第 20 课 克拉默法则、逆矩阵、体积

本节是关于行列式的最后一课，经过前两节课的努力，我们研究了行列式的性质，并从性质出发得到了行列式的求解方法。这一节我们将介绍行列式的应用，主要包含三个方面：**求逆矩阵**，**克莱姆法则**和**体积。**

求逆矩阵 A^{-1}

早在第三课，我们就已经介绍了求解逆矩阵的方法：高斯-若尔当求逆法。**高斯-若尔当求逆法对于数值计算无懈可击，但很难想象这是如何做到的，也许我们需要一个更直观的逆矩阵的代数表达式，这就用到了行列式的知识。**

我们先给出二阶逆矩阵公式：$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$，从 2×2 的情况中，我们能够看出一些端倪。

首先关注**公式的分母，其为行列式的值，也许一般逆矩阵公式其中一部分正是 1 除以矩阵的行列式，这一部分是合理的，因为只有当行列式的值不等于 0 时，矩阵才是可逆的。**

接下来的问题是，公式右边那一块矩阵是什么？从代数余子式的角度来考虑，左上角的 d 是原矩阵中 a 的代数余子式，右上角的 $-b$ 是原矩阵中 c 的代数余子式。**实际上，公式右边这一块矩阵就是由代数余子式组成的，为代数余子式矩阵 C 的转置，我们一般称其为伴随矩阵，记为 C^T。**

假设一般地，矩阵 A 的逆矩阵公式为：

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T$$

A^{-1} 是一个 $n\times n$ 的矩阵，$\det(A)$ 是 n 个元素乘积的组合（行列式公式），C^T 中各元素是 $n-1$ 个元素乘积的组合。

我们针对于特定的 2×2 情况找出一个等式，并从中归纳得到上式，但实际上，以上逆矩阵公式是否真的成立呢？对于 2×2 很好但对于 $n\times n$ 的情况是否成立呢？显然，我们需要进一步证明这个公式：

$$\text{已知}A\text{有逆矩阵，也即}AA^{-1}=I\text{，要证}A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T$$

$$\text{对逆矩阵公式两端同乘以}A\text{，易得}I=AA^{-1}=\frac{1}{\det(A)}AC^T$$

$$\text{化简有}AC^T=(\det A)I\text{，若该式成立那么原式成立}$$

$$\text{将化简结果写成矩阵形式有：}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{11}&\cdots&C_{n1}\\C_{12}&\cdots&C_{n2}\\\vdots&\ddots&\vdots\\C_{1n}&\cdots&C_{nn}\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}det(A)&0&\cdots&0\\0&det(A)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&det(A)\end{bmatrix}}^{D}$$

- 我们先来证明对角元素均为 $\det(A)$：

  对于这两个矩阵的乘积，观察其结果的元素 $D_{11}=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\cdots+a_{1n}C_{1n}$，显然这正是上一讲提到的将行列式按第一行展开的结果（我们需要对这种一个因子乘以一个代数余子式的形式足够敏感），所以 $D_{11}=\det(A)$。同理，对 $D_{22},\cdots,D_{nn}$ 都有 $D_{ii}=\det(A)$，对角元素均为 $\det(A)$ 得证。

- 然后我们再来证明非对角元素均为 0：我们把目光放到 D_{12} 上，易得 $D_{12}=a_{11}C_{21}+a_{12}C_{22}+\cdots+a_{1n}C_{2n}$，虽然知道公式，但我们仍无法求出 D_{12}。

  教授给了一种非常巧妙的思路：我们知道 $D_{22}=a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+\cdots+a_{2n}C_{2n}=\det(A)$，**那什么时候 D_{22} 会与 D_{12} 相等呢？显然，当 $a_{11}=a_{21},a_{12}=a_{22},\ldots,a_{1n}=a_{2n}$ 的时候，也即 A 中第一行和第二行相等的时候有， $D_{22}=D_{12}$。所以我们构造一个这样的矩阵 A_s 有：**

$$A_s=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  注意到 A_s 第一行和第二行相同，所以 $\det(A_s)=0$，所以 $D_{12}=0$。

  推广到 n 阶，元素 $D_{1i}=a_{11}C_{i1}+a_{12}C_{i2}+\cdots+a_{1n}C_{in}$，按照同样的办法，我们可以构造一个矩阵 A_s，该矩阵的第 i 行与第一行相同，所以 $D_{1i}=0$。使用这种思路，我们容易证得所有非对角元素都为 0。

综上，$AC^T=\det(A)I$ 得证，故 $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T$ 得证。

有了逆矩阵公式，我们能够清楚地看到，当改变原矩阵中的一个元素时，会给逆矩阵带来什么样的变化：$\det(A)$ 发生了变化，C^T 也发生了变化，总之这帮助我们理解原矩阵的变化对逆矩阵的影响。

克莱姆法则

我们现在有了逆矩阵的计算公式，所以对 $Ax=b$ 现在有：

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{\det(A)}C^Tb$$

更进一步地，我们考虑 x 的分量 x_i：

$$x_i=\frac{Row_i\ of\ C^T}{\det(A)}b=\frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

其中**矩阵 B_i 是向量 b 替代矩阵 A 的第 i 列所得到的新矩阵**，这也即克莱姆法则。

从 $(Row_i\ of\ C^T)\,b$ 到 $\det(B_i)$ 的具体过程解析如下：

先来观察 $x=\frac{1}{\det(A)}C^Tb$，我们将得到的解 x 拆分开来，**对 x 的第一个分量有 $x_1=\frac{y_1}{\det(A)}$，这里 y_1 是一个数值，其值为 $y_1=b_1C_{11}+b_2C_{21}+\cdots+b_nC_{n1}$。当我们看到数字与代数余子式乘之积求和时，都应该联想到求行列式，也就是说 y_1 可以看做是一个矩阵沿其中的 b 列而展开所得的行列式，我们设这个矩阵为 B_1，故有 $x_1=\frac{\det(B_1)}{\det(A)}$。**同理有 $x_2=\frac{\det(B_2)}{\det(A)}$，$x_3=\frac{\det(B_3)}{\det(A)}$ 等等。

由 y_1 的形式可知，b 不仅仅是 B_1 中的列，而且还是第一列，因此：

$$B_1=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

也即，将矩阵 A 的第一列变为 b 向量而得到的新矩阵。

我们也容易验证 $\det(B_1)=y_1$：沿第一列展开得到 $b_1C_{11}+b_2C_{21}+\cdots+b_nC_{n1}$。

一般地，**对于 B_i 有 $\begin{bmatrix}\mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \cdots & \mathbf{a_{i-1}} & \mathbf{b} & \mathbf{a_{i+1}} & \cdots & \mathbf{a_n}\end{bmatrix}$，即将矩阵 A 的第 i 列变为 b 向量而得到的新矩阵，所以对于解的分量有 $x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$。**

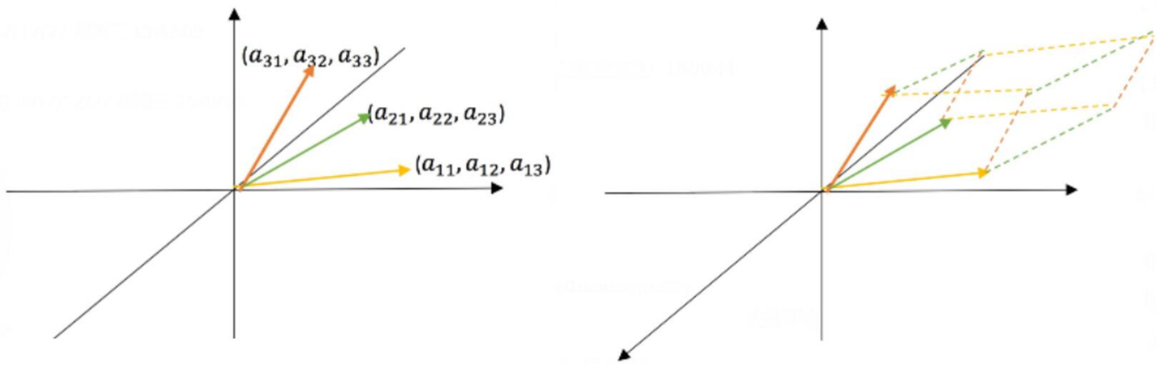
克拉默法则很漂亮，但它并不实用。若使用克拉默法则求解 $Ax = b$，那么我们**需要求出 $n+1$ 个矩阵的行列式**（n 个 B_i 矩阵，1 个 A 矩阵），相比我们之前介绍的消元的方法，**克拉默法则的计算量太大了。虽然克拉默法则不实用，但它提供了一个代数表达式，让你能代数运算而不只是写算法。**

行列式的几何意义 —— 体积

3 阶矩阵 A 的行列式的绝对值 $|\det(A)|$ 等于以矩阵 A 行（列）向量为边所构成的平行六面体的体积。行列式的符号正负对应左手系和右手系。

先给出命题：对于 3×3 矩阵，其行列式的绝对值等于一个箱子的体积。

来看三维空间中的情形，对于 3 阶方阵 A，取第一行 (a_{11}, a_{12}, a_{13})。令其为三维空间中点 A_1 的坐标，同理有点 A_2, A_3。连接这三个点与原点可以得到三条边，使用这三条边展开得到一个平行六面体，而 $|\det(A)|$ 就是该平行六面体的体积。



对于三阶单位矩阵 I，其体积为 $\det(I) = 1$，此时这个箱子是一个单位立方体。这其实也印证了前面学过的行列式性质 1。

基于这一点，于是我们想：**如果能够继续证明箱子体积具有行列式的三大基础性质，而三大基础性质定义了行列式，那么箱子体积就一定等于行列式。这是一个非常巧妙的间接证明的方法。**

接下来我们接着看体积是否具有行列式的性质 2 和 3。

首先**对于行列式性质 2，我们交换两行并不会改变箱子的大小，同时行列式的绝对值也没有改变，性质 2 得证。**

在验证性质 3 之前，我们先再取正交矩阵 Q 为例来研究其体积与其行列式的关系。

显然 3 阶正交矩阵实际上所形成的箱子也是一个单位立方体，只不过略有旋转。既然如此，那么箱子的体积显然是 1。那么 3 阶正交矩阵是否其行列式的绝对值也为 1 呢？

$$
\begin{aligned}
\text{已知对于正交矩阵（标准正交矩阵），有} \quad & Q^TQ = I \\
\text{等式两边取行列式易得} \quad & \det(Q^TQ) = 1 = \det(Q^T)\det(Q) \\
\text{又根据行列式性质 } 10 \text{ 有} \quad & \det(Q^T) = \det(Q) \\
\therefore (\det(Q))^2 = 1, & |\det(Q)| = 1
\end{aligned}
$$

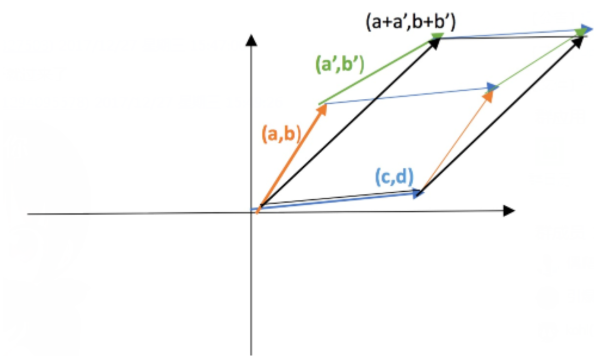
与体积相等，符合命题。

接下来在考虑不再是“单位”的立方体，即长方体。 假设 Q 矩阵的第一行翻倍得到新矩阵 Q'，此时箱子变为在第一行方向上增加一倍的长方体箱子，也就是两个“标准正交箱子”在第一行方向上的堆叠。易知这个长方体箱子是原来体积的两倍，而根据行列式性质 $3.a$ 有 $2\det(Q) = \det(Q')$，这说明**箱子体积也符合行列式的数乘性质。**

现在我们只剩下性质 $3.b$ 没有进行验证了。为方便，我们将在 2 阶矩阵上进行验证。

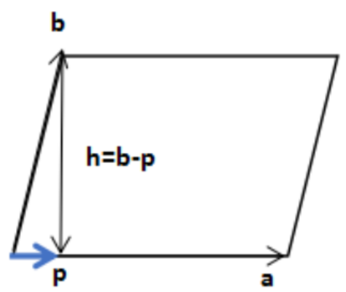
首先指出，**对于 2 阶矩阵，其行列式等于一个平行四边形的面积。**我们来看 2 阶方阵的情形。在二阶情况中，**行列式就是一个求平行四边形面积的公式**，原来我们求由四个点 $(0,0),(a,b),(c,d),(a+c,b+d)$ 围成的四边形的面积，需要先求四边形的底边长度，再作高得到高度来求解；而现在从线性代数的角度出发，令 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，**只需要计算** $\det(A)=ad-bc$ **即可（更加常用的是求由** $(0,0),(a,b),(c,d)$ **围成的三角形的面积，即** $\frac{1}{2}(ad-bc)$**）。**

那么 2 阶方阵的面积是否具有行列式的性质 $3.b$ $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ 呢？我们很容易从几何上看出这一点，如下图：



上图中，左右两边的三角形显然是全等三角形，故得证。

此外，采用底乘高方式求解平行四边形面积一样蕴含了性质 $3.b$：



如上图所示，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 围成的平行四边形的面积，等于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{h}$ 的长度之积，若写成行列式形式有 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$。由上面的内容可知该平行四边形的面积还可以是 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$ 的证明就用到了性质 $3.b$：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1-p_1 & b_2-p_2 \end{vmatrix}\overset{\text{性质}3.b}{=}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{由图可知}\mathbf{p}\text{与}\mathbf{a}\text{共线，彼此线性相关，故}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\text{因此}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}\text{，得证}$$

可以看到，底乘高方式计算平行四边形面积在行列式等于面积（体积）的命题中仍然是自洽的。

最后，我们再将行列式求解三角形面积的方法一般化。在一般情形下，由点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 围成的三角形面积等于 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ （第三列全为 1 反映了三点共面），计算时分别用第二行减去第一行，第三行减去第一行（这些操作实际作用是将三角形移动到原点 ），得到 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$，再按照第三列将行列式展开，得到三角形面积等于 $\frac{1}{2}((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))$。