第 13 课 复习一

> 本章是习题课，意在通过习题来对前十二课的内容进行回顾以作复习。

- 设 u, v, w 是 R^7 空间内的非零向量，它们生成了一个属于 R^7 的向量子空间，则此空间的维数是多少？

  由 3 个向量张成的向量空间，显然维数只可能是 $0, 1, 2, 3$ 中的其中一个。题中已经写明 u, v, w 这三个向量都是非零向量，所以维数会是 $1, 2, 3$ 中的其中一个。

- 有一个 5×3 的阶梯型矩阵 U，秩为 3，求该矩阵的零空间。

  由题可知该矩阵列满秩，所以不存在自由变量，于是矩阵的零空间将只有零向量。

- 给定 10×3 的矩阵 B，B 中含有矩阵 R 和 $2R$：$B = \begin{bmatrix} R \\ 2R \end{bmatrix}$（$R$ 是 RREF 型矩阵）。
  - 该矩阵的秩是多少，其 RREF 型矩阵是怎样的？

    这两个问题的求解都需要对 B 进行消元，消元可得：$B = \begin{bmatrix} R \\ 2R \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$，后者显然就是其 RREF 型矩阵，其秩即为 R 的秩（$rank(B) = rank(R)$）。

  - 设 $C = \begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix}$，其 RREF 型矩阵是怎样的？

    $$\begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -R \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

    化简到最后的 $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ 已经非常接近 RREF 型。但注意到，R 中可能存在零行，所以严格意义上还应当将 $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ 中 R 的下面的零行移到 $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ 整体的最下面，这样才最终得到标准的 RREF 型矩阵。

  - 设 R 的秩为 3，那么 C 的左零空间的维数是多少？

    本题等价于求 $dim(N(C^T))$。C 是一个 10×6 的矩阵，由于 R 的秩为 3，那么 C 的秩就为 6，所以 $dim(N(C^T)) = m - r = 10 - 6 = 4$。

- 已知：$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

  容易知道矩阵 A 应该是一个 3×3 的矩阵。
  - A 的秩是多少？

    由题可知，A 的零空间的维数是 2，这也即 $n - r = 2$，又因为 $n = 3$，所以矩阵 A 的秩为 1。

  - 矩阵 A 究竟是怎样的？

    假设 $c = d = 0$，那么有 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$，这也即 A 的第一列为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$。

    然后观察零空间的两个特解，有 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

    于是解得 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$。

    - 若 $Ax=b$ 有解，那么 b 应该满足何种形式?

      该问题等价于求解 A 的列空间，容易发现该矩阵秩为 1，也即只有一列对列空间有贡献。所以 b 应该满足以下形式：$b=c\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$。

- 如果一个方阵 A 的零空间只包含零向量，那么其左零空间呢?

  也只包含零向量。

- 所有的 5 阶可逆方阵是否构成向量空间?

  否。因为至少连零矩阵都不包含在内，所以肯定不是。

- **存在除零矩阵外，平方为零的矩阵吗?**

  存在，如 $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$**。**

- 方阵的各列线性无关，$Ax=b$ 是否总是有解的?

  方阵列满秩，显然总有解。

- 已知，$B=\overbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}}^{C}\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}}^{D}$。

    - B 的零空间

      首先知道的是，B 是一个 3×4 的矩阵，所以其零空间是 R^4 的子空间。

      我们先不直接进行乘积求出 B，容易发现 C 是一个可逆矩阵，那么对于 $Bx=CDx=0$，等式乘以 C^{-1} 有 $C^{-1}CDx=Dx=0$。这说明 B 的零空间只取决于矩阵 D，求解 B 的零空间等价于求解 D 的零空间。

      我们得到了一个重要的结论：**假设有矩阵 C,D，当 C 可逆时，那么 $N(CD)=N(D)$。**

      现求解 D 的零空间，容易发现可以直接使用前面介绍过的 RREF 型的知识。

      D 中有 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}$。所以 D 的零空间的基为 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$。

    - 求 $Bx=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 的通解。

      我们已经求出了 B 的零空间的基（也即 D 的零空间的基），所以现在只需要找出一个特解即可。

      观察整个矩阵 C 和矩阵 D 的第一列，容易发现 $C\cdot(col_1\ of\ D)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$。

      这也即 B 的第一列恰好就是 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$。于是我们立刻就找到了一个特解 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$。

      此题得解。

- **如果矩阵是方阵，是否意味着矩阵的行空间等于列空间?**

  错误，反例： $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$。

- **如果 A 和 B 的四个子空间相同，则 A 是 B 的倍数。**

  错误，任意同阶的可逆矩阵其四个子空间都相同，然而却不一定成倍数。

- 给定矩阵 A，交换其中的两行，哪些子空间没变?

  行空间与零空间没变。

- 为什么向量 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ 不能既是 A 的某一行，又在 A 的零空间中?

  直接代入方程 $Ax=0$ 就能知道为什么了。

  $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 \\ . & . & . \\ . & . & .\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2 \\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

  显然，上式不可能成立。

  实际上，**对于一个给定的矩阵，其行空间和零空间所共享的向量只有零向量，这涉及到了正交的概念，矩阵的零空间与行空间正交。**