第 5 课 转置、置换和向量空间 R

> 本章介绍的主要内容包括**置换、转置和向量空间**。在最开始部分对置换矩阵给予介绍：包括**对于 LU 分解的扩展 $PA=LU$** 以及**置换矩阵的定义和性质**。然后介绍了矩阵的转置，并延伸介绍了**对称矩阵**的概念。后半部分的课程主要对**向量空间尤其是 R^n 及其子空间**进行了讲述（从 R^2 和 R^3 看出一定规律），最后引申出**列空间**的概念。

- **考虑消元过程中的行交换，可得到扩展有：$A=LU \to PA=LU$。后式对所有的可逆矩阵 A 都适用。**

  在前一讲中我们已经提到了，对于可逆矩阵 A，其在消元过程中可能出现主元为零的情况，此时需要进行行交换，而**行交换无非就是乘上一个置换矩阵而已**，矩阵 A 通过左乘多个置换矩阵变换成一个相当好的矩阵（也即在消元过程中不需要进行行交换），此时进行 LU 分解就没有任何问题了，而**这些左乘的多个置换矩阵的总乘积记为 P**。

- **置换矩阵是行重新排列了的单位矩阵。**

  - **这意味着置换矩阵显然必须是一个方阵，因为单位矩阵就是方阵，且单位矩阵也是一个置换矩阵（只不过单位矩阵不做任何行为）**
  - **$n \times n$ 阶的置换矩阵的个数：$n!=n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$**
  - **置换矩阵显然都可逆**。因为行交换是可逆的。**且有 $P^{-1}=P^T$。故 $P^TP=I$。**
- **对称矩阵：转置以后矩阵没有发生变化，也即 $A^T=A$**

  对称矩阵在实验中是经常会用到的。现在的问题是我们如何产生一个对称矩阵呢？**一个非常常用的方法是将矩阵的转置和其本身相乘（R^TR）**。其证明也相当简单：
  $(R^TR)^T=R^T(R^T)^T=R^TR$，显然 R^TR 是一个对称矩阵。

- **向量空间 R**

  > 在讲述这个概念之前我们必须要明确向量有什么运算。主要包括两种：**数乘和加法。如果我们将数乘和加法结合来看，可以用线性代数里的语言描述为线性组合。**

  我们可以对向量空间进行描述了：**向量空间必须对数乘和加法两种运算是封闭的，也即对线性组合封闭。**

  R^n 就是一个非常重要的向量空间。但有时候我们更加关注 R^n 内的向量空间，这些较小的向量空间既满足既定的规则，又无需包含所有向量，我们把这些向量空间称为子空间。

  现在我们把目光放到子空间上：如何找到向量空间里的子空间呢？我们可以从 R^2 和 R^3 出发，容易发现

  - **对于 R^2，我们能找到其子空间有：**
    - **R^2（即本身，R^2 最大的向量子空间）**
    - **任何过原点的直线**
    - **零向量空间（最小的向量子空间，其只包含零向量）**
  - **对于 R^3，我们能找到其子空间有：**
    - **R^3（即本身，R^3 最大的向量子空间）**
    - **任何过原点的平面**
    - **任何过原点的直线**
    - **零向量空间（最小的向量子空间，其只包含零向量）**

  由上我们可以发现 R^n 向量空间及其子空间的规律。

- **从矩阵中构造出子空间**

一种显而易见的方法是**通过列向量来进行构造：取出矩阵各列，然后线性组合，所有的线性组合就能构成一个子空间，我们一般把构造出的子空间称为矩阵的列空间，记为 $C(A)$。这是矩阵中我们提及的第一种重要的子空间。**