Combinatorics2

Friday, 19 November, 2021 09:03

$$\begin{array}{c|cccc} 2\mathbb{N} & 0 & 2 & 4 & 6 \dots \\ \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 \dots \end{array} \qquad f: 2\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \frac{x}{2}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mathbb{Z} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \dots \\ \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x-1, & x < 0 \end{cases}$$

Зад. от ДР б) не по-малко от 2 дами $\begin{cases} \text{точно } 2Q \\ \text{точно } 3Q \\ \text{точно } 4Q \end{cases}$

- точно 2 Q

Двете дами избираме по $\binom{4}{2}$ начина.

За останалите 8 карти имаме $\binom{48}{8}$ начина.

$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{8}$

- точно 3 Q $\binom{4}{3}\binom{48}{7}$
- точно 4Q $\binom{4}{4}\binom{48}{6}$

Краен отг: $\binom{4}{2}\binom{48}{8} + \binom{4}{3}\binom{48}{7} + \binom{4}{4}\binom{48}{6}$

$$\left[\begin{array}{l} \binom{52}{10} - \binom{48}{10} \overset{?}{=} \binom{4}{1}\binom{48}{9} + \binom{4}{2}\binom{48}{8} + \binom{4}{3}\binom{48}{7} + \binom{4}{4}\binom{48}{6} \\ \binom{52}{10} = \binom{4}{0}\binom{48}{10} + \binom{4}{1}\binom{48}{9} + \dots + \binom{4}{4}\binom{48}{6} \end{array}\right]$$

н) точно 2 аса и не повече от 2 купи

I. Избираме A♡ и точно 1 купа (още 0 купи освен A♡)

$\binom{3}{\ }\ \binom{36}{\ }$

I. Избираме A♡ и точно 1 купа (... освен A♡)

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{36}{9}$$

II. Избиране A♡ и точно 2 купи (още 1 купа освен A♡)

$$\binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{8}$$

другото асо — другата купа

III. Не избираме A♡ и избиране 2 купи

$$\binom{3}{2}\binom{12}{2}\binom{36}{6} \leftarrow \text{другите}$$

асата — купите

IV. Не избираме A♡ и избираме точно 1 купа

$$\binom{3}{2}\binom{12}{1}\binom{36}{7}$$

V. Не избираме A♡ и избираме 0 купи

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{0}\cdot\binom{36}{8}$$

Краен отг: събирате случаите.

Зад. Колко са n-цифрените ест. числа, чиито цифри са в:

а) ненамаляващ ред
б) растящ ред
в) нерастящ ред ] ДР
г) намаляващ ред

г) намаляващ ред –

Реш. а) 0122

общ вид: $\underbrace{1\ldots1}_{a_1}\underbrace{2\ldots2}_{a_2}\underbrace{3\ldots3}_{a_3}\underbrace{4\ldots4}_{a_4}\underbrace{5\ldots5}_{a_5}\underbrace{6\ldots6}_{a_6}\underbrace{7\ldots7}_{a_7}\underbrace{8\ldots8}_{a_8}\underbrace{9\ldots9}_{a_9}$

$\Rightarrow \quad a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9=n \quad , a_i \geq 0$

$\to \binom{n+8}{8}$ възможности $\quad \to \binom{n+9-1}{n} \to \binom{n+8}{n} \to \binom{n+8}{8}$

II. начин $\quad A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\binom{n+9-1}{n}$.

Всяка ненаредена n-торка с повторение над A определя еднозначно дадено число.

$\{1,2,2,8,3\} \longrightarrow 12238$

$n=5$

Краен отг.: $\quad \bullet\ n=1 \longrightarrow 10$

$\quad n>1 \longrightarrow \binom{n+8}{8}$

б) растящ ред, $n=1$, 10

$n>9$, 0

За $1<n\leq 9$

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Всяко n-елементно м-во определя еднозначно някакво число с цифри в растящ ред.

$\binom{n}{\cancel{k}} \to \{5,1,4,9\} \longrightarrow 1459$

$\nearrow \{1,4,5,9\} \longrightarrow 1459$

$\cancel{(\ast)} \to \{5,1,4,9\} \to 1459$

$\nearrow \{1,9,5,4\} \to 1459$

$\Rightarrow$ Отг. в този случай е $\binom{9}{n}$

Окончателно: 

| | |
|---|---|
| $n=1$ | $10$ |
| $1<n\leq 9$ | $\binom{9}{n}$ |
| $9<n$ | $0$ |

***Задача 7:*** Колко идентификатора с дължина $n$ могат да се съставт в езика Ada. (Идентификатор в Ada започва с буква, продължава с буква, цифра или знак за подчертаване. Знаците за подчертаване не могат да са съседни или в края на идентификатора. Малките и главните букви са неразличими).

Screen clipping taken: 19-Nov-21 10:15

$\boxed{\text{Букви в латиницата} - 26,\ \text{цифри} - 10}$

__Реш.__
- $n=1 \to 26$
- $n=2 \to 26.36$
- $n\geq 3$

Общ вид на идентификатора:

$$\Gamma = \underset{26}{A}\,\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-2}}\,\underset{36}{B}$$, където $\begin{cases} A \text{ е буква} \\ B \text{ е буква/цифра} \\ a_i \text{ е буква/цифра/подчертавка} \end{cases}$

Търсим редиците $a_1, a_2 \dots a_{n-2}$, където $a_i$ е б./ц./подч., и няма съседни подчертавки.

Максималният брой на подчертавките в редицата е $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$. $\left( \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3,\ \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil = 2,\ \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil = 3 \right)$

Нека имаме $p$ на брой подчертавки. $\left(p \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil\right)$

Общият вид на редицата придобива вида:

Общият вид на редицата изглежда така:

$$\ldots \underset{1}{\_} \ldots \underset{2}{\_} \ldots \underset{3}{\_} \ldots \underset{p}{\_} \ldots$$

$$\overrightarrow{\text{О.В.}} \quad \ldots \underset{1}{\_}\ \alpha_1 \ldots \underset{2}{\_}\ \alpha_2 \ldots \underset{3}{\_}\ \alpha_3 \ldots \underset{p-1}{\_}\ \alpha_{p-1} \ldots \underset{p}{\_} \ldots$$

(1) (2) (3) (p) (p+1)

където $\alpha_i$ е буква/цифра, ($\alpha_i$ е НЕподчертавка)

Останали са ни: $n-2-p-(p-1) = n-2p-1$ знаци да поставим на $p+1$ позиции.

$$\underbrace{\ldots}_{x_1} \underset{1}{\_}\ \alpha_1 \underbrace{\ldots}_{x_2} \underset{2}{\_}\ \alpha_2 \ldots \underset{p-1}{\_}\ \alpha_{p-1} \underbrace{\ldots}_{x_p} \underset{p}{\_} \underbrace{\ldots}_{x_{p+1}}$$

$x_i$ е броят на допълнит. знаци на позиция $i$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} = n-2p-1$$

За разпределенията имаме:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n-2p-1+p+1-1}{n-2p-1} = \binom{n-p-1}{n-2p-1} =$$

$$= \binom{n-p-1}{n-p-1-(n-2p-1)} = \binom{n-p-1}{p}$$ начини да поставим НЕподчертавките (които са $n-p$ на брой) в редицата $a_1 \ldots a_{n-2}$.

$\Rightarrow$ Ако имаме $p$ подчертавки, вариантите за редицата са:

$$\underbrace{\binom{n-p-1}{p}} \cdot \underbrace{36^{n-2-p}}$$ $\rightarrow$ възможностите за НЕподчертавките

$a_1 a_2 \ldots a_{n-2}$ – брой начини да разпределение ... поставим $p$ подчертавки

$u_1 u_2 \ldots u_{n-2}$ ... ~~брой неточни у~~ ...

разпределение подчертавки / неподчертавка ~~брой~~ поставяме $p$ подчертавки

Това беше за фиксирано $p$ $\left(p \le \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil\right)$.

$\Rightarrow$ Всички възможности за $p \in \left[0, \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil\right]$

$$\sum_{p=0}^{\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil} \binom{n-p-1}{p} \cdot 36^{n-2-p} \leftarrow$$

$A\, a_1 a_2 \ldots a_{n-2}\, B$

26 36

---

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

01

$\rightarrow$ 4 нули и 2 единици

$\rightarrow \binom{6}{4} \rightarrow \{1, 4, 5, 2\} \rightarrow$ 0 | 0 | | 0 | 0 |

$\{3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ | | 0 | 0 | 0 | 0

0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1

1 $\binom{6}{2} \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow$ 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

---

4 нули 1 единица 1 двойка

$n$ нули $m$ единици $k$ двойки

Вс. позиции $n+m+k$.

$$\binom{n+m+k}{n} \cdot \binom{m+k}{m} \cdot \left[\binom{k}{k}\right] = 1$$

$$= \binom{n+m+k}{n}\binom{\dots}{m}\binom{k}{\dots}$$

$$= \binom{n+m+k}{m}\binom{n+k}{n}\cdot\binom{k}{k}$$

---

Краен отговор: $26 \cdot \underbrace{\sum_{p=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} \binom{n-p-1}{p} \cdot 36^{n-2-p}}\cdot 36$

$n = 3$ : $\square\square\square$ $\quad 26 \cdot 37 \cdot 36$

$$\sum_{p=0}^{1} \binom{3-p-1}{1} \cdot 36^{1-p}$$

$$= \binom{2}{0}\cdot 36^1 + \binom{3-1-1}{1}\cdot 36^0 = 36 + \binom{1}{1}\cdot \cancel{1} = \cancel{38}$$

$$= 37$$

---

Зад. Двама души трябва да си разпределят 4 ябълки, 3 круши и 5 банана. По колко начина може да стане това?

$\to x_1 + x_2 = 4 \longrightarrow \binom{5}{1} = 5$

$\to y_1 + y_2 = 3 \longrightarrow \binom{4}{1} = 4$

$\to z_1 + z_2 = 5 \longrightarrow \binom{6}{1} = 6$

Отг. $5 \cdot 4 \cdot 6$

! Принцип на Дирихле!

→ ! Принцип на Дирихле !

Нека $A$ и $B$ са м-ва и $|A| = n$, $|B| = m$, $(n > m)$.

Тогава $\forall f: A \to B$, $\exists a_1 \in A, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1 \neq a_2$

## Обобщен принцип на Дирихле

Ако имаме $n$ предмета, които трябва да разположим в $m$ клетки и $n > m$, тогава:

- поне една от клетките съдържа не по-малко от $\frac{n}{m}$ предмета
- поне една друга клетка съдържа не повече от $\frac{n}{m}$ предмета

Зад. Док, че между произволно избрани 12 различни двуцифрени ест. числа има поне 2, разликата на които е двуцифрено число, записано с еднакви цифри.

Реш. Имаме 11 възможности да остатък при деление на 11. От принципа на Дирихле $\Rightarrow$ От избраните 12 числа има 2, които дават един и същ остатък при деление на 11.

Нека това са $a, b$. $a, b \in [10, 99]$

$a = 11x + k$ $\quad x, y \in [0, 9]$

$b = 11y + k$

$\Rightarrow$

Понеже $a \neq b$, то $x \neq y$. Б.О.О. $x > y$, т.е. $x \in [1,9]$, $y \in [0,8]$

Тогава:

$a - b = 11x + \cancel{k} - 11y - \cancel{k} = 11(x-y)$

$x - y \in [1,9] \Rightarrow a - b \in \{11, 22, 33 .. 99\}$ □

<u>Зад</u>. Може ли матрица 2016×2016 да се попълни с числата +1, −1, 0, така че всички сборове по редове, по стълбове и по двата диагонала да са различни? $\boxed{\text{изпит 2016}}$

<u>Реш</u>. Редовете, стълбовете и 2$^{та}$ диагонала съдържат по 2016 елемента.

Могат да се получат 2.2016+1 различни сбора. (от −2016 до 2016).

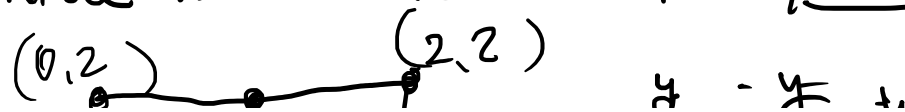
Имаме 2016 реда, 2016 стълба и 2 диагонала.

Общо искаме 2.2016+2 различни сбора

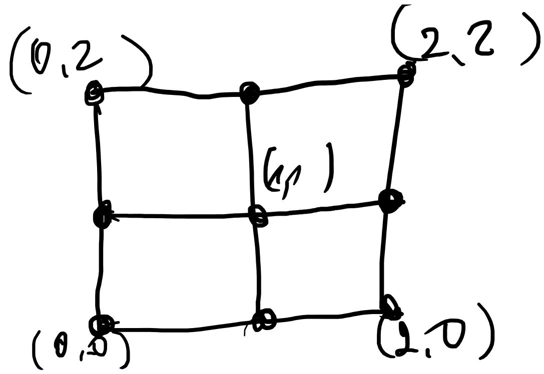
$\Rightarrow$ От принципа на Дирихле поне 2 сбора ще се повторят.

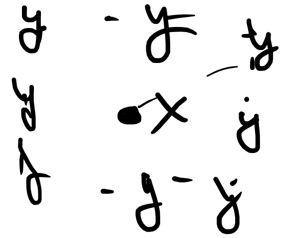
<u>Зад</u>. Нека точките с цели координати в равнината са оцветени с 8 различни цвята. Докаже, че има поне 2 едноцветни точки на разстояние по-малко от 3. $\boxed{\text{КЗ\_2016}}$

Реш



Реш




Тук
Имаме 9 точки с целочислени координати, които са на не повече от $2\sqrt{2}$ разстояние.
Но $2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow$ Има 9 точки с ц.к. на разстояние ~~не~~ по-малко от 3.

$\Rightarrow$ От принципа на Дирихле сме боядисали поне 2 от тези 9 точки в един и същ цвят. □

Зад. Дадени са м-вата $|A| = n$ и $|B| = m$.
Колко са възможните различни ф-ции $f: A \to B$ за които f е:

а) тотална

б) частична

в) инекция