# 第 9 课 线性相关性、基和维数

> 本章主要讲述了**向量组线性相关/无关**，**生成**，**基**和**维数**等概念，并额外介绍了如何**使用矩阵来判断向量组的线性相关性/无关性**。

在介绍**线性相关/无关，生成，基和维数**这些概念之前，我们首先要**明确这些词都是针对什么量**的：比如我们一般**会说向量组线性相关或无关，向量组生成一个向量空间，向量组作为某个向量空间的基**，而**不会说矩阵线性相关或无关（对于矩阵我们一般说秩或行列式），矩阵生成一个向量空间，矩阵作为某个向量空间的基**。最后需要声明的一点是，**这里讨论的维数的概念也并非值的是矩阵的维数，而是向量空间的维数。**

- **向量组线性相关/无关**
  - **对于向量组中的所有向量，如果不存在结果为零向量的线性组合（除了系数全部为零也即零组合的情况），那么向量组是线性无关的，否则向量组线性相关。**
  - **如果向量组里面包含了一个零向量，那么向量组必然线性相关。**
- **使用矩阵来判断向量组的线性相关性/无关性**

  > 给定向量组包括向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，将向量组中各向量作为列向量以形成一个矩阵，则有 $A = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$。

  对矩阵 $A$ 进行消元，得到矩阵的秩 $r$。

  - **如果矩阵列满秩 $r = n$，那么矩阵所有列都是主列，不存在自由列，自然也就不存在自由变量，此时零空间 $N(A)$ 只包含零向量，矩阵各列线性无关，于是，向量组线性无关。**
  - **如果矩阵没有列满秩 $r < n$，那么存在自由列，自然也就存在自由变量，此时零空间包含非零向量，矩阵各列线性相关，于是向量组线性相关。**

  这样**向量组的线性相关/无关性和矩阵的零空间就联系起来了。**

- **生成**

  **向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 生成一个向量空间的意思是：这个向量空间包含这些向量的所有线性组合。** 比如，考虑一个矩阵的列空间，找到矩阵的列的所有线性组合，就等于找到矩阵的列空间，所以我们也可以说，**矩阵的各列生成了列空间。**

  但需要注意的是，向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 可能是线性相关的，**我们最关心这样的向量组，既能生成相应大小的向量空间，本身又是线性无关的。** 这就带出了“基”的概念。

- **基**

  **向量空间的基本质上就是一个向量组，我们之所以额外地称这些向量组为基是因为其既有两个性质：**

  - **向量组中的向量线性无关**
  - **向量组中的向量能够生成相应大小的整个向量空间**

  **基具有重要的意义，如果需要确定一个向量空间，那么只需要把向量空间对应的基给出即可，向量空间对应的基包含了这个向量空间的全部有用信息。**

  - **$R^n$ 中的 $n$ 个向量要构成基， 那么以这 $n$ 个向量为列的 $n \times n$ 矩阵必须得是可逆矩阵。**
  - **标准基：向量空间对应的最明显的基，把每个基向量以一定顺序作为列向量，可以组成一个单位矩阵。**

- **维数**

  **对于某个特定的向量空间，其对应的基是无穷多个的，但这些基都有共同点：基所包含的向量（基向量）的个数是一定的。而这个确定的基向量的个数实际上就表示了向量空间的大小，我们一般称其为向量空间的“维数”。**

$$rank(A) = \text{主元列的个数} = \text{矩阵}A\text{的列空间的维数}$$
$$n - rank(A) = \text{自由列的个数} = \text{矩阵}A\text{的零空间的维数}$$