Геометрия и алгебра.
Контрольная работа №2

Роман Гафиятуллин (192001-04)

04-2.2 Исследовать на линейную зависимость над R систему векторов. Векторы указаны ниже в соответствии с вариантом.

$v_1 = 2$
$v_2 = sinx$
$v_3 = sin^2 x$
$v_4 = cos^2 x$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$
$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 sinx + \alpha_3 sin^2 x + \alpha_4 cox^2 x = 0$

$2\alpha_1 + \alpha_2 sinx + \alpha_3 sin^2 x + \alpha_4 cos^2 x = 0$

Дифференцируем по x
$0 + \alpha_2 cosx + 2\alpha_3 sinx \cdot cosx + 2\alpha_4 cosx(-sinx) = 0$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 cosx + 2\alpha_3 sinx \cdot cosx - 2\alpha_4 cosx \cdot sinx$

$$\begin{cases} x = 0^\circ \\ 2\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 90^\circ \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Векторы линейно зависимы

04-2.3 Найти координаты вектора x в базисе $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, если известны его координаты в базисе $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Разложения векторов $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ по базису $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ и координаты вектора x в этом базисе даны ниже в соответствии с вариантом.

$$\begin{cases} \vec{u_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \frac{3}{2}\vec{e_3} \\ \vec{u_2} = 3\vec{e_1} - 1\vec{e_2} \\ \vec{u_3} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} \end{cases}$$

$\vec{x} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 1\vec{e_3}$

Матрица перехода

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратная ей матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Преобразуем вектор $\vec{x}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

Ответ: $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ — $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$

04-2.4 Определить размерность над R и найти какой-нибудь базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений. Указать общее и частное решения системы. Системы уравнений даны ниже в соответствии с вариантами.

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ \;\; 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rankA = 1$

$dimV = n - rankA = 5 - 1 = 4$

$x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}x_3 \\ \\ x_3 \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_4 \\ \\ \\ x_4 \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_5 \\ \\ \\ \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$x_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \\ 1 \\ \\ \\ \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$dimV = 4$

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ \\ 1 \\ \\ \\ \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix}; V_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

04-2.5 Пусть $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$. Является ли линейными преобразование A? Координаты Ax даны ниже в соответствии с вариантом.

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3v_1 + 2v_2 + v_3 \\ v_3 \\ 2v_1 - 3v_2 - 4v_3 \end{bmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$

$$A[\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}] = \begin{bmatrix} \alpha x_3 + 3(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + \beta y_3 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \\ 2(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_2 + \beta y_2) - 4(\alpha x_3 + \beta y_3) \end{bmatrix}$$

$$\alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \begin{bmatrix} \alpha(3x_1 + 2x_2 + x_3) + \beta(3y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \\ \alpha(2x_1 - 3x_2 - 4x_3) + \beta(2y_1 - 3y_2 - 4y_3) \end{bmatrix}$$

$$A[\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}] = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$$

Ответ: преобразование является линейным.

04-2.6 Доказать линейность, найти матрицу в базисе i, j, k, область значений, ядро, ранг и дефект оператора. Преобразования трехмерного векторного про-странства над R указаны ниже в соответствии с вариантами.

Оператор: зеркальное отражение относительно плоскости OYZ.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$

$\alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \begin{bmatrix} -\alpha x_1 & \alpha x_2 & \alpha x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta y_1 & \beta y_2 & \beta y_3 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -\alpha x_1 - \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 & \alpha x_3 + \beta y_3 & \end{bmatrix} = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$

Ответ: Преобразование линейно.

Столбцы A линейно независимы, следовательно:

$rankA = 3; imA = R^3; dim(imA) = 3$
$kerA = ; dim(kerA) = 0$

04-2.9 Найти собственные значения и собственные векторы матрицы А. Матрицы А указаны в табл. 5 в соответствии с вариантами.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Характеристический многочлен:
$x^3 - 13x^2 + 55x - 75$

Действительные собственные значения:
$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Собственные векторы:
$\vec{e}_{1(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$\vec{e}_{2(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\vec{e}_{3(5)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$