Пълни множества

1. Нека $F = \{f_1, f_2 \dots f_k\}$ е м-во от булеви ф-ции.
F е пълно $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall f \in \mathcal{F}_2$, f може да се представи като композиция на елементи на F. (т.е. $f \in [\{f_1 \dots f_k\}]$)

$[F]$ - всички бул. ф-ции, които се получават при композиция на някои ф-ции от $f_1 \dots f_k$

2. Теорема на Бул
$\{\vee, \wedge, \neg\}$ е пълно. $([\{\vee, \wedge, \neg\}] = \mathcal{F}_2)$

3. f е Шеферова ф-ция $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\{f\}$ е пълно.

Зад Док, че следните м-ва са пълни:

a) $\{\overset{x \wedge y}{\wedge}, \overset{\neg x}{\neg}\}$ $\rightarrow$ $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

б) $\{\vee, \neg\} \to x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$

в) $\{|\}$

г) $\{\downarrow\} \to$ д.р.

д) $\{\wedge, \oplus, 1\}$

е) $\{xy \oplus z, (x \leftrightarrow y) \oplus z\}$

в)

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\underline{x \mid x} = \bar{x} \leftarrow \neg$

$(x \mid x) \mid (y \mid y) = \bar{x} \mid \bar{y} = x \vee y$

$\bar{x} \mid \bar{y}$
0
1
1
1

$\to x \vee y$

$\bar{x} \mid \bar{y} = \overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}} = x \vee y$

$$\boxed{x \mid y = \overline{x \wedge y} = \overline{\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}} = \bar{x} \vee \bar{y}}$$

д) $\{\wedge, \oplus, 1\} \to$ м-во на Жегалкин

$\underline{x \oplus 1 = \bar{x}} \leftarrow$ отрицанието

x	$x \oplus 1$
0	1
1	0

Полином на Жегалкин

1. ~~деф~~ – ф-ла над м-вото $\{0, 1, \underbrace{\wedge, \oplus}\}$

$1 \oplus 1 = 0$

2. Всяка булева ф-ция има единствен полином на Жегалкин.

3. Метод за построяване на ПЖ
   - а) Чрез еквивалентни преобразования
   - б) По метода на неопределените коеф.
   - в) От СъвДНФ

$$f(x_1, x_2 ... x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus ... \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus ... \oplus a_{123...n} x_1 ... x_n$$

$$a_i \in \{0, 1\}$$

$$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$$

$$\boxed{xy = x \wedge y}$$

Зад. Намерете ПЖ.

а) $f(x,y) = (1101) \leftarrow \boxed{\to}$

б) $f(x,y) = (0001) \leftarrow \boxed{\wedge}$

в) $f(x,y,z) = (11111000)$

г) $f(x,y,z) = (01101000)$

Реш. а) $f(x,y) = (1101)$

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy$$

$$f(0,0) = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 . 0 \oplus a_2 . 0 \oplus a_3 . 0 . 0 = 1$$

$$\Rightarrow a_0 = 1$$

$$f(0,1) = 1 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 . 0 \oplus a_2 . 1 \oplus a_3 . 0 . 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 \oplus a_2 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus a_2 = 1$$

$$\Rightarrow a_2 = 0$$

$$f(1,0) = 0 \Rightarrow a_0 \oplus a_1 = 0$$

$\Rightarrow a_1 = \underline{1}$

$f(1,1) = \underline{1} \Rightarrow a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = \underline{1}$

$1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_3 = 1$

$a_3 = \underline{1}$

$\boxed{x \oplus y = y \oplus x}$

$b_0 \oplus b_1 \oplus b_2 \dots \oplus b_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n_1 \text{ е четно} \\ 1, & \text{ако } n_1 \text{ е нечетно} \end{cases}$

$n_1 = |\{b_i \mid b_i = 1\}|$

в)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$f = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus \overset{a_{12}}{\downarrow}{a_4} xy \oplus a_5 xz \oplus$
$a_6 yz \oplus a_7 xyz$

$f(0,0,0) = 1 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1$

$f(0,0,1) = 1 = a_0 \oplus a_3 \Rightarrow a_3 = 0$

$f(0,1,0) = 1 = a_0 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$f(0,1,1) = \underline{1} = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 =$

$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_6 = \underline{a_6 \oplus 1}$

$\Rightarrow a_6 = 0$

$f(1,0,0) = 1 = a_0 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 0$

$f(1,0,1) = \underline{0} = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 =$

$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_5 = \underline{1 \oplus a_5}$

$\Rightarrow a_5 = 1$

$f(1,1,0) = \underline{0} = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 =$

$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_4 = \underline{1 \oplus a_4}$

$\Rightarrow a_4 = 1$

$f(1,1,1) = \underline{0} = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7$

$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_7$

$= \underline{1 \oplus a_7}$

$\Rightarrow a_7 = 1$

$f = 1 \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

г) $f(x,y,z) = (01101000)$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\rightsquigarrow \bar{x}\bar{y}z$

$\rightsquigarrow \bar{x}y\bar{z}$

$\rightsquigarrow x\bar{y}\bar{z}$

! СДНФ $= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} =$

$= \bar{x}\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} \oplus x\bar{y}\bar{z} =$

$= (x\oplus 1)(y\oplus 1)z \oplus (1\oplus x)y(1\oplus z) \oplus x(1\oplus y)(1\oplus z) =$

$= (xy\oplus x\oplus y\oplus 1)z \oplus (y\oplus xy)(1\oplus z) \oplus x(1\oplus y\oplus z\oplus yz)$

$= \cancel{xyz} \oplus \cancel{xz} \oplus \cancel{zy} \oplus z \oplus y \oplus \cancel{yz} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xyz} \oplus$
$x \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{xz} \oplus xyz =$

$\boxed{a\oplus a = 0}$

$x \oplus y \oplus z \oplus xyz$

$= \quad x \oplus y \oplus z \oplus yz$

Зад. Да се получи ПЖ чрез преобразования:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow x_3$

б) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$

Зад. Намерете ПЖ

$f(x, y, z) = (x \mid y) \downarrow z$

x	y	z	$x \mid y$	$(x \mid y) \downarrow z$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1 $\rightsquigarrow x y \bar{z}$
1	1	1	0	0

$x \; y \; x \vee y$
$0 \; 0 \; 0$

СъвДНФ $= x y \bar{z}$

ПЖ $= xy(1 \oplus z) = xy \oplus xyz$

Критерий за пълнота на м-во от бул ф-ции

Затворени/предпълни подм-ва на $\tilde{F}_2$

1. T_0 – ф-ции, запазващи нулата

$$T_0 = \{f \mid f(0,0..0) = 0\}$$

2. T_1 – ф-ции, запазващи единицата

$$T_1 = \{f \mid f(1,1...1) = 1\}$$

3. S – самодвойствени ф-ции

$$S = \{f \mid f(\tilde{x}) = \overline{f(\overline{\tilde{x}})}\}$$

0
1
0
0
1
1
0
1

x	y	z	f
0	0	0	a_1
0	0	1	a_2
1	1	0	a_7
1	1	1	a_8

$a_1 = \overline{a_8}$

$a_2 = \overline{a_7}$

$a_3 = \overline{a_6}$

$a_4 = \overline{a_5}$

4. M – монотонни ф-ции

$$M = \{ f \mid \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \to f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta}) \}$$

$$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \overset{def}{\Leftrightarrow} \tilde{\alpha}_i \le \tilde{\beta}_i, \forall i$$

$000 \preceq 100 \preceq 101 \preceq 111$

$101 \, \not\preceq \, 010$

$\not\succeq$

5. L – линейни ф-ции

$$L = \{ f \mid f(\tilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \}$$

// Всяка променлива ВИНАГИ променя резултата или никога не го прави (е фиктивна) //

$$f = \underline{a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n}$$

x_i – произв.

за a_i $\begin{cases} 0, & 0x_i = 0 \Rightarrow x_i \text{ е фиктивна} \\ 1, & 1x_i = x_i \Rightarrow x_i \text{ контролира четността на единиците в} \end{cases}$

сбора (т.е. контролира
резултата от
ф-цията)

Критерий на Пост – Яблонски

1 Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$. F е пълно $\stackrel{def}{\iff}$ F не е подм-во на нито едно от T_0, T_1, S, M и L.

Зад. Да се провери дали м-вото е пълно:

а) $\{x \to y, x \to \overline{y}z\}$

б) $\{x\overline{y}, \overline{x} \leftrightarrow yz\}$

в) $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$

г) $\{0, x \oplus y, x \to y, xy \leftrightarrow xz\}$

д) $\{1, xy(x \oplus z)\}$

б) $\{x\overline{y}, \overline{x} \leftrightarrow yz\}$

x	y	$x\overline{y}$
0	0	0

x	y	z	$\overline{x} \leftrightarrow yz$
0	0	0	0
0	0	1	0

x	y	
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

ПЖ $= x\bar{y} = x(1 \oplus y) = x \oplus xy$

	T_0	T_1	S	M	L
$x\bar{y}$	V	X	X	X	X
$\bar{x} \Leftrightarrow yz$	V	X	X	X	$\leftarrow$ 1P

$\boxed{x \equiv y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y}$

$x\bar{y} \in T_0 \wedge \bar{x} \Leftrightarrow yz \in T_0$

$\overset{п-з}{\Longrightarrow} \{x\bar{y}, \bar{x} \Leftrightarrow yz\}$ не е пълно

ПЖ$(\bar{x} \Leftrightarrow yz) = 1P,$

б) $\{\underset{f_1}{(01101001)}, \underset{f_2}{(10001101)}, \underset{f_3}{(00011100)}\}$

	T_0	T_1	S	M	L
f	V	V	V	X	?

f_1	V	V	V	X	?
f_2	X	V	X	—	?
f_3	—	X	—	—	X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \boxed{a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3}$$

x	y	z	f_3
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\text{СДНФ} = \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$$

$$\text{ПЖ} = (1\oplus x)yz \oplus x(1\oplus y)(1\oplus z) \oplus x(1\oplus y)z =$$

$$= yz \oplus \cancel{xyz} \oplus x(1\oplus y \oplus z \oplus yz) \oplus xz \oplus \cancel{xyz} =$$

$$= yz \oplus x \oplus xy \oplus \cancel{xz} \oplus xyz \oplus \cancel{xz} =$$

$$= x \oplus yz \oplus xy \oplus xyz$$

$$\Rightarrow f_3 \notin L$$

$\overset{\text{п-9}}{\Longrightarrow} \{f_1, f_2, f_3\}$ е пълно

Док., че $f_3 \in L$

$\Rightarrow f_3 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3$

$f_3(0,0,0) = 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$f_3(0,0,1) = \underline{0} = a_0 \oplus a_3 = \underbrace{0 \oplus a_3} \Rightarrow a_3 = 0$

$f_3(0,1,0) = 0 = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$f_3(0,1,1) = \underline{1} = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = \underline{0}$ $\lightning$

$\Rightarrow f$ няма как да се представи в този вид $\Rightarrow f \notin L$

Зад. Док., че $\{|\}$ е п.м.

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

	T_0	T_1	S	M	L
$x \mid y$	×	×	×	×	×

$$СДНФ = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$$
$$ПНФ = (1 \oplus x)(1 \oplus y) \oplus (1 \oplus x)y \oplus x(1 \oplus y) =$$
$$= 1 \oplus \cancel{x} \oplus \cancel{y} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{y} \oplus \cancel{xy} \oplus \cancel{x} \oplus xy =$$
$$= 1 \oplus xy$$

$$\to x | y = \overline{xy} = 1 \oplus xy$$

$\Rightarrow \{|\}$ е пълно.

Зад. Док., че $f(\tilde{x}^n) \in \tilde{\mathcal{F}}_2$ е Шеферова
$\Leftrightarrow$ $f \notin \underline{T_0} \cup \underline{T_1} \cup \underline{S}$

Реш. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека f е Шеф.
$\overset{n-\mathcal{P}}{\Rightarrow}$ $f \notin T_0 \wedge f \notin T_1 \wedge f \notin S \wedge f \notin M \wedge$
$f \notin L$

$\Rightarrow f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нека $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$
$\Rightarrow f \notin T_0 \wedge f \notin T_1 \wedge f \notin S$

$f \notin T_0 \Rightarrow f(\tilde{0}) = 1$
$f \notin T_1 \Rightarrow f(\tilde{1}) = 0$

Но $\tilde{0} \leq \tilde{1} \Rightarrow f \notin M$

Остава ни да док, че $f \notin L$.

Доп, че $f \in L$.

Нека k е броят на съществените променливи $(k > 0)$.

$\Rightarrow f$ зависи <u>ВИНАГИ</u> от тези k съществени променливи

$$
\begin{array}{c|c}
0\,0 \ldots 0 & 1 \leftarrow \\
\vdots & \\
1\,1 \ldots 1 & 0 \leftarrow
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{l} f \notin S \Rightarrow \exists \alpha : f(\alpha) = f(\overline{\alpha}) \\ \alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) \end{array}\right\} k \text{ е четно}$$

$f(\tilde{0}) = 1$] k e

$$\left.\begin{array}{l} f(\tilde{x}) = 0 \\ f \in L \end{array}\right\}$$ нечетно $\lightning$

~~Да~~

$$\Rightarrow f \notin L$$

$\Rightarrow$ f е шеферова