

ESTUDO COMPARATIVO DE CONTROLADORES PID E GMV APLICADOS EM SISTEMAS NÃO-LINEARES

LUÍS AUGUSTO MESQUITA DE CASTRO*, MAURO GOMES DA SILVA*, REJANE DE BARROS ARAÚJO†

**Instituto Federal do Pará
Departamento de Engenharia de Controle e Automação
Belém, Pará, Brasil*

*†Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Automação e Sistemas
Florianópolis, Santa Catarina, Brasil*

Emails: luis.mesquita.castro@gmail.com, mgsilva021@gmail.com,
rejane.barros@posgrad.ufsc.br

Abstract— This paper aims to present a comparative study of two control techniques, classical and advanced, related to PID (Proportional Integral Derivative) and GMV (Generalized Minimum Variance) controllers designs, respectively. Initially, a brief description of the PID and GMV controllers designs and performance indices, they are used for a quantitative evaluation of the results, are shown. Additionally, these controllers are applied to a nonlinear valve system and a flexible transmission system, where comparative data of the performance indices and aspects such as reference tracking, disturbance rejection and treatment of noise are featured. All results shown in this paper are based on numerical simulations.

Keywords— PID controller, nonlinear system, GMV controller, reference tracking, disturbance rejection.

Resumo— Este artigo tem como objetivo apresentar um estudo comparativo de duas técnicas de controle, clássica e avançada, relacionadas aos projetos dos controladores PID (*Proportional Integral Derivative*) e GMV (*Generalized Minimum Variance*), respectivamente. Inicialmente, os projetos destes controladores e os índices de desempenho, utilizados para avaliação quantitativa dos resultados, são brevemente descritos. Ademais, os projetos dos controladores PID e GMV são aplicados à um sistema de válvula de controle não-linear e à um sistema de transmissão flexível, apresentando-se comparações dos índices de desempenho e aspectos como rastreamento de referência, rejeição de perturbação e tratamento de ruídos. Os resultados mostrados neste artigo são todos baseados em simulações numéricas.

Palavras-chave— Controlador PID, sistema não-linear, controlador GMV, rastreamento de referência, rejeição de perturbação.

1 Introdução

O controlador PID (*Proportional Integral Derivative*) é um dos controladores mais utilizados na indústria e sua importância está relacionada a fatores como simplicidade, estabilidade e desempenho (Silveira et al., 2012). No entanto, uma das principais limitações do controlador PID é a sua incapacidade de lidar de forma direta com restrições. No contexto industrial, as restrições podem aparecer sob a forma de limitações físicas, como por exemplo, a capacidade de um tanque ou a abertura de uma válvula. Estas restrições, na sua maioria, são de natureza não-linear e apresentam um importante problema dentro da teoria e prática da engenharia de controle.

Ao longo das últimas décadas, novas técnicas de controle foram propostas, algumas abordando questões não explicitamente solucionadas pelos controladores PID, como restrições e sistemas com atraso dominante, outras propondo melhores resultados em termo de desempenho e robustez, como as técnicas de controladores preditivos baseados em modelo (*Model-Based Predictive Control* - MBPC). Embora muitos projetos de controle mais avançados possam ser utilizados, ainda é comum a preferência por estruturas de

controle mais simples como o PID, tanto na indústria como na academia (Saback and Santos, 2015).

Controladores MBPC como GMV (*Generalized Minimum Variance Control*) e GPC (*Generalized Predictive Control*), vêm sendo amplamente empregados na indústria, no controle de processos químicos e petroquímicos (Knihs, 2011), sendo estas estruturas evoluções do regulador de Variância Mínima (*Minimum Variance* - MV).

Åström (1979) foi o primeiro a introduzir o conceito de Controle de Variância Mínima (*Minimum Variance Control* - MVC), utilizando um processo linear e de fase mínima, onde esta estratégia busca minimizar a variância da variável controlada. Mais tarde, Clarke and Hastings-James (1971) expandiram o projeto de Åström (1979), adicionando ao controle uma função custo a ser minimizada, este projeto foi denominado de GMV.

O critério do controlador GMV aborda alguns dos problemas relacionados com o controle MV, como a ação de controle agressiva e pouca robustez, considerando uma combinação ponderada entre o sinal de erro e sinal de controle (Majecki and Grimble, 2004). Assim, com o controlador GMV é possível estabilizar processos de fase não-mínima. Esta lei de controle passou a ter caracte-

terísticas semelhantes ao projeto do controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG), sendo a sua implementação mais simples em alguns casos.

É importante ressaltar que em projetos de sistemas de controle, não existe o melhor controlador a ser utilizando ou explorado pela literatura, mas sim o controlador que melhor se aplica ao problema de controle a ser solucionado. Neste artigo, é apresentado um estudo comparativo entre estratégias de controle PID e GMV não adaptativas, aplicadas a dois sistemas, uma válvula não-linear e um sistema de transmissão flexível. Em ambos os projetos são realizadas simulações numéricas com o intuito de validar o estudo comparativo entre os controladores PID e GMV.

O artigo está organizado da seguinte forma. Seções 2 e 3 apresentam uma breve descrição dos projetos dos controladores PID e GMV, respectivamente. Seção 4 discute dois estudos de caso, comparando os controladores PID e GMV. Conclusões são dadas na seção 5.

2 Controlador PID

A maioria dos controladores realimentados utilizados na indústria são do tipo PID e na sua maioria, por várias décadas, este controlador possui uma vasta aplicação no controle automático de processos. O controlador PID tem diferentes arquiteturas de implementação, que variam de acordo com os fabricantes em termos de sintonia, equação recursiva, topologia, filtragem e escala. Uma arquitetura padrão, no domínio de tempo contínuo, é o controlador PID ideal, expresso por (Åström and Hägglund, 2005):

$$u(t) = K_c \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\} \quad (1)$$

onde $e(t) = y_r(t) - y(t)$, é o erro do sistema, $y_r(t)$ é o sinal de referência, $y(t)$ é o sinal de saída, K_c é o ganho proporcional, T_i é o tempo integral e T_d é o tempo derivativo.

Neste artigo, a implementação do controlador PID é realizada no domínio de tempo discreto, desta forma, é interessante mostrar a topologia ideal deste controlador, escrito como:

$$\Delta u(k) = K_c \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) e(k) - K_c \left(1 + 2\frac{T_d}{T_s} \right) e(k-1) + \frac{K_c T_d}{T_s} e(k-2) \quad (2)$$

onde $\Delta = (1 - z^{-1})$ é o operador de atraso e T_s é o período de amostragem. A estrutura de controle da equação (2) pode ser usada em controladores digitais e controladores lógicos programáveis. É importante observar que a literatura de controle apresenta diversos projetos de sintonia para os parâmetros do controlador PID, inclusive híbrido com controladores GPC e GMV (Wakitani et al., 2012; Yamamoto et al., 2006).

3 Controlador GMV

O regulador de variância mínima auto-ajustável ou *self-tuning regulator* foi apresentado por Clarke and Gawthrop (1975) como controlador linear generalizado capaz de lidar com sistemas de dinâmicas complexas, tais como: instável em malha aberta, fase não-mínima, integrador e com atraso de transporte (Saback and Santos, 2015). O controle MV tem como objetivo regular a saída do processo em relação a uma referência constante, minimizando o efeito do ruído e a variância na saída do processo (Åström et al., 2015; Knihs, 2011).

Tanto o algoritmo MV como o GMV são soluções particulares do problema de controle LQG, onde o estimador de Kalman (1960) é projetado baseado em processos de modelos estocásticos como, por exemplo, o ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous input*) ou ARIMAX (*Auto-Regressive Integrated Moving Average with eXogenous input*) como descrito por Silveira and Coelho (2011).

A técnica de projeto do controlador GMV desenvolvida por Clarke and Gawthrop (1975) é uma das técnicas mais simples de controle baseada em modelo preditivo, possui uma forma generalizada semelhante a um controlador RST (Landau and Zito, 2004) de tal modo que a saída auxiliar generalizada é expressa pela seguinte equação:

$$\phi(k+d) = P(z^{-1})y(k+d) - T(z^{-1})y_r(k+d) + Q(z^{-1})\Delta u(k) \quad (3)$$

e considerando-se um problema de otimização estocástica, a função custo do controlador GMV é escrita da seguinte forma:

$$J = \mathbb{E} [\phi^2(k+d)] \quad (4)$$

submetida a ordem e forma geral dos polinômios de ponderação $P(z^{-1})$, $T(z^{-1})$ e $Q(z^{-1})$, definidos no domínio do operador de deslocamento z^{-1} , onde na equação (3), $y(k+d)$ é o sinal de saída do processo a d passos a frente, d é o atraso de transporte, $u(k)$ é o sinal de controle e $y_r(k)$ é o sinal de referência. Na equação (4), \mathbb{E} representa o operador esperança matemática.

O problema de controle do GMV é baseado em processos de modelos estocásticos como o da forma:

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta} \quad (5)$$

onde $C(z^{-1})\xi(k)$ representa a parte estocástica. A partir da saída auxiliar generalizada $\phi(k+d)$ na equação (3) e com base na equação (5), impõem-se que

$$A(z^{-1})y(k+d) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\frac{\xi(k+d)}{\Delta} \quad (6)$$

No entanto, devido a influência aleatória de $\xi(k+d)$, a melhor solução para determinar $y(k+d)$ e consequentemente $\phi(k+d)$ é através da teoria de estimação ótima e filtro de Kalman, que conduz para o preditor de variância mínima (*Minimum Variance Predictor* - MVP) de $\hat{y}(k+d|k)$, ou seja, a saída estimada predita a d -passos a frente é dado por Clarke and Gawthrop (1975) como sendo

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{P(z^{-1})C(z^{-1})}u(k) + \frac{F(z^{-1})}{P(z^{-1})C(z^{-1})}y(k) \quad (7)$$

onde $E(z^{-1})$ e $F(z^{-1})$ são os polinômios do MVP determinados pela solução da equação *Diophantine*

$$P(z^{-1})C(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-d}F(z^{-1}) \quad (8)$$

onde n_p , n_c , n_a , n_e , n_f representam a ordem dos polinômios $P(z^{-1})$, $C(z^{-1})$, $A(z^{-1})$, $E(z^{-1})$ e $F(z^{-1})$, respectivamente, e o atraso de tempo discreto d é quem define a complexidade do polinômio $E(z^{-1})$ e n_e , n_f são calculados como (Clarke and Gawthrop, 1975):

$$\begin{aligned} n_e &= d - 1 \\ n_f &= \max(n_p + n_c, n_a) - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Minimizando a função custo da equação (4), a lei de controle do controlador GMV é expressa como:

$$\Delta u(k) = \frac{C(z^{-1})y_r(k+d) - F(z^{-1})y(k)}{B(z^{-1})E(z^{-1}) + Q(z^{-1})C(z^{-1})} \quad (10)$$

podendo-se garantir que em regime permanente, a variância de saída generalizada, σ_ϕ^2 , é mínima.

O algoritmo do controlador GMV aplicado nos estudos de caso deste artigo é simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= T(z^{-1}) = 1 \\ Q(z^{-1}) &= \lambda(1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

Para avaliar a estabilidade e desempenho de malha fechada dos sistemas controlados pelos controladores PID e GMV, este artigo usa dois importantes índices de desempenho chamados Variação total do controle (*Total Variation of Control* - TVC) e índice de erro quadrático (*Integral of the Squared Error* - ISE) (Skogestad, 2003).

Índices de desempenho são largamente usados na literatura de controle como uma medida quantitativa da qualidade do sistema controlado, especialmente no rastreamento de referência e na rejeição de perturbação. Quando estes índices são minimizados, o sistema de controle é dito "ótimo".

As seguintes equações são utilizadas para os cálculos destes índices

$$\begin{aligned} ISE &= \sum_{k=1}^{\infty} e^2(k) \\ TVC &= \sum_{k=1}^{\infty} |u(k) - u(k-1)| \end{aligned} \quad (12)$$

4 Estudos de caso

Para avaliar os algoritmos dos controladores PID e GMV e fazer um estudo comparativo entre esses dois controladores, utilizou-se um sistema não-linear de válvula de controle (Åström and Wittenmark, 1995) e um sistema de transmissão flexível (Landau and Zito, 2004). Nesta seção são apresentados os estudos de caso e os resultados de simulações dos processos com os controladores PI, PID e GMV. Para todos os testes realizados, utilizou-se três pontos de operação iguais a 1, 3 e 5.

4.1 Válvula Não-linear

A Figura 1 representa o diagrama de blocos de malha fechada com o controlador, que para este artigo pode ser um controlador PID ou GMV, uma válvula não-linear, um processo e uma perturbação na saída do processo $d_o(k)$.

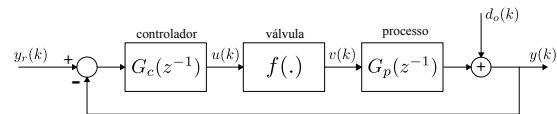


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema de controle com a válvula não-linear.

O processo G_p no domínio de tempo discreto é descrito por

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{3d^2 y}{dt^2} + \frac{3dy}{dt} + y = u_c(t) \quad (13)$$

com a válvula estática $f(\cdot)$ caracterizada como

$$v = f(u) = u^4 \quad \text{para} \quad u \geq 0 \quad (14)$$

onde, o equivalente discreto da equação (13), para um período de amostragem $T_s = 0,6$ s, é dado por

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 1,646z^{-1} + 0,9036z^{-2} - 0,1653z^{-3} \\ B(z^{-1}) &= 0,02312 + 0,05934z^{-1} + 0,009394z^{-2} \\ C(z^{-1}) &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

O processo de malha aberta é estável, porém, em malha fechada quando é submetido a elevados pontos de operação apresenta perda de desempenho, tornando-se instável. Na prática este comportamento é considerado não-linear, pois a medida que é solicitado uma maior abertura da válvula e consequentemente um maior fluxo de líquido, a mesma apresenta oscilações elevadas não

correspondendo ao valor de abertura real desejado. A Figura (2) mostra a curva estática da válvula, e observa-se o comportamento não-linear em diferentes pontos de operação.

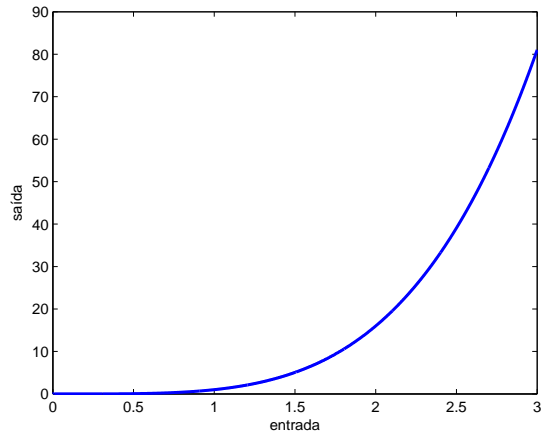


Figura 2: Curva estática da válvula não-linear.

Para o controlador PI apresentado por Åström and Wittenmark (1995), a medida que é solicitado uma maior abertura da válvula, o controlador não consegue compensar as variações dos parâmetros do processo, ocorrendo assim, elevadas oscilações em torno do ponto de operação, conforme observa-se no gráfico da Figura (3).

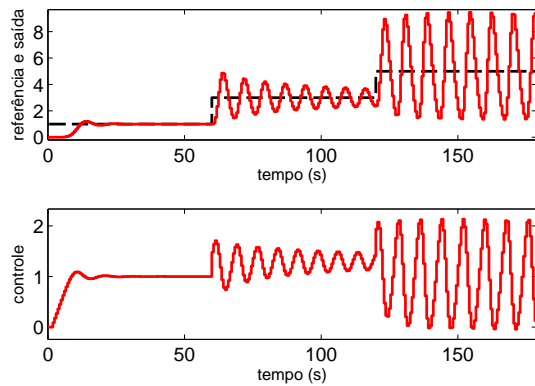


Figura 3: Resposta do sistema de malha fechada com o controlador PI.

Para o controlador PID, utilizou-se como parâmetros de projeto $K_c = 0,15$, $T_i = 0,15$ e $T_d = 0,1$, sintonizados por tentativa e erro. A partir dos resultados mostrados na Figura (4), observou-se que ambos os controladores PID e GMV, demonstraram que mesmo com mudança nas condições de operação do sistema, ainda assim conseguem apresentar resultados satisfatórios ao controle do processo.

A Figura (5) mostra os sinais de saída e controle do sistema controlado pelos controladores PID e GMV com $\lambda = 20$, observa-se que para os dois controladores, o sistema é capaz de rastrear referência e rejeitar perturbação de carga (perturbação de carga de 5% do valor de referência).

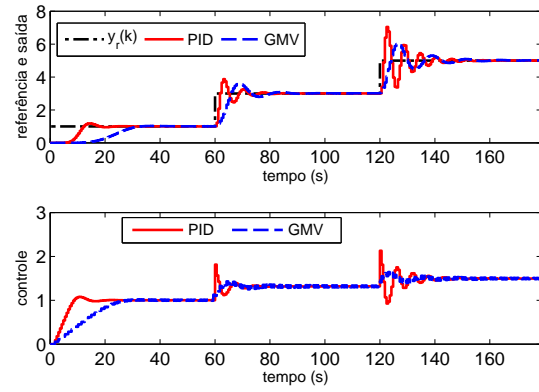


Figura 4: Resposta do sistema com os controladores PID e GMV.

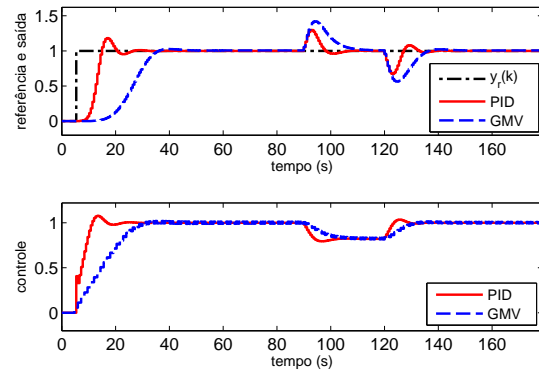


Figura 5: Resposta do sistema com os controladores PID e GMV.

O controlador PID apesar de apresentar um maior esforço de controle em relação ao controlador GMV, apresenta um menor ISE e menor variância de saída (σ_y^2) quando comparado com os controladores GMV e PI para diferentes valores de λ . Enquanto que o controlador GMV supera o PID em termo de menor energia do controle (TVC), como demonstrado na Tabela 1.

Tabela 1: Índices de desempenho para o sistema da válvula não-linear.

Teste	ISE	TVC	σ_y^2
PI	863,75	414,83	5,92
PID	52,09	484,64	3,05
GMV - $\lambda = 20$	69,99	475,59	3,30
GMV - $\lambda = 25$	72,53	469,40	3,37
GMV - $\lambda = 30$	78,54	463,02	3,46

Nas Figuras (6) e (7), são apresentados os sinais de saída e controle do sistema controlado pelos controladores PID e GMV mais a válvula não-linear, com o sinal de ruído de variância estimada $\xi(\mathbf{k}) = 0,0001037$. A partir destas figuras, observa-se que mesmo na presença de sinais de ruído, o controlador PID ainda assim, consegue

conduzir o sistema para as condições de operação desejada, apresentando um menor **ISE**. O controlador GMV, com $\lambda = 25$ também permite que o sistema siga o valor de referência sem grande esforço na energia de controle, apresentando um **TVC** menor quando comparado ao controlador PID.

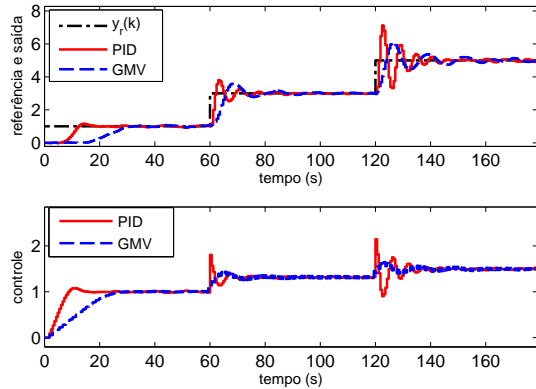


Figura 6: Resposta do sistema com sinal de ruído - controladores PID e GMV.

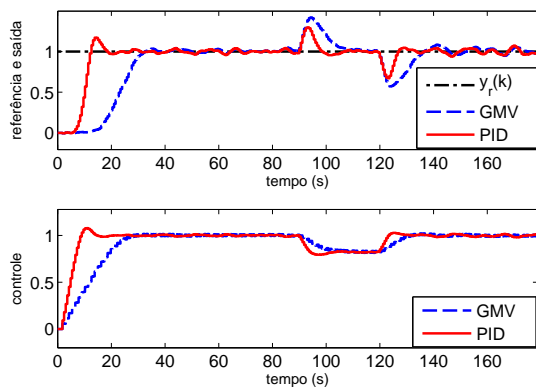


Figura 7: Resposta do sistema com sinal de ruído e perturbação - controladores PID e GMV.

4.2 Sistema de Transmissão Flexível

O sistema dinâmico de transmissão flexível é composto por três polias conectadas por duas correias elásticas, Figura (8). Uma destas polias é restringida por um eixo de um motor de corrente contínua. A posição do motor é controlada por um servo local, o problema de controle consiste em obter a posição desejada da terceira polia, modificando a tensão de entrada de controle de posição do motor que aciona a primeira (Landau and Zito, 2004).

Utilizando-se um período de amostragem $T_s = 0,6$ s, o equivalente discreto do sistema de

transmissão flexível é dado por:

$$A(z^{-1}) = 1 - 1,6095z^{-1} + 1,8764z^{-2} - 1,4988z^{-3} + 0,8857z^{-4} \quad (16)$$

$$B(z^{-1}) = 0,3053z^{-1} + 0,3943z^{-2} \quad (17)$$

$$C(z^{-1}) = 1$$



Figura 8: Sistema de transmissão flexível.

Nas Figuras (9) e (10), são apresentados os resultados de simulação do sistema de transmissão flexível. Nota-se que, tanto o controlador PID como o GMV conseguem apresentar resultados satisfatórios para toda a faixa de operação desejada. A Figura (9) mostra a saída dos dois sistemas para diferentes valores de referência, e observa-se que para condições de operação com valores de referência mais altos, o sinal de saída com o controlador PID apresenta perda de desempenho, sinal mais oscilatório, enquanto que o controlador GMV se mantém para qualquer ponto de operação. Quanto ao desempenho relacionado a rejeição de perturbação (perturbação de carga de 3% do valor de referência e aplicada no tempo de 90 s), o controlador GMV apresenta melhor desempenho, com um sinal de saída mais conservativo, como mostrado na Figura (10).

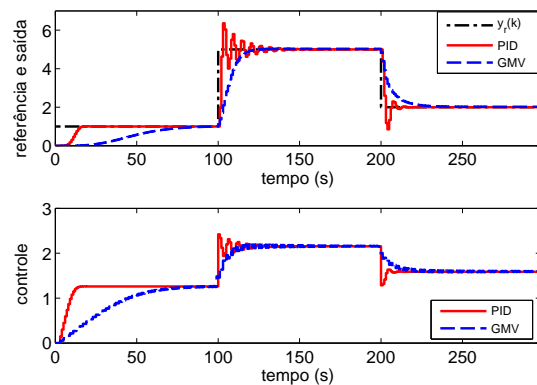


Figura 9: Resposta do sistema de transmissão - rastreamento de referência.

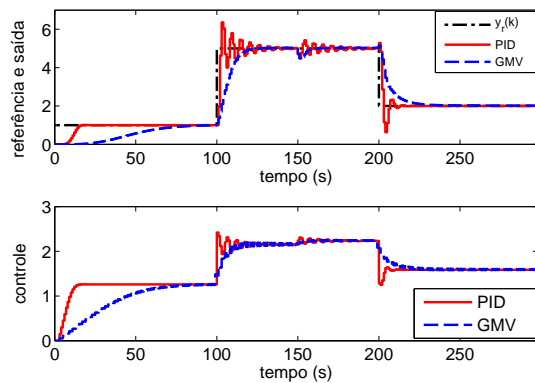


Figura 10: Resposta do sistema de transmissão - rejeição de perturbação.

5 Conclusões

Neste artigo, apresentou-se duas técnicas de controle, clássica e avançada, relacionadas ao projeto dos controladores PID e GMV, respectivamente, aplicados à um sistema de controle de válvula não-linear e à um sistema de transmissão flexível. O objetivo foi mostrar um estudo comparativo entre os dois controladores, explorando aspectos como seguimento de referência, rejeição de perturbação, tratamento de ruído e estabilidade. Ambas as técnicas apresentaram resultados aceitáveis, mesmo com mudanças nas condições de operação do processo e na presença de ruídos. Apesar do controlador PID apresentar perdas de desempenho em relação ao controlador GMV durante a mudança de referência, ainda assim, consegue alcançar resultados satisfatórios ao sistema controlado. É importante destacar que, embora o controlador GMV tenha tido um desempenho superior ao controlador PID, à medida que o valor do ponto de operação aumenta, o controlador PID consegue ter um comportamento semelhante ao controlador GMV para valores menores dos pontos de operação.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio do PPGEAS da Universidade Federal de Santa Catarina, a CAPES e ao Instituto Federal do Pará - IFPA.

Referências

- Åström, K. J. (1979). *Introduction to stochastic control theory*, Academic Press, London.
- Åström, K. J., Borisson, U., Ljung, L. and Wittenmark, B. (2015). Theory and applications of self-tuning regulators, *Automatica* **13**: 457–476.
- Åström, K. J. and Hägglund, T. (2005). *Advanced PID Control*, ISA-Instrumentation, Systems, and Automation Society.
- Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1995). *Adaptive control*, Dover publications, Inc. Lund Institute of Technology, Mineola, New York.
- Clarke, D. W. and Gawthrop, P. J. (1975). Self tuning controller, *Proceeding of the Institution of Electrical Engineers* **122**: 929–934.
- Clarke, D. W. and Hastings-James, R. (1971). Design of digital controllers for randomly distributed systems, *Proceeding of IEEE* **118**: 1502–1506.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering* **82**: 35–45.
- Knihs, V. L. (2011). *Projetos de controlador GMV em malhas de controle na indústria*, Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Landau, I. D. and Zito, G. (2004). *Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation*, Springer.
- Majecki, P. and Grimble, M. J. (2004). GMV and restricted structure GMV controller performance assessment-multivariable case, *Proceeding of the American Control Conference*.
- Saback, R. M. and Santos, T. L. M. (2015). Projeto de controlador PI escalonado via controle preditivo, *XII SBAI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Silveira, A. S. and Coelho, A. A. R. (2011). Generalised minimum variance control state-space design, *IET Control theory and applications* **5**: 1709–1715.
- Silveira, A. S., Coelho, A. A. R. and Gomes, F. J. (2012). GMV-PID controller design with gradient method for the energy weighting factor in nonlinear plants, *IFAC Conference on Advances in PID Control*.
- Skogestad, S. (2003). Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning, *Journal of Process Control* pp. 291–309.
- Wakitani, S., Hanata, S. and Yamamoto, T. (2012). Design and application of a direct GMV-based PID controller, *Proceedings of the 2012 International Conference on Advanced Mechatronic Systems* pp. 541–546.
- Yamamoto, T., Sato, T. and Inoue, A. (2006). Improvement of tracking performance in designing a GPC-based PID controller using a time-varying proportional gain, *Transactions on Electrical and Electronic Engineering* pp. 438–441.