第 1 课 方程组的几何解释

> 第 1 课主要阐述了何为线性方程组的**行图像**和**列图像**，并**从列图像出发去理解线性组合**，最后基于线性组合提出并初步解答了一个重要的问题：**对任意 b，是否都能求解 $Ax = b$**

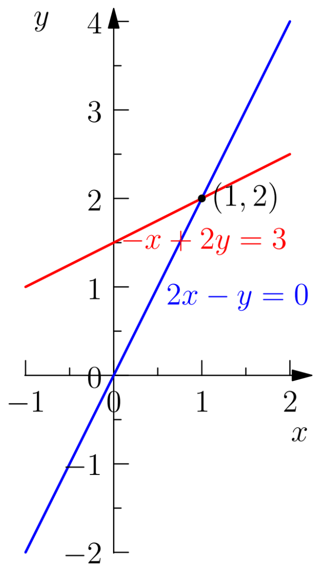
线性代数的基本问题是求解给定包含 n 个未知数的 n 个线性方程。举个例子：

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

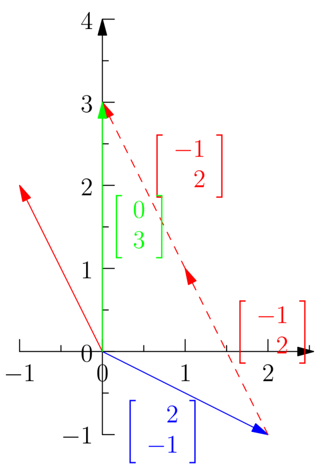
将其重写为矩阵和向量表示：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- `Row picture`（行图像）



- `Column picture`（列图像）$\to$ `Linear Combination`（线性组合）



从列图像的角度去理解线性组合，也即 Ax **就是对 A 的列向量进行 x 对应的组合（这种组合显然是线性的）**。于是**求解 $Ax = b$ 也即对于给定 b 是否能找到一种组合方式 x 使得能够将 A 的各列向量组合形成 b。**

- 一个重要的问题：

> 从代数的角度语言来讲：**对任意 b，是否都能求解 $Ax = b$？**

> 用线性组合的语言来讲：A **的列的线性组合是否能够覆盖整个** n **（n 为** b **向量的维数）维空间？**

显然，从线性组合的角度来看，该问题的答案和矩阵 A 的各列有巨大的关系。对于一个好的矩阵来说，上述问题的回答是："是"。**这样的好的矩阵是非奇异矩阵，是可逆矩阵。**

但对于其他矩阵，得到的答案可能是否定的，直观的例子是其中一个列向量是可以通过其他列向量的线性组合而得到的。**此时这样的不好的矩阵是奇异矩阵，是不可逆矩阵。**