Графи

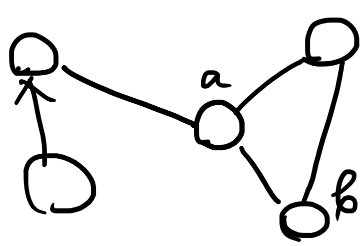
1. Дефиниции

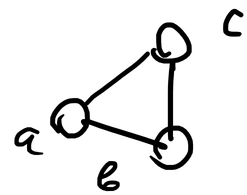
• Граф $G(V, E)$

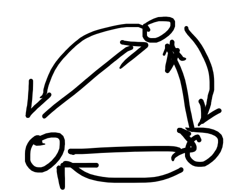
име на графа; м-во от върхове; м-во от ребра

$|V| < \infty$

$E \subseteq V \times V$ – ребрата представляват релация над м-вото V







• Ориентиран граф – E не е (задължително) симетрична

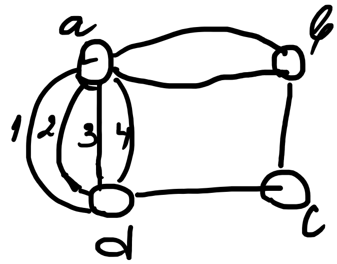
• Неориентиран граф – E е симетрична

• Мултиграф – $G(V, E, f)$

име; м-во върхове; м-во ребра; $f: E \to V \times V$

E вече не се разглежда като релация

E вече не се разглежда като релация



$-(a,d) \in E$

$(a,d) \in E$

$\underbrace{E}_{} \subseteq \underbrace{V \times V}_{}$

f:

$1 \to (a,d)$

$2 \to (a,d)$

$3 \to (a,d)$

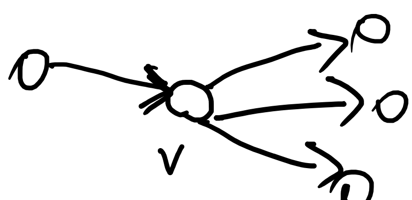
$4 \to (a,d)$

• Степен на връх

Нека $v \in V$. Тогава $d(v) = |\{(u_1,u_2) \in E \mid u_1 = v\}|$

// за неориентирани графи //

$-d^+(v) = |\{(u_1,u_2) \in E \mid u_1 = v\}|$ – полустепен на изхода



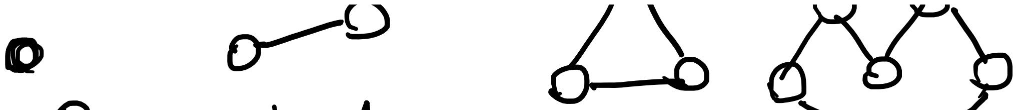
$d^+(v) = 3$, $d^-(v) = 1$

$-d^-(v) = |\{(u_1,u_2) \in E \mid u_2 = v\}|$ – полустепен на входа

// за ориентирани графи //

• k-регулярен граф

$G(V,E)$ е k-регулярен $\overset{def}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : \forall v \in V \; d(v) = k$

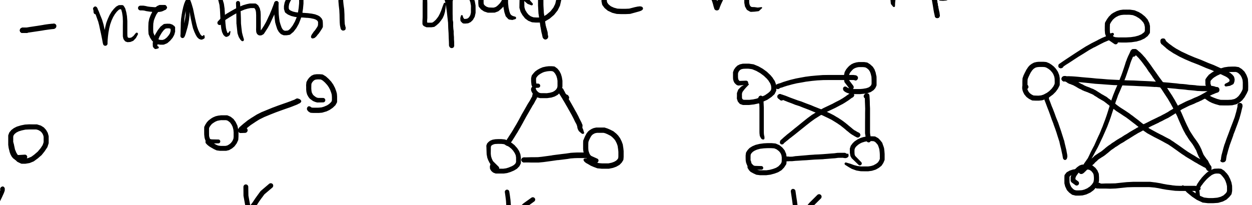


$k=0$ $k=1$ $k=2$ $k=2$

• Пълен граф

$G(V,E)$ е пълен $\overset{def}{\iff} \forall u,v \in V, u \neq v \ (u,v) \in E$

K_n – пълният граф с n върха

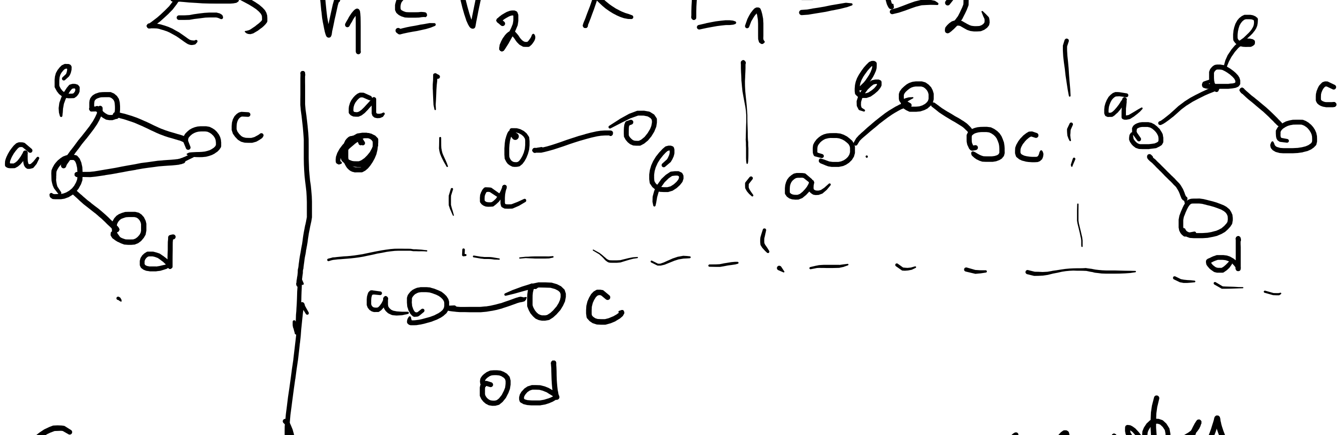


K_0 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

• Подграф

$G_1(V_1,E_1)$ е подграф на $G_2(V_2,E_2)$

$\overset{def}{\iff} V_1 \subseteq V_2 \wedge E_1 \subseteq E_2$



G

възможни подграфи на G

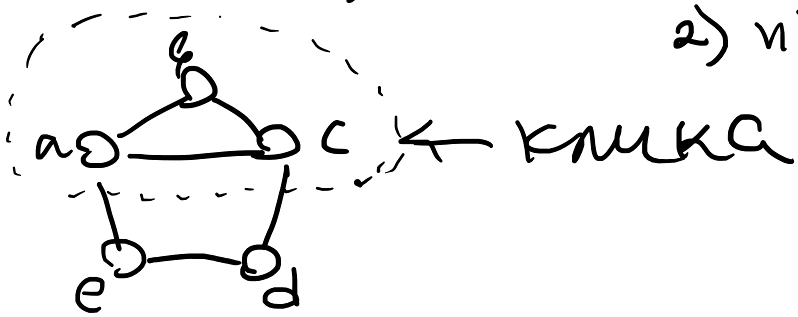
• Клика

$G'(V',E')$ е клика в $G(V,E)$

$\overset{def}{\iff} G'$ е 1) подграф на G

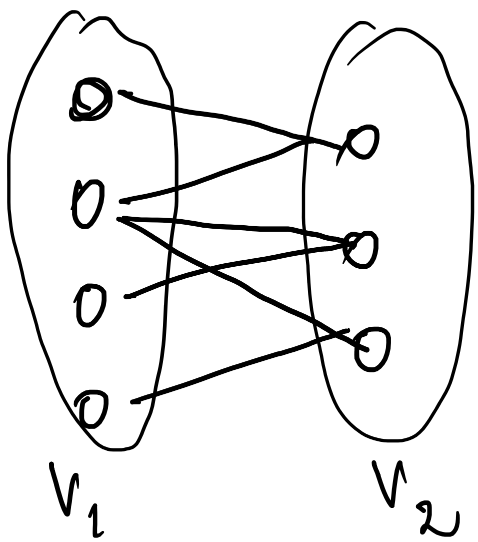
2) пълен

$\Leftarrow$ G е 1) подграф
2) пълен



• Двуделен граф

$G(V,E)$ е двуделен $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $\exists V_1, V_2 \subseteq V$:
$V_1 \cup V_2 = V$
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2) $\forall (u,v) \in E$
$(u \in V_1 \wedge v \in V_2) \vee$
$(u \in V_2 \wedge v \in V_1)$



• Път в граф

p е път в $G(V,E) \overset{def}{\Leftrightarrow} p = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k)$,
$v_i \in V$
$\forall i = 1, 2 \dots k-1$ $e_i \in E$, $e_i = (v_i, v_{i+1})$

p е прост път $\overset{def}{\Leftrightarrow} p = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k)$ и
$\forall i,j$ $i \neq j$ $v_1 \neq v_j$
// не повтаря върхове //

• Цикли

$\dots G(V,E) \overset{def}{\Leftrightarrow} p$ е път и

• Цикли

p е цикъл в $G(V,E) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ p е път и $v_1 = v_k$

p е Хамилтонов цикъл $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 1) $\boxed{v_i = v_j \underset{i \neq j}{} \Rightarrow i = 1 \wedge j = k}$

2) p минава през всички върхове

p не повтаря върхове, освен че $v_1 = v_k$, защото все пак е цикъл

p е Ойлеров цикъл $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ p минава точно веднъж през всяко ребро

• Свързан граф

$G(V,E)$ е свързан $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u, v \in V \; \exists p = (u \ldots v)$, $u \neq v$

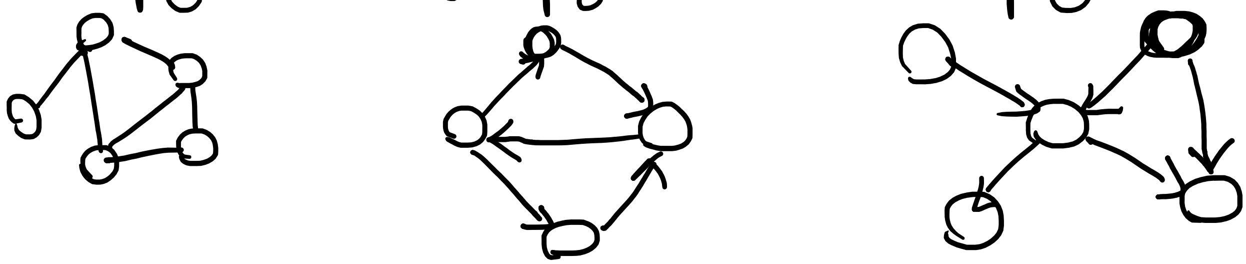
// отнася се за неориентирани графи //

$G(V,E)$ е силно свързан $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u, v \in V,\ u \neq v$ $\exists p_1 = (u \ldots v) \wedge \exists p_2 = (v \ldots u)$

$G(V,E)$ е слабо свързан $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ за $\forall u, v \in V$, ако разглеждаме G като неориентиран граф, $\exists p = (u \ldots v)$

Пример:

свързан: силно свързан: слабо свързан:



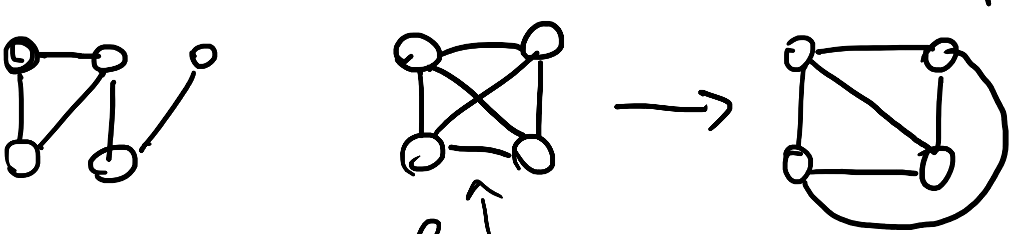
• Допълнение

Допълнение на $G(V,E)$ наричаме $\overline{G}(V,\overline{E})$

$G(V,E)$ $\overline{G}(V,\overline{E})$

• Планарен граф

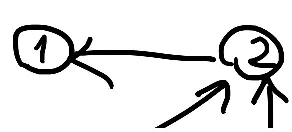
$G(V,E)$ е планарен $\overset{def}{\iff}$ можем да нарисуваме G без пресичащи се ребра



това е планарен, защото

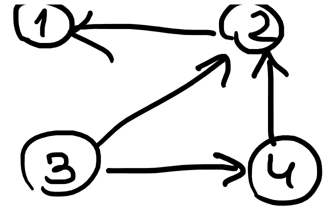
• Матрица на съседство

	1	2	3	4
1	0	0	0	0



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	0	1
4	0	1	0	0

$\iff$



Зад. Нека G(V, E) е неориентиран граф. Да се докаже:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Реш. Следва лесно от факта, че при сумирането на степените всяко ребро се брои по 2 пъти.

Зад. Да се докаже всеки неориентиран граф има четен брой върхове от нечетна степен (0 е четно)

Реш. Доп., че G(V, E) има нечетен брой върхове от нечетна степен.

$\Rightarrow \sum_{v \in V} d(v)$ ще нечетно число ↯ с предната задача

$\Rightarrow$ Всеки неор. граф има четен брой върхове от нечетна степен.

Зад. Док, че във всеки граф има поне два върха с равни степени.

Реш. Колко са възможните степени на върховете в граф $G(V,E)$, $|V|=n$?

Те са n на брой: $0, 1, 2 \ldots n-1$

Ако $\exists v \in V : d(v) = 0$ (не е свързан с никой друг връх $\Leftrightarrow$ никой друг връх не е свързан с него), то $\nexists u \in V : d(u) = n-1$ (и е свързан с всички други).

I сл. Нямаме връх от степен 0. Тогава имаме $n-1$ възм. за степените на върховете $(1, 2 \ldots n-1)$. От Принципа на Дирихле следва, че $\exists u, v \in V : d(u) = d(v)$

II сл. Имаме връх от степен $0 \Rightarrow$ нямаме от степен $n-1$. $\Rightarrow$ имаме $n-1$ възм. за степените на върховете $(0, 1, 2 \ldots n-2)$. От Пр. на Дирихле следва, че $\exists u, v \in V : d(u) = d(v)$.

Зад. Да се док, че ако $G(V,E)$ е свързан граф, то $|E| \geq |V| - 1$.

c

Реш. Ще док. твърдението ~~по~~ индукция по $|V|$.

1) База: $|V| = 1$. Графът има вида: 

$\Rightarrow |E| = 0 \Rightarrow |E| \geq |V| - 1$

// Вярно е и за $|V| = 0$ //

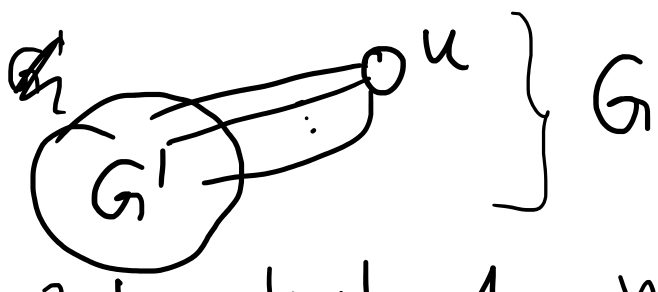
свързан!

2) ИП: Нека за $\forall G(V, E)$ свързан, $|V| \leq n$ е изпълнено, че $|E| \geq |V| - 1$

3) ИС: Разгл. $G(V, E)$, $|V| = n+1$ и G е свързан

Нека $u \in V$.

Сл. $G'(V \setminus \{u\}, E')$ е свързан



$$|V \setminus \{u\}| = |V| - 1 = n + 1 - 1 = n \leq n$$

$$\overset{\text{от ИП}}{\Longrightarrow} |E'| \geq |V \setminus \{u\}| - 1$$

$$|E'| \geq |V| - 2$$

// u е изолиран $\overset{def}{\Leftrightarrow} d(u) = 0$ //

$G(V,E)$ е свързан $\Rightarrow d(u) \geq 1$. За E имаме:

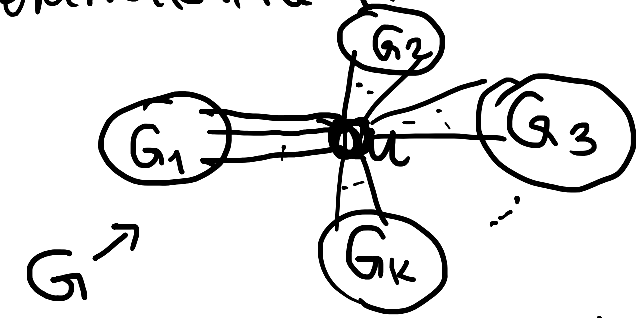
$$|E| = |E'| + d(u) \geq |E'| + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{|E| - 1} \geq |E'| \geq \underbrace{|V| - 2}$$

$$|E| \geq |V| - 1$$

II сл. $G'(V \setminus \{u\}, E')$ е несвързан.

Нека $G_1, G_2 \dots G_k$ са свързаните компоненти на G'. $\boxed{k \geq 2}$



$d(u) \geq k$ (защото u е свързан не свързвана на свързаните компоненти)

$\forall i = 1, 2 \dots k$, $|V_i| < |V \setminus \{u\}| = n \leq n$

$\overset{\text{от ИП}}{\Longrightarrow} |E_i| \geq |V_i| - 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |E_i| \geq \sum_{i=1}^{k} \left(|V_i| - 1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} |E_i| \geq \sum_{i=1}^{k} |V_i| - k$$

$$\sum_{i=1}^{k} |E_i| \geq \sum_{i=1} |V_i| - k$$

За E имаме:

$$\rightarrow \underbrace{|E|} = \sum_{i=1}^{k} |E_i| + d(u) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{k} |E_i| + k}$$

$$|V| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| + 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} |V_i| = |V| - 1$$

$$\Rightarrow \quad |E| - k \geq \sum_{i=1}^{k} |E_i| \geq \sum_{i=1}^{k} |V_i| - k$$

$$|E| - k \geq |V| - 1 - k \quad \forall k$$

$$|E| \geq |V| - 1$$

Зад. Нека $G(V, E)$ е граф с n върха и минимална степен на върховете $d_{min} \geq \frac{n-1}{2}$. Да се док, че графът е свързан.

Реш. Допускаме, че G е несвързан.
$\Rightarrow G$ има поне 2 свързани компоненти: $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Тъй като

$|V_1|+|V_2| \leq n$, (не е само равно защото може да имаме повече от 2 свързани комп.) то за не по-голямото от $|V_1|, |V_2|$ имаме, че $|V_i| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Колко е max степен на върховете в G_i? Тя е:

$$d_{max} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \lightning$$

$\Rightarrow G$ е свързан.

$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$, $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$, $\left\lceil \frac{29}{10} \right\rceil = 3$, $\left\lfloor \frac{29}{10} \right\rfloor = 2$

<u>Зад.</u> <u>Да</u> се док., че ако $G(V,E)$ е несвързан, то $\overline{G}$ е свързан.

<u>Реш.</u> Нека $u, v \in V$.

<u>I сл.</u> u и v са в различни свързани компоненти $\Rightarrow$ няма път м/у u и v

$\Rightarrow (u,v) \notin E \Rightarrow (u,v) \in \overline{E}$

⇒ в $\overline{G}(V,\overline{E})$ ще има ребро м/у u и v

⇒ ще има път м/у u и v

II сл. u и v са в една и съща компонента

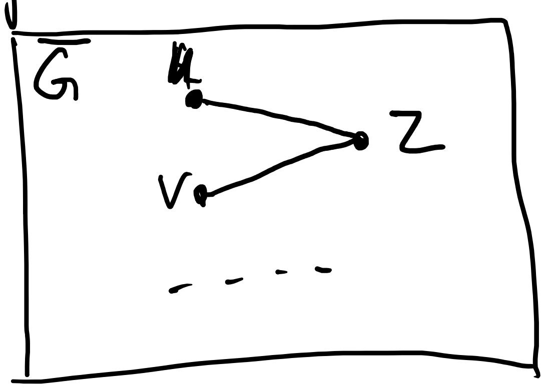
Нека това е компонентата $G_1(V_1,E_1)$

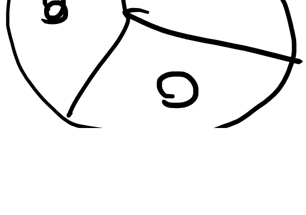
Взимаме $z \in V_2$, където $G_2(V_2,E_2)$ е друга компонента.

В G няма път от u до z. ⇒ няма и ребро от u до z ⇒ в $\overline{G}$ ще има ребро от u до z.

Аналог. ще има път в $\overline{G}$ от v до z. (и от z до v)

⇒ Ще има път от u до v в $\overline{G}$.





Зад. Да се провери дали граф с 6 върха и 11 ребра може да има изолиран връх.

Зад. Даден е k-регулярен граф $G(V, E)$. Док., че в графа има път с дължина k.

1Р Зад. $S = \{1, 2, 3 \ldots 2n\}$

$\rightarrow f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\quad f(x) = 2^x(2y+1) - 1$

е биекция

$\Rightarrow$ числата ≥ 1, можем да представяме в следния вид $2^x(2y+1)$

Представяме числата от S във вида

$2^x(2y+1)$, $x, y \in \mathbb{N}$

Какво е max стойност на y?

y може да е най-много $n-1$, иначе няма как $2^x(2y+1) \in S$

Мин. стойност на y е 0.

$\Rightarrow$ За y имаме n възможности:

$0, 1, 2 \ldots n-1$.

Обаче от S вземаме $n+1$ числа

($n+1$ представяния във

вида $2^x(2y+1)$)

$\Rightarrow$ от Пр. на Дирихле поне двее от взетите числа ще имат еднакви y-ци. Тоест $\exists a_1, a_2 \in S$:

$$a_1 = 2^{x_1}(2y+1) \wedge a_2 = 2^{x_2}(2y+1)$$

Б.О.О. $x_1 > x_2$. Тогава имаме, че

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2^{x_1}\cancel{(2y+1)}}{2^{x_2}\cancel{(2y+1)}} = 2^{x_1 - x_2} \in \mathbb{N}$$

a_1 се дели точно на a_2.