Relations_Functions

Thursday, 4 November, 2021 19:57

Зад. $R \subseteq A \times A$ е рефл. и транзит.

Деф. $\sim \subseteq A \times A$: $a \sim b \iff aRb \wedge bRa$.

Док, че $\sim$ е Р.Е.

+зад Имаме $F = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$. Дефинираме

$\prec \subseteq F \times F$: $[a] \prec [b] \iff \exists x \in [a]\ \exists y \in [b] : xRy$

Док, че $\prec$ е част. наредба.

Screen clipping taken: 05-Nov-21 09:29

Реш а) рефл.

R е рефл. $\Rightarrow aRa\ \forall a \in A \Rightarrow aRa \wedge aRa \Rightarrow a \sim a$

б) симетричност, $a \neq b$

Нека $a \sim b \iff aRb \wedge bRa \iff bRa \wedge aRb \iff b \sim a$

в) транзит.

Нека $a \sim b \wedge b \sim c \iff (aRb \wedge bRa) \wedge (bRc \wedge cRb)$

$\iff (aRb \wedge bRc) \wedge (cRb \wedge bRa) \Rightarrow aRc \wedge cRa$

$\Rightarrow a \sim c$

+реш. а) рефл.

Нека $[a]_\sim$ $a \in [a]_\sim \wedge aRa \Rightarrow [a]_\sim \prec [a]_\sim$

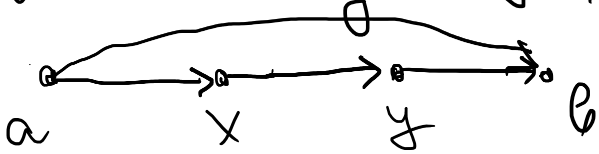
б) антисиметричност $([a]_\sim \neq [b]_\sim)$

Нека $[a]_\sim \prec [b]_\sim \iff \exists x \in [a]_\sim\ \exists y \in [b]_\sim : xRy$

$x \sim a \iff xRa \wedge aRx$

$y \sim b \iff yRb \wedge bRy$

$aRx \wedge xRy \wedge yRb \Rightarrow aRb$



Понеже $[b]_\sim < [a]_\sim \Rightarrow bRa$

аналог. на горните разсъждения

Тогава имаме: $aRb \wedge bRa \Leftrightarrow a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$ ↯

$\Rightarrow ([b]_\sim, [a]_\sim) \notin <$

в) транзит.

Нека $\underbrace{[a]_\sim < [b]_\sim} \wedge \underbrace{[b]_\sim < [c]_\sim}$

$\Rightarrow \exists x \in [a]_\sim \ \exists y_1 \in [b]_\sim : xRy_1$

$\exists y_2 \in [b]_\sim \ \exists z \in [c]_\sim : y_2Rz$

$y_1; y_2 \in [b]_\sim \Rightarrow y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow y_1Ry_2 \wedge y_2Ry_1$

$xRy_1 \wedge y_1Ry_2 \wedge y_2Rz \Rightarrow xRz$

$\Rightarrow \exists x \in [a]_\sim \ \exists z \in [c]_\sim : xRz$

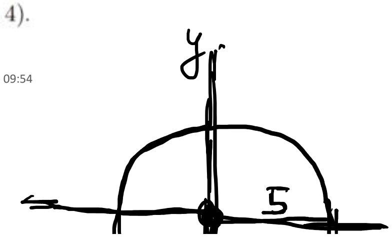
Зад.:

Задача 1 Точките в равнината можем да представим чрез техните координати като двойки реални числа: $R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, \ y \in R\}$. Релацията $P \subset R^2 \times R^2$ е определена по следния начин:

$$P = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}$$

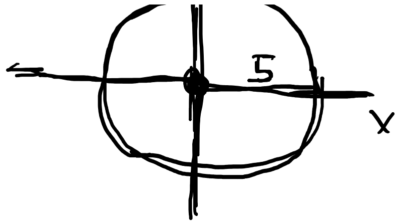
Да се докаже, че P е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката $(3, 4)$.

Screen clipping taken: 05-Nov-21 09:54



$[(3, 4)]_P$

Търсим тези $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Търсим тези $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$((3,4),(x,y))\in P$

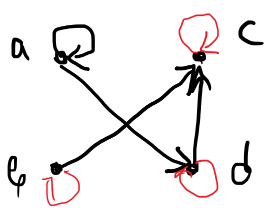
$3^2+4^2=x^2+y^2$

$\to x^2+y^2=25$

$P\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$

Моят e-mail: rado111992@abv.bg

Затваряне на релации



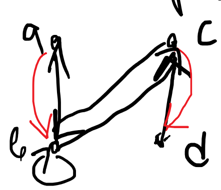
$R\subseteq A\times A$

$Id_A=\{(x,y)\mid x=y\}$

$refl(R)=R\cup Id_A$

Рефлексивно затваряне

• Симетрично затваряне



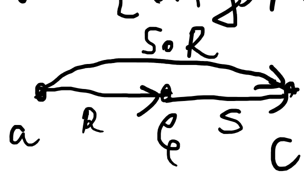
$sym(R)=R\cup R^{-1}$

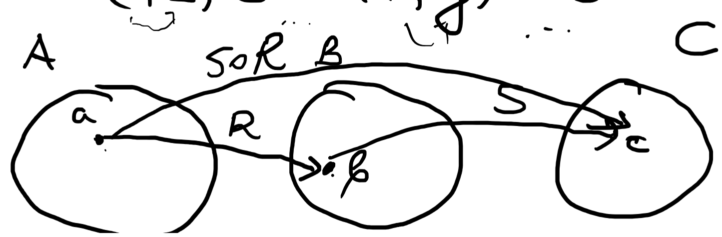
• Транзитивно затваряне

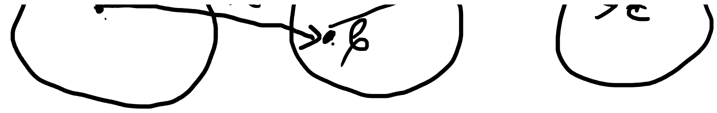
- Композиция на релации

Нека $R\subseteq A\times B$ $S\subseteq B\times C$

$S\circ R=\{(x,y)\mid\exists z\in B:(x,z)\in R\wedge(z,y)\in S\}$



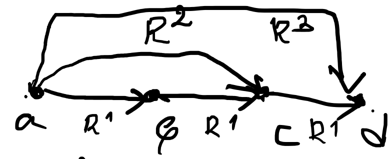




„S след R" $R \subseteq A \times B$ $S \subseteq B \times C$

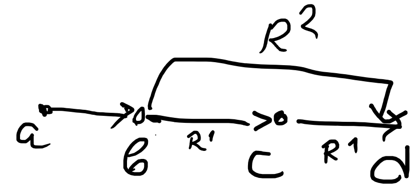
$S \circ R = A \times C$

$$R^1 = R$$
$$R^{n+1} = R^n \circ R$$



$R^2 = R \circ R$

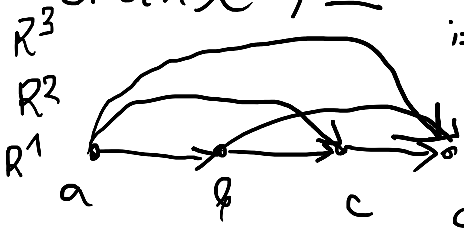
$R^3 = R^2 \circ R$



$R^3 = R^2 \circ R$

$S \circ R \neq R \circ S$

$$trans(R) \overset{def}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \dots$$



Зад. Нека $R_1 \subseteq A \times A$ и $R_2 \subseteq A \times A$ са Р.Е. над крайно м-во. Проверете дали следните са Р.Е:

a) $R_1 \cap R_2$

б) $R_1 \cup R_2$

в) $R_1 \Delta R_2$ $(x,x) \in R_1 \quad (x,x) \in R_2 \Rightarrow (x,x) \notin R_1 \Delta R_2$

$R_1 = R_2$

$R_1 \Delta R_2 = \varnothing$

Реш. a) • рефл. $R = R_1 \cap R_2$

R_1 рефл. $\Rightarrow \forall x \in A \quad (x,x) \in R_1$

R_2 е рефл. $\Rightarrow \forall x \in A \quad (x,x) \in R_2$

$\Rightarrow (x,x) \in (R_1 \cap R_2) \rightarrow (x,x) \in R \Rightarrow R$ е рефл.

• симетричност

Нека $(x,y) \in R$, $x \neq y \iff (x,y) \in (R_1 \cap R_2)$

$\iff (x,y) \in R_1 \wedge (x,y) \in R_2 \underset{R_1 \text{ и } R_2}{\Longrightarrow} (y,x) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_2$

$\Leftrightarrow (x,y)\in R_1 \wedge (x,y)\in R_2 \underset{\substack{R_1 \text{ и } R_2 \\ \text{са симетр.}}}{\Longrightarrow} (y,x)\in R_1 \wedge (y,x)\in R_2$

$\Rightarrow (y,x)\in(R_1\cap R_2) \Rightarrow (y,x)\in R$

$\Rightarrow R$ е симетрична

- транзитивност

Нека $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \quad , \forall x,y,z\in A$

$\rightarrow (x,y)\in(R_1\cap R_2) \Rightarrow (x,y)\in R_1 \wedge (x,y)\in R_2$

$(y,z)\in(R_1\cap R_2) \Rightarrow (y,z)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_2$

$\Rightarrow (x,z)\in R_1 \wedge (x,z)\in R_2 \Rightarrow (x,z)\in(R_1\cap R_2)$

$\Rightarrow (x,z)\in R$

$\Rightarrow R$ е транзитивна

$\Rightarrow R=R_1\cap R_2$ е Р.Е.

$A=\{a,b,c,d\}$

$R_A=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

$\rightarrow R'_A=\{(a,b),(b,c),(a,c),(d,a)\}$

б) $R=R_1\cup R_2 \quad , R_1\subseteq R , R_2\subseteq R$

- Рефл.

R_1 е рефл. $\Rightarrow \forall x\in A \ (x,x)\in R_1$

$R_1\subseteq R \Rightarrow R$ също е рефл

- Симетричност $(x\neq y)$

Нека $(x,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in(R_1\cup R_2)$

$\Rightarrow (x,y)\in R_1 \vee (x,y)\in R_2 \Longrightarrow (y,x)\in R_1 \vee (y,x)\in R_2$

$\Rightarrow (y,x) \in (R_1 \cup R_2) \Rightarrow (y,x) \in R$

$\Rightarrow R$ е симетрична

• Транзитивност

Нека $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$

$(x,y) \in (R_1 \cup R_2) \wedge (y,z) \in (R_1 \cup R_2)$

$\Rightarrow [(x,y) \in R_1 \vee (x,y) \in R_2] \wedge [(y,z) \in R_1 \vee (y,z) \in R_2]$

$(x,z) \in R_1 \cup R_2$ ← не можем да сме сигурни

$A = \{a, b, c\}$

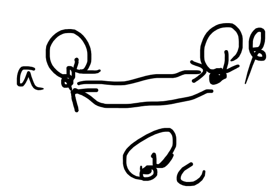
$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$

$R = R_1 \cup R_2 \quad (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$, но $(a,c) \notin R$

$\Rightarrow R$ не е транзитивна

$\Rightarrow R = R_1 \cup R_2$ не е Р.Е.



$a \to b \to c$

$\to a \to c$

$a \to b \to c \quad R_1$

$b \to c \to d \quad R_2$

Функции

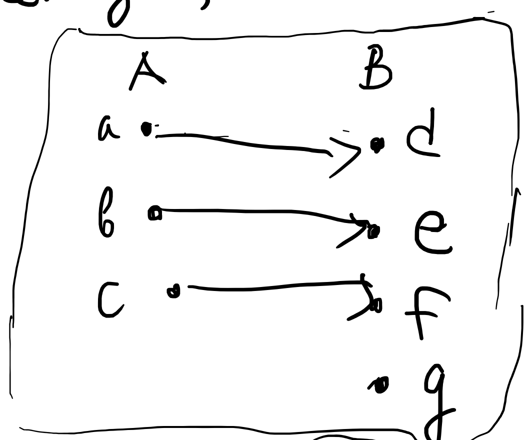
1. ~~Функции~~ Дефиниция

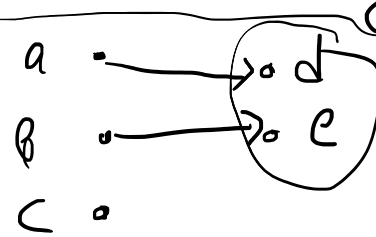
Нека $R \subseteq A \times B$. Тя е:

- Тотална ф-я (или само функция)
  $\Leftrightarrow \forall a \in A \ \exists! b \in B \ (a,b) \in R$
- Частична ф-я
  $\Leftrightarrow \forall a \in A \ \forall b_1 \forall b_2 \in B \ ((a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R \rightarrow b_1 = b_2)$

2. Видове ф-ции. Нека $f: A \rightarrow B$
- инекция – $\forall a_1 \forall a_2 \in A \ (a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$
- сюрекция – $\forall b \in B \ \exists a \in A : (f(a) = b)$
- биекция – инекция + сюрекция

Необходими у-вия за:
- инекция: $|A| \leq |B|$
- сюрекция: $|A| \geq |B|$
- биекция: $|A| = |B|$





3. Композиция на ф-ции
$f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Композиция на ф-циите f и g се нарича ф-цията $g \circ f: A \rightarrow C$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

4. Обратна ф-ция
Нека $f: A \rightarrow B$ е биекция. Обратна на f е ф-цията $f^{-1}: B \rightarrow A$, определена така:

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Примери: инекция: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$

частична • сюрекция: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2$

2 $\quad$ 4

• биекция $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$

5. Крайни м-ва

A е крайно $\Leftrightarrow \exists$ биекция $f: A \to I_n$, $I_n = \{1, \dots n\}$

$\Rightarrow |A| = n$

6. Изброими м-ва

A е безкрайно изброимо $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists$ биекция $f: A \to \mathbb{N}$

Примери: изброими: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}^k$ $\to$ клас 1

неизброими: $\mathbb{R}, 2^{\mathbb{N}}, \mathbb{C}$ $\to$ клас 2

$2^{\mathbb{R}}, 2^{2^{\mathbb{R}}}$ $\to$ клас 3

$R = \{(x, y) \mid \exists$ биекция $f: x \to y\}$.

Зад. Определете св-вата на ф-циите (И, С, Б)

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x + 3$

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 - 4x + 2$

в) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x + 1$

г) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ x - 1, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

g) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x (2y+1) - 1$