的总能量$\epsilon=\epsilon_1+\epsilon_2$处在$\epsilon$与$\epsilon+d\epsilon$之间的概率为

$$\psi(\epsilon)d\epsilon=\int_0^{\epsilon}d\epsilon_1 g(\epsilon_1)g(\epsilon-\epsilon_1)d\epsilon \quad (5)$$

$$=\frac{4}{\pi}(\frac{1}{kT})^3\int_0^{\epsilon}d\epsilon_1\sqrt{\epsilon_1(\epsilon-\epsilon_1)}\cdot exp(-\frac{\epsilon}{kT})d\epsilon=\frac{1}{2}(\frac{1}{kT})^3\epsilon^2 exp(-\frac{\epsilon}{kT})d\epsilon \quad (2)$$

利用（1）的结果，两个分子的总能量的平均值为

$$\bar{\epsilon}=\int_0^{\infty}\epsilon\psi(\epsilon)d\epsilon=\frac{1}{2}(\frac{1}{kT})^3\int_0^{\infty}\epsilon^3 exp(-\frac{\epsilon}{kT})d\epsilon=3kT \quad (5)$$

4. 压强为$0.101MPa$的水在$100°C$时沸腾，此时水的汽化热为$2.26\times10^6 J\cdot kg^{-1}$，单位质量的体积为$1.671m^3\cdot kg^{-1}$，求压强为$0.102MPa$时水的沸点。（共 8 分）

（请阮可青老师检查一下）

解：利用克拉柏龙方程$\frac{dp}{dT}=\frac{l_v}{T(v_g-v_l)}$，因$v_l<<v_g$可以忽略$v_l$。

由于压强差很小，$dp\approx p_2-p_1$，$dT\approx T_2-T_1$。

$$T_2 = T_1 + v_g T_1 \frac{p_2 - p_1}{l_v}$$
$$= (373.15 + 0.28)K$$
$$= 373.43K$$