第 10 课 四个基本子空间

> 本章主要详细介绍了**矩阵的四个基本子空间**，并**对于每个子空间探讨了两个问题：基和维数。**课程的最后我们**对向量空间的概念进行了一次扩展：从 R^n 到 $R^{n\times n}$。**

假设 A 为 $m\times n$ 的一个矩阵，秩为 r，则其对应的四个基本子空间为：

- A **的列空间** $C(A)$
- A **的零空间** $N(A)$
- A **的行空间** $C(A^T)$
- A **的左零空间** $N(A^T)$

显然，列空间 $C(A)$ 是A 的所有列向量的线性组合，每个列向量为 m 维，所以 $C(A)$ **是 R^m 的子空间**；零空间 $N(A)$ 里的向量都是 n 维向量，所以 $N(A)$ **是 R^n 的子空间**；行空间 $C(A^T)$ 是所有行的线性组合，每个行向量为 n 维，所以 $C(A^T)$ **是 R^n 的子空间**；左零空间 $N(A^T)$ 里的向量都是 m 维向量，所以 $N(A^T)$ **是 R^m 的子空间。**

我们先来探讨相对简单的维数的问题：

四个子空间的维数分别是什么？

- **列空间** $C(A)$ **的维数是** r
- **零空间** $N(A)$ **的维数是** $n-r$
- **行空间** $C(A^T)$ **的维数是** r

  这里有一个重要的性质：**矩阵行空间和列空间的维数是相同的。**这在第 7 课中已经提及：

  > **A 的主元个数 = A 矩阵线性无关的列的个数（也即列空间的维数） = A^T 矩阵线性无关的列的个数（也即行空间的维数） = A^T 的主元个数。**

- **左零空间** $N(A^T)$ **的维数是** $m-r$

四个子空间的基分别是什么？

- 列空间

  我们已经学会如何通过消元来找出主元从而确定矩阵的主元列，而**主元列对应的列向量组应就是列空间** $C(A)$ **的一组基（注意，主元列对应的列向量组必须是消元之前的矩阵的列向量组，因为消元过程中的行变换改变了矩阵的列向量）。**

- 零空间

  我们知道零空间由所有特解所组成的向量组生成，通过特定的自由变量值分配策略，我们可以找出**所有线性无关的特解**，这些特解**即零空间** $N(A)$ **的一组基。**

显然，对于行空间和左零空间，我们可以先讲矩阵转置然后采取相同的方法对其基进行求解，但事实上，**行空间和左零空间的基的求解有更便捷的方法。**

- 行空间

  在前面的章节我们就已经学习到，**消元能够反映出矩阵的行之间和列之间的一些线性相关/无关的信息，这意味着和求列空间的基一样，我们同样可以通过消元来求出行空间的基。但和列空间不同的是，消元会改变矩阵的列，所以消元后的矩阵的列空间可能并不等于消元前的矩阵的列空间，而消元并没有让 A 的行发生本质变化，所以消元后的矩阵的行空间等于消元前的矩阵的行空间。**

那么具体如何求解行空间的基呢？**系统的方法是将矩阵 A 消元并化简到 RREF 形式记为矩阵 R，那么 RREF 形式下的矩阵 R 的前 r 行（或更直观地非零行）就是矩阵 A 的行空间的基，且这样的基是相对较好的基，因为其形式最为简洁。**需要再次强调的是，**是矩阵 R 的前 r 行是矩阵 A 的行空间的基而非是矩阵 A 的前 r 行，这是因为在矩阵 A 消元化简的过程中存在出现主元为零从而需要行交换的情况。**

- 左零空间

  我们先解释“左零空间”这个取名的由来：我们知道左零空间记为 $N(A^T)$，所以左零空间也就由所有满足 $A^Ty=0$ 的 y 所组成，但**我们说的左零空间是针对矩阵 A 而不是矩阵 A^T 来说的**，于是我们对 $A^Ty=0$ 两边都进行一次转置，容易得到 $y^TA=0$，其中 y^T 位于 A 的左边，这也即 A 的左零矩阵的由来。

  求解左零空间的基有什么更便捷的方法呢？

  不管是求解列空间，零空间还是行空间，我们在求解其基时都不可避免地进行了消元（消元本身能够反映线性相关情况），到左零空间也是一样的，我们把目光放到矩阵 A 消元化简到 RREF 形式的矩阵 R 的消元过程中，举个例子：

  $$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

  注意 R 中出现的零行！在第 2 课中我们就已经知道矩阵消元等价于左乘一个行变换矩阵 E，而 R 中第三行出现零行，正说明 E 的第三行对 A 的各行的线性组合恰好能够得到一个零行，再结合 $y^TA=0$，这 E 的第三行可不就是 y^T 吗？

  基于这个思路，我们找到了一种求解左零空间的基的便捷的方法：**使用高斯-若尔当思想求出使得 $EA=R$ 的 E，则 E 中即可得到左零空间的基。**

  高斯-若尔当消元过程为 $\begin{bmatrix}A_{m\times n} & I_{m\times m}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}R_{m\times n} & E_{m\times m}\end{bmatrix}$，其中 R 是 A 的 RREF 形式，从上述过程可以看出，$E_{m\times m}$ 记录了 A 到 R 的所有行变换过程，也即 $E_{m\times m}A_{m\times n}=R_{m\times n}$。对于上面给出的例子容易求得 $E=\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，注意到 R 中的第三行是零行（0^T），回顾行的线性组合的观点可知，E 的第三行显然给出了一种对 A 的行进行线性组合得到零行的一种方式，也即 E 的第三行就是我们想要的y^T，而注意到 R 中只有第三行一个零行，所以 E 的第三行对应的行向量就是矩阵 A 的左零空间的基。

> 课程的最后部分我们对向量空间的概念进行了一次扩展：从 R^n 到 $R^{n\times n}$，这将加深我们对于向量空间这个概念的理解。

我们之前介绍的向量空间显然都是 R^n 的，空间里面包括的都是 n 维的向量。现在我们考虑 $R^{n\times n}$ 的向量空间，这也即空间里包括的都是 $n\times n$ 的矩阵。**这里的关键在于，把矩阵看作“向量”。**

事实上，我们把矩阵看作向量的凭据是：**矩阵和向量一样可以进行线性组合。既然如此，那么在矩阵的基础上讨论向量空间就存在可能。但矩阵毕竟还是矩阵，所以我们将这种不一样的向量空间称为矩阵空间。**

现在我们讨论这样的矩阵空间：所有的 3×3 矩阵，也即 $R^{3\times3}$，为简便记为 M。那么显然 M 的基有 9 个，分别为 9 个 3×3 的矩阵，每个矩阵在不同的某个位置上取 1，其他位置取 0（比如 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 等等），所以 M 的维数为 9。

容易找出 M 的子空间有：

- 所有的上三角矩阵
- 所有的对称矩阵

- 所有的对角矩阵（可视为所有的上三角矩阵和所有的对称矩阵的交集，子空间的交集当然也是一个子空间）

  所有的对角矩阵这样的子空间维数是 3。容易找出该子空间的 3 个基：$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。