人工智能基础习题课

第四次和第六次作业

13.8 在一年一度的体检之后，医生告诉你一个好消息和一个坏消息。坏消息是你在一种严重疾病的测试中结果呈阳性，而这个测试的精度为 99%（即当你确实患这种病时，测试结果为阳性的概率为 0.99，而当你未患这种疾病时测试结果为阴性）。好消息是，这是一种罕见的病，在你这个年龄段大约 10000 人中才有 1 例。为什么“这种病很罕见”对于你而言是一个好消息？你确实患有这种病的概率是多少？

记患病为事件A，检测结果为阳性为事件B，那么$P(B|A)=P(\bar{B}|\bar{A})=0.99$，$P(A)=0.0001$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}=\frac{0.99\times0.0001}{0.99\times0.0001+0.01\times0.9999}=0.009804$$

设$P(A)=p$，则：

$$P(A|B)=\frac{0.99p}{0.99p+0.01(1-p)}=\frac{0.99}{0.98+0.01/p}$$

$P(A|B)$与p成正比，所以“这种病很罕见”是一个好消息。

如果连续测两次都是阳性，患病的概率？

13.11 假设给你一只装有 n 个无偏差硬币的袋子，并且告诉你其中 $n-1$ 个硬币是正常的，一面是正面而另一面是反面。不过剩余 1 枚硬币是伪造的，它的两面都是正面。

a. 假设你把手伸进口袋均匀随机地取出一枚硬币，把它抛出去，并发现硬币落地后正面朝上。那么你拿到伪币的（条件）概率是多少？

b. 假设你不停地抛这枚硬币，拿到它之后一共抛了 k 次而且看到 k 次正面向上。那么现在你拿到伪币的条件概率是多少？

c. 假设你希望通过把取出的硬币抛掷 k 次的方法来确定它是不是伪造的。如果 k 次抛掷后都是正面朝上，那么决策过程返回 FAKE（伪造），否则返回 NORMAL（正常）。这个过程发生错误的（无条件）概率是多少？

a. 记拿到假币为事件A，正面朝上为事件B，$P(A|B)=\frac{\frac{1}{n}\times 1}{\frac{1}{n}\times 1+\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{n+1}$

b. K次正面朝上为事件C，$P(C|A)=1, P(C|\bar{A})=\frac{1}{2^k}$，把上面的B换成C即可得到结果$\mathrm{P(A|C)}=\frac{2^k}{2^k+n-1}$

c. “发生错误”就是指$\mathrm{P}(\bar{C},\mathrm{A})+P(C,\bar{A})=0+\frac{1}{2^k}\times\frac{n-1}{n}$

13.18 文本分类是在文档所包含的文本基础上，把给定的文档分配到固定类别集合中某一个类别的任务。这个任务中常常用到朴素贝叶斯模型。在这些模型中，查询变量是文档类别，“结果”变量则是语言中每个词是否出现。我们假设文档中的词的出现都是独立的，其出现频率由文档类别确定。

a. 准确地解释当给定一组类别已经确定的文档作为“训练数据”时，这样的模型是如何构造的。

b. 准确地解释如何对新文档进行分类。

c. 这里独立性假设合理吗？请讨论。

$$P_{post} = P(Y|X) = \frac{P(Y)\prod_{i=1}^{d} P(x_i|Y)}{P(X)}$$

a. 模型由先验概率P(category)和条件概率P(word i|category)组成。对于每一类来说，利用所有文档中的属于类c的那一部分文档，来近似估计P(category=c)。类似的，用属于类c的那一部分文档中包含w单词i的文档来近似估计P(word i=true|category=c)。

b. 当得到一个新文档时，根据新文档中包含的词来判断文档是否包含某个词$word_i$，最后来计算条件概率$P(category=c|\cdots,w_i\cdots,w_j,\cdots)$

c. 不合理。因为实际文档中上下文（context）的单词间存在关联性。

7.12 本习题将考察子句和蕴涵语句之间的关系。

a. 证明子句$(\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m \vee Q)$ 逻辑等价于蕴涵语句$(P_1 \wedge \ldots \wedge P_m) \Rightarrow Q$。

b. 证明每个子句（不管正文字的数量）都可以写成$(P_1 \wedge \ldots \wedge P_m) \Rightarrow (Q_1 \vee \ldots \vee Q_n)$的形式，其中 P 和 Q 都是命题符号。由这类语句构成的知识库是表示为**蕴涵范式或称科瓦尔斯基（Kowalski）范式**的。

c. 写出蕴涵范式语句的完整归结规则。

a. $(P_1 \wedge \cdots \wedge P_m) \Longrightarrow Q$ 等价于 $\neg(P_1 \wedge \cdots \wedge P_m) \vee Q$（蕴含消去）

$\neg(P_1 \wedge \cdots \wedge P_m)$ 等价于 $(\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m)$ （摩根律）

因此，$(P_1 \wedge \cdots \wedge P_m) \Longrightarrow Q$ 等价于 $(\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee Q)$

b. 一个子句会有一些正文字和负文字，先将它们排列成$(\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_m \vee Q_1 \vee \cdots \vee Q_n)$，然后设$Q$ 为 $Q_1 \vee \cdots \vee Q_n$，则同a可以得到，$(P_1 \wedge \cdots \wedge P_m) \Longrightarrow (Q_1 \vee \cdots \vee Q_n)$。

c. 对于原子语句p_i, q_i, r_i, s_i，其中$p_j = q_k$，

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \wedge \cdots \wedge p_j \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}_{n_1} \Longrightarrow r_1 \vee \cdots \vee r_{n_2} \\ s_1 \wedge \cdots \wedge s_{n_3} \Longrightarrow q_1 \vee \cdots \vee q_k \vee \cdots \vee q_{n_4} \end{array}}{(p_1 \wedge \cdots \wedge p_{j-1} \wedge p_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{p}_{n_1} \wedge s_1 \wedge \cdots \wedge s_{n_3} \Longrightarrow r_1 \vee \cdots \vee r_{n_2} \vee q_1 \vee \cdots \vee q_{k-1} \vee q_{k+1} \vee \cdots \vee q_{n_4})}$$

- 证明前向链算法的完备性

很容易看出，前向链接是**可靠**的：每个推理本质上是分离规则的一个应用。前向连接也是**完备**的：每个被蕴涵的原子语句都将得以生成。验证这一点的最简单方法是考察 *inferred* 表的最终状态（在算法到达**不动点**以后，不可能再出现新的推理）。该表对于在推理过程中参与推理的每个符号都包含 *true*，而所有其它的符号为 *false*。我们可以把该推理表看作一个逻辑模型；而且，*原始 KB 中的每个确定子句在该模型中都为真*。为了看到这一点，假定相反情况成立，也就是说某个子句 $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \Rightarrow b$ 在模型中为假。那么 $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ 在模型中必须为真，b 在模型中必须为假。但这和我们的假设，即算法已经到达一个不动点相矛盾！因而，我们可以得出结论，在不动点推理的原子语句集定义了原始 *KB* 的一个模型。此外，被 *KB* 蕴涵的任一原子语句 q 在它的所有模型中必须为真，尤其是这个模型。因此，每个被蕴涵的语句 q 必定会被算法推断出来。