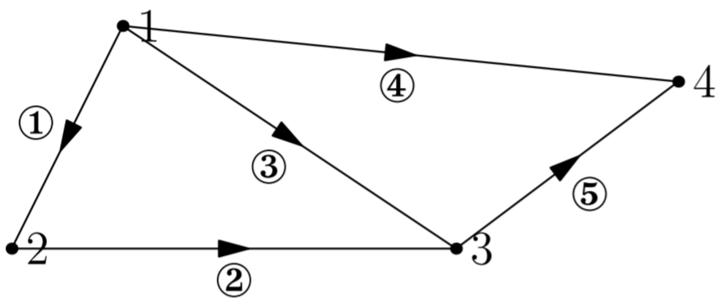
第 12 课 图和网络

> 本章着重于线性代数的应用。和前面的章节不同的是，本章中线性代数处理的矩阵都是有出处的，它们来自于实际问题，描述了问题的拓扑结构。**应用数学中最重要的模型，离散数学称之为”图“**。本章，我们将**探索图和矩阵之间的联系（关联矩阵）**，从**关联矩阵**中推导出**欧姆定律**、**基尔霍夫电流定律**、**欧拉公式**，并探究这三者之间的关系。

为探究图和矩阵之间的联系，我们先给出一个有向图（如下），4 个点（$n=4$），5 条边（$m=5$)。

该有向图可以来自于一个电路系统，也可以来自于一个液压系统，甚至表示一个建筑结构，但在本课中我们将其视为一个电路网络。



我们可以使用矩阵来表示一个图，矩阵中包含图中的所有信息。通过构造一个矩阵可以解析相应的图的含义，这样的矩阵叫做**关联矩阵**。**在关联矩阵中，每一列代表一个节点，每一行代表一条边（行中的正负代表方向）**。易得上（电路网络）图对应的关联矩阵 A 如下：

$$\begin{array}{cc} & \text{结点 1~4} \\ \text{边 1~5} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

观察关联矩阵 A 的第一行，第一行代表了电路网络图中边 1 的情况，在图中，边 1 以 点 1 作为起点，以点 2 作为终点，反映到矩阵上就是 $A_{(1,1)}=-1$，$A_{(1,2)}=1$，以此类推。

由图可知，边 1，边 2，边 3 组成了一个回路，而观察矩阵可发现，这三条边对应的矩阵中的前三行是线性相关的，其中行 $1+$ 行 $2=$ 行 3 。**这说明”回路”意味着“相关”，回路对应的行向量组是线性相关的，这是一个图与矩阵之间很巧妙的联系。**

关联矩阵源于问题，描述了问题的拓扑结构。**一般来说关联矩阵是一个非常稀疏的矩阵**，因为它的每行只有两个非零的元素，用于表示起点和终点。

> 我们已经从实际问题中抽象出相应的关联矩阵，现在我们试图去探究一些关于矩阵的主要问题。

矩阵 A 的零空间是什么？

该问题等价于求解 $Ax=0$。

$$Ax=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$Ax=0$ 的求解是简单的，但在给出答案之前，我们先引入上式的实际意义：**将 $x=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\end{bmatrix}^T$ 视为各结点的电势，比如 x_1 表示结点 1 的电势。于是，上式中诸如 x_2-x_1 的元素就相当于结点 2 与结点 1 这条边上的电势差。**

容易得出解为 $x=c\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}^T$，**这也即等电势情况，当 $b=0$ 时， 每个结点上的电势都必须相等。**

这代表了什么呢?

我们都知道，**电势差和电流的形成之间有着直接关系，$b=0$ ，说明我们求解的情况是各个边上都没有电流（或者说电势差）的情况，而我们最后所得到的解就意味着，当各点电势相等时，边上电流（电势差）为零，符合我们的常识。 而这就是零空间的物理意义。**

矩阵 A 的左零空间是什么?

该问题等价于求解 $A^Ty=0$。

$$A^Ty=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_1-y_3-y_4\\y_1-y_2\\y_2+y_3-y_5\\y_4+y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

求解前我们先引入上式中 y 的实际意义：**将 $y=\begin{bmatrix}y_1&y_2&y_3&y_4&y_5\end{bmatrix}^T$ 视为各边上的电流**。已知，**电流和电势差的关系服从欧姆定律：边上的电流值是边上电势差的倍数，这个倍速就是边的电导即电阻的倒数，通常我们把这个常数视为一个系数矩阵记为 C**。于是：

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}$$

然后我们观察 $A^Ty=0$ 中的方程，比如第一个方程 $-y_1-y_3-y_4=0$，这个方程是关于结点 1 上的电流的，方程指出结点 1 上的电流之和为零。

实际上， $A^Ty=0$ **阐述了基尔霍夫电流定律（Kirchoff's Current Law，简称 KCL），基尔霍夫电流定律是一个平衡方程，守恒定律，它说明了流入等于流出，电荷在结点上不会积累。**

现在，我们开始求解 y。对 A 进行消元可知 A 的秩 r 为 3。所以 A 的左零空间的维数为 $m-r=5-3=2$，这也即左零空间的基有两个向量。在这里我们不打算使用前面讲过的方法来求解左零空间的基向量，而是直接通过观察求解以发现一些有趣的事情。

假设 $y_1=1$，也即 $1A$ 的电流在边 1 上流动，那么由图（或者方程）可知 $y_2=1$。为符合基尔霍夫电流定律，那么只需再令 $y_3=-1$ ，也即让 $1A$ 的电流从结点 2 流回结点 1，此时令 $y_4=y_5=0$，即可得到一个符合 KCL 的向量 $\begin{bmatrix}1&1&-1&0&0\end{bmatrix}^T$。容易发现，该解发生在结点 $1\rightarrow2\rightarrow3$ 组成的回路中。

同理，我们也容易得到发生在结点 $1\rightarrow3\rightarrow4$ 组成的回路中的解 $\begin{bmatrix}0&0&1&-1&1\end{bmatrix}^T$，该解显然也符合 KCL。

注意到，这两个从最小回路得到的向量彼此线性无关，这两个向量所组成的向量组恰好就是 A 的左零空间的基。显然，**我们似乎找到了一种捷径去求解关联矩阵的左零空间：借助图中的最小回路可以快速求得左零空间的基（注意是最小回路，这样可以确保每个回路所得出的向量之间都是线性无关的，故我们也称线性无关的回路）。事实上，图中的最小回路数 = $dim(N(A^T))$ = $m-r$。**

最后，我们把视角放到结点 $1 \to 2 \to 3 \to 4$ 组成的大回路上，得到符合 KCL 的向量 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$，恰为上述两个基向量之和。

矩阵 A 的行空间是什么？这也即求 A^T 的列空间。

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在上文求 A 的左零空间时，我们已经知道 A 的秩 $r=3$，所以 A^T 的秩也为 3。对 A^T 消元可知，其列 $1,2,4$ 为主列。而在电路图中，这三列对应的三条边恰好是没有回路的，同时注意到列 $1,2,3$ 线性相关，在电路图中，这三列对应的三条边存在回路，于是可知，**线性相关/无关性与回路有关，线性相关等价于存在回路，线性无关等价于没有回路。**一般，**我们把没有回路的图称为树。**

通过探究矩阵 A 的行空间，**我们发现 A^T 的秩与图存在的联系：矩阵的秩为 r，则图中有 r 个线性无关的边，转换成图的语言那就是图中的 r 个边构成了该图的最大无回路（存在回路就线性相关）。**这里需要思考最大无回路的概念，**就连通图而言，如果该图存在 n 个结点，那么该图的最大无回路应该包括了 $n-1$ 条边，这条性质是很自然的，因为只要再多一条边，那么就会构成回路，从而线性相关。**于是，我们可以得到，**矩阵的秩 r = 图中的结点数 n 再减去 1。**

万事具备，现在我们可以引出**欧拉公式**了。已知：

$$\begin{aligned} dim(N(A^T)) &= m - r & (1) \\ dim(N(A^T)) &= \#loops & (2) \\ m &= \#edges & (3) \\ r &= \#nodes - 1 & (4) \end{aligned}$$

其中 $\#loops$ 为最小回路数，也即线性无关的回路数，$\#edges$ 为边数，$\#nodes$ 为结点数，将 (2) (3) (4) 代入到 (1) 中可得 $\#loops = \#edges - (\#nodes - 1)$，再整理即：

$$\#nodes - \#edges + \#loops = 1$$

这也即欧拉公式：$\text{结点数} - \text{边数} + \text{最小回路} = 1$

综上内容，我们画出**应用数学的基本方程的蓝图**：

$x = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^T$：各结点的电势 $\qquad$ $A^T y = 0\,(f=0)$：基尔霍夫电流定律

$\downarrow e = Ax \qquad\qquad \uparrow f = A^T y$

$x_2 - x_1$，等等：各边的电势差 $e \xrightarrow[\text{欧姆定律}]{y=Ce} y = \begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5\end{bmatrix}^T$：各边上的电流 y

上述三式是在**无外部电源**情况下的方程。

考虑添加外部电源的因素，那么电源可以通过**在边上加电压源**和**在点上加电流源**两种方式接入。

如果是在边上加电压源，那么会直接体现在 $e=Ax$ 的 e 中（边上两点的电势差改变了，e 中的分量会因此改变）。如果是在点上加电流源，那么会直接体现在 $A^Ty=f$ 的 f 中（点上的电流情况改变了，f 中的分量会因此改变）。

联立上述三个等式**可得** $A^TCAx = f$。需要注明的是，该方程作为一个平衡方程仅描述平衡状态，并没有考虑时间，牛顿定律不适用于此。