P162 T3

用二阶 Runge-Kutta 公式, 取 $h=1$

$$\left\{\begin{array}{l}y_{n+1}=y_n+hk_2\\k_1=f\left(x_n,y_n\right)\\k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right)\end{array}\right.$$

$t=0$ 时，$p(0)=50976$

$t=1$ 时

$$k_1=bp(0)-kp(0)^2$$

$$k_2=b(p(0)+\frac{1}{2}k_1)-k(p(0)+\frac{1}{2}k_1)^2$$

其中 $b=2.9\times10^{-2},k=1.4\times10^{-7}$，则

$$p(1)=p(0)+k_2=52098.6696785913$$

类似可得

$$p(2)=53237.6375584020$$

$$p(3)=54392.7718300852$$

$$p(4)=55563.9231274979$$

$$p(5)=56750.9242568518$$

故五年后的人口数约为 56751。

P162 T8

对于三阶显式 Adams 公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}\left[23f\left(x_n,y_n\right)-16f\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+5f\left(x_{n-2},y_{n-2}\right)\right]$$

截断误差来自积分公式的近似误差，即

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=\int_{x_n}^{x_{n+1}}R(x)dx\\&=\int_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{y^{(4)}(\eta)}{3!}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})dx\\&=\frac{y^{(4)}(\xi)}{6}\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})dx\\&=\frac{y^{(4)}(\xi)}{6}\cdot\frac{9}{4}h^4\\&=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(\xi)\end{aligned}$$

P74 T2

(i)

$$x_{k+1} = \left(\frac{5x_k^2 + 19x_k - 42}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

令

$$\phi(x) = \left(\frac{5x^2 + 19x - 42}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

在 $x = 3$ 处

$$|\phi'(3)| < 1$$

故该迭代格式收敛。

(ii)

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{2x_k^3 - 5x_k^2 + 42}{5}}$$

因

$$|\phi'(3)| > 1$$

故在 $x = 3$ 处不收敛。

(ii)

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 - 5x_k^2 + 42}{19}$$

因

$$|\phi'(3)| > 1$$

故在 $x = 3$ 处不收敛。

T5 令

$$F(x)=x^n-a$$

牛顿迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}$$

取 $n=5,a=9,x_0=2$, 迭代

```
   2.00000000000000
   1.71250000000000        0.287500000000000
   1.57929082235757        0.133209177642430
   1.55278303901599        2.650778334158344E-002
   1.55184670518788        9.363338281074274E-004
请按任意键继续. . .
```

近似值为 1.5518467。

T7 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k^3-3x_k-2)(x_k-x_{k-1})}{(x_k^3-3x_k-2)-(x_{k-1}^3-3x_{k-1}-2)}$$

取 $x_0=1,x_1=3$

```
   1.00000000000000
   3.00000000000000
   1.40000000000000         1.60000000000000        -3.45600000000000
   1.68421052631579        0.284210526315789        -2.27525878407931
   2.23187710033605        0.547666574020265         2.42196317464224
   1.94949140812989        0.282385692206160       -0.439399473085182
   1.99285540620987        4.336399807998093E-002 -6.399543748593484E-002
   2.00024770294914        7.392296739266113E-003  2.229694697973628E-003
   1.99999881609453        2.488868546099976E-004 -1.065514081055596E-005
请按任意键继续. . .
```

根为 $x^*=1.999998816$。

T8

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ 3x^2 & -1\end{bmatrix}$$

迭代格式为

$$\begin{bmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_k\\ y_k\end{bmatrix}-J^{-1}(x_k,y_k)\begin{bmatrix}f(x_k,y_k)\\ g(x_k,y_k)\end{bmatrix}$$

得

```
  0.600000000000000        0.800000000000000
  0.919125683060109        0.560655737704918        0.319125683060109
  0.833417265720939        0.559252682215940        8.570841733916998E-002
  0.826087834352686        0.563605855734621        7.329431368253368E-003
  0.826031360794393        0.563624160685555        5.647355829263629E-005
请按任意键继续. . .
```

解为

$$x^*=0.82603\quad y^*=0.563624$$

补充：证明 Newton 迭代是二次收敛的。

课本 P65,66