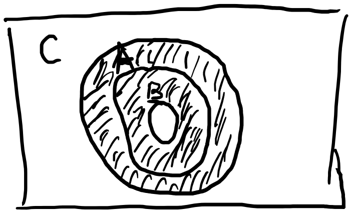
Relations

Friday, 29 October, 2021 08:55

Зад. $\begin{cases} A \setminus X = B \Rightarrow B \subseteq A \\ A \cup X = C \Rightarrow A \subseteq C \end{cases} \Bigg\} B \subseteq A \subseteq C$



▨ - X

$X = C \setminus B$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists j \in I, x \in A_j\}, \quad I = \{0, 1, 2, 3 \ldots n\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall j \in I, x \in A_j\}$$

- Покритие на м-во A:

$\mathcal{R} = \{S_i \mid S_i \subseteq A, i \in I\}$

  - $S_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
  - $\bigcup_{i \in I} S_i = A$

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad \mathcal{R} = \{ \underset{S_1}{\{1, 2\}}, \underset{S_2}{\{3, 4\}} \}$

$\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\} \{3, 4\}\}$

- Разбиване на м-вото A:

$\mathcal{R} = \{S_i \mid S_i \subseteq A, i \in I\}$

  - $S_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
  - $\bigcup_{i \in I} S_i = A$
  - $S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i, j \in I, i \neq j$

Релации

1. Наредена двойка

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$

$(a,b,c) = \{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

2. Декартово произведение

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$A = \{1,2\} \quad B = \{3,4\}$

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$|A \times B| = |A| . |B|$

3. n-местна релация

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots A_n$

Пример: $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, $(a,b,c) \in R \iff a,b,c$ са страни на Δ

$R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, $(a,b,c,d) \in R \iff a,b,c,d$ са страни на 4∡ник, в който може да се впише окр.

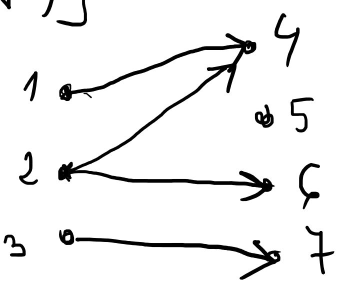
$(a+c = b+d)$

4. Бинарни релации $R \subseteq A \times B$, A - domain, B - range (codomain)

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{4,5,6,7\}$

$R = \{(1,4),(2,4),(2,6),(3,7)\}$

R	4	5	6	7
1	1	0	0	0
2	1	0	1	0
3	0	0	0	1



5. $R \subseteq A \times A \quad (A \times A = A^2)$

- рефлексивност: $\forall a \in A, (a,a) \in R$ $//aRa//$
- антирефлексивност: $\forall a \in A, (a,a) \notin R$ $//a \not R a//$

- симетричност: $\forall a,b \in A,\ a \neq b,\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
- антиметричност: $\forall a,b \in A,\ a \neq b,\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$
- силна антисим: $\forall a,b \in A,\ a \neq b \quad (a,b) \in R \oplus (b,a) \in R$
- транзитивност: $\forall a,b,c \in A\ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$

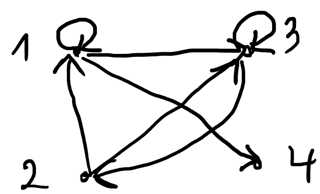
6. Видове бин. рел. от вида $R \subseteq A \times A$

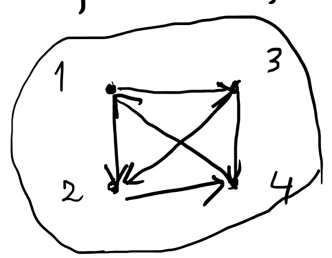
- Релация на еквивалентност
  - рефлексивна
  - симетрична
  - транзитивна
- Частична наредба
  - рефлексивна
  - антисим.
  - транзит
- Пълна наредба (линейна)
  - рефл.
  - силно антисим.
  - транзитивна

Пример: $A = \{1,2,3,4\} \quad R \subseteq A \times A$

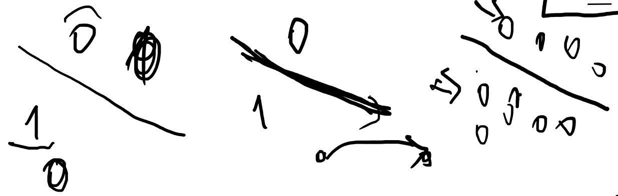
$R = \{(1,4),(1,1),(1,3),(2,3),(2,1),(3,2)(3,3)\}$

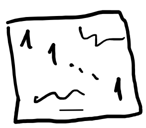
R	1	2	3	4
1	1	0	1	1
2	1	0	1	0
3	0	1	1	0
4	0	0	0	0

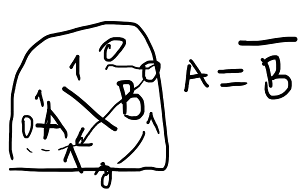


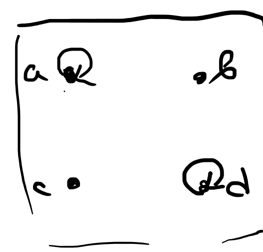


- Ако R е рефл. то







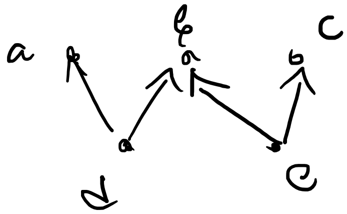


- $a \in A$ е най-малък $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A\ aRx$
- $a \in A$ е минимален $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A\ (xRa \rightarrow x = a)$

  // $\nexists x \in A\ xRa,\ x \neq a$ //

$D \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ \{(a,b) \mid a < b\}$ 0 – най-малък и минимален

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\{(a,b) \mid a < b\}$ 0 – най-малък и минимален



Ако a е минимален, то никой не сочи към него.

Ако a е най-малък, то той сочи към всички.

$\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$

$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$

Зад. Определете св-вата на релацията:

а) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid (a-b) \in \mathbb{Z}\}$

– рефл. Дали за $\forall a \in \mathbb{R}$ $(a,a) \in R$? Да!

$a - a = 0 \in \mathbb{Z}$ $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow aRa$, $\forall a$

– антирефл. – Не!

– симетричност Да!

Нека $aRb \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow bRa$

– антисим.

Нека aRb. Не!

$(5,3) \in R$ $(3,5) \in R$

– силна антисим. Не!

$CAC \longrightarrow AC$, $\overline{AC} \longrightarrow \overline{CAC}$

– транзитивност

Нека $aRb \wedge bRc \Rightarrow + \left| \begin{array}{l} a-b \in \mathbb{Z} \\ b-c \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

$a - \cancel{b} + \cancel{b} - c \in \mathbb{Z}$

$a - c \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRc$ Да!

б) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$, $R = \{(a,b) \mid a \subseteq b\}$

- рефл.
  $a \subseteq a$, $\forall a \in 2^{\mathbb{N}} \Rightarrow aRa$ $\forall a \in 2^{\mathbb{N}}$ Да!
- антирефл Не!
- симетричност Не!
  Нека aRb, $\Rightarrow a \subseteq b$
  $a = \{1,2\}$ $b = \{1,2,3\}$ $a \subseteq b$, aRb
  $\neg(b \subseteq a)$, $b \not R a$
- антисиметричност
  Нека $aRb \Rightarrow a \subseteq b$, $a \neq b$ Да!
  јасно е, дека $\neg(b \subseteq a)$, $b \not R a$
- силно антисиметрична
  $a = \{1,2,3\}$, $b = \{3,4\}$ $a \not R b$ и $b \not R a$ Не!
- транзитивност
  Нека $aRb \wedge bRc$, тоест $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$.
  $\Rightarrow a \subseteq b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$, aRc Да!

в) $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$, $R = \{(a,b) \mid a \cap b \neq \emptyset\}$

- рефл. $(\forall a \in 2^{\mathbb{N}}\ aRa)$ // $a \cap a = a$ $a \setminus a = \emptyset$ //
  $\emptyset \in 2^{\mathbb{N}}$ $(\emptyset,\emptyset)$ $\neg(\emptyset \cap \emptyset \neq \emptyset)$ $\emptyset \not R \emptyset$ Не!
- антирефл.
  $\{1,2\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset$ Не!
  $(\{1,2\},\{1,2\}) \in R$
- симетричност Да!

Нека $aRb \Rightarrow a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow b \cap a \neq \emptyset \Rightarrow bRa$

• антисиметричност

$a = \{1,2\}$ $\quad b = \{2,3\} \Rightarrow aRb$, но също така bRa Не!

• силно антисим. Не!

• транзитивност

Нека $aRb \wedge bRc \Rightarrow a \cap b \neq \emptyset \wedge b \cap c \neq \emptyset$!

$a = \{1,2\}$ $\quad b = \{2,3\}$ $\quad c = \{3,4\}$

aRb $\quad bRc$, обаче $a \not R c$ Не!

г) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

д) $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(a,b) \mid a+b \geq 5\}$ ДР

е) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) \mid 2 \mid a+b\}$

ж) $R \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$, $R = \{(a,b) \mid a+b \geq 5\}$

$R = \emptyset$

• Рефл. Не!

• Антирефл. Да!

• Симетр. Да!

• Антисим. Да!

• Силно антисим. Не!

• Транзит. Да!

R	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

Зад. Докажете релацията е Р.Е. и определете К.Е

а) $A = \{1, 9, 21, 44, 50, 99, 101\}$, $R \subseteq A^2$

$R = \{(a,b) \mid (a-b) = 0 \pmod{10}\}$

• рефл.

$\forall a \in A \quad a - a = 0 = 0 \pmod{10} \Rightarrow aRa$

• симетричност

Нека aRb, $a \neq b$. $\Rightarrow a-b = 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow b-a = 0 \pmod{10} \Rightarrow bRa$

• транзитивност

Нека $aRb \wedge bRc$. $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a-b = 0 \pmod{10} \\ b-c = 0 \pmod{10} \end{array} \right.$ $\quad 10k$, $10m$, $k,m \in \mathbb{Z}$

$a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = 10k + 10m$

$a - c = 10(k+m) \Rightarrow a-c = 0 \pmod{10} \Rightarrow aRc$

$[1] = \{1, 21, 101\} \rightarrow [1] = [21] = [101]$

$[9] = \{9, 99\}$, $[44] = \{44\}$, $[50] = \{50\}$

singleton - м-во с единствен елемент

б) $A = [0,6]$, $R \subseteq A^2$ $R = \{(a,b) \mid a+b = 2k\}$

в) $A = \{0, 5, 8, 9, 10, 11\}$ $R = \{(a,b) \mid a+b = 3k\}$

Зад Нека $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $R = \{(x,y) \mid 3 \mid 2x - 5y\}$

Док. че R е Р.Е. и да се опишат К.Е.

Реш. Рефл. Нека $a \in \mathbb{Z}$ е произв.

$2a - 5a = -3a = 0 \pmod{3} \Rightarrow aRa \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

Сим. Нека xRy, $x \neq y$. Тогава

$2x-5y=3k$ за някое $k\in\mathbb{Z}$

Имаме $+\begin{vmatrix} 2y-5x=p \\ 2x-5y=3k \end{vmatrix}$

$-3x-3y=3k+p$

$-3x-3y-3k=p$

$3(-x-y-k)=p \Rightarrow p=0 \pmod 3$

$\Rightarrow yRx$

Транзитивност:

Нека $xRy \wedge yRz \Rightarrow +\begin{vmatrix} 2x-5y=3k \\ 2y-5z=3m \end{vmatrix}, \; k,m \in\mathbb{Z}$

$2x-5y+2y-5z=3k+3m$

$2x-5z=3(k+m)+3y$

$2x-5z=3(k+m+y)$

$\Rightarrow 2x-5z=0 \pmod 3 \Rightarrow xRz$

$R=\{(x,y) \mid 2x-5y=0 \pmod 3\}$

$R[0]=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $\{0, \pm3, \pm6, \pm9, \pm12, \dots\}$

$R[1]=\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ~~$\{\pm1, \pm4, \pm7, \dots\}$~~ $\{1, 4, 7, 10 \dots\}$ $\{-2, -5 \dots\}$

$R[2]=\{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ~~$\{\pm2, \pm5, \pm8, \dots\}$~~ $\{\dots -4, -1, 2, 5, 8 \dots\}$

$$\left[\begin{array}{l} 0Ra \Rightarrow 2\cdot 0 - 5a = 0 \pmod 3 \\ \quad -5a = 0 \pmod 3 \\ \quad a = 0 \pmod 3 \end{array}\right]$$

$a = 0 \pmod 3$

Зад. $R \subseteq A \times A$ е рефл. и транзит.

Деф. $\sim \subseteq A \times A$: $a \sim b \iff aRb \wedge bRa$.

Док. че $\sim$ е Р. Е.

+зад Имаме $F = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$. Дефинираме

$\prec \subseteq F \times F$: $[a] \prec [b] \iff \exists x \in [a]\ \exists y \in [b] : xRy$

Док. че $\prec$ е част. наредба.