第 19 课 行列式公式和代数余子式

> 上一节我们讲述了行列式的 10 个性质，根据这些性质，我们能够推导出行列式的一般求解过程。本节，我们将更加深入地讲解行列式公式和代数余子式，这两者都是求解行列式的方法。

行列式公式

在上一节中，我们已经提到了二阶行列式公式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$，但我们并没有多做任何解释。

学习了关于行列式的这么多性质，现在我们有能力推导二阶行列式公式了：

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix}a&0\\c&d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&b\\c&d\end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix}a&0\\c&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a&0\\0&d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&b\\c&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&b\\0&d\end{vmatrix}$$

$$\text{其中}\begin{vmatrix}a&0\\c&0\end{vmatrix} \overset{6,10}{=} 0,\quad \begin{vmatrix}a&0\\0&d\end{vmatrix} \overset{7}{=} ad,\quad \begin{vmatrix}0&b\\c&0\end{vmatrix} \overset{2,7}{=} -bc,\quad \begin{vmatrix}0&b\\0&d\end{vmatrix} \overset{6,10}{=} 0$$

$$\text{综上，}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix} = ad-bc$$

观察上面的推导过程，不难发现，**行列式的值等于使用性质 $3.b$ 分解后所得的那些非零行列式的和，所谓的非零行列式也即该行列式各行各列都有元素，故值不为零。**

带着这个重要发现，我们继续尝试计算三阶行列式。以同样的步骤，先保持第 2，3 行不变，将第 1 行进行拆分得到 3 个行列式，分别对这 3 个行列式的第 2 行进行拆分得到共 9 个行列式，再接着拆分这 9 个行列式的第 3 行，最终得到 27 个行列式，而我们只需要其中的非零行列式：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\0&0&a_{23}\\0&a_{32}&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\a_{21}&0&0\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}\\ &+ \begin{vmatrix}0&a_{12}&0\\0&0&a_{23}\\a_{31}&0&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&0&a_{13}\\a_{21}&0&0\\0&a_{32}&0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0&0&a_{13}\\0&a_{22}&0\\a_{31}&0&0\end{vmatrix}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

观察以上矩阵的拆分形式，容易发现，**n 阶行列式可以分解得到 $n!$ 个非零行列式（占据第 1 行的元素有 n 种选择，占据第 2 行的元素有 $n-1$ 种选择，以此类推即 $n!$）**：

$$\det A = \sum_{n!} \pm a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}\cdots a_{n\omega},\quad (\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\omega)=P_n^n$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\omega$ 共 n 个数是列标 1 到 n 的某种排列。上式即为一般的行列式公式。

我们再补充说明一下如何确定非零行列式的符号，考虑以下行列式：

$$\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}$$

使用行列式公式进行求解，剔除值为零的行列式。容易发现，α 只能为 3 或 4。选定 $\alpha=3$，则 $\beta=2,\gamma=1,\omega=4$；选定 $\alpha=4$，则 $\beta=3,\gamma=2,\omega=1$。我们只能找到两组非零行列式。

- 对于第一组非零行列式（图中蓝色部分），其对应的排列是 $(4,3,2,1)$，变为 $(1,2,3,4)$ 需要两步操作，由行列式性质 $2,10$ 可知符号应取 $+$。

- 对于第二组非零行列式（图中红色部分），其对应的排列是 $(3,2,1,4)$，变为 $(1,2,3,4)$ 需要一步操作，由行列式性质 $2, 10$ 可知符号应取 $-$。

通过统计当前排列变换到顺序排列 $(1,2,3,\cdots,n)$ 的操作数可以确定非零行列式的符号，但这种方法显然不实用，难以编程实现且当仅适用于行列式的阶数较小时。

一般我们用逆序数来判断非零行列式的正负号。逆序数就是从左到右遍历当前排列中的每一个数，统计右侧有几个数比自己小，比如对于排列 $(4,3,2,1)$，4 后面有 3 个数比它小，3 后面有 2 个数比它小，2 后面有 1 个数比它小，取其总和 $3+2+1=6$ 即为逆序数。**逆序数为偶数的，则称排列为偶排列，否则为奇排列，偶排列时非零行列式取 $+$，奇排列时非零行列式取 $-$。其中的道理在于奇排列做一次交换后即为偶排列，偶排列做一次交换后即为奇排列，初始顺序排列 $(1,2,3,\cdots,n)$ 为偶排列。**

代数余子式

> 接下来引入代数余子式的概念，它是另外一种求解行列式的方法，其作用是把 n 阶行列式化简为 $n-1$ 阶行列式。

回顾上面的 3×3 矩阵，我们已经得到了它的行列式公式：

$$\text{原式} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

略作改写易得：

$$\begin{aligned} &a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}) + a_{12}(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}) + a_{13}(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}) \end{aligned}$$

容易发现，3×3 的行列式由 2×2 行列式组成。事实上，**n 阶行列式同样可化为多个 $n-1$ 阶行列式的组合。**下面我们正式介绍**代数余子式**的概念：

- **改写中的括号部分就是代数余子式**，比如 $(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$ 就是 a_{11} 的代数余子式，$(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31})$ 就是 a_{12} 的代数余子式。
- **代数余子式 (cofactors) 是与选定元素配套的**，这也即 'co-' 的意思。
- **选定元素 a_{ij} 的代数余子式即为：将原行列式中的第 i 行和第就 j 列抹去后得到的 $n-1$ 阶行列式，再取正负（$i+j$ 为偶时取 $+$，$i+j$ 为奇时取 $-$），整个记为 C_{ij}：**

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot det(\text{去掉}i\text{行和}j\text{列的一个}n-1\text{矩阵})$$

基于代数余子式的概念，我们容易给出新的求行列式的公式：

$$\begin{gathered} \text{假设我们选取第一行（}i=1\text{），那么行列式}A\text{沿第一行展开有：} \\ det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n} \end{gathered}$$

到目前为止，我们学习了三种求解行列式的方法，总结如下：

- 消元，将矩阵化为三角矩阵，主元乘积记为行列式的值（最简单）
- 按照行列式公式将行列式完全展开，找到 $n!$ 种非零行列式，计算这些行列式的值的和（最复杂）
- 使用代数余子式对行列式进行降阶，展开得到更简单的行列式，然后再求解（介于二者之间）

下面我们举**由 1 组成的三对角矩阵**为例，来熟悉如何使用代数余子式求解行列式：

$$A_1 = 1, A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \cdots, \text{寻找其行列式值的规律}$$

对于 A_1 和 A_2 我们能够迅速求出其行列式（利用性质）： $A_1=1,A_2=0$。

对于 A_3 我们无法一眼看出答案，这里我们可以就 A_3 使用这种新方法：

$$\text{显然直接按第一行展开有：}A_3=1\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=0-1=-1。$$
$$\text{按第二行展开有：}A_3=-1\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1-1=-1。$$

注意到，按第二行展开时，我们的工作量会大一些，这与不等于 0 的 a_{ij} 的个数有关。这一点暗示我们，**在使用代数余子式求行列式时，应该尽量选取 0 元素多的行。如果各行 0 元素都很少，那么根据消元不改变行列式的性质（性质 5），我们可以先对矩阵进行消元，以得到 0 元素多的行，然后再使用代数余子式进行行列式的求解。**

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}\xrightarrow{row_2=row_2-row_3}\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}$$
$$\text{然后选取第二行展开有：}A_3=-1\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$$

同理，对于 A_4：

$$A_4=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix}\overset{\text{沿第一行展开}}{=}1\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=A_3-\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

需要补充说明的是，**使用代数余子式求行列式时我们可以按行展开，也可以按列展开（性质 10）**，比如上式中的 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}$，我们可以选取第一列展开（因为第一列 0 元素多），那么易得 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=A_2$。

综上，我们得到 $|\,A_4\,|=|\,A_3\,|-|\,A_2\,|=-1-0=-1$。**猜想由 1 组成的三对角矩阵的行列式值的规律可能正是 $|\,A_n\,|=|\,A_{n-1}\,|-|\,A_{n-2}\,|$，事实上，这确实就是由 1 组成的三对角矩阵行列式值的规律，这是由 1 组成的三对角矩阵的特殊结构所决定的。**

由此规律，易得 $|\,A_5\,|=0$，$|\,A_6\,|=1$，$|\,A_7\,|=1$，$|\,A_8\,|=0$，到这里我们发现：**由 1 组成的 n 阶三对角矩阵的行列式值从 1 阶开始按照 $1,0,-1,-1,0,1$ 循环，周期为 6。**