第 11 课 矩阵空间、秩 1 矩阵和小世界图

> 本章内容可分为三部分：第一部分延续上节课的内容，**把向量空间的定义从向量扩展到矩阵和微分方程**，第二部分介绍**秩 1 矩阵**，第三部分简单讲述了**图的概念和图与矩阵之间的联系**。

我们接着探究上一节课提到的矩阵空间的概念。我们仍然讨论所有的 3×3 矩阵这样的矩阵空间，记之为 M。

对于 M，很容易找到其子空间，比如所有的上三角矩阵（记为 U）以及所有的对称矩阵（记为 S）等等。

- **所有的对称矩阵所组成的矩阵空间 S 其维数为 6。容易找出 S 的 6 个基**：
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$
- **所有的上三角矩阵所组成的矩阵空间 U 其维数为 6。容易找出 U 的 6 个基**：
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

将 S 和 U 两个子空间相交，容易得到 M 的另外一个更小的子空间：

- **所有的对角矩阵（记为 D），其维数是 3。容易找出 D 的 3 个基**：
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

在前面的课程中我们已经知道，两个子空间的并集并非是向量空间。现在我们不谈并集，我们谈和（再次强调，这里的和与并集不是一个概念！），因为**两个向量空间的和是一个向量空间**，在此例中将其记为 $S+U$。

$S+U$ 也即任意 S 中的元素（任意对称矩阵）加上任意 U 中的元素（任意上三角矩阵）所组成的一个矩阵空间，容易看出来这个所组成的矩阵空间实际上就是 M，故 $S+U$ 的维数为 9。

显然，$S+U$ 和 $S\bigcup U$ 是不同的，$S\bigcup U$ 只包含了 S 和 U，而 $S+U$ **包含的是 S 中元素和 U 中元素的线性组合（这样的线性组合显然包含了 S 和 U，也即 $(S\bigcup U)\subseteq(S+U)$）。**

联系上面所有向量空间的维数，有这么一个等式：

$$\begin{matrix}dim(S)+dim(U)=dim(S\bigcap U)+dim(S+U)\\ 6\quad+\quad 6\quad=\quad 3\quad+\quad 9\end{matrix}$$

同样的**"向量空间"的概念还能进一步扩展，空间内元素不局限于向量和矩阵，其还可以是微分方程的解。**

例如，求解如下微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

只考虑实数范围，我们容易找到这个微分方程的解有：$y=sinx$ 和 $y=cosx$。实际上，所有 $sinx$ 和 $cosx$ 的线性组合，也即 $c_1sinx+c_2cosx$ 都是该微分方程的解。而**该微分方程的所有解的集合实际上就可以看做是一个"向量空间"**，我们可称其为解空间，解空间中的元素是解（而非向量或者矩阵），且**这些解都满足线性组合封闭的条件。**

从向量空间的角度思考这个解空间，那么**这个解空间的维数为 2，其具有两个基，恰为 $sinx$ 和 $cosx$。**

秩 1 矩阵也即秩为 1 的矩阵。

所有的秩 1 矩阵都可以表示为一列乘以一行的形式（因为行向量之间都线性相关，列向量之间都线性相关），如：

$$A=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\end{bmatrix}=UV^T$$

此外，**秩 1 矩阵还可以用来搭建其他矩阵。**假设有一个 5×17 的矩阵其秩为 4，那么该矩阵可以通过四个秩 1 矩阵搭建出来，具体过程类似于我们在第 3 课中讲到的矩阵乘法中的"列乘行"形式：

$$C=\sum_{i=1}^{n}(Col_i\ of\ A)\cdot(Row_i\ of\ B)$$

从空间的角度看，所有秩为 4 的矩阵的集合（注意，是集合而不是线性组合）是一个向量空间吗？显然不是，因为**显然至少其中都不包含零矩阵。**

另外，**矩阵的加法存在这样的性质：$rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B)$。**

这个性质意味着，**对于同样规模的同秩矩阵所组成的集合，其加法是不封闭的。**两个 5×6 的秩为 4 矩阵相加，结果的秩可能大于 4。

在介绍图的知识之前，我们先考虑下面这个例子：

四维空间中的向量都有四个分量 $v=\begin{bmatrix}v_1&v_2&v_3&v_4\end{bmatrix}^T$，设 S 为一个集合，S 中的向量都满足：$v_1+v_2+v_3+v_4=0$。则 S 是一个向量空间吗？若是，那么其基和维数是多少？

S 显然是一个向量空间，因为 $v_1+v_2+v_3+v_4=0$ 这个特点，所以 S 对加法和数乘都封闭，S 中也显然包含零向量。那么，S 这样的向量空间其维数和基是什么呢？

我们考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$，由 S 中向量元素的特殊性质可得：

$$Av=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix}=v1+v2+v3+v4=0$$

注意到，**所有满足条件的 v 对应的向量空间 S 正好是 A 的零空间，这样我们就把问题转化为求矩阵的零空间的基和维数了，这样的转换十分巧妙。**

矩阵 A 的秩 r 为 1，列数 $n=4$，因此，S 的维数为 $n-r=3$，其基为 $Av=0$ 的三个特解：

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

再观察 A 的列空间和左零空间列，其列空间正好就为 R^1，其左零空间只包含数 0。

课程的最后，我们介绍图的概念，引出图与线性代数之间的关系。

图是点和边的集合，边连通各个点。

一个包含五个点六条边的图，完全可以使用一个 5×6 的矩阵来表示该图中的所有信息。

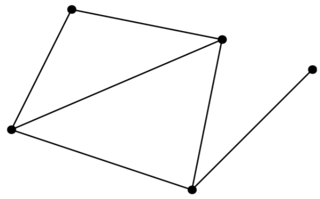

Figure 1: A graph with 5 nodes and 6 edges.

一个有趣的问题是：**一个由很多点和很多条边组成的图，最大的两点距离是多少？有研究表明，通常不超过6步，这也即所谓的“六度分割理论”。**

具体的关于图和矩阵之间的联系将在下一章中细讲。