Зад. Док., че във всеки неориент. граф има път от всеки връх с нечетна степен до друг връх с нечетна степен.

Screen clipping taken: 27-Dec-21 10:22

Реш. $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$

Нека $u\in V$ и $d(u) = \underline{1} \pmod 2$

и нека u е част от свързаната компонента $G'(V',E')$. $(G'\subseteq G)$

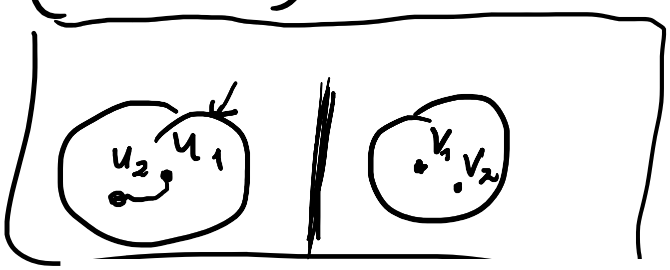
$\to \sum_{v\in V'} d(v) = 2|E'|$

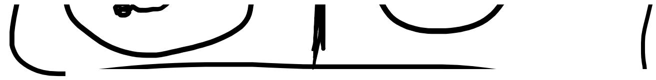
Имаме път от u до всеки друг връх в G'.

Доп., че в G' няма друг връх с нечетна степен. $\Rightarrow \sum_{v\in V'} d(v) = \underbrace{d(u)}_{\text{нечетно}} + \underbrace{\sum_{v\in V'\setminus\{u\}} d(v)}_{\text{четно}} = \underline{1} \pmod 2$ ↯

$\Rightarrow$ в G' има и друг връх w с нечетна степен

$\Rightarrow \exists\, p(u \dots w)$

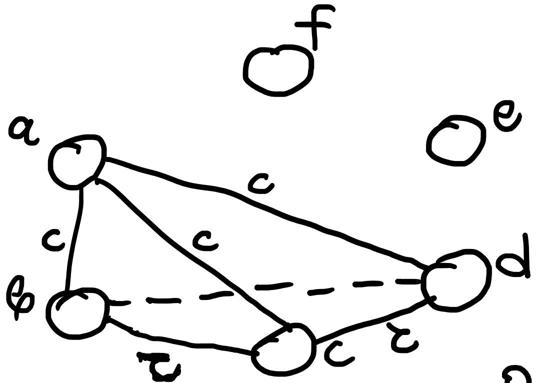




Зад. Ребрата в K_6 са оцветени в синьо и червено. Док., че в K_6 има триъгълник с едноцветни ребра.

Screen clipping taken: 27-Dec-21 10:32

Реш.



От всеки връх излизат 5 ребра. От Дирихле $\Rightarrow$ поне 3 от тях ще са едноцветни.

Разгл. a.

Б.О.О. можем да считаме, че от a излизат поне 3 сини ребра и, че те са (a,b), (a,c) и (a,d).

Доп. че няма едноцветен Δ в K_6.

Тогава: • (b,c) е червено (иначе $a-b-c-a$ е едноцветен Δ)

• (c,d) е червено (иначе $a-c-d-a$ е едноцветен Δ)

Но (b,d) не може да е нито синьо $(a-b-d-a)$, нито червено $(b-c-d-b)$. ↯

$\Rightarrow$ в K_6 има едноцветен Δ.

$(2) \to (3)$

(1) G е дърво

$|E| = |V| - 1$

(1) G е дърво
(2) G е свързан с $|V|-1$ ребра
(3) G е свързан, но при отстраняване на произволно ребро се получава несвързан граф
(4) всяка двойка върхове е свързана с единствен прост път
(5) в G няма цикли, но при добавяне на ребро м/у произволни 2 върха се получава цикъл.

$|E| = |V| - 1$
$|E| - 1 = |V| - 2$
но $|E| \geq |V| - 1$
$|V| - 2 \ngeq |V| - 1$

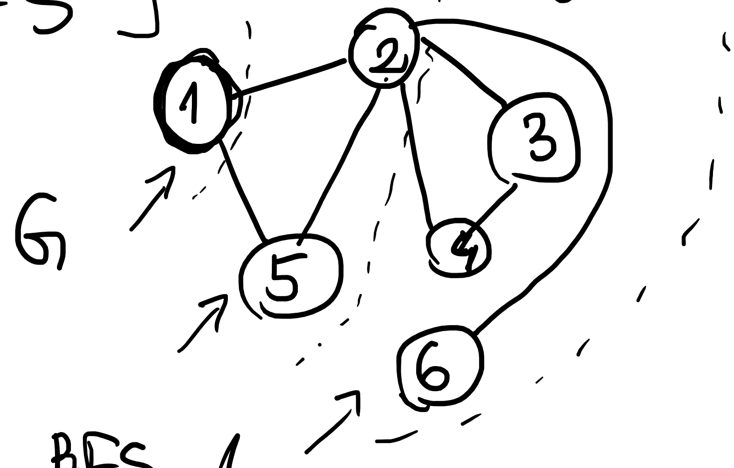
Screen clipping taken: 27-Dec-21 10:45

(1) → (2) G е дърво $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ G е свързан и няма цикли

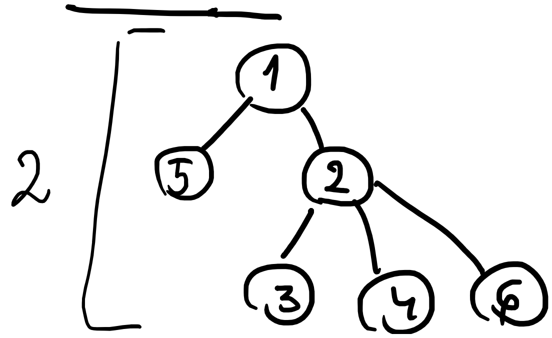
G е свързан $\Rightarrow |E| \geq |V| - 1$

Доп., че $|E| > |V| - 1$.

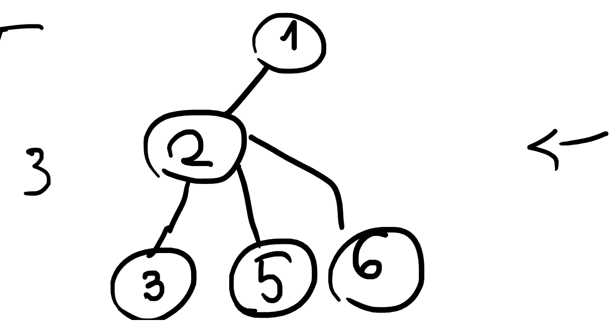
BFS, DFS } за обхождане на граф

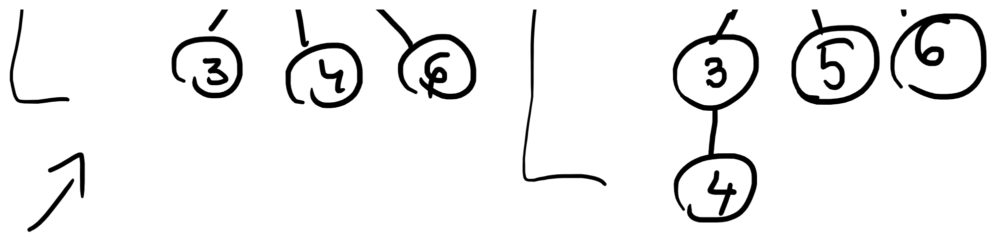


BFS 1

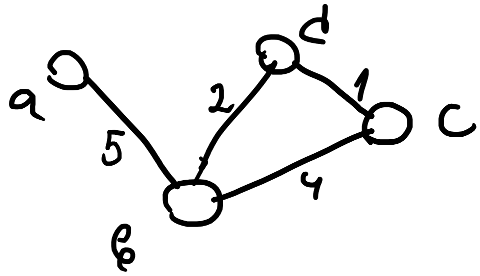


DFS 1

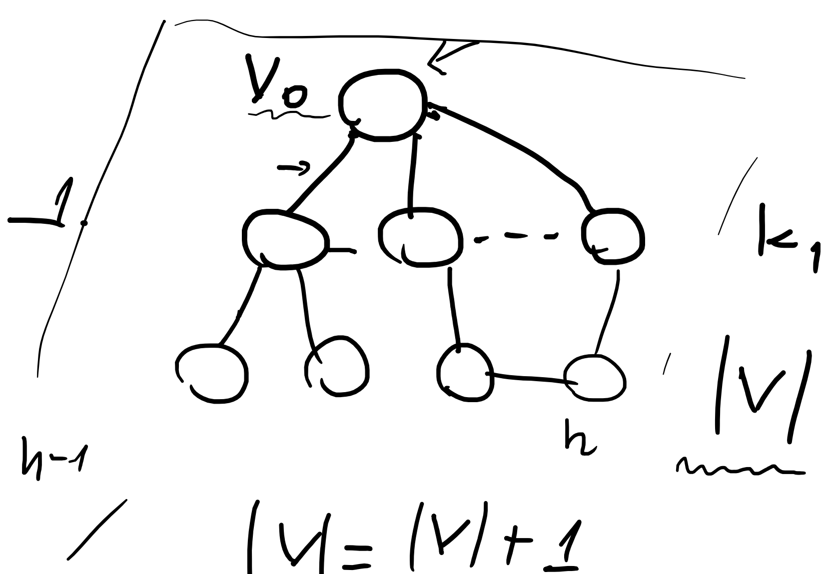




Prim } за построяване
Крускал } на мин. покр. дърво



Дийкстра – алгоритъм за намиране на минимални пътища от даден връх до всички останали.



$|V| = n$

$|V| = |V| + 1$

(2)→(3) G е свързан с $|V|-1$ ребра

⇒ Ако махнем 1 ребро, ще остане

$|V|-2$ ребра. Но тогава няма да е изпълнено необходимото условие за свързаност на граф, т.е. $|E| = |V|-2 < |V|-1$.

$\boxed{a \to b}$ $\left(|E| \geq |V|-1 \right.$ НУ за свързаност $\left. \right)$

(3)→(4)

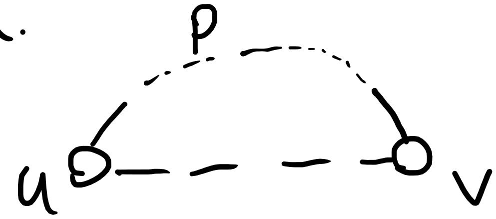
Нека $u, v \in V$ са свързани с 2 прости пътя. $\Rightarrow$ има цикъл в G

$\Rightarrow$ Ако премахнем ребро от цикъла, свързаността на G няма да се промени

$\Rightarrow \forall u,v \in V, \exists!\, p(u, \dots v)$

(4)→(5) за $\forall u,v \in V, \exists!\, p(u \dots v)$

$\Rightarrow$ Ако добавим (u,v) към E, ще получим цикъл.



(5)→(1)

[В G няма цикли, но при добавяне на ребро се появява цикъл.]

Доп., че G не е свързан

$\Rightarrow \exists\, u, v \in V$, за които $\nexists\, p = (u \dots v)$

$\Rightarrow$ като добавим (u, v) към E няма да се получи цикъл

$\Rightarrow$ G е дърво (свързан и няма цикли)

Зад. Да се док, че ако в граф с n върха има $n-1$ висящи върха, то графът е или дърво, или несвързан.

Реш. Знаем $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

$\sum_{v \in V} d(v) = (n-1).1 + k$, k е степента на n-тия връх

$0 \le k \le n-1$

Имаме 2 случая:

1) $k = n-1 \rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1) = 2|E| \Rightarrow |E| = n-1$ НДУ за дърво

2) $k < n-1 \rightarrow \sum_{v \in V} d(v) < 2(n-1)$

$2|E| < 2(n-1)$

$|E| < n-1 \rightarrow$ ДУ за несвързан граф

Зад. Нека n_1 е броят на висящите върхове на дърво с n върха, никой от които не е от степен 2. Да се докаже

$n_1 \geq \frac{n}{2} + 1$

<u>Реш.</u> $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n-1) =$
$= 2n - 2$

$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$, където

$V_1 = \{v \in V \mid d(v) = 1\}$
$V_2 = \{v \in V \mid d(v) \neq 1\}$

$\Rightarrow \sum_{v \in V} d(v) = n_1 + \sum_{v \in V_2} d(v)$

От условието на зад. $\Rightarrow \forall v \in V_2,\ d(v) \geq 3$

$\sum_{v \in V_2} d(v) \geq 3 \cdot \underbrace{(n - n_1)}_{\text{брой невисящи върхове}}$

$2n-2 = \sum_{v \in V} d(v) = n_1 + \sum_{v \in V_2} d(v) \geq n_1 + 3(n-n_1)$

$2n - 2 \geq n_1 + 3(n - n_1)$
$2n - 2 \geq n_1 + 3n - 3n_1$

$$2n_1 \geq n + 2$$

$$n_1 \geq \frac{n}{2} + 1$$

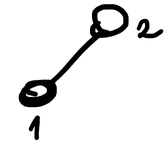
<u>Зад</u>. Нека $D = d_1, d_2, \dots d_n$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$ е редица числа. Док, че D е редица от степените на върхове на дърво тогава и само тогава, когато е вярно, че $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

<u>Реш</u>. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека $d_1, d_2 \dots d_n$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$ е редица от степени на върхове на дърво $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n-1) =$
$= 2n - 2$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ще използваме индукция по броя на числата в редицата. (по n)

<u>База</u>: $n = 2$. $d_1 + d_2 = 2.2 - 2 = 2$

Единствената възможност е $d_1 = d_2 = 1$

Тогава същ. следното дърво: 

<u>ИП</u> Нека за $\forall$ редица от числа

$d_1, d_2 \dots d_n$, $d_i \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$

съществува дърво със степени на върховете $d_1 \dots d_n$.

<u>ИС</u> – за Δ.Р.