Logika i struktury formalne

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Rachunek zdań - logika bez kwantyfikatorów

$$(p \wedge q) \implies (r \vee \neg q)$$

1.1 Konstrukcja języka rachunku zdań

- Mamy ustaloną rodzinę zmiennych zdaniowych.
  $P = \{p, q, r, s\}$ lub $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$
- Mamy ustaloną rodzinę spójników logicznych.
  $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
- Mamy (,) - nawiasy
- Mamy symbole $\top, \bot$ - prawda, fałsz
- Konstrukcja języka $\mathcal{L}(\mathcal{P})$

1. Zmienne zdaniowe oraz symbole $\top, \bot$ są zdaniami (języka predykatów $\mathcal{L}(\mathcal{P})$)
2. Jeśli φ, ψ są zdaniami, to również napisy $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi)$ są zdaniami.
3. Wyrażenie φ nazywamy zdaniem jeśli w skończonej liczbie kroków może być skonstruowane za pomocą reguł (1) i (2)

Przykład 1.1.1. Niech $P = p, q, r$. Przykłady zdań w $\mathcal{L}(\mathcal{P})$:

- $p; q; r; \top; \bot$
- $(p \wedge \top), (p \vee q), (p \implies \top)$
- $(r \wedge (p \vee q)), ((p \vee q) \vee (p \implies \top))$

Przykład 1.1.2. Rozważmy następujące działanie: $x = (10 \cdot 8)/(7 \cdot 3)$. Skąpilowane C zwraca 3.

Definicja 1.1.1. Jeśli φ jest z $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, to wtedy φ ma parzystą liczbę nawiasów.

Dowód. Niech X oznacza kolekcje napisów o parzystej liczbie nawiasów.

1. zmienne zdaniowe - 0 nawiasów, $\top, \bot$
2. załóżmy, że φ, ψ są w X. Wtedy
   $(\varphi \wedge \psi), ...(\varphi \iff \psi)$ są w X.

$\square$

1.2 Zadanie

Naucz się alfabetu greckiego.

SYNTAKTYKA - badanie wyrażeń.

SEMANTYKA - badanie wartości.

1.3 Wartości logiczne

- Wartości logiczne: $0, 1$ - fałsz, prawda
- Funktory logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
- Tablice prawdy:

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \implies Y$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Definicja 1.3.1. Waluacją nazywamy dowolne przyporządowanie π, które zmiennym zdaniowym przyporządkowuje wartości $0, 1$.

Przykład 1.3.1. Rozważmy następujący przykład waluacji π:

$$P = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$$
$$\pi = \{0, 0, 0, ...\}$$
$$p = \{0, 1, 0, 1, ...\}$$

$val(\pi : \text{waluacja}, \varphi : \text{zdanie})$
LOGICAL $0 \vee 1$

Przykład 1.3.2. Dla $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$:

- $val(\pi, p_i) = \pi(p_i)$
- $val(\pi, \top) = 1$
- $val(\pi, \bot) = 0$
- $val(\pi, (\varphi \wedge \psi)) = val(\pi, \varphi) \wedge val(\pi, \psi)$
- $val(\pi, \neg\varphi) = \neg val(\pi, \varphi)$

Definicja 1.3.2. φ jest tautologią, jeśli dla dowolnej waluacji π mamy $val(\pi, \varphi) = 1$.

$(\models \varphi)$ - Zapis

2 Wykład drugi

... tbd

3 Wykład trzeci

... tbd

4 Wykład czwarty

4.1 Własności implikacji

$\models ((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$ - przechodniość implikacji
Weźmy dowolną waluację π oraz załóżmy, że $val(\pi, \varphi) = 0$, wtedy:

$$val(\pi, ((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)) = 1$$
$$val(\pi, p \implies r) = 0$$

Wtedy:

- $\pi(p) = 1, \pi(r) = 0$
- $val(\pi, p \implies q) = 1$ oraz $val(\pi, q \implies r) = 1$
- $\pi(q) = 1$
- $\pi(r) = 1$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem tautologia zachodzi.

Własności

1. $\models (p_1 \implies p_2) \wedge (p_2 \implies p_3) \wedge (p_3 \implies p_4) \implies (p_1 \implies p_4)$
2. $\models (p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ <- Rozumowanie nie wprost
   D-d. $(\neg q) \implies (\neg p) \equiv (\neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv (q \vee \neg p))$
   $\equiv (\neg p \vee q) \equiv (p \implies q)$
3. $\models ((p \implies q) \wedge (q \implies p) \iff (p \iff q))$, czyli
   $((p \implies q) \wedge (q \implies p) \equiv (p \iff q))$

4.2 Rozumowania matematyczne

1. Rozumowania wprost.
   P. Jeżeli $a, b \in \mathbb{Z}$ są parzyste to $a + b$ jest parzyste.
   D-d. Załóżmy, że $a = 2k \wedge b = 2l$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$
   $a + b = 2k + 2l = 2 \cdot (k + l)$, więc $a + b$ jest parzyste, bo $k + l \in \mathbb{Z}$ $\square$
2. Rozumowania nie wprost. $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$
   P. Jeśli $\frac{x+y}{2} \geqslant a$, to $x \geqslant a \vee y \geqslant a$
   D-d. $\frac{x+y}{2} \geqslant a \implies x \geqslant a \vee y \geqslant a$
   Mamy $\neg(x \geqslant a \vee y \geqslant a) \equiv (x \leqslant a \wedge y \leqslant a)$
   $x < a \wedge y < a$
   $x + y < 2a \equiv \frac{x+y}{2} < a \equiv \neg(\frac{x+y}{2} \geqslant a)$ $\square$

(Korzystając z własności $\neg(x \geqslant a) \equiv (x < a)$).

P. Pracujemy w $\mathbb{R}$. Jeśli $x \in \mathbb{R}^+, a, b \in \mathbb{R}^+$ oraz $a \cdot b = x$
to $a \leqslant \sqrt{x} \vee b \leqslant \sqrt{x}$.
D-d. $\neg(a \leqslant \sqrt{x} \vee b \leqslant \sqrt{x}) \equiv (a > \sqrt{x} \wedge b > \sqrt{x})$
$a \cdot b > \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$
$a \cdot b \neq x \quad \square$

P. Jeśli liczba $p \in \mathbb{N}$ nie jest pierwsza, to istnieje $d \leqslant \sqrt{p}$, taka że $d|p$.

3. Rozumowanie przez rozważenie przypadków. $\models ((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q) \implies q)$
P. Dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzi $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ $(\equiv q)$

   (a) $p =$ "$x + y \geqslant 0$" $\implies |x+y| = x + y \leqslant |x| + |y|$
   (b) $p =$ "$x + y < 0$" $\implies |x+y| = -x - y = |-x| + |-y| \leqslant |x| + |y|$

   Zachodzą wszystkie przypadki zatem teza jest prawdziwa. $\square$

4.3 Rozważania cykliczne

Twierdzenie 4.3.1. Następujące zdania z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 są równoważne:
$\models (p_1 \implies p_2) \wedge (p_2 \implies p_3) \wedge (p_3 \implies p_1) \implies (p_1 \iff p_2) \wedge (p_2 \iff p_3) \wedge (p_3 \iff p_1)$
Narysuj kółeczko strzałek z $(p_1, \ldots, p_3)$...
Narysuj kółeczko strzałek z $(p_1, \ldots, p_4)$...
Korzystamy następnie z przechodniości implikacji.
Oszczędność n - implikacji, zamiast $\frac{n(n-1)}{2}$ implikacji.

4.4 Pojęcie dedukcji

CEL. "Ze zdań $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mogę wywnioskować ψ
P. Ze zdań $p, p \implies q, q \implies r$ mogę wywnioskować r

Definicja 4.4.1. Niech $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ będą zdaniami $R.Z.$

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$$

Jeśli dla dowolnej waluacji π, że:

$$val(\pi, \varphi_1) = ... = val(\pi, \varphi_n) = 1$$

Mamy również:

$$val(\pi, \psi) = 1$$

Przykłady P. Rozważmy następujący przykład:
$\{p\} \models p$
$\{p\} \models p \vee q$
Weźmy waluację π taką, że $val(\pi, p) = \pi(p) = 1$, wtedy:
$val(\pi, p \vee q) = val(\pi, p) \vee val(\pi, q) = 1 \vee val(\pi, q) = 1$

P. $\{p \wedge q\} \models p$
Bierzemy π taką, że $val(\pi, p \wedge q) = 1$, wtedy:
$1 = val(\pi, p) \wedge val(\pi, q)$, więc $val(\pi, p) = 1$

Twierdzenie 4.4.1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, czyli $\models (\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i) \implies \psi$
D-d. Załóżmy, że $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$. Weźmy dowolną waluację π

1. $val(\pi, (\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i)) = 0$, wtedy:
   $val(\pi, (\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i \implies \psi)) = val(\pi, (\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i)) \implies val(\pi, \psi) = 0 \implies val(\pi, \psi) = 1$
2. Załóżmy, że $val(\pi, (\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i)) = 1$, wtedy:
   $val(\pi, \varphi_1) = ... = val(\pi, \varphi_n) = 1$, ale:
   $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, więc $val(\pi, \psi) = 1$

2 do 1 Załóżmy, że $(\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i) \implies \psi$
Rozważmy dowolną π taką, że $val(\pi, \varphi_1) = ... = val(\pi, \varphi_n) = 1$
Wtedy $(\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i) = 1$
Ale $1 = val((\wedge_{l=1}^{n} \varphi_i) \implies \psi) = val(\pi, \wedge_{l=1}^{n} \varphi_i) \implies val(\pi, \psi)$
Zatem $val(\pi, \psi) = 1$ $\square$

Semantyczna dedukcja $\models$

Definicja 4.4.2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ jest sprzeczny jak:
$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \bot$

Wnioski:
P. $\{p, \neg p\} \models \bot (\equiv \models (p \wedge \neg p \implies \bot))$
W. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ - sprzeczny. Wtedy dla dowolnego zdania ψ mamy:
$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$

Uwaga Założmy, że $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \alpha$
Wtedy dla dowolnego ψ następujące wzory są równoważne:

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha\} \models \psi$
3. (1) $\implies$ (2) - trywialne
4. (2) $\implies$ (1)

Przykład 4.4.1. Reguła rezolucji:
$\{\psi \vee \alpha, \neg\psi \vee \beta\} \models \alpha \vee \beta$ równoważnie: $\frac{\{\psi \vee \alpha, \neg\psi \vee \beta\}}{\alpha \vee \beta}$
D-d: Załóżmy waluację π taką, że $val(\pi, \varphi \vee \alpha) = val(\pi, \neg\varphi \vee \beta) = 1$

1. $val(\pi, \varphi) = 1$, wtedy:
   $1 = val(\pi, \neg\varphi \vee \beta) = val(\pi, \neg\varphi) \vee val(\pi, \beta) = 0 \vee val(\pi, \beta) = val(\pi, \beta)$
2. $val(\pi, \varphi) = 0$, wtedy:
   $1 = val(\pi, \varphi \vee \alpha) = val(\pi, \varphi) \vee val(\pi, \alpha) = 0 \vee val(\pi, \alpha) = val(\pi, \alpha)$
   $val(\alpha \vee \beta) = 1$ $\square$

Przykład 4.4.2. Dowodzenie za pomocą metody rezolucji:
$\{p \implies q, q \implies r, r \implies s\} \models p \implies s$
Przekształćmy zdania $\{(\neg p \vee q), (\neg q \vee r), (\neg r \vee s)\}$

1. $\neg p \vee q, \neg q \vee r \implies \neg p \vee r$
2. $\neg p \vee r, \neg r \vee s \implies \neg p \vee s \equiv p \implies s$