

AiSD

Rafał Włodarczyk

INA 4, 2025

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Lecture I - Sortowanie | 1 |
| 1.1 | Worst-case analysis | 1 |
| 1.2 | Average-case analysis | 2 |
| 1.3 | Analiza losowego sortowania | 2 |
| 1.4 | Insertion Sort (A, n) | 2 |
| 1.4.1 | Worst-case analysis - Insertion Sort (A, n) | 3 |
| 1.4.2 | Average-case analysis - Insertion Sort (A, n) | 3 |
| 1.5 | Przykład złożoności | 3 |
| 2 | Lecture II - Merge Sort | 3 |
| 2.1 | Merge sort $(A, 1, n)$ | 3 |
| 3 | Lecture III - Narzędzia do analizy algorytmów | 5 |
| 3.1 | Notacja asymptotyczna | 5 |
| 3.2 | Notacja Big- O | 5 |
| 3.3 | Notacja Big- Ω | 6 |
| 3.4 | Notacja Big- Θ | 6 |
| 3.5 | Notacja small- o | 7 |
| 3.6 | Notacja small- ω | 7 |
| 3.7 | Metody rozwiązywania rekurencji | 7 |
| 3.8 | Rozwiązywanie rekurencji | 8 |
| 3.9 | Metoda podstawiania - Metoda dowodu indukcyjnego | 8 |

1 Lecture I - Sortowanie

Definiujemy problem:

1. Input: $A = (a_1, \dots, a_n), |A| = n$
2. Output: Permutacja tablicy wyjściowej $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, takie że: $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$.

1.1 Worst-case analysis

$$T(n) = \max_{\text{wszystkie wejścia}} \{\text{\#operacji po wszystkich } |n|\text{-wejściach}\} \quad (1)$$

1.2 Average-case analysis

Zakładamy pewien rozkład prawdopodobieństwa na danych wejściowych. Z reguły myślimy o rozkładzie jednostajnym. Niech T - zmienna losowa liczby operacji wykonanych przez badany algorytm.

$$\mathbf{E}(T) - \text{wartość oczekiwana } T \quad (2)$$

Później możemy badać wariancję, oraz koncentrację.

1.3 Analiza losowego sortowania

Dla poprzedniego algorytmu zobaczmy, że: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ [czyli $f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$].
To jest tragiczna złożoność.

1.4 Insertion Sort (A, n)

$$(A, n) = ((a_1, a_2, \dots, a_n), n)$$

```
for j = 2...n
{
    key = A[j]
    i=j-1
    while(i>0 && A[i]>key) {
        A[i+1] = A[i]
        i = i - 1
    }
    A[i+1] = key
}
```

Przykład: $A = (8, 2, 4, 9, 3, 6), n = 6$

- $8_i, 2_j, 4, 9, 3, 6$ $j = 2, i = 1, key = 2$ while
- $2, 8_j, 4, 9, 3, 6$
- $2, 8_i, 4_j, 9, 3, 6$ $j = 3, i = 2, key = 4$ while
- $2, 4, 8, 9, 3, 6$
- $2, 4, 8_i, 9_j, 3, 6$ $j = 4, i = 3, key = 9$ no while
- $2, 4, 8, 9_i, 3_j, 6$ $j = 5, i = 4, key = 3$ while
- $2, 3, 4, 8, 9, 6$
- $2, 3, 4, 8, 9_i, 6_j$ $j = 6, i = 5, key = 6$ while
- $2, 3, 4, 6, 8, 9$

```
| <= x | > x | x | ... |
| <= x | x | > x | ... |
```

Porównujemy element ze wszystkim co jest przed nim - wszystko przed j -tym elementem będzie posortowane. Insertion sort nie swapuje par elementów w tablicy, a przenosi tam gdzie jest jego miejsce.

1.4.1 Worst-case analysis - Insertion Sort (A, n)

Odwrotnie posortowana tablica powoduje najwięcej przesunięć. Ponieważ ustaliliśmy że liczba operacji w while zależy od j , wtedy:

$$T(n) = \sum_{j=2}^n O(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} O(j) = O\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right) = \quad (3)$$

$$= O\left(\frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1)\right) = O\left(\frac{(n-1) \cdot (n)}{2}\right) = O\left(\frac{n^2}{2}\right) = O(n^2) \quad (4)$$

c

1.4.2 Average-case analysis - Insertion Sort (A, n)

Policzmy dla uproszczenia, że na wejściu mamy n -elementowe permutacje, z których każda jest jednakowo prawdopodobna $p = \frac{1}{n!}$. Spróbujmy wyznaczyć \mathbf{E} , korzystając z inwersji permutacji. Wartość oczekiwana liczby inwersji w losowej permutacji wynosi:

$$\mathbf{E} \sim \frac{n^2}{4} \quad (5)$$

Pominęliśmy stałe wynikające z innych operacji niż porównywanie. W average-case będziemy około połowę szybciej niż w worst-case.

Pseudokod bez przykładu jest słaby.

1.5 Przykład złożoności

Patrzymy na wiodący czynnik.

$$13n^2 + 91n \log n + 4n + 13^{10} = O(n^2) \quad (6)$$

$$= 13n^2 + O(n \log n) \quad (7)$$

Chcielibyśmy gdzie to konieczne, zapisać *lower order terms*.

Pytanie o dzielenie liczb - istnieją algorytmy, które ze względu na arytmetyczne właściwości liczb sprawiają, że mniejsze liczby mogą dzielić się dłużej niż większe. Podczas tego kursu nie omawiamy złożoności dla takich algorytmów.

2 Lecture II - Merge Sort

2.1 Merge sort $(A, 1, n)$

Niech złożoność $T(n)$ - złożoność algorytmu.

Funkcja merge sort

```
O(1)          | if |A[1...n]| == 1 return A[1...n]
               | else
T(floor(n/2)) |   B = MERGE_SORT(A,1,floor(n/2))
T(ceil(n/2))  |   C = MERGE_SORT(A,floor(n/2)+1, n)
O(n)          |   return MERGE(B,C)
```

Funkcja merge

```
MERGE(X[1...k], Y[1...l])
if k = 0 return Y[1...l]
if l = 0 return X[1...k]
if X[1] <= Y[1]
    return X[1] o MERGE(X[2...k], Y[1...l])
else
    return Y[1] o MERGE(X[1...k], Y[2...l])
```

```
MERGE(A,B)
2 1 ----> [1] + MERGE(A,B (bez 1))
7 9
13 10
19 11
20 14

2 9 ----> [1,2] + MERGE(A (bez 2),B)
7 10
13 11
19 14
20 .

... ----> [1,2,7,9,10,11,13,14]
19 .
20 .

... ----> [1,2,7,9,10,11,13,14,19,20]
```

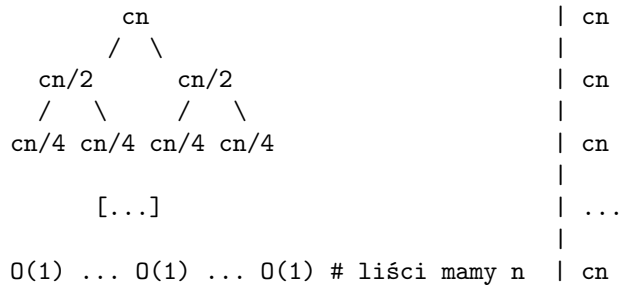
```
[10], [2], [5], [3], [7], [13], [1], [6]
[2, 10], [3,5], [7,13], [1,6]
[2,3,5,10], [1,6,7,13]
[1,2,3,5,6,7,10,13]
```

Złożoność obliczeniowa merge-a wynosi $O(k + l)$ - w najgorszym przypadku bierzemy najpierw z jednej strony, potem z drugiej i na zmianę.

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + O(n) \quad (8)$$

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \quad (9)$$

Rozpiszmy tzw drzewo rekursji:



Musimy dodać wszystkie koszty, które pojawiły się w drzewie. Dodajmy piętra, a następnie zsumujmy. Żeby znać wysokość drzewa interesuje nas dla jakiego h znajdzie $\frac{n}{2^h} = 1$

$$\frac{n}{2^h} = 1 \implies 2^h = n \implies h = \log_2 n \quad (10)$$

Zatem złożoność:

$$\sum_{i=1}^{\log n} cn = cn \log n \sim O(n \log n) \quad (11)$$

3 Lecture III - Narzędzia do analizy algorytmów

Dzisiejszy wykład prowadzi GODfryd

3.1 Notacja asymptotyczna

- Big- O (O -duże) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- Big- Ω (Ω -duże) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- Big- Θ (Θ -duże) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- Small- o (o -małe) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

3.2 Notacja Big- O

Definition. Notacja Big- O . Funkcja $f(n) \in O(g(n))$, gdy:

$$f(n) = O(g(n)) \equiv (\exists c > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|)$$

Przykład: $2n^2 = O(n^3)$, dla $n_0 = 2, c = 1$ definicja jest spełniona.

Pomijamy tutaj stałe - interesuje nas rząd wielkości

$$O(g(n)) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}} : f \text{ spełnia definicję}\}$$

$O(g(n))$ jest klasą funkcji, ale jako informatycy możemy zapisywać $f = O(g)$, zamiast $f \in O(g)$. Notacja nie ma symetrii, to znaczy $f = O(g) \nrightarrow g = O(f)$

Fact. Definicja Big-O za pomocą granicy. Możemy zapisać alternatywnie:

$$f(n) = O(g(n)) \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| \leq \infty$$

Uwaga. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \infty$ (istnieje), to:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right|$$

Przykłady: $\begin{cases} f(n) = n^2 \\ g(n) = (-1)^n n^2 \end{cases}$

Granica nie istnieje, ale $\limsup = 1$

$$\left\{ \frac{f(n)}{g(n)} \right\} = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ \frac{1}{n}, & 2 \nmid n \end{cases}$$

Granica nie istnieje.

Fact. Dokładność zapisu Big-O. Pomijamy składniki niższego rzędu jako mniej istotne, ale podkreślamy że istnieją:

$$f(n) = n^3 + O(n^2) \equiv (\exists h(n) = O(n^2)) (f(n) = n^3 + h(n)) \quad (12)$$

Rozważmy następnie stwierdzenie:

$$n^2 + O(n) = O(n^2) \equiv (\forall f(n) = O(n)) (\exists h(n) = O(n^2)) (n^2 + f(n) = h(n)) \quad (13)$$

Rozumiemy to następująco - dodając dowolną funkcję z klasy funkcji liniowych do n^2 otrzymamy funkcję z klasy funkcji kwadratowych.

3.3 Notacja Big-Ω

Definition. Notacja Big-Ω. Funkcja $f(n) \in \Omega(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \Omega(g(n)) \equiv (\exists c > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|) \quad (14)$$

biorąc $c' = \frac{1}{c} > 0$ mamy: $(|g(n)| \leq c' \cdot |f(n)|)$, czyli $g(n) = O(f(n))$.

Przykład:

$$2n^2 = O(n^3) \quad (15)$$

$$n^3 = \Omega(2n^2) \quad (16)$$

$$n = \Omega(\log n) \quad (17)$$

Każda funkcja jest Omega od siebie samej.

3.4 Notacja Big-Θ

Definition. Notacja Big-Θ. Funkcja $f(n) \in \Theta(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \equiv (\exists c_1, c_2 > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 \cdot |g(n)|) \quad (18)$$

Przykład:

$$n^2 = \Theta(2n^2) \quad (19)$$

$$n^3 = \Theta(n^3) \quad (20)$$

$$n^4 + 3n^2 + \log n = \Theta(n^4) \quad (21)$$

Fact. Dokładność zapisu Theta.

$$f(n) = \Theta(g(n)) \equiv f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n)) \quad (22)$$

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n)) \quad (23)$$

Rozważmy przypadek patologiczny

$$f(n) = n^{1+\sin \frac{\pi \cdot n}{2}} \quad g(n) = n \quad (24)$$

$$f \neq O(g), g \neq O(f) \quad (25)$$

3.5 Notacja small- o

Definition. Notacja small- o . Funkcja $f(n) \in o(g(n))$, gdy:

$$f(n) = o(g(n)) \equiv (\forall c > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (|f(n)| < c \cdot |g(n)|) \quad (26)$$

Równoważnie:

$$f(n) = o(g(n)) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0 \quad (27)$$

Przykład:

$$n = o(n^2) \quad (28)$$

$$n^2 = o(n^3) \quad (29)$$

$$n^3 = o(2^n) \quad (30)$$

3.6 Notacja small- ω

Definition. Notacja small- ω . Funkcja $f(n) \in \omega(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \omega(g(n)) \equiv (\forall c > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (|f(n)| > c \cdot |g(n)|) \quad (31)$$

Równoważnie:

$$f(n) = \omega(g(n)) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = \infty \quad (32)$$

Przykład:

$$3.14n^2 + n = O(n^3) = \omega(n) \quad (33)$$

3.7 Metody rozwiązywania rekurencji

- Metoda podstawienia (indukcji) - Cormen
- Metoda drzewa rekursji
- Metoda master theorem

3.8 Rozwiązywanie rekurencji

1. Zgadnij odpowiedź (wiodący składnik)
2. Sprawdź przez indukcję, czy dobrze zgadliśmy
3. Wylicz stałe

Information. Historyjka. Dwóch przyjaciół zgubiło się podczas podróży balonem.

- "Gdzie jesteście?"
- "W balonie."

Osoba, którą spotkali, była matematykiem.

Odpowiedź była precyzyjna, dokładna i całkowicie bezużyteczna.

3.9 Metoda podstawiania - Metoda dowodu indukcyjnego

Przykład 1. Rozwiążmy równanie rekurencyjne:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad T(1) = \Theta(1) \quad (34)$$

Założmy, że $T(n) = O(n^3)$ - pokazać, że $T(n) \leq c \cdot n^3$ dla dużych n .

1. Krok początkowy $T(1) = \Theta(1) \leq c \cdot 1^3 = c$ ok.
2. Założmy, że $\forall_{k < n} T(k) \leq c \cdot k^3$ (zał. indukcyjne, nie $\Theta(k^3)$ - chcemy konkretną stałą c)
3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n = \frac{1}{2}cn^3 + n = cn^3 - \frac{1}{2}cn^3 + n \leq cn^3$.
4. Wystarczy wskazać c , takie że $\frac{1}{2}cn^3 - n \geq 0$, np $c \geq 2$
5. Pokazaliśmy, że $T(n) = O(n^3)$

Założmy, że $T(n) = O(n^2)$ - pokazać, że $T(n) \leq c \cdot n^2$ dla dużych n .

1. Krok początkowy $T(1) = \Theta(1) \leq c \cdot 1^2 = c$ ok.
2. Założmy, że $\forall_{k < n} T(k) \leq c \cdot k^2$ (zał. indukcyjne)
3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = cn^2 + n = cn^2 - cn^2 + n \leq cn^2$.
4. Tego się nie da pokazać - nie jest prawdą, że $T(n) = O(n^2)$

Wzmocnijmy zatem założenie indukcyjne:

1. $T(n) \leq c_1 n^2 - c_2 n$ (zał. indukcyjne)
2. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4(c_1 \frac{n^2}{2} - c_2 \frac{n}{2}) + n$
3. $= c_1 n^2 - 2c_2 n + n = c_1 n^2 - (2c_2 - 1)n \leq$
4. $\leq c_1 n^2 - c_2 n$
5. Weźmy $c_1 = 1, c_2 = 2$, wtedy $T(n) \leq n^2 - 2n = O(n^2)$

Przykład 2. Weźmy paskudną rekursję $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$.
Założmy, że n jest potęgą 2 oraz oznaczmy $n = 2^m, m = \log_2 n$.

$$T(2^m) = 2T((2^m)^{\frac{1}{2}}) + m \quad (35)$$

Oznaczmy $T(2^m) = S(m)$. Wtedy:

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + m \quad (36)$$

(dobrze znana rekurencja - $S(n) = O(m \log m)$) - patrz Lecture 2. Przejdźmy z powrotem na T, n :

$$T(2^m) = S(m)T(2^m) = O(m \log m)T(n) = O(\log n \log \log n) \quad (37)$$

Formalnie pokazaliśmy to tylko dla potęg 2 - musielibyśmy jeszcze indukcyjnie to udowodnić.

Kiedy podłogi i sufity mają znaczenie?