第 18 课 行列式及其性质

从这堂课开始，我们就进入了这门课的第二部分。迄今为止，我们已经学习了很多关于长方矩阵的知识，现在，把注意力转向方阵，探讨两个大的话题：行列式和特征值，**我们需要行列式的重要原因是求特征值。**

行列式是跟每个方阵都有关的数，每个方阵都有与其相关的行列式，我们一般记为 $\det A$，或者写作 $|A|$。

行列式最早是应用在用来判断方程组是否有解，在矩阵被发明后，行列式就拥有了更多的性质和应用。行列式是一个神奇的数，一个数很难告诉你整个矩阵是什么样子的，但**行列式把矩阵的尽可能多的信息就包含在其中**了。就比如，**矩阵可逆等价于行列式非零，行列式为零时矩阵是奇异的。**从另外一个角度来理解，**行列式从某种程度上代表了这个矩阵的特征，这是学习特征分解的前置概念。**

三个行列式基础性质

> 首先我们介绍三个行列式基础性质，这三个性质定义了行列式。

- **性质 1：对于单位矩阵 I，有 $\det I=1$。**
- **性质 2：交换行，行列式的值的符号会相反。**

  由上面的两个性质我们可以得到：之前学习的**置换矩阵的行列式的值为 1 或 -1**。例如：$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$。

  置换矩阵 P 具体的行列式值为 1 还是 -1，取决于行交换的次数：$\det P=\begin{cases}1 & even\text{（偶数）}\\-1 & odd\text{（奇数）}\end{cases}$。

接下来，我们要讲的内容可能有些会比较抽象，所以在这里先给出二阶行列式的公式，以便我们验证我们所讲的任何一个性质。

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$$

- 性质 3 是非常关键的，我们把它分为 $3.a$ 和 $3.b$：
  - 性质 $3.a$：**行列式按行提取出矩阵中的系数，也即** $\begin{vmatrix}ta&tb\\c&d\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$。我们可以用二阶行列式的公司来验证一下：$\begin{vmatrix}ta&tb\\c&d\end{vmatrix}=t(ad-bc)=t\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$。
  - 性质 $3.b$：**行列式是一个线性函数，但这个线性单独反映在每一行上，也即：** $\begin{vmatrix}a+a'&b+b'\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'&b'\\c&d\end{vmatrix}$。

    注意，性质 $3.b$ 说的**并不是** $|A+B|=|A|+|B|$，行列式的线性并不作用于整个矩阵上，而是只反映在每一行上，同样可以用二阶行列式来验证：$\begin{vmatrix}a+a'&b+b'\\c&d\end{vmatrix}=ad+a'd-bc-b'c=(ad-bc)+(a'd-b'c)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'&b'\\c&d\end{vmatrix}$

推导出的性质

> 关于行列式更多的性质可以从以上的三条性质中推导出来。

- 性质 4：**如果两行相等，那么行列式等于 0。**

这个性质容易用性质 2 证明，由于两行相等，故交换两行，矩阵没有发生任何变化，故行列式也不发生任何变化，交换发生行列式却没变号，那说明行列式只可能是 0 了。当然该性质也和有两个相等的行的矩阵是不可逆的这一事实相符。

- 性质 5：**从 k 行中减去第 i 行的 l 倍，行列式不变。**

  这条性质非常有用，它告诉我们，一个行列式未知的矩阵，消元得到其化简的形式，比如说上三角形式，**行列式并不因消元而改变。**

  举例：$\begin{vmatrix} a & b \\ c-la & d-lb \end{vmatrix} \overset{3.b}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -la & -lb \end{vmatrix} \overset{3.a}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - l\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \overset{4}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

- 性质 6：**如果方阵的某一行全为 0，那么其行列式值也为 0。**

  这个性质很好证明，我们可以使用性质 $3.a$ 来证明：$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$，行列式的两倍等于它本身，那说明行列式等于 0；我们也可以用性质 5，将某行加到零行，使方阵中存在相等的两行，然后根据性质 4 可知行列式等于 0。

接下来的性质是重点，前面的只是作为铺垫，引出这个性质。**我们可以通过消元法，把任何方阵化简为三角阵，这个三角阵的行列式等于多少，就是性质 7。**

- 性质 7：**上三角矩阵对应的行列式的值等于其对角线上元素的乘积。**

  有上三角矩阵 U 其行列式为 $U = \begin{vmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$，则 $\det U = d_1 d_2 \cdot d_n$。

  证明：使用性质 5，从最后一行开始，将对角元素上方的 $*$ 元素依次变为 0，则可以得到型为 $D = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$ 的对角行列式，再使用性质 3 将对角元素提出得到 $d_n d_{n-1} \cdots d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，再结合性质 1，得证。

  需要补充说明的是，**从矩阵 A 化简到 U 可能中间除了消元还有换行过程，故矩阵 A 的真正的行列式可能不与 U 的行列式同号，这是由行列式的性质 2 决定的。**

- 性质 8：**当且仅当 A 是奇异矩阵时，**$\det A = 0$**；当且仅当 A 不可逆时，**$\det A = 0$。

  性质 8 举足轻重。**如果矩阵可逆，则在化简为上三角形式 U 后各行都有主元，由性质 7 可知，此时 $|U|$ 必不可能为 0，又因为 $|A| = c|U|$（c 表示由行变换引起的换行），故 $|A|$ 也不可能为 0；如果矩阵是奇异矩阵，则化简为上三角形式 U 后会出现全零行，有性质 6 可知此时 $|U|$ 为 0，则 $|A|$ 为 0。**

我们可以验证一下，考虑二阶矩阵的情况，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{消元} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{vmatrix} = ad - bc$，此时求行列式的值，发现对角元素确实等于主元相乘。

前八个性质都是行列式自身的性质，接下来还有两个性质，但**任何性质都离不开消元法。**

- 性质 9：$\det AB = (\det A)(\det B)$。

  性质 9 是关于矩阵乘积的行列式。有意思的是，行列式不具备线性性质，不具备加法性质，但却具备乘法性质。

使用这一性质，我们就很好求得 A 的逆矩阵的行列式：$\det I = \det A^{-1}A = \det A^{-1} \det A = 1$，所以 $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$。

同时还可以得到 $\det A^2 = (\det A)^2$：矩阵平方的行列式等于矩阵行列式的平方。

此外还有 $\det kA = k^n \det A$：k 为常数，A 为 n 阶的矩阵，这里相当于提出了每一行的 k，这个式子就像是在求体积一样。

性质 9 我们可以从对角矩阵出发来给与一个较为粗略的证明：假设 A 和 B 都是对角矩阵，那么 AB 显然也是一个对角矩阵。

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

而对角矩阵其行列式就等于对角元素之乘积，所以 $det(AB) = a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdot ... \cdot a_nb_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n) \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n) = det(A)det(B)$。**就对角矩阵而言，性质 9 得证。**

实际上，通过消元，大部分矩阵可转化为对角矩阵，而在消元过程中行列式并不会变化，所以性质 9 的适用性进一步扩大。

关于性质 9 的完整证明可参考 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 有简单证法吗？ - 王赟 Maigo的回答 - 知乎

- 性质 10： $\det A^T = \det A$。

  前面一直在关注行的属性给行列式带来的变化，有了这条性质，行的属性同样适用于列，比如对性质 2 就有“交换列，行列式变号”。

  证明：将矩阵化为 LU 的形式有：$A^T = U^T L^T$，$A = LU$。那么由性质 9 可得 $|A^T| = |U^T L^T| = |U^T||L^T|$，$|A| = |LU| = |L||U|$，又因为 L, U 的行列式并不因为转置而改变，于是得证。这个证明虽然很简洁，但是理由却很充分。

最后我们来补充介绍一些关于置换的概念。**任何一种置换都可区分奇偶。**

对于一个矩阵，我通过 7 次换行得到一种置换，那么同样可以通过 21 或 23 次换行得到甚至是 101 次的，不管具体是多少但这个置换一定是奇数次的而不会是偶数次的。

对于一个给定的矩阵，如果该矩阵是可逆的，那么该矩阵 7 次行交换的结果，绝对不会与 10 次行交换的结果相同。**这种置换的奇偶区分意味着行列式性质二是严谨且正确的，同时意味着行列式可以被严格定义。**