Functions_Combinatorics

Wednesday, 10 November, 2021 21:04

Как доказваме, че $R \subseteq A \times A$ е:

а) рефлексивна

Нека $a \in A$. * Показваме, че $(a,a) \in R$ *

б) антирефлексивна

Нека $a \in A$. * Показваме, че $(a,a) \notin R$ *

в) симетрична

Нека $(a,b) \in R$, $a \neq b$. * Показваме, че $(b,a) \in R$ *

г) антисиметрична

Нека $(a,b) \in R$, $a \neq b$. * Показваме, че $(b,a) \notin R$ *

д) силно антисиметрична

Нека $a,b \in A$, $a \neq b$. * Показваме, че $(a,b) \in R \oplus (b,a) \in R$ *

е) транзитивна

Нека $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$. * Показваме, че $(a,c) \in R$ *

Как да докажем, че $f: A \to B$ е:

а) инекция

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$.

* Показваме, че $x_1 = x_2$ *

б) сюрекция

Нека $y \in B$. * Показваме, че $\exists x \in A : f(x) = y$ *

Зад. а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

Зад. а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$

• <u>инекция</u>

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2$

• <u>сюрекция</u>

Нека $y \in \mathbb{R}$.

Търсим дали $\exists x \in \mathbb{R}$: $2x + 3 = y \iff$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) = y$

Обратната функция е $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

$\to f^{-1}(f(x)) = x$

в) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$

• <u>инекция</u>

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \iff x_1 = x_2$

• <u>сюрекция</u>

Контрапример: $0 \in \mathbb{N}$, но $\nexists x \in \mathbb{N}$: $x+1 = 0$
$\iff x = -1 \notin \mathbb{N}$

д) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$

• <u>инекция</u>

Нека $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^2$

$\Rightarrow 2^{x_1}(2y_1 + 1) - 1 = 2^{x_2}(2y_2 + 1) - 1$

$$\Rightarrow\ 2^{x_1}(2y_1+1)-1 = 2^{x_2}(2y_2+1)-1$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1)$$

Доп, че $x_1 \neq x_2$ и Б.О.О. $x_1 > x_2$.

$$2^{x_1}(2y_1+1)\cdot\frac{1}{2^{x_2}} = 2^{x_2}(2y_2+1)\cdot\frac{1}{2^{x_2}}$$

$$\underbrace{2^{x_1-x_2}(2y_1+1)}_{\text{четно}} = \underbrace{2y_2+1}_{\text{нечетно}},\quad 2^{x_1-x_2}\geq 2 \quad ↯$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

• сюрекция

Ще док, че $g: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ $g(x,y) = 2^x(2y+1)$ е сюрекция.

Нека $a \in \mathbb{N}^+$.

• a е нечетно $a = 2y+1 = 2^0(2y+1)$, $(0,y)$

• a е четно, $a = 2^x(2y+1)$

$\Rightarrow g$ е сюрекция

$\Rightarrow f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ също е сюрекция

Зад. Док, че $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ е биекция.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x-1}+1, & 0<x<\frac{1}{2} \quad \leftarrow \\ 0, & x=\frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2x-1}-1, & \frac{1}{2}<x<1 \quad \leftarrow \end{cases}$$

Реш. Правим наблюдението, че:

$1 \quad 1+2x-1 \quad 2x \quad < 0 \quad x\in(0,1)$

Реш. Правим наблюдението, че:

- $\frac{1}{2x-1}+1 = \frac{1+2x-1}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1} < 0$ за $x \in (0, \frac{1}{2})$
- $\frac{1}{2x-1}-1 = \frac{1-2x+1}{2x-1} = \frac{2(1-x)}{2x-1} > 0$ за $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

Инекция

Нека $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in (0,1)$

I сл. $f(x_1) = f(x_2) < 0$

$x_1, x_2 \in (0, \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{2x_1-1}+1 = \frac{1}{2x_2-1}$$

$\Leftrightarrow 2x_2-1 = 2x_1-1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

II сл. $f(x_1) = f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

III сл. $f(x_1) = f(x_2) > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\frac{1}{2x_1-1}-1 = \frac{1}{2x_2-1}-1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Сюрекция

Нека $a \in \mathbb{R}$.

I сл. $a<0$

Дали е $\exists x \in (0, \frac{1}{2}) : \frac{2x}{2x-1} = a$

$\Leftrightarrow 2x = 2ax - a \Leftrightarrow a = 2ax - 2x$

$\iff 2x = 2ax - a \iff a = 2ax - 2x$
$\iff a = 2x(a-1) \iff x = \dfrac{a}{2(a-1)}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2(a-1)} \notin \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \underbrace{\left(\dfrac{a}{2(a-1)} < 0\right)}_{\text{false}} \vee \left(\left(\dfrac{a}{2(a-1)}\right) > \dfrac{1}{2}\right) =$

$\boxed{0 \vee B = B}$

$= \dfrac{a}{2(a-1)} > \dfrac{1}{2}$

Може ли $\dfrac{a}{2(a-1)} > \dfrac{1}{2}$?

$\dfrac{a}{2(a-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{a}{a-1} > 1 \underset{a<0}{\iff} a < a-1$ ↯

$\Rightarrow \exists x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) : f(x) = a$

II сл. $a = 0$, Ясно е, че $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

III сл. $a > 0$ $\boxed{\text{Д.Р.}}$

~~Доп~~, че $\nexists x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : a = \dfrac{2(1-x)}{2x-1} \iff \ldots$

Д.Р. Покажете, че м-вото е изброимо, като постройте биекция от него към $\mathbb{N}$.

II. Покажете, че ... е изброимо,
като построите биекция от него към $\mathbb{N}$.

а) четни ест. числа

б) цели числа

в) нечетни цели числа

г) всички думи над азбуката $\Sigma = \{a\}$

Σ – азбука $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ крайно м-во от символи

ε – празната дума

ε е дума над Σ

$\varepsilon \cdot a$ е дума над Σ, $a \in \Sigma$

$\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa \ldots\} \longrightarrow \mathbb{N}$

Комбинаторика

1. Основни комбинаторни конфигурации

- Конфигурация с наредба и без повторение

Вариации: $V_n^k = n.(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

// Броят на наредените k-орки в м-во с n елемента //

Пермутации: Вариации $n=k$, $P_n = n!$

- Конфигурация с наредба и с повторение

- Конфигурация с наредба и с повторение

$$A_n^k = \underbrace{n.n.n\ldots n}_{k \text{ пъти}} = n^k$$

// броят на наредените k-торки над м-во с n елемента с повторение//

- Конфигурация без наредба и без повторение

Комбинации: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

// броят на ненаредените k-торки над м-во с n елемента//

// $\binom{n}{k}$ – броят на k-елементните под м-ва на м-во с n елемента//

- Конфигурация без наредба и с повторение

$$S_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

// броят на ненаредените k-орки над м-во с n елемента с повторение//

$\underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ $a_i \in \{0, 1\}$ 2^n

$\binom{49}{6}$ $\binom{8}{5}$

$\frac{12!}{2!}$

$\dfrac{\ldots}{2!}$

Зад. Колко битови низове с дължина n започват с 1 и завършват на 00?

$\underbrace{1\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{n-3}00}_{n}$ $\quad 2^{n-3}, \; n \geq 3$

Зад. Колко думи може да се образуват от буквите ABCDEF?

- 6 букв. $6!$ • 5 букв. $V_6^5 = 6.5.4.3.2$
- 4 букв. $V_6^4 = 6.5.4.3$ ... • 1 букв.

— // — , които съдържат $\underbrace{ABC}_{\alpha}$?

$\alpha DEF \to 4!$

• Колко различни 5-цифрени числа могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4? А колко 3-цифрени?

$\underset{4}{\uparrow}\ \underset{4}{\uparrow}\ \underset{3}{\uparrow}\ \underset{2}{\uparrow}\ \underset{1}{\uparrow} \to 4.4!$ $\qquad$ $\underset{4}{\uparrow}\ \underset{4}{\uparrow}\ \underset{3}{\uparrow}$ $4.4.3 \to 48$

Зад. От колода 52 карти се вадят 10. Колко са различните извадки, в които има:

а) точно едно асо

б) поне едно асо

в) не по-малко от 2 дами

г) точно 3 седмици

д) най-много 2 купи

е) точно 2 аса и точно 2 пики

ж) точно 2 аса и не повече от 2 купи

♡ ♣ ♢ ♠

13 13 13 13 → 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, J, Q, K, A

2 — A

Реш. а) $C_{52}^{10} = \binom{52}{10}$ → всички извадки

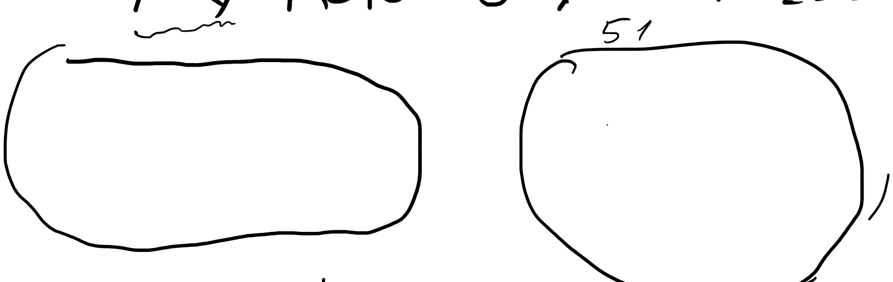
Избиране валето по 4 начина

Избиране останалите 9 карти по $\binom{48}{9}$

$4 \cdot \binom{48}{9}$

б) $4 \cdot \binom{51}{9}$ →

A♢ A♠ 5♢ 2♠ ...



→ A♢ | A♡ a_1 a_2 a_3 a_4 ... a_8 ←

→ A♡ | A♢ a_1 a_2 ... a_8

поне едно асо = {
- точно 1 асо → $\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{9}$
- точно 2 аса → $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{8}$
- точно 3 аса → $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7}$
- точно 4 аса ...

точно 3 аса $\rightarrow \binom{4}{3}\cdot\binom{48}{7}$

точно 4 аса $\rightarrow \binom{4}{4}\cdot\binom{48}{6}$

$$\boxed{\binom{52}{10}-\binom{48}{10}}$$

Отг.: $\binom{4}{1}\binom{48}{9}+\binom{4}{2}\binom{48}{8}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{7}+\binom{4}{4}\binom{48}{6}$

е) точно 2 аса и точно 2 пики

I сл. Избираме A♠. Трябват ни 1 асо и 1 пика и 7 от картите, които не са нито аса, нито пики.

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{7}$$

II сл. Не избираме A♠. Трябват ни 2 аса от другите 3, 2 пики от другите 12 и 6 карти от тези, които не са нито пики, нито аса.

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{36}{6}.$$

Отг. $\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{1}\cdot\binom{36}{7}+\binom{3}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{36}{6}$

ж) IV случая

Зад. Колко различни комбинации можем да получим при хвърляне на 5 зара

Ч (неразличаващи се)?

Реш. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\tilde{S}_6^5 = \binom{5+6-1}{5} = \binom{10}{5}$$

$$\underbrace{00}_{1}|\underbrace{\ }_{2}|\underbrace{0}_{3}|\underbrace{0}_{4}|\underbrace{0}_{5}|\underbrace{\ }_{6} \to \{1, 1, 3, 4, 5\}$$

• Колко са редиците от 5 нули 5 чертички?

$\binom{10}{5}$

Зад. Колко са различните тройки ест. числа, за които:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$(5, 5, 5) \to 1$

Реш.

$$\underbrace{0000}_{\text{към } x_1}|\underbrace{000}_{\text{към } x_2}|\underbrace{00000000}_{\text{към } x_3} \to (4, 3, 8)$$

$$1111 \ \square \ 111 \ \square \ 11111111 \to (4, 3, 8)$$

$$\underbrace{00000}_{x_1}|\underbrace{\ }_{x_2}|\underbrace{0000000000}_{x_3} \quad (5, 0, 10)$$

Колко са редиците от 2 разделителя и 15 нули?

$$\binom{17}{2} = \binom{17}{15}$$

$$S_{15}^{3} = \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{17-15} = \binom{17}{2}$$

$$\to \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Зад. Колко са редиците ест. числа x_1, x_2, x_3, x_4, за които: $\boxed{\text{изпит 202}}$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 13, \quad x_i > 1$$

Реш. Полагаме $x_i = y_i + 2$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+8=13, \quad y_i \in \mathbb{N}$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4=5$$

$$\underbrace{\ldots 00}_{y_1} \mid \underbrace{\ldots 00}_{y_2} \mid \underbrace{\ldots 00}_{y_3} \mid \underbrace{\ldots 00}_{y_4}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

Отг: $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ //