

EA614 - Análise de Sinais

EFC3 - Série de Fourier

Rafael Gonçalves (186062)

18 de Abril de 2018

1 Parte Computacional

(a) No caso de $x(t)$ temos:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (1)$$

$T = 4s$ então podemos escrever como:

$$a_k = \frac{2}{T^2} \int_{-2}^2 t e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Para $k = 0$ (nível DC):

$$a_0 = \frac{2}{T^2} \int_{-2}^2 t e^0 dt = \frac{2}{T^2} \int_{-2}^2 t dt \quad (3)$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

Para $k \neq 0$ podemos resolver a integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = t; \quad du = dt$$

$$v = \frac{-e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}; \quad dv = e^{jk\omega_0 t} dt$$

Então:

$$\int t e^{-jk\omega_0 t} dt = -t \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} + \int \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} dt \quad (4)$$

$$a_k = \frac{2}{T^2} \left(\left[-t \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} \right]_{-2}^2 + \int_{-2}^2 \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} dt \right) = \frac{2}{T^2} \left[\frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} \left(t + \frac{1}{jk\omega_0} \right) \right]_{-2}^2 \quad (5)$$

$$a_k = \frac{2}{T^2} \left[\frac{-2}{jk\omega_0} (e^{jk\omega_0 2} + e^{-jk\omega_0 2}) + \frac{-1}{k^2 \omega_0^2} (e^{jk\omega_0 2} - e^{-jk\omega_0 2}) \right] \quad (6)$$

Usando a fórmula de Euler temos:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ e } T = 4s$$

$$a_k = \frac{2}{4^2} \left[\frac{-4 \cdot 2}{jk\pi} \cos(\pi k) - \frac{4j}{k^2 \pi^2} \sin(\pi k) \right] \quad (7)$$

$$\boxed{a_k = \frac{j}{k\pi} \cos(k\pi)}$$

- (b) A função implementada (`plot_fourier`) retorna a aproximação por série de fourier (dado número de aproximações N , coeficientes a , intervalo de tempo t e frequência w_0). Além disso a mesma função será usada no próximo item para plotar os gráficos da aproximação por meio da variável de controle (`plot_var = 1`).

```
t = -2:0.0001:2;
T = 4;
a = @(k) (i*cos(k*pi))/(k*pi);
w0 = 2*pi/T;

function X = plot_fourier(N, a, t, w0, plot_var),
    X = zeros(size(t));
    for k = 1:N,
        X = X + a(k)*exp(i*k*w0*t);
        X = X + a(-k)*exp(i*(-k)*w0*t);
    end;
    if plot_var == 1,
        plot(t, X)
        xlabel ("t");
        title (["Serie de Fourier com ", num2str(N), " termos"]);
    end;
end;
```

- (c) Gráficos com a função dente de serra e as aproximações (respectivamente $N = 1, 10, 20$ e 50).

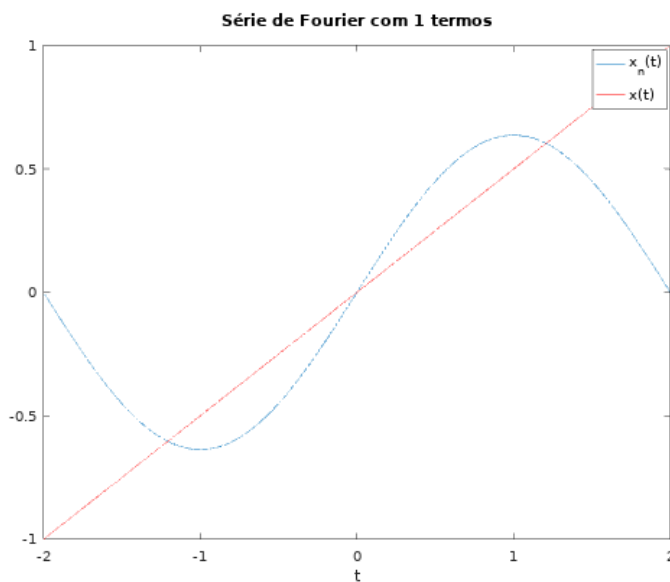


Figura 1: Aproximação por série de Fourier com $N = 1$

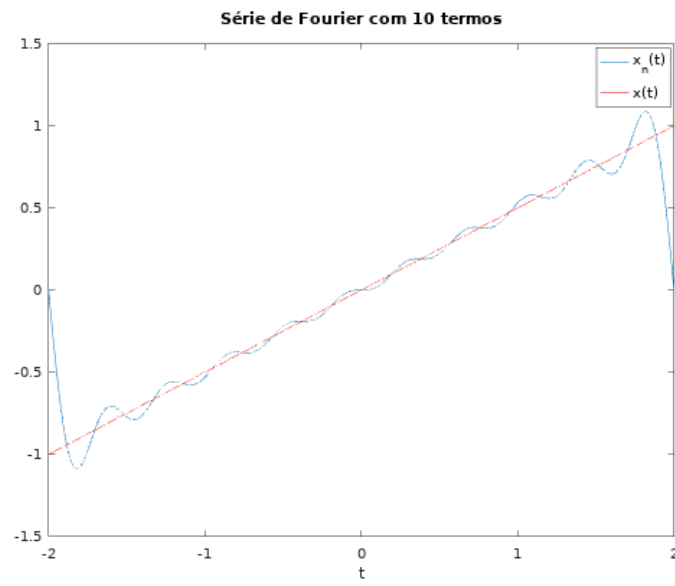


Figura 2: Aproximação por série de Fourier com $N = 10$

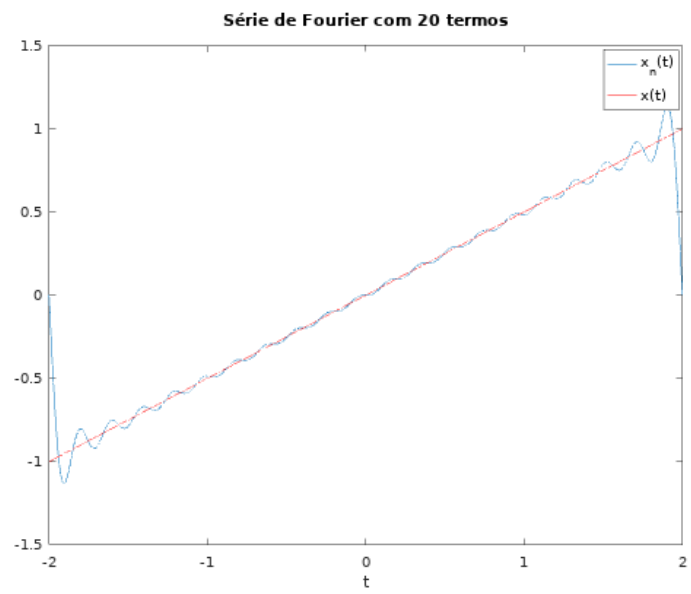


Figura 3: Aproximação por série de Fourier com $N = 20$

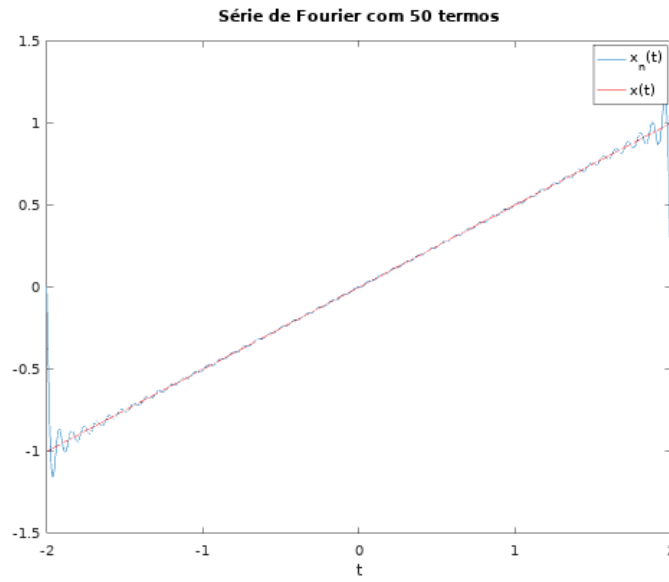


Figura 4: Aproximação por série de Fourier com $N = 50$

- (d) Os erros $\left(\frac{\sum_{k=-N}^N (x(t) - x_N(t))^2}{2N+1} \right)$ encontrados pelo programa para E_N onde N é o número do último termo da série de fourier (ou seja, série de fourier calculada para $-N \leq k \leq N$):

$$E_1 = 0.13071$$

$$E_{10} = 0.019309$$

$$E_{20} = 0.0099078$$

$$E_{50} = 0.0040375$$

(e) Gráfico do módulo dos coeficientes a_k em função de $\omega = k\omega_0$:

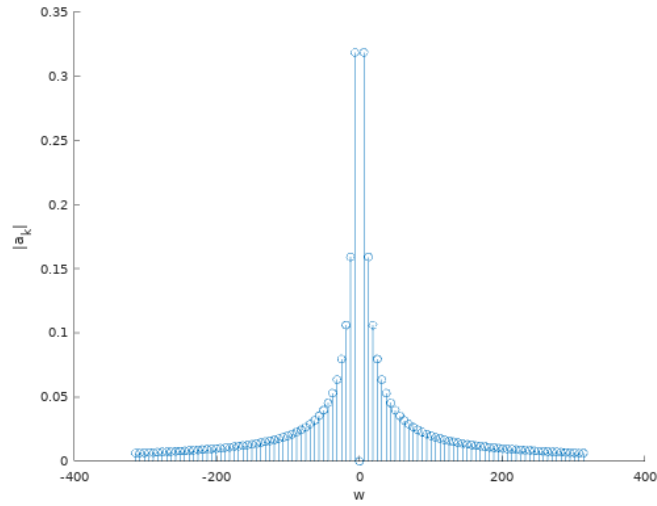


Figura 5: Gráfico do módulo de a_k por ω

A simetria observada é par, ou seja, $a_k = a_{-k}$.

(f) Sendo:

$$\omega_C = \frac{1}{RC} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (8)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_C}{\omega}\right)} \quad (9)$$

Temos que a resposta em frequência é dada graficamente por:

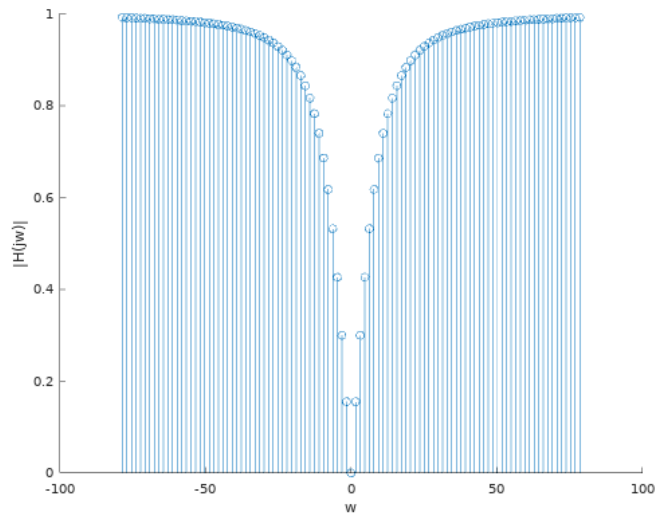


Figura 6: Gráfico do módulo de $H(j\omega)$ por ω

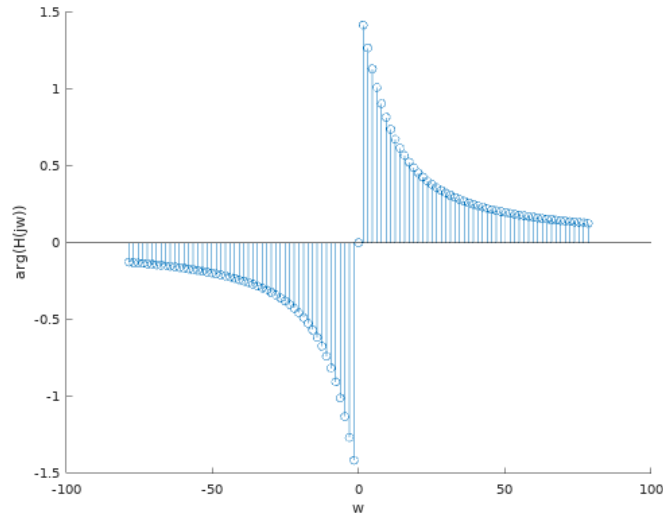


Figura 7: Gráfico da fase de $H(j\omega)$ por ω

O gráfico plotado é um filtro passa alta (como visto no gráfico do modulo, o ganho é maior para frequências maiores).

- (g) Tendo em vista que ao passar um sinal de entrada do tipo $x(t) = Ae^{j\omega t}$ em um sistema LIT, a saída será a mesma entrada multiplicada pela resposta em frequência $H(j\omega)$. Então temos $y(t) = H(j\omega)x_N(t) = \sum_{k=-N}^N H(jk\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t}$

Gráfico da saída $y(t)$ quando $x(t)$ é a aproximação do sinal dente de serra com $N=50$:

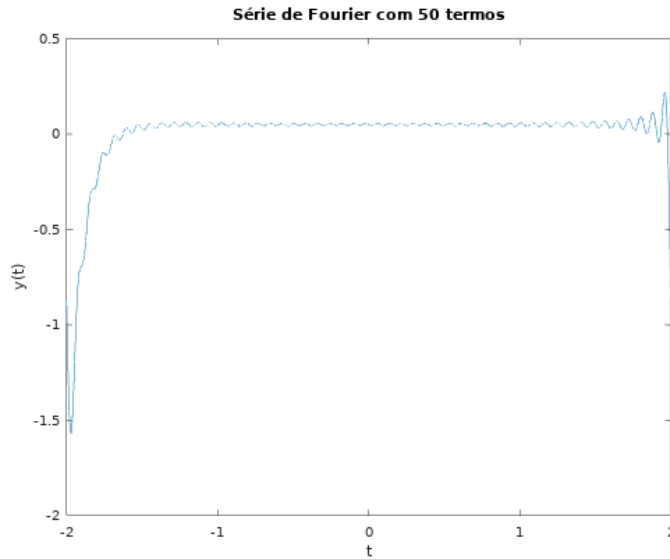


Figura 8: Gráfico da resposta do sinal $x(t)$ após passar pelo filtro RC

Só passaram as frequências mais altas e portanto o sinal ficou achatado no centro (majoritariamente próximo ao zero, pois os termos de frequência menor são responsáveis pela forma "macro" do sinal) enquanto que o sinal todo continua apresentando os "ruídos" causados pelos termos de alta frequência (percebidos sobretudo nas bordas).