Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1 Lista 8 **2**

1.1 1L8 2

1.2 2L8 2

1.3 3L8 3

1.4 4L8 4

1.5 5L8 4

1 Lista 8

1.1 1L8

Wyznaczmy wariancję zmiennej losowej Y z zadania 5L6, ostatniego podpunktu. Mamy:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}$$

Policzmy:

todo: powtórz całkę

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y^2) &= \int_0^1 t^2 f_Y(t)dt = \int_0^1 t^2 n(1-t)^{n-1}dt = && (1)\\
&= n\int_0^1 t^2(1-t)^{n-1}dt = n \cdot \left[\frac{-t^2(1-t)^n}{n} + \int \frac{2t(1-t^n)}{n}dt\right]_0^1 = && (2)\\
&= \left[-t^2(1-t)^n + 2\left(-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2} + \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right)\right]_0^1 = && (3)\\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)} && (4)
\end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{var}(Y) &= \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \frac{2}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = && (5)\\
&= \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{2n+2-n-2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} && (6)
\end{aligned}$$

todo: policz $E(Z^2)$

Wyznaczmy wariancję zmiennej losowej Z. Mamy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{var}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{2}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = && (7)\\
&= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n^3+2n^2+n-n^3-2n^2}{(n+2)(n+1)^2} = && (8)\\
&= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} && (9)
\end{aligned}$$

1.2 2L8

Weźmy X - zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,\pi]$, którego gęstość:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla} \quad t \in (0,\pi) \\ 0 & \text{dla} \quad t \notin (0,\pi) \end{cases}$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$. Wiemy, że jeśli pewna funkcja $g(x)$ jest ciąła oraz dane jest f_X to zachodzi:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

Policzmy:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\sin(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(X) f_X(x) dx = \int_0^{\pi} \sin(X) \cdot \frac{1}{\pi} dx = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(X) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(-\cos(x) + cos(0)\right) = \frac{2}{\pi} \tag{2}$$

Następnie policzmy

$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(x) \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[x - \sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \tag{4}$$

Finalnie

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \tag{5}$$

Wyznaczmy teraz wartość oczekiwaną i wariancję dla Z:

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(\cos(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0 \tag{6}$$

Następnie:

$$\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(\cos(X)^2) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x) f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

Zatem:

$$\mathbf{var}(Z) = \mathbf{E}(Z^2) - (\mathbf{E}(Z))^2 = \frac{1}{2} \tag{8}$$

1.3 3L8

Funkcja masy prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ będzie wynosić

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

Liczymy:

$$\mathbf{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots \tag{2}$$

Całkujmy przez części

$$u = x^{k-1} \quad du = (k-1)x^{k-2} dx \tag{3}$$

$$dv = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{4}$$

zachodzi

$$\ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + (k-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) = \tag{5}$$

$$= (k-1)\mathbf{E}(X^{k-2}) \tag{6}$$

Zobaczmy, że skoro $\mathbf{E}(X) = 0$ oraz $\mathbf{E}^2(X) = 1$, to dla $k \in \{1, 2 \ldots\}$ zachodzi:

$$\mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{E}(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\ldots(3)\cdot\mathbf{E}(X^2) = \tag{8}$$

$$= \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\ldots 4\cdot 2} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \tag{9}$$

1.4 4L8

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależne o rozkładach $Exp(\lambda_i)$, wyznaczmy rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

$$f_{X_i}(t) = P(X = t) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t} & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

Spróbujmy

$$1 - F_Y(t) = P(Y \geqslant t) = \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda_i t} = e^{-t\cdot\left[\sum_{k=1}^{k}\lambda_i\right]} \tag{1}$$

$$F_Y(t) = 1 - e^{-t\cdot\left[\sum_{k=1}^{k}\lambda_i\right]} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Widzimy, że $Y \sim Exp(\sum_{k=1}^{k}\lambda_i)$.

1.5 5L8

Wiedząc, że zmienna losowa X jest dana dystrybuantą:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t}) & t \in [0, 1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

Wyznaczmy gęstość prawdopodobieństwa:

$$f_X(t) = \frac{d}{dx}F_X(t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{x})\right) = \tag{4}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \tag{5}$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{x(x-1)}}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}dx = \ldots \tag{6}$$

Dokonajmy podstawienia

$$x = \sin^2(\Theta) \tag{7}$$

$$dx = 2\sin(\Theta)cos(\Theta)d\Theta = \sin(2\Theta)d\Theta \tag{8}$$

$$0 \to \Theta = 0 \tag{9}$$

$$1 \to \Theta = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

Mamy

$$\ldots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2(\Theta)}{\cos^2(\Theta)}} \sin(2\Theta)d\Theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Theta)}{\cos(\Theta)} \cdot 2\sin(\Theta)\cos(\Theta)d\Theta = \tag{11}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\Theta)d\Theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \tag{12}$$