Report

利用蒙特卡洛方法实现渲染方程

1. 摘要

本文主要介绍了利用蒙特卡洛方法求解渲染方程。将渲染方程分解成直接光与间接光；对直接光进行蒙特卡洛重要性采样，采用Alias算法加速采样时间；对间接光递归求解，并讨论了对每个像素不同采样次数（SPP）的结果。

2. 原理

2.1 渲染方程

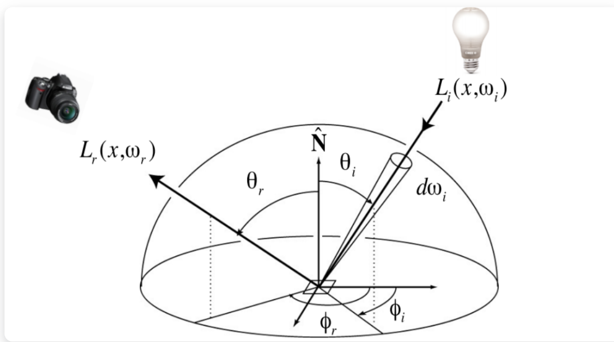

Figure 1:Rendering

$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o) = L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o) + \int_{\mathcal{H}^2(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}))} f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i \tag{1}$$

其中

> - L_o 是出射 radiance
> - $\boldsymbol{p}$ 是渲染点
> - $\boldsymbol{\omega}_i$ 是入射光方向
> - $\boldsymbol{\omega}_o$ 是出射光方向
> - L_e 是自发光 radiance
> - $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ 为 $\boldsymbol{p}$ 处法向
> - $\mathcal{H}^2(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}))$ 是法向 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ 所在半球
> - f_r 是双向散射分布函数（bidirectional scattering distribution function， BRDF)
> - L_i 是入射 radiance
> - $\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})}$ 是 $\boldsymbol{\omega}_i$ 与 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ 的夹角

记反射方程为

$$L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=\int_{\mathcal{H}^2(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}))} f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})}\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i \tag{2}$$

则可以将渲染方程改写为：

$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)+L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$$

由于 $L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$ 是物体自发光强度，可以作为已知量，我们假设除了光源外，其他物体不会自发光，所以只要重点关注反射光强 $L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$ 即可，即设

$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o) \tag{3}$$

在（2）式中，反射光 $L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$ 实际上是来自两部分：

- 来自光源的直接入射，称为**直接光**，记作 $L_{\text{dir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$；
- 来自其他物体反射的间接光，称作**间接光**，记作 $L_{\text{indir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$

$$L_o=L_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=L_{\text{dir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)+L_{\text{indir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o) \tag{4}$$

上式中 $-\boldsymbol{\omega}_i$ 是 L_{dir} 和 L_{indir} 的出射方向

2.2 直接光

2.2.1 光源光照方程

$$L_{\text{dir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=\int_{\mathcal{H}^2(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}))} L_e(\boldsymbol{p},-\boldsymbol{\omega}_i)f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)\cos\theta\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i \tag{5}$$

对于光源 L_e 来说，出射光方向 $\boldsymbol{\omega}_{e,o}=-\boldsymbol{\omega}_i$

其中 $\boldsymbol{p}$， $\boldsymbol{\omega}_o$ 和 $\boldsymbol{\omega}_i$ 可用三点确定，如下图所示

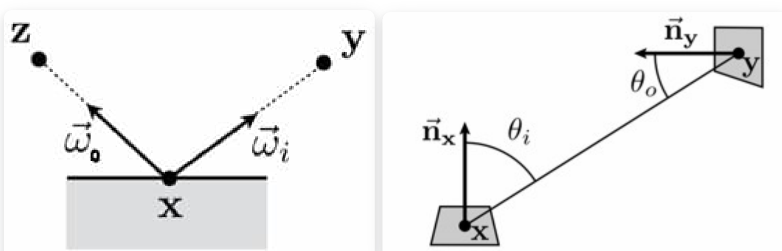

Figure 2

> 注：图中 $\boldsymbol{x}$ 即为 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{y}$ 即为 $\boldsymbol{p}'$

如果我们只是在原光照点 $\boldsymbol{p}$ 处积分，我们采样的是半球上立体角，这样会有大量的方向的光学被浪费。所以我们应该直接在光源所在区域上积分，即积分限：从半球变成了光源的表面积！

$$L_{\text{dir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=L_{\text{dir}}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z})=\int_A f_r(\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z})L_e(\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})\mathbb{d}A(\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

其中积分域 A 为场景中所有的面积，但只有光源处 $L_e(\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x})\neq 0$

根据**Mento Carlo 积分法**，得到

$$L_{\text{dir}}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}) = \sum_{A(i,j)} \frac{f_r(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}) L_e(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})}{p(i,j)} \tag{7}$$

其中 $p(i,j)$ 是对光源区域 A 处的**均匀采样。**

由(5)、(6)式积分变换得：

$$\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i = \frac{|\cos\theta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2} \mathbb{d}A(\boldsymbol{y})$$

其中 $\theta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}$ 是方向 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})$ 的夹角，引入几何传输项（两点间的"传输效率"）

$$G(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) = V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) \frac{|\cos\theta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}||\cos\theta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}$$

> 其中 $V(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})$ 是可见性函数，当 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间无阻隔时为 1，否则为 0
>
> G 是对称函数，即 $G(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x})$

如果记光源数 N_e，场景中的光源集为 $\{L_{e_i}\}_{i=1}^{N_e}$ ，对应的区域集为 $\{A(L_{e_i})\}_{i=1}^{N_e}$，则可写为

$$\begin{aligned} L_{\text{dir}}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}) &= \sum_{k=1}^{N_e} \int_{A(L_{e_k})} f_r(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}) L_e(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}) \mathbb{d}A(\boldsymbol{y}) \\ &= \sum_{i=k}^{N_e} \sum_{A_k(i,j)} \frac{f_r(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}) L_e(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y})}{p_k(i,j)} \end{aligned} \tag{8}$$

2.2.2 环境光贴图重要性采样

Monte Carlo 重要性采样

直接光源除了从我们给定的灯泡中发出，还可以来自周围的**环境光。**而当对环境光进行采样时，如果我们对环境光的所有区域进行平均采样，那么结果会所损失，应该进行改进的是对光强较大的区域重点采样，故应该采取**Monte Carlo重要采样**的方法，如下图所示

Figure 3: MC Important Sampling

所谓重要采样，即选择的抽样概率密度大致符合待抽样的分布，对于给定的环境光贴图，设采样为像素点 $\boldsymbol{y} = (i,j)$,那么该点的概率为 $p_{img}(i,j)$

$$p_{img}(i,j) = \frac{L_e(i,j)}{\sum_{k,l} L_e(k,l)} \tag{8}$$

相关概率关系如下

$$
\begin{aligned}
1=\int_I p_{\text{img}}(i,j)\mathbb{d}i\mathbb{d}j &= \int_\Theta p_{\text{img}}(\theta,\phi)\left|\frac{\partial(i,j)}{\partial(\theta,\phi)}\right|\mathbb{d}\theta\mathbb{d}\phi \\
&= \int_A p_{\text{img}}(A)\left|\det J_A\Theta\right|\left|\frac{\partial(i,j)}{\partial(\theta,\phi)}\right|\mathbb{d}A \\
&= \int_{\mathcal{H}^2} p_{\text{img}}(\boldsymbol{\omega}_i)\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}\right|\left|\det J_A\Theta\right|\left|\frac{\partial(i,j)}{\partial(\theta,\phi)}\right|\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i \\
&= \int_{\mathcal{H}^2} p(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i
\end{aligned}
$$

其中根据 *Figure 2* 以及环境贴图对应关系得

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}{\mathrm{d}A}\right| &= \frac{|\cos\theta_o|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2} = \frac{1}{R^2} \\
|\det J_A\Theta| &= \frac{1}{R^2\sin\theta} \\
\left|\frac{\partial(i,j)}{\partial(\theta,\phi)}\right| &= \frac{wh}{2\pi^2}
\end{aligned}
$$

其中：

> - $i\in[0,w]$，w 是图像宽度
> - $j\in[0,h]$，h 是图像高度
> - $u,v\in[0,1]$，且 $u=i/w$，$v=j/h$
> - $\theta\in[0,\pi]$，$\theta=\pi(1-v)$
> - $\phi\in[0,2\pi]$，$\phi=2\pi u$
> - $\boldsymbol{\omega}_i=(\sin\theta\sin\phi,\cos\theta,\sin\theta\cos\phi)$

所以

$$
p(\boldsymbol{\omega}_i)=\frac{wh}{2\pi^2\sin\theta}p_{\text{img}}(i,j) \tag{9}
$$

此时 *equation 6*可改写为：

$$
\begin{aligned}
L_{\text{dir}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o) &= \int_A f_r(\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z})L_e(\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x}\leftrightarrow\boldsymbol{y})\mathbb{d}A(\boldsymbol{y}) \\
&= \int_{\mathcal{H}^2}\frac{f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})}}{p(\boldsymbol{\omega}_i)}\times p(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbb{d}\boldsymbol{\omega}_i \\
&= \int_I\frac{f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})}}{p(\boldsymbol{\omega}_i)}\times p_{\text{img}}(i,j)\mathbb{d}i\mathbb{d}j \\
&= \sum_{I_{i,j}}\frac{f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_e(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_{\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})}}{p_{\text{img}}(i,j)}\times\frac{2\pi^2\sin\theta}{wh}
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中求和是按照重要性采样得到的分布 $p_{img}(i,j)$ 去离散采样。

Alias Method

如果环境光贴图的大小是 $m = width \times height = n \times n$ 个像素点，那么常规的离散采样法抽样得到一个采样点的平均时间复杂度为 $O(m)$,而Alias Method 可以使得离散采样的时间复杂度为 $O(1)$。具体操作如下

Initialize Table

0. 假设初始概率分布表为 $U(k = i * n + j) = p(i, j) * m$，别名表 $K_k = k$，其中 $k \in [0, m)$,初始化两个队列A、B分别存储 U_k 小于1的节点标号，和 U_k 大于1的节点标号
1. 从A、B中各出队列一个值 $a = A.pop()$、$b = B.pop()$
2. 修改概率分布表，$U(b) = U(b) - (1 - U(a))$；修改别名表，$K_k = b$
3. 如果 $U(b) < 1$，则向A队列加入b元素 $A.push(b)$

   如果 $U(b) > 1$，则向B队列加入b元素 $B.pushback(b)$
4. 如果 A,B为空，则结束；否则返回 step 1

Sample Operation

1. 生成两个随机数 $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1)$
2. 设 $k_1 = \lfloor m * \xi_1 \rfloor \in \{0, 1, 2, 3, \ldots m - 1\}$
3. 如果 $\xi_2 \leq U(k_1)$,则采样点$(i，j) = (k_1 \% n, k_1 / n)$

   否则令 $k_2 = K(k_1)$ 采样点 $(i, j) = (k_2 \% n, k_2 / n)$

该算法的采样时间复杂度为 $O(1)$

2.3 间接光

2.3.1 间接光照方程

除了要计算直接光照以外，还要计算**间接光照**

$$L_{\text{indir}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \int_{\mathcal{H}^2(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}))} L_r(\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{\omega}_i) f_r(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_o) \cos\theta \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i \tag{11}$$

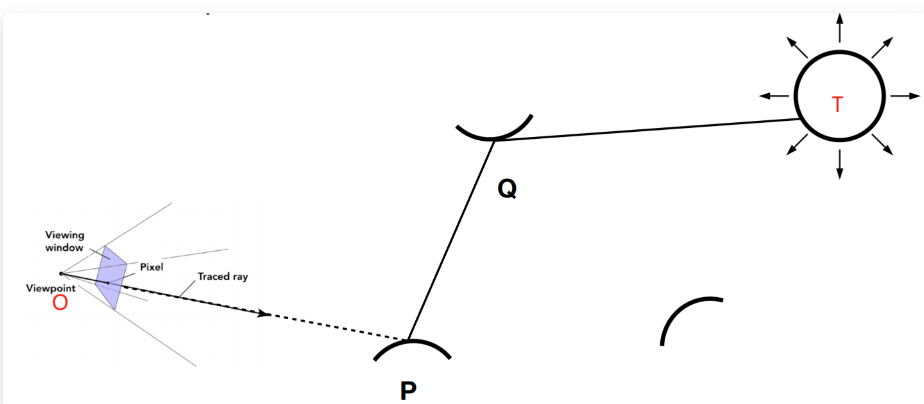

Figure 4: Indirect Light

如果回顾一下 *equation 4* 就会发现**间接光照要递归!**

设摄像机的位置为O点，光源为T点，我们想要计算P点射到O点的Radiance，我们Path Tracing在OPQ这段路径上

- 如果没有物体相遇，则递归结束，$L_o = L_r = L_{\text{dir}}$
- 如果有物体相遇，则直接把Q看做光源，那么对OPQ段**解第一次渲染方程**，方程中被积函数的 P点入射Radiance **Li(p,ωi)** 是未知的，而这个P点入射光 **Li** 又是Q点的出射光 **Lo** ，则可以在PQT上解**第二个渲染方程**。一直递归下去，直到遇到环境光或者光源。

2.3.2 指数爆炸问题

1. 随着弹射次数的增多，打出的光线数量会指数级上升，设N是对入射方向的采样次数, 那么随着我们递归深度的增加，递归栈将会指数增长

   解决办法： 当且仅当N = 1时，递归不会出现指数爆炸的现象， 所以我们并不是选择N个方向的入射光，而是**随机**选1条入射光

2. 在自然界随着光照弹射实际上是无限多次的，假如我们限定弹射次数必然损失能量。不想无限递归又不想损失能量，该怎么办呢?

   解决办法： 俄罗斯轮盘赌 RussianRoulette(RR)

   - 我们的目标是求着色点的着色结果，即该点到相机方向的**Lo**
   - 假设我们手动设置一个概率**P** （0 < P < 1）
     以P概率继续发射一条光线，返回Lo除以P之后的着色结果：**Lo / P**
     以1-P的概率不发射光线，返回**0**
   - 最终计算离散型随机变量的期望 $E = P \times (Lo/P) + (1 - P) \times 0$

3. 由于我们只随机采样1条光线，会产生非常多的噪点。因为有些着色点计算时，随机采样的某个入射光方向wi并没有击中光源，甚至也没有击中其他物体。

   解决办法： 增大spp，即每个像素追踪更多的路径，然后取平均值。所以呢只要用足够多的path，就能够确保有更大的几率击中有效光源或物体，计算出接近正确的着色。

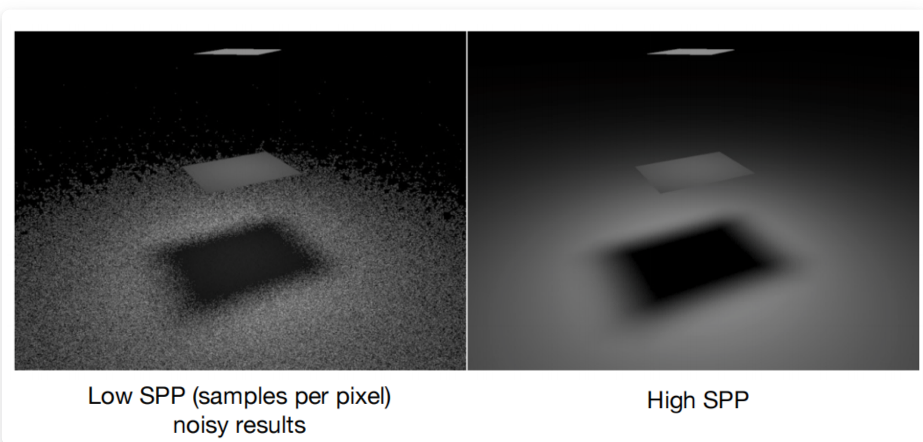

Figure 4: Compare spp

2.4 算法

至此，我们已经得到了所有关于求解 *equation 1*的算法，伪代码形式如下

```
Shade(p,wo)
{
    // 1、Direct illumination from light sources and ambient light.
    //pdf_light = 1 / A
    Uniformly sampling light sources by randomly selecting a point on the surface of the light source.x';
    shoot a ray form p to x';
    L_dir = 0.0;
    if (the ray is not blocked in the middle)   // if light is blocked
        if (the ray from source light)
            L_dir += L_e * f_r * cosθ * cosθ' / |x' - p|^2 / pdf_light;//2.2.1
        else if(the ray from environment backgroud)
            L_dir += L_e * f_r * cosθ / pdf_env * (2*pi*2pi*sinθ)/(w*h)
    //2、Indirect illumination from other objects.
    L_indir = 0.0;
    Test Russian Roulette with probability P_RR;
    //pdf_hemi = 1 / 2π
    Uniformly sample the hemisphere toward wi;
    Trace a ray r(p,wi);
    if (ray r hit a non-emitting object at q)
        L_indir = shade(q, -wi) * f_r * cosθ / pdf_hemi / P_RR;
    return L_dir + L_indir;
}
```

3 Result

3.1 低spp

我们在低spp(spp=4)情况下模拟

3.1.1 只有直接光

首先只考虑直接光照模型，即

$$L_o = L_{dir}$$

得到一下结果

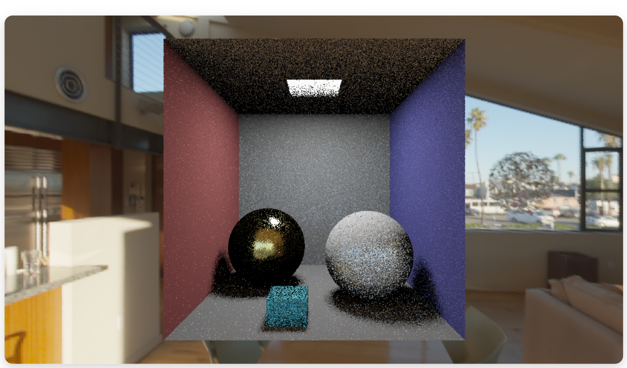

Figure 5: Only direct light

结果分析：仅加入直接光照的效果，对于高反射率的金属球效果不好，但已经基本能展示图像了

3.1.2 全局光照

现在我们加上间接光照，即

$$L_o = L_{\text{dir}} + L_{\text{indir}}$$

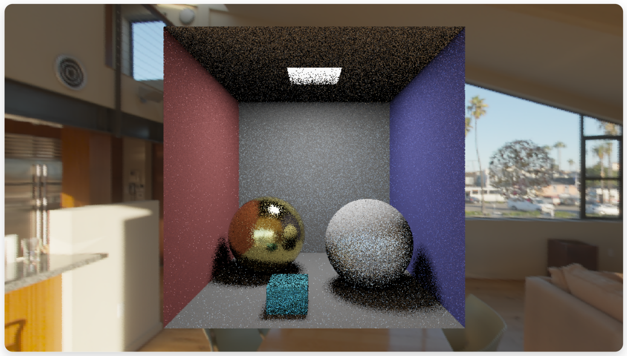

Figure 6: Global Illumination

结果分析：加入间接光照，在全局光照模型下金属球表现得更加真实，可以明显反射出其他物体的图案

3.1.3 Monte Carlo重要性采样

考虑对环境光的重要性采样

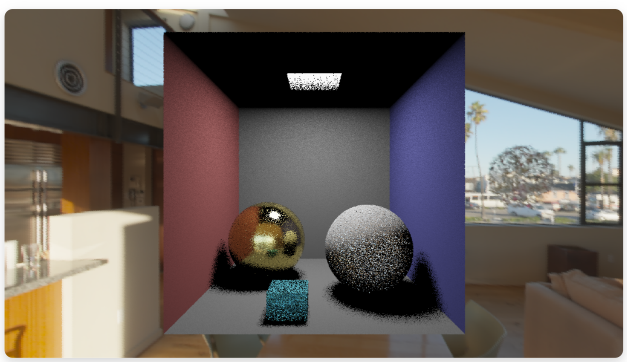

Figure 7: Global Illumination by important sampling

结果分析：当对环境光照进行重要性采样时，图像的噪点有所下降，而图像的阴影展现的更好

3.2 高spp

最终我们增大spp个数(spp=1024)，显示结果

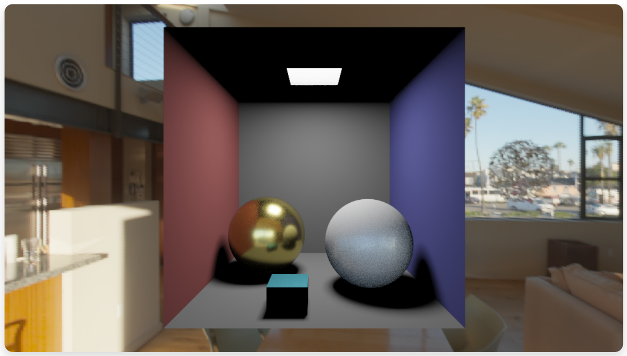

Figure 8: Global Illumination with high spp

结果分析：当增多追踪的光学个数后，场景已经十分逼真了，成功的渲染出图像

4 Summary

- 本文首先分析了渲染方程的原理，对渲染方程进行合理的分解
- 然后，介绍了如何采用Mento Carlo 积分法进行采样，即对直接光照采样区域变化和重要性采样的方法；并借助Alias算法实现抽样效率的提高。通过实验结果可以看出重要性采样对提高图像质量具有很好的作用。
- 接着，阐述了间接光照递归求解的方法，并且为防止指数爆炸的问题提出一系列方法
- 最终，在提高每个像素点采样数后，图像已经能够成功渲染出结果了。