Friday, 17 December, 2021 09:18

Зад. 11 ребра
6 върха

Реш. Допускаме, че в графа може да има изолиран връх. Без него остават 11 ребра и 5 върха.

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

В случая $\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2} = 10$ $\lightning$

Зад. k-рег. граф $G(V,E)$, $\forall v \in V$, $d(v) = k$

V_0, V_1
V_0, V_2
...
V_0, V_k

$V_0 - V_1 - V_2 - \dots \quad V_{k-2}$

$k-1$ $\quad k-1$ $\quad k-2$ $\quad 1$ $\quad V_k$ $\quad k-k-2$

V_{k-1}

$M = \{ v_0, v_1, v_2, v_3 \dots v_{k-2} \}$

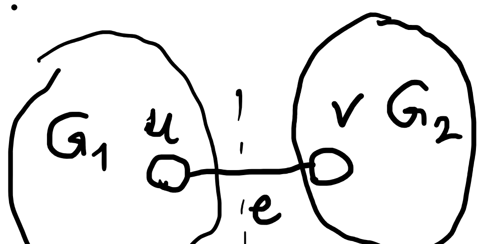
$\to \quad k \quad k-1 \quad k-2 \quad k-3 \quad k-(k-2)=2$

$v_0 - v_1 - v_2 - v_3 \dots v_{k-1} - v_k$

Дължината на пътя е k.

<u>Зад.</u> Даден е граф $G(V,E)$. Реброто 'e' се нарича <u>мост</u> в графа, ако при отстраняването му се увеличава броят на свързаните компоненти в графа. Док., че ако всички върхове на графа са от четна степен, то той не съдържа мост.

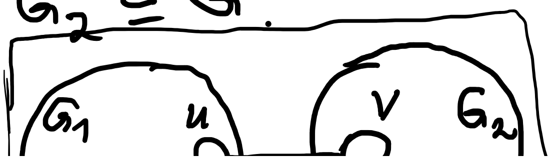
<u>Реш.</u>



G_1 и G_2 са свързани комп.

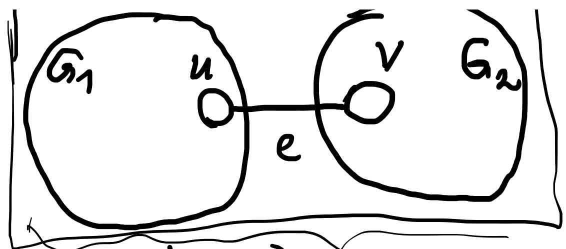
Доп., че $\forall v \in V$, $d(v) = 0 \pmod 2$ и в G има мост. Нека този мост е между свързаните компоненти G_1 и G_2

$G_1 \subseteq G$, $G_2 \subseteq G$.



$u \in V_1$

$v \in V_2$



$v \in V_2$

$e = (u, v)$

Знаем, че $d(u)$ е четно, както и $d(v)$ е четно.

Нека разгл. свързаните компоненти на G без G_2.

$G' = G \setminus G_2$. Тогава $d(u)$ става нечетно.

$\forall w \in V$, $u \neq w$ $d(w)$ е четно.

$\Rightarrow \sum\limits_{a \in V \setminus V_2} d(a)$ е нечетно ↯ във всеки граф

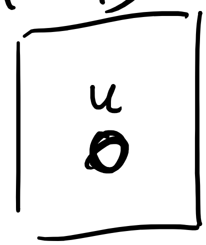
$\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E|$

$\Rightarrow$ В графа няма мостове.

<u>Зад.</u> <u>Турнир</u> е ориентиран граф $G(V, E)$, в който всеки два върха v_i и v_j са свързани с точно едно ребро (или $(v_i, v_j) \in E$, или $(v_j, v_i) \in E$). Да се док. че във всеки турнир $\exists$ прост път, който съдържа всички върхове на граф. (Хамилтонов път).

Реш. Ще изп. индукция. (по $|V|$)

1 База: $|V|=1$, ясно е, че има Хам път в графа.



2. ИП Нека във всеки турнир с n върха има Хам. път.

3. ИС Разгл. $G(V,E)$ - турнир с $|V|=n+1$

Нека $a_{n+1}\in V$. Имаме, че $G'(\underbrace{V\setminus\{a_{n+1}\}}_{V'},E')$ е турнир с $|V'|=n$.

$\overset{\text{по ИП}}{\Rightarrow}$ в G' има Хам. път. Нека това е:

$$p = a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots \to a_{n-1} \to a_n$$

$$a_{n+1}$$

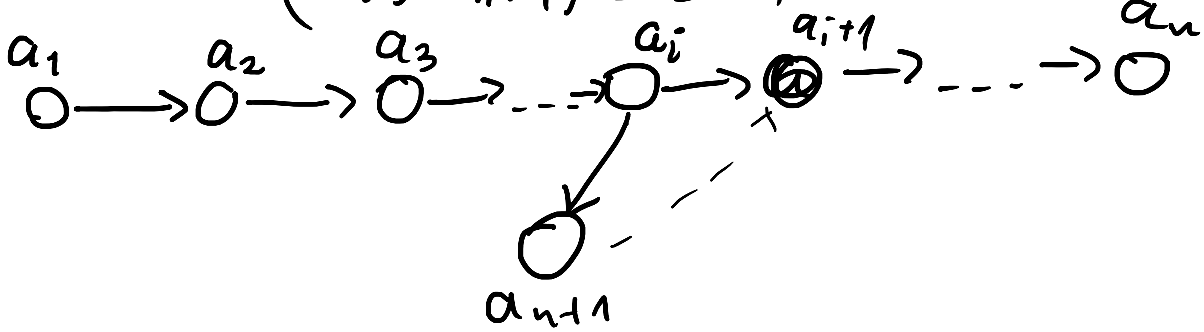
p съществува в G' $\Rightarrow$ съществува и в G

Доп., че в G няма Хам. път. Тогава ще покажем, че $(a_i, a_{n+1}) \in E$, $i=1\dots n$

3.1. База: Ако $(a_{n+1}, a_1) \in E$, то получаваме следния Хам. път $a_{n+1} \to a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n$.

$\Rightarrow (a_{n+1}, a_1) \in E \Rightarrow (a_1, a_{n+1}) \in E$

3.2. ИП Нека $(a_i, a_{n+1}) \in E$,



3.3. ИС

Тогава, ако $(a_{n+1}, a_{i+1}) \in E$, то

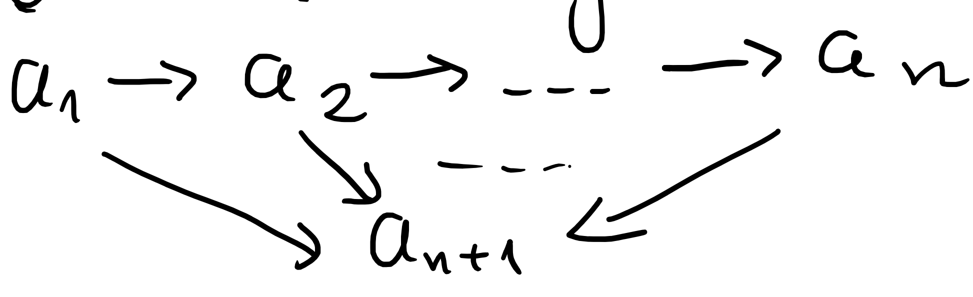
пак ще получим Хам. път:

$$a_1 \to a_2 \to \dots a_i \to a_{n+1} \to a_{i+1} \to \dots a_n$$

от допуснатото $\Rightarrow (a_{n+1}, a_{i+1}) \notin E \Rightarrow (a_{i+1}, a_{n+1}) \in E$

$\Rightarrow (a_i, a_{n+1}) \in E$ за $\forall i = 1 \dots n$

Но в такъв получаваме:



Тогава $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots a_n \to a_{n+1}$

е Хам. път ↯

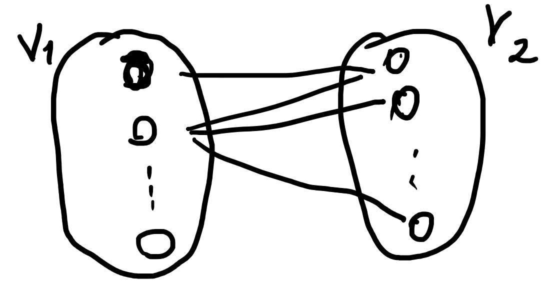
$\Rightarrow$ G има Хамилтонов път.

$\Rightarrow \exists$ V_1 или ...

Зад. Да се док., че графът $G(V,E)$ е двуделен точно тогава ($\Leftrightarrow$), когато не съдържа цикъл с нечетна степен.

Реш. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека $G(V,E)$ е двуделен.

$$\Rightarrow \exists\, V_1, V_2 \subset V : V_1 \cup V_2 = V \wedge V_1 \cap V_2 = \emptyset \wedge \forall (u,v) \in E, (u \in V_1 \wedge v \in V_2)$$



~~I. сл. В G няма цикли.~~
~~$\Rightarrow$ няма нечетни цикли~~
~~II сл. В G има поне един цикъл.~~

Доп., че имаме цикъл с нечетна дължина. Б.О.О той започва от $u \in V_1$.
На всяка стъпка от цикъла ще сменяме дяловете (от V_1 във V_2 или от V_2 във V_1)
$\Rightarrow$ с нечетен брой стъпки, започвайки ...

от V_1 ще се окажем във V_2 винаги.

⇒ няма как да има цикъл у

⇒ всеки цикъл в двуделен граф е с четна дължина.

$\boxed{\Leftarrow}$

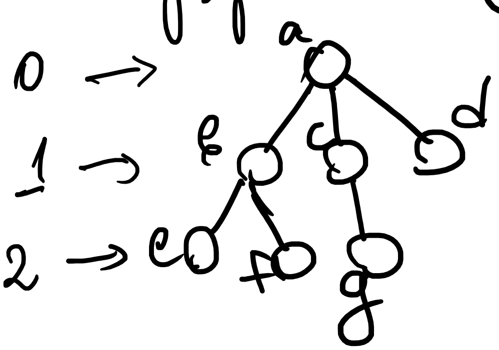
~~Б.О.О = без ограничение на общността~~

$$\begin{cases} x+y=5 & (a,b) \\ xy=10 & (b,a) \end{cases}$$

Нека в $G(V,E)$ няма цикъл с нечетна дължина.

I сл. В $G(V,E)$ няма цикли.

⇒ всичките му свързани комп. са дървета (G е гора)



Всяко дърво е двуделен граф!

Дяловете са:

- четните слоеве
- нечетните слоеве

$V_1=\{a,c,f,g\}$ $V_2=\{b,c,d\}$

Гората е двуделен граф също!

II сл. В G има цикли. Нека следното е цикъл в G:

$$p = a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$$

Дължината на p е n и всички цикли в графа (ако има такива) са с четна дължина $\Rightarrow$ n е четно.

Нека $A = \{a_k \mid k \text{ е нечетно}\}$

$B = \{a_k \mid k \text{ е четно}\}$

Нека $a_i, a_j \in A \Rightarrow i, j$ са нечетни. Доп., че има $(a_i, a_j) \in E$. Тогава получаваме:

$$a_i - a_{i+1} - a_{i+2} - \dots - a_{j-1} - a_j$$

Дължината на този цикъл е $j-i+1$, което е нечетно. ↯

$\Rightarrow (a_i, a_j) \notin E \quad , a_i, a_j \in A$

Аналогично $(a_i, a_j) \notin E \quad , a_i, a_j \in B$

Доп. че $\exists x \in V : \exists a_i \in A \land \exists a_j \in B$,

$$(a_i, x) \in E \land \underline{(x, a_j)} \in E$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$(x, a_i) \in E \qquad \underline{(a_j, x)} \in E$$

(i е нечетно, j е четно)

Б.О.О $i < j$. Тогава имаме:

$$p' = \underbrace{a_1 - a_2 - \ldots - a_i - x - a_j - a_{j+1} - \ldots - a_n}$$

Дължината на този цикъл е:

$$i - 1 + 2 + n - j + 1 = n + i - j + 2$$

n → четно, i → нечетно, j → четно, 2 → четно

Тази дължина е нечетно число ↯

$\Rightarrow \nexists x \in V : \exists a_i \in A \; \exists a_j \in B : (a_i, x) \in E$
$(x, a_j) \in E$

$\Rightarrow \forall x \in V$ може да се присъди към точно едната група.
Така получаваме 2та дяла:
$V_1 \supseteq A$, $V_2 \supseteq B$
$\Rightarrow G$ е двуделен

Зад. Док, че във всеки неориент. граф има път от всеки връх с нечетна степен до друг връх с нечетна степен.

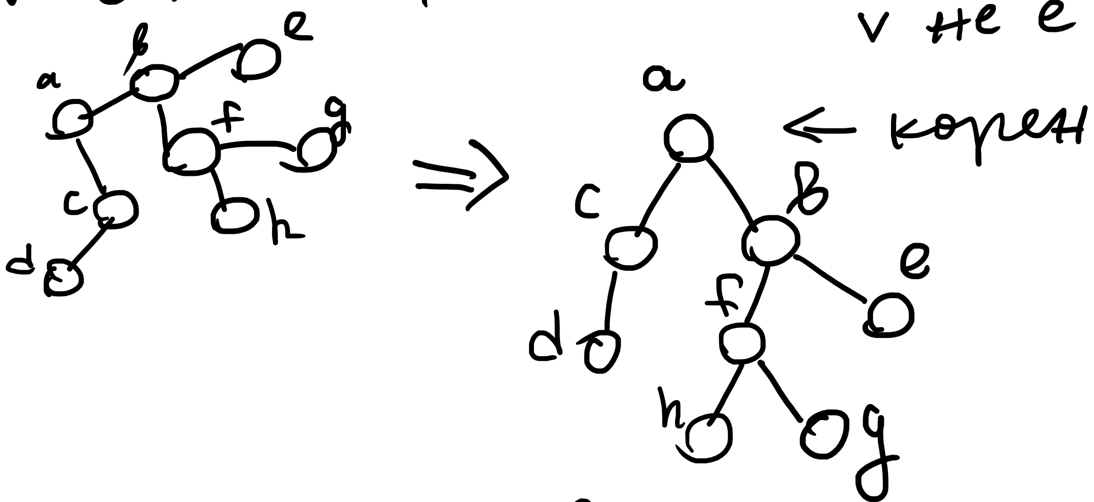
Зад Ребрата в K_6 са оцветени в синьо и червено. Док, че в K_6 има триъгълник с едноцветни ребра
// от изпит 2021 //

Дървета

• $T(V,E)$ е дърво $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) T е свързан граф
2) T няма цикли

2) в T няма цикли

• $v \in V$ е листо в $T(V,E) \overset{def}{\Longleftrightarrow} d(v)=1$ и v не е корен

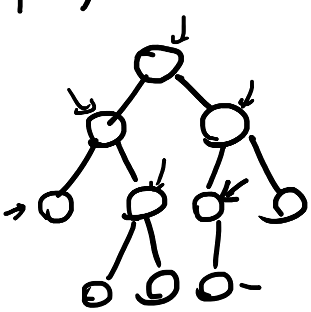


• Разклоненост на връх

$s(v)=k$, $v \in V$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ v има k деца

• k-ично дърво

$T(V,E)$ е k-ично дърво $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall v \in V \; s(v) \le k$



$k=2$

Зад. Нека $G(V,E)$ има поне два върха. Докажете следните твърдения са еквивалентни:

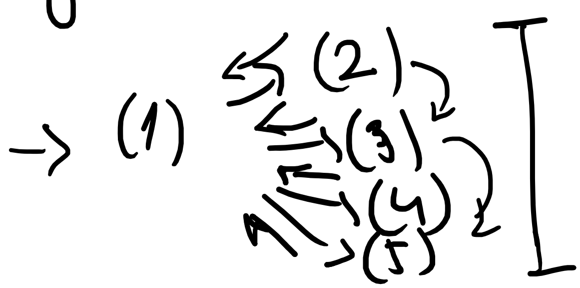
(1) G е дърво

(2) G е свързан с $|V|-1$ ребра

(3) G е свързан, но при отстраняване на произволно ребро се получава несвързан граф

(4) Всяка двойка върхове е свързана с единствен прост път

(5) в G няма цикли, но при добавяне на ребро м/у произволни 2 върха се получава цикъл.



(1) → (2), (2) → (3), (3) → (4), (4) → (5), (5) → (1)

1 2 3 4 5

Ако G е свързан, то

$$|E| \geq |V| - 1$$