AiSD

Rafał Włodarczyk

INA 4, 2025

Contents

I welcome you on the path to insanity.

Good luck :)

1 Lecture I - Sortowanie

Definiujemy problem:

1. Input: $A = (a_1, \ldots, a_n), |A| = n$
2. Output: Permutacja tablicy wyjściowej $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, takie że: $a'_1 \leqslant a'_2 \leqslant \cdots \leqslant a'_n$.

1.1 Worst-case analysis

$$T(n) = \max_{\text{wszystkie wejścia}} \{\#\text{operacji po wszystkich |n|-wejściach}\} \tag{1.1.1}$$

1.2 Average-case analysis

Zakładamy pewien rozkład prawdopodobieństwa na danych wejściowych. Z reguły myślimy o rozkładzie jednostajnym. Niech T - zmienna losowa liczby operacji wykonanych przez badany algorytm.

$$\mathbf{E}(T) - \text{wartość oczekiwana T} \tag{1.2.1}$$

Później możemy badać wariancję, oraz koncentrację.

1.3 Analiza losowego sortowania

Dla poprzedniego algorytmu zobaczmy, że: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[\text{czyli } f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1\right]$. To jest tragiczna złożoność.

1.4 Insertion Sort (A, n)

$(A, n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), n)$

```
for j = 2...n
{
    key = A[j]
    i=j-1
    while(i>0 && A[i]>key) {
        A[i+1] = A[i]
        i = i - 1
    }
    A[i+1] = key
}
```

Przykład: $A = (8, 2, 4, 9, 3, 6), n = 6$

- $8_i, 2_j, 4, 9, 3, 6 \quad j = 2, i = 1, key = 2$ while
- $2, 8_j, 4, 9, 3, 6$
- $2, 8_i, 4_j, 9, 3, 6 \quad j = 3, i = 2, key = 4$ while

- $2, 4, 8, 9, 3, 6$
- $2, 4, 8_i, 9_j, 3, 6 \quad j = 4, i = 3, key = 9$ no while
- $2, 4, 8, 9_i, 3_j, 6 \quad j = 5, i = 4, key = 3$ while
- $2, 3, 4, 8, 9, 6$
- $2, 3, 4, 8, 9_i, 6_j \quad j = 6, i = 5, key = 6$ while
- $2, 3, 4, 6, 8, 9$

```
| <= x | > x | x | ... |
| <= x | x | > x | ... |
```

Porównujemy element ze wszystkim co jest przed nim - wszystko przed j-tym elementem będzie posortowane. Insertion sort nie swapuje par elementów w tablicy, a przenosi tam gdzie jest jego miejsce.

1.4.1 Worst-case analysis - Insertion Sort (A, n)

Odwrotnie posortowana tablica powoduje najwięcej przesunięć. Ponieważ ustaliśmy że liczba operacji w while zależy od j, wtedy:

$$T(n) = \sum_{j=2}^{n} O(j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} O(j) = O\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right) = \tag{1.4.1}$$

$$= O\left(\frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1)\right) = O\left(\frac{(n-1)\cdot(n)}{2}\right) = O\left(\frac{n^2}{2}\right) = O(n^2) \tag{1.4.2}$$

1.4.2 Average-case analysis - Insertion Sort (A, n)

Policzmy dla uproszczenia, że na wejściu mamy n-elementowe permutacje, z których każda jest jednakowo prawdopodobna $p = \frac{1}{n!}$. Spróbujmy wyznaczyć $\mathbf{E}$, korzystając z inwersji permutacji. Wartość oczekiwana liczby inwersji w losowej permutacji wynosi:

$$\mathbf{E} \sim \frac{n^2}{4} \tag{1.4.3}$$

Pominęliśmy stałe wynikające z innych operacji niż porównywanie. W average-case będziemy około połowę szybiciej niż w worst-case.

Pseudokod bez przykładu jest słaby.

1.5 Przykład złożoności

Patrzymy na wiodący czynnik.

$$13n^2 + 91n\log n + 4n + 13^{10} = O(n^2) \tag{1.5.1}$$

$$= 13n^2 + O(n\log n) \tag{1.5.2}$$

Chcielibyśmy gdzie to konieczne, zapisać *lower order terms.*

Pytanie o dzielenie liczb - istnieją algorytmy, które ze względu na arytmetyczne właściwości liczb sprawiają, że mniejsze liczby mogą dzielić się dłużej niż większe. Podczas tego kursu nie omawiamy złożoności dla takich algorytmów.

2 Lecture II - Merge Sort

2.1 Merge sort $(A, 1, n)$

Niech złożoność T(n) - złożność algorytmu.
Funkcja Merge Sort stanowi o strukturze algorytmu:

```
MERGE_SORT(A,1,n)
if |A[1...n]| == 1 return A[1...n]         | O(1)
else
    B = MERGE_SORT(A,1,floor(n/2))         | T(floor(n/2))
    C = MERGE_SORT(A,floor(n/2)+1, n)      | T(ceil(n/2))
    return MERGE(B,C)                      | O(n)
```

Funkcja Merge pozwala łączyć poszczególne wywołania rekurencyjne:

```
MERGE(X[1...k], Y[1...l])
if k = 0 return Y[1...l]
if l = 0 return X[1...k]
if X[1] <= Y[1]
    return X[1] o MERGE(X[2...k], Y[1...l])
else
    return Y[1] o MERGE(X[1...k], Y[2...l])
```

```
MERGE(A,B)
2 1 ---> [1] + MERGE(A,B (bez 1))
7 9
13 10
19 11
20 14

2 9  ---> [1,2] + MERGE(A (bez 2),B)
7 10
13 11
19 14
20 .

... ---> [1,2,7,9,10,11,13,14]
19 .
20 .

... ---> [1,2,7,9,10,11,13,14,19,20]
```

```
[10], [2], [5], [3], [7], [13], [1], [6]
[2, 10], [3,5], [7,13], [1,6]
[2,3,5,10], [1,6,7,13]
[1,2,3,5,6,7,10,13]
```

Złożoność obliczeniowa merge-a wynosi $O(k + l)$ - w najgorszym przypadku bierzemy najpierw z jednej strony, potem z drugiej i na zmianę.

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + O(n) \tag{2.1.1}$$

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \tag{2.1.2}$$

Rozpiszmy tzw drzewo rekursji:

```
       cn                                | cn
      /  \                               |
  cn/2      cn/2                         | cn
  /   \     /   \                        |
cn/4 cn/4 cn/4 cn/4                      | cn
                                         |
      [...]                              | ...
                                         |
O(1) ... O(1) ... O(1) # liści mamy n  | cn
```

Musimy dodać wszystkie koszty, które pojawiły się w drzewie. Dodajmy piętra, a następnie zsumumjmy. Żeby znać wysokość drzewa interesuje nas dla jakiego h zajdzie $\frac{n}{2^h} = 1$

$$\frac{n}{2^h} = 1 \implies 2^h = n \implies h = \log_2 n \tag{2.1.3}$$

Zatem złożność:

$$\sum_{i=1}^{\log n} cn = cn \log n \sim O(n \log n) \tag{2.1.4}$$

3 Lecture III - Narzędzia do analizy algorytmów

Dzisiejszy wykład prowadzi GODfryd

3.1 Notacja asymptotyczna

- Big-O (O-duże) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Big-Ω (Ω-duże) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Big-Θ (Θ-duże) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Small-o (o-małe) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

3.2 Notacja Big-O

Definition. Notacja Big-O. Funkcja $f(n) \in O(g(n))$, gdy:

$$f(n) = O(g(n)) \equiv (\exists c > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant n_0)\,(|f(n)| \leqslant c \cdot |g(n)|)$$

Przykład: $2n^2 = O(n^3)$, dla $n_0 = 2, c = 1$ definicja jest spełniona.

Pomijamy tutaj stałe - interesuje nas rząd wielkości

$$O(g(n)) = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}} : \text{f spełnia definicję} \right\}$$

$O(g(n))$ jest klasą funkcji, ale jako informatycy możemy zapisywać $f = O(g)$, zamiast $f \in O(g)$. Notacja nie ma symetrii, to znaczy $f = O(g) \nrightarrow g = O(f)$

Fact. Definicja Big-O za pomocą granicy. Możemy zapisać alternatywnie:

$$f(n) = O(g(n)) \equiv \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leqslant \infty$$

Uwaga. Jeśli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$ (istnieje), to:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right|$$

Przykłady:

$$\begin{cases} f(n) = n^2 \\ g(n) = (-1)^n n^2 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Granica nie istnieje, ale $\limsup = 1$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 1, & 2 \mid n \\ \frac{1}{n}, & 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Granica nie istnieje.

Fact. Dokładność zapisu Big-O. Pomijamy składniki niższego rzędu jako mniej istotne, ale podkreślamy że istnieją:

$$f(n) = n^3 + O(n^2) \equiv \big(\exists h(n) = O(n^2)\big)\, \big(f(n) = n^3 + h(n)\big) \tag{3.2.3}$$

Rozważmy następnie stwierdzenie:

$$n^2 + O(n) = O(n^2) \equiv (\forall f(n) = O(n))\, \big(\exists h(n) = O(n^2)\big)\, \big(n^2 + f(n) = h(n)\big) \tag{3.2.4}$$

Rozumiemy to następująco - dodając dowolną funkcję z klasy funkcji liniowych do n^2 otrzymamy funkcję z klasy funkcji kwadratowych.

3.3 Notacja Big-Ω

Definition. Notacja Big-Ω. Funkcja $f(n) \in \Omega(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \Omega(g(n)) \equiv (\exists c > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geqslant n_0)\, (|f(n)| \geqslant c \cdot |g(n)|) \tag{3.3.1}$$

biorąc $c' = \frac{1}{c} > 0$ mamy: $(|g(n)| \leqslant c' \cdot |f(n)|)$, czyli $g(n) = O(f(n))$.
Przykład:

$$2n^2 = O(n^3) \tag{3.3.2}$$
$$n^3 = \Omega(2n^2) \tag{3.3.3}$$
$$n = \Omega(\log n) \tag{3.3.4}$$

Każda funkcja jest Omega od siebie samej.

3.4 Notacja Big-Θ

Definition. Notacja Big-Θ. Funkcja $f(n) \in \Theta(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \equiv (\exists c_1, c_2 > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geqslant n_0)\, (c_1 \cdot |g(n)| \leqslant |f(n)| \leqslant c_2 \cdot |g(n)|) \tag{3.4.1}$$

Przykład:

$$n^2 = \Theta(2n^2) \tag{3.4.2}$$
$$n^3 = \Theta(n^3) \tag{3.4.3}$$
$$n^4 + 3n^2 + \log n = \Theta(n^4) \tag{3.4.4}$$

Fact. Dokładność zapisu Theta.

$$f(n) = \Theta(g(n)) \equiv f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n)) \tag{3.4.5}$$
$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n)) \tag{3.4.6}$$

Rozważmy przypadek patologiczny

$$f(n) = n^{1+\sin\frac{\pi \cdot n}{2}} \quad g(n) = n \tag{3.4.7}$$
$$f \neq O(g), g \neq O(f) \tag{3.4.8}$$

3.5 Notacja small-o

Definition. Notacja small-o. Funkcja $f(n) \in o(g(n))$, gdy:

$$f(n) = o(g(n)) \equiv (\forall c > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geqslant n_0)\, (|f(n)| < c \cdot |g(n)|) \tag{3.5.1}$$

Równoważnie:

$$f(n) = o(g(n)) \equiv \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 0 \tag{3.5.2}$$

Przykład:

$$n = o(n^2) \tag{3.5.3}$$
$$n^2 = o(n^3) \tag{3.5.4}$$
$$n^3 = o(2^n) \tag{3.5.5}$$

3.6 Notacja small-ω

Definition. Notacja small-ω. Funkcja $f(n) \in \omega(g(n))$, gdy:

$$f(n) = \omega(g(n)) \equiv (\forall c > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geqslant n_0)\, (|f(n)| > c \cdot |g(n)|) \tag{3.6.1}$$

Równoważnie:

$$f(n) = \omega(g(n)) \equiv \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty \tag{3.6.2}$$

Przykład:

$$3.14n^2 + n = O(n^3) = \omega(n) \tag{3.6.3}$$

3.7 Metody rozwiązywania rekurencji

- Metoda podstawienia (indukcji) - Cormen
- Metoda drzewa rekursji
- Metoda master theorem

3.8 Rozwiązywanie rekurencji

1. Zgadnij odpowiedź (wiodący składnik)
2. Sprawdź przez indukcję, czy dobrze zgadliśmy
3. Wylicz stałe

Information. Historyjka. Dwóch przyjaciół zgubiło się podczas podróży balonem.

- "Gdzie jesteśmy?"
- "W balonie."

Osoba, którą spotkali, była matematykiem.
Odpowiedź była precyzyjna, dokładna i całkowicie bezużyteczna.

3.9 Metoda podstawiania - Metoda dowodu indukcyjnego

Przykład 1. Rozwiążmy równanie rekurencyjne:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad T(1) = \Theta(1) \tag{3.9.1}$$

Załóżmy, że $T(n) = O(n^3)$ - pokazać, że $T(n) \leqslant c \cdot n^3$. dla dużych n.

1. Krok początkowy $T(1) = \Theta(1) \leqslant c \cdot 1^3 = c$ ok.
2. Założmy, że $\forall_{k<n} T(k) \leqslant c \cdot k^3$ (zał. indukcyjne, nie $\Theta(k^3)$ - chcemy konkretną stałą c)
3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leqslant 4c\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n = \frac{1}{2}cn^3 + n = cn^3 - \frac{1}{2}cn^3 + n \leqslant cn^3$.
4. Wystarczy wskazać c, takie że $\frac{1}{2}cn^3 - n \geqslant 0$, np $c \geqslant 2$
5. Pokazaliśmy, że $T(n) = O(n^3)$

Załóżmy, że $T(n) = O(n^2)$ - pokazać, że $T(n) \leqslant c \cdot n^2$. dla dużych n.

1. Krok początkowy $T(1) = \Theta(1) \leqslant c \cdot 1^2 = c$ ok.
2. Założmy, że $\forall_{k<n} T(k) \leqslant c \cdot k^2$ (zał. indukcyjne)
3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leqslant 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n = cn^2 + n = cn^2 - cn^2 + n \leqslant cn^2$.
4. Tego się nie da pokazać - nie jest prawdą, że $T(n) = O(n^2)$

Wzmocnijmy zatem założenie indukcyjne:

1. $T(n) \leqslant c_1 n^2 - c_2 n$ (zał. indukcyjne)
2. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leqslant 4(c_1 \frac{n}{2}^2 - c_2 \frac{n}{2}) + n$
3. $= c_1 n^2 - 2c_2 n + n = c_1 n^2 - (2c_2 - 1)n \leqslant$
4. $\leqslant c_1 n^2 - c_2 n$
5. Weźmy $c_1 = 1, c_2 = 2$, wtedy $T(n) \leqslant n^2 - 2n = O(n^2)$

Przykład 2. Weźmy paskudną rekursję $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$.
Załóżmy, że n jest potęgą 2 oraz oznaczny $n = 2^m, m = \log_2 n$.

$$T(2^m) = 2T((2^m)^{\frac{1}{2}}) + m \tag{3.9.2}$$

Oznaczmy $T(2^m) = S(m)$. Wtedy:

$$S(m) = 2S\left(\frac{m}{2}\right) + m \tag{3.9.3}$$

(dobrze znana rekurencja - $S(n) = O(m \log m)$) - patrz Lecture 2. Przejdźmy z powrotem na T, n:

$$T(2^m) = S(m) \tag{3.9.4}$$
$$T(2^m) = O(m \log m) \tag{3.9.5}$$
$$T(n) = O(\log n \log \log n) \tag{3.9.6}$$

Formalnie pokazaliśmy to tylko dla potęg 2 - musielibyśmy jeszcze indukcyjnie to udowodnić.

Kiedy podłogi i sufity mają znaczenie?

4 Lecture IV - Metoda drzewa rekursji

4.1 Metoda drzewa rekursji

W danym węźle wstawiamy koszt operacji. Sumujemy koszty węzłów na danym poziomie.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2, \quad T(1) = \Theta(1) \tag{4.1.1}$$

Chcemy sumować koszty na danym poziomie, a potem napisać pełną sumę.

```
              n^2                     | n^2
          /         \
   (n/2)^2          (n/4)^2           | 5/16 n^2
  /       \          /     \
(n/4)^2 (n/8)^2 (n/8)^2 (n/16)^2    | 25/256 n^2 = (5/16)^k n^2
```

...

$$T^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k n^2 = \tag{4.1.2}$$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k = \tag{4.1.3}$$

$$= n^2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{5}{16}}\right) = \tag{4.1.4}$$

$$= \frac{16}{11} n^2 \tag{4.1.5}$$

Nie mogłoby być mniej niż n^2, bo już w pierwszym rzędzie jest n^2.
Nie jest to dokładne, ale dostaliśmy górne ograniczenie.

$$T(n) = O(n^2) \tag{4.1.6}$$

```
      / \
     / / \
    / /   \ (h)
   / /  (od pewnego momentu nie ma części drzewa)
  / /
 / /
/
(H)
```

Wysokości różnią się o stałą:

$$\frac{n}{2^H} = 1 \implies H = \log_2 n \tag{4.1.7}$$

$$\frac{n}{4^h} = 1 \implies h = \log_4 n \tag{4.1.8}$$

Za chwilę będę dodawał rzeczy, które nie istnieją

Pamiętajmy, że:

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$\hat{T}(n) = \sum_{k=0}^{H=\log_2(n)} \left(\frac{5}{16}\right)^k n^2 = \tag{4.1.9}$$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{H} \left(\frac{5}{16}\right)^k = \tag{4.1.10}$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{11} \left(16 - 5\left(\frac{5}{16}\right)^{\log_2 n}\right) = \tag{4.1.11}$$

$$= \frac{16}{11} n^2 - \frac{5}{11} n^{2-1.67} \tag{4.1.12}$$

Rozważmy ograniczenie dolne:

$$\check{T}(n) = \sum_{k=0}^{h=\log_4(n)} \left(\frac{5}{16}\right)^k n^2 = n^2 \frac{1}{11}\left(16 - C \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{\log_4 n}\right) \tag{4.1.13}$$

Zatem wiemy, że:

$$T(n) = O(\hat{T}(n)) = O(T^*(n)) \tag{4.1.14}$$

$$T(n) = \Omega(\check{T}(n)) \tag{4.1.15}$$

$$T(n) = \Theta(n^2) = \frac{16}{11} n^2 + o(n^2) \tag{4.1.16}$$

4.2 Metoda iteracyjna

$$T(n) = 3T(\left(\frac{n}{4}\right)) + n = \tag{4.2.1}$$

$$T(n) = 3\left(3T\left(\left(\frac{n}{16}\right)\right) + \left(\frac{n}{4}\right)\right) + n = 9T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{3}{4}n + n = \tag{4.2.2}$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + 9\left(3T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n}{16}\right) = \tag{4.2.3}$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \frac{9}{16}n + 27T\left(\frac{n}{64}\right) = \tag{4.2.4}$$

$$T(n) = n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \cdots + 3^j T\left(\frac{n}{4^j}\right) = \tag{4.2.5}$$

$$\tag{4.2.6}$$

Wyznaczmy koniec iteracji:

$$\frac{n}{4^j} = 1 \implies j = \log_4 n \tag{4.2.7}$$

To jest nic innego jak:

$$\sum_{j=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^j = O(n) \tag{4.2.8}$$

4.3 Master Theorem

Theorem. Master Theorem. Jeśli $T(n) = a \cdot T(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + \Theta(n^d)$ dla pewnych stałych $a > 0, b > 1, d > 0$, oraz $T(1) = \Theta(1)$ to:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^d\right) & \text{jeśli} \quad d > \log_b a \\ \Theta\left(n^d \log n\right) & \text{jeśli} \quad d = \log_b a \\ \Theta\left(n^{log_b a}\right) & \text{jeśli} \quad d < \log_b a \end{cases}$$

$$\hat{T}(n) = a \cdot \hat{T}\left(\frac{n}{b} + 1\right) + \Theta(n^d) \tag{4.3.1}$$

$$\check{T}(n) = a \cdot \check{T}\left(\frac{n}{b}\right) \tag{4.3.2}$$

Dowód

```
wielkość                .                  liczba podproblemów
n                       c n^d              1
n/b                     c (n/b)^d          a
n/b^2                   c (n/(b^2))^d      a^2

...

koszt na poziomie 'k' = c (n/b^k)^d
liczba podproblemów na poziomie 'k' = a^k

suma kosztów 'k'-tym wierszu = c (a/b^d)^k * n^d
```

Wysokość drzewa rekursji

$$\frac{n}{b^h} = 1 \implies h = \log_b n \tag{4.3.3}$$

Zatem:

$$T(n) = \Theta\left(\sum_{k=0}^{\log_b n} \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^k n^d\right) \tag{4.3.4}$$

Mogę wziąć thetę zamiast o, bo dość dokładnie robię - ale trochę nie

$$\sum_{k=0}^{h} q^k = \frac{1 - q^{h+1}}{1 - q} \qquad \sum_{h=0}^{h} 1^k = (h+1)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^d \sum_{k=0}^{\log_b n} \cdot \left(\frac{a}{b^d}\right)^k\right) \tag{4.3.5}$$

(1) Jeśli $\frac{a}{b^d} < 1$, to:

$$a < b^d \tag{4.3.6}$$
$$\log_b(a) < d \quad \text{zatem} \tag{4.3.7}$$
$$T(n) = \Theta(n^d) \tag{4.3.8}$$

(większość pracy dzieje się z korzenia - okolic korzenia)

(2) Jeśli $\frac{a}{b^d} = 1$, to:

$$a = b^d \tag{4.3.9}$$
$$\log_b(a) = d \tag{4.3.10}$$
$$T(n) = \Theta(n^d \log n) \tag{4.3.11}$$

(suma kosztów w k-tym wierszu - każdy wiersz kontrybuuje równie mocno)

(3) Jeśli $\frac{a}{b^d} > 1$, to:

$$a > b^d \tag{4.3.12}$$
$$\log_b(a) > d \tag{4.3.13}$$
$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \tag{4.3.14}$$

(z każdym kolejnym poziomem koszt rośnie - większość złożoności kryje się na dole drzewa rekursji)

Z tego co dzieje się na początku... albo na końcu, bo to może być scalanie
Stworzyliście za dużo podproblemów.

Co jeśli rekurencja nie ma n^d, a ma $n \log(n)$? - możemy przybliżać

Przykład

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + 11n \quad a = 4, b = 2, d = 1 \tag{4.3.15}$$
$$\log_b a = \log_2 4 = 2 > 1 = d \quad \text{to jest przypadek (3)} \tag{4.3.16}$$
$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_a b}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 4}\right) = \Theta\left(n^2\right) \tag{4.3.17}$$

Przykład

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 \quad a = 4, b = 3, d = 2 \tag{4.3.18}$$
$$\log_b a = \log_3 4 < 2 = d \quad \text{to jest przypadek (1)} \tag{4.3.19}$$
$$T(n) = \Theta\left(n^d\right) = \Theta\left(n^2\right) \tag{4.3.20}$$

Przykład

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + 0.(3)n^3 \quad a = 27, b = 3, d = 3 \tag{4.3.21}$$

$$\log_b a = \log_3 27 = 3 = d \quad \text{to jest przypadek (2)} \tag{4.3.22}$$

$$T(n) = \Theta\left(n^d \log n\right) = \Theta\left(n^3 \log n\right) \tag{4.3.23}$$

4.4 Divide and Conquer

1. Podział problemu na mniejsze podproblemy.
2. Rozwiąż rekurencyjnie mniejsze (rozłączne) podproblemy.
3. Połącz rozwiązania problemów w celu rozwiązania problemu wejściowego.

4.5 Wyszukiwanie elementów w portowanej tablicy

- Input - posortowana tablica $A[1..n]$, element x
- Output - indeks i taki, że $A[i] = x$ lub błąd, gdy x nie występuje w A

4.6 Binary search

1. if $n = 1, A[n] = x$ return n, else A does not contain x
2. porównujemy x z $A[\frac{n}{2}]$
3. jeśli $x = A[\frac{n}{2}]$ return $\frac{n}{2}$
4. jeśli $x < A[\frac{n}{2}]$, BinarySearch($A[1..\frac{n}{2} - 1], x$)
5. jeśli $x > A[\frac{n}{2}]$, BinarySearch($A[\frac{n}{2} + 1..n], x$)

Wy nie patrzcie na pseudokody na tablicy, tylko w książce

$$T(n) = 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) \tag{4.6.1}$$

$$T(n) = \Theta(\log n) \tag{4.6.2}$$

5 Lecture V - Divide and Conquer

5.1 Potęgowanie liczby

- Input - liczba x, liczba całkowita n

- Output - x^n

Bazowo zachodzi $n-1$ mnożeń x przez siebie. (czyli $\Theta(n)$ operacji)

$$x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x^n \tag{5.1.1}$$

Zróbmy to sprytniej:

$$x^n = \begin{cases} x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}} & \text{dla parzystego} \quad n \\ x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x & \text{dla nieparzystego} \quad n \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Z liniowej liczby mnożeń zeszliśmy do logarytmicznej liczby mnożeń.

$$T(n) = 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) \tag{5.1.3}$$

$$T(n) = \Theta(\log n) \tag{5.1.4}$$

5.2 Wyliczenie n-tej liczby Fibonacciego

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & n > 1 \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Normalne wywołanie funkcji to $\Theta(\varphi^n)$

Wykorzystajmy podejście bottom-up, liczymy i zapamiętujmy każdorazowo $F_2, F_3, \dots, F_n$
Osiągnęliśmy złożoność liniową $\Theta(n)$

Istnieje jednak zwarty wzór na $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi^n + \varphi^n}{2}\right)$ a to możemy policzyć logarytmicznie.

Tu pojawiają się liczby - jak one się nazywały - (z sali) niewymierne.

Istnieje macierz, która mnożona pozwala na policzenie n-tej liczby Fibonacciego.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

Algorytm używający tego wzoru - połączony z szybkim potęgowaniem, ma złożoność $\Theta(\log n)$.

5.3 Mnożenie Liczb

- Input: x, y (liczby n-bitowe)
- Output: $x \cdot y$

Standardowe mnożenie w słupku to $\Theta(n^2)$ mnożeń i $\Theta(n)$ dodawań.
Załóżmy, że n jest parzyste:

$$x = x_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R \tag{5.3.1}$$
$$y = y_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + y_R \tag{5.3.2}$$
$$x \cdot y = \left(x_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R\right) \cdot \left(y_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + y_R\right) = \tag{5.3.3}$$
$$= x_L \cdot y_L \cdot 2^n + (x_L y_R + x_R y_L) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R y_R \tag{5.3.4}$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \tag{5.3.5}$$
$$a = 4, b = 2, d = 1 \tag{5.3.6}$$
$$\log_b a = \log_2 4 = 2 > 1 = d \tag{5.3.7}$$
$$T(n) = \Theta(n^2) \tag{5.3.8}$$

Asymptotycznie nie zyskaliśmy nic.
Ten przypadek pokazuje, że czasami nie wystarczy bezmyślnie podzielić a potem scalić.

A co o tym myślał Gauss - tu jest dużo mnożeń - cztery.

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad) \tag{5.3.9}$$
$$bc + ad = (a + b)(c + d) - ac - bd \tag{5.3.10}$$

Zobaczmy, że ac, bd są już policzone wyżej - zamiast 4 mnożeń, mamy 3 mnożenia.

$$x \cdot y = x_L y_L 2^n + ((x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R) + x_R y_R \tag{5.3.11}$$

Wykonujemy i zapamiętujemy mnożenia $x_L y_L, x_R y_R, (x_L + x_R)(y_L + y_R)$ - zamiast 4 mnożeń, mamy 3 mnożenia.

$\Theta(n)$ - wynika z przeunięć bitowych oraz dodawań.

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \tag{5.3.12}$$
$$a = 3, b = 2, d = 1 \tag{5.3.13}$$
$$\log_b a = \log_2 3 > 1 = d \tag{5.3.14}$$
$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n^{1.59}) \tag{5.3.15}$$

Najszybszy znany algorytm - na podstawie szybkiej transformaty fouriera $\sim O(n \cdot \log n \cdot \log \log n)$

```
mutiply(x, y)
    n = max {|x|, |y|}
    if n == 1 return x * y
    x_L, x_R = leftmost(ceil(n/2),x), rightmost(floor(n/2),x)
    y_L, y_R = leftmost(ceil(n/2),y), rightmost(floor(n/2),y)

    p1 = multiply(x_L, y_L)
```

```
    p2 = multiply(x_R, y_R)
    p3 = multiply(x_L + x_R, y_L + y_R)

    return p1 << n + (p3 - p1 - p2) << ceil(n/2) + p2
```

Podobnie możemy mnożyć macierze.

5.4 Mnożenie macierzy

- Input: A, B - n-wymiarowe macierze
- Output: $A \cdot B$

Naiwne mnożenie macierzy wykonuje $\Theta(n^3)$ mnożeń.

Podzielmy macierz na 4 równe częsci:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \tag{5.4.1}$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2) \tag{5.4.2}$$

$$T(n) = O(n^3) \tag{5.4.3}$$

Znowu nic nie zyskaliśmy. Jesteśmy w stanie wyeliminować jedno mnożenie - osiągając ostatecznie $\Theta(n^{\log_2 7}) \sim \Theta(n^{2.81})$.

Algorytmy state of the art - $\Theta(n^2 \text{polylog}(n))$.

5.5 Quick Sort

Algorytm na podział - scalanie już posortowanych. Pozwala na sortowanie w miejscu.

```
A[1..n]
|         |------|         |
1         p        q         n

A[1..n]
|         |    <=  |       | <      |        |
1         p        |pivot|       q        n
```

1. Podziel $A[p..q]$ na dwie tablice: $A[p..k-1]$, *pivot*, $A[k+1..q]$ takie, że:

   $$\forall_{i \in [p..k-1]} A[i] \leqslant \mathit{pivot}, \forall_{j \in [k+1..q]} A[j] > \mathit{pivot}$$

2. Quicksort$(A, p, k-1)$
   Quicksort$(A, l-1, q)$

Przykład - weźmy nieposortowaną tablicę:

```
Quicksort(A,1,n)
[6, 1, 4, 3, 5, 7, 2, 8] # pivot = 6
->
[1, 4, 3, 5, 2, 6, 7, 8]
                .
Quicksort(A,1,5)
Quicksort(A,7,8) ->
[1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 8] # pivot = 1
 .              .  .

Quicksort(A,2,5) ->
[1, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8] # pivot = 4
 .        .     .  .

Quicksort(A,2,3) ->
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] # pivot = 3
 .  .  .  .  .  .  .  .
```

6 Lecture VI - Quicksort

Rozważmy algorytmy służące do dzielenia tablicy w Quicksorcie

6.1 Lomuto Partition

```
Lomuto Partition(A, p, q) # A[p..q]
    pivot = A[p]
    i = p
    for j = p + 1 to q
        if A[j] <= pivot # expensive |A[p..q]| = n, then (n-1) comparisons ~ Theta(n)
            i = i + 1
            swap (A[i], [j]) # expensive, but if dependent
    swap (A[i], A[p]) # pivot in between A[p..i] and A[i+1..q]
    return i

A
|*| <= pivot |i| pivot < |j| ? |
p                               q

We either put the ? element in the '<= pivot' part, or '> pivot' part

A
| <= pivot | * | pivot < |
p                       q

Example
6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11
*  i       j
```

```
swap(5,10)

6, 5, 13, 10, 8, 3, 2, 11
*  i         j

do nothing

6, 5, 13, 10, 8, 3, 2, 11
*     i         j

swap(3, 13)

6, 5, 3, 10, 8, 13, 2, 11
*     i         j

6, 5, 3, 2, 8, 13, 10, 11
*        i         j

6, 5, 3, 2, 8, 13, 10, 11
*        i              j

swap(6, 2)

2, 5, 3, 6, 8, 13, 10, 11
*        i              j

return i = 3
```

Biorąc pod uwagę, że dokonujemy $n - 1$ porównań, złożoność Lomuto Partition wynosi $\Theta(n)$.

6.2 Hoare Partition

```
Hoare Partition(A, p, q) # A[p..q]
    pivot = A[floor((p+q)/2)]
    i = p - 1
    j = q + 1
    while True
        do
            i++
        while A[i] < pivot

        do
            j--
        while A[j] > pivot

        if i >= j return j
        swap(A[i], A[j])
```

```
* - pivot

Example
  6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11
i p          *          q  j
  i          *       j         # swap(6, 2)

  2, 10, 13, 5, 8, 3, 6, 11
     i       *    j            # swap(10, 3)

  2, 3, 13, 5, 8, 10, 6, 11
            *

  2, 3, 13, 5, 8, 10, 6, 11
        i   j                  # swap (13, 5)

  2, 3, 5, 13, 8, 10, 6, 11
        *
        j  i

A
| <= pivot | < pivot |
p          j        q

return j
```

W Hoare Partition tracimy pivot który może ulec przesunięciu. Porównań robimy więcej o stałą $n \pm c, c = 1$. Złożoność $\Theta(n)$ - zdecydowanie mniej swapów, 2-3 razy mniej niż Lomuto partition.

```
QS(A,p,q)
    if p < q
        r = Partition(A,p,q)
        QS(A,p,r-1)
        QS(A,r+1,q)
```

6.3 Worst Case Analysis for QS

Najgorzej będzie jak każdorazowo będziemy nierówno dzielić po 1-szym elemencie (odwrotnie posortowana tablica).

```
       cn
   /       \
  Theta(1)  c(n-1)
           /    \
      Theta(1)  c(n-2)
                   ...
                  /   \
           Theta(1)   Theta(1)
```

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) \tag{6.3.1}$$

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n) \leqslant \sum_{i=0}^{n} c(n-i) + \Theta(1) = \tag{6.3.2}$$

$$= c\sum_{i=0}^{n}(n-i) + \Theta(n) = \tag{6.3.3}$$

$$= c\frac{(n)(n+1)}{2} + \Theta(n) = \tag{6.3.4}$$

$$= O(n^2) \tag{6.3.5}$$

6.4 Best case Analysis for QS

Najlepiej będzie jak dzielimy na pół.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \tag{6.4.1}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \tag{6.4.2}$$

$$T(n) = \Theta(n \log n) \tag{6.4.3}$$

6.5 Specific case analysis for QS

$$T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T\left(\frac{9n}{10}\right) + \Theta(n) \tag{6.5.1}$$

```
   cn       | cn
  /  \      | cn
 /    \     | ..
/      \
        \
         \
```

Po zsumowaniu każde piętro będzie miało koszt cn. Zchodzimy końca wysokości drzewa.

$$\left(\frac{9}{10}\right)^h n = 1 \tag{6.5.2}$$

$$n = \left(\frac{10}{9}\right)^h \tag{6.5.3}$$

$$h = \log_{\frac{10}{9}} n \tag{6.5.4}$$

6.6 Best/Worst case analysis for QS - Intuition

$$L(n) = 2U\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \tag{6.6.1}$$
$$U(n) = L(n-1) + L(0) + \Theta(n) \tag{6.6.2}$$
$$\tag{6.6.3}$$

Zatem rozwiążmy układ równań:

$$L(n) = 2\left(L(\frac{n}{2} - 1) + \Theta(n)\right) + \Theta(n) \tag{6.6.4}$$
$$L(n) = 2L\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \Theta(n) \tag{6.6.5}$$
$$L(n) = \Theta(n \log n) \tag{6.6.6}$$

6.7 Average case analysis for QS

Rozkład T_n nie jest znany do dziś.

Zapiszmy dla $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$T_n = \#\text{ porównań elementów sortowanej tablicy}, |A| = n \tag{6.7.1}$$
$$X_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli partition podzieli tablicę n-elementową na (k, n-k-1)} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{6.7.2}$$

Możemy wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X_k:

$$E(X_k) = 1 \cdot P(X_k = 1) + 0 \cdot P(X_k = 0) = 1 \cdot P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \tag{6.7.3}$$

Zapiszmy wobec tego równanie na T_n, uwzględniające wszystkie przypadki:

$$T_n =^{distr.} \begin{cases} T_0 + T_{n-1} + n - 1 & \text{if (0,n-1) - split} \\ T_1 + T_{n-2} + n - 1 & \text{if (1,n-2) - split} \\ \vdots \\ T_k + T_{n-1-k} + n - 1 & \text{if (k,n-k-1) - split} \\ T_{n-1} + T_0 + n - 1 & \text{if (n-1,0) - split} \end{cases} \tag{6.7.4}$$
$$T_n =^{distr.} \sum_{k=0}^{n-1} X_k(T_k + T_{n-k-1} + n - 1) \tag{6.7.5}$$

$$E(T_n) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k(T_k + T_{n-k-1} + n - 1)\right) = \tag{6.7.6}$$

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_k(T_k + T_{n-k-1} + n - 1)\right) = \tag{6.7.7}$$

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(X_k\right) \cdot E(T_k + T_{n-k-1} + n - 1) = \tag{6.7.8}$$

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + E(T_{n-k-1}) + n - 1 = \tag{6.7.9}$$

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + \sum_{k=0}^{n-1} E(T_{n-k-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} n - 1\right) = \tag{6.7.10}$$

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_{n-k-1}) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} n - 1 = \tag{6.7.11}$$

$$E(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_{n-k-1}) + n - 1 \tag{6.7.12}$$

$$E(T_n) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + n - 1 \tag{6.7.13}$$

Podstawmy dla wygody $t_n = E(T_n)$:

$$t_n = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t_k + n - 1 \quad \text{rekurencja z pełną historią} \tag{6.7.14}$$

Możemy usunąć historię odejmując od siebie kolejne wyrazy rekurencji.

$$nt_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} t_k + (n-1)n \tag{6.7.15}$$

$$(n-1)t_{n-1} = 2\sum_{k=0}^{n-2} t_k + (n-2)(n-1) \tag{6.7.16}$$

Zachodzi odejmowanie stronami

$$nt_n - (n-1)t_{n-1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} t_k + (n-1)n - 2\sum_{k=0}^{n-2} t_k - (n-2)(n-1) \tag{6.7.17}$$

$$nt_n - (n-1)t_{n-1} = 2t_{n-1} + 2(n-1) \tag{6.7.18}$$

$$nt_n = (n+1)t_{n-1} + 2(n-1) \tag{6.7.19}$$

$$\frac{t_n}{n+1} = \frac{t_{n-1}}{n} + 2\frac{n-1}{n(n+1)} \tag{6.7.20}$$

Dokonajmy podstawienia $f_n = \frac{t_n}{n+1}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$:

$$f_n = f_{n-1} + 2\frac{n-1}{n(n+1)}, f_0, f_1 = 0 \tag{6.7.21}$$

$$f_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} = \tag{6.7.22}$$

$$f_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \tag{6.7.23}$$

$$f_n = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \tag{6.7.24}$$

$$f_n = 4(H_{n+1} - 1) - 2H_n \tag{6.7.25}$$

$$f_n = 4\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) - 2H_n \tag{6.7.26}$$

$$f_n = 2H_n - 4 + \frac{4}{n+1} \tag{6.7.27}$$

Wróćmy z podstawienia $t_n = (n+1)f_n$:

$$E(T_n) = t_n = (n+1)f_n = 2nH_n + 2H_n - 4(n+1) + 4 \tag{6.7.28}$$

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{6.7.29}$$

Widzimy, że wiodący czynnik $T_n = 2n \ln n + \Theta(n)$. Wiemy dlaczego QS jest dobry - średnio wykona $2n \ln n$ porównań asymptotycznie.

7 Lecture VII - Quicksort - further analysis

```
| <=   |p| < ... <=   |q|  <   |
```

Możemy wyróznić dwa pivoty, w obrębie których prowadzimy sortowanie. To wymaga stworzenia nowego alogrytmu partition.

1. 1975 Sedgewick (liczba porównań w dual-pivot partition)

$$E(\#\text{ dual pivot partition}) \sim \frac{16}{9}n \implies E(\#\text{ QS}) \sim \frac{32}{15}n \log n$$

2. 2009 Yaroslavsky, Bentley, Block - Dual pivot quick sort

3. 2012 Sebastian Wild, Nebel

$$E(\#\text{ dual pivot partition}) \sim \frac{19}{12}n \implies E(\#\text{ QS}) \sim 1.9n \log n$$

4. 2015 Aumuller Dietzfelbinger - zaprezentowali strategię count oraz pokazali jej optymalność:

$$E(\#\text{ count partition}) \sim \frac{3}{2}n \implies E(\#\text{ QS}) \sim 1.8n \log n$$

7.1 Strategia Count

Zakładamy $p < q$ - rozpatrujemy wartość oczekiwaną, ponieważ jedynie pierwsze sprawdzenie z pivotem jest wymagane.

```
1     s_{i-1}                   l_{i-1}
|   |    <= p | < ... <= | q | <        |i|   ?  |
    a                                            b
```

Rozpatrzmy i-ty element w podziale (pamiętając, że $p < q$):

- jeśli $s_{i-1} \geqslant l_{i-1}$ to porównujemy kolejny $A[i]$ najpierw z p, a potem ewentualnie z q (jeśli $A[i] < p$ to nie musimy porównywać z q)
- jeśli $s_{i-1} < l_{i-1}$ to $A[i]$ porównujemy najpierw z q, a potem ewentualnie z p

$$E(T_n) = E(P_n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n} E(T_{p-1}) + E(T_{q-p-1}) + E(T_q) \tag{7.1.1}$$

Tim Peters - Tim-sort - modyfikacja merge-sorta, wyznaczmy posortowane podciągi przed merge-m, mergeujmy podobnej wielkości tablice - specjalna polityka merge-owania.

... ograniczenie dolne, counting sort w czasie liniowym zbioru wielkości O(n)

7.2 Counting Sort

Counting sort [1] zakłada, że każdy z wejściowych elementów mieści się w przedziale $[0, k]$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Gdy $k = O(n)$, to złożoność algorytmu wynosi $\Theta(n + k) = \Theta(n)$. Do jego wykonania potrzebujemy tablicy pomocniczej.

```
COUNTING-SORT(A, B, k)
let C[0..k] be a new array
for i = 0..k
    C[i] = 0
for j = 1..length[A]
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
for i = 1..k
    C[i] = C[i] + C[i - 1]
for j = length[A]..1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] - 1
```

Counting sort ma własność stabliności - zachowuje elementy tej samej wartości w kolejności, w jakiej występują w tablicy wejściowej.

[1] Cormen (194-196) - Chapter 8 - Sorting in Linear Time - 8.2 Counting Sort

7.3 Radix Sort

Radix Sort polega na sortowaniu liczb w systemie pozycyjnym, przy pomocy innego stabilnego sortowania.

```
RADIX-SORT(A, d)
for i = 1..d
    COUNTING-SORT(A, i)
```

8 Lecture VIII

8.1 Poprawność Radix Sort

Indukcja po t-numer cyfry.

1. Jeśli liczby 1-cyfrowe to z poprawności Counting Sorta ok.
2. Załóżmy indukcyjnie Radix Sort jest poprawny do $t-1$ cyfry.
3. Krok indukcyjny t-ta dwóch liczb jest taka sama. To z założenia indukcyjnego dalej oraz stable property Counting Sorta liczby do t-tej cyfry dalej pozostaną posortowane. t-ta cyfra różna: z poprawności counting sorta OK.

8.2 Złożoność obliczeniowa Radix Sort

```
|r-bitowy kawalek| r'b... | r'b... | ... | r'b... |
b-bitów dzielmy na kawałki (cyfry w podstawie r)
```

Mamy n, b-bitowych liczb, które dzielę na (r-bitowe cyfry $\frac{b}{r}$ takich cyfr).
Cyfry są z $|\{0, \ldots, 2^n - 1\}| = 2^n$. Zatem pojedyńczy counting sort n-liczb względem jednej cyfry to:

$$O(n + 2^r) \tag{8.2.1}$$

Zatem Radix Sort będzie miał złożoność obliczeniową

$$O\left(\frac{b}{r}(n + 2^r)\right) \tag{8.2.2}$$

W celu ustalenia nalepszego r - minimalnego f - wykorzystamy funkcję W-Lamberta

$$f(r) = \frac{b}{r}\left(n + 2^r\right) \tag{8.2.3}$$

Zapropojujmy funkcję $r = \log n$, wtedy:

$$O\left(\frac{b}{\log n}\left(n + 2^{\log n}\right)\right) = O\left(\frac{b \cdot n}{\log n}\right) = \tag{8.2.4}$$

$$\tag{8.2.5}$$

Załóżmy, że zbiór sortowanych elementów to:

$$\{0, \ldots, n^d - 1\} - \text{do tego zbioru należą b-bitowe sortowane liczby} \tag{8.2.6}$$

Wtedy maksymalne $b = \log n^d = d \log n$:

$$(\dots) = O\left(\frac{dn \log n}{\log n}\right) = O(d \cdot n) \tag{8.2.7}$$

8.3 Statystyki pozycyjne

Definition. Statystyka pozycyjna. k-tą statystykę pozycyjną nazywamy k-tą najmniejszą wartość z zadanego zbioru.

- Co się dzieje, jeśli $k = 1 \rightarrow \Theta(n)$.
- Co się dzieje, jeśli $k = n \rightarrow \Theta(n)$.
- Co się dzieje, jeśli $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \vee \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rightarrow$ sortowanie

8.4 RandomSelect(A,p,q,i)

Nazwa RandomSelect bierze się z tego, że wybieramy losowy element jako pivot. p to indeks początkowy, q to indeks końcowy, i to numer zadanej statystyki pozycyjnej.

```
RandomSelect(A, p, q, i)
    IF p == q return A[p]
    r = Rand_Partition(A,p,q) # jako pivota przyjmieny losowy element
    k = r - p + 1
    IF i == k return A[r]
    IF i < k return RandomSelect(A, p, r-1, i)
    ELSE return RandomSelect(A, r+1, q, i-k)
```

Przykład. Szukajmy 4-tej statystyki pozycyjnej (Pivot oznaczamy '*'):

```
6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11
   *
```

Po podziale względem pivota:

```
6, 5, 8, 3, 2, 10, 13, 11    RandomSelect(A, 1, 8, 4), r = 6, k = 6 - 1 + 1 = 6
               *
```

Bierzemy lewą część:

```
2, 3, 6, 5, 8    RandomSelect(A, 1, 5, 4)
      *
Pivot index: r = 2, k = 2 - 1 + 1 = 2
```

I dalej:

```
6, 5, 8    RandomSelect(A, 3, 5, 2)
*
Pivot index: r = 4, k = 4 - 3 + 1 = 2
```

Zwracamy czwarty element posortowanej tablicy **6** (dla sprawdzenia: posortowana tablica):

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13$$

8.5 Best Case dla RandomSelect

Każdorazowo dzielimy tablicę na pół.

$$T(n) = 1 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \quad \text{n to partition} \tag{8.5.1}$$

$$a = 1, b = 2, d = 1, log_2 1 = 0 < 1 \implies \tag{8.5.2}$$

$$T(n) = \Theta(n) \tag{8.5.3}$$

8.6 Worst Case dla RandomSelect

Każdorazowo wybieramy pivot tak, że dzielimy tablicę na $n-1$ i 0-elementową część.

$$T(n) = 1T\left(n-1\right) + \Theta(n) \quad \text{partition is unfortunate} \tag{8.6.1}$$

$$T(n) = O(n^2) \tag{8.6.2}$$

8.7 Average Case dla RandomSelect

$$E(T_n) = (n-1) + \frac{2}{n} \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} E(T_k) \tag{8.7.1}$$

Możemy zapisać (rozbicia na k i $n-k-1$, z których bierzemy tylko jedno z nich). Wiemy, że $n-1$ to koszt Partition, zatem:

$$T_n = \begin{cases} T_{n-1} + n - 1 : (0, n-1) \\ T_{n-2} + n - 1 : (1, n-2) \\ \vdots \\ T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n - 1 : (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \end{cases} \tag{8.7.2}$$

Można to rozwiązać indukcyjnie, aby wykazać, że $E(T_n) = \Theta(n)$.
Uwaga. Te przekształcenia wykonałem po wykładzie

Wiemy, że ograniczenie dolne na T_n wynosi $\Omega(n)$, ponieważ $n-1 = O(n)$ to sam koszt dla Partition. Ustalmy ograniczenie górne metodą, którą wykorzystaliśmy przy analizie Quick Sorta. Mamy:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{jeśli partition podzieli tablicę n-elementową na (k, n-k-1)} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{8.7.3}$$

Zauważmy, że $k \in \{0, \dots, \frac{n}{2}\}$, zatem $E(X_k) = \frac{2}{n}$. Zapiszmy następnie:

$$T_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} X_k \left(T_{n-k-1} + n - 1\right) \tag{8.7.4}$$

$$T_n = \frac{2}{n} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_{n-k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-1) \right) \tag{8.7.5}$$

Widzimy, że druga suma jest $O(n)$, zatem rozważmy dalej pierwszą część:

$$T_n = \frac{2}{n}\sum_{k=\frac{n}{2}-1}^{n-1} T_k + O(n) \tag{8.7.6}$$

$$\tag{8.7.7}$$

Wystarczy pokazać, że pierwszy człon równiez jest $O(n)$. Zróbmy to indukcyjnie.

$$S_n = \frac{2}{n}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} T_k \tag{8.7.8}$$

$$\tag{8.7.9}$$

Przypadek bazowy $S_1 = T_1 = O(1)$
Założenie indukcyjne $\forall_{k<n} S_k \leqslant ck$. Przeprowadźmy krok indukcyjny:

$$S_n = \frac{2}{n}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} T_k \leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} ck = \tag{8.7.10}$$

$$= \frac{2c}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} k\right) = \tag{8.7.11}$$

$$= \frac{2c}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n+2)}{8}\right) \leqslant \tag{8.7.12}$$

$$\leqslant \frac{2c}{n}\left(\frac{1}{8}n(3n-2)\right) = \tag{8.7.13}$$

$$= \frac{3}{4}cn \leqslant cn \tag{8.7.14}$$

Zatem $S_n \leqslant cn$ i ostatecznie $T_n = \Theta(n)$.

8.8 Select(A,p,q,i)

Algorytm ma duże podobieństwo z RandomSelect. Nie wybieramy losowego pivota - tylko inteligentnie. Niech $|A[p..q]| = n$.

1. Dzielimy $A[p..q]$ na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ pięcio elementowych części oraz ostatnią część rozmiaru $\leqslant 5$.
2. Sortujemy te grupy i wybieramy z każdej z nich medianę. $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}\}$
3. Znajdujemy medianę M : $Select(M, 1, \lceil \frac{n}{5} \rceil, \lfloor \frac{\lceil \frac{n}{5} \rceil}{2} \rfloor) \implies x$. M wygląda jak osobna tablica - da się to zrobić in place.
4. Ustaw x (medianę median) jako pivot Partition(A, p, q) Dalej tak samo jak Random-Select, oczywiście odpalając rekurencyjnie Select.

```
Dzielimy na 5 części
|.....|.....|.....|.....|.... |
sort 5-el części, wyzn medianę
```

```
max
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| .m| .m| .m| .m| .m|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . |   |
min
```

```
Zapuszczam selecta na M, |M|=5
```

Pierwsze dwa kroki algorytmu zajmą $O(n)$ - podzielenie tablicy i posortowanie piątek. Późniejsze kroki są dane jako rekurencja:

$$T(n) = T\left(\lceil\frac{n}{5}\rceil\right) + T(?) + O(n)(?\text{ na następnym wykładzie}) \tag{8.8.1}$$

9 Lecture IX - Select

1. Dziel wejściową tablicę na 5-elementowe podtablice i znajdź ich mediany - $\Theta(n)$
2. Select $(\dots)$ - znajdź medianę median. - $T\left(\lceil\frac{n}{5}\rceil\right)$
3. Użyj mediany median jako pivot w Partition - $\Theta(n)$
4. Idź do lewej albo prawej podtablicy w zależności od indeksu pivot i uszkanej statystyki pozycyjnej. $T(?)$

$$T(n) = T\left(\lceil\frac{n}{5}\rceil\right) + T(?) + \Theta(n) \tag{9.0.1}$$

```
Dzielimy na 5 części
|.....|.....|.....|.....|.... |
sort 5-el części, wyzn medianę

max
| .w| .w| .w| . | . |
| .w| .w| .w| . | . |
| .w>  w> .M> .s> .s|
| . | . | .s| .s| .s|
| . | . | .s| .s| .s|
min

M - mediana median (zakładamy porządek)
w - większe od mediany median (forall i : M < w_i)
s - mniejsze od mediany median (forall i : M < s_i)
". " - części o których nic nie powiemy

Wszystkich piątek jest ceil(n/5)
```

```
Wartości mniejszych od M jest 3*(1/2 ceil(n/5) - 1 - 1) (minus skrajna oraz mediana median)
    Każda piątka kontrubuuję, ale nie liczymy skrajnych piątek - ponieważ wyznaczamy ograniczenie
    | .w| .w| .w| . | .  |. |
    | .w| .w| .w| . | .  | . |
    | .w>  w> .M> .l> .l | .s|
    | . | . | .s| .l| .l | .s|
    | . | . | .s| .l| .l | .s|

    l - zliczamy
    s - ignorujemy (można lepiej, ale nie trzeba)
-||- większych jest 1/2 ceil(n/5)
```

$$\text{Wartości mniejszych od M} \geqslant \left(\frac{1}{2}\lceil\frac{n}{5}\rceil - 1 - 1\right)\cdot 3 \geqslant \tag{9.0.2}$$

$$\geqslant \frac{3}{10}n - 6 \tag{9.0.3}$$

```
Prezentowana tablica
| 3/10 n - 6 | M | n - (3/10 m - 6) - 1 = 7/10n + 5 |
```

Zatem

$$T(n) \geqslant T\left(\lceil\frac{n}{5}\rceil\right) + T\left(\frac{7}{10}n + 5\right) + \Theta(n) \tag{9.0.4}$$

$$\frac{3}{4}n \geqslant \frac{7}{10}n + 5 \quad \text{dla} \quad n > 100 \tag{9.0.5}$$

$$T(n) \leqslant T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{3}{4}n\right) + \Theta(n) \tag{9.0.6}$$

Niech $T(1) = \Theta(1)$ .Chcemy pokazać, że $T(n) = \Theta(n)$.
Założenie indukcyjne:

$$(\forall k < n)\, T(k) \leqslant ck \tag{9.0.7}$$

Krok indukcyjny

$$T(n) \leqslant T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{3}{4}n\right) + \Theta(n) \leqslant c\cdot\frac{n}{5} + c\cdot\frac{3}{4}n + \Theta(n) < \tag{9.0.8}$$

$$c\cdot\frac{19}{20}n + \Theta(n) < \tag{9.0.9}$$

$$cn - \frac{1}{20}cn + \Theta(n) < \tag{9.0.10}$$

$$cn - \frac{1}{20}cn + dn < \tag{9.0.11}$$

$$\text{wyznaczmy} \quad \left(-\frac{1}{20}cn + dn\right) \leqslant 0 \tag{9.0.12}$$

$$\left(-\frac{1}{20}c + d\right) \leqslant 0 \tag{9.0.13}$$

$$c \geqslant 20d \tag{9.0.14}$$

Zatem istnieje takie c, że nierówność jest prawdziwa, więc:

$$T(n) = O(n) \tag{9.0.15}$$

Cel analizy algorytmu - pokazać że rekurencje tego typu mogą się zdarzyć

9.1 Struktury Danych

Interesują nas struktury danych, które implementują *Set* interface.
Ma to być zbiór dynamiczny - możemy dodawać oraz usuwać elementy.
Zakładamy **comparison model**.

Podstawowe metody *Set* interface:

1. *build(A)* - buduje "set" z danych zawartych w A. Mamy $a \in A, a.key$ - klucz identyfikujący element.
2. *length(A)* - zwraca moc zbioru A
3. *find(k)* - zwraca element $a \in A$ taki że $a.key = k$ lub null
4. *insert(a)* - dodaj element a do zbioru A
5. *delete(k)* - usuń (czasem zwróć) element zbioru A o kluczu k
6. *find_min()*, *find_max()*, *find_prev(k)*, *find_next(k)* (*find* n), *list_ordered()* - zwróć element o najmniejszym lub największym kluczu k.

Struktura	**Build**	**Find**	**Insert/Delete**	**Find mM**	**Find pn**	**List_ordered**
Unsorted Array	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
Sorted Array	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(\log(n))$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$
Linked List	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	insert $\Theta(1)$, delete $\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
BST	$\Theta()$	$\Theta()$	$\Theta()$	$\Theta()$	$\Theta()$	$\Theta(n)$

Table 1: Porównanie różnych struktur danych

9.2 Binary Search Tree

Drzewo przeszukiwań binarnych

```
Single Tree Node
| parent                       |
| left | key | values | right |

"O" represents a node
        O 5
       /   \
    3 O     O 10
     /     / \
  1 O   8 O   O 12
```

```
                \
                 O 15
                  \
                   O 18
                  /
                 O 16
```

```
InorderTreeWalk(p)
1, 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 18
```

Zakładamy interfejs zbioru (klucze się nie powtarzają). W przeciwnym przypadku zakładamy multizbiór.

BST Property. Niech $x \in T$, x jest węzłem drzewa T (BST), wtedy:

- każdy $y \in x.left$ ma $y.key < x.key$
- każdy $y \in x.right$ ma $y.key > x.key$

9.3 Operacje na BST

```
InorderTreeWalk (x\in T)
    if (x != null)
        InorderTreeWalk (x.left)
        print(x)
        InorderTreeWalk (x.right)
```

$$T(n) = T(k) + \Theta(1) + T(n-1-k) \tag{9.3.1}$$

Pokażmy, że $T(n) = \Theta(n)$
Założenie indukcyjne: $\forall k < n \quad T(k) \leqslant ck$ Krok indukcyjny:

$$T(n) = T(j) + \Theta(1) + T(n-1-j) \leqslant \tag{9.3.2}$$
$$cj + \Theta(1) + c(n-1-j) = \tag{9.3.3}$$
$$= cn - c - \Theta(1) \leqslant cn \tag{9.3.4}$$

Zatem $T(n) = O(n)$, musimy przejść n elementów, zatem ograniczenie dolne również wynosi n, więc $T(n) = \Theta(n)$.

```
TreeSearch(x, k)
    if x == null OR k == x.key
        return x
    if k < x.key
        return TreeSearch(x.left, k)
    else
        return TreeSearch(x.right, k)

TreeMinimum(x) -> T(n) = O(h)
TreeMaximum(x) -> T(n) = O(h)
```

```
TreeSuccessor(x)
    if x.right != null
        return TreeMinimum(x.right)
    y = x.p
    while y != null AND x == y.right
        x = y
        y = y.p
    return y

TreeSuccessor(x) -> T(n) = O(h)
```

10 Lecture X

```
TreeInsert(x, el) ~ O(h) - nie było kodu na wykładzie :/
TreeInsert(x, el)
    if x == null
        return el
    if el.key < x.key
        x.left = TreeInsert(x.left, el)
        x.left.p = x
    else
        x.right = TreeInsert(x.right, el)
        x.right.p = x
    return x

TreeDelete(x)
1. x jest liściem
    - zwolnij pamięć zajmowaną przez x
    - ustaw wskaźnik jego ojca (na niego na null)
2. x ma jedno poddrzewo
    - x ma syna v to
        - zwalniamy pamięć x
        - ojciec x wskazuje na v
        - v.p wskazuje na x.p
3. x ma dwa poddrzewa
    - znajdź następnik x->y
    - zastąp dane x danymi y
    - skasuj y
```

10.1 Wysokość Drzewa BST

Wysokość drzewa to liczba krawędzi wzdłuż najdłuższej ścieżki od korzenia do liścia.

$$h = (n - 1) = O(n) \tag{10.1.1}$$

```
Worst Case
0 1
```

```
 \
  O 2
   \
    O 3

Best Case
    O 1
    / \
  O 2 O 3
```

Definition. Drzewo zbalansowane. Mówimy, że drzewo jest zbalansowane jeśli jego wysokość to $O(\log n)$.

10.2 BST_Sort

Dodaj wszystkie elementy tablicy A do drzewa BST. InorderTreeWalk(T)

```
3 7 5 6 8 1 2

    3
 /     \
1       7
 \     / \
  2  5   8
      \
       6

QS
1 2 3 7 5 6 8
1 2     5 6 7 8
 2      5 6   8
          6
```

```
Widzimy znaczące podobieństwo w porównaniach.
```

$$E(\text{Time}(\text{BST\_SORT})) = E(\text{Time}(\text{QuickSort})) = \Theta(n \log n) \tag{10.2.1}$$

$$\text{Time}(\text{BST\_SORT}) = \sum_{x \in T} \text{depth(x)} \tag{10.2.2}$$

$$E\left(\sum_{x \in T} \text{depth}(x)\right) = \Theta(n \log n) \tag{10.2.3}$$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{x \in T} \text{depth}(x)\right) = \Theta(\log n) \tag{10.2.4}$$

$$\text{średnia głębokość węzła w losowym drzewie BST} \tag{10.2.5}$$

$$h = \max_{x \in T}\{\text{depth}(x)\} \tag{10.2.6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{x\in T}\text{depth}(x) \leqslant \frac{1}{n}((n-\sqrt(n))(\log n)+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}) \leqslant \log n + 1 = O(\log n),\ \text{ale } h = O(\sqrt{n}) \tag{10.2.7}$$

Theorem. Wysokość BST. Niech T będzie losowym drzewem BST o n-węzłach, wtedy:

$$E(h(T)) \leqslant 3\log_2 n + o(\log n) \tag{10.2.8}$$

Proof. Nierówność Jensena jeśli f-wypukła, to:

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X)) \tag{10.2.9}$$

1. Nierówność Jensena
2. Zamiast analizować zmienną losową H_n, będziemy się zajmować $Y_n = 2^{H_n}$
3. Pokażemy, że $E(Y_n) = O(n^3)$
4. $2^{E(H_n)} \leqslant E(2^{H_n}) = E(Y_n) = O(n^3)$
5. $E(H_n) = 3\log_2 n + o(\log n)$

Pokażmy, że $E(Y_n) = O(n^3)$.

```
    r
   / \
k-1   n-k
```

Zakładając że korzeń tworzy $(k-1, n-k)$-split:

$$H_n =^d = 1 + \max\{H_{k-1}, H_{n-k}\} \tag{10.2.10}$$

$$Y_n =^d = 2\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\} \tag{10.2.11}$$

$$Z_{n,k} =^d = \begin{cases} 1 & \text{jesli korzeń n-el drzewa wykonuje } (k-1, n-k)\text{-split} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \tag{10.2.12}$$

$$E(Z_{n,k}) = 1 \cdot P(\text{(k-1,n-k)-split}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n!} \tag{10.2.13}$$

$$Y_n =^d = \sum_{k=1}^{n} Z_{n,k} \cdot 2\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\} \tag{10.2.14}$$

$$E(Y_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} Z_{n,k} \cdot 2\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right) \tag{10.2.15}$$

$$E(Y_n) = 2\sum_{k=1}^{n} E\left(Z_{n,k} \cdot \max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right) \tag{10.2.16}$$

$$E(Y_n) = 2\sum_{k=1}^{n} E(Z_{n,k}) \cdot E\left(\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}\right) \tag{10.2.17}$$

$$E(Y_n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E(\max\{Y_{k-1}, Y_{n-k}\}) \tag{10.2.18}$$

$$\leqslant_{(\max xy \leqslant x+y)} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_{k-1}) + E(Y_{n-k}) \tag{10.2.19}$$

$$E(H_n) = O(\log n), H_n = \log_2 Y_n \tag{10.2.20}$$

$$Y_{k-1} = 2^1 0, Yn - k = 2^1 1 \tag{10.2.21}$$

$$\max 2^{10}, 2^{11} = 2^{11} \tag{10.2.22}$$

$$2^{10} + 2^{11} = 3 \cdot 2^{10} \tag{10.2.23}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} E(Y_{n-k}) \tag{10.2.24}$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E(Y_k) \tag{10.2.25}$$

$$Y_n = E(Y_n) \tag{10.2.26}$$

$$y_n \leqslant \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \tag{10.2.27}$$

$$ny_n \leqslant 4\sum_{k=0}^{n-1} y_k \tag{10.2.28}$$

$$y_n = O(n^3) \tag{10.2.29}$$

Dowód indukcyjny. Założenie indukcyjne $y_0 = y_1 = 0, \forall k < n y_k \leqslant cn^3$

$$\text{krok indukcyjny} \quad y_n \leqslant \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \tag{10.2.30}$$

$$\leqslant_{\text{ind}} \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ck^3 = \tag{10.2.31}$$

$$= \frac{4c}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \tag{10.2.32}$$

$$= \frac{4c}{n} \cdot \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \tag{10.2.33}$$

$$= cn(n-1)^2 \leqslant cn^3 \tag{10.2.34}$$

Zatem:

$$E(Y_n) = O(n^3) \tag{10.2.35}$$

□

Dokładny wynik pokazany przez Devroye 1986r.

$$E(H_n) \sim 2.9882 \log_2 n \tag{10.2.36}$$

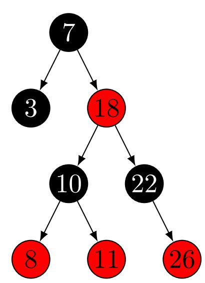
11 Lecture XI

11.1 Red Black Trees

'78 Guibas, Sedgewick - Red Black (RB) Trees

- Własność 0 - Drzewa RB są drzewami BST - mają BST Property - po lewej stronie węzła występują wartości mniejsze, a po prawej większe
- Własność 1 - Każdy węzeł ma kolor czerwony albo czarny (to może być bit)
- Własność 2 - Korzeń oraz *liście* są czarne
- Własność 3 - Jeśli węzeł jest czerwony, to jego bezpośrednie dzieci są czarne
- Własność 4 - $\forall X$ Każda prosta ścieżka od węzła X do liści ma tyle samo czarnych węzłów. (black_height(x), inaczej bh(x)). Prosta ścieżka oznacza, że nie zawracamy, zawsze idziemy w dół.

11.2 Red Black Tree Example

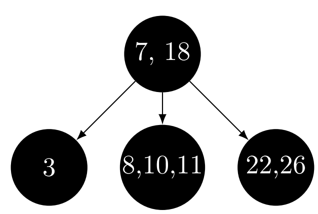


Programując - ostatni liść - *nil* nie ma klucza, kolor jest czarny, a wskaźnik na ojca - to każdy węzeł. Liście drzewa RB to wszystkie *nil*-węzły.
Przykład Czarna wysokość bh(18) = 2

Lemat Niech T będzie drzewem czerwono-czarnym o n-węzłach. Wtedy:

$$\text{wysokość}(T) \leqslant 2\log_2(n+1) \tag{11.2.1}$$

Dowód Czarni rodzice wchłaniają czerwone dzieci.



W drzewie binarnym liczba liści wynosi $n+1$
(zawsze dokładamy 2 liście do każdego węzła - można to pokazać indukcyjnie)

2-3-4-Tree. Liczba liści nie zmienia się.
Mamy $n+1$ liści w drzewie czerwono-czarnym oraz w 2-3-4-drzewie (dowód - indukcyjnie)

- Niech h - wysokość drzewa czerwono-czarnego.
- Niech h' - wysokość odpowiadającego mu 2-3-4-drzewa.

Zauważmy, że $h' = \mathrm{bh}(\text{korzenia RB drzewa})$. Ograniczmy liczbę liści za pomocą funkcji od tej wysokości

$$2^{h'} \leqslant \#\text{liści} \leqslant 4^{h'} \tag{11.2.2}$$

Węzły binarne o wysokości h' dają $2^{h'}$ węzłów.
Węzły 2-3-4 o wysokości h' dają $4^{h'}$ węzłów.
Naszych liści jest $n+1$, zatem:

$$2^{h'} \leqslant n+1 \tag{11.2.3}$$

$$h' \leqslant \log_2(n+1) \tag{11.2.4}$$

Z konstrukcji wchłaniania wiemy, że $h \leqslant 2h'$ (ponieważ każdy czarny węzeł może wchłaniać czerwone dzieci - z 2 razy wyższego drzewa). Zatem:

$$h \leqslant 2\log_2(n+1) \tag{11.2.5}$$

W Javie 8 HashMapy były implementowane jako drzewa czerwono-czarne.

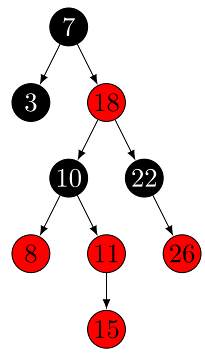
Modyfikacja drzewa czerwono-czarnego obejmuje operacje różne od BST. Drzewo będzie wtedy zmieniać swoją strukturę aby zachować czarną wysokość - stąd również nazwa - self-balancing trees. Operacje niemodyfikujące drzewa czerwono-czarnego są tożsame z operacjami na drzewach BST.

11.3 Insert w Red Black Trees

RB_Insert(T,z)

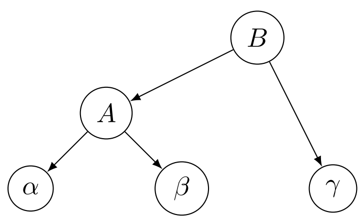
1. Wstawiamy węzeł z do drzewa T tak jak w przypadku BST
2. Ustawiamy kolor węzła z na czerwony
3. Naprawiamy drzewo T - wywołujemy funkcję RB_Fixup(T,z)

Chcemy umieścić nowy węzeł (15) w drzewie czerwono-czarnym.

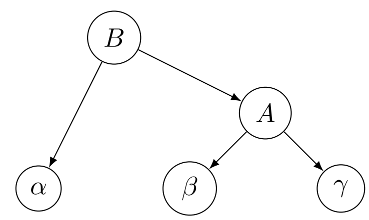


Operacje używane w procedurze Fixup

1. `recolor` - $O(1)$ - zmiana koloru węzła - z czerwonego na czarny, z czarnego na czerwony
2. `rotate` - $O(1)$ - rotacja węzła x w lewo lub w prawo.



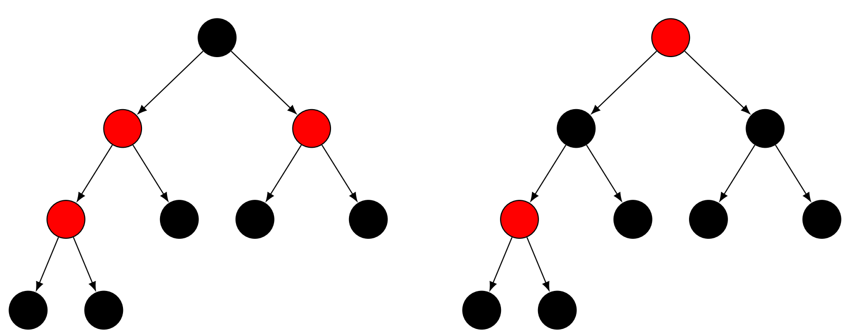
Before Right Rotation



After Right Rotation

$$(\forall a \in \alpha b \in \beta c \in \gamma)\,(a \leqslant B \leqslant bleqA \leqslant c) \tag{11.3.1}$$

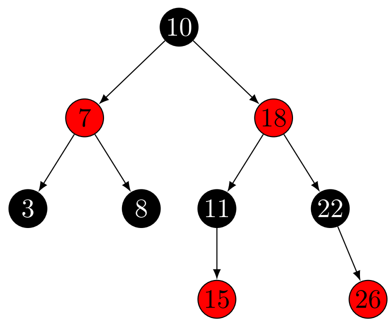
RB_Fixup(T,z)
Case 1 - z jest czerwony, ojciec x, wujek $w = z.p.p \rightsquigarrow$ inne dziecko, $x = z.p$ jest czerwony oraz w-czerwony.



Case 2 - z - czerwony, x - czarny, w - czarny, zachodzi zig-zag
Case 3 - z - czerwony, x - czarny, w - czarny, bez zig-zag

Poddałem się z rysowaniem tego w tikz

Ostatecznie



Wnioski

- Fixup - $O(\log n)$
- Insert - $O(\log n)$
- RB_Insert - $O(\log n)$

Inne drzewa od Red Black Trees to drzewa AVL (różnica stałych przy logarytmach), self-leaning left trees, skip list.

Następny wykład - kolejna struktura implementująca interfejs set