EFC1 - Sistemas LIT e Convolução

Rafael Gonçalves (RA:186062)

March 21, 2018

Parte Teórica

a)

Dado que:

(A) $h[n]$ é não nulo em $[0, D-1]$, então $h[n-k]$ é não nulo para n em $[k, D+k-1]$.

(B) $s[k]$ é não nulo em $[0, K-1]$.

(C) Para todo n:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

Por (C), $x[n]$ é não nulo quando tanto $s[k]$ quanto $h[n-k]$ são não nulos.

Por (A), para cada k, $x[n]$ é não nulo para $k \leq n \leq k + D - 1$.

Por (B), para $x[n]$ ser não nulo k está limitado tal que $0 \leq k \leq K - 1$.

Definindo:

$$x_k[n, k], \quad k \leq n \leq D - 1 + k \quad \text{e} \quad k = 1, 2, ..., K - 1 \tag{1}$$

Ou seja:

x_0 é não nulo se $n \in [0, D - 1 + 0] = [0, D - 1]$

x_1 é não nulo se $n \in [1, D - 1 + 1] = [1, D]$

...

x_{K-1} é não nulo se $n \in [K - 1, D - 1 + K - 1] = [K - 1, D + K - 2]$

Como $x[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ então $x[n]$ é não nulo no intervalo em que pelo menos um x_k é não nulo. E isso pode ser expresso como a união dos intervalos em que $x_k, \quad k = 1, 2, ...K - 1$ é não nulo:

$$n = [0, D - 1] \cup [1, D - 1 + 1] \cup ... \cup [K - 1, D - 1 + K - 1] \tag{2}$$

Então:

$$0 \leq n \leq K + D - 2 \tag{3}$$

O que representa um número de amostras igual a:

$$P = K + D - 1 \tag{4}$$

b)

Dado

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} \tag{5}$$

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, ...x_{P-1}]^T \tag{6}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{P\times 1}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{P\times K}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{K\times 1}$$

Temos

$$x_i = \sum_{k=0}^{K-1} h_{ik} s_k, \quad i = 0, 1, ...P-1 \tag{7}$$

Para que x_i seja igual a $x[n]$:

$$x_i = \sum_{k=0}^{K-1} h_{ik} s_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k] = x[n] \tag{8}$$

Como:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} s[k]h[n-k] = \sum_{k=K}^{\infty} s[k]h[n-k] = 0 \tag{9}$$

$$s_k = s[k] \tag{10}$$

Então:

$$x_i = \sum_{k=0}^{K-1} h_{ik} s[k] = \sum_{k=0}^{K-1} h[n-k]s[k] = x[n] \tag{11}$$

$$h_{ik} = h[n-k], \quad i = n \tag{12}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0-0] & h[0-1] & \cdots & h[0-(K-1)] \\ h[1-0] & h[1-1] & \cdots & h[1-(K-1)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[P-1-0] & h[P-1-1] & \cdots & h[P-1-(K-1)] \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & \cdots & h[1-K] \\ h[1] & h[0] & \cdots & h[2-K] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[P-1] & h[P-2] & \cdots & h[P-K] \end{bmatrix} \tag{14}$$

Com cada elemento $h_{ij} = 0$ para todo i, j se $i - j < 0$ ou $i - j \geq D$

Parte Computacional

c)

Como:

$$x[n] = s[n] - 0.5s[n-1] \tag{15}$$

Se substituirmos $s[n] = \delta[n]$ em (15), então:

$$h[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-1] \tag{16}$$

Ou ainda:

$$\mathbf{h} = [1, -0.5] \tag{17}$$

d)

Supondo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{s} \tag{18}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} \tag{19}$$

Temos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{s} = \mathbf{s} \tag{20}$$

Portanto a resposta combinada é:

$$\mathbf{W}\mathbf{H} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

E a saída do sistema é:

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{s} \tag{22}$$

e)

Rotina para implementação de forma vetorial de convolução (em python 3):

```
import numpy as np
# convolucao
def conv(h, x):
    H = getH(h, x)
    return np.dot(H, x)
# construcao da matriz H a partir de h (resposta ao impulso) e x (entrada)
def getH(h, x):
    K = len(x)
    D = len(h)
    P = K + D - 1
    H = np.zeros([P,K])
    for i in range(P):
        for j in range(K):
            if (i - j) in range(D):
                H[i,j] = h[(i-j)]
            else:
                H[i,j] = 0
    return H
```

```
h = np.array([[1], [-0.5]])
w1 = np.array([1,0.5,0.5**2,0.5**3,0.5**4])
w2 = np.array([1,1.5,0.7,-0.2, 0.3])
```

```
print("w1:", '\n', conv(w1, h))
```

```
## w1:
##  [[ 1.      ]
##  [ 0.      ]
##  [ 0.      ]
##  [ 0.      ]
##  [ 0.      ]
##  [-0.03125]]
```

```
print("w2:", '\n', conv(w2, h))
```

```
## w2:
##  [[ 1.  ]
##  [ 1.  ]
##  [-0.05]
##  [-0.55]
##  [ 0.4 ]
##  [-0.15]]
```

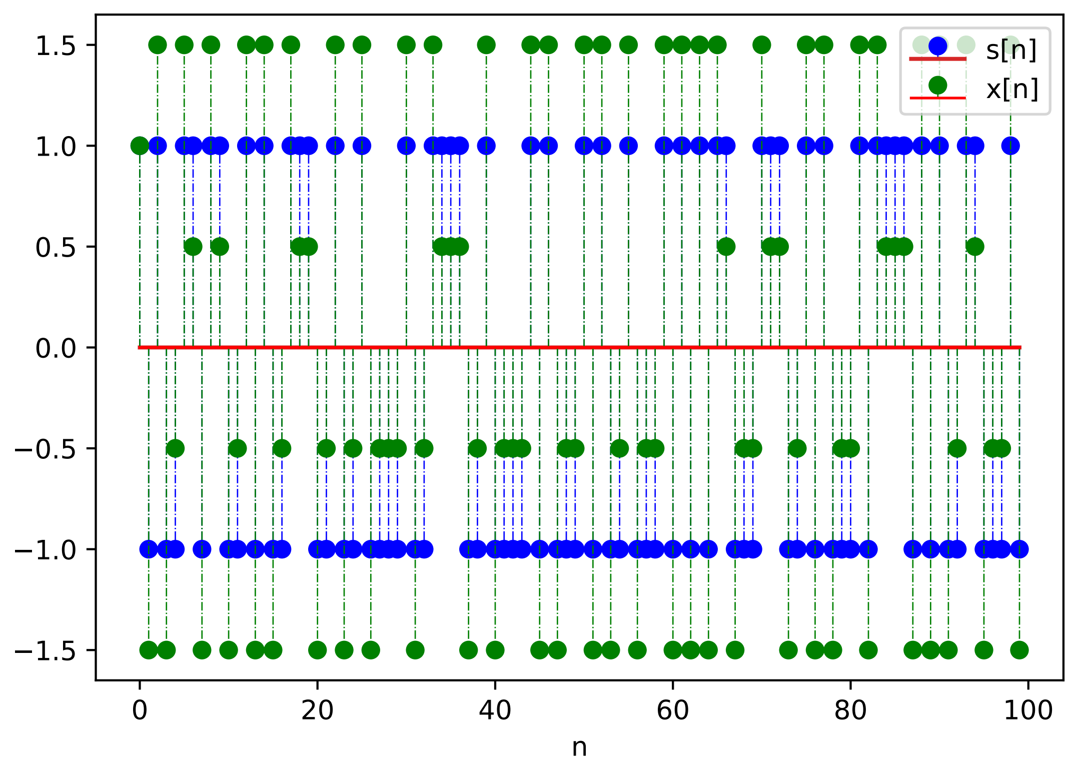
Estamos buscando construir um sistema (com resposta ao impulso $w[n]$, e entrada $x[n]$) que devolva um sinal o mais semelhante possível com o sinal inicial sem o ruído (sinal $s[n]$). Como h é a resposta quando $s[n] = \delta[n]$ então a saída deveria ser igual a $\delta[n]$ ($w[n] = 1$ para $n = 0$ e $w[n] = 0$ para $n \neq 0$).

O filtro w1 apresentou uma resposta muito próxima ao ideal (valor 1 em n = 0, e zero para todos os outros valores de n). Já o filtro w2 não apresentou uma boa resposta.

f)

```
# funcao signum
sign = lambda X: [e/abs(e) for e in X[0,:]]
# 100 amostras
s = np.array(sign(np.random.randn(1,100)))
#
x = conv(h,s)
```

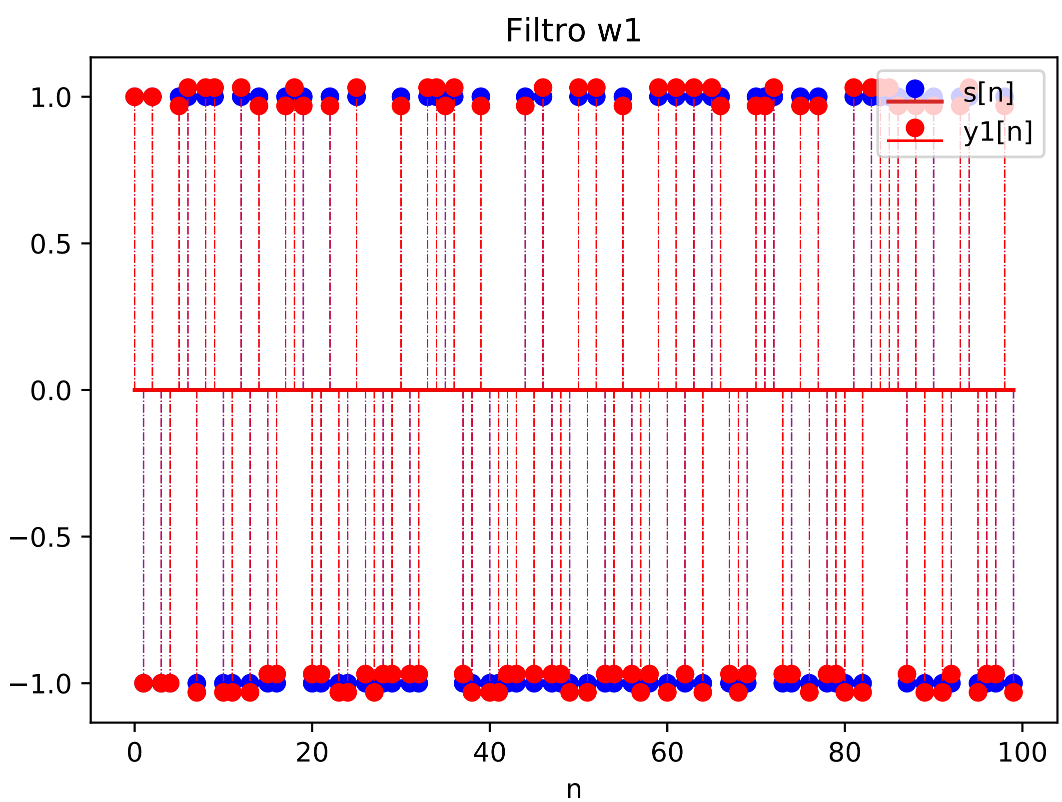
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
n = np.linspace(0, 99, 100)
markerline1, stemlines1, baseline = plt.stem(n, s, '-.')
markerline2, stemlines2, baseline = plt.stem(n, x[:-1], '-.')
plt.setp(baseline, 'color', 'r', 'linewidth', 1)
plt.setp(stemlines1, 'color', 'b', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(stemlines2, 'color', 'g', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(markerline1, 'color', 'b', 'linewidth', 1)
plt.setp(markerline2, 'color', 'g', 'linewidth', 1)
plt.xlabel('n')
plt.legend(['s[n]', 'x[n]'], loc=1)
plt.show()
```



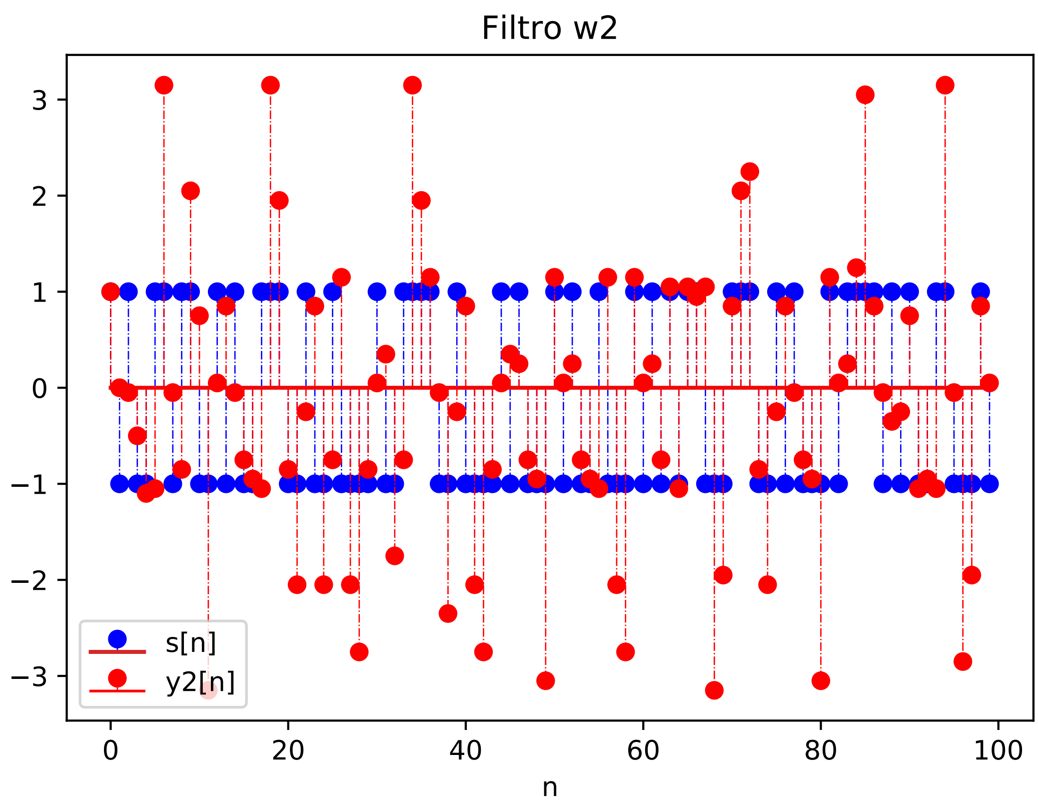
g)

```
y1 = conv(w1,x)
y2 = conv(w2,x)
```

```
plt.clf()
n = np.linspace(0, 99, 100)
markerline1, stemlines1, baseline = plt.stem(n, s, '-.')
markerline2, stemlines2, baseline = plt.stem(n, y1[:100], '-.')
plt.setp(baseline, 'color', 'r', 'linewidth', 1)
plt.setp(stemlines1, 'color', 'b', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(stemlines2, 'color', 'r', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(markerline1, 'color', 'b', 'linewidth', 1)
plt.setp(markerline2, 'color', 'r', 'linewidth', 1)
plt.title('Filtro w1')
plt.xlabel('n')
plt.legend(['s[n]', 'y1[n]'], loc=1)
plt.show()
```



```
plt.clf()
markerline1, stemlines1, baseline = plt.stem(n, s, '-.')
markerline2, stemlines2, baseline = plt.stem(n, y2[:100], '-.')
plt.setp(baseline, 'color', 'r', 'linewidth', 1)
plt.setp(stemlines1, 'color', 'b', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(stemlines2, 'color', 'r', 'linewidth', 0.5)
plt.setp(markerline1, 'color', 'b', 'linewidth', 1)
plt.setp(markerline2, 'color', 'r', 'linewidth', 1)
plt.title('Filtro w2')
plt.xlabel('n')
plt.legend(['s[n]', 'y2[n]'], loc=3)
plt.show()
```



Com base nos gráficos a saída que mais se aparenta com $s[n]$ é a saída $y1[n]$ (distância entre os pontos de $y[n]$ e $s[n]$ para um mesmo n é menor para $y[n] = y1[n]$).

h)

Uma possível medida seria o MSE (Mean Squared Error), pois considera os erros para mais ou para menos com a mesma medida.

$$E = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(s_i - y_i)^2 \tag{23}$$

```
mse = lambda A, B: sum([(e-f)**2 for e, f in zip(A,B)])/len(A)
print("MSE de y1: ", mse(s,y1))
```

```
## MSE de y1:  0.000927734375
```

```
print("MSE de y2: ", mse(s,y2))
```

```
## MSE de y2:  1.5486000000000002
```

Com base nos valore para o MSE, podemos ver que a saída $y2[n]$ é muito mais próxima da entrada $s[n]$ do que a saída $y2[n]$ (erro entre a saída e o sinal s é menor para $y2$).

i)

O filtro w1 é mais adequado na tarefa de equalização. Tanto pelos gráficos (pontos de $s[n]$ estão mais próximos de $y1[n]$ do que de $y2[n]$) quanto pelo resultado do MSE (erro de $y1[n]$ é menor que erro de $y2[n]$), temos que o filtro w1 obtém resultados muito melhores na tarefa de aproximar a saída $y[n]$ em relação à entrada $s[n]$.