Friday, 14 January, 2022 09:04

~~$|A\times B| = |A|\cdot|B|$~~ $\leftarrow\rightarrow$ $1\oplus X = \overline{X}$

$\rightarrow |A\times B| = |A|\cdot|B|$ $\overline{\overline{x}\vee\overline{y}} = x\wedge y$

$x\rightarrow y = \overline{x}\vee y$

... булеви ф-ции

4. Променливата x_i е <u>фиктивна</u> за $f(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$

$f(x_1, x_2 \dots x_{i-1}\, 0\, x_{i+1} \dots x_n) = f(x_1, x_2 \dots x_{i-1}\, 1\, x_{i+1} \dots x_n)$

за $\forall$ набор от булеви ст-сти $x_1 x_2 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n$

5. Променливата x_i е <u>съществена</u>, ако не е фиктивна.

6. формула

x	y	z	f
0	0	0	1
			0
			$\uparrow$

$f(x,y,z) = (x\vee y) \| z$

$f(x,y,z) = (10010010)$

$f(x,y,z) =$ за която

$\rightarrow T_f = \{0, 2, 3, 7\}$

$\rightarrow T_f = \{0, 2, 3, 7\}$

$(1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0)$

Зад. Намерете бр. на ф-циите от $\mathcal{F}_2^n$, които на противоположни вектори приемат:

а) еднакви ст-сти $\quad 2^{2^{n-1}}$

$\rightarrow$ б) различни ст-сти $\quad 2^{2^{n-1}}$

$f(1001) = f(0110)$

2^n

00...0
00...1
00...10
⋮
11...10
11...1

$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

$\boxed{2^{2^{n-1}}}$

$\frac{\quad}{2} = 2^{n-1}$

000...0
000...01
000...10

111...10
111...11

0
1

$2^{2^{n-1}}$

111...11

Зад. Да се намери бр. на ф-циите от $\tilde{\mathcal{F}}_2^n$, за които:

а) върху дадени k в-ра ф-цията има фикс. ст-сти, а останалите 2^{2^n-k} са произволни

б) върху точно k елемента от деф. си м-во ф-цията има ст-ст 0 $\binom{2^n}{k}$

в) Имат ст-ст 1 на повече от k вектора

$$\sum_{i=k+1}^{2^n} \binom{2^n}{i}$$

$\to k+1 \quad k+2 \; --- \; 2^n$

Зад. Да се намери броят на ф-циите от $\tilde{\mathcal{F}}_2^n$, които изпълняват условието:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f(x_2, x_1 \ldots x_n)$$

Реш. Разделяме деф. м-во $(\mathcal{F}_2^n)$ на 4 части:

$\rightarrow A_1 = \{\widetilde{\alpha}^n = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0,1\}\}$

$A_2 = \{\widetilde{\alpha}^n = (0, 1, \alpha_3 \ldots \alpha_n\}$

$A_3 = \{\widetilde{\alpha}^n = (1, 0, \alpha_3 \ldots \alpha_n\}$

$\rightarrow A_4 = \{\widetilde{\alpha}^n = (1, 1, \alpha_3 \ldots \alpha_n\}$

$$|A_1| = 2^{n-2} = |A_2| = |A_3| = |A_4|$$

За $\forall \widetilde{\alpha}^n \in A_1 \cup A_4 : f(x_1, x_2 \ldots x_n) = f(x_2, x_1 \ldots x_n)$

Ако определим ст-ста на ф-ята за $\widetilde{\alpha}^n = (0\,1\,\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n) \in A_2$, то тя еднозначно определя ст-ста и на

$\widetilde{\beta}^n = (1, 0, \alpha_3, \alpha_4 \ldots \alpha_n) \in A_3.$

В-ри за избиране:
- $\rightarrow$ Всички от A_1
- $\rightarrow$ Вс. от A_2
- A_3 се определят от изборите ни за A_2
- $\rightarrow$ Вс от A_4

$\boxed{3 \cdot 2^{n-2}} \longrightarrow$ Отг: $2^{3 \cdot 2^{n-2}}$

Зад. Да се намери броят на бул. ф-ции

на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.

<u>Реш.</u> Нека $F_i \subseteq \mathcal{F}_2^n$, $F_i = \{ f(\tilde{x}^n) \mid x_i \text{ е фиктивна} \}$

Интересува ни: $\left|\mathcal{F}_2^n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right| =$

$$= \left|\mathcal{F}_2^n\right| - \left(\sum_{i=1}^{n} |F_i| - \sum_{i<j} |F_i \cap F_j| + \dots + (-1)^{n-1} |F_1 \cap F_2 \cap \dots F_n|\right)$$

$$= 2^{2^n} - \left(\binom{n}{1} \cdot 2^{2^{n-1}} - \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}} + \binom{n}{3} \cdot 2^{2^{n-3}} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n} \cdot 2^{2^{n-n}}\right) =$$

$\forall i \quad |F_i| = 2^{2^{n-1}}$

$x_i x_j$ са фиктивни $\quad 2^{2^{n-2}}$

$$= 2^{2^n} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}} =$$

$$= 2^{2^n} - \sum_{i=1} (-1)^{\dots} \binom{n}{i} \cdot 2^{\dots} =$$

$$= 2^{2^n} - (-1) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}} =$$

$$= 2^{2^n} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}}$$

Дизюнктивна нормална форма (ДНФ)

1. Конюнкт на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ наричаме съждителна ф-ла от вида:

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}, \text{ където}$$

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{ако } \alpha_i = 1 \\ \overline{x_i}, & \text{ако } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

2. Една съждителна ф-ла $\varphi(x_1 \dots x_n)$ е в ДНФ, ако тя представлява дизюнкция ($\vee$) от конюнкти на

някои от променливите.

Пример: $\phi(x,y,z) = \underbrace{\bar{x}y}_{\text{конюнкт 1}} \vee \underbrace{z\bar{y}}_{\text{конюнкт 2}}$

3. Една еднц ф-ла е в съвършена ДНФ (СъвДНФ), ако тя е ДНФ и всеки конюнкт съдържа всяка една от променливите.

Пример: $\phi(x,y,z) = \underset{K1}{x\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{K2}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{K3}{xyz}$

! За всяка бул. ф-ция $f(x_1 \ldots x_n)$ можем да намерим ф-ла $\phi(x_1 \ldots x_n)$ в СъвДНФ еквивалентна на нея по следния начин:

$$\phi(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{\substack{\alpha_i \in \{0,1\} \\ \to f(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Пример: $f(x,y,z) = (x \vee y) \to z$

ДР Намерете СъвДНФ чрез преобразования

преобразования

x	y	z	$x \vee y$	$x \vee y \to z = F$	
0	0	0	0	1	$\rightsquigarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	0	1	$\rightsquigarrow \bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	$\rightsquigarrow \bar{x}yz$
1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	$\rightsquigarrow x\bar{y}z$
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	$\rightsquigarrow xyz$

$\Rightarrow$ СъвДНФ $= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz$

Зад. Намерете СДНФ

а) $f(x,y,z) = (x \oplus y) \to yz$

б) $f(x,y,z) = (01101100)$

в) $f(x,y,z) = (x \mid y)\bar{z}$

г) $f(\tilde{x}^4) = ((x_1 \mid x_2) \downarrow x_3) \mid (x_2 \mid \bar{x}_4)$

в) $f(x,y,z) = (x \mid y)\bar{z}$

~~$x\ y\ z\ x \mid y$~~ $f = (x \mid y)\bar{z}$

000 1 $\rightsquigarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

000	1	$\rightsquigarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
001	0	
010	1	$\rightsquigarrow \bar{x}y\bar{z}$
011	0	
100	1	$\rightsquigarrow x\bar{y}\bar{z}$
101	0	
110	0	
111	0	

$$\text{СДНФ} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$$

Минимизация на булеви ф-ции

$x\tilde{\alpha}^n \vee \bar{x}\tilde{\alpha}^n = \tilde{\alpha}^n$, където $\tilde{\alpha}^n$ е конюнкт с дължина n

Зад. (Алгоритъм на Куайн-МакКласки) Намерете минималната ДНФ на

$$f(x,y,z) = (01101110)$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1

0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$\bar x \bar y z$ ✓	$\bar y z$ (от $\bar x \bar y z$ и $x \bar y z$)
$\bar x y \bar z$ ✓	$y \bar z$ (от $\bar x y \bar z$ и $x y \bar z$)
$x \bar y \bar z$ ✓	$x \bar y$ (от $x \bar y \bar z$ и $x \bar y z$)
$x \bar y z$ ✓	$x \bar z$ (от $x \bar y \bar z$ и $x y \bar z$)
$x y \bar z$ ✓	

импликанти от ред 0

импликанти от ред 1

<u>def</u> Проста импликанта – импликанта, която не може да се опрости.

В случая имаме 4 прости импликанти:

	001 (x y z)	010 (x y z)	100	101	110
$\bar y z$	✓			✓	
$y \bar z$		✓			✓

y				
$y\bar{z}$	V			V
$x\bar{y}$		V	V	
$x\bar{z}$		V		V

Ядрени импликанти в случая:
$\bar{y}z$ и $y\bar{z}$.

Заедно те задоволяват 001, 010, 101 и 110. Остава ни да задоволим 100. Това може да стане по 2 начина:

- с помощта на $x\bar{y}$
- с помощта на $x\bar{z}$

$\Rightarrow$ Имаме 2 МДНФ:

МДНФ1 $= \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}$

МДНФ2 $= \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x\bar{z}$

<u>Зад.</u> Намерете МДНФ на:

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1

$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee$ | $\bar{x}\bar{y} \vee$ | $\bar{x}$

$\rightarrow \bar{x}\bar{y}z \vee$ | $\bar{x}\bar{z} \vee$

$\bar{x}z \vee$

0	0	1	1	$\to \bar{x}\bar{y}z \vee$	$xz \vee$
0	1	0	1	$\to \bar{x}y\bar{z} \vee$	$\bar{x}z \vee$
0	1	1	1	$\to \bar{x}yz \vee$	$\bar{y}z$
1	0	0	0	$x\bar{y}z \vee$	$\bar{x}y \vee$
1	0	1	1	$xy\bar{z} \vee$	$y\bar{z}$
1	1	0	1		
1	1	1	0		

Простите импликанти в случая са

$\bar{y}z$, $y\bar{z}$ $\bar{x}$.

	000	001	010	011	101	110
$\bar{y}z$		✓			✓	
$y\bar{z}$			✓			✓
$\bar{x}$	✓	✓	✓	✓		

$$\Rightarrow \text{МДНФ} = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$$

Зад. Да се намерят МДНФ

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

1 1 0 | 3
1 1 1 | 0

	001	010	011	100	101	110	
$\bar{x}z$	V		V				t_1
$\bar{x}y$		V	V				t_2
$\bar{y}z$	V				V		t_3
$x\bar{y}$				V	V		t_4
$y\bar{z}$		V				V	t_5
$x\bar{z}$				V		V	t_6

Покриваща ф-я:

$$f' = (t_1 \vee t_3)(t_2 \vee t_5)(t_1 \vee t_2)(t_4 \vee t_6)(t_3 \vee t_4)(t_5 \vee t_6) =$$

$\boxed{ab \vee b = b}$

$$= \ldots = t_1t_4t_5 \vee t_1t_3t_5t_6 \vee t_1t_2t_4t_6 \vee t_1t_2t_3t_6 \vee t_2t_3t_4t_5 \vee t_2t_3t_5t_6 \vee t_2t_3t_4t_6 \vee t_2t_3t_6$$

Имаме 2 минимални възможности

МДНФ1 $= \bar{x}z \vee x\bar{y} \vee y\bar{z}$ $(t_1 t_4 t_5)$

МАНФ2 $= \bar{x}y \vee \bar{y}z \vee x\bar{z}$ $(t_2\, t_3\, t_6)$

<u>Зад</u>. Да се провери еквивалентни ли са ф-лите, като се използват <u>САМО</u> преобразования:

а) $\varphi = (x \to y) \to ((x\bar{y}) \oplus (x \leftrightarrow \bar{y}))$

$\psi = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

б) $\varphi = (x \downarrow \bar{y}) \to (\bar{x} z \to ((\bar{x} \mid (y \leftrightarrow z)) \vee (\overline{xy} \oplus z)))$

$\psi = ((x \to y) \mid (x \downarrow (y\bar{z}))) \vee \overline{yz}$

<u>Зад</u>. Кои са булевите ф-ции $f(x, y, z)$, такива че:

(1) $f(0,0,0) = 1$

(2) СвАНФ = МинАНФ

// Домашно № 3 20/21 //

// Пояснение: Търсят се ф-циите, за които (1) $\wedge$ (2) //