Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1 Lista 7 **2**
1.1 1L7 2
1.2 2L7 2
1.3 3L7 2
1.4 4L7 4
1.5 5L7 4
1.6 6L7 5
1.7 7L7 6
1.8 8L7 6

1 Lista 7

1.1 1L7

Weźmy $X, Y : \Omega \to \{(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)\}$ z równym prawdopodobieństwem. Wtedy PMF:

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } x = -1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Zatem $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$, oraz widzimy że $\mathbf{E}(XY) = 0$. Jednak zmienne nie są niezależne:

$$p_X(1)p_Y(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq p_{XY}(1,1) = 0$$

1.2 2L7

Pokażmy, że $\mathbf{var}(aX + b) = a^2\mathbf{var}(X)$. Zapiszmy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{var}(aX+b) &= \mathbf{E}((aX+b)^2) - \mathbf{E}(aX+b)^2 && (1)\\
&= \mathbf{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (\mathbf{E}(aX) + \mathbf{E}(b))^2 && (2)\\
&= \mathbf{E}(a^2X^2) + \mathbf{E}(2abX) + \mathbf{E}(b^2) - (a\mathbf{E}(X) + b)^2 && (3)\\
&= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - a^2\mathbf{E}(X)^2 - 2ab\mathbf{E}(X) - b^2 && (4)\\
&= a^2\mathbf{E}(X^2) - a^2\mathbf{E}(X)^2 && (5)\\
&= a^2(\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2) && (6)\\
&= a^2\mathbf{var}(X) && (7)
\end{aligned}$$

1.3 3L7

Wyznaczenie $\mathbf{var}(X)$ oraz $\mathbf{var}(Y)$ dla rozkładu 1L6

Z zadania 1L6 wiemy, że:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{91}{36} && (1)\\
E(Y) &= \frac{161}{36} && (2)\\
& && (3)
\end{aligned}$$

Policzmy $\mathbf{E}(X^2)$ oraz $\mathbf{E}(Y^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x \in \mathrm{rng}(X)} x^2 P(X = x) = && (4)\\
&= \frac{1}{36} \cdot \left(1^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1\right) = \frac{301}{36} && (5)\\
& && (6)\\
E(Y^2) &= \sum_{y \in \mathrm{rng}(Y)} y^2 P(Y = y) = && (7)\\
&= \frac{1}{36} \cdot \left(6^2 \cdot 11 + 5^2 \cdot 9 + 4^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 1\right) = \frac{791}{36} && (8)
\end{aligned}$$

Policzmy $\mathbf{var}(X)$ oraz $\mathbf{var}(Y)$:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \tag{9}$$

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \tag{10}$$

Wyznaczenie $\mathbf{var}(X)$ dla $X \sim Geo(p)$

Pomocna suma:

$$\sum_{k \geqslant 1} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{11}$$

$$\sum_{k \geqslant 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{12}$$

Wyznaczmy $\mathbf{E}(X)$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot P(X=k) = \sum_{k \geqslant 1} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \tag{13}$$

$$= p \sum_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \tag{14}$$

Wyznaczmy $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k \geqslant 1} k^2 \cdot P(X=k) = \sum_{k \geqslant 1} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \tag{15}$$

$$= p \sum_{k \geqslant 1} k^2(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{2-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2} \tag{16}$$

Wyznaczmy $\mathbf{var}(X)$:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \tag{17}$$

Wyznaczenie $\mathbf{var}(X)$ dla $X \sim Po(\lambda)$

Wyznaczmy $\mathbf{E}(X)$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geqslant 0} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda \tag{18}$$

Wyznaczmy $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} \tag{19}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \tag{20}$$

$$= \lambda \cdot \mathbf{E}(X) + \lambda \cdot 1 \quad \mathbf{E}(X) = \lambda \text{ and } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1 \tag{21}$$

$$= \lambda \cdot \lambda + \lambda \quad \mathbf{E}(X) = \lambda \tag{22}$$

$$= \lambda^2 + \lambda. \tag{23}$$

Wyznaczmy $\mathbf{var}(X)$:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \tag{24}$$

1.4 4L7

Z zadania 8L3 wiemy, że optymalna wartość prawdopodobieństwa wyniosła $p = \frac{1}{n}$. Prawdopodobieństwo, że w pojedyńczej próbie zajdzie wymiana wynosi:

$$s = n \cdot p(1-p)^{n-1} = n \cdot \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \tag{1}$$

Oczekujemy sukcesu po k próbach, to znaczy dla $k-1$ poprzednich ramek czasowych nie mogła zajść wymiana:

$$P(X = k) = s \cdot (1-s)^{k-1} \tag{2}$$

Widzimy, że $X \sim Geo\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right)$, zatem korzystając z 3L7 możemy napisać:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \tag{3}$$

$$\mathbf{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{n^{2n-2} - \left(n^2 - n\right)^{n-1}}{(n-1)^{2n-2}} \tag{4}$$

1.5 5L7

Niech $X \sim Po(\lambda)$ będzie zmienną losową opisującą źródło pakietów. Wiemy, że funkcja masy prawdopodobieństwa dla rozkładu Poissona jest dana wzorem:

$$P(X = N) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!}$$

Niech Y będzie zmienną losową opisującą ile pakietów dotarło do celu. Wtedy:

$$P(Y=n)=\begin{cases} P(X=n)\cdot p^n(1-p)^0\binom{n}{0} & \text{Wszystkie pakiety dotarły} \\ P(X=n+1)\cdot p^n(1-p)^1\binom{n+1}{1} & \text{Dokładnie jeden pakiet nie dotarł} \\ P(X=n+2)\cdot p^n(1-p)^2\binom{n+2}{2} & \text{Dokładnie dwa pakiety nie dotarły} \\ \vdots \end{cases} \tag{1}$$

Zatem funkcja masy prawdopodobieństwa dla Y będzie dana wzoremn:

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=n+k)\cdot p^n(1-p)^k\binom{n+k}{k} = && (2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+k}}{(n+k)!}\cdot p^n(1-p)^k\binom{n+k}{k} = && (3) \\ &= e^{-\lambda}\lambda^n p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(n+k)!}(1-p)^k\frac{(n+k)!}{k!n!} = && (4) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot(1-p))^k}{k!} = && (5) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^n}{n!}e^{\lambda(1-p)} = \quad \text{(Szereg Maclaurina)} && (6) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda-p\lambda}\lambda^n p^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^n}{n!} && (7) \end{aligned}$$

Wobec tego $Y \sim Po(\lambda p)$.

1.6 6L7

Niech $X \sim Geo(p)$ oraz $Y \sim Geo(r)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym. Wyznaczmy rozkład zmiennej losowej $Z = \min X, Y$.

Funkcja masy $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k\in\mathbb{Z}^+$. Rozpiszmy prawdopodobieństwo dla Z:

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(\min\{X,Y\}=k) = && (1) \\ &= P(X=k)P(Y>k)+P(X=k)P(Y=k)+P(X>k)P(Y=k)=\ldots && (2) \end{aligned}$$

Szansa, że zajdzie $P(X>k)$ (więcej niż k prób do pierwszego sukcesu) wynosi $P(X>k) = (p-1)^k$, wobec tego:

$$\begin{aligned} \ldots &= p(1-p)^{k-1}\cdot(1-r)^k + p(1-p)^{k-1}\cdot r(1-r)^{k-1} + (1-p)^k\cdot r(1-r)^{k-1} && (3) \\ &= (1-p)^{k-1}\left[p(1-r)^k + pr(1-r)^{k-1} + (1-p)r(1-r)^{k-1}\right] && (4) \\ &= [(1-p)(1-r)]^{k-1}\left[p(1-r)+pr+(1-p)r\right] && (5) \\ &= [(1-p)(1-r)]^{k-1}\left[p+r-pr\right] && (6) \\ &= (1-((1-p)(1-r))^{k-1}\left[p+r-pr\right] \sim Geo(p+r-pr) && (7) \end{aligned}$$

1.7 7L7

Weźmy $X \sim Geo(p)$. Pokażmy, że zachodzi następująca zależność:

$$P(X = n + m | X > m) = P(X = n) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Wiemy, że $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, zatem zapiszmy:

$$P(X = n + m | X > m) = \frac{P(X = n + m \wedge X > m)}{P(X > m)} = \dots \tag{1}$$

Z $X = n + m$ jednoznacznie wynika z $X > m$, zatem:

$$\dots = \frac{P(X = n + m)}{P(X > m)} = \frac{p(1-p)^{n+m-1}}{(1-p)^m} = p(1-p)^{n-1} = P(X = n) \tag{2}$$

Wymyślmy rozsądną interpretacja powyższego faktu.

- Niezależnie od ilości porażek, które uzyskaliśmy wcześniej, rozkład prawdopodobieństwa X nie zmienia się - nie przybliża nas do sukcesu.

1.8 8L7

Załóżmy, że $\mathbf{E}(R) = 100$ oraz $\mathbf{var}(R) = 100$. Zastosujmy nieówność Markowa oraz Czebyszewa do oszacowania z góry $P(R \geqslant 200)$.

Nierówność Markowa:

$$P(R \geqslant 200) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

Nierówność Czebyszewa:

$$P(R \geqslant 200) = P(R - 100 \geqslant 100) = P(|R - 100| \geqslant 100) = \tag{2}$$

$$= P(|R - \mathbf{E}(X)| \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbf{var}(R)}{100^2} = \frac{100}{100^2} = \frac{1}{100} \tag{3}$$