Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1 Lista 5

1.1 1L5

Niech H-orły, T-reszki. Dla 4 rzutów niezależnych mamy $H = 4-T$ i analogicznie $T = 4-H$.
Niech R - # rozwiązań równania kwadratowego:

$$x^2 - (H-T)x + H - T = 0 \tag{1}$$

Wyznaczmy rozkład R. Podstawmy $T = 4 - H$ do (1):

$$x^2 - (H-(4-H))x + H - (4-H) = \tag{2}$$
$$= x^2 - (2H-4)x + 2H - 4 \tag{3}$$

Policzmy

$$\Delta(H) = (2H-4)^2 - 4(2H-4) = \tag{4}$$
$$= 4H^2 - 16H + 16 - 8H + 16 = \tag{5}$$
$$4H^2 - 24H + 32 \tag{6}$$

Zobaczmy jak prezentuje się liczba rozwiązań równania w zależności od H:

- $H = 0 \to \Delta(H) = 32 \to R = 2$
- $H = 1 \to \Delta(H) = 12 \to R = 2$
- $H = 2 \to \Delta(H) = 0 \to R = 1$
- $H = 3 \to \Delta(H) = -4 \to R = 0$
- $H = 4 \to \Delta(H) = 0 \to R = 1$

Wszystkich możliwości w rzutach mamy $\Omega = 2^4$, zatem:

- $P(R=0) = P(H=3) = (\frac{1}{2})^4 \cdot \binom{4}{3} = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$
- $P(R=1) = P(H=2 \vee H=4) = (\frac{1}{2})^4 \cdot \left[\binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right] = \frac{7}{16}$
- $P(R=2) = P(H=0 \vee H=1) = (\frac{1}{2})^4 \cdot \left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1}\right] = \frac{5}{16}$

1.2 2L5

Niech X - dystrybuanta zmiennej losowej z PMF $P(X=k) = \frac{1}{k(k+1)}$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$.
Niech $Y = \left|\sin\left(\frac{\pi \cdot X}{2}\right)\right|$. Wyznaczmy PMF dla Y.

Zobaczmy jak zachowuje się wyrażenie $P(X=k)$ dla kolejnych k:

- $X = 1 \to Y = |\sin(\frac{\pi}{2})| = 1$
- $X = 2 \to Y = |\sin(\pi)| = 0$
- $X = 3 \to Y = |\sin(\frac{3\pi}{2})| = 1$ ...

Zatem wystarczy nam wyznaczyć $P(Y = 1)$ oraz $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1)$. Zapiszmy wpierw $P_Y(y)$:

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y) \cap \mathrm{rng}(X)} p_X(x) \tag{1}$$

Zatem w naszym wypadku

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= \sum_{k=2n-1, n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k(k+1)} = &(2)\\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(2n-1)(2n)} = &(3)\\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = &(4)\\
&= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}\right) = &(5)\\
&= \ln(2) &(6)\\
& &(7)
\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
P(Y = 1) &= \ln(2) &(8)\\
P(Y = 0) &= 1 - \ln(2) &(9)
\end{aligned}$$

1.3 3L5

Weźmy $Y \sim [0, 1]$ rozkład jednostajny. $X = Y^2$, wyznaczmy F_X oraz f_X.

Rozkład jednostajny wyznacza nam CDF i PDF dla Y

- $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0 \\ y & \text{dla } y \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } y > 1 \end{cases}$
- $f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } y \notin [0,1] \end{cases}$

Widzimy, że skoro $X = Y^2$, to funkcja przekształcenia wynosi $g(x) = x^2$, jest ściśle rosnąca na $[0, 1]$. Możemy zgodnie z twierdzeniem o funkcjach zmiennych losowych zapisać:

$$F_X(x) = F_Y(g^{-1}(x)) = F_Y(\sqrt{x}) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ dla } x \in [0,1] \\ 1 \text{ dla } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$f_X(x) = f_Y(g^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} g^{-1}(x) = f_Y(g^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1] \end{cases} \tag{2}$$

Wstępne sprawdzenie w postaci $\int_0^1 f_X(x)dx = 1$ pokazuje, że jest *chyba* całkiem nienajgorzej.

1.4 4L5

Mamy dany rozkład z PDF $f(x) = \exp(-e^{-x} - x)$. Wyznaczmy CDF.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \int_{\infty}^{t} \exp(-e^{-x} - x)dx = \dots \tag{1}$$

Zobaczmy, że można łatwo zgadnąć funkcję pierwotną:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-e^{-x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\right) \cdot e^{-e^{-x}} = \frac{d}{dx}(-x) \cdot -e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} = e^{-e^{-x}-x} \tag{2}$$

Zatem

$$... = \left[\exp(-e^{-x})\right]_{-\infty}^{t} = \exp(-e^{-t}) - \lim_{x\to-\infty} \exp(-e^{-x}) = \exp(-e^{-t}) \tag{3}$$

1.5 5L5

F_X - CDF dla X, wyznacz dystrybuanty $Y = -X, Z = |X|, U = X^2$.

Wiemy że $y(x) = -x$ jest ściśle malejąca, zatem:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) = 1 - F_X(-y) \tag{1}$$

Zmienna losowa Z przyjmuje jedynie wartości nieujemne, wobec tego powinniśmy sumować poszczególne wartości przypadki w nieujemnym przedziale dziedziny.

$$Z = |X| = \begin{cases} X & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -X & \text{dla } x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} F_X(z) - F_X(-z) & \text{dla } z \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } z < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Podobnie w przypadku zmiennej U. Odwrotność funkcji $u^{-1}(x) = \sqrt{u}$, więc:

$$F_U(u) = \begin{cases} F_X(\sqrt{u}) - F_X(-\sqrt{u}) & \text{dla } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } u < 0 \end{cases} \tag{4}$$

1.6 6L5

Analogicznie do zadania poprzedniego, tym razem dany mamy rozkład X o PDF f_X oraz funkcje $g(x) = \sqrt[3]{x}$ oraz $h(x) = e^{-x}$. Oznaczmy $Y = g(X)$ oraz $Z = h(X)$.

Wyznaczmy gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty dla zmiennych Y oraz Z:

- Wyznaczmy dla Y ($g(x)$ jest ściśle rosnąca)

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y) \cdot \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = 3y^2 \cdot f_X(y^3) \tag{1}$$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{t} 3x^2 \cdot f_X(x^3)dx = \tag{2}$$

$$= \left[F_X(x^3)\right]_{-\infty}^{t} = F_X(t^3) - \lim_{x\to-\infty} F_X(x^3) = F_X(t^3) \tag{3}$$

- Wyznaczamy dla Z ($h(x)$ jest ściśle malejąca)

$$f_Z(z) = -f_X(h^{-1}(z)) \cdot \frac{d}{dz} h^{-1}(z) = \frac{1}{z} \cdot f_X(-\ln(z)) \tag{4}$$

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{z} f_X(-\ln(z)) = \tag{5}$$

$$= [-F_X(-\ln(z))]_{-\infty}^{t} = [F_X(-\ln(z))]_{t}^{-\infty} = 1 - F_X(-\ln(t)) \tag{6}$$

Zobaczmy jak wyglądają gęstości i dystrybuanty jeśli dystrybuanta X jest zadana wzorem:

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ (t+1)/2 & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 1 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

Widzimy od razu, że wyznaczenie f_x, f_y, F_Y, f_z, F_Z nie stanowi problemu:

$$f_x = \begin{cases} (t+1)/2 & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{dla } t \notin [-1,1] \end{cases} \tag{7}$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2 & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{dla } t \notin [-1,1] \end{cases} \tag{8}$$

$$F_y = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ \frac{1}{2}(t^3+1) & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 1 & \text{dla } t > 1 \end{cases} \tag{9}$$

$$f_z = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{dla } t \in [\frac{1}{e}, e] \\ 0 & \text{dla } t \notin [\frac{1}{e}, e] \end{cases} \tag{10}$$

$$F_z = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ \frac{1+\ln(t)}{2} & \text{dla } t \in [-1,1] \\ 1 & \text{dla } t > 1 \end{cases} \tag{11}$$