$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots$

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} - F_{n-2} \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \end{cases}$$

- Рекурентна редица: Числова редица $s_0, s_1 \dots s_n \dots$ такава, че за някое $k>0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ членовете ѝ се представят чрез следната зависимост

$$S_{n+k} = f(n, S_{n+k-1}, S_{n+k-2}, \dots, S_n)$$

1. Съставяне на рек. уравнения (зависимости)

Зад. Да се намери рек. зависимост за броя на начините, по които n различни предмета могат да се подредят в редица.

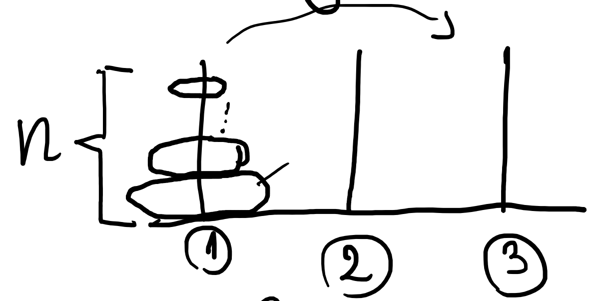
Реш.

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_n = n \cdot r_{n-1} \end{cases}$$

Един предмет можем да наредим по 1 начин. Нека $n-1$ предмета можем да наредим по r_{n-1} начина. Можем да добавим още един елемент по n нечетно $\Rightarrow$ $r_n = n \cdot r_{n-1}$

Зад. Да се намери рек. зав. за броя на преместванията на дисковете в задачата за Ханойските кули.

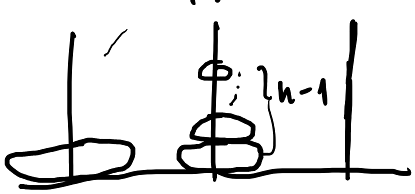
Реш.



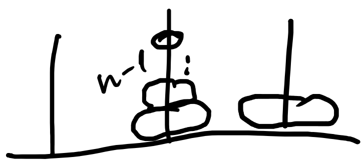
Нека T_i е броя на нужните стъпки при i на брой начални диска.

- $n=1$, $T_1 = 1$
- Нека T_{n-1} е броя на преместванията нужни за кула с $n-1$ диска.

Разгл. кула с n диска. За да стигнем до най-тежкия диск, трябва да преместим кулата, която е над него в началото и е с височина $n-1$.



← това става с T_{n-1} стъпки



← местим най-тежкия диск

← местим кулата с $n-1$ диска от

← с $n-1$ диска от пилон 2 на пилон 3 с T_{n-1} стъпки.

$$\Rightarrow \begin{cases} T_n = 2T_{n-1}+1 \\ T_1 = \end{cases}$$

<u>Зад.</u> Да се намери рек. зав. за броя на ест. числа, чийто запис в десетична бр. с-ма има n цифри, от които нулите са четен брой.

<u>Реш.</u> Нека α^n е записа на число в дес. бр. с-ма с n цифри, от които нулите са четен брой, а a_n е броят на всички такива числа.

$$\alpha^n = \alpha^{n-1}x, \quad x \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad \text{ИЛИ}$$

$$\alpha^n = \overline{\alpha^{n-1}}0, \quad \overline{\alpha^{n-1}} \text{ е число с}$$

нечетен брой нули

$$\Rightarrow \alpha^n = \underbrace{\alpha^{n-1}x} \vee \overline{\alpha^{n-1}}0$$

$$\Rightarrow a_n = 9.a_{n-1} + \overline{a_{n-1}}$$

$$\to \overline{a_{n-1}} = 9 . 10^{n-2} - a_{n-1}$$

$$9 . 10^{n-2} = 10^{n-1} - 10^{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n = 9a_{n-1} + 9.10^{n-2} - a_{n-1}$$

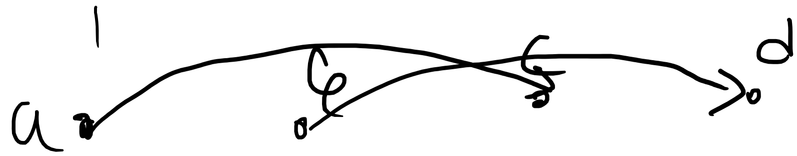
$$\begin{cases} a_n = 8 . a_{n-1} + 9 . 10^{n-2} \\ a_1 = 9 \end{cases}$$

Зад. Да се намери рек. зависимост за броя на ест. числа, чийто запис в 10 бр с-ма има n цифри и няма съседни нули.

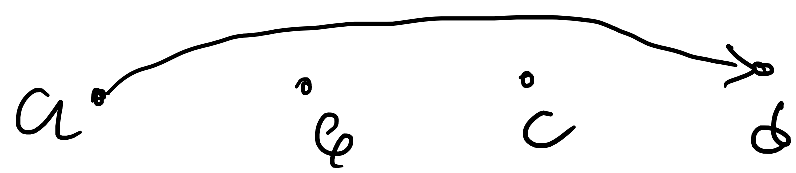
Реш. $$\left[\begin{array}{ll} \alpha^n = \alpha^{n-1} . x, & x \in \{1, 2 \dots 9\}, \text{ или} \\ \alpha^n = \alpha^{n-2} . x0, & x \in \{1, 2 \dots 9\} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a_n = 9.a_{n-1} + 9.a_{n-2} \\ a_1 = 10, \quad a_2 = 90 \end{cases}$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \qquad R$$

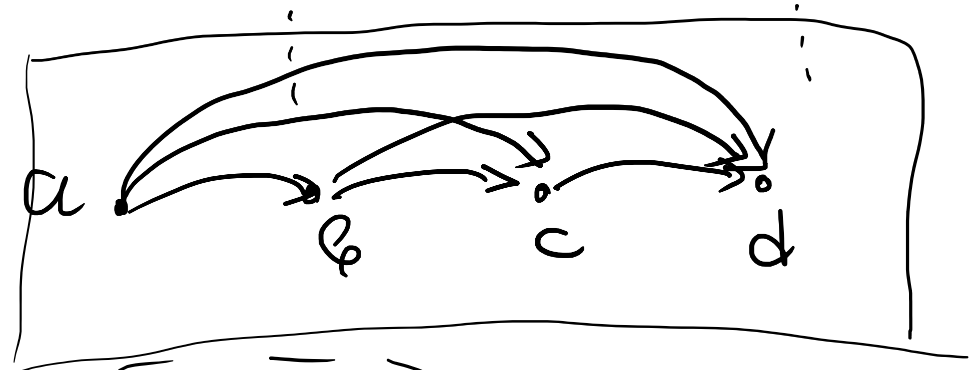


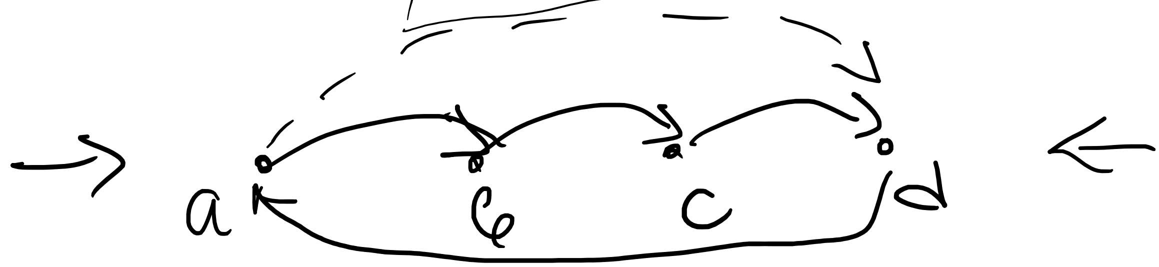
R^2



R^3

$R^1 \cup R^2 \cup R^3 \rightarrow$





$(a,d) \in R^3$, то $(d,a) \in R$

2. Решаване на линейни хомогенни рекурентни уравнения (ХРУ)

- Общ вид на ХРУ:

$$c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + \dots + c_k s_{n-k} = 0$$

където c_i са константи.

- Алгоритъм за решаване на ХРУ

1) Разглеждаме характеристичното му уравнение:

$$c_0 . r^k + c_1 r^{k-1} + \dots + c_{k-1} r + c_k = 0$$

// $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \rightarrow x^2 = x + 1$ //

Ако r е решение на това уравнение, то $A . r^n$ е решение на ХРУ-то, където A е някаква константа

2) Хар. уравнение има k корена

3) Разграничаваме 2 случая

- Всички корени са различни. Тогава общото решение на ХРУ-то има вида:

$$S_n = A_1 r_1^n + A_2 . r_2^n + \dots + A_k . r_k^n,$$

където $r_1 \dots r_k$ са корените на хар. уравнение, а $A_1 \dots A_k$ са константи, които следва да бъдат определени от началните стойности.

Пример: $\begin{cases} S_n - 7 . S_{n-1} + 10 S_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ S_0 = 0, \quad S_1 = 3 \end{cases}$

Хар.: $x^2 - 7x + 10 = 0$

у-ние. $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

Общото решение е: $S_n = A_1 . 2^n + B_1 . 5^n$

$$S_0 = A_1 . 2^0 + B_1 . 5^0 = 0$$

$$\rightarrow A_1 + B_1 = 0$$

$$S_1 = A_1 . 2^1 + B_1 . 5^1 = 3$$

$$\rightarrow 2A_1 + 5B_1 = 3$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 2A_1 + 5B_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = -1 \\ B_1 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Решението на ХРУ-то е:

$$S_n = -2^n + 5^n .$$

- Хар. у-ние има кратни корени. Тогава общото решение има вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^{p} \left(A_{i1} + A_{i2} . n + \ldots + A_{i t_i} . n^{t_i - 1}\right) r_i^n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n) . r_i^n$$

където $r_1 \ldots r_p$ са различни корени на хар. уравнение, чиито кратности са съответно $t_1 \ldots t_p$, а A_{ij} $i = 1 \ldots p$, $j = 1, 2 \ldots t_i$ са константи, които следва да бъдат определени от началните условия.

// За $\forall r_i$ се получава полином на n от степен $t_i - 1$ //

Пример: $\begin{cases} S_n - 4S_{n-1} + 4S_{n-2} = 0, & n \geq 2 \\ S_0 = 1, \quad S_1 = 6 \end{cases}$

Хар. у-ние: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = 2$ $\quad \{2, 2\}$

$\boxed{\begin{matrix} p = 1 \\ r_1 = 2 \\ t_1 = 2 \end{matrix}}$

Общото решение: $S_n = (An + B) \cdot 2^n$

$\left[S_n = \sum_{i=1}^{1} (A_1 + A_2 n^{2-1}) \cdot 2^n \right]$

$S_0 = (A \cdot 0 + B) \cdot 2^0 = B = 1$

$\rightarrow B = 1$

$S_1 = (A \cdot 1 + B) \cdot 2^1 = 2A + 2B = 6$

$\begin{cases} B = 1 \\ 2A + 2B = 6 \end{cases}, \quad \begin{matrix} A = 2 \\ B = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Решението на ХРУ-то е:

$S_n = (2n + 1) \cdot 2^n$

Проверка:

$\begin{cases} S_0 = 1 \\ \ldots \end{cases}$

$\rightarrow S_2 = 4.6 - 4.1 =$

Проверка:

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = 6 \\ S_n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2} \end{cases} \rightarrow S_2 = 4.6 - 4.1 = 20$$

$$S_2 = (2.2+1).2^2 = 20$$

$$S_3 = 4.20 - 4.6 = 80 - 24 = 56$$

$$S_3 = (2.3+1)2^3 = 56$$

Зад. Намерете ф-ла за редицата на Фибоначи:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

Реш. Хар. у-ние: $x^2 = x + 1$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

О.Р.: $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Решение: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Зад. Решете следните ХРУ:

а) $s_n - 3s_{n-1} = 0$, $n > 1$; $s_1 = 17$

б) $s_n + 6s_{n-1} + 9s_{n-2} = 0$, $n \geq 2$; $s_0 = 10$, $s_1 = 16$

в) $s_n - s_{n-2} = 0$, $s_0 = 0$, $s_1 = 2$

3. Решаване на лин. нехомогенни рек. уравнения (НХРУ)

- Общ вид:

$$\underbrace{C_0 S_n + C_1 S_{n-1} + \dots + C_k S_{n-k}}_{\text{Хомогенна част (ХЧ)}} = \underbrace{f(n)}_{\text{Нехомогенна част (НХЧ)}}$$

където $f(n) = P_1(n) \cdot b_1^n + P_2(n) \cdot b_2^n + \dots + P_m(n) \cdot b_m^n$,

$i \neq j \rightarrow b_i \neq b_j$

$P_i(n)$ са полиноми на n.

- Алгоритъм за решаване на НХРУ

① Намираме корените на хар. у-ние на ХЧ. Нека $M(ХЧ)$ е мултимножеството от корените на хар. у-ние.

(2.) За $\forall i = 1, 2 \ldots m$ добавяме към $M(XY)$ $deg(P_i(n)) + 1$ на брой пъти числото b_i и получаваме $M(XY + HXY)$

(3) Продължаваме със стъпка 3) от алгоритъма за решаване на ХРУ

Пример
$$\begin{cases} S_n - 2S_{n-1} = 3^n, & n \geq 1 \\ S_0 = 4 \end{cases}$$

1. Търсим корените на хар. у-ние на ХУ
ХУ : $S_n - 2S_{n-1} = 0$
Хар. у-ние: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$\Rightarrow M(XY) = \{2\}$

2) НХУ : $3^n = \underbrace{1}_{\text{полином на } n \text{ от степен } 0} . 3^n$

$\Rightarrow$ към $M(XY)$ добавяме $deg(1) + 1 = 0 + 1 = 1$ на брой пъти 3.
$\Rightarrow M(XY + HXY) = \{2, 3\}$

3) $S_n = A.2^n + B.3^n$ ← общо решение
$S_0 = A.2^0 + B.3^0 = A + B = 4$
$S_1 = A.2^1 + B.3^1 = 2A + 3B \stackrel{\text{усл.}}{=} 2.S_0 + 3^1 = 11$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 2A+3B=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=3 \end{matrix}$$

• Крайно решение на НХРУ : $S_n = 2^n + 3.3^n =$
$= 2^n + 3^{n+1}$

Зад. Решете НХРУ :

а) $S_n - 3S_{n-1} = 2$, $n>1$; $S_1 = 2$

б) $S_n - 2S_{n-1} = 5.2^n$, $n \geq 1$; $S_0 = 7$

в) $\begin{cases} S_{n+3} = -5S_{n+2} - 8S_{n+1} - 4S_n + 2.(-1)^n + (-2)^{n+3} \\ S_0 = 4 , S_1 = -11 , S_2 = 41 \end{cases}$

Зад. Намерете ф-ла за следната сума

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 , \quad n \in \mathbb{N}$$

Реш. Ще съставим и решим рек. у-ние

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + n^2 \\ S_0 = 0 \end{cases}$$

1) ХУ $\quad S_n - S_{n-1} = 0$

Хар. у-ние $\quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$M(X\text{Ч}) = \{1\}$

2) НХЧ $\quad n^2 = n^2 \cdot 1^n = f(n)$

Добавяме към $M(X\text{Ч})$, $\deg(n^2)+1 = 2+1 = 3$ пъти числото 1. $\Rightarrow M(X\text{Ч}+HX\text{Ч}) = \{1,1,1,1\}$

3) Общо решение:

$$S_n = (An^3 + Bn^2 + Cn + D) \cdot 1^n =$$
$$= An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

$\hookrightarrow$ Довършим!

<u>Зад</u>. Намерете ф-ла за сумата $\boxed{\text{изпит 2014}}$

$$a_n = 2 + 8 + 24 + \ldots + n \cdot 2^n = \sum_{i=1}^{n} n \cdot 2^n$$

<u>Реш</u>. Ще съставим рек. у-ние:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$a_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$

$a_2 = 2 + 2 \cdot 2^2$

$a_3 =$

1) ХЧ $\quad a_n - a_{n-1} = 0$

Хар. у-ние $\quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$M(X\text{Ч}) = \{1\}$

2) НХЧ $\quad f(n) = n \cdot 2^n$ $\quad \deg(n)+1 = 1+1 = 2$

$\Rightarrow$ към $M(X\text{Ч})$ добавяме на брой пъти числото 2.

$\Rightarrow M(X\text{Ч}+HX\text{Ч}) = \{1, 2, 2\}$

Общо решение: $a_n = A\cdot 1^n + (Bn+C)\cdot 2^n$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 2+8 = 10 \\ a_3 = 2+8+24 = 34 \end{cases}$$

Довършии!

<u>Зад.</u> Намерете рекурентно уравнение, чието общо решение е: $S_n = A + Bn + C\cdot 3^n$

<u>Реш.</u> $S_n = (A+Bn)1^n + C\cdot 3^n$

$M(\text{ХЧ}+\text{НХЧ}) = \{1,1,3\}$

Нека $M(\text{ХЧ}) = \{1,3\}$, а 1 сме взели от НХЧ.

$\Rightarrow$ Хар. у-ние има корени 1 и 3

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$ ХЧ: $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$

Нека НХЧ: $f(n) = \underline{1}.1^n$

$\Rightarrow$ Следното у-ние удовлетворява у-вието

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 1$$

<u>Зад.</u> Докаже числото $(3+\sqrt{5})^{2021} + (3-\sqrt{5})^{2021}$ е цяло.

Зад. Докаже числото

$$(3+\sqrt{5})^{2021} + (3-\sqrt{5})^{2021}$$ е цяло.

Зад. Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Да се реши функционалното уравнение

$$f(f(x)) = 6x - f(x) \quad \text{за } x \in \mathbb{N}$$

Hint: Нека $a_n = f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ пъти}}(x)\dots))$

и $a_0 = f^0(x) = x$,

$$a_n = f(a_{n-1})$$

$$\rightarrow a_n = 6 \cdot a_{n-2} - a_{n-1}$$