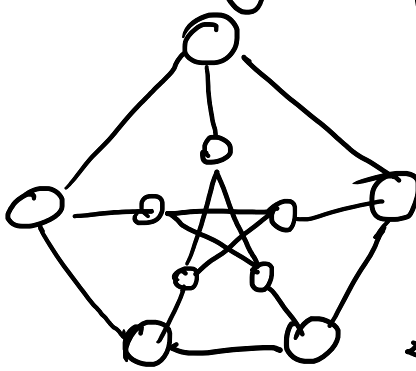
Зад. Да се док., че графът на Petersen:

а) не съдържа Хам. цикъл

б) съдържа Хам. път

→ в) не е планарен

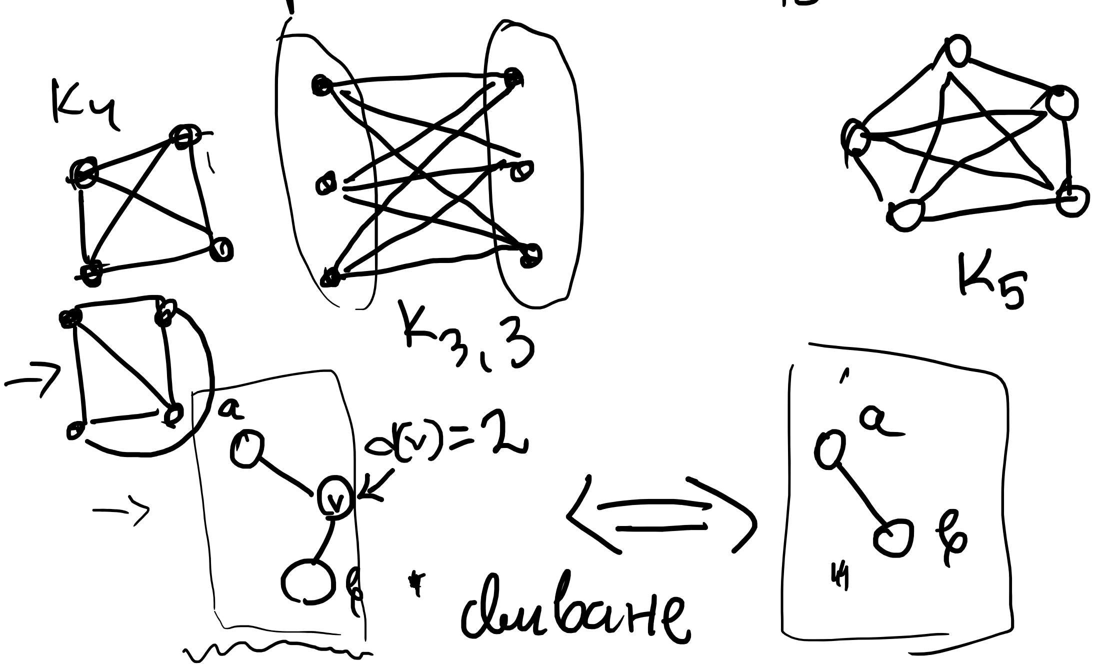
г) всичките му върхове са симетрични



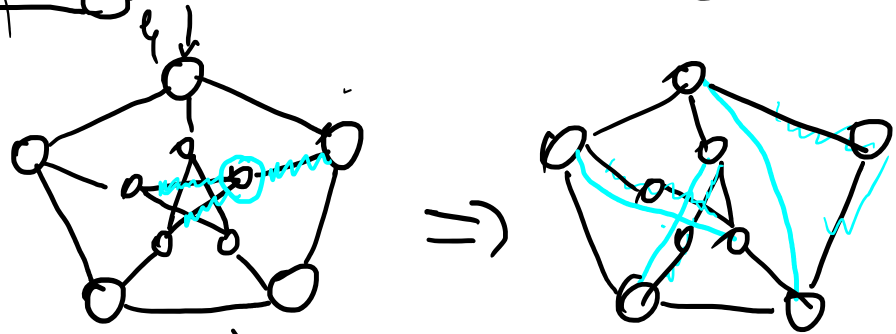
← граф на Petersen

в) Теорема на Куратовски

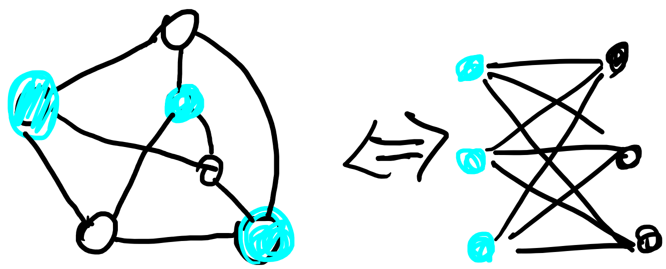
Краен граф е планарен, тогава и само тогава, когато не съдържа подграф, който хомеоморфен на $K_{3,3}$ или K_5.



свиване



граф　　　　подграф



Свитият подграф　　　　$K_{3,3}$

$\overset{\text{Т. нак}}{\Longrightarrow}$ Графът на Petersen не е планарен.

Булев куб (Хиперкуб)

- Дефиниция

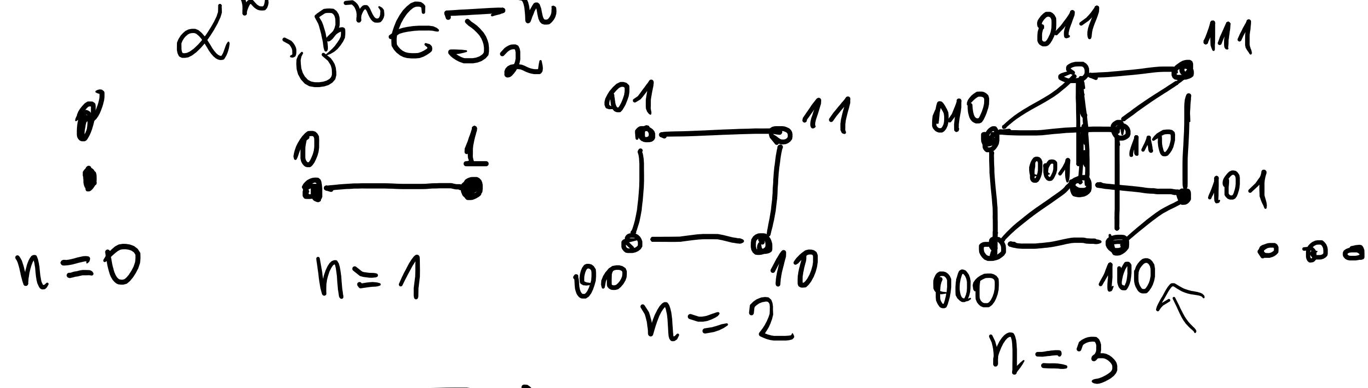
$B^n(V,E) \to$ n-мерния хиперкуб

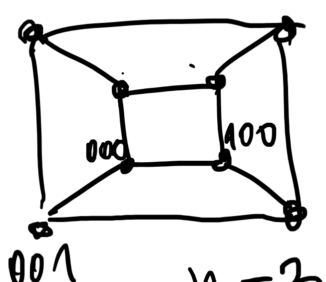
$$V = \{(a_1, a_2 \dots a_n) \mid a_i \in \{0,1\}\} = J_2^n$$

$V = \{ (a_1, a_2 \ldots a_n) \mid a_i \in \underset{J_2}{\{0,1\}} \} = J_2^n$

$E = \{ (\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) \mid \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| = 1 \}$

$\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n \in J_2^n$





• Разстояние м/у булеви вектори (м/у върхове в Хиперкуб)

Нека $\alpha, \beta \in J_2^n$. Тогава

$$\rho(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$$

Пример: $\overset{\alpha}{(1001)}, \overset{\beta}{(1100)}$

$\rho(\alpha, \beta) = 2$

$\rightarrow B^n$ е n – регулярен $(\forall v \in V,\ d(v)=n)$

Върхове : 2^n

Ребра : $n.2^{n-1}$

$\rightarrow \sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$

$n.2^n = 2|E| \Leftrightarrow |E| = n.2^{n-1}$

Зад. Док. че B^n е двуделен.

$V_1 = \{\alpha \in J_2^n \mid |\alpha| = 2k, k\in\mathbb{N}\}$ → четен бр. единици

$V_2 = \{\alpha \in J_2^n \mid |\alpha| = 2k+1, k\in\mathbb{N}\}$ → нечет. бр. ед.

3

Нека $\alpha, \beta \in V_1$

I сл. $|\alpha| \neq |\beta|$, $\Rightarrow \big||\alpha| - |\beta|\big| \geq 2$

$\Rightarrow (\alpha, \beta) \notin E$

II сл. $|\alpha| = |\beta|$

$\rightarrow \alpha\ (..0..1....)$

$\beta\ (-1-0...)$

≥ 2 разлики $\Rightarrow (\alpha,\beta) \notin E$

Зад. Намерете броя на ненаредените двойки върхове в B^n, за които $\rho(\alpha,\beta)=k$.

Реш. За $\forall \alpha \in V$ имаме $\binom{n}{k}$ други върхове

$$\alpha = (0 1 \dots 0)$$

които са на разстояние k.

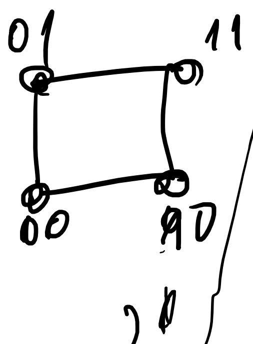
Общо имаме: $2^n \cdot \binom{n}{k}$, но тук сме броили всяка двойка два пъти ((α,β) и (β,α)) $\Rightarrow$ Отговорът ще бъде

$$\frac{2^n\binom{n}{k}}{2} = 2^{n-1}\binom{n}{k}$$

α 0 1 0 1 1 1 $\boxed{4}$

β 0 0 1 0 0 1

$4!$



Зад. Дадени са векторите $\alpha,\beta \in J_2^n$ такива че $\rho(\alpha,\beta)=m$. Да се намери броят на векторите $\gamma \in J_2^n$, за които $\rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\gamma) = m$.

Реш. γ - гама

Разгл. α, β, γ като върхове в B^n.

$\rho(\alpha,\beta) \rightarrow$ дължината на най-краткия път от α до β в B^n. (може да има повече от един най-кратък път)

B^n е неориентиран $\Rightarrow \rho(\alpha,\beta) = \rho(\beta,\alpha)$

$\Rightarrow$ Имаме $\rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\gamma) =$

$$= \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\gamma,\beta) = m = \rho(\alpha,\beta)$$

$\geq$

Оттук следва, че γ е част от най-кратък път м/у α и β.

$$\begin{array}{ll} \alpha & (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \\ \gamma & (\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n) \leftarrow \\ \beta & (\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n) \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ \gamma_i = 1 \\ \beta_i = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow \gamma$ не се различава едновременно от α и β на дадена позиция

$\Rightarrow$ общите битове на α и β, са общи

$\boxed{n-m}$

$\alpha = \gamma$
$\beta = \gamma$

$p(\alpha, \alpha) = 0$

$\Rightarrow$ можем да изберем различаващите се битове на γ по 2^m начина.

Зад. Намерете броя на различните максимални вериги в B^n.

Реш. 1) $\alpha^n \preceq \beta^n \iff \alpha_i \le \beta_i, \forall i \in I_n$

2) Верига в B^n наричаме:

$$C = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k \mid \alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \dots \preceq \alpha_k, \; p(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1\}$$

3) Слой в B^n: $B^n_k = \{\alpha \mid |\alpha| = k\}$

За да бъде макс веригата трябва

да започва от $(0,0\ldots0)$ и да завършва в $(1,1\ldots1)$.

$(0,0\ldots0) \xrightarrow{} (0,0\ldots1,0) \rightarrow (0,0,\ldots1\ldots1,0)$

избиране кой бит да сменим по n начина

избиране кой бит да сменем по $n-1$ начина

$\ldots \rightarrow (1,1\ldots0,\ldots1) \rightarrow (1,1,1\ldots1)$

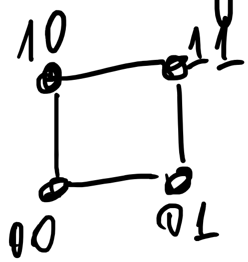
1 начин

$\Rightarrow$ Всички такива вериги са $n!$.

Зад. Докажете B^n е Хамилтонов за $n \geq 2$

Реш. Използваме индукция:

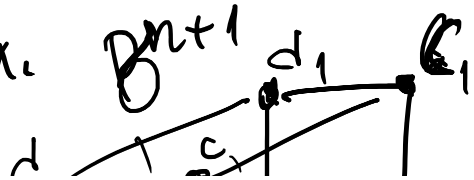
1. База $n=2$

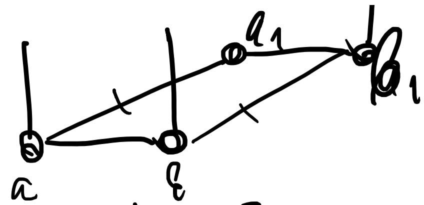


$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ ~~-~~ хам. цикъл

2. ИП. Нека n-мерния хиперкуб е Хамилтонов за някое $n \in \mathbb{N}$

3. ИС Разгл. B^{n+1}





$n=3$

$$\left.\begin{array}{l} a - b - c - d - a \\ a_1 - b_1 - c_1 - d_1 - a_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \to b \to c \to d \to \\ d_1 \to c_1 \to b_1 \to a_1 \to a \end{array}$$

В общем случае:

$$\left.\begin{array}{c} \to x_{11}, x_{12}, x_{13} \dots x_{1n} \\ \downarrow 2^n-1 \\ x_{2^n1}\, x_{2^n2}\, x_{2^n3} \dots x_{2^nn} \\ \downarrow 1 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13} \dots x_{1n} \end{array}\right\} \text{ИП}$$

$$(0, x_{11}, x_{12} \dots x_{1n}) \leftarrow$$

$$\downarrow 2^n-1$$

$$\to (0, x_{2^n1}, x_{2^n2} \dots x_{2^nn})$$

$$\downarrow 1$$

$$\to (1, x_{2^n1}, x_{2^n2} \dots x_{2^nn})$$

$$\downarrow 1$$

$$(1, x_{(2^n-1)1}, x_{(2^n-1)2} \dots x_{(2^n-1)n})$$

$$\downarrow 2^n-2$$

$$(1, x_{11}, x_{12} \dots x_{1n})$$
$$\downarrow 1$$
$$(0, x_{11}, x_{12} \dots x_{1n})$$

Зад. Док., че B^n е планарен за $n \leq 3$, но не е планарен за $n \geq 4$.

$$\boxed{B^4 \qquad B^n \subseteq B^{n+1} \subseteq B^{n+2}}$$

Булеви функции

1. Дефиниции:

$$f : J_2^n \to J_2$$

$$\tilde{F}_2^n = \{ f(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in J_2 ,\ f(x_1 \dots x_n) \in J_2 \}$$

$$J_2 = \{0, 1\}$$

$$|\tilde{F}_2^n| = 2^{2^n}$$

(2^n ст-сти на domain, 2^{2^n} ф-ции ~~[illegible]~~ на ф-ията)

(2 ст-сти на domain, 2 … ф-ията)

~~$|A \times B| = |A| \cdot |B|$~~

~~$f: J_2^n \to J_n$~~

~~$|J_2^n| = |J_2^n \times J_2| = 2^{2^n}$~~

~~$A \times B$~~ $\quad 2^{2^2} = \underline{16}$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\wedge$	$\overline{f_{14}}$	x	$\overline{f_{12}}$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{y}$	$\leftarrow$	$\overline{x}$	$\rightarrow$	$\mid$	1

$\downarrow$ – стрелка на Пирс

$\mid$ – черта на Шефер

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$x \mid y = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

3. Св-ва