EA614 - Análise de Sinais

EFC3 - Série de Fourier

Rafael Gonçalves (186062)

April 18, 2018

1 Parte Computacional

(a) No caso de $x(t)$ temos:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}te^{-jk\omega_0 t}dt \tag{1}$$

$T = 4s$ então podemos escrever como:

$$a_k = \frac{2}{T^2}\int_{-2}^{2} te^{-jk\omega_0 t}dt \tag{2}$$

Para $k = 0$ (nível DC):

$$a_0 = \frac{2}{T^2}\int_{-2}^{2} te^{0}dt = \frac{2}{T^2}\int_{-2}^{2} tdt \tag{3}$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

Para $k \neq 0$ podemos resolver a integração por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = t; \quad du = dt$$

$$v = \frac{-e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}; \quad dv = e^{jk\omega_0 t}dt$$

Então:

$$\int te^{-jk\omega_0 t}dt = -t\frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} + \int \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}dt \tag{4}$$

$$a_k = \frac{2}{T^2}\left(\left[-t\frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\right]_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}dt\right) = \frac{2}{T^2}\left[\frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\left(t + \frac{1}{jk\omega_0}\right)\right]_{-2}^{2} \tag{5}$$

$$a_k = \frac{2}{T^2}\left[\frac{-2}{jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 2} + e^{-jk\omega_0 2}\right) + \frac{-1}{k^2\omega_0^2}\left(e^{jk\omega_0 2} - e^{-jk\omega_0 2}\right)\right] \tag{6}$$

Usando a fórmula de Euler temos:

$$\omega_0 = \tfrac{2\pi}{T} \text{ e } T = 4s$$

$$a_k = \frac{2}{4^2}\left[\frac{-4\cdot 2}{jk\pi}\cos(\pi k) - \frac{4j}{k^2\pi^2}\sin(\pi k)\right] \tag{7}$$

$$\boxed{a_k = \frac{j}{k\pi}\cos(k\pi)}$$

(b) A função implementada (plot_fourier) retorna a aproximação por série de fourier (dado número de aproximações N, coeficientes a, intervalo de tempo t e frequência w0). Além disso a mesma função será usada no próximo item para plotar os gráficos da aproximação por meio da variável de controle (plot_var = 1).

```
t = -2:0.0001:2;
T = 4;
a = @(k) (i*cos(k*pi))/(k*pi);
w0 = 2*pi/T;

function X = plot_fourier(N, a, t, w0, plot_var),
    X = zeros(size(t));
    for k = 1:N,
        X = X + a(k)*exp(i*k*w0*t);
        X = X + a(-k)*exp(i*(-k)*w0*t);
    end;
    if plot_var == 1,
        plot(t, X)
        xlabel ("t");
        title (["Serie de Fourier com ", num2str(N), " termos"]);
    end;
end;
```

(c) Gráficos com a função dente de serra e as aproximações (respectivamente N = 1, 10, 20 e 50).

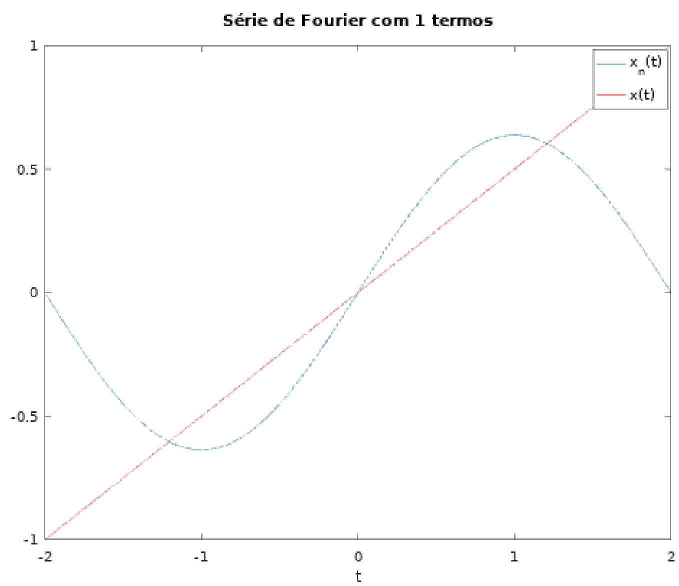

Figure 1: Aproximação por série de Fourier com N = 1

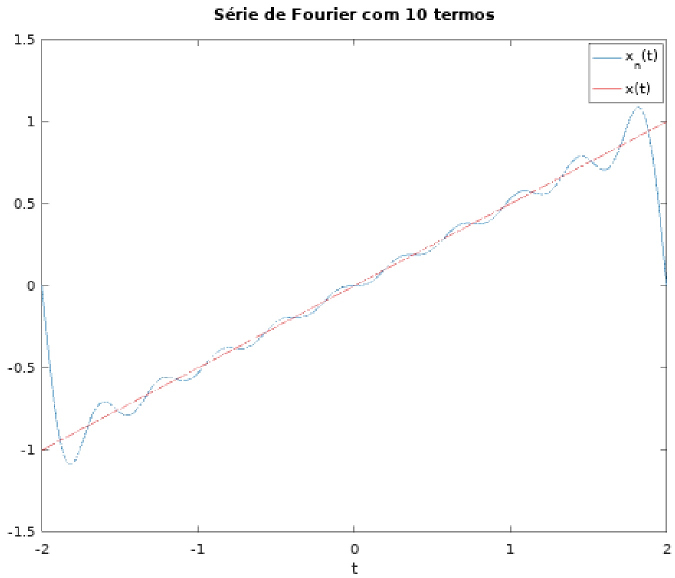

Figure 2: Aproximação por série de Fourier com N = 10

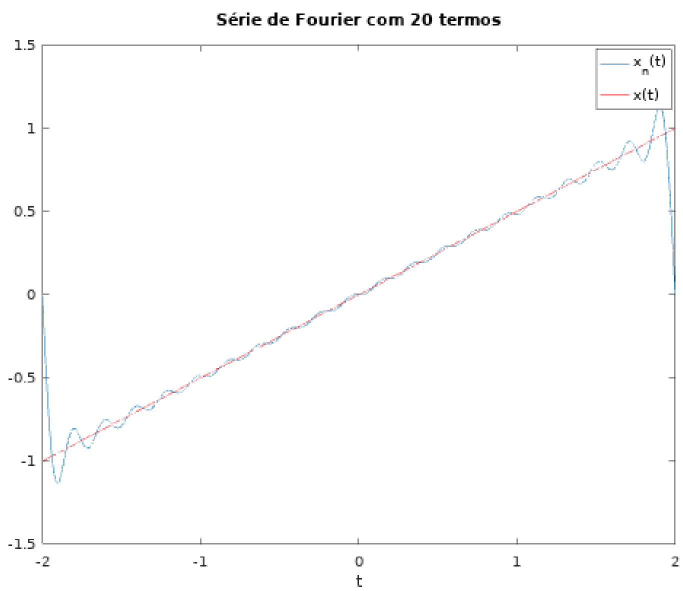

Figure 3: Aproximação por série de Fourier com N = 20

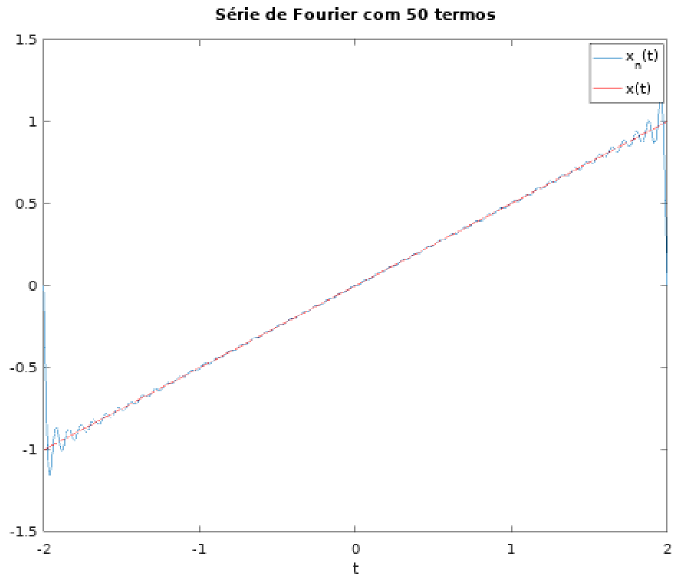

Figure 4: Aproximação por série de Fourier com N = 50

(d) Os erros ($\frac{\sum_{k=-N}^{N}(x(t)-x_N(t))^2}{2N+1}$) encontrados pelo programa para E_N onde N é o número do último termo da série de fourier (ou seja, série de fourier calculada para $-N \leq k \leq N$):

$E_1 = 5228.6$

$E_{10} = 772.39$

$E_{20} = 396.32$

$E_{50} = 161.51$

(e) Gráfico do módulo dos coeficientes a_k em função de $\omega = 2\pi k$:

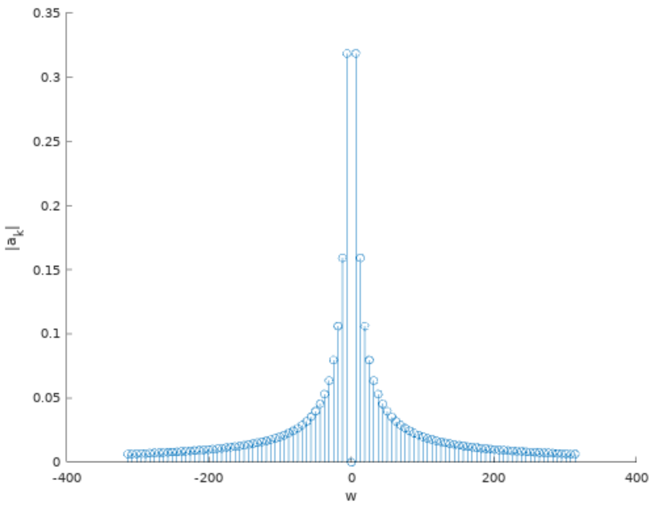

Figure 5: Gráfico do módulo de a_k por ω

(f) Sendo:

$$\omega_C = \frac{1}{RC} = 10\frac{rad}{s} \tag{8}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)} \tag{9}$$

Temos que a resposta em frequência é dada graficamente por:

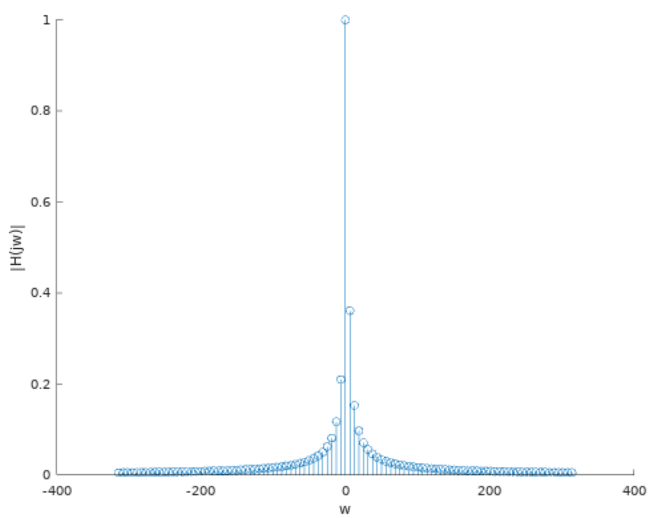

Figure 6: Gráfico do módulo de $H(j\omega)$ por ω

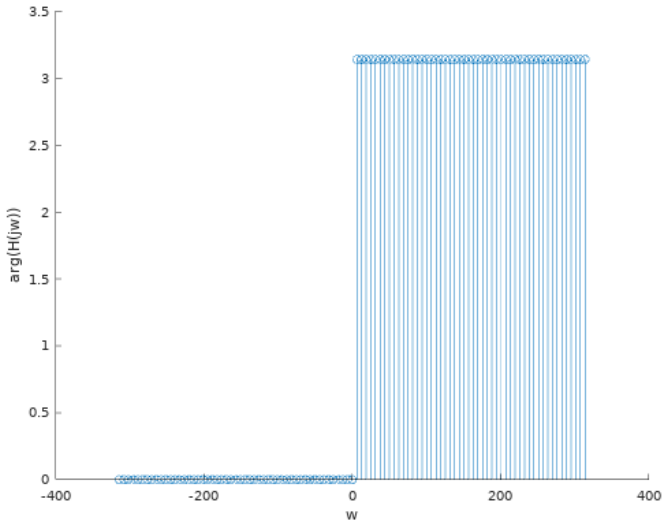

Figure 7: Gráfico da fase de $H(j\omega)$ por ω

(g) O gráfico plotado é um filtro passa baixa.