Математический анализ.

Контрольная работа №3

Роман Гафиятуллин (192001-04)

04-3.1 Найти неопределенные интегралы. В случаях а), б), в) результат проверить дифференцированием.

а) $\int \frac{dx}{sin^2x(2ctgx+1)} =$

$= \frac{1}{sin^2x(2ctgx+1)} =$

$//\frac{1}{sinx} = cscx$

$= \frac{csc^2x}{2ctgx+1} =$

$//u = 2ctgx + 1$

$//du = -2csc^2(x)dx$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du =$

$\int \frac{1}{u} = log(u)$

$= -\frac{log(u)}{2} + const =$

$//u = 2ctgx + 1$

$= \ -\mathbf{\frac{1}{2}log(2ctgx + 1) + const}$

б) $\int \frac{xarccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= \int x\sqrt{1-x^2}arccos(x)dx =$

$//u = arccos(x)$

$//du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int -usin^2(u)cos(u)du =$

$= -\int usin^2(u)cos(u)du =$

$//sin^2(u) = 1 - cos^2(u)$

$= -\int cos(u)(1 - cos^2(u))du =$

$= \int(u \cdot cos(u) - u \cdot cos^3(u))du =$

$= \int u \cdot cos^3(u)du - \int cos(u)du =$

$// \int fdg = fg - \int gdf$

$////f = u, dg = cos(u)du$

$////df = du, g = sin(u)$

$= -usin(u) + \int sin(u)du + \int u \cdot cos^3(u)du =$

$//u \cdot cos^2(u) = \frac{(cos(2u)+1)}{2}$

$= -usin(u) + \int sin(u)du + \frac{1}{2}\int u \cdot cos(u)(cos(2u) + 1)du =$

$= -usin(u) + \int sin(u)du + \frac{1}{2}\int(u \cdot cos(u) + u \cdot cos(2u)cos(u)du) =$

$//cos(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta))$

$//\alpha = u, \beta = 2u$

$= \ -usin(u) + \int sin(u)du + \frac{1}{4}\int(u \cdot cos(u) + u \cdot cos(3u))du + \frac{1}{2}\int u \cdot cos(u)du =$

$= -usin(u) + \int sin(u)du + \frac{1}{4}\int u \cdot cos(u)du + \frac{1}{4}\int u \cdot cos(3u)du + \frac{1}{2}cos(u)du =$

$// \int fdg = fg - \ \ gdf$
$//f = u, dg = cos(3u)du$
$//df = du, g = \frac{1}{3}sin(3u)$
$= -usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) - \frac{1}{12}\int sin(3u)du + \int sin(u)du +$
$+ \frac{1}{2}u \cdot cos(u)du + \frac{1}{4}\int u \cdot cos(u)du =$
$//s = 3u, ds = 3du$
$= -\frac{1}{36}\int sin(s)ds - usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) + \int sin(u)du +$
$+ \frac{1}{2}\int u \cdot cos(u)du + \frac{1}{4}\int u \cdot cos(u)du =$
$= \frac{cos(s)}{36} - usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) + \int sin(u)du +$
$+ \frac{1}{2}\int u \cdot cos(u)du + \frac{1}{4}\int u \cdot cos(u)du =$
$\frac{coss}{36} - \frac{3}{4}usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) -$
$- \frac{1}{4}\int sin(u)du + \int sin(u)du + \frac{1}{2}ucos(u)du =$
$= \frac{coss}{36} - \frac{1}{4}usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) + \frac{cosu}{4} - -\frac{1}{2}\int sin(u)du + \int sin(u)du =$
$= \frac{coss}{36} - \frac{1}{4}usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) +$
$+ \frac{cos(u)}{4} - \frac{1}{2}\int sin(u)du + \int sin(u)du =$
$= \frac{cos(s)}{36} - \frac{1}{4}usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) - \frac{cosu}{4} + const =$
$//s = 3u$
$= -\frac{1}{4}usin(u) + \frac{1}{12}usin(3u) - \frac{cosu}{4} + \frac{1}{36}cos(3u) + const =$
$//u = arccos(x)$
$= \mathbf{\frac{1}{9}(x^3 - 3(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot arccos(x) - 3x) + const}$

в) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2 + 2x - 2} =$
$= \frac{1}{6}(-log(x^2 + 2) + 2log(1 - x) - \sqrt{2} \cdot arctg(\frac{x}{\sqrt{2}})) + const =$
$= \frac{1}{3}\int \frac{-x-1}{x^2+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx =$
$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx =$
$= -\frac{1}{6}log(x^2 + 2) + \frac{1}{3}log(x - 1) - \frac{arctg\frac{x}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}} + const =$
$\mathbf{\frac{1}{6}(-log(x^2 + 2) + 2log(1 - x) - \sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}) + const}$

г) $\int \frac{x + \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}}dx =$
$= \mathbf{\frac{2}{15}\sqrt{x + 1}(5x + 9\sqrt[3]{x + 1} - 10) + const}$

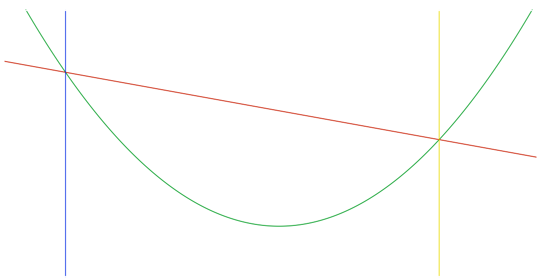
д) $\int sin^2x \cdot cos^2xdx =$
$= \mathbf{\frac{1}{32}(4x - sin(4x)) + const}$

04-3.2 Вычислить определенные интегралы.

$\int_0^1 \frac{5x+1}{x^2+2x+1}dx =$
$= \frac{4}{x+1} + 5log(x+1) =$
$= 2 + 5log(2) - (4 + 5log(1))$
$= \mathbf{5log(2) - 2 \approx 1.465}$

04-3.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

$x^2 - 6y = 0$
$x + 6y - 12 = 0$



$x = -4; y = 2 - \frac{x}{6};$
$x = 3; y = \frac{x^2}{6};$

Площадь образованной фигуры:
$\int_{-4}^{3} 2 - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{6}dx =$
$= \int_{-4}^{3} -\frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} + 2x = \frac{343}{36} \approx 9.52778$

04-3.4 Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_b^a f(x)dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок инегрирования на 10 частей. Все вычисления проводить с округлением до третьего десятичного знака.

$\int_0^{10} \sqrt{x^3 + 5}dx$

04-3.5 Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится.

$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x}} =$
$= -\lim_{b\to 1-0} \sqrt{1-x^2}|_0^b =$
$= -(0-1) = \mathbf{1}$