Ćwiczenie 4. Wyznacznik i odwracania macierzy (metoda LU)

Program Ćwiczenia

W `MacierzDzialania.cs` należy uzupełnić metodę przedstawiania danej macierzy jako iloczynu dwóch macierzy trójkątnych według wzorów podanych w punkcie 1 niniejszej instrukcji. Wykonując te zadania proszę wykorzystać uprzednio zdefiniowane metody klasy znane z poprzednich zajęć metody i konstruktory tej klasy.

1. **Rozkład na czynniki trójkątne (metoda dekompozycji LU)**
   Metoda ta polega na rozłożeniu macierzy **A** na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: **L** - macierz trójkątna dolna z jedynkami na przekątnej głównej, **U** - macierz trójkątna górna; Metoda ta polega na rozłożeniu macierzy **A** na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: **L** - macierz trójkątna dolna z jedynkami na przekątnej głównej, **U** - macierz trójkątna górna;

   $$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

   Elementy macierzy **L** i **U** określone są wzorami:

   $$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} u_{kj}, \qquad i \leqslant j,$$
   $$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{jk} u_{ki})/u_{ii}, \qquad i < j.$$

   Należy zwrócić uwagę na fakt, że poszczególne elementy macierzy **L** i **U** obliczane powinny być na przemian, a nie w osobnych pętlach.

   Uzupełnij metodę `LU` klasy `Macierz` tak, aby realizowała ona rozkład macierzy na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych. W pliku "*tabA.txt*" zdefiniowana została macierz **A**:

   $$\det(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0,6 & 7,5 & -3 \\ 0,4 & 0,5 & 4 & -8,5 \\ 0,3 & -1 & 3 & 5,2 \\ 1 & 0,5 & -0,1 & 0,5 \end{bmatrix},$$

   a następnie wyznacz jej rozkład.

2. **Wyznacznik macierzy**
Znając rozkład macierzy **A**, można łatwo wyliczyć jej wyznacznik:

$$\det(A) = \det(U).$$

Ponieważ **U** jest macierzą trójkątną górną, jej wyznacznik to iloczyn wszystkich elementów na przekątnej głównej. Jeżeli rozkład LU został poprawnie zaimplementowany, wówczas wyliczony w programie wyznacznik będzie zgadzał się z wartością wyznaczoną z definicji.

3. **Macierz odwrotna**
Algorytm odwracania macierzy w oparciu o rozkład LU przebiega następująco:
I. Przeprowadzić rozkład **A=LU**.
II. Rozwiązać układ równań $\mathbf{LUx}^{(\mathrm{k})}=\mathbf{e}^{(\mathrm{k})}$ **k=1,...,n**.
Obliczone wektory $\mathbf{x}^{(\mathrm{k})}$ ustawione w odpowiedniej kolejności tworzą macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.
W programie przyjeto założenie, iż macierz wejściowa została dobrana w taki sposób, że przy rozkładzie na czynniki trójkątne wszystkie kolejne elementy u_{ii} są różne od zera, co pozwoli uniknąć przestawienia wierszy w macierzy wynikowej.

Rozwiązanie układu równań z punktu II ma następującą postać:

(a) $Ly^{(k)} = e^{(k)}$

$$y_{1j} = e_{1j}$$

$$y_{ij} = e_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik} y_{kj}, \qquad i = 2, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n;$$

(b) $Ux^{(k)} = y^{(k)}$

$$x_{nj} = y_{nj}/u_{nn}$$

$$x_{ij} = (y_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} x_{kj} u_{ik})/u_{ii}, \qquad i = n-1, \dots, 1; \quad j = 1, \dots, n.$$

Znajdź $\mathbf{A}^{-1}$ - odpowiedni program został już napisany. Wyliczona macierz $\mathbf{A}^{-1}$ zostanie dla sprawdzenia przemnożona przez macierz **A**. Otrzymanie macierzy jednostkowej oznacza prawidłowy wynik.