第 6 课 列空间和零空间

> 本章主要介绍了**列空间**和**零空间**。首先，探讨了**关于子空间的并和交是否依然是一个子空间**。然后我们开始探讨列空间中**列空间的大小问题**。最后我们学习了零空间，并**对零空间是向量空间这一事实给予了证明**。

- 考虑**子空间的并和交**：

  假设**取某个向量空间的两个子空间 P 和 L**，那么：

  - 关于它们的并 $P\bigcup L$ 是子空间吗？**显然，两个子空间的并，不一定是子空间**
  - 关于它们的交 $P\bigcap L$ 是子空间吗？是的。实际上，**对于任意两子空间的交集都是子空间。**这一点很好证明：

$$
\begin{gathered}
\text{我们假设存在子空间}S\text{和}T\text{，存在向量}v,w\text{且}v,w\in S\bigcap T\\
\because v\in S\bigcap T, w\in S\bigcap T\\
\therefore v\in S, w\in S, v\in T, w\in T\\
\therefore v+w\in S, v+w\in T\\
\therefore v+w\in S\bigcap T\\
\text{加法封闭证闭。}\\
\text{假设存在任意常数}k\text{，显然有}\\
kv\in S, kv\in T\\
\therefore kv\in S\bigcap T\\
\text{数乘封闭证闭。}
\end{gathered}
$$

- **对于一个矩阵 A ，其列空间由其各列的所有线性组合构成。**
- 在我们探究矩阵的列空间的大小时，我们不可避免地又遇上了那个问题：$Ax=b$ **是否对任意 b，都有解？**换句话说，**什么样的 b 使方程组有解？**

  现在在学习了列空间的概念以后，我们可以更加具象地回答这个问题了：$Ax=b$ **有解，当且仅当右侧向量 b 属于 A 的列空间。只有当 b 是 A 的各列的线性组合时，$Ax=b$ 才有解。**
- **矩阵的列空间的大小和矩阵的各列的线性无关性有关系**，换句话说，**如果矩阵各列中有越多的列线性无关，那么矩阵的列空间的大小就越大（我们可把线性无关的列理解为真正对列空间的扩大具有贡献的列，而线性相关的列可以通过其他列的线性组合而得到，所以其无贡献于列空间扩大。）**
- **零空间**

  > 我们已经学习了矩阵 A 的列空间，下面我们学习 A **的零空间，这是从矩阵来构造子空间的又一种方式。矩阵 A 的零空间由所有使得 $Ax=0$ 成立的 x 组成。注意我们这里要求 $b=0$**

  - 可以发现，**零空间显然包含零向量。**
  - **零空间是向量空间**，这一点是非常显而易见的：
    - 如果 $Av=0$ 和 $Aw=0$，那么显然 $Av+Aw=A(v+w)=0$，对加法封闭。
    - 如果 $Av=0$，那么显然 $A(kv)=k(Av)=k\cdot 0=0$，对数乘封闭。
  - **零空间和零向量空间是不一样的，零向量空间只包含一个零向量，而零空间可包含无数个向量。**
  - 通过要求 $b=0$ ，我们发现对于 x 的求解可以找到一种向量空间（子空间）。

    现在我们设 $b\neq 0$，那么对于 x 的求解是否能够找到一种向量空间呢？显然答案是不能，因为若 $b\neq 0$，那么 x 就不能等于 0，连零向量都不包含，显然 x 的解的集合不会是一种向量空间。向量空间必然包含零向量！