中国科学技术大学

2018-2019 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　　　　得分：______

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：__________

（2019 年 1 月 10 日，半开卷）

一、(30 分。填空题每空 3 分，其余每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）**（是非）** 若马氏链 $X=\{X_n, n\ge 0\}$ 的初始分布 $\pi=\{\pi_j, j\ge 0\}$ 为其平稳分布，则：

(a) $\sum_{i\ge 0}\pi_i p_{i,j}^{(n)}=\pi_j, (j\ge 0, n\in N)$ （　　）；(b) X 为严格平稳过程（　　）

(c) $\pi_j=\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}, (i,j\ge 0)$ （　　）；　　(d) X 必有正常返状态（　　）。

（2）**（是非）** 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数？

(a) $R(\tau)=e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ （　　）；(b) $R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$（　　）；　(c) $R(\tau)=\frac{\sin\tau}{\pi\tau}$ （　　）

(d) $R(\tau)=\sigma^2 e^{i\lambda\tau}$ （　　）；　(e) $R(\tau)=\sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$ （　　）。（注：$\sigma,\lambda>0, i=\sqrt{-1}$）

（3）**（填空）** 设 X_1, X_2, X_3 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i), i=1,2,3$（指数分布），则 $X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布为（　　），概率 $P\{X_1=X_{(1)}\}$ 等于（　　）。

（4）**（填空）** 设 $\{N(t), t\ge 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程，W_k 为其第 k 个事件发生的时间，并设 $1\le k\le n, t>0$，则 $E\{W_k \mid N(t)=n\}=($　　$)$，$E(W_k)=($　　$)$。

二、(8 分) 假设汽车按强度为 λ 的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第 i 辆车以速度 V_i 行驶。假定诸 V_i（$i\ge 1$）为相互独立的正随机变量，有共同分布 F。试求在时刻 t 位于区间 (a,b) 内的平均汽车辆数。

三、**(15 分)** 设马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的转移概率为：

$$p_{0,j}=a_j>0,\ (j\ge 0)\quad p_{i,i-1}=1,\ (i\ge 1)$$

（1）证明该马氏链为不可约常返的，且为非周期；

（2）试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0，并据以回答：过程何时为正常

返？何时为零常返？

（3）在正常返时，试求该马氏链的极限分布：$\pi=\left\{\pi_j,\ j\ge 0\right\}$。

四、**（20分）** 设马氏链$\{X_n, n\ge 0\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（1）试讨论该马氏链的状态分类（即：分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返？）。

（2）试求过程由状态k出发而被状态j吸收的概率$f_{k,j}$，$(k=1,2;\ j=3,4)$。

五、(15分) 设A与Θ独立且分别服从均匀分布$U(0,1)$与$U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)\quad（t\in R，\ \omega_0\text{为非零常数}）$$

（1）证明$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数$S(\omega)$。

六、（12分） 设平稳过程$X=\{X(t),\ t\in R\}$（均值为0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

（1）试求X的协方差函数$R(\tau)$；

（2）问X的均值是否有遍历性？为什么？

（完）

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 1 月 10 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）： a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 是 ）。

（2）（每空 2 分）： a.（ 非 ）； b.（ 非 ）； c.（是 ）；d.（是）； e.（非）。

（3）（每空 3 分）（ $1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ），（ $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ）．

（4）（每空 3 分）（ $\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}/(k-1)!$ ），（ $\lambda t^2/2$ ）

二、（6 分）

若第 i 辆汽车于时刻 s(s<t)进入该公路，则 $P\{a<(t-s)V_i<b\}=F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})$，故第 i 辆车于时刻 t 位于区间 (a,b) 的概率 $p=\frac{1}{t}\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$，从而时刻 t 位于区间 (a,b) 内的平均汽车辆数为 $\lambda pt=\lambda\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$。

三、（16 分）

（1） 易证马氏链为不可约($p_{i,j}\ge a_j>0,\forall i\ne j$)、非周期($p_{0,0}^{(1)}=a_0>0$)，且 $f_{0,0}=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j=1$，故常返；

（2） 求得：$\mu_0=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_{n-1}$，显然，马氏链为正常返 $\Leftrightarrow \mu_0<+\infty$；

（3） $\pi_j=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k\ge j}a_k$，$(j\ge 0)$ 。

四、（20 分）

（1） 四类：$\{1\},\{2\}$ 均为瞬过类，$d(1)=\infty, d(2)=1$；$\{3\},\{4\}$ 为二遍历类（吸收态）。

（2） 设 T 为过程进入吸收态的时间，记 $f_{k,j}=P\{X_T=j\mid X_0=k\}$，$(k=1,2;\ j=3,4)$ 则有：

$$
\begin{aligned}
f_{1,3}&=P\{X_T=3\mid X_0=1\}=\sum_i P\{X_T=3\mid X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,3}+0.3\\
f_{1,4}&=\sum_i P\{X_T=4\mid X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,4}+0.2\\
f_{2,3}&=\sum_i P\{X_T=3\mid X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,3}+0.4\\
f_{2,4}&=\sum_i P\{X_T=4\mid X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,4}+0.4
\end{aligned}
$$

解得：$f_{1,3}=11/20, f_{1,4}=9/20, f_{2,3}=f_{2,4}=1/2$。

五、（16 分）

（1）
$$EX(t) = EAE\cos(\omega_0 t + \Theta) = 0$$
$$\gamma_X(t+\tau,t) = EA^2E\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]\cos(\omega_0 t+\Theta) =$$
$$= \tfrac{1}{2}EA^2E\{\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\Theta]+\cos\omega_0\tau\} = \tfrac{1}{2}EA^2\cos\omega_0\tau$$
$$= 4\cos\omega_0\tau = R_X(\tau)$$

故 $\{X(t),\ t\in R\}$ 为宽平稳。

（2）$R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 4\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$。

六、（12 分）

（1）$S(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12}e^{-2|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$。

（完）