Математический анализ.

Контрольная работа №1

Роман Гафиятуллин (192001-04)

04-1.1 Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1} =$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} =$
$= lim_{x\to\infty} \frac{3-0+0}{x-0+0} =$
$= lim x \to \infty \frac{3}{x} = \mathbf{0}$

б) $\lim_{x\to3} \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6} =$
$= \lim_{x\to3} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{2-\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} =$
$= \lim_{x\to3} \frac{2-3+1}{1-\frac{5}{3}+\frac{6}{9}} =$
$= \lim_{x\to3} \frac{2-3+1}{1-\frac{7}{3}} = \mathbf{0}$

в) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2} =$
//Домножаем на $(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})$
$= \lim_{x\to1} \frac{(5-x)-(3+x)}{x\cdot(1-x)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})} =$
$= \lim_{x\to1} \frac{2}{0} = \infty$

г) $\lim_{x\to0} \frac{3x\cdot tg(x)}{sin^2(x)} =$
$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{3x\cdot sinx}{cosx}}{sin^2x} =$
$// \lim_{x\to0} sinx \sim x$
$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{3x^2}{cosx}}{x^2} =$
$= \lim_{x\to0} \frac{3x^2}{x^2\cdot cosx} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$

д) $\lim_{x\to\infty} (\frac{2x+5}{2x-1})^{3-x} =$
$= \lim_{x\to\infty} (\frac{(2x-1)+6}{2x-1})^{3-x} =$
$= \lim_{x\to\infty} (1+\frac{6}{2x-1})^{3-x} =$
$= \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{3}})^{3-x} =$
$= \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{3-x} =$
$= \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{-3(\frac{x}{3}-1)} =$
$= \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{-3(\frac{x}{3}-\frac{1}{6})-\frac{15}{6}} =$
$= \lim_{x\to\infty} ((1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{-3} \cdot (1+\frac{1}{\frac{x}{3}-\frac{1}{6}})^{-\frac{5}{2}} =$
$= \mathbf{e^{-3} \cdot 1 = \frac{1}{e^3}}$

04-1.2 Даны комплексные числа. Необходимо: а) выполнить действия в алгебраической форме; б) найти тригонометрическую форму числа z и вычислить z^{20} ; найти корни уравнения $w^3 + z = 0$ и отметить их на комплексной плоскости.

а) $(\frac{3-i}{-2-6i})^3 = \frac{18-26i}{208-144i} = -\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{8}}$

б) $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$r_z = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = 2$$
$$\phi_z = arctg(\frac{Im(z)}{Re(z)}) = \frac{\pi}{3}$$

$$r_{z^{20}} = r_z^{20} = 1048576$$
$$\phi_{z^{20}} = \phi_z \cdot 20 \ mod \ 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$
$$Re(z^{20}) = r_{z^{20}} \cdot cos(\phi_{z^{20}}) = -524288$$
$$Im(z^{20}) = r_{z^{20}} \cdot i \cdot sin(\phi_{z^{20}}) = 524288\, i\sqrt{3}$$

04-1.3 Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера – Венна.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

04-1.4

а) в разложении $(x^k + y^p)^n$ найти члены, содержащие x^α,
если $k = 2, p = 1, n = 10, \alpha = 16$

$$(x^k + y^p)^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^k)^{n-i} (y^p)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (x^2)^{10-i} y^i$$

б) в разложении $(x+y+z+w)^m$ найти члены, содержащие x^γ,
если $m=9, \gamma=6$
$(x+y+z+w)^m =$

$= \sum \frac{m!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} w^{n_4} = \sum \frac{9!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} x^{n_1} y^{n_3} z^{n_3} w^{n_4} =$

Т.к. ищем только x^6, то $n_1 = 6$, а $n_1 + n_2 + n_3 + n4 = 9$.
Значит $n_2 + n_3 + n4 = 3$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

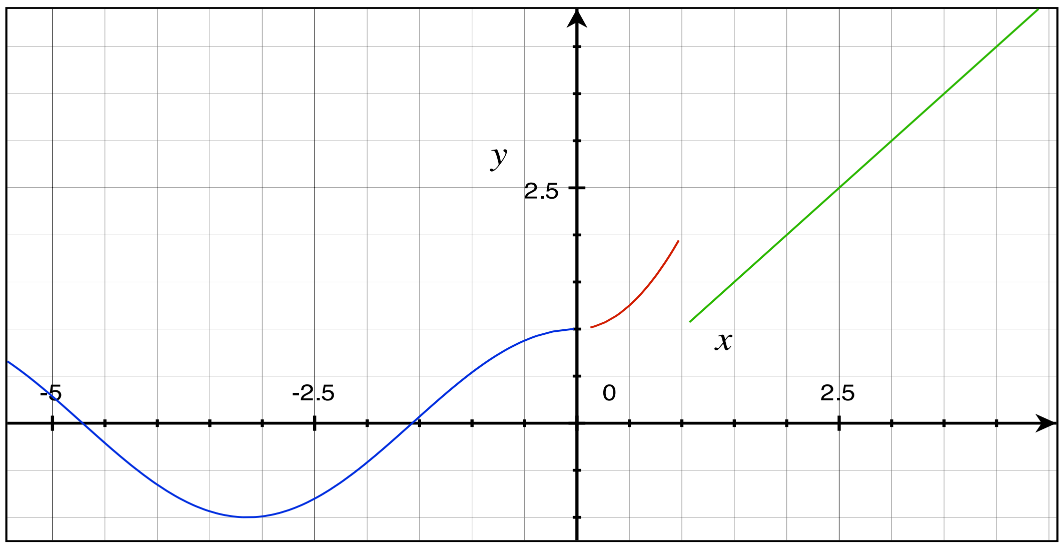
Члены разложения: $84x^6w^3, 84x^6y^3, 84x^6z^3,$
$252x^6yz^2, 252x^6yw^2, 252x^6zw^2,$
$252x^6y^2z, 252x^6z^2w, 252x^6y^2w, 504x^6yzw$

04-1.5 Задана функция $y = f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

$$y = \begin{cases} cosx, & x \le 0 \ ; \\ x^2+1, & 0 < x < 1 \ ; \\ x, & x \ge 1 \ . \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{r} cosx = 1, \, x = 0 \\ lim_{x\to 0+} x^2 + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Функция неразрывна при } x \in (-\infty; 1)$$

$$\left. \begin{array}{r} lim_{x\to 1-} x^2 + 1 = 2 \\ x = 1 \ \text{ при x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \text{Разрыв первого рода: функция определена в точке } x = 1, \\ \text{односторонний предел слева существует и конечен.} \end{array}$$


y
2.5
x
-5
-2.5
0
2.5