Задача 7: Колко идентификатора с дължина n могат да се съставт в езика Ada. (Идентификатор в Ada започва с буква, продължава с буква, цифра или знак за подчертаване. Знаците за подчертаване не могат да са съседни или в края на идентификатора. Малките и главните букви са неразличими).

Screen clipping taken: 26-Nov-21 09:25

<u>Реш.</u>

- $n = 1$ $\quad 26$
- $n = 2$ $\quad 26.36$
- $n \geq 3$

$$p = \underset{26}{\underset{\uparrow}{A}}\, a_1 a_2 \dots a_{n-2}\, \underset{36}{\underset{\uparrow}{B}}$$

Търсим броя на редиците $a_1 \dots a_{n-2}$, за които a_i е б/ц/подч. и подч. не са съседни.

Нека '&' да е б/ц и '_' да е подчертавка.

Макс брой _ в редицата е $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$.

Нека p е бр. на подчертавките. $p \in \left[0; \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil\right]$

$$\dots \underset{1}{\_} \dots \underset{2}{\_} \dots \underset{3}{\_} \dots \underset{p-1}{\_} \dots \underset{p}{\_} \dots$$

$$\to \dots \underset{1}{\_}\,\& \dots \underset{2}{\_}\,\& \dots \underset{3}{\_}\,\& \dots \underset{p-1}{\_}\,\& \dots \underset{p}{\_} \dots$$

Останали са ни: $n-2-p-(p-1) = n-2p-1$ & за слагане. (! случая с $p=0$).

$$\dots \underset{1}{\_}\,\& \dots \underset{2}{\_}\,\& \dots \underset{3}{\_}\,\& \dots \underset{p-1}{\_}\,\& \dots \underset{p}{\_} \dots$$

$\underbrace{\dots}_{x_1}\ \underset{1}{\_}\ \&\ \underbrace{\dots}_{x_2}\ \underset{2}{\_}\ \&\ \underbrace{\dots}_{x_3}\ \underset{3}{\_}\ \&\ \dots\ \underset{p-1}{\_}\ \&\ \underbrace{\dots}_{x_p}\ \underset{p}{\_}\ \underbrace{\dots}_{x_{p+1}}$

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_p+x_{p+1}=n-2p-1$$

$$\binom{n-2p-1+p+\cancel{1}-\cancel{1}}{n-2p-1}=\binom{n-p-1}{n-2p-1}=\binom{n-p-1}{n-p-1-(n-2p-1)}$$

$=\binom{n-p-1}{p}$ $\rightarrow$ брой начини за разпределение на '&' и '_'

В редицата имаме $n-2-p$ на брой '&'. За $\forall\&$ имаме по 36 варианта.

$\Rightarrow$ $\binom{n-p-1}{p}\cdot 36^{n-2-p}$ ще дава броя на редиците $a_1 \dots a_{n-2}$, в които има p '_' и е спазено правилото да няма съседни '_'.

Това беше за фикс p. За $p\in\left[0,\left\lceil\frac{n-2}{2}\right\rceil\right]$ получаваме: $\sum_{p=0}^{\lceil\frac{n-2}{2}\rceil}\binom{n-p-1}{p}\cdot 36^{n-2-p}$ – броят на редиците $a_1 \dots a_{n-2}$ изобщо (без да фикс. p).

Краен отг.: $26\cdot\sum_{p=0}^{\lceil\frac{n-2}{2}\rceil}\binom{n-p-1}{p}\cdot 36^{n-2-p}\cdot 36$

$n\geq 3$

$A=\{a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_n\}$ –

$A = \{ a_1 \quad a_2 \; --- \; a_n \}$ –

$B = \{ b_1 \quad b_2 \; - \ldots \; ---- \; b_m \}$

$a_1 \to m \qquad\qquad a_n \to m - n + 1$

$a_2 \to m - 1 \qquad\qquad m - (n-1)$

$a_3 \to m - 2 \; ---$

Зад. Да се определи коеф. пред: $\boxed{\to ДР}$

а) $x^{10}y^5$ в $(3x+2y)^{15}$

б) x^{32} в $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{1024}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i$$

б) $$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{1024} = \sum_{i=0}^{1024} \cdot \binom{1024}{i} \cdot x^{1024-i} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{1024} \binom{1024}{i} \cdot x^{1024-2i}$$

интересува ни $\binom{1024}{i}$ пред $x^{1024-2i} = x^{32}$

$1024 - 2i = 32$

$i = 496$

$\Rightarrow$ Отг: $\binom{1024}{496}$

Задача 2: Келнер подготвя 3 маси за банкет и трябва да ги зареди с 4 вида питиета, като от всяко питие са му дадени по 10 бутилки. Той набързо нарежда бутилките, без да следи къде по колко от всеки вид бутилки слага. Сигурно ли е, че както и да е разпределил питетата, то ще има маса, на която са поставени поне по 4 бутилки от два вида питиета?

Screen clipping taken: 26-Nov-21 09:59

Реш. Имаме 10 бутилки от вид да разпределим м/у 3 маси $\Rightarrow$ Има маса, на която са поставени поне $\lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ бутилки.

$\Rightarrow$ Имаме:
- маса A с поне 4 бутилки от питие 1
- маса B с поне 4 бутилки от питие 2
- маса C с поне 4 бут. от питие 3
- маса D с поне 4 бут. от питие 4

Но за банкета има приготвени само 3 маси.

$\Rightarrow$ Поне 2 от масите A, B, C, D ще съвпадат. (ще е всъщност 1 маса).

Зад. Докажете с комбинаторни разсъждения!

→ а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

в) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

г) $\sum^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

г) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n.2$

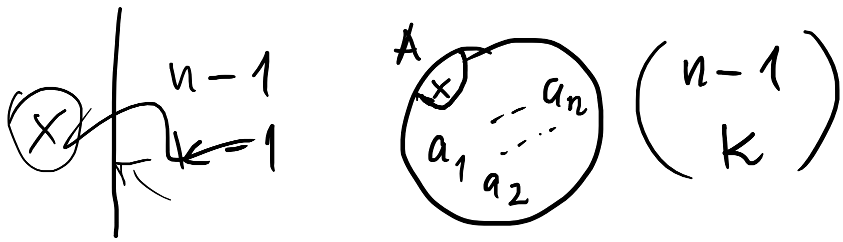
Нека $|A| = n$

<u>Реш.</u> $\binom{n}{k}$ – бр. на k-елементните подм-ва на A ~~измежду n-те елемента~~

• Ще разделим k-ел. подм-ва на A на 2 групи:

1) съдържащи $x \in A$ → $\binom{n-1}{k-1}$ варианта/подмн-ва

2) несъдържащи x → $\binom{n-1}{k}$ варианта/подмн-ва



г) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$

• Колко са 1-щите във всички n-мерни булеви вектора?

Нека k е броят на единиците във n-мерен вектор.

Имаме $\binom{n}{k}$ n-мерни бул. в-ра с по k единици.

Общо имаме $\binom{n}{k}.k$ единици в тези в-ри.

$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ → брой единици във всички n-мерни вектора

• $n \cdot 2^{n-1}$

$0\,0 \ldots 0\,0\,0$
$0\,0 \ldots 0\,0\,1$
$0\,0 \ldots 0\,1\,0$
$0\,0 \ldots 0\,1\,1$
$\ldots$
$1\,1 \ldots 1\,0\,1$
$1\,1 \ldots 1\,1\,0$
$1\,1 \ldots 1\,1\,1$

$\forall$ вектор има свой противоположен

// $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

$\exists\, \alpha' = (\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots \overline{\alpha_n})$ //

Като съберем броя на единиците в 2 противоположни вектора получаме единици n.

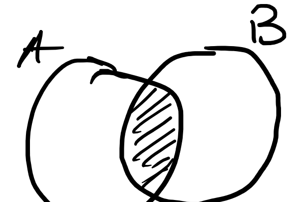
Имаме 2^n на брой вектора.

$\Rightarrow$ имаме 2^{n-1} на брой двойки противоп. вектора

Всяка двойка има общо n на брой единици

$\Rightarrow$ всички вектори (n-мерни) съдържат общо $n \cdot 2^{n-1}$ единици.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$



• $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

• $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

C

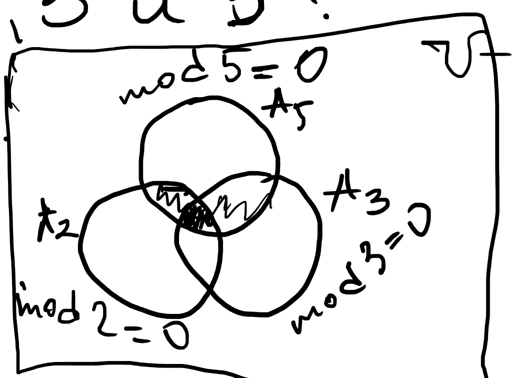
$\setminus C$ $\quad |A \cap B \cap C|$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

! Принцип за включване и изключване!

Зад. Колко са числата от 1 до 100, които не се делят на нито едно от числата 2, 3 и 5?

Реш.



U - числата от 1 до 100

$$|U| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| =$$
$$= 100 - (50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3) =$$
$$= 100 - (103 - 32 + 3) = \cancel{100} - 6 + 32 = \underline{26}$$

Зад. 25 студенти. От тях

- А1 – 14 студенти
- ДИС – 11 студенти
- УП – 14 студенти
- А1 и ДИС – 8 студенти ←
- А1 и УП – 9 студенти
- ДИС и УП – 7 студенти
- А1, УП и ДИС – 5 студенти

Колко студенти не са си взели нито един от трите изпита?

Отг. е 5.

Зад. $x_1 + x_2 + x_3 \le 11 \quad , x_i \ge 0$ ←

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \quad , x_4 \ge 0$$

↑ допълнението на $x_1 + x_2 + x_3$ до x_4

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3}$$

$\cancel{\binom{11+4-1}{11}}$

$$x_1 + x_2 + x_3 < 11 \iff x_1 + x_2 + x_3 \le 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 , x_4 \ge 1$$

$$y = x_4 - 1$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \cancel{10}\ 48 \quad x_i \ge 2$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \cancel{[illegible]}\ 48 \qquad x_1 \ge 2$$
$$y_1 = x_1 - 2 \to \qquad x_3 > 3$$
$$y_3 = x_3 - 4 \to$$

Зад. По колко начина можем да изберем 5 карти от стандартно тесте, така че в извадката да има карти от 4-те бои?

Реш. $13.13.13.13.48$

A♠ | ♡ | ♢ | ♣ | 10♠ = 10♠ | ♡ | ♢ | ♣ | A♠

• Да означим с A_i извадките, в които липсва цвят i.

$$|A_i| = \binom{52-13}{5} = \binom{39}{5}$$

• Извадките, в които липсват i и j.

$$|A_i \cap A_j| = \binom{52-26}{5} = \binom{26}{5}$$

• Извадките, в които липсват i, j и k.

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{52-39}{5} = \binom{13}{5}$$

• Извадките, в които липсват и 4-те бои са 0.

$$\text{ОТГ} = \binom{52}{5} - |A_♠ \cup A_♢ \cup A_♡ \cup A_♣| =$$

$$= \binom{52}{5} - \left(4 \cdot \binom{39}{5} - \underbrace{\binom{4}{2}\binom{26}{5}}_{|A_i \cap A_j|} + \underbrace{\binom{4}{3}\binom{13}{5}}_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \underbrace{0}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4}\right) =$$

$= \binom{52}{5} - \left(4\cdot\binom{..}{5}\right) - \binom{.}{2}\binom{.}{5} + \binom{.}{3}\binom{.}{.}$

$|A_i \cap A_j|$ $\quad A_i \cap A_j \cap A_k \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

$= \binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}$

Зад. Дадени са м-вата $|A| = n$ и $|B| = m$. Какъв е броят на функциите $f: A \to B$, които са сюрекции?

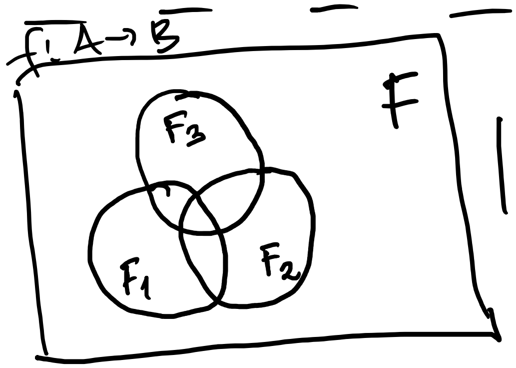
Реш. Нека $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$

$B = \{b_1, b_2 \dots b_m\}$

От броя на всички ф-ции ще извадим броя на неблагоприятните.

Всички функции от A към B са m^n.

$m = 3$



$|F| - |F_1 \cup F_2 \cup F_3|$

Означаваме $F_i = \{f \in F \mid \nexists a \in A : f(a) = b_i\}$

$F = \{f : A \to B\}$

$F' = \{f \in F \mid f \text{ е сюрекция}\}$

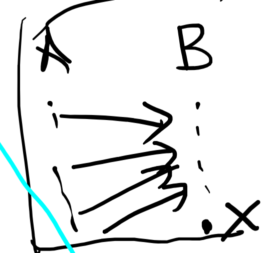
$|F'| = |F| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| =$

$m-1$

$$= |F| - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |F_i|} + \sum_{i<j} |F_i \cap F_j| - \dots + (-1)\,|F_1 \cap F_2 \dots \cap F_m|$$

$$= m^n - m\cdot(m-1)^n + \binom{m}{2}\cdot(m-2)^n - \binom{m}{3}\cdot(m-3)^n + \dots + (-1)^{m-1}\cdot\binom{m}{m}(m-m)^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \binom{m}{i} \cdot (m-i)^n$$



Нека $x \in B$ няма първообраз.

$\Rightarrow$ за $\forall a \in A$ има по $m-1$ варианта за $f(a)$. Тоест имаме $(m-1)^n$ начина за разпределение на $f(a)$ за всички a-та (за ф-циите, в които x няма първообраз)

- Нека $x, y \in B$ нямат първообрази.

$\Rightarrow \forall a \in A$ има по $m-2$ варианта за $f(a)$. Тоест имаме $(m-2)^n$ функции, в които x и y нямат първообрази

Зад. На хоро в кръг са се хванали общо n души, м/у които са Иванчо и Марийка. Колко са възможните наредби, в които:

а) Иванчо е до Марийка

б) Иванчо не е до Марийка.

Реш. а) $\boxed{И \mid М}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \dots\ \_}_{n-2}$

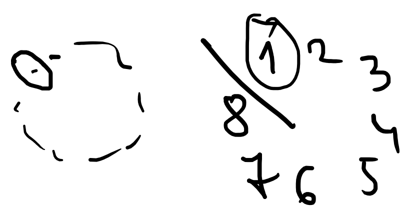
Останалите хора нареждаме по $(n-2)!$ нач.

$\boxed{М \mid И}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{n-2}$

Иванчо и М. можем да ги swap-ваме

$\Rightarrow$ Отг. е $2 \cdot (n-2)!$

б)



$\boxed{1}\ \underbrace{2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ }_{(n-1)!}$

Имаме общо $(n-1)!$ начина n човека да се хванат на хоро. От тях вадим неблагоприятните (тоест сметнатите в а)) т.е.

$\Rightarrow$ Отг $= (n-1)! - 2(n-2)! =$

$= (n-2)!\,(n-1-2) = (n-2)! \cdot (n-3)$