第 3 课 乘法和逆矩阵

> 第 3 课的主要内容是**矩阵乘法**和**逆矩阵**。矩阵乘法主要介绍了**矩阵乘法的多种求解方法**、**乘法的结合律**以及**能够相乘的条件**。逆矩阵主要介绍了**如何判断一个矩阵是逆矩阵**，最后顺带提及了**求解一个好矩阵（非奇异矩阵）的逆矩阵的方法**。

- 矩阵乘法 $AB=C$ 的 5 种求解方法：
  - **从元素的角度（A 的行乘以 B 的列）**

$$c_{ij}=(Row_i\ of\ A)\cdot(Col_j\ of\ B)=\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

  - **从列的角度（列的线性组合）：C 的各列是 A 中各列的一个线性组合，组合方式由 B 决定。**比如 C 的第一列是 A 中各列相对于 B 的第一列的一个线性组合。
  - **从行的角度（行的线性组合）：C 的各行是 B 中各行的一个线性组合，组合方式由 A 决定。**比如 C 的第一行是 B 中各行相对于 A 的第一行的一个线性组合。
  - **从矩阵的角度（A 的列乘以 B 的行）**

$$C=\sum_{i=1}^{n}(Col_i\ of\ A)\cdot(Row_i\ of\ B)$$

  - **从分块的角度：**其中 $C_1=A_1B_1+A_2B_3$

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{bmatrix}$$

- **行空间：也即行的所有可能的线性组合对应的向量空间**
- **列空间：也即列的所有可能的线性组合对应的向量空间**
- **逆矩阵分为左逆和右逆，对于方阵来说，左逆是等于右逆的，但对于非方阵来说，左逆不等于右逆。需要明确声明的是，这句话中的逆矩阵指的是广义逆矩阵。在线性代数范围的定义下，可逆矩阵一定是方阵。**
- 一个重要的问题：**如何判断一个矩阵是否有逆？**
  - 从**行列式**的角度：**行列式等于零，矩阵不可逆**
  - 从**列图像**的角度：**若矩阵 A^{-1} 存在，那么有 $AA^{-1}=I$，也即 I 的各列是 A 中各列的线性组合，如果 A 中的各列无法线性组合成 I 中的任何一列，那么矩阵不可逆**
  - **能否找到非零向量 x 使得 $Ax=0$。假设 $Ax=0$ 且 A^{-1} 存在，那么有 $A^{-1}Ax=A^{-1}0=0$，于是有 $A^{-1}Ax=Ix=x=0$，这也即逆矩阵存在则 x 必为零向量，若能找到非零向量 x 使得 $Ax=0$，则该矩阵必然不可逆。**
- **如何求解逆矩阵——使用高斯-若尔当思想，同时处理多个方程组**

$$E\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & A^{-1}\end{bmatrix}$$

  将 A 和 I 矩阵放到一起形成一个增广矩阵，E 矩阵也即总的消元矩阵，其能够将 A 行变换为 I，也即 $EA=I$。

  由 $EA=I$ 此可知 E 是 A 的逆矩阵 ($E=A^{-1}$)，又因为 $EI=E$，所以变换后的增广矩阵右侧自然就得到了逆矩阵。

  同时，**高斯-若尔当思想也告诉我们，如果矩阵 A 可以行变换化简成 I，那么显然 A 是一个可逆矩阵。**