Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1 Lista 6

1.1 1L6

Rzucamy niezależnie dwoma szcześciennymi kostkami. X - mniejszy z rzutów. Y - większy z rzutów. Wyznaczmy rozkład łączny oraz rozkłady brzegowe zmiennych X i Y.

Zliczamy wszystkie przypadki dla których w min wyniósł X, a max Y. Wprowadźmy dwie zmienne losowe $R_1 : \Omega \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ oraz $R_2 : \Omega \to \{1, 2, \ldots, 6\}$, gdzie R_1 odpowiada za pierwszy rzut, a R_2 za drugi rzut. Dokonajmy zliczenia poszczególnych wartości min, max:

R_1/R_2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Table 1: Tabela $\min R_1, R_2$

R_1/R_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Table 2: Tabela $\max R_1, R_2$

Dzieląc liczbę przypadków przez liczbę możliwych wyników otrzymujemy rozkłady brzegowe $P_X(x)$ oraz $P_Y(y)$:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36
Y	1	2	3	4	5	6
$P(Y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Table 3: Rozkłady brzegowe zmiennej X i Y

Wyznaczmy następnie rozkład łączny, czyli funkcję $P_{X,Y}(x, y)$, która określa prawdopodobieństwo, że zmienna X przyjmie wartość x oraz zmienna Y przyjmie wartość y.

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36
3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36
4	0	0	0	1/36	2/36	2/36
5	0	0	0	0	1/36	2/36
6	0	0	0	0	0	1/36

Table 4: Rozkład łączny zmiennych X i Y

Odpowiedzmy na pytanie, czy zmienne losowe X i Y są niezależne. Wiemy, że zmienne losowe są niezależne gdy spełniony jest warunek:

$$(\forall A, B \in \mathcal{B}) P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

gdzie $\mathcal{B}$ to zbiór borelowski. W naszym przypadku zbiór borelowski to $\{1,2,3,4,5,6\}$. Zobaczmy, że przykładowo dla wartości $A=\{1\}, B=\{1\}$. $P(X\in A \wedge Y\in B)=1/36$, $P(X\in A)P(Y\in B)=11/36\cdot 1/36=11/216$, wobec tego zmienne losowe X i Y są zależne.

Obliczmy wartość oczekiwaną zmiennej X oraz Y:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{6} xP(X=x) = && (1)\\
&= 1\cdot 11/36 + 2\cdot 9/36 + 3\cdot 7/36 + 4\cdot 5/36 + 5\cdot 3/36 + 6\cdot 1/36 = 91/36 && (2)\\
E(Y) &= \sum_{y=1}^{6} yP(Y=y) = && (3)\\
&= 1\cdot 1/36 + 2\cdot 3/36 + 3\cdot 5/36 + 4\cdot 7/36 + 5\cdot 9/36 + 6\cdot 11/36 = 161/36 && (4)
\end{aligned}$$

1.2 2L6

Niech $F(s,t)$ będzie łączną dystrybuantą wektora losowego (X,Y). Pokażmy, że dla dowolnych $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ zachodzi:

$$P(a<X\leqslant b, c<Y\leqslant d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$$

Możemy od $P(X\leqslant b, Y\leqslant d)$ odjąć przedziały brzegowe $P(X\leqslant a, Y\leqslant d)$, $P(X\leqslant b, Y\leqslant c)$, ale zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń musimy dodać z powrotem $P(X\leqslant a, Y\leqslant c)$, ponieważ dwukrotnie policzyliśmy przedział $P(X\leqslant a, Y\leqslant c)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&P(a<X\leqslant b, c<Y\leqslant d) =_{\text{inclusion-exclusion principle}} && (1)\\
&= P(X\leqslant b, Y\leqslant d)-P(X\leqslant a, Y\leqslant d)-P(X\leqslant b, Y\leqslant c)+P(X\leqslant a, Y\leqslant c) = && (2)\\
&= F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c) && (3)
\end{aligned}$$

1.3 3L6

Wyznaczmy wartość oczekiwaną zmiennych losowych z zadań 1L5 oraz 3L5.

W zadaniu 1L5 rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej R ($r\in\{0,1,2\}$) wyniósł:

$$P(R=r)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{dla } r=0\\ \frac{7}{16} & \text{dla } r=1\\ \frac{5}{16} & \text{dla } r=2\end{cases}$$

Zatem wartość oczekiwana wynosi:

$$\mathbf{E}(R)=\sum_{r=0}^{2} r\cdot P(R=r)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{7}{16}+2\cdot\frac{5}{16}=\frac{17}{16} \qquad (1)$$

W zadaniu 3L5 rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej X wyniósł:

$$P(X=x)=f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dla } x\in[0,1]\\ 0 & \text{dla } x\notin[0,1]\end{cases}$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[1^{\frac{3}{2}} - 0\right] = \frac{1}{3} \tag{3}$$

1.4 4L6

Niech $X : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ będzie zmienną losową. Wyznacz $\mathbf{E}(X)$ dla dwóch przypadków:

1. $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$
2. $P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$

Rozważmy przypadek pierwszy. Wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{1}$$

Spójrzmy na funkcję tworzącą dla podanej sumy:

$$\sum_{k \geqslant 1} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k \geqslant 1} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \tag{3}$$

$$\sum_{k \geqslant 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{4}$$

$$\sum_{k \geqslant 1} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{5}$$

Podstawmy $x = 1/2$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \tag{6}$$

Rozważmy przypadek drugi. Wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \tag{7}$$

Szereg $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k}$ jest rozbieżny, zatem wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X nie istnieje.

1.5 5L6

Niech $X_1, \ldots X_n$ będą niezależnymi zmiennyim losowymi o rozkładzie F. Niech $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wyznaczmy dystrybuantę zmiennych losowych Y oraz Z.

Dystrybuanty w przypadku ogólnym

Dla zmiennej losowej Y dystrybuanta wynosi:

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = P(Y \leqslant t) &= P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant t) = && (1)\\
&= P(X_1 \leqslant t \vee \dots \vee X_n \leqslant t) = && (2)\\
&= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > t) = && (3)\\
&= 1 - P(X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n \wedge t) = && (4)\\
&= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) \cdot \dots \cdot P(X_n > t) = && (5)\\
&= 1 - (1 - P(X_1 \leqslant t))^n && (6)\\
&= 1 - (1 - F(t))^n && (7)
\end{aligned}$$

Dla zmiennej losowej Z dystrybuanta wynosi:

$$\begin{aligned}
F_Z(t) = P(Z \leqslant t) &= P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant t) = && (8)\\
&= P(X_1 \leqslant t \wedge X_2 \leqslant t \wedge \dots \wedge X_n \leqslant t) = && (9)\\
&= P(X_1 \leqslant t)P(X_2 \leqslant t) \cdot P(X_n \leqslant t) = && (10)\\
&= F(t)^n && (11)
\end{aligned}$$

Dla X_i z ustalonym PMF

Załóżmy, że X_i, $i \in \{1 \dots, n\}$ to dyskretne zmienne losowe z PMF:

$$P(X_i = k) = \frac{1}{N}, k \in \{1, \dots, N\}$$

Wyznaczmy funkcje masy Y, możemy ją zapisać jako różnicę dystrybuant:

$$P(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1) \tag{12}$$

$$P(Y = k) = \left[1 - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n\right] - \left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n\right] \tag{13}$$

$$P(Y = k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}. \tag{14}$$

Podobnie z funkcją masy Z:

$$P(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1) \tag{15}$$

$$P(Z = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} \tag{16}$$

Wyznaczmy następnie $\mathbf{E}(Y)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej Y jest dana wzorem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{N} k \cdot P(Y = k) && (17)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k \left[\left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n\right] && (18)\\
&= \mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n && (19)
\end{aligned}$$

Podobnie wyznaczmy $\mathbf{E}(Z)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot P(Z = k) \tag{20}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k \left[\left(\frac{k}{N} \right)^n - \left(\frac{k-1}{N} \right)^n \right] \tag{21}$$

$$= \mathbf{E}(Z) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^n \tag{22}$$

Dla X_i z rozkładem jednostajnym

Załóżmy teraz, że X_i ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Wówczas dystrybuanta $F(t)$ i gęstość $f(t)$ są dane wzorami:

$$F_X(t) = P(X_i \leqslant t) = t, \quad t \in [0, 1],$$

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Z wcześniejszych ustaleń:

$$F_Y(t) = 1 - (1 - F(t))^n = 1 - (1 - t)^n, \quad t \in [0, 1] \tag{23}$$

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \frac{d}{dt} \left[1 - (1 - t)^n \right] = n(1 - t)^{n-1}, \quad t \in [0, 1] \tag{24}$$

Podobnie zapisujemy:

$$F_Z(t) = F_X(t)^n = t^n, \quad t \in [0, 1] \tag{25}$$

$$f_Z(t) = \frac{d}{dt} F_Z(t) = \frac{d}{dt} [t^n] = n t^{n-1}, \quad t \in [0, 1] \tag{26}$$

Wartość oczekiwana Y jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 t \cdot f_Y(t)\, dt = \int_0^1 t \cdot n(1 - t)^{n-1}\, dt \tag{27}$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \int_0^1 t(1 - t)^{n-1}\, dt \tag{28}$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \left[-\frac{t(1 - t)^n}{n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n}\, dt \right] \tag{29}$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 (1 - t)^n\, dt = \int_0^1 (1 - t)^n\, dt \tag{30}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

Wartość oczekiwana Z jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^1 t \cdot f_Z(t)\, dt = \int_0^1 t \cdot nt^{n-1}\, dt \tag{33}$$

$$\mathbf{E}(Z) = n \int_0^1 t^n\, dt = n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \tag{34}$$

1.6 6L6

Niech $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Pokażmy, że $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$, o ile podany szereg jest zbieżny.

Rozpiszmy z definicji. Możemy zamienić $k \cdot P(X = k)$ na sumę $\sum_{l=1}^{k} P(X = k)$, zatem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} P(X = k) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} P(X = k) = \tag{1}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(X \geqslant l) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X > l) \tag{2}$$