# 第 2 课 矩阵消元

> 第 2 课的主要内容是**消元法**的介绍。前半部分主要介绍了**消元法的具体操作**以及**消元法成功条件（对矩阵 $A$ 有一定要求）**。后半部分主要讲述**使用矩阵乘法的观点来表示消元操作**，顺带提及了用于矩阵行置换的**置换矩阵**和**逆矩阵**。

**消元法不总是奏效的，其是否奏效取决于矩阵是否是一个好矩阵。**不好的矩阵在消元时会出现**主元的位置被零占据且通过行置换也无法解决该问题**的情况。

换句话说，**消元失效指的是不能得到 n（矩阵行数）个主元，于是矩阵也因此变得不可逆。**

- 右侧向量 $b$ 是不是在消元过程中也要考虑（也即**形成增广矩阵一起参与矩阵消元的行变换过程**）
  - 平时计算当然可以形成增广矩阵一起考虑。
  - 但就 `MATLAB` 而言，`MATLAB` 一般在消元过程中不考虑右侧向量 $b$，而是在消元过程完成后（也即**矩阵从 $A$ 变为 $U$ 后**），再对右侧向量进行处理（**使用消元矩阵进行左乘，消元矩阵本身能够表示消元过程中的所有消元操作**）。

    之所以这样做是有道理的，**这样的做法能够在某种场景下大量简化计算量：对于矩阵 $A$，给出大量不同的右侧向量 $b$ 进行 $x$ 的求解，此时只要我们算出了消元矩阵，那么只需要对不同的 $b$ 直接进行左乘处理，而不是一个个都与 $A$ 形成增广矩阵进行处理，后者不仅浪费时间还浪费空间。**
- **列的线性组合与行的线性组合**

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

  给定如上矩阵 $A$，那么**对其进行列的线性组合是右乘一个列向量**：

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=3\times\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}+4\times\begin{bmatrix}b\\e\\h\end{bmatrix}+5\times\begin{bmatrix}c\\f\\i\end{bmatrix}$$

  **对其进行行的线性组合是左乘一个行向量**：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}+2\times\begin{bmatrix}d & e & f\end{bmatrix}+3\times\begin{bmatrix}g & h & i\end{bmatrix}$$

以上其实已经涉及到了线性代数的核心概念了：**分别使用行（左）和列（右）进行矩阵操作。**

了解了行的线性组合以后，理解消元矩阵就非常简单了：**一个指定位置的消元不过是一次行的线性组合**

此外，我们还可以从行的线性组合的角度来理解置换矩阵和逆矩阵：

- **置换矩阵**
  - **行置换**

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}$$

    置换后的第一行为 0 个初始第一行 + 1 个初始第二行，置换后的第二行为 1 个初始第一行 + 0 个初始第二行。行置换属于行操作，故左乘。
  - **列置换**

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}$$

置换后的第一列为 0 个初始第一列 + 1 个初始第二列，置换后的第二列为 1 个初始第一列 + 0 个初始第二列。列置换属于列操作，故右乘。

- **从矩阵变换的角度理解逆矩阵**：比如消元过程中的行变换，我们如何撤回一个行变换呢？

  对于一个 $3 \times 3$ 的 矩阵 $A$，当我们左乘一个 $E$ 矩阵

  $$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

  就表示对 $A$ 进行一次行变换，具体变换操作是将 $-3$ 倍的第一行和第二行相加得到新的第二行，其中第一行和第三行保持不变。我们如何撤销这次行变换呢？

  已知 $IA = A$，所以如果存在矩阵 $C$ 使得 $CE = I$，那么 $CEA = IA = A$， 也即这次行变换就被撤销了，这样的 $C$ 矩阵我们称为逆矩阵，一般记为 $E^{-1}$。对于上面给出的 $E$，有 $E^{-1}$ 使得

  $$E^{-1}EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = IA = A$$

  综上，**就矩阵变换而言，一个用于行变换的矩阵其逆矩阵可用于撤销这次行变换。**