

Algorithmen und Datenstrukturen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Gedächtnisstütze

Author: Ruben Deisenroth

Helper und Mitwirkende: J. Milkovits

Stand: 21. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	3
1.1 Probleme in der Informatik	3
1.2 Definitionen für Algorithmen	3
1.3 Definitionen für Datenstrukturen	4
1.4 Pseudocode-Konventionen	4
1.5 Weitere wichtige Definitionen	4
2 Sortieren	5
2.1 Einführung	5
2.2 Arrays	6
2.3 Exkurs: Totale Ordnung	6
2.4 Vergleichskriterien von Suchalgorithmen	6
2.5 Analyse von Algorithmen (I)	7
2.6 Analyse von Algorithmen (II)	8
2.7 Analyse von Algorithmen (III)	9
2.8 Insertion Sort (Sortieren durch Einfügen)	13
2.9 Bubble Sort	15
2.10 Selection Sort	16
2.11 Divide-And-Conquer Prinzip	16
2.12 Merge Sort	17
2.13 Quicksort	19
2.14 Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen	21
3 Grundlegende Datenstrukturen	26
3.1 Stacks	26
3.2 Verkettete Listen	29
3.3 Queues	31
3.4 Binäre Bäume	34
3.5 Binäre Suchbäume	39
4 Advanced Data Structures	44
4.1 Rot-Schwarz-Bäume	44
4.2 AVL-Bäume	46
4.3 Splay-Bäume	48
4.4 Binäre Max-Heaps	50
4.5 B-Bäume	52
5 Randomized Data Structures	55
5.1 Skip Lists	55

5.2 Hashtables	57
5.3 Bloom-Filter	58
6 Graph Algorithms	60
6.1 Graphen	60
6.2 Breadth-First Search (BFS)	61
6.3 Depth-First Search(DFS)	62
6.4 Minimale Spannbäume	65
6.5 Kürzeste Wege in (gerichteten) Graphen	66
6.6 Maximaler Fluss in Graphen	68
7 Advanced Designs	71
7.1 Dynamische Programmierung	71
7.2 Greedy-Algorithmus	75
7.3 Backtracking	77
7.4 Metaheuristiken	79
7.5 Amortisierte Analyse	86
8 NP	90

1 Einführung

1.1 Probleme in der Informatik

Ein **Problem** im Sinne der Informatik:

- Enthält Beschreibung der Eingabe
- Enthält Beschreibung der Ausgabe
- Gibt selbst **keinen** Übergang von Ein und Ausgabe an



ABBILDUNG 1: Modell Problem Informatik

z.B. Finde den kürzesten Weg zwischen 2 Orten

Eine **Probleminstanz** ist eine konkrete Eingabebelegung für die entsprechende Ausgabe gewünscht.
Für das obige Problem wäre das z.B. „Was ist der kürzeste Weg vom Audimax in die Mensa?“

1.2 Definitionen für Algorithmen

„Ein Algorithmus ist eine **endliche Folge** von Rechenschritten, die eine **Eingabe** in eine **Ausgabe** umwandelt.“¹
Anforderungen an Algorithmen:

- Spezifizierung der Ein- und Ausgabe:
 - Anzahl und Typen aller Elemente ist/sind definiert
- Eindeutigkeit:
 - Jeder Einzelschritt ist klar definiert und ausführbar
 - Die Reihenfolge der Einzelschritte ist festgelegt.
- Endlichkeit
 - Notation hat endliche Länge

Eigenschaften von Algorithmen:

- Determiniertheit:
 - Für gleiche Eingabe folgt stets die gleiche Ausgabe (andere Zwischenzustände sind möglich)
- Determinismus:
 - Für die gleiche Eingabe ist die Ausführung und Ausgabe stets identisch.
- Terminierung:
 - Der Algorithmus läuft für jede endliche Eingabe nur endlich lange
- Korrektheit:
 - Der Algorithmus berechnet stets die spezifizierte Ausgabe (falls dieser terminiert).
- Effizienz:
 - Sparsamkeit im Ressourcenverbrauch (Zeit, Speicher, Energie, ...)

¹Quelle: Cormen et al., 4. Auflage

1.3 Definitionen für Datenstrukturen

„Eine Datenstruktur ist eine Methode, Daten **abzuspeichern** und zu **organisieren** sowie den **Zugriff** auf die Daten und die **Modifikation** der Daten zu erleichtern.“²

Datenstrukturen:

- Sind Organisationsformen für Daten
- Beinhalten Strukturbestandteile und Nutzerdaten (Payload)

z.B. Arrays, listen, ...

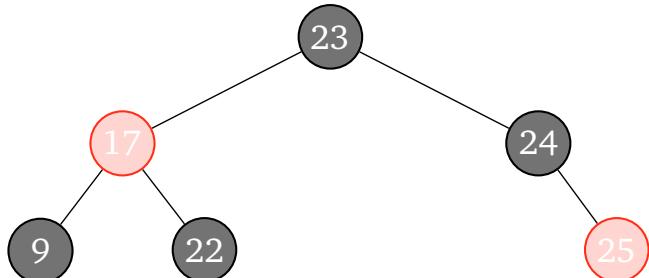


ABBILDUNG 2: Beispiel Datenstruktur (Rot-Schwarz-Baum)

1.4 Pseudocode-Konventionen

- Blöcke werden durch Einrückungen hervorgehoben
- Blockkonstrukte sind „for x to y“, „while“, „repeat-until“ und „if-else“
- Kommentare erhalten das Prädikat „//“
- „i = j = e“ bedeutet, i und j erhalten den Wert von e
- Variablen sind immer lokal
- $A[i]$ bezeichnet das i-te Element im Array A
- $A[i..j]$ Array A im Bereich von $i - j$
- Attribute werden über einen „.“ abgerufen

1.5 Weitere wichtige Definitionen

- **short circuit evaluation (Kurzschlussauswertung)**: Strategie, bei der die Auswertung, nachdem die Gesamtlösung durch einen Teilausdruck eindeutig bestimmt wurde, abgebrochen wird. z.B.: $1+1==2 \quad || \quad 1/0==0 \rightarrow \text{true}$
- **call-by-reference (Referenzparameter)**: Übergeben von Referenz auf ein Objekt. Dadurch sind Änderungen an diesem innerhalb der Routine möglich.
- **call-by-value (Wertparameter)**: Übergeben einer Kopie des Objekts. Das ursprüngliche Objekt kann so nicht mehr verändert werden, jedoch die Kopie. Die referenzen bleiben beim Kopieren gleich (z.B. beiin Linked List)

²Quelle: Cormen et al., 4. Auflage

2 Sortieren

2.1 Einführung

Das Sortierproblem

- Ausgangspunkt: Folge von Datensätzen D_1, D_2, \dots, D_n

D_1	D_2	\dots	D_n
-------	-------	---------	-------

- zu sortierende Elemente heißen auch Schlüssel(werte)
- Ziel: Datensätze so anzuordnen, dass die Schlüsselwerte sukzessive ansteigen (oder absteigen)
- Bedingung: Schlüssel(werte) müssen vergleichbar sein

Durchführung:

- Eingabe: Sequenz von Schlüsselwerten $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Eingabe ist eine **Instanz** des Sortierproblems
- Ausgabe: Permutation $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ derselben Folge mit Eigenschaft $a'_1 \leq \dots \leq a'_n$
- Algorithmus **korrekt**, wenn dieser das Problem für alle Instanzen löst

2.2 Arrays

Reihung (Feld) fester Länge von Daten des gleichen Typs

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	12	47	17	98	72				

ABBILDUNG 3: Beispielhafte Darstellung eines Arrays

- A : Bezeichnung des Arrays mit dem Namen „ A “
- $A[i]$: Zugriff auf das $(i + 1)$ -te Element des Arrays

Beispiel: $A[2] = 17$

⇒ Arrays erlauben effizienten Zugriff auf Elemente: konstanter Aufwand

2.3 Exkurs: Totale Ordnung

Sei M eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq M \times M$ eine binäre Relation auf M .

Das Paar (M, \leq) heißt genau dann eine totale Relation auf der Menge M , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität: $\forall x \in M : x \leq x$
- Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- Totalität: $\forall x, y \in M : x \leq y \vee y \leq x$

Beispiele:

- \leq Ordnung auf natürlichen Zahlen
- Lexikographische Ordnung \leq_{lex} ist eine totale Ordnung

2.4 Vergleichskriterien von Suchalgorithmen

- Berechnungsaufwand: $\mathcal{O}(n)$
- Effizienz: Best Case vs. Average Case vs. Worst Case
- Speicherbedarf:
 - in-Place (in situ): zusätzlicher Speicher von der Eingabegröße unabhängig
 - out-of-place: Speicherbedarf von Eingabegröße abhängig
- Stabilität: stabile Verfahren verändern die Reihenfolge von äquivalenten Elementen nicht
- Anwendung als Auswahlfaktor:
 - Hauptoperationen beim Sortieren: Vergleichen und Vertauschen
 - Anwendung spielt eine enorme Rolle:
 - * Verfahren mit vielen Vertauschungen und wenig Vergleichen, wenn Vergleichen teuer
 - * Verfahren mit wenig Vertauschungen und vielen Vergleichen, wenn Umsortieren teuer

2.5 Analyse von Algorithmen (I)

- **Schleifeninvariante (SIV):**
 - Sonderform der Invariante
 - Am Anfang/Ende jedes Schleifendurchlaufs und vor/nach jedem Schleifendurchlauf gültig
 - Wird zur Feststellung der Korrektheit von Algorithmen verwendet
 - Eigenschaften:
 - * Initialisierung: Invariante ist vor jeder Iteration wahr
 - * Fortsetzung: Wenn SIV vor der Schleife wahr ist, dann auch bis Beginn der nächsten Iteration
 - * Terminierung: SIV liefert bei Schleifenabbruch, helfende Eigenschaft für Korrektheit
 - Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - SIV**
- **Laufzeitanalyse:**
 - Aufstellung der Kosten und Durchführungsanzahl für jede Zeile des Quelltextes
 - Beachte: Bei Schleifen wird auch der Aufruf gezählt, der den Abbruch einleitet
 - Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - Laufzeit**
 - Zusätzliche Überprüfung des **Best Case**, **Worst Case** und **Average Case**
- **Effizienz von Algorithmen:**
 - Effizienzfaktoren
 - * Rechenzeit (Anzahl der Einzelschritte)
 - * Kommunikationsaufwand
 - * Speicherplatzbedarf
 - * Zugriffe auf Speicher
 - Laufzeit hängt von versch. Faktoren ab
 - * Länge der Eingabe
 - * Implementierung der Basisoperationen
 - * Takt der CPU

2.6 Analyse von Algorithmen (II)

- **Komplexität:**

- Abstrakte Rechenzeit $T(n)$ ist abhängig von den Eingabedaten
- Übliche Betrachtungsweise der Rechenzeit ist asymptotische Betrachtung

- **Asymptotik:**

- Annäherung an einer sich ins Unendliche verlaufende Kurve
- z.B.: $f(x) = \frac{1}{x} + x$ | Asymptote: $g(x) = x$ | ($\frac{1}{x}$ läuft gegen Null)

- **Asymptotische Komplexität:**

- Abschätzung des zeitlichen Aufwands eines Algorithmus in Abhängigkeit einer Eingabe
- Beispiel für Umsetzung: **Insertion Sort - Laufzeit Θ**

- **Asymptotische Notation:**

- Betrachtung der Laufzeit $T(n)$ für sehr große Eingaben $n \in \mathbb{N}$
- Komplexität ist unabhängig von konstanten Faktoren und Summanden
- Nicht berücksichtigt: Rechnergeschwindigkeit / Initialisierungsaufwände
- Komplexitätsmessung via Funktionsklasse ausreichend
 - * Verhalten des Algorithmus für große Problemgrößen
 - * Veränderung der Laufzeit bei Verdopplung der Problemgröße

- **Gründe für die Nutzung der theoretischen Betrachtung statt der Messung der Laufzeit**

- *Vergleichbarkeit*
 - * Laufzeit abhängig von konkreter Implementierung und System
 - * Theoretische Betrachtung ist frei von Abhängigkeiten und Seiteneffekten
 - * Theoretische Betrachtung lässt direkte Vergleichbarkeit zu
- *Aufwand*
 - * Wieviele Testreihen?
 - * In welcher Umgebung?
 - * Messen führt in der Ausführung zu hohem, praktischen Aufwand
- *Komplexitätsfunktion*
 - * Wachstumsverhalten ausreichend
 - * Praktische Evaluation mit Zeiten nur für Auswahl von Systemen möglich
 - * Theoretischer Vergleich (Funktionsklassen) hat ähnlichen Erkenntnisgewinn

2.7 Analyse von Algorithmen (III)

- Θ -Notation

- Θ -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben und unten
- Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (\mathbb{N} : Eingabelänge, \mathbb{R} : Zeit)

$$\Theta(g) = \{f : \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)\}$$

↑ ↑
 Funktion f Für alle n größer gleich n_0
 Positive Konstanten $f(n)$ wird von $c_1g(n)$ und $c_2g(n)$
 für hinreichend große n eingeschlossen

- $\Theta(g)$ enthält alle f , die genauso schnell wachsen wie g
- Schreibweise: $f \in \Theta(g)$ (korrekt), manchmal auch $f = \Theta(g)$
- $g(n)$ ist eine asymptotisch scharfe Schranke von $f(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n))$ gilt, wenn $f(n) = O(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$ erfüllt sind

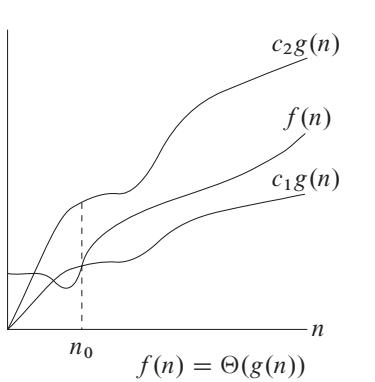


ABBILDUNG 4: Veranschaulichung

* z.B.: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \mid f(n) \in \Theta(n^2)$?

* Aus $\Theta(n^2)$ folgt, dass $g(n) = n^2$

* Vorgehen:

- Finden eines n_0 und c_1, c_2 , sodass
- $c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ erfüllt ist
- Konkret: $c_1 * n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 * n^2$
- Division durch n^2 : $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$
- Ab $n = 7$ positives Ergebnis: $0,0714 \mid n_0 = 7$
- Deswegen setzen wir $c_1 = \frac{1}{14}$
- Für $n \rightarrow \infty$: $0,5 \mid c_2 = 0,5$
- Natürlich auch andere Konstanten möglich

- ***O*-Notation**

- O -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von oben

$$O(g) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

The diagram illustrates two cases of asymptotic behavior:

- Left Case:** A horizontal line segment labeled "Positive Konstanten" is positioned above a vertical double-headed arrow labeled "Funktion f ". This indicates that the function f is bounded from below by a positive constant.
- Right Case:** A horizontal line segment labeled " $f(n)$ wird von $cg(n)$ für hinreichend große n beschränkt" is positioned above a vertical double-headed arrow. Below this arrow, the text "Für alle n größer gleich n_0 " is written, indicating that for all $n \geq n_0$, the function $f(n)$ is bounded above by a constant multiple of $g(n)$.

- $O(g)$ enthält alle f , die höchstens so schnell wie g wachsen
 - Schreibweise: $f = O(g)$
 - $f(n) = \Theta(g) \rightarrow f(n) = O(g) \mid \Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
 - Ist f in der Menge $\Theta(g)$, dann auch in der Menge $O(g)$

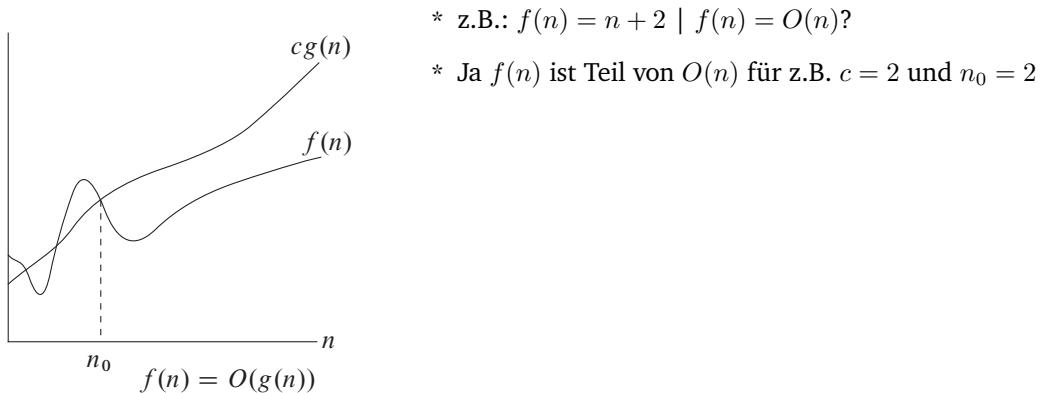


ABBILDUNG 5: Veranschaulichung

- **O -Notation Rechenregeln**

- Konstanten:
 - * $f(n) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ konstante Funktion $\rightarrow f(n) = O(1)$
 - * z.B. $3 \in O(1)$
 - Skalare Multiplikation:
 - * $f = O(g)$ und $a \in \mathbb{R} \rightarrow a * f = O(g)$
 - Addition:
 - * $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \rightarrow f_1 + f_2 = O(\max\{g_1, g_2\})$
 - Multiplikation:
 - * $f_1 = O(g_1)$ und $f_2 = O(g_2) \rightarrow f_1 * f_2 = O(g_1 * g_2)$

- **Ω -Notation**

- Ω -Notation beschränkt eine Funktion asymptotisch von unten

$$\Omega(g) = \{f : \exists c \in \mathbb{R}_{>0}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

Positive Konstanten

$f(n)$ wird von $cg(n)$ für hinreichend große n unten beschränkt

Für alle n größer gleich n_0

- Ω -Notation enthält alle f , die mindestens so schnell wie g wachsen
 - Schreibweise: $f = \Omega(g)$

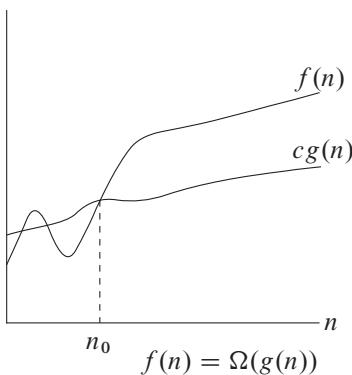


ABBILDUNG 6: Veranschaulichung

- Komplexitätsklassen

- n ist hier die Länge der Eingabe

Klasse	Bezeichnung	Beispiel
$\Theta(1)$	Konstant	Einzeloperation
$\Theta(\log n)$	Logarithmisch	Binäre Suche
$\Theta(n)$	Linear	Sequentielle Suche
$\Theta(n \log n)$	Quasilinear	Sortieren eines Arrays
$\Theta(n^2)$	Quadratisch	Matrixaddition
$\Theta(n^3)$	Kubisch	Matrixmultiplikation
$\Theta(n^k)$	Polynomiell	
$\Theta(2^n)$	Exponentiell	Travelling-Salesman*
$\Theta(n!)$	Faktoriell	Permutationen

- Ausführungszeit, falls eine Operation n genau $1\mu s$ dauert

Eingabegröße n	$\log_{10} n$	n	n^2	n^3	2^n
10	1μs	10μs	100μs	1ms	~1ms
100	2μs	100μs	10ms	1s	~4x10 ¹⁶ y
1000	3μs	1ms	1s	16min 40s	?
10000	4μs	10ms	1min 40s	~11,5d	?
100000	5μs	100ms	2h 46min 40s	~31,7y	?

- Asymptotische Notationen in Gleichungen

- $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$
- $\Theta(n)$ fungiert hier als Platzhalter für eine beliebige Funktion $f(n)$ aus $\Theta(n)$
- z.B.: $f(n) = 3n + 1$

- o -Notation

- o -Notation stellt eine echte obere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
- Außerdem $<$ statt \leq
- z.B.: $2n = o(n^2)$ und $2n^2 \neq o(n^2)$

$$o(g) = \{f : \underbrace{\forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{Gilt für alle Konstanten } c > 0.}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

In O -Notation gilt es für eine Konstante $c > 0$

- ω -Notation

- ω -Notation stellt eine echte untere Schranke dar
- Ausschlaggebend ist, dass es für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gelten muss
- Außerdem $>$ statt \geq
- z.B.: $\frac{n^2}{2} = \omega(n)$ und $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$$\omega(g) = \{f : \forall c \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, 0 \leq cg(n) < f(n)\}$$

2.8 Insertion Sort (Sortieren durch Einfügen)

- **Idee**

- Halte die linke Teilfolge sortiert
- Füge nächsten Schlüsselwert hinzu, indem es an die korrekte Position eingefügt wird
- Wiederhole den Vorgang bis Teilfolge aus der gesamten Liste besteht

- **Code**

```
Insertion-Sort(A)
```

```
1 FOR j = 1 TO A.length - 1
2   key = A[j]
3   // Füge A[j] in die sortierte Sequenz A[0...j-1] ein
4   i = j - 1
5   WHILE i >= 0 and A[i] > key
6     A[i + 1] = A[i]
7     i = i - 1
8   A[i + 1] = key
```

- **Schleifeninvariante von Insertion Sort**

- Zu Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife besteht die Teilfolge $A[0 \dots j-1]$ aus den Elementen der ursprünglichen Teilfolge $A[0 \dots j-1]$ enthaltenen Elementen, allerdings in sortierter Reihenfolge.

- **Korrektheit von Insertion Sort**

- *Initialisierung:*

- * Beginn mit $j=1$, also Teilstück $A[0 \dots j-1]$ besteht nur aus einem Element $A[0]$. Dies ist auch das ursprüngliche Element und Teilstück ist sortiert.

- *Fortsetzung:*

- * Zu zeigen ist, dass die Invariante bei jeder Iteration erhalten bleibt. Ausführungsblock der **for**-Schleife sorgt dafür, dass $A[j-1], A[j-2], \dots$ je um Stelle nach rechts geschoben werden bis $A[j]$ korrekt eingefügt wurde. Teilstück $A[0 \dots j]$ besteht aus ursprünglichen Elementen und ist sortiert. Inkrementieren von j erhält die Invariante.

- *Terminierung:*

- * Abbruchbedingung der **for**-Schleife, wenn $j > A.length - 1$. Jede Iteration erhöht j . Dann bei Abbruch ist $j = n$ und einsetzen in Invariante liefert das Teilstück $A[0 \dots n-1]$ welches aus den ursprünglichen Elementen besteht und sortiert ist. Teilstück ist gesamtes Feld.

- Algorithmus **Insertion Sort** arbeitet damit korrekt.

- Laufzeitanalyse von **Insertion Sort**

Zeile	Kosten	Anzahl	
1	c_1	n	* Festlegung der Laufzeit für jede Zeile
2	c_2	$n - 1$	* Jede Zeile besitzt gewissen Kosten c_i
3	0	$n - 1$	
4	c_4	$n - 1$	* Jede Zeile wird x mal durchgeführt
5	c_5	$\sum_{j=1}^{n-1} t_j$	* $\text{Laufzeit} = \text{Anzahl} * \text{Kosten}$ jeder Zeile
6	c_6	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$	* Schleifen: Abbruchüberprüfung zählt auch
7	c_7	$\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$	* t_j : Anzahl der Abfragen der While -Schleife
8	c_8	$n - 1$	

Laufzeit: $T(n) = c_1 n + c_2(n - 1) + c_4(n - 1) + c_5 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_6 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1)$
 $+ c_7 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_8(n - 1)$

- Warum n in Zeile 1?

- * Die Überprüfung der Fortführungsbedingung beinhaltet auch die letzte Überprüfung
- * Quasi die Überprüfung, durch die die Schleife abbricht

- Warum $\sum_{j=1}^{n-1}$ in Zeile 5?

- * Aufsummierung aller einzelnen t_j über die Anzahl der Schleifendurchläufe
- * Diese ist allerdings $n - 1$ und nicht n , da die Abbruchüberprüfung dort auch enthalten ist

- Warum $t_j - 1$ in Zeile 6?

- * Selbes Argument wie oben, bei t_j ist die Abbruchüberprüfung enthalten
- * Deswegen wird die **while**-Schleife nur $t_j - 1$ -mal ausgeführt

- Best Case

- * zu sortierendes Feld ist bereits sortiert
- * t_j wird dadurch zu 1, da die **While**-Schleife immer nur einmal prüft (Abbruch)
- * Die zwei Zeilen innerhalb der **While**-Schleife werden nie ausgeführt
- * Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine lineare Funktion in n ist

- Worst Case

- * zu sortierendes Feld ist umgekehrt sortiert
- * t_j wird dadurch zu $j + 1$, da die **While**-Schleife immer die gesamte Länge prüft
- * Durch Umformen ergibt sich, dass die Laufzeit eine quadratische Funktion in n ist (n^2)

- Average Case

- * im Mittel gut gemischt
- * t_j wird dadurch zu $j/2$
- * Die Laufzeit bleibt aber eine quadratische Funktion in n (n^2)

- Asymptotische Laufzeitbetrachtung Θ

- $T(n)$ lässt sich als quadratische Funktion $an^2 + bn + c$ betrachten
- Terme niedriger Ordnung sind für große n irrelevant
- Deswegen Vereinfachung zu n^2 und damit $\Theta(n^2)$

2.9 Bubble Sort

- **Idee**

- Vergleiche Paare von benachbarten Schlüsselwerten
- Tausche das Paar, falls rechter Schlüsselwert kleiner als linker

- **Code**

```
BubbleSort(A)
1   FOR i = 0 TO A.length - 2
2       FOR j = A.length - 1 DOWNTO i + 1
3           IF A[j] < A[j-1]
4               SWAP(A[j], A[j-1])
```

- **Analyse von Bubble Sort**

- *Anzahl der Vergleiche:*
 - * Es werden stets alle Elemente der Teilfolge miteinander verglichen
 - * Unabhängig von der Vorsortierung sind **Worst** und **Best Case** identisch
- *Anzahl der Vertauschungen:*
 - * **Best Case:** 0 Vertauschungen
 - * **Worst Case:** $\frac{n^2-n}{2}$ Vertauschungen
- *Komplexität:*
 - * **Best Case:** $\Theta(n)$
 - * **Average Case:** $\Theta(n^2)$
 - * **Worst Case:** $\Theta(n^2)$

2.10 Selection Sort

- **Idee**

- Sortieren durch direktes Auswählen
- **MinSort:** "wähle kleines Element in Array und tausche es nach vorne"
- **MaxSort:** "wähle größtes Element in Array und tausche es nach vorne"

- **Code - MinSort**

```
Selection-Sort(A)
```

```
1 FOR i = 0 TO A.length - 2
2     k = i
3     FOR j = i + 1 TO A.length - 1
4         IF A[j] < A[k]
5             k = j
6     SWAP(A[i], A[k])
```

2.11 Divide-And-Conquer Prinzip

- Anderer Ansatz im Gegensatz zu z.B. **InsertionSort** (inkrementelle Herangehensweise)
- Laufzeit ist im schlechtesten Fall immer noch besser als **InsertionSort**
- Prinzip: Zerlege das Problem und löse es direkt oder zerlege es weiter
- *Divide:*
 - Teile das Problem in mehrere Teilprobleme auf
 - Teilprobleme sind Instanzen des gleichen Problems
- *Conquer:*
 - Beherrsche die Teilprobleme rekursiv
 - Falls Teilprobleme klein genug, löse sie auf direktem Weg
- *Combine:*
 - Vereine die Lösungen der Teilprobleme zu Lösung des ursprünglichen Problems

2.12 Merge Sort

- **Idee**

- *Divide*: Teile die Folge aus n Elementen in zwei Teilstufen von je $\frac{n}{2}$ Elementen auf
- *Conquer*: Sortiere die zwei Teilstufen rekursiv mithilfe von **MergeSort**
- *Combine*: Vereinige die zwei sortierten Teilstufen, um die sortierte Lösung zu erzeugen

- **Code**

```
MERGE-SORT(A,p,r)
```

```
1 IF p < r
2   q = ⌊(p+r)/2⌋ // Teilen in 2 Teilstufen
3   MERGE-SORT(A, p, q) // Sortieren der beiden Teilstufen
4   MERGE-SORT(A, q+1, r)
5   MERGE(A, p, q, r) // Vereinigung der beiden sortierten Teilstufen
```

```
MERGE(A,p,q,r)
```

```
1 n1 = q - p + 1
2 n2 = r - q
3 Let L[0...n1] and R[0...n2] be new arrays
4 FOR i = 0 TO n1 - 1 // Auffüllen der neu erstellten Arrays
5   L[i] = A[p + i]
6 FOR j = 0 TO n2 - 1
7   R[j] = A[q + j + 1]
8 L[n1] = ∞ // Einfügen des Sentinel-Wertes
9 R[n2] = ∞
10 i = 0
11 j = 0
12 FOR k = p TO r // Eintragweiser Vergleich der Elemente
13   IF L[i] ≤ R[j]
14     A[k] = L[i] // Sortiertes Zurückschreiben in Original-Array
15     i = i + 1
16   ELSE
17     A[k] = R[j]
18     j = j + 1
```

(Teilarrays werden nicht parallel bearbeitet)

- **Korrektheit von MergeSort**

- *Schleifeninvariante*

Zu Beginn jeder Iteration der **for**-Schleife (Letztes **for** in Methode **MERGE**) enthält das Teifeld $A[p \dots k-1]$ die $k-p$ kleinsten Elemente aus $L[0 \dots n_1]$ und $R[0 \dots n_2]$ in sortierter Reihenfolge. Weiter sind $L[i]$ und $R[i]$ die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

- *Initialisierung*

Vor der ersten Iteration gilt $k=p$. Daher ist $A[p \dots k-1]$ leer und enthält 0 kleinste Elemente von L und R . Wegen $i=j=0$ sind $L[i]$ und $R[i]$ die kleinsten Elemente ihrer Arrays, die noch nicht zurück kopiert wurden.

- Fortsetzung

Müssen zeigen, dass Schleifeninvariante erhalten bleibt. Dafür nehmen wir an, dass $L[i] \leq R[j]$. Dann ist $L[i]$ kleinstes Element, welches noch nicht zurück kopiert wurde. Da Array $A[p \dots k-1]$ die $k-p$ kleinsten Elemente enthält, wird der Array $A[p \dots k]$ die $k-p+1$ kleinsten Elemente enthalten, nachdem der Wert nach der Durchführung von $A[k]=L[i]$ kopiert wurde. Die Erhöhung der Variablen k und i stellt die Schleifeninvariante für die nächste Iteration wieder her. Wenn $L[i] > R[j]$ dann analoges Argument in der ELSE-Anweisung.

- Terminierung

Beim Abbruch gilt $k=r+1$. Durch die Schleifeninvariante enthält $A[p \dots r]$ die kleinste Elemente von $L[0 \dots n_1]$ und $R[0 \dots n_2]$ in sortierter Reihenfolge. Alle Elemente außer der Sentinels wurden komplett zurück kopiert. MergeSort ist außerdem ein stabiler Algorithmus.

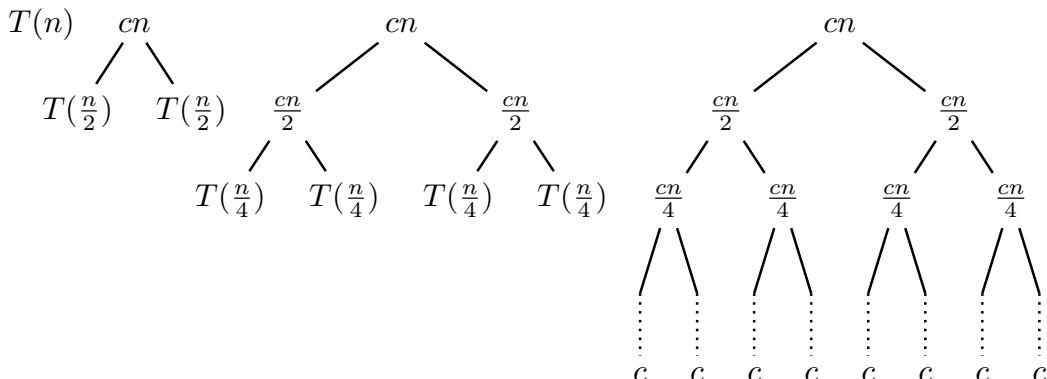
• Analyse von MergeSort

- Ziel: Bestimme Rekursionsgleichung für Laufzeit $T(n)$ von n Zahlen im schlechtesten Fall
- Divide: Berechnung der Mitte des Feldes: Konstante Zeit $\Theta(1)$
- Conquer: Rekursives Lösen von zwei Teilproblemen der Größe $\frac{n}{2}$: Laufzeit von $2 T(\frac{n}{2})$
- Combine: MERGE auf einem Teilstück der Länge n : Lineare Zeit $\Theta(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n = 1 \\ 2 T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

- Lösen der Rekursionsgleichung mithilfe eines Rekursionsbaums

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{falls } n = 1, \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$



- * Verwenden der Konstante c statt $\Theta(1)$
- * cn stellt den Aufwand an der ersten Ebene dar
- * Der addierte Aufwand jeder Stufe (aller Knoten) ist auch cn
- * Die Anzahl der Ebenen lässt sich mithilfe von $\lg(n) + 1$ bestimmen (2-er Logarithmus)
- * Damit ergibt sich für die Laufzeit: $cn \cdot \lg(n) + cn$
- * Für $\lim_{n \rightarrow \infty}$ wird diese zu $n \cdot \lg(n)$
- * Laufzeit beträgt damit $\Theta(n \cdot \lg(n))$
- * Laufzeit von MergeSort ist in jedem Fall gleich

2.13 Quicksort

- **Idee**

- *Pivotelement:*

- Wahl eines Pivotelement x aus dem Array

- *Divide:*

- Zerlege den Array $A[p \dots r]$ in zwei Teilarrays $A[p \dots q-1]$ und $A[q+1 \dots r]$, sodass jedes Element von $A[p \dots q-1]$ kleiner oder gleich $A[q]$ ist, welches wiederum kleiner oder gleich jedem Element von $A[q+1 \dots r]$ ist. Berechnen Sie den Index q als Teil vom **Partition** Algorithmus.

- *Conquer:*

- Sortieren beider Teilarrays $A[p \dots q-1]$ und $A[q+1 \dots r]$ durch rekursiven Aufruf von Quicksort.

- *Combine:*

- Da die Teilarrays bereits sortiert sind, ist keine weitere Arbeit nötig um diese zu vereinigen. $A[p \dots r]$ ist nun sortiert.

- **Code**

```
QUICKSORT(A,p,r)
```

```
1 IF p < r      // Überprüfung, ob Teilarray leer ist
2   q = PARTITION(A, p, r)
3   QUICKSORT(A, p, q-1)
4   QUICKSORT(A, q+1, r)
```

```
PARTITION(A,p,r)
```

```
1 x = A[r]      // Wahl des Pivotelements
2 i = p - 1     // Index i setzen
3 FOR j = p TO r - 1 // Auffüllen des Teilarrays mit Elementen
4   IF A[j] ≤ x
5     i = i + 1
6     SWAP(A[i], A[j])
7 SWAP(A[i+1], A[r]) // Tausch des Pivotelements
8 RETURN i + 1 // Neuer Index des Pivotelements
```

(Teilarrays werden nicht parallel bearbeitet)

- **Korrektheit von Quicksort**

- *Schleifeninvariante:*

Zu Beginn jeder Iteration der `for`-Schleife gilt für den Arrayindex k folgendes:

- Ist $p \leq k \leq i$, so gilt $A[k] \leq x$
- Ist $i + 1 \leq k \leq j - 1$, so gilt $A[k] > x$
- Ist $k = r$, so gilt $A[k] = x$

- *Initialisierung:*

Vor der ersten Iteration gilt $i = p - 1$ und $j = p$. Da es keine Werte zwischen p und j gibt und es auch keine Werte zwischen $i + 1$ und $j - 1$ gibt, sind die ersten beiden Eigenschaften trivial erfüllt. Die Zuweisung in $x = A[r]$ sorgt für die Erfüllung der dritten Eigenschaft.

- *Fortsetzung:*

Zwei mögliche Fälle durch `IF` $A[j] \leq x$. Wenn $A[j] > x$, dann inkrementiert die Schleife nur den Index j . Dann gilt Bedingung 2 für $A[j-1]$ und alle anderen Einträge bleiben unverändert. Wenn $A[j] \leq x$, dann wird Index i inkrementiert und die Einträge $A[i]$ und $A[j]$ getauscht und schließlich der Index j erhöht. Wegen des Vertauschens gilt $A[i] \leq x$ und Bedingung 1 ist erfüllt. Analog gilt $A[j-1] > x$, da das Element welches mit $A[j-1]$ vertauscht wurde wegen der Invariante gerade größer als x ist.

- *Terminierung:*

Bei der Terminierung gilt, dass $j = r$. Daher gilt, dass jeder Eintrag des Arrays zu einer der drei durch die Invariante beschriebenen Mengen gehört.

- **Performanz von Quicksort**

- *Abhängig von der Balanciertheit der Teilarrays*

- * Definition Balanciert: ungefähr gleiche Anzahl an Elementen
- * Teilarrays balanciert: Laufzeit asymptotisch so schnell wie `MergeSort`
- * Teilarrays unbalanciert: Laufzeit kann so langsam wie `InsertionSort` laufen

- *Zerlegung im schlechtesten Fall*

- * Partition zerlegt Problem in ein Teilproblem mit $n - 1$ Elementen und eins mit 0 Elementen
- * Unbalancierte Zerlegung mit Kosten $\Theta(n)$ zieht sich durch gesamte Rekursion
- * Aufruf auf Feld der Größe 0: $T() = \Theta(1)$
- * Laufzeit (rekursiv):
 - $T(n) = T(n - 1) + T(0) + \Theta(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$
 - Insgesamt folgt: $T(n) = \Theta(n^2)$

- *Zerlegung im besten Fall*

- * Problem wird so balanciert wie möglich zerlegt
- * Zwei Teilprobleme mit maximaler Größe von $\frac{n}{2}$
- * Zerlegung kostet $\Theta(n)$
- * Laufzeit (rekursiv):
 - $T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
 - Laufzeit beträgt: $O(n \lg(n))$
- * Solange die Aufteilung konstant bleibt, bleibt die Laufzeit $O(n \lg(n))$

2.14 Laufzeitanalyse von rekursiven Algorithmen

- **Analyse von Divide-And-Conquer Algorithmen**

- $T(n)$ ist Laufzeit eines Problems der Größe n
- Für kleines Problem benötigt die direkte Lösung eine konstante Zeit $\Theta(1)$
- Für sonstige n gilt:
 - * Aufteilen eines Problems führt zu a Teilproblemen
 - * Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{1}{b}$ der Größe des ursprünglichen Problems
 - * Lösen eines Teilproblems der Größe $\frac{n}{b}$: $T(\frac{n}{b})$
 - * Lösen a solcher Probleme: $a T(\frac{n}{b})$
 - * $D(n)$: Zeit um das Problem aufzuteilen (Divide)
 - * $C(n)$: Zeit um Teillösungen zur Gesamtlösung zusammenzufügen (Combine)

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{falls } n \leq c \\ a T\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Substitutionsmethode**

- Idee: Erraten einer Schranke und Nutzen von Induktion zum Beweis der Korrektheit
- Ablauf:
 - (a) Rate die Form der Lösung (Scharfes Hinsehen oder kurze Eingaben ausprobieren/einsetzen)
 - (b) Anwendung von vollständiger Induktion zum Finden der Konstanten und Beweis der Lösung

- Beispiel

* Betrachten von MergeSort:

- $T(1) \leq c$
- $T(n) \leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn$

* Ziel:

Obere Abschätzung $T(n) \leq g(n)$ mit $g(n)$ ist eine Funktion, die durch eine geschlossene Formel dargestellt werden kann.

Wir "raten": $T(n) \leq 4cn \lg(n)$ und nehmen dies für alle $n' < n$ an und zeigen es für n .

* Induktion:

- \lg steht hier für \log_2
- $n = 1$: $T(1) \leq c$
- $n = 2$: $T(2) \leq T(1) + T(1) + 2c$
 $\leq 4c \leq 8c$
 $T(2) = 4c * 2 \lg(2) = 8c$

* Hilfsbehauptungen:

- (1): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$
- (2): $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2}{3}n$
- (3): $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c(a) - \log_c(b)$
- (4): $\log_c(a * b) = \log_c(a) + \log_c(b)$

* Induktionsschritt:

- Annahme: $n > 2$ und sei Behauptung wahr für alle $n' < n$.

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\
 &\leq 4c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\
 (\text{HB}) &\leq 4c \cdot \lg(\frac{2}{3}n) \cdot (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil) + cn \\
 &\leq 4c \cdot \lg(\frac{2}{3}n) \cdot n + cn \\
 (\text{HB}) &\leq 4cn \cdot (\lg(\frac{2}{3}) + \lg(n)) + cn \\
 &= 4cn \cdot \lg(n) + 4cn \cdot \lg(\frac{2}{3}) \\
 &= 4cn \cdot \lg(n) + cn(1 + 4 \cdot (\lg(2) - \lg(3))) \\
 &\leq 4cn \cdot \lg(n) \\
 &\Rightarrow \Theta(n \lg(n))
 \end{aligned}$$

• Rekursionsbaum

- Idee: Stellen das Ineinander-Einsetzen als Baum dar und Analyse der Kosten
- Ablauf:
 - (a) Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar
 - * Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar
 - * Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar (z.B. $T(0)$)
 - (b) Berechnen der Kosten innerhalb jeder Ebene des Baums
 - (c) Die Gesamtkosten sind die Summe über die Kosten aller Ebenen
- Rekursionsbaum ist nützlich um Lösung für Substitutionsmethode zu erraten

- **Beispiel:** $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n^2)$

* Vorüberlegungen:

- $\Rightarrow T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + cn^2$ ($c > 0$)
- Je Abstieg verringert sich die Größe des Problems um den Faktor 4.
- Erreichen der Randbedingung ist vonnöten, die Frage ist wann dies geschieht.
- Größe Teilproblem bei Level i : $\frac{n}{4^i}$
- Erreichen Teilproblem der Größe 1, wenn $\frac{n}{4^i} = 1$, d.h. wenn $i = \log_4(n)$
 \Rightarrow Baum hat also $\log_4 n + 1$ Ebenen

* Kosten pro Ebene:

- Jede Ebene hat 3-mal soviele Knoten wie darüber liegende
- Anzahl der Knoten in Tiefe i ist 3^i
- Kosten $c(\frac{n}{4^i})^2$, $i = 0 \dots \log_4 n - 1$
- Anzahl · Kosten = $3^i \cdot c(\frac{n}{4^i})^2 = (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2$

* Unterste Ebene:

- $3^{\log_4(n)} = n \log_4(3)$ Knoten
- Jeder Knoten trägt $T(1)$ Kosten bei
- Kosten unten: $n^{\log_4(3)} \cdot T(1) = \Theta(n^{\log_4(3)})$

* Addiere alle Kosten aller Ebenen:

$$\begin{aligned} \cdot T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + (\frac{3}{16})^2cn^2 + \dots + (\frac{3}{16})^{\log_4 n - 1}cn^2 + \Theta(n^{\log_4(3)}) \\ &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4^3}) \\ &= \frac{(\frac{3}{16})^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \text{ (Verwendung der geometrischen Reihe)} \end{aligned}$$

· Verwendung einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe als obere Schranke:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{16})^i \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13} \cdot cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) = O(n^2) \end{aligned}$$

* Jetzt Substitutionsmethode:

· Zu zeigen: $\exists d > 0 : T(n) \leq dn^2$

· Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + c \cdot 1^2 \\ &= 3 \cdot T(0) + c = c \end{aligned}$$

· Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3 \cdot d(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(\frac{n}{4})^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2, \text{ falls } d \geq \frac{16}{13}c \end{aligned}$$

- **Mastertheorem**

- *Idee:*

Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f(n)$ eine positive Funktion und $T(n)$ über den nichtnegativen ganzen Zahlen über die Rekursionsgleichung $T(n) = a T(\frac{n}{b}) + f(n)$ definiert, wobei wir $\frac{n}{b}$ so interpretieren, dass damit entweder $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ oder $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ gemeint ist. Dann besitzt $T(n)$ die folgenden asymptotischen Schranken (a und b werden aus $f(n)$ gelesen):

- (a) Gilt $f(n) = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
- (b) Gilt $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, dann gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \lg(n))$
- (c) Gilt $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+\epsilon)})$ für eine Konstante $\epsilon > 0$ und $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ für eine Konstante $c < 1$ und hinreichend großen n , dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$

- *Erklärung:*

- * In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^{\log_b(a)}$ verglichen
 - (a) Wenn $f(n)$ polynomial kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
 - (b) Wenn $f(n)$ und $n^{\log_b(a)}$ die gleiche Größe haben, gilt $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \lg(n))$
 - (c) Wenn $f(n)$ polynomial größer als $n^{\log_b(a)}$ und $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ erfüllt, dann $T(n) = \Theta(f(n))$
- * (polynomial größer/kleiner: um Faktor n^ϵ asymptotisch größer/kleiner)

- *Nicht abgedeckte Fälle:*

- * Wenn einer dieser Fälle eintritt, kann das Mastertheorem nicht angewendet werden
 - (a) Wenn $f(n)$ kleiner ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial kleiner
 - (b) Wenn $f(n)$ größer ist als $n^{\log_b(a)}$, aber nicht polynomial größer
 - (c) Regularitätsbedingung $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ wird nicht erfüllt
 - (d) a oder b sind nicht konstant (z.B. $a = 2^n$)

- Beispiel:

- * $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
 - $a = 9, b = 3, f(n) = n$
 - $\log_b(a) = \log_3(9) = 2$
 - $f(n) = n = O(n^{\log_b(a-\epsilon)})$
 $= O(n^{2-\epsilon})$

- Ist diese Gleichung für ein $\epsilon > 0$ erfüllt? $\Rightarrow \epsilon = 1$
- **1. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

- * $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$
 - $a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = 1$
 - $\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
 - $f(n) = 1 = O(n^{\log_b(a)})$
 $= O(n^0)$
 $= O(1)$

- **2. Fall** $\Rightarrow T(n) = \Theta(1 * \lg(n)) = \Theta(\lg(n))$

- * $T(n) = 3(T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg(n))$
 - $a = 3, b = 4, f(n) = n \lg(n)$
 - $n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)} \leq n^{0.793}$
 - $\epsilon = 0.1$ im Folgenden
 - $f(n) = n \lg(n) \geq n \geq n^{0.793+0.1} \geq n^{0.793}$
 - **3. Fall** $\Rightarrow f(n) = \Omega(n^{\log_b(a+0.1)})$
 - $af\left(\frac{n}{b}\right) = 3f\left(\frac{n}{4}\right) = 3\left(\frac{n}{4}\right) \lg\left(\frac{n}{4}\right) \leq \frac{3}{4}n \lg(n)$
 - Damit ist auch die Randbedingung erfüllt und $T(n) = \Theta(n \lg(n))$

Grundlegende Datenstrukturen	Fortgeschrittene Datenstrukturen	Randomisierte Datenstrukturen
Stacks Verkettete Listen Queues Bäume Binäre Suchbäume	Rot-Schwarz-Bäume AVL-Bäume Splay-Bäume Heaps B-Bäume	Skip Lists Hash Tables Bloom-Filter

TABELLE 1: Übersicht Datenstrukturen

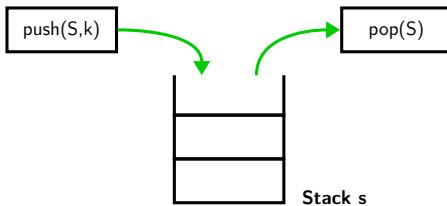
3 Grundlegende Datenstrukturen

3.1 Stacks

- **Abstrakter Datentyp Stack**

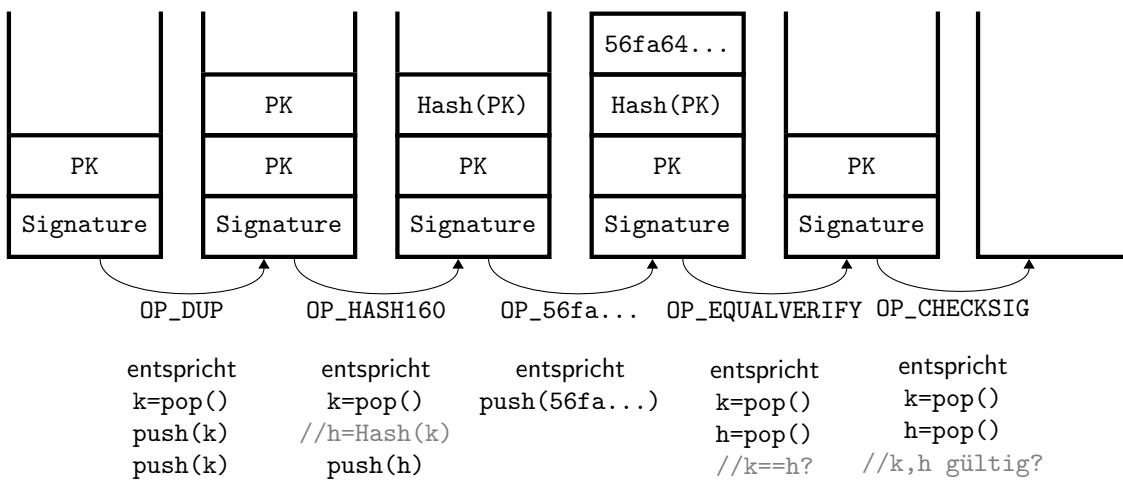
- `s = new S()`
 - * Erzeugt neuen (leeren) Stack
- `s.isEmpty()`
 - * Gibt an, ob Stack s leer ist
- `s.pop()`
 - * Gibt oberstes Element vom Stack s zurück und löscht es vom Stack
 - * Gibt Fehlermeldung aus, falls der Stack leer ist
- `s.push(k)`
 - * Schreibt k als neues oberstes Element auf Stack s
- Abstrakter Aufbau:

- * **LIFO-Prinzip - Last in, First out**

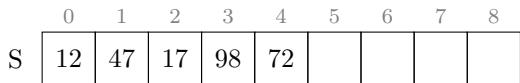


- Beispiel Bitcoin

```
scriptPubKey:  
OP_DUP OP_HASH160 56fa64a8bd7852d2c58095fa9a2fc...  
OP_EQUALVERIFY OP_CHECKSIG
```



- **Stacks als Array**



- `s.top` zeigt immer auf oberstes Element
- `pop()` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach links bewegt
- `push(k)` führt dazu, dass `s.Top` sich eins nach rechts bewegt

- **Stacks als Array - Methoden, falls maximale Größe bekannt**

<pre> new(S) 1 S.A[]=ALLOCATE(MAX); 2 S.TOP=-1; </pre>	<pre> isEmpty(S) 1 IF S.top<0 THEN 2 return true; 3 ELSE 4 return false; </pre>
<pre> pop(S) 1 IF isEmpty(S) THEN 2 error "underflow"; 3 ELSE 4 s.top=s.top-1; 5 return S.A[S.top+1]; </pre>	<pre> push(S) 1 IF S.top==MAX-1 THEN 2 error "overflow"; 3 ELSE 4 S.top=S.top+1; 5 S.A[S.top]=k; </pre>

- **Stacks mit variabler Größe - Einfach**

- Falls `push(k)` bei vollem Array \Rightarrow Vergößerung des Arrays
- Erzeugen eines neuen Arrays mit Länge + 1 und Umkopieren aller Elemente
- Durchschnittlich $\Omega(n)$ Kopierschritte pro `push`-Befehl

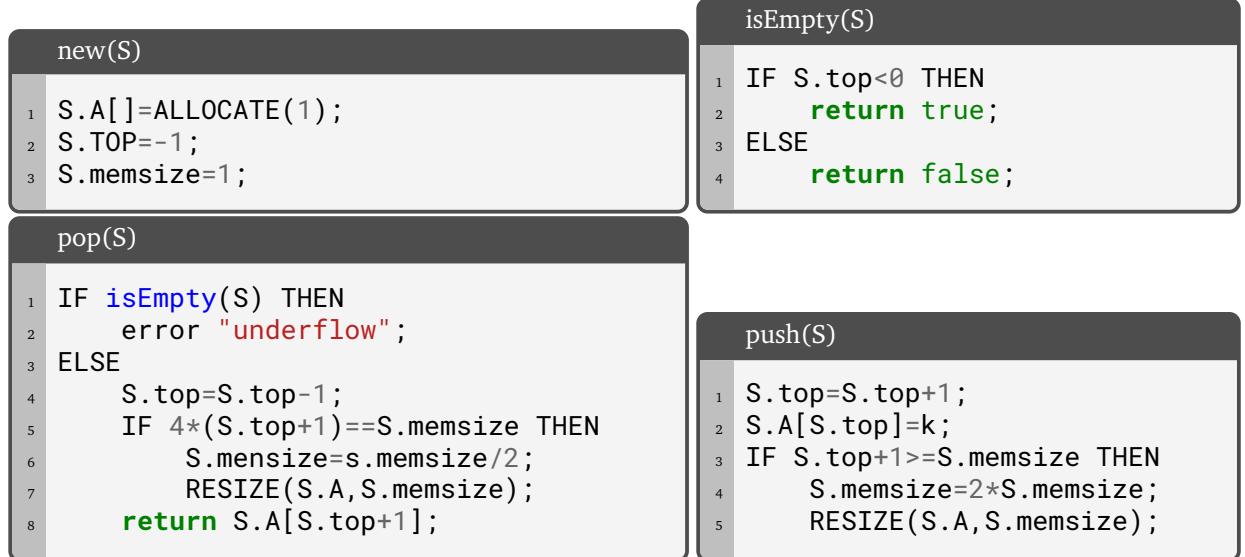
- **Stacks mit variabler Größe - Verbesserung**

- Idee:

- * Wenn Grenze erreicht, Verdopplung des Speichers und Kopieren der Elemente
- * Falls weniger als ein Viertel belegt, schrumpfe das Array wieder

- Methoden:

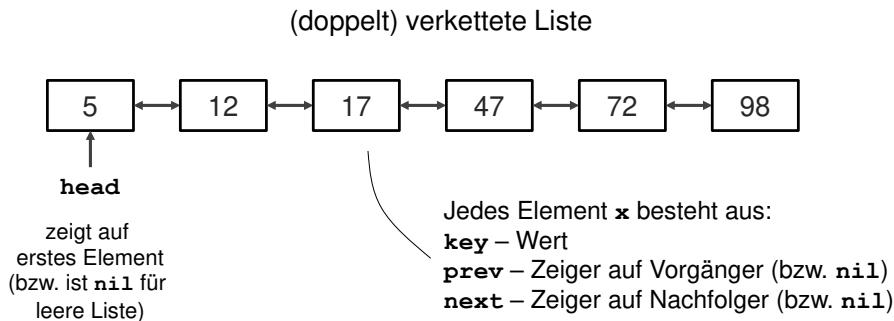
`RESIZE(A, m)` reserviert neuen Speicher der Größe m und kopiert A um



- Im Durchschnitt für jeder der mindestens n Befehle $\Theta(1)$ Umkopierschritte

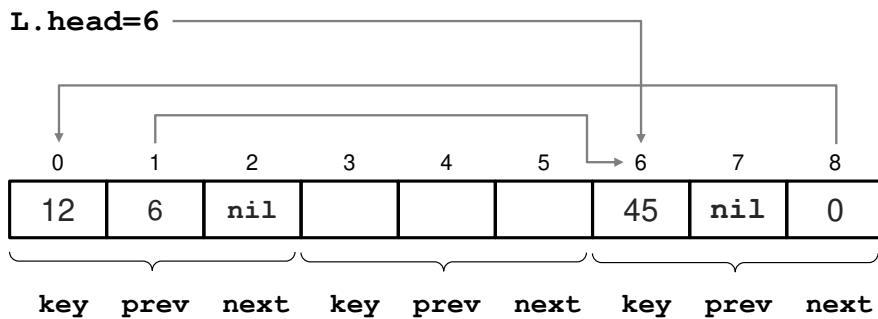
3.2 Verkettete Listen

- Aufbau



- Verkettete Listen durch Arrays

Entspricht doppelter Verkettung zwischen 45 und 12



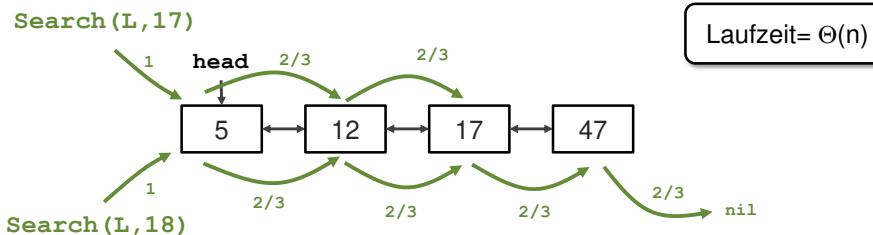
- Elementare Operationen auf Listen

- Suche nach Element

- * Laufzeit beträgt im Worst Case $\Theta(n)$
 ⇒ Keine Überprüfung, ob Wert bereits in Liste, sonst $\Theta(1)$
- * Code:

```
search(L,k) // Returns pointer to k in L (or nil)

1 current = L.head;
2 WHILE current != nil AND current.key != k DO
3     current = current.next;
4 return current;
```



- Einfügen eines Elements am Kopf der Liste

- * Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da Einfügen am Kopf

- * Code:

```

insert(L,x)

1  insert(L,x)
2  x.next = L.head;
3  x.prev = nil;
4  IF L.head != nil THEN
5      L.head.prev = x;
6  L.head = x;
```

- Löschen eines Elements aus Liste

- * Laufzeit beträgt $\Theta(1)$, da hier Pointer auf Objekt gegeben

- Löschen eines Wertes k mithilfe von Suche beträgt $\Omega(n)$

- * Code:

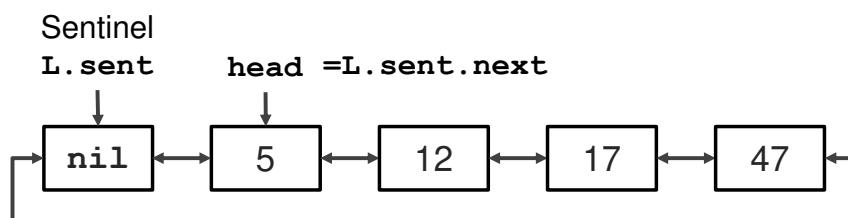
```

delete (L,x)

1  IF x.prev != nil THEN
2      x.prev.next = x.next
3  ELSE
4      L.head = x.next;
5  IF x.next != nil THEN
6      x.next.prev = x.prev;
```

- Vereinfachung per Wächter/Sentinels

- Ziel ist die Eliminierung der Spezialfälle für Listenanfang/-ende



- Löschen mit Sentinels:

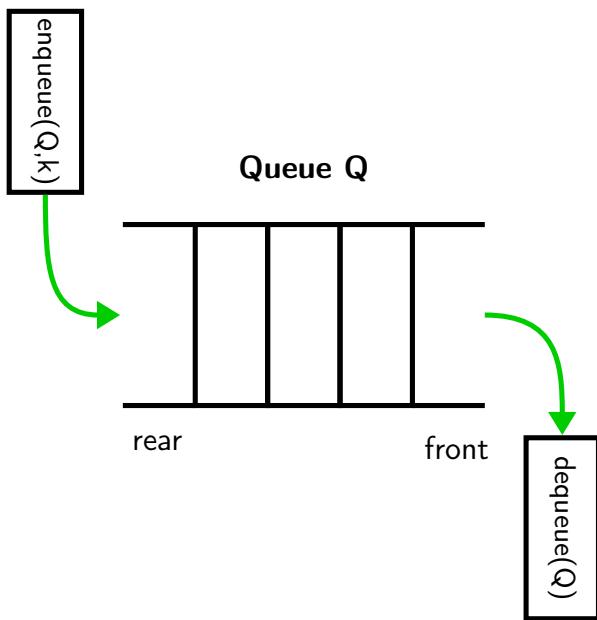
```

deleteSent(L,x)

1  x.prev.next = x.next;
2  x.next.prev = x.prev;
```

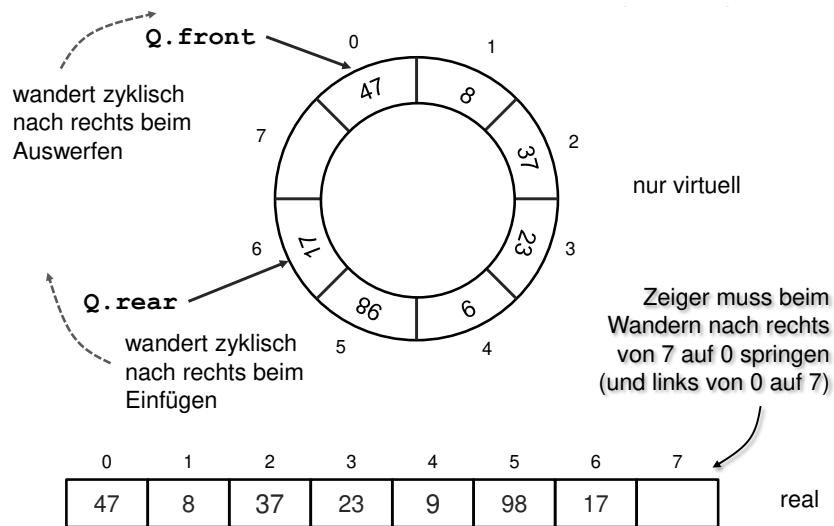
3.3 Queues

- Abstrakter Datentyp Queue
 - new Q()
 - * Erzeuge neue (leere) Queue
 - q.isEmpty()
 - * Gibt an, ob Queue q leer ist
 - q.dequeue()
 - * Gibt vorderstes Element aus q zurück und löscht es auf Queue
 - * Fehlermeldung, falls Queue leer ist
 - q.enqueue(k)
 - * Schreibt k als neues hinterstes Element auf q
 - * Fehlermeldung, falls Queue voll ist
 - Abstrakter Aufbau:
 - * **FIFO**-Prinzip / First in, First out



- Queues als (virtuelles) zyklisches Array

Bekannt: Maximale Elemente gleichzeitig in Queue



- Problem, falls Q.rear und Q.front auf selbes Element zeigen
 - * Speichere Information, ob Schlange leer oder voll, in boolean empty
 - * Alternativ: Reserviere ein Element des Arrays als Abstandshalter

- Methoden für zyklisches Array

new(Q)

```

1 Q.A[ ]=ALLOCATE(MAX);
2 Q.front=0;
3 Q.rear=0;
4 Q.empty=true;
```

isEmpty(Q)

```
1 return Q.empty;
```

dequeue(Q)

```

1 IF isEmpty(Q) THEN
2   error "underflow";
3 ELSE
4   Q.front=Q.front+1 mod MAX;
5   IF Q.front==Q.rear THEN
6     Q.empty=true;
7   return Q.A[Q.front-1 mod MAX];
```

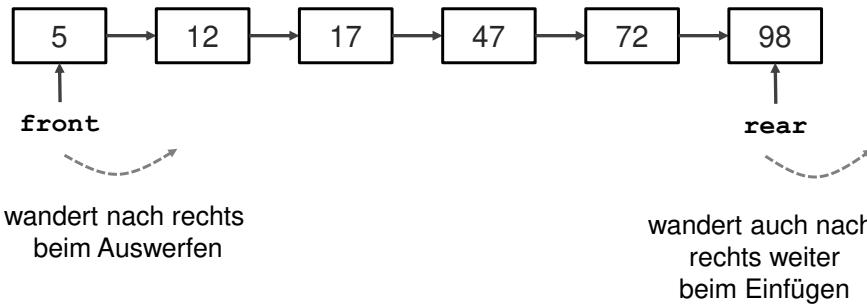
enqueue(Q,k)

```

1 IF Q.rear==Q.front AND !Q.isEmpty
2 THEN error "overflow";
3 ELSE
4   Q.A[Q.rear]=k;
5   Q.rear=Q.rear+1 mod MAX;
6   Q.empty=false;
```

- Queues durch einfach verkettete Listen

(einfach) verkettete Liste



Methoden:

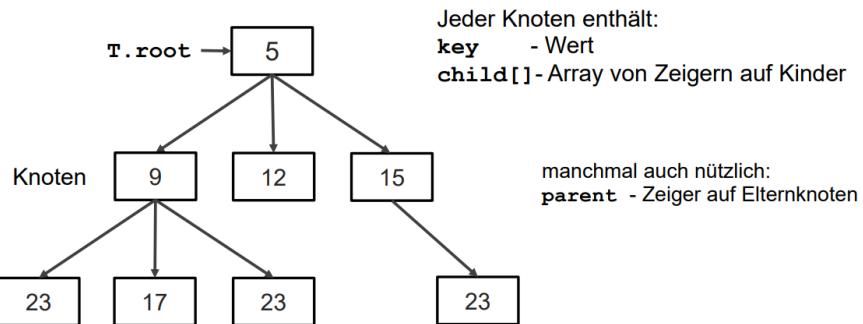
new(Q) <pre> 1 Q.front=nil; 2 Q.rear=nil;</pre>	isEmpty(Q) <pre> 1 IF Q.front==nil THEN 2 return true; 3 ELSE 4 return false;</pre>
dequeue(Q) <pre> 1 IF isEmpty(Q) THEN 2 error "underflow"; 3 ELSE 4 x=Q.front; 5 Q.front=Q.front.next; 6 return x;</pre>	enqueue(Q,k) <pre> 1 IF isEmpty(Q) THEN 2 Q.front=x; 3 ELSE 4 Q.rear.next=x; 5 x.next=nil; 6 Q.rear=x;</pre>

- Laufzeit

- Enqueue: $\Theta(1)$
- Dequeue: $\Theta(1)$

3.4 Binäre Bäume

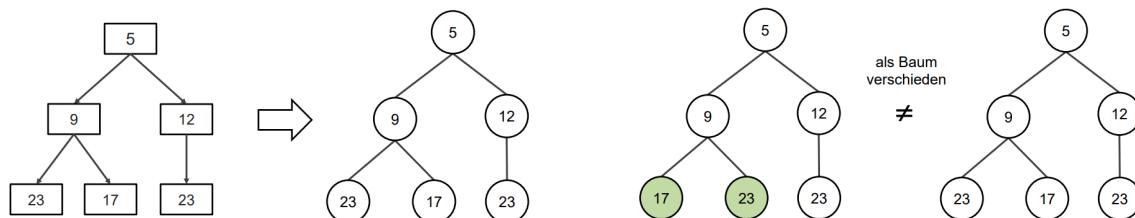
- Bäume durch verkettete Listen



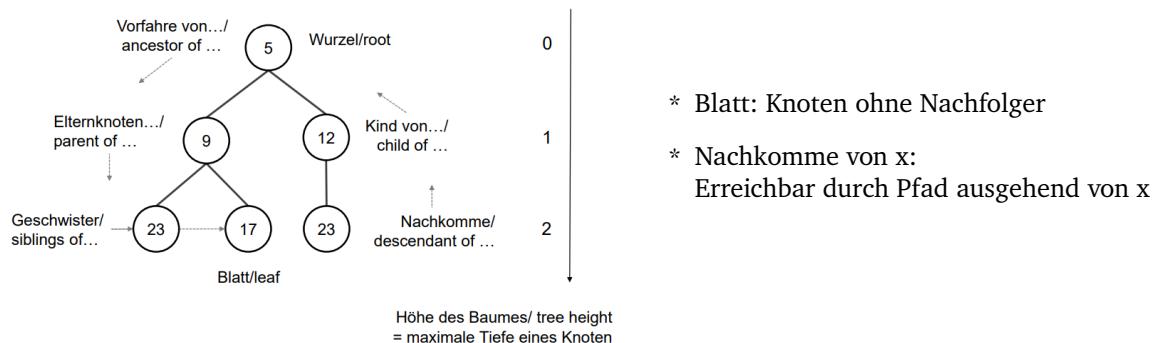
Baum-Bedingung: Baum ist leer oder...
es gibt einen Knoten r („Wurzel“), so dass jeder Knoten v von der Wurzel aus per eindeutiger Sequenz von child-Zeigern erreichbar ist:
 $v = r.child[i1].child[i2] \dots .child[im]$

Bäume sind "azyklisch" (Keine "rückführende Spur")

- Darstellung als (ungerichteter) Graph

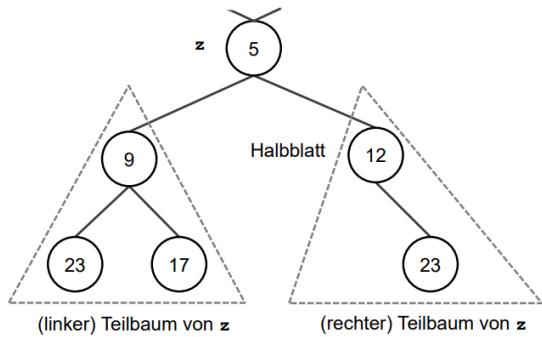


- Allgemeine Begrifflichkeiten



- * Blatt: Knoten ohne Nachfolger
- * Nachkommen von x:
Erreichbar durch Pfad ausgehend von x

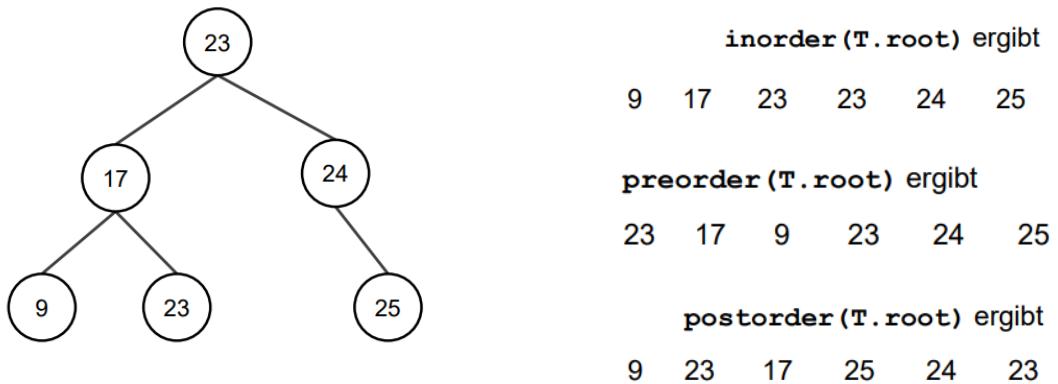
• Begrifflichkeiten Binärbaum



- * Jeder Knoten hat maximal zwei Kinder `left=child[0]` und `right=child[1]`
- * Ausgangsgrad jedes Knoten ist ≤ 2
- * Höhe leerer Baum per Konvention -1
- * Höhe (nicht-leerer) Baum: $\max\{\text{Höhe aller Teilbäume der Wurzel}\} + 1$
- * Halbblatt: Knoten mit nur einem Kind

• Traversieren von Bäumen

- Darstellung eines Baumes mithilfe einer Liste der Werte aller Knoten
- Laufzeit bei n Knoten: $T(n) = O(n)$
- Nutzung der Preorder für das Kopieren von Bäumen
 - (a) Preorder betrachtet Knoten und legt Kopie an
 - (b) Preorder geht dann in Teilbäume und kopiert diese
- Nutzung der Postorder für das Löschen von Bäumen
 - (a) Postorder geht zuerst in Teilbäume und löscht diese
 - (b) Betrachten des Knoten erst danach und dann Löschung dieses

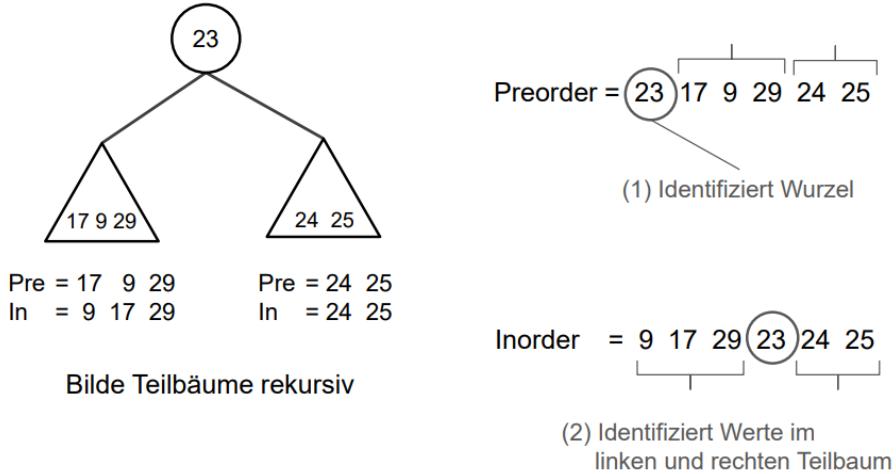


Code:

inorder(x)	preorder(x)	postorder(x)
<pre> 1 IF x != nil THEN 2 inorder(x.left); 3 print x.key; 4 inorder(x.right); </pre>	<pre> 1 IF x != nil THEN 2 print x.key; 3 preorder(x.left); 4 preorder(x.right); </pre>	<pre> 1 IF x != nil THEN 2 postorder(x.left); 3 postorder(x.right); 4 print x.key; </pre>

- Eindeutige Bestimmbarkeit von Bäumen

- Nur In-,Pre-,Postorder reichen nicht zur eindeutigen Bestimmbarkeit von Bäumen
⇒ Preorder/Postorder + Inorder + eindeutige Werte sind notwendig



- Abstrakter Datentyp Baum

- *Abstrakter Aufbau:*

- * `new T()`
 - Erzeugt neuen Baum namens t
- * `t.search(k)`
 - Gibt Element x in Baum t mit x.key == k zurück
- * `t.insert(k)`
 - Fügt Element x in Baum t hinzu
- * `t.delete(x)`
 - Löscht x aus Baum t

- *Suche nach Elementen:*

- * Laufzeit = $\Theta(n)$ (Jeder Knoten maximal einmal, jeder Knoten im schlechtesten Fall)
- * Starte mit `search(T.root, k)`
- * Code:

```
search(x,k)
1 IF x == nil THEN return nil;
2 IF x.key == k THEN return x;
3 y = search(x.left,k);
4 IF y != nil THEN return y;
5 return search(x.right,k);
```

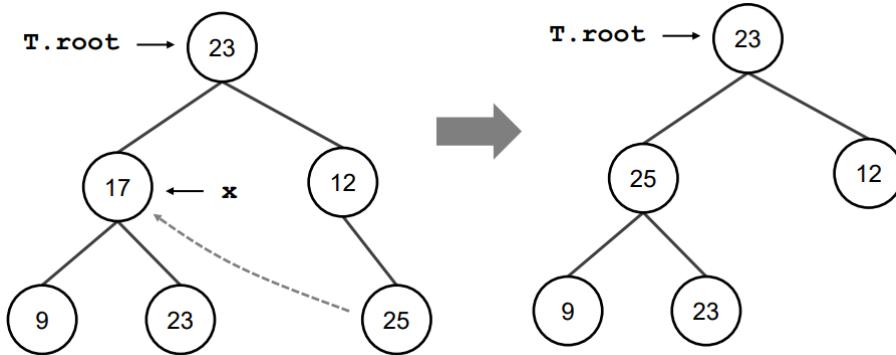
- Einfügen von Elementen:

- * Laufzeit = $\Theta(1)$
- * Hier wird als Wurzel eingefügt (Achtung: Erzeugt linkslastigen Baum)
- * Code:

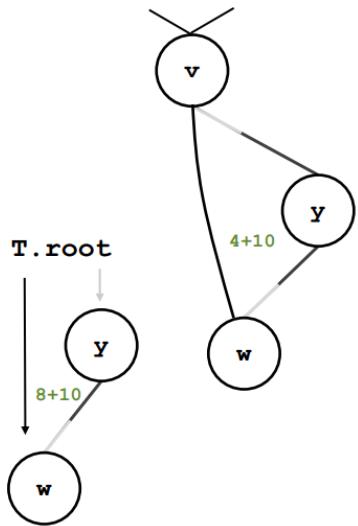
```
insert(T,x) // x.parent == x.left == x.right == nil;  
1 IF T.root != nil THEN  
2   T.root.parent = x;  
3   x.left = T.root;  
4   T.root = x;
```

- Löschen von Elementen:

- * Laufzeit = $\Theta(h)$ (Höhe des Baumes, $h = n$ möglich)
- * Hier: Ersetze x durch Halbblatt ganz rechts



* Connect-Algorithmus:



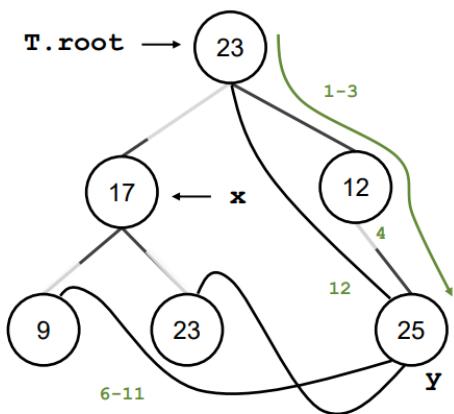
· Laufzeit = $\Theta(1)$

connect(T,y,w) // Connects w to y.parent

```

1 v = y.parent;
2 IF y != T.root THEN
3   IF y == v.right THEN
4     v.right = w;
5   ELSE
6     v.left = w;
7   ELSE
8     T.root = w;
9   IF w != nil THEN
10    w.parent = v;
  
```

* Delete-Algorithmus:



delete(T,x) // assumes x in T

```

1 y = T.root;
2 WHILE y.right != nil DO
3   y = y.right;
4   connect(T,y,y.left);
5   IF x != y THEN
6     y.left = x.left;
7     IF x.left != nil THEN
8       x.left.parent = y;
9     y.right = x.right;
10    IF x.right != nil THEN
11      x.right.parent = y;
12    connect(T,x,y);
  
```

3.5 Binäre Suchbäume

- **Definition**

- Totale Ordnung auf den Werten
- Für alle Knoten z gilt:
 - Wenn x Knoten im linken Teilbaum von z , dann $x.key \leq z.key$
 - Wenn y Knoten im rechten Teilbaum von z , dann $y.key \geq z.key$
- Preorder/Postorder + eindeutige Werte \Rightarrow Eindeutige Identifizierung

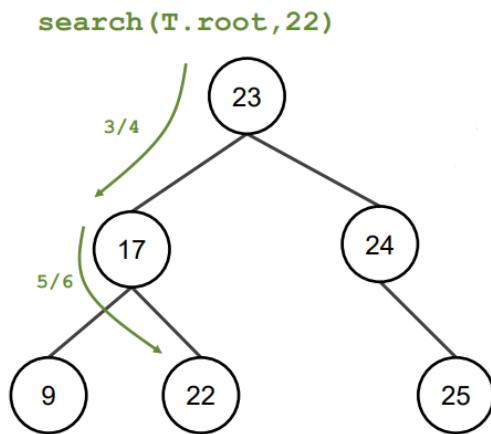
- **Suchen im Binären Suchbaum**

* Laufzeit = $O(h)$ (Höhe)

* Code:

```
search(x,k) // 1. Aufruf x = root
```

```
1 FOR i = 0 TO A.length - 2
2   FOR j = A.length - 1 DOWNTON i + 1
3     IF A[j] < A[j-1]
4       SWAP(A[j], A[j-1])
```

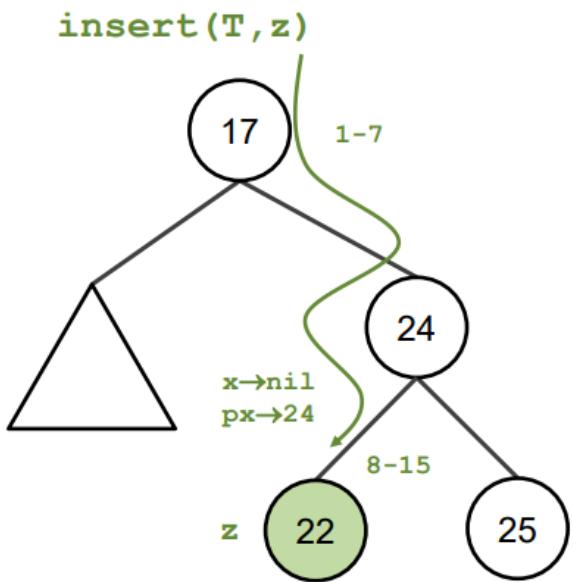


* Iterativer Code:

```
iterative-search(x,k)
```

```
1 WHILE x != nil AND x.key != k DO
2   IF x.key > k THEN
3     x = x.left;
4   ELSE
5     x = x.right;
6   return x;
```

- Einfügen im Binary Search Tree



- * Laufzeit = $O(h)$
 - * Aufwendiger, da Ordnung erhalten werden muss
 - * Code:

```

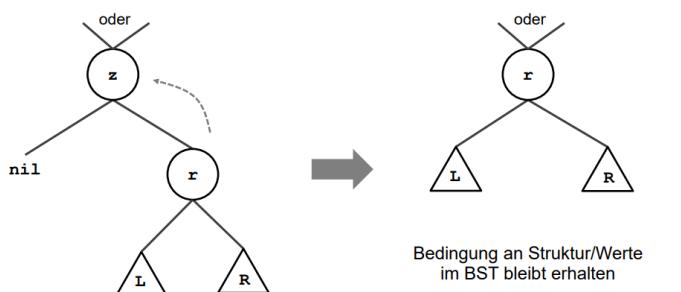
1  x = T.root;
2  px = nil;
3  WHILE x != nil DO
4      px = x;
5      IF x.key > z.key THEN
6          x = x.left;
7      ELSE
8          x = x.right;
9      z.parent = px;
10     IF px == nil THEN
11         T.root = z;
12     ELSE
13         IF px.key > z.key THEN
14             px.left = z;
15         ELSE
16             px.right = z;

```

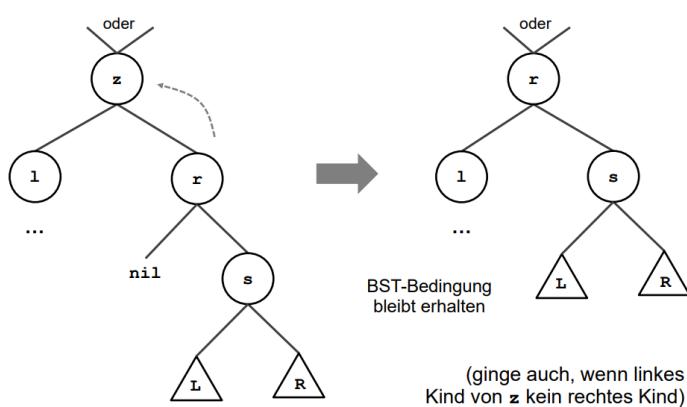
- Löschen im BST

 - Verschiedene Fälle:

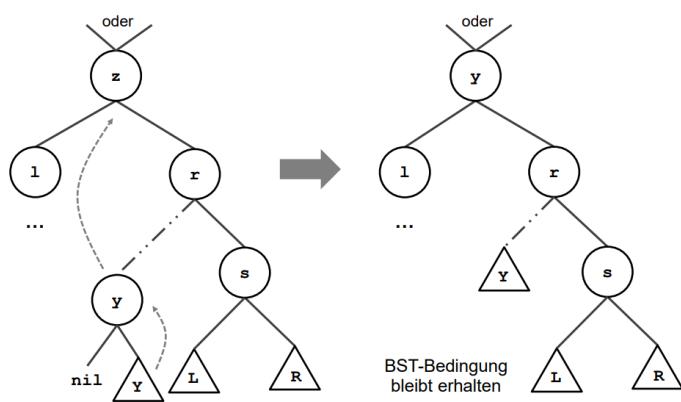
Löschen im BST (I)



Löschen im BST (II)



Löschen im BST (III)



- Code

```
transplant(T,u,v) // Hängt Teilbaum v an Parent von u
```

```
1 IF u.parent == nil THEN
2     T.root = v;
3 ELSE
4     IF u == u.parent.left THEN
5         u.parent.left = v;
6     ELSE
7         u.parent.right = v;
8 IF v != nil THEN
9     v.parent = u.parent;
```

```
delete(T,z)
```

```
1 IF z.left == nil THEN
2     transplant(T,z,z.left)
3 ELSE
4     IF z.right == nil THEN
5         transplant(T,z,z.left)
6     ELSE
7         y = z.right;
8         WHILE y.left != nil DO y = y.left;
9         IF y.parent != z THEN
10            transplant(T,y,y.right)
11            y.right = z.right;
12            y.right.parent = y;
13        transplant(T,z,y)
14        y.left = z.left;
15        y.left.parent = y;
```

- Laufzeit = $O(h)$
- Laufzeit ist damit besser, wenn viele Suchoperationen und h klein relativ zu n

- Höhe eines BST

- Best Case:

- * Vollständiger Baum (Alle Blätter gleiche Tiefe)
- * $h = O(\log_2 n)$
- * Laufzeit = $O(\log_2 n)$

- Worst Case:

- * Degenerierter Baum (lineare Liste)
- * $h = n - 1$
- * Laufzeit = $\Theta(n)$

- Durchschnittliche Höhe:

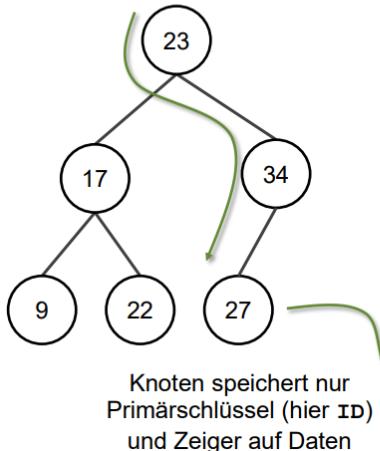
- * Erwartete Höhe: $\Theta(\log_2 n)$

- Suchbäume als Suchindex

- Knoten speichert nur Primärschlüssel und Zeiger auf Daten
- Zusätzliche Indizes möglich, kosten aber Speicherplatzbedarf

Suchbäume als Suchindex

```
SELECT *
FROM MyTable
WHERE ID=27;
```



27 | Victor | CS | ...

ID	Name	Department	...
23	Bob	CS	...
17	Alice	Math	...
9	Eve	CS	...
22	Carol	Physics	...
34	Peggy	Math	...
27	Victor	CS	...
...

4 Advanced Data Structures

4.1 Rot-Schwarz-Bäume

- **Definition**

- Binärer Suchbaum mit Zusatzeigenschaften
- Zusatzeigenschaften:
 - * Jeder Knoten hat die Farbe rot oder schwarz
 - * Die Wurzel ist schwarz
 - * Wenn ein Knoten rot ist, sind seine Kinder schwarz ("Nicht-Rot-Rot-Regel")
 - * Für jeden Knoten hat jeder Pfad zu einem Blatt die selbe Anzahl an gleichen schwarzen Knoten
- Halbblätter im RBT sind schwarz
- Schwarzhöhe eines Knoten:
Eindeutige Anzahl von schwarzen Knoten auf dem Weg zu einem Blatt im Teilbaum des Knoten
- Für leeren Baum gilt Schwarzhöhe = 0 ($SH(nil) = 0$)
- Höhe eines Rot-Schwarz-Baums
 - * $h \leq 2 \cdot \log_2(n + 1)$ (n Knoten)
 - * In jedem Unterteilbaum gleiche Anzahl schwarzer Knoten
 - * Maximal zusätzlich gleiche Anzahl roter Knoten auf diesem Pfad
 - * Einigermaßen ausbalanciert \Rightarrow Höhe $O(\log n)$
- Alle folgenden Algorithmen arbeiten mithilfe eines Sentinels (zeigt auf sich selbst)

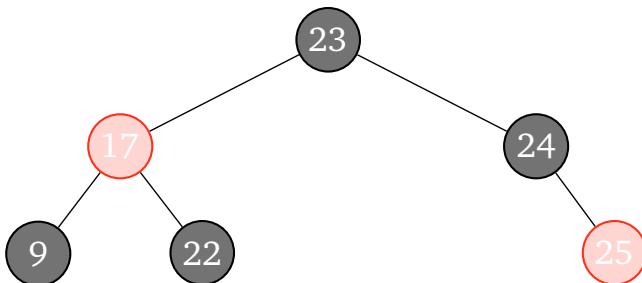


ABBILDUNG 7: Beispielhafte Darstellung wie in 1.3

- **Einfügen**

- Laufzeit: $\Theta(h)$ (h jedoch $\log n$)
- 1. Finde Elternknoten wie im BST (BST-Einfüge Algorithmus)
- 2. Färbe den neuen Knoten rot
- 3. Wiederherstellen der Rot-Schwarz-Bedingung

```
fixColorsAfterInsertion(T,z)
```

```

1 WHILE z.parent.color == red DO           // solange der Elternknoten rot ist
2   IF z.parent == z.parent.parent.left THEN // Linkes Kind (if-Fall)
3     y = z.parent.parent.right;
4     IF y != nil AND y.color == red THEN   // Fall 1
5       z.parent.color = black;
6       y.color = black;
7       z.parent.parent.color = red;
8       z = z.parent.parent;                // rekursiv nach oben weiterführen
9     ELSE                                // Fall 2
10    IF z == z.parent.right THEN          // Zwischenfall (2.1)
11      z = z.parent;
12      rotateLeft(T,z);
13      z.parent.color = black;
14      z.parent.parent.color = red;
15      rotateRight(T, z.parent.parent);  // Rechtes Kind (else-Fall)
16    ELSE
17      // Tauschen von rechts und links
18      T.root.color = black;             // Setzen der Wurzel auf Schwarz

```

- Hilfsmethode `rotateLeft`

```
rotateLeft(T,x)
```

```

1 y = x.right;
2 x.right = y.left;
3 IF y.left != nil THEN
4   y.left.parent = x;
5 y.parent = x.parent;
6 IF x.parent == T.sent THEN
7   T.root = y;
8 ELSE
9   IF x == x.parent.left THEN
10    x.parent.left = y;
11  ELSE
12    x.parent.right = y;
13 y.left = x;
14 x.parent = y;

```

- **Löschen**

- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$
- analog zum binären Suchbaum, aber neue Node erbt Farbe der alten Node
- Wenn "neue" Node schwarz war \Rightarrow Fixup
- Verschiedene Fälle, die auch gegenseitig Voraussetzungen für einander sind
- Da das Ganze jedoch etwas umfangreicher ist, findet es sich nicht hier in der Zusammenfassung

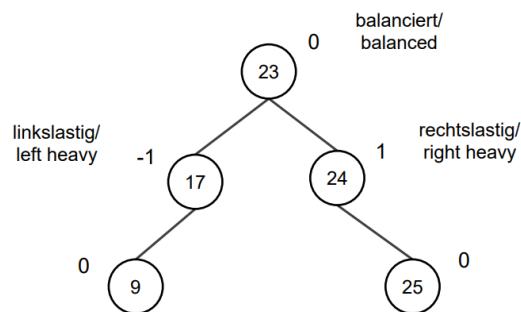
- **Worst-Case-Laufzeiten**

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$

4.2 AVL-Bäume

- **Definition:**

- $h \leq 1.441 \cdot \log n$ (optimierte Konstanten - 1,441 vs 2 (RBT))
- Binärer Suchbaum
- Allerdings Balance in jedem Knoten nur $-1, 0, 1$
- Balance für x : $B(x) = \text{Höhe}(\text{rechter Teilbaum}) - \text{Höhe}(\text{linker Teilbaum})$



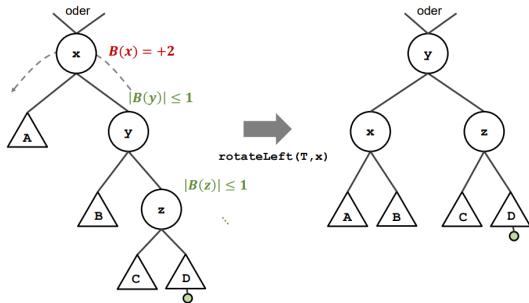
- **AVL vs. Rot-Schwarz**

- **AVL:**
 - * Einfügen und Löschen verletzen in der Regel öfter die Baum-Bedingung
 - * Aufwendiger zum Rebalancieren
- **Rot-Schwarz:**
 - * Suchen dauert evtl. länger
- **Konklusion:**
 - * AVL geeigneter, wenn mehr Such-Operationen und weniger Einfügen und Löschen
- Gemeinsamkeiten:
 - AVL \subset Rot-Schwarz
 - AVL Baum \Rightarrow Rot-Schwarz-Baum mit Höhe $\lceil \frac{h+1}{2} \rceil$
 - Für jede Höhe $h \geq 3$ gibt es einen RBT, der kein AVL-Baum ist ($\text{AVL} \neq \text{RBT}$)

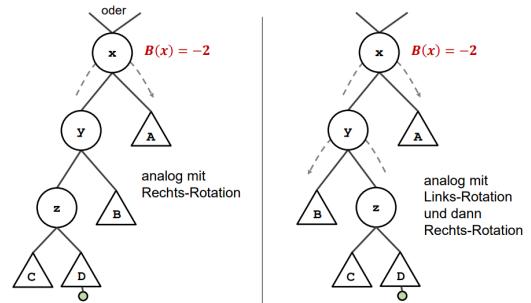
• Einfügen

- Einfügen funktioniert wie beim Binary Search Tree mit Sentinel
- Erfordert danach jedoch Rebalancieren weiter oben im Baum
- Rebalancieren: (verschiedene Fälle)

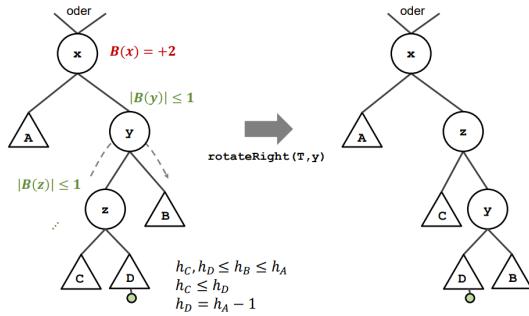
Rebalancieren: Fall I



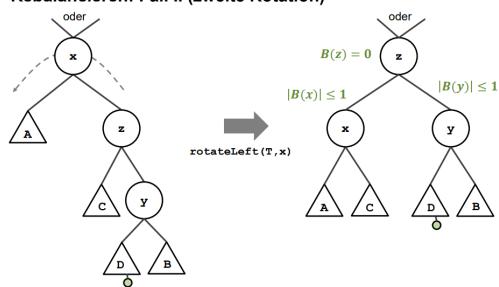
Rebalancieren: Fälle III+IV



Rebalancieren: Fall II (erste Rotation)



Rebalancieren: Fall II (zweite Rotation)



• Löschen

- Analog zum binären Suchbaum
- Rebalancieren bis eventuell in die Wurzel notwendig

• Worst-Case-Laufzeiten

- Einfügen: $\Theta(\log n)$
- Löschen: $\Theta(\log n)$
- Suchen: $\Theta(\log n)$
- theoretisch bessere Konstanten als RBT
- in Praxis aber nur unwesentlich schneller

4.3 Splay-Bäume

- **Definition**

- selbst-organisierende Listen
- Ansatz: Einmal angefragte Werte werden wahrs. noch öfter angefragt
- Angefragte Werte nach oben schieben
- Splay-Bäume sind Untergruppe von BST

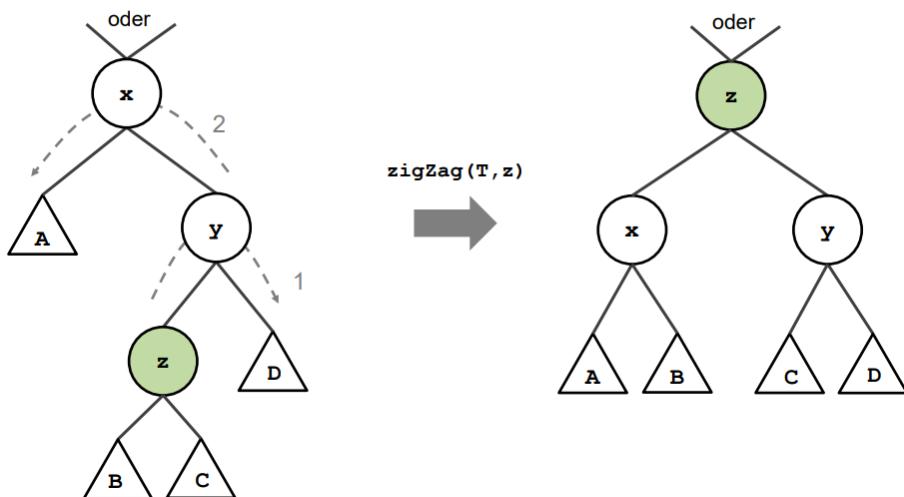
- **Splay-Operationen**

- Suchen oder Einfügen: Spüle gesuchten oder neu eingefügten Knoten an die Wurzel
- Splay: (Folge von Zig-,Zig-Zig-, Zig-Zag-Operationen)

```
splay(T,z)
```

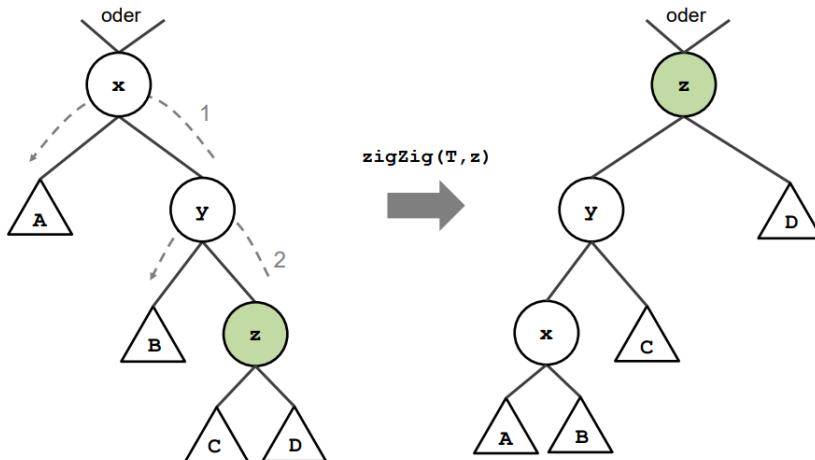
```
1 WHILE z != T.root DO
2     IF z.parent.parent == nil THEN
3         zig(T,z);
4     ELSE
5         IF z == z.parent.parent.left.left OR
6             z == z.parent.parent.right.right THEN
7             zigZig(T,z);
8         ELSE
9             zigZag(T,z);
```

Zig-Zag-Operation =Rechts-Links- oder Links-Rechts-Rotation



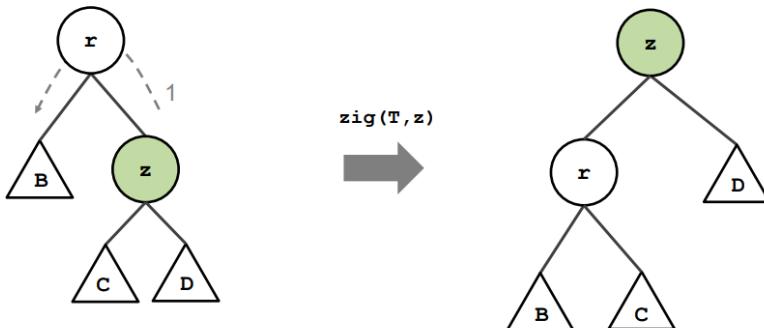
Zig-Zig-Operation

=Links-Links- oder Rechts-Rechts-Rotation



Zig-Operation

=einfache Links- oder Rechts-Rotation



- **Suchen**

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche des Knotens wie im BST
- Hochspülen des gefundenen Knotens (alternativ zuletzt besuchter Knoten, falls nicht gefunden)

- **Einfügen**

- Laufzeit: $O(h)$
- Suche der Position wie im BST
- Einfügen und danach hochspülen des eingefügten Knotens

- **Löschen**

- Laufzeit: $O(h)$
- 1. Spüle gesuchten Knoten per Splay-Operation nach oben
- 2. Lösche den gesuchten Knoten (Wenn einer der beiden entstehenden Teilbäume leer, dann fertig)
- 3. Spüle den größten Knoten im linken Teilbaum nach oben (kann kein rechtes Kind haben)
- 4. Hänge rechten Teilbaum an größten Knoten aus 3. an

- **Laufzeit Splay-Bäume**

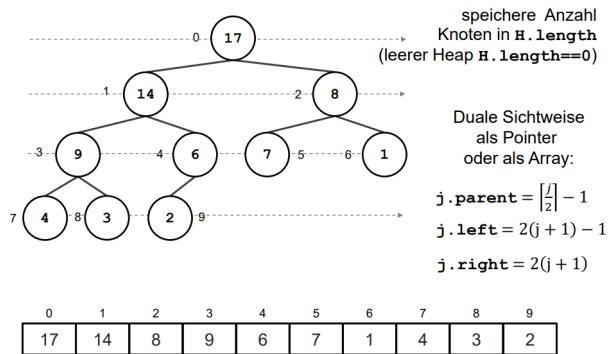
- Amortisierte Laufzeit: Laufzeit pro Operation über mehrere Operationen hinweg
- Worst-Case-Laufzeit pro Operation: $O(\log n)$

4.4 Binäre Max-Heaps

- **Definition**

- Heaps sind keine BSTs
- Eigenschaften binäre Max-Heaps:
 - * bis auf das unterste Level vollständig und dort von links gefüllt ist
 - * Für alle Knoten gilt: $x.parent.key \geq x.key$
 - * Maximum des Heaps steht damit in der Wurzel
- $h \leq \log n$, da Baum fast vollständig

- **Heaps durch Arrays**



- **Einfügen**

- Idee: Einfügen und danach Vertauschen nach oben, bis Max-Eigenschaft wieder erfüllt ist
- Laufzeit: $O(h) = O(\log n)$

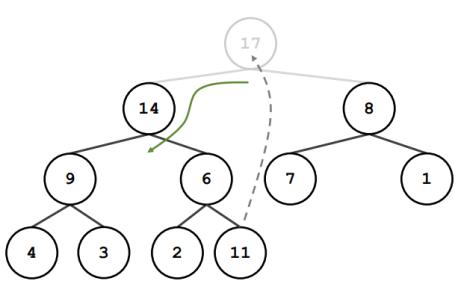
```
insert(H,k) // als unbeschränktes Array
```

```

1 H.length = H.length + 1;
2 H.A[H.length-1] = k;
3
4 i = H.length - 1;
5 WHILE i > 0 AND H.A[i] > H.A[i.parent]
6   SWAP(H.A, i, i.parent);
7   i = i.parent;
```

- Lösche Maximum

1. Ersetze Maximum durch "letztes" Blatt
2. Vertausche Knoten durch Maximum der beiden Kinder (heapify)



extract-max(H)

```

1 IF isEmpty(H) THEN return error "underflow";
2 ELSE
3   max = H.A[0];
4   H.A[0] = H.A[H.length - 1];
5   H.length = H.length - 1;
6   heapify(H, 0);
7   return max;
  
```

heapify(H, i)

```

1 maxind = i;
2 IF i.left < H.length AND H.A[i]<H.A[i.left] THEN
3   maxind = i.left;
4 IF i.right < H.length AND H.A[maxind]<H.A[i.right] THEN
5   maxind = i.right;
6
7 IF maxind != i THEN
8   SWAP(H.A, i, maxind);
9   heapify(H, maxind);
  
```

- Heap-Konstruktion aus Array

- Blätter sind für sich triviale Max-Heaps
- Bauen von Max-Heaps für Teilbäume mithilfe Rekursion per heapify
- (Array nicht unbedingt in richtiger Reihenfolge)

buildHeap(H.A) // Array in H.A

```

1 H.length = A.length;
2 FOR i = ceil((H.length-1)/2) - 1 DOWNTO 0 DO
3   heapify(H.A,i);
  
```

- Heap-Sort

- Idee: Bauen des Heaps aus Array und dann Extraktion des Maximums

heapSort(H.A)

```

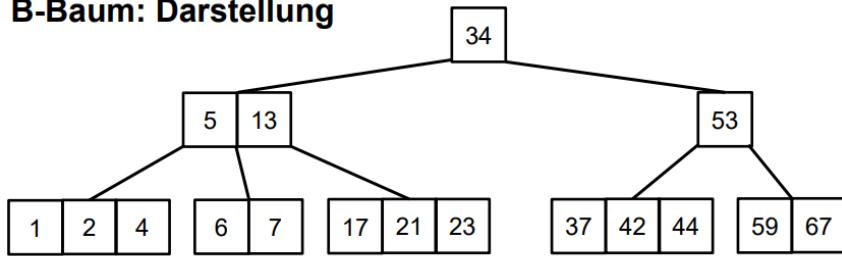
1 buildHeap(H.A)                                // Bauen des Heaps
2 WHILE !isEmpty(H) DO
3   PRINT extract-max(H);                      // Ausgabe des Maximums bis Heap leer ist
  
```

4.5 B-Bäume

- **Definition**

- Jeder B-Baum hat einen angegebenen Grad also z.B. $t = 2$
- Eigenschaften:
 - * Wurzel zwischen $[1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - * Knoten zwischen $[t - 1, \dots, 2t - 1]$ Werte
 - * Werte innerhalb eines Knotens aufsteigend geordnet
 - * Blätter haben alle die gleiche Höhe
 - * Jeder innere Knoten mit n Werten hat $n + 1$ Kinder, sodass gilt:
 $k_0 \leq key[0] \leq k_1 \leq key[1] \leq \dots \leq k_{n-1} \leq key[n - 1] \leq k_n$

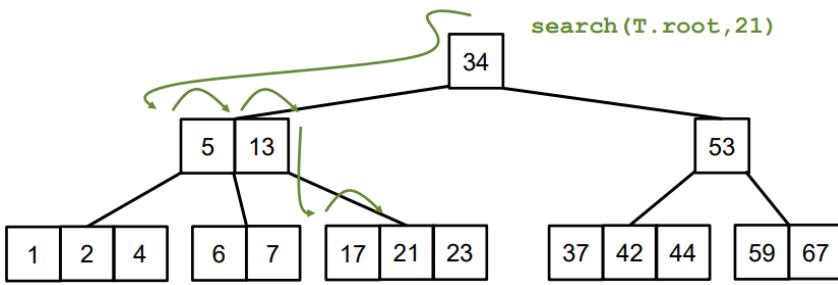
B-Baum: Darstellung



`x.n` – Anzahl Werte eines Knoten **x**
`x.key[0], ..., x.key[x.n-1]` – (geordnete) Werte in Knoten **x**
`x.child[0], ..., x.child[x.n]` – Zeiger auf Kinder in Knoten **x**

- Höhe B-Baum: $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$ (Grad t und n Werte)
- B-Baum wird für größere t flacher

- **Suche**



```
search(x, k)
```

```

1 WHILE x != nil DO
2     i = 0;
3     WHILE i < x.n AND x.key[i] < k DO
4         i++;
5         IF i < x.n AND x.key[i] == k THEN
6             return(x, i);
7         ELSE
8             x = x.child[i];
9         return nil;
```

- **Einfügen**

- Einfügen erfolgt immer in einem Blatt
- Falls das Blatt voll ist, muss jedoch gesplittet werden
- ⇒ Beim Durchlaufen des Baumes an jeder notwendigen (voll) Position splitten
- Splitten:
 - * Bricht volle Node auf und fügt mittleren Wert zur Elternnode hinzu
 - * Aus den anderen Werten entstehen nun jeweils eigene Kinder
 - * An der Wurzel splitten erzeugt neue Wurzel und erhöht Baumhöhe um eins
- Ablauf zusammengefasst:
 - (a) Start bei Wurzel, falls kein Platz mehr splitten
 - (b) Durchlaufen des Baumes bis zur richtigen Position und immer, falls voll, splitten
 - (c) Einfügen der Node (fertig)

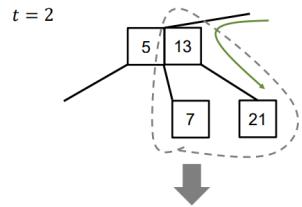
```
insert(T, z)
```

```

1 Wenn Wurzel schon 2t-1 Werte, dann splitte Wurzel
2 Suche rekursiv Einfügeposition:
3     Wenn zu besuchendes Kind 2t-1 Werte, splitte es erst
4     Füge z in Blatt ein
```

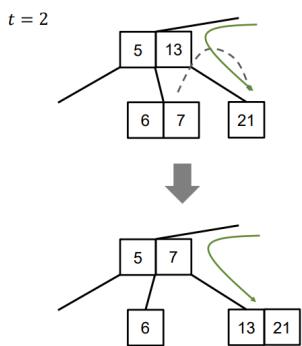
• Löschen

- Wenn Blatt noch mehr als $t-1$ Werte, kann der Wert einfach entfernt werden
- Allerdings durchlaufen wir hier den Baum auch wieder von oben und stellen gewisse Voraussetzungen her
- Durchlaufen des Baumes von oben und Anwendung der folgenden Algorithmen



Allgemeines Verschmelzen:

- * Kind und alle rechten/linken Geschwisterknoten nur $t - 1$ Werte
- * Wenn Elternknoten vorher min. t Werte
⇒ keine Änderung oberhalb notwendig



Allgemeines Rotieren/Verschieben:

- * Kind nur $t - 1$ Werte
- * Geschwister jedoch mehr als $t - 1$ Werte
- * keine Änderung oberhalb notwendig

- Code:

```
delete(T, k)
1 Wenn Wurzel nur 1 Wert und beide Kinder t-1 Werte,
2 verschmelze Wurzel und Kinder (reduziert Höhe um 1)
3 Suche rekursiv Löschposition:
4   Wenn zu besuchendes Kind nur t-1 Werte,
5     verschmelze es oder rotiere/verschiebe
6   Entferne Wert k im inneren Knoten/Blatt
7 // Ohne Probleme, aufgrund vorheriger Anpassung
```

• Laufzeiten

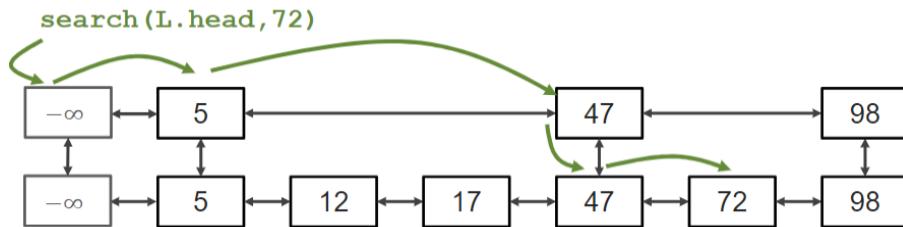
- Einfügen: $\Theta(\log_t n)$
- Löschen: $\Theta(\log_t n)$
- Suchen: $\Theta(\log_t n)$
- Nur vorteilhaft wenn Daten blockweise eingelesen werden
- \mathcal{O} -Notation versteckt hier konstanten Faktor t für Suche innerhalb eines Knotens

5 Randomized Data Structures

5.1 Skip Lists

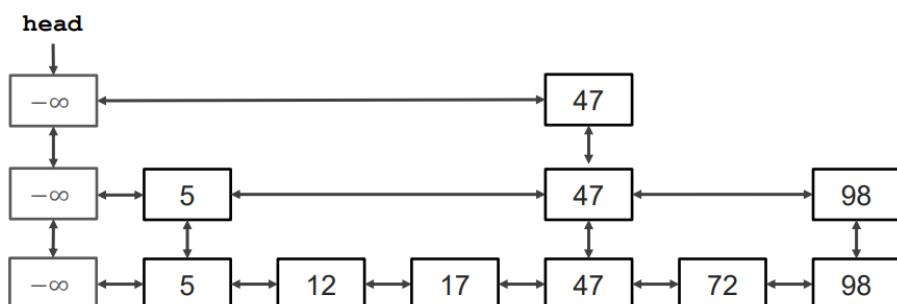
- **Idee**

- Einfügen von "Express-Liste" mit einigen Elementen
- Beginne mit Suche in der Express-Liste mit weniger Elementen
- Falls das suchende Element kleiner als nächstes Element in Express-Liste \Rightarrow weiter nach rechts
- Falls nicht \Rightarrow Eine Stufe nach unten wandern und dort weiter suchen



- Verbesserung: Zusätzliche Stufen an Express-Listen
- Anwendung:
 - * Gut für parallele Verarbeitung z.B. Multicore-Systeme (Einfügen und Löschen)
 - * Dafür logarithmische Laufzeit nur im Durchschnitt
- Auswahl von Elementen:
 - * Abhängig von einer gewählten Wahrscheinlichkeit p
 - * Element kommt mit Wahrscheinlichkeit p in übergeordnete Liste
 - * Höhe: $h = O(\log_{\frac{1}{p}} n)$
 - * Anzahl Elemente: $n \Rightarrow pn \Rightarrow p^2n \Rightarrow \dots$ (unten nach oben)

- **Implementierung**



`L.head` – erstes/oberstes Element der Liste

`L.height` – Höhe der SkipList

`x.key` – Wert

`x.next` – Nachfolger

`x.prev` – Vorgänger

`x.down` – Nachfolger Liste unten

`x.up` – Nachfolger Liste oben

`nil` – kein Nachfolger / leeres Element

- **Suche**

- Laufzeit ist von Expresslisten abhängig

```
search(L, k)
1 current = L.head;
2 WHILE current != nil DO
3     IF current.key == k THEN
4         return current;
5     IF current.next != nil AND current.next.key <= k THEN
6         current = current.next;
7     ELSE
8         current = current.down;
9 return nil;
```

- **Einfügen**

- Füge auf unterster Ebene ein
 - Evtl. auf höheren Ebenen mit zufälliger Wahl mithilfe von p auf jeder Ebene

- **Löschen**

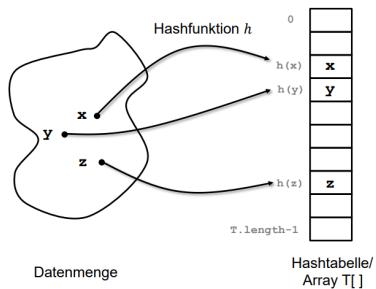
- Entferne Vorkommen des Elements aus allen Ebenen

- **Laufzeiten**

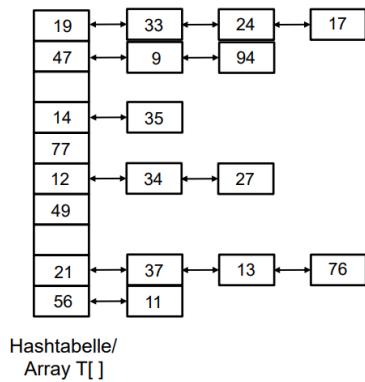
- Einfügen: $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
 - Löschen: $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
 - Suchen: $\Theta(\log_{\frac{1}{p}} n)$
 - (Im Durchschnitt)
 - O -Notation versteckt konstanten Faktor $\frac{1}{p}$
 - Speicherbedarf im Durchschnitt: $\frac{n}{1-p}$

5.2 Hashtables

- Idee



- * Hashfunktion sollte gut verteilen
- * $h(x)$ sollte uniform sein
- * Unabhängig im Intervall $[0, T.length - 1]$ verteilt
- * Einfügen mit konstant vielen Array-Operationen



- * Kollisionsauflösung z.B. mithilfe von LinkedLists
 - * Neue Elemente werden vorne angefügt
 - * Konstante Anzahl an Array-Operationen
 - * Soviele Schritte wie die Liste lang ist
 - * Uniforme Hashfunktion
- $\Rightarrow \frac{n}{T.length}$ Einträge pro Liste

- Hash-Funktionen

- Universelle Hash-Funktion:
 - * Wähle zufällige $a, b \in [0, p - 1]$, p prim, $a \neq 0$
 - * $h_{a,b}(x) = ((a \cdot x + b) \bmod p) \bmod T.length$
- Kryptographische Hash-Funktionen:
 - * MD5, SHA-1, SHA-2, SHA-3
 - * $h(x) = MD5(x) \bmod T.length$

- **Hashtables vs. Bäume**

- Hashtables:
 - * nur Suche nach bestimmten Wert möglich
 - * meist größer als zu erwartende Anzahl Einträge
- Bäume:
 - * schnelles Traversieren zu Nachbarn möglich
 - * Bereichssuche möglich

- **Laufzeiten**

- Wählt mal $T.length = n$ ergibt sich konstante Laufzeit
- Einfügen: $\Theta(1)$
- Löschen: $\Theta(1)$
- Suchen: $\Theta(1)$
- (Im Durchschnitt, beim Einfügen sogar im Worst-Case)
- Speicherbedarf i.d.R. höher als n , meist ca. $1,33 \cdot n$

5.3 Bloom-Filter

- **Idee**

- Speicherschonende Wörterbücher mit kleinem Fehler
- z.B. Vermeidung von schlechten Passwörtern
 - (a) Abspeichern aller schlechten Passwörter in kompakter Form
 - (b) Prüfe, ob eingegebenes Passwort im Bloom-Filter
- z.B. Erkennen von schädlichen Websites (Chrome früher)

- **Erstellen**

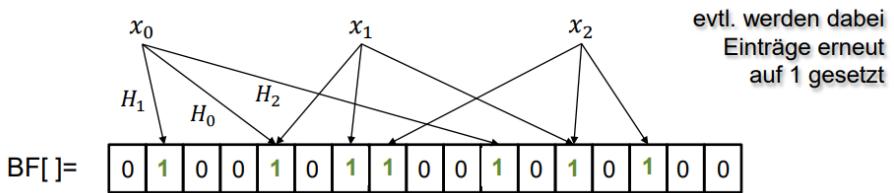
- n Elemente x_0, \dots, x_{n-1}
- m Bits-Speicher z.B. als Bit-Array
- k gute Hash-Funktionen H_0, \dots, H_{k-1} mit Bildbereich $0, 1, \dots, m - 1$
- Empfohlene Wahl: $k = \frac{m}{n} \cdot \ln 2$ (Fehlerrate von ca. 2^{-k})

- Code:

```
initBloom(X, BF, H) // H Array of hash functions

1 FOR i = 0 TO BF.length - 1 DO
2   BF[i] = 0;
3 FOR i = 0 TO X.length - 1 DO
4   FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
5     BF[H[j](X[i])] = 1;
```

1. Initialisiere Array mit 0-Einträgen
2. Schreibe für jedes Element in jede Bit-Position $H_0(x_i), \dots, H_{k-1}(x_i)$ eine 1



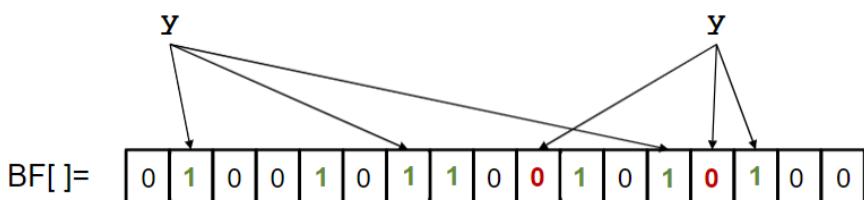
- **Suche**

```
searchBloom(BF, H, y)

1 result = 1;
2 FOR j = 0 TO H.length - 1 DO
3   result = result AND BF[H[j](y)];
4 return result;
```

- Gibt an, dass y im Wörterbuch, falls alle k Einträge für y in $BF = 1$ sind

in Wörterbuch:



nicht in Wörterbuch:

- Eventuell "false positives" (1, obwohl y nicht im Wörterbuch)
 - * Passiert, falls die Einträge vorher von anderen Werten getroffen wurden
 - * Daher gute Hashfunktionen und Filtergröße nicht zu klein

6 Graph Algorithms

6.1 Graphen

- **(Endlicher) gerichteter Graph**

- (endlicher) gerichteter Graph $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge V
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge $E \subseteq V \times V$
- $(u, v) \in E$: Kanten von Knoten u zu v
- Kanten haben eine Richtung

- **Ungerichtete Graphen**

- (endlicher) ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- besteht aus (endlicher) Knotenmenge V
- besteht aus (endlicher) Kantenmenge $E \subseteq V \times V$, sodass $(u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$
- Kanten haben keine Richtung

- **Pfadfinder**

- Knoten v ist von Knoten u erreichbar, wenn es einen Pfad gibt
- u ist immer von u per leerem Pfad ($k=1$) erreichbar
- Länge des Pfades = $k - 1$ = Anzahl Kanten

- **Zusammenhänge**

- Ungerichtet: Zusammenhängend wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist
- Gerichtet: **Stark** zusammenhängend, wenn obiges auch gemäß Kantenrichtung gilt

- **Bäume und Subgraphen**

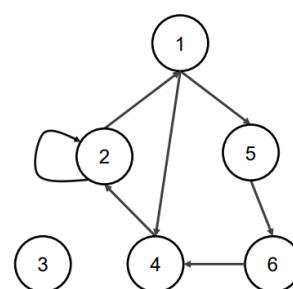
Graph G ist ein Baum, wenn V leer ist oder wenn es einen Knoten in V gibt, von dem aus jeder andere Knoten eindeutig erreichbar ist (Wurzel).

Graph $G' = (V', E')$ ist Subgraph von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

- **Darstellung von Graphen**

- Als Adjazenzmatrix (1, wenn Kante von i zu j / 0, wenn keine Kante)
- Bei ungerichteten Graphen ist Matrix spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Speicherbedarf: $\Theta(|V|^2|)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Auch darstellbar als Array mit verketteten Listen
- Speicherbedarf: $\Theta(|V| + |E|)$

- **Gewichtete Graphen**

- gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$
- besitzt zusätzlich Funktion $w : E \rightarrow R$
- Abspeichern des Werts einer Kante $w((u, v))$

6.2 Breadth-First Search (BFS)

- **Idee**

- Besuche zuerst alle unmittelbaren Nachbarn, dann deren Nachbarn, usw.
- Anwendung: Webcrawling, Garbage Collection,..

- **Algorithmus**

```
BFS(G,s) //G=(V,E) s = source node in V

1 FOREACH u in V-{s} DO
2     u.color = WHITE;           // Weiß = noch nicht besucht
3     u.dist = +∞;              // Setzen der Distanzen auf Unendlich
4     u.pred = nil;             // Setzen der Vorgänger auf nil
5     s.color = GRAY;           // Anfang bei Startnode
6     s.dist = 0;
7     s.pred = nil;
8     newQueue(Q);
9     enqueue(Q,s);
10    WHILE !isEmpty(Q) DO
11        u = dequeue(Q);
12        FOREACH v in adj(G,u) DO
13            IF v.color == WHITE THEN
14                v.color == GRAY;
15                v.dist = u.dist+1;
16                v.pred = u;
17                enqueue(Q,v);
18        u.color = BLACK;          // Knoten abgearbeitet
```

Farben:

- * WHITE: Knoten noch nicht besucht
- * GRAY: Knoten in Queue für nächsten Schritt
- * BLACK: Knoten ist Fertig

- Laufzeit: $O(|V| + |E|)$
- Nach Algorithmus steht in v die kürzeste Distanz von s nach v

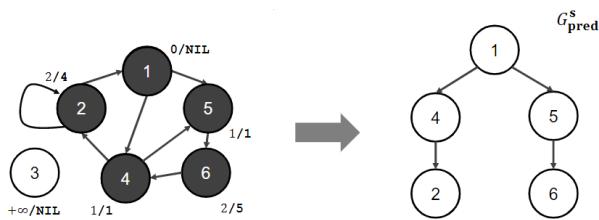
- Kürzeste Pfade ausgeben

```
print-path(G,s,v) // Assumes that BFS(G,s) has already been executed
```

```

1 IF v == s THEN
2   print s;
3 ELSE
4   IF v.pred == nil THEN
5     print 'no path from s to v'
6   ELSE
7     print-path(G,s,v.pred);
8     print v;
```

- Abgeleiteter BFS-Baum



- Subgraph $G^s_{pred} = (V^s_{pred}, E^s_{pred})$ von G :
 - * $V^s_{pred} = \{v \in V | v.pred \neq \text{nil}\} \cup \{s\}$
 - * $E^s_{pred} = \{(v.pred, v) | v \in V^s_{pred} - \{s\}\}$
- G^s_{pred} enthält alle von s aus erreichbaren Knoten in G
- Außerdem handelt es sich hier nur um kürzeste Pfade

6.3 Depth-First Search(DFS)

- Idee

- Besuche zuerst alle noch nicht besuchten Nachfolgeknoten
- "Laufe so weit wie möglich weg vom aktuellen Knoten"

- Algorithmus

```
DFS(G)
1 FOREACH u in V DO
2   u.color = WHITE;
3   u.pred = nil;
4   time = 0;           // time hier als globale Variable
5 FOREACH u in v DO
6   IF u.color == WHITE THEN
7     DFS-VISIT(G,u) // Start eines rekursiven Aufrufs
```

DFS-VISIT(G, u)

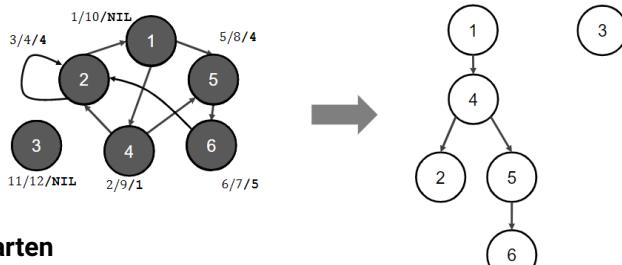
```

1 time = time + 1;
2 u.disc = time;           // discovery time
3 u.color = GRAY;
4 FOREACH v in adj(G, u) DO
5     IF v.color == WHITE THEN
6         v.pred = u;
7         DFS-VISIT(G, v);
8     u.color = BLACK;
9     time = time + 1;
10    u.finish = time;      // finish time

```

- **DFS-Wald = Menge von DFS-Bäumen**

- Subgraph $G_{pred} = (V, E_{pred})$ von G
- besteht aus $E_{pred} = (v.pred, v) | v \in V, v.pred \neq \text{nil}$
- DFS-Baum gibt nicht unbedingt den kürzesten Weg wieder

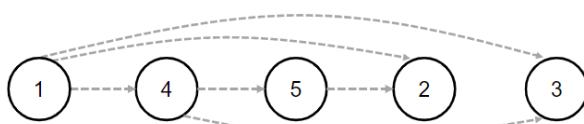


- **Kantenarten**

- Baumkanten: alle Kanten in G_{pred}
- Vorwärtskanten: alle Kanten in G zu Nachkommen in G_{pred} , die nicht Baumkante
- Rückwärtskanten: alle Kanten in G zu Vorfahren in G_{pred} , die nicht Baumkante
- Kreuzkanten: alle anderen Kanten in G (inkl. Schleifen)

- **Anwendungen DFS**

- Job Scheduling (Job X muss vor Job Y beendet sein)
- Topologisches Sortieren
 - * nur für dag (directed acyclic graph)
 - * Kanten immer nur nach rechts
 - * Sortierung aber nicht eindeutig



TOPOLOGICAL-SORT(G)

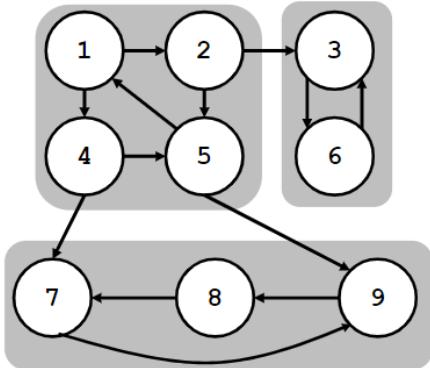
```

1 new LinkedList(L);
2 run DFS(G) but, each time a node is finished, insert in front of L
3 return L.head;

```

- **Starke Zusammenhangskomponenten**

- Knotenmenge $C \subseteq V$, so dass
 - es zwischen zwei Knoten $u, v \in C$ einen Pfad von u nach v gibt
 - und es keine Menge $D \subseteq V$ mit $C \subsetneq D$ gibt, für die obiges auch gilt.



Eigenschaften:

- * Verschiedene SCC's sind disjunkt
- * Zwei SCC's sind nur in eine Richtung verbunden

- Algorithmus:

- * DFS zweimal laufen lassen

Einmal auf Graph G

Einmal auf Graph $G^T = (V, E^T)$ (transponiert)

- * Dadurch bleiben die SCC's gleich, die Kanten drehen sich aber jeweils um

- * Code:

SCC(G)

```

1 run DFS(G)
2 compute  $G^T$ 
3 run DGS( $G^T$ ) but visit vertices in main loop
   in descending finish time from 1
4 output each DFS tree from above as one SCC

```

6.4 Minimale Spannbäume

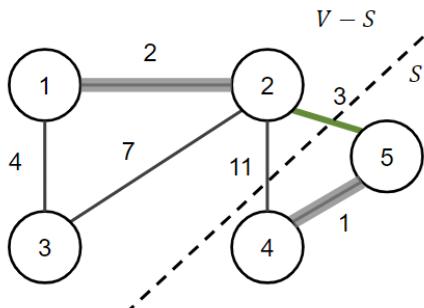
- **Definition**

- Verbindung aller Knoten miteinander
- Minimaler Spannbaum \Rightarrow Minimales Gewicht

- **Allgemeiner Algorithmus**

```
genericMST(G,w)
1 A = ∅
2 WHILE A does not form a spanning tree FOR G DO
3     find safe edge {u,v} FOR A
4     A = A ∪ {{u,v}}
5 return A
```

Terminologie:



- * Schnitt $(S, V-S)$ partitioniert Knoten in zwei Mengen
- * $\{u,v\}$ überbrückt Schnitt, wenn $u \in S$ und $v \in V - S$
- * Schnitt respektiert $A \subseteq E$, wenn keine Kante $\{u,v\}$ aus A den Schnitt überbrückt
- * $\{u,v\}$ leichte Kante für $(S, V-S)$, wenn $w(\{u,v\})$ minimal für alle den Schnitt überbrückenden Kanten
- * $\{u,v\}$ sicher für A , wenn $A \cup \{\{u,v\}\}$ Teilmenge eines MST

- **Algorithmus von Kruskal**

- Lässt parallel mehrere Unterbäume eines MST wachsen
- In Worten: Suchen der "kleinsten" Kante und Zusammenfügen von Mengen, falls noch nicht geschehen
- Laufzeit: $O(|E| \cdot \log |E|)$

```
MST-Kruskal(G,w)
1 A = ∅
2 FOREACH v in V DO
3     set(v) = {v};           // Menge mit sich selbst
4 Sort edges according to weight in nondecreasing order
5 FOREACH {u,v} in E according to order DO
6     IF set(u) != set(v) THEN // Mengen noch nicht verbunden
7         A = A ∪ {{u,v}};
8         UNION(G,u,v);      // Zusammenführen der Mengen aller Knoten aus den Sets
9 return A;
```

- **Algorithmus von Prim**

- Konstruiert einen MST Knoten für Knoten
- Fügt immer leichte Kante zu zusammenhängender Menge hinzu
- Laufzeit: $O(|E| + |V| \cdot \log|V|)$

```

MST-Prim(G,w,r) // r is given root

1 FOREACH v in V DO
2     v.key = +∞;
3     v.pred = nil;
4 r.key = -∞
5 Q = V;
6 WHILE !isEmpty(Q) DO
7     u = EXTRACT-MIN(Q);      // smallest key value
8     FOREACH v in adj(u) DO
9         IF v∈Q and w({u,v})<v.key THEN
10            v.key = w({u,v});
11            v.pred = u;

```

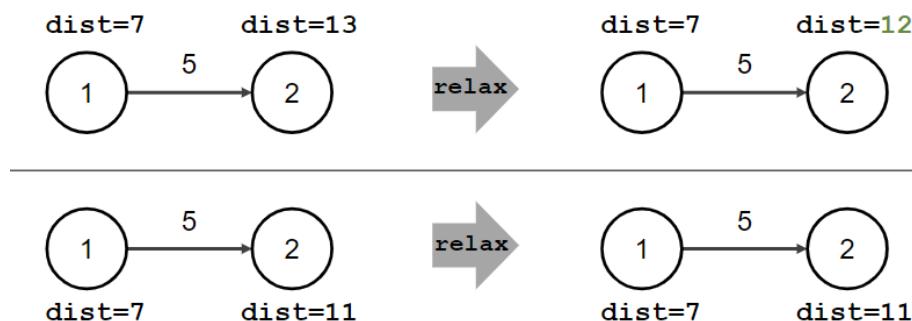
6.5 Kürzeste Wege in (gerichteten) Graphen

- **Definition**

- SSSP - Single-Source Shortest Path
- Von Quelle s ausgehend die kürzesten Pfade zu allen anderen Knoten
- Kürzester Pfad: Minimales Gewicht von einem zum anderen Knoten
- BFS findet nur minimale Kantenwege (nicht Gewichtswege)
- MST minimiert das Gesamtgewicht des Baumes (nicht zu einzelnen Kanten)
- Negative Kantengewichte sind erlaubt, aber keine Zyklen mit negativem Gesamtgewicht

- **Gemeinsame Idee für Algorithmen - Relax**

- Verringere aktuelle Distanz von Knoten v , wenn durch Kante (u, v) kürzer erreichbar



```
relax(G,u,v,w)
```

```

1 IF v.dist > u.dist + w((u,v)) THEN
2     v.dist = u.dist + w((u,v));
3     v.pred = u;

```

- **Bellman-Ford-Algorithmus**

- Laufzeit: $\Theta(|E| \cdot |V|)$

```
Bellman-Ford-SSSP(G,s,w)

1 initSSSP(G,s,w);
2 FOR i = 1 TO |V|-1 DO
3     FOREACH (u,v) in E DO
4         relax(G,u,v,w);
5     FOREACH (u,v) in E DO    // Prüfung ob negativer Zyklus
6         IF v.dist > u.dist+w((u,v)) THEN
7             return false;
8         return true;
```

```
initSSSP(G,s,w)

1 FOREACH v in V DO
2     v.dist = infinity;
3     v.pred = nil;
4 s.dist = 0;
```

- **TopoSort für dag**

- Erhalten des kürzesten Pfades durch das topologische Sortieren
- Laufzeit: $\Theta(|E| + |V|)$

```
TopoSort-SSSP(G,s,w) // G muss dag sein

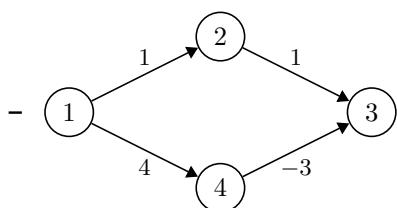
1 initSSSP(G,s,w);
2 execute topological sorting
3 FOREACH u in V in topological order DO
4     FOREACH v in adj(u) DO
5         relax(G,u,v,w);
```

- **Dijkstra-Algorithmus**

- Voraussetzung: Keine negativen Kantengewichte
- Laufzeit: $\Theta(|V| \cdot \log|V| + |E|)$

```
Dijkstra-SSSP(G,s,w)

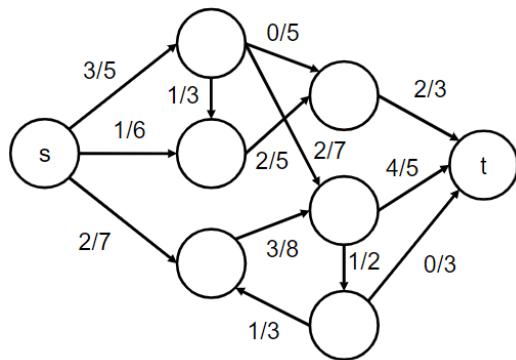
1 initSSSP(G,s,w);
2 Q = V;
3 WHILE !isEmpty(Q) DO
4     u = EXTRACT-MIN(Q);      // smallest distance
5     FOREACH v in adj(u) DO
6         relax(G,u,v,w);
```



- * Beispiel für Problem mit negativen Kantengewichten bei Dijkstra: Dijkstra würde Pfad 1-2-3 liefern, da das Kantengewicht 4 größer als der andere Pfad ist.

6.6 Maximaler Fluss in Graphen

- Idee



- * Kanten haben Flusswert und maximale Kapazität
- * Jeder Knoten (außer s und t) haben den gleichen eingehenden und ausgehenden Fluss
- * Ziel: Finde maximalen Fluss von s nach t
- * s: Source/Quelle
- * t: Target/Senke

- Flussnetzwerk:

Ein Flussnetzwerk ist ein gewichteter, gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kapazität c , so dass $c(u, v) \geq 0$ für $(u, v) \in E$ und $c(u, v) = 0$ für $(u, v) \notin E$, mit zwei Knoten $s, t \in V$, so dass jeder Knoten von s aus erreichbar ist und t von jedem Knoten aus erreichbar ist. Damit gilt $|E| \geq |V| - 1$.

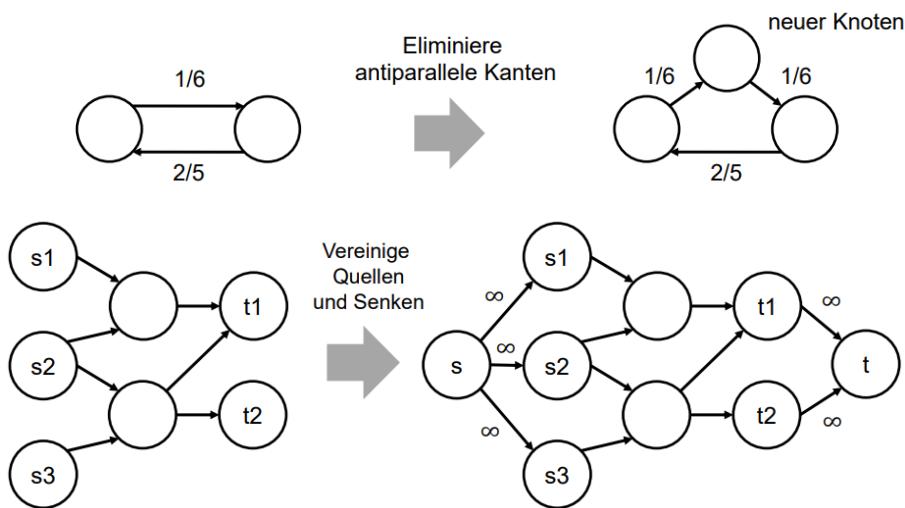
- Fluss:

Ein Fluss $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Kapazität c und Quelle s und Senke t erfüllt $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ für alle $u, v \in V$, sowie für alle $u \in V - \{s, t\}$:
 $\sum_{v \in V} f(u, v) = \sum_{v \in V} f(v, u)$ (ausgehend = eingehend)

- Wert eines Flusses

Der Wert $|f|$ eines Flusses $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Flussnetzwerk G ist:
 $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, s)$

- Transformationen



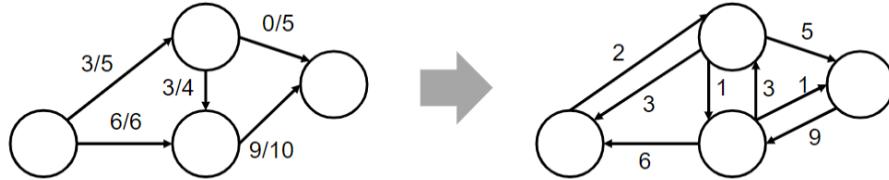
• Restkapazitätsgraph

- Wird für Ford-Fulkerson benötigt

- Restkapazität $c_f(u, v)$:

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & \text{falls } (u, v) \in E \\ f(v, u) & \text{falls } (v, u) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $G_f = (V, E_f)$ mit $E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$



- Suche eines Pfades von s nach t und Erhöhung aller Flüsse um niedrigsten möglichen Wert auf Pfad

• Ford-Fulkerson-Algorithmus

- Idee: Suche Pfad von s nach t , der noch **erweiterbar** ist
- Suche dieses Pfades im Restkapazitätsgraphen G_f (mögliche Zu- und Abflüsse)
- Code:

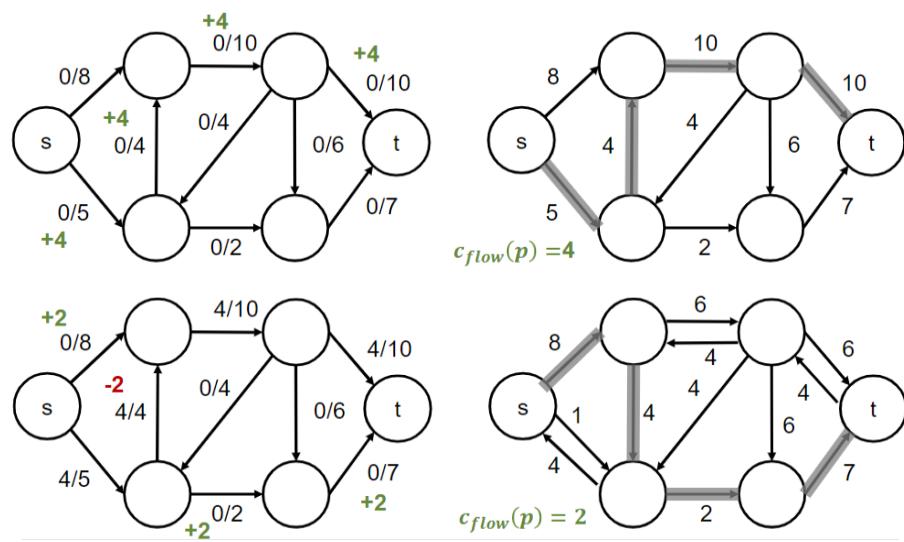
```
Ford-Fulkerson(G,s,t,c)
```

```

1 FOREACH e in E do e.flow = 0;
2 WHILE there is path p from s to t in  $G_{flow}$  DO
3    $c_{flow}(p) = \min \{c_{flow}(u, v) : (u, v) \in p\}$ 
4   FOREACH e in p DO
5     IF e in E THEN
6       e.flow = e.flow +  $c_{flow}(p)$ ;
7     ELSE
8       e.flow = e.flow -  $c_{flow}(p)$ ;
```

- Die Pfadsuche erfolgt z.B. per BFS oder DFS
- Laufzeit: $O(|E| \cdot u \cdot |f^*|)$
($O(|V| \cdot |E|^2)$ Mit Verbesserung nach Edmonds-Karp)
(wobei f^* maximaler Fluss und Fluss um bis zu $\frac{1}{u}$ pro Iteration wächst)

- Beispiel:



7 Advanced Designs

7.1 Dynamische Programmierung

- **Anwendung**

Anwendung, wenn sich Teilprobleme überlappen

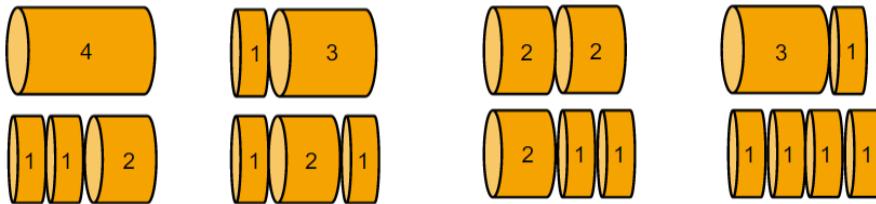
1. Wir charakterisieren die Struktur einer optimalen Lösung
2. Wir definieren den Wert einer optimalen Lösung rekursiv
3. Wir berechnen den Wert einer optimalen Lösung (meist bottom-up Ansatz)
4. Wir konstruieren eine zugehörige optimale Lösung aus berechneten Daten

- **Stabzerlegungsproblem**

Ausgangsproblem: Stangen der Länge n cm sollen so zerschnitten werden, dass der Erlös r_n maximal ist, indem die Stange in kleinere Stäbe geschnitten wird.

Länge i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

Beispiel: Gesamtstange hat Länge 4. Welchen Erlös kann man max. erhalten?



Optimaler Erlös: zwei 2cm lange Stücke ($5 + 5 = 10$)

- *Aufteilung der Eisenstange:*

- * Stange mit Länge n kann auf 2^{n-1} Weisen zerlegt werden
- * Position i : Distanz vom linken Ende der Stange
- * Aufteilung in k Teilstäbe ($1 \leq k \leq n$)
- * optimale Zerlegung: $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$
- * maximaler Erlös: $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$
- * z.B.: $r_4 = 10$ (siehe oben)

- Rekursive Top-Down Implementierung:

```
CUT-ROD(p,n) // p Preis-Array, n Stangenlänge
1 IF n== 0
2   return 0;
3 q = -∞;
4 FOR i = 1 TO n // nicht Start bei 0, sonst kein Rekursionsschritt
5   q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i));
6 return q;
```

- Stabzerlegung via Dynamischer Programmierung:

- * Ziel:
Mittels dynamischer Programmierung wollen wir CUT-ROD in einen effizienten Algorithmus verwandeln.
- * Bemerkung:
Naiver rekursiver Ansatz ist **ineffizient**, da dieser immer wieder dieselben Teilprobleme löst.
- * Ansatz:
Jedes Teilproblem nur einmal lösen. Falls die Lösung eines Teilproblems nochmal benötigt wird, schlagen wir diese nach.
- * Dynamische Programmierung wird zusätzlichen Speicherplatz benutzen um Laufzeit einzusparen.
- * Reduktion der exponentiellen Laufzeit auf polynomielle.

- Rekursive Top-Down mit Memoisation:

- * Idee: Speicherung der Lösungen der Teilprobleme
- * Laufzeit: $\Theta(n^2)$

MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...] be new array
2 FOR i = 0 TO n
3   r[i] = -∞
4 return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r) // r new Array

```
1 IF r[n] ≥ 0                                // Abfrage ob vorhanden
2   return r[n]
3 IF n == 0
4   q = 0
5 ELSE
6   q = -∞
7   FOR i = 1 to n
8     q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n - i, r))
9   r[n] = q                                    // Abspeichern
10  return q
```

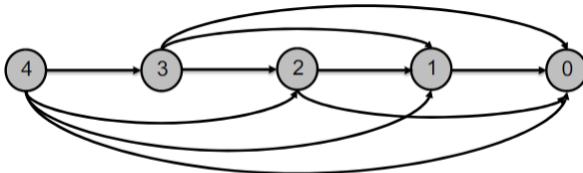
- Bottom-Up Ansatz:

- * Laufzeit: $\Theta(n^2)$
- * Sortieren der Teilprobleme nach ihrer Größe und lösen in dieser Reihenfolge
- * Immer alle kleineren Teilprobleme bei bestimmten Wert bereits gelöst

```
BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

1 Let r[0...n] be a new array
2 r[0] = 0
3 FOR j = i TO n
4   q = -∞
5   FOR i = 1 TO j
6     q = max(q, p[i] + r[j - i])
7   r[j] = q
8 return r[n]
```

- * Teilproblemgraph ($i \rightarrow j$ bedeutet, dass Berechnung von r_i den Wert r_j benutzt)

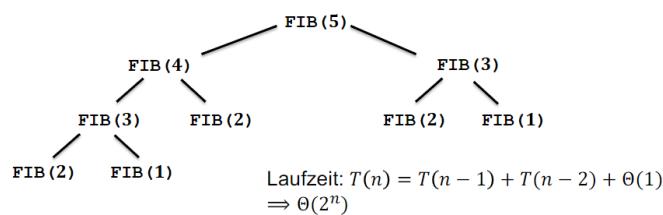


- Fibonacci-Zahlen

- $F_1 = F_2 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Naiver rekursiver Algorithmus:

```
FIB(n)

1 IF n ≤ 2
2   f = 1;
3 ELSE
4   f = FIB(n-1) + FIB(n-2);
5 return f;
```



Gleiche Teilprobleme werden wieder mehrmals gelöst

– Rekursiver Algorithmus mit Memoisation

- * Wieder Abspeichern von Teilproblemen um Laufzeit einzusparen
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

```
MEMOIZED-FIB(n)
```

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 0 TO n - 1
3     m[i] = 0
4 return MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

```
MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

```
1 IF m[n-1] != 0
2     return m[n-1];           // Auslesen von gespeicherten Werten
3 IF n ≤ 2
4     f = 1;
5 ELSE
6     f = MEMOIZED-FIB-AUX(n-1, m) + MEMOIZED-FIB-AUX(n-2, m);
7 m[n-1] = f;
8 return f;
```

– Bottom-Up Algorithmus

- * Hier wieder Berechnen aller Teilprobleme von unten beginnend

```
BOTTOM-UP-FIB(n)
```

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 1 TO n
3     IF i = 0
4         f = 0;
5     ELSEIF i ≤ 2
6         f = 1;
7     ELSE
8         f = m(i-1) + m(i-2);
9     m[i] = f;
10 return m[n];
```

7.2 Greedy-Algorithmus

- **Idee**

- Trifft stets die Entscheidung, die in diesem Moment am besten erscheint
- Trifft **lokale** optimale Entscheidung (evtl. nicht global die Beste)

- **Aktivitäten-Auswahl-Problem**

- *Definition*

- * 11 anstehende Aktivitäten $S = \{a_1, \dots, a_{11}\}$
- * Startzeit s_i und Endzeit f_i , wobei $0 \leq s_i < f_i < \infty$
- * Aktivität a_i findet im halboffenen Zeitintervall $[s_i, f_i)$ statt
- * Zwei Aktivitäten sind kompatibel, wenn sich deren Zeitintervalle nicht überlappen

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Aktivitäten: $\{a_3, a_9, a_{11}\}$

Aktivitäten: $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$

Aktivitäten: $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

- *Ansatz mittels dynamischer Programmierung*

- * Menge von Aktivitäten, die starten nachdem a_i endet und enden, bevor a_j startet
 $S_{ij} = \{a \in S, a = (s, f) : s \geq f_i, f < s_j\}$
- * Definiere maximale Menge A_{ij} von paarweise kompatiblen Aktivitäten in S_{ij} .
 $c[i, j] = |A_{ij}|$
- * Optimale Lösung für Menge S_{ij} die Aktivitäten a_k enthält:
 $c[i, j] = \max_{a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\}$ (0, falls $S_{ij} = \emptyset$)

- *Greedy-Wahl*

- * lokal die beste Wahl
- * Auswahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Ressourcen)
- * Also hier Teilprobleme, die nach a_1 starten
- * $S_k = \{a_i \in S : s_i \geq f_k\}$: Menge an Aktivitäten, die starten, nachdem a_k endet
- * *Optimale-Teilstruktur-Eigenschaft*
Wenn a_1 in optimaler Lösung enthalten ist, dann besteht optimale Lösung zu ursprünglichem Problem aus Aktivität a_1 und allen Aktivitäten zur einer optimalen Lösung des Teilproblems S_1

- Rekursiver Greedy-Algorithmus

- * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)
```

```

1 // s Anfangszeitenarray, f Endzeitenarray,
2 // k Index von Teilproblem, n Größe Anfangsproblem
3 m = k + 1;
4 WHILE m ≤ n and s[m] < f[k] // Suche nach erster Kompatibilität
5     m = m + 1;
6 IF m ≤ n
7     // Ausgabe des Elements und Berechnung weiterer Aktivitäten
8     return {am} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,m,n)
9 ELSE
10    return ∅

```

- Iterativer Greedy-Algorithmus

- * Voraussetzung: Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert
- * Laufzeit: $\Theta(n)$

```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)
```

```

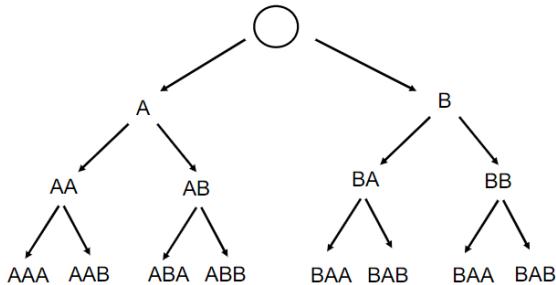
1 n = s.length;
2 A = {a1};
3 k = 1;           // Index des zuletzt hinzugefügten Elements in A
4 FOR m = 2 TO n
5     IF s[m] ≥ f[k]           // Findet zuerst endende Aktivität in Menge
6         A = A ∪ {am};    // Fügt diese hinzu, falls kompatibel
7         k = m;
8 return A;

```

7.3 Backtracking

- Suchbaum - Baum der Möglichkeiten

- Darstellung aller für ein Problem bestehenden Möglichkeiten
- Problem: Dreimal hintereinander der selbe Buchstabe (A,B)



- Backtracking - Idee

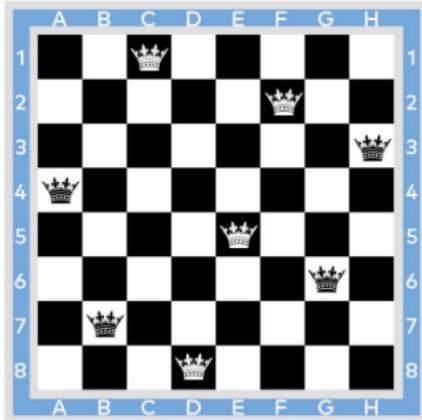
- Lösung finden via Trial and error
- Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
- Falls Teillösung inkorrekt → Schritt zurück und andere Möglichkeit
- Voraussetzung:
 - * Lösung setzt sich aus Komponenten zusammen (Sudoku, Labyrinth,..)
 - * Mehrere Wahlmöglichkeiten für jede Komponente
 - * Teillösung kann getestet werden

- Allgemeiner Backtracking-Algorithmus

```
BACKTRACKING(A, s)
1 IF alle Komponenten richtig gesetzt
2     return true;
3 ELSE
4     WHILE auf aktueller Stufe gibt es Wahlmöglichkeiten
5         wähle einen neuen Teillösungsschritt
6         Teste Lösungsschritt gegen vorliegende Einschränkungen
7         IF keine Einschränkung THEN
8             setze die Komponente
9         ELSE
10            Auswahl(Komponente) rückgängig machen
11            BACKTRACKING(A, s + 1)
```

- **Damenproblem**

Auf einem Schachbrett der Größe $n \times n$ sollen n Damen so positioniert werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Damen so aufzustellen, dass keine Damen eine andere schlägt.



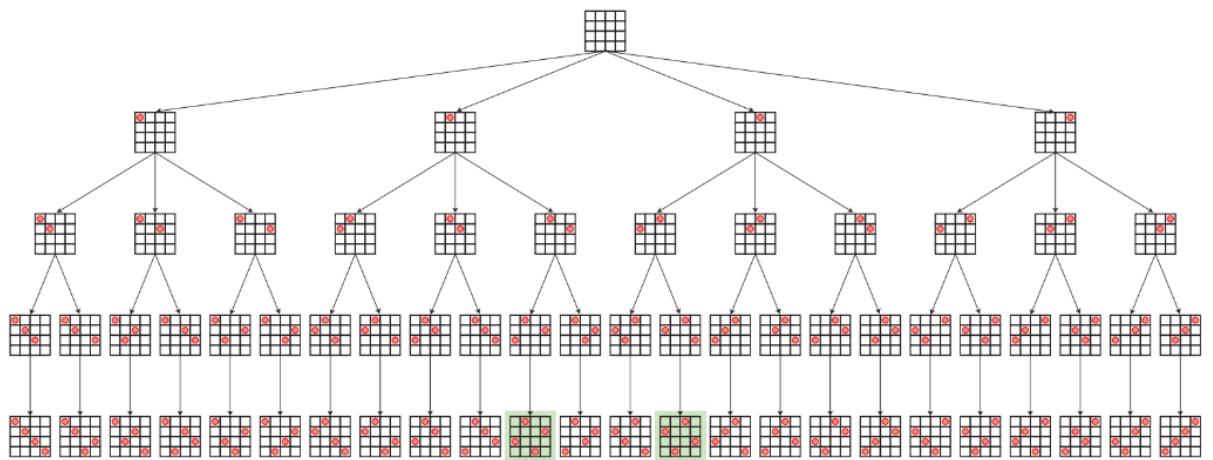
- * $n = 8 : 4$ Milliarden Positionierungen
- * Optimierte Suche: In jeder Zeile/Spalte nur eine Dame
- * Reduziert Problem auf 40.000 Positionierungen (ohne Diagonale)

PLACE-QUEENS(Q,r) // Q Array, r Index der ersten leeren Zeile

```

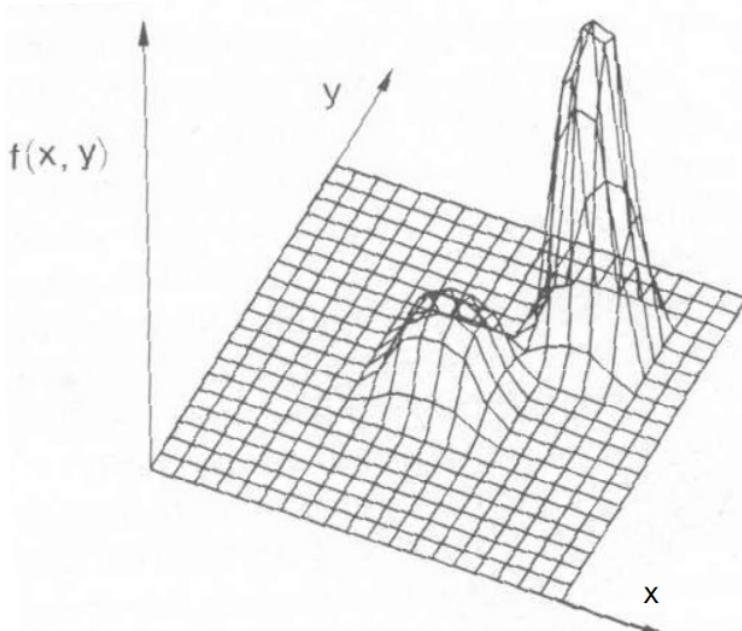
1 IF r == n
2   return Q
3 ELSE
4   FOR j = 0 TO n - 1 // Mögliche Positionierungen
5     legal = true;
6     FOR i = 0 TO r - 1 // Evaluation der mgl. Bedrohungen
7       IF (Q[i] == j) OR (Q[i]==j + r - i) OR (Q[i] == j - r + i)
8         legal = false;
9     IF legal == true
10      Q[r] = j;
11      PLACE-QUEENS(Q, r + 1)

```



7.4 Metaheuristiken

- Optimierungsproblem



- * Lösungsstrategien:
 - Exakte Methode
 - Approximationsmethode
 - Heuristische Methode
 - * Einschränkungen
 - Antwortzeit
 - Problemgröße
- ⇒ exkludieren oft exakte Methoden

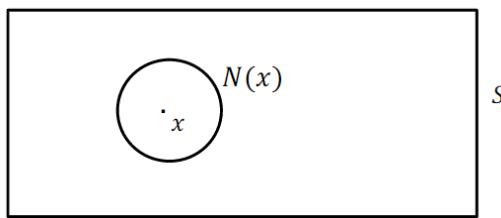
- Heuristik

- Technik um Suche zur Lösung zu führen
 - Metaheuristik (Higher-Level-Strategie)
 - * soll z.B. Hängenbleiben bei lokalem Maxima verhindern
 - Leiten einer Suche
 - (a) Finde eine Lösung (z.B. mit Greedy-Algorithmus)
 - (b) Überprüfe die Qualität der Lösung
 - (c) Versuche eine bessere Lösung zu finden
 - * Herausfinden in welcher Richtung bessere Lösung evtl. liegt
 - * ggf. Wiederholung dieses Prozesses
 - Finden einer besseren Lösung
 - * Modifikation der Lösung durch erlaubte Operationen
 - * Dadurch erhalten wir Nachbarschaftslösungen
- ⇒ Suche nach besseren Lösungen in der Nachbarschaft

- **Rucksackproblem**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	79	32	47	18	26	85	33	40	45
Größe	85	26	48	21	22	95	43	45	55

- Rucksack hat eine Kapazität von 101, 9 verschiedene Gegenstände
- Ziel: Höchster Wert der Gegenstände im Rucksack
- Beispillösung: 3 + 5 (Wert 73, Größe 70)
- Nachbarschaftslösungen:
 - * 2,3 und 5: Wert 105, Größe 96
 - * 1,3 und 5: Wert 152, Größe 155 (problematisch)
 - * 3: Wert 47, Größe 48



Nachbarschaft:

- * Suchraum S kann sehr groß sein
- * Einschränkung des Suchraums in der Nähe des Punktes
- * Distanzfunktion $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$
- * Nachbarschaft: $N(x) = \{y \in S : d(x, y) \leq \epsilon\}$

- **Zufällige Suche**

- *Idee und Ablauf*
 - * Suche nach globalem Optimum
 - * Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
 - * Wahl einer neuen zufälligen Lösung in jeder Iteration
 - * Falls die neue Lösung besseren Wert liefert \Rightarrow neue **aktuelle** Lösung
 - * Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen oder Zeit vorbei
- *Code*

```
RANDOM-SEARCH
1 best <- irgendeine initiale zufällige Lösung
2 REPEAT
3   S <- zufällige Lösung
4   IF (Quality(S) > Quality(best)) THEN
5     best <- S
6 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Zeit ist vorbei
7 return best
```

- *Nachteile*
 - * Potentiell lange Laufzeit
 - * Laufzeit abhängig von der initialien Konfiguration
- *Vorteile*
 - * Algorithmus **kann** beim globalen Optimum terminieren

- Bergsteigeralgorithmus

- Idee und Ablauf

- * Nutzung einer iterativen Verbesserungstechnik
 - * Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
 - * Auswahl einer neuen Lösung aus Nachbarschaft in jeder Iteration
 - * Falls diese besseren Wert liefert, überschreiben der **aktuellen** Lösung
 - * Falls nicht, Wahl einer anderen Lösung aus Nachbarschaft
 - * Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen oder Zeit vorbei

- Code

```
HILL-CLIMBER
```

```
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
6     REPEAT
7         wähle R aus der Nachbarschaft von S
8         IF Quality(R) > Quality(S) THEN
9             S <- R
10        UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
11        IF Quality(S) > Quality(best) THEN
12            best <- S
13        S <- irgendeine zufällige Lösung
14    UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
15    return best
```

– Nachteile

- * Algorithmus terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
- * Keine Auskunft, inwiefern sich lokale Lösung von Globaler unterscheidet
- * Optimum abhängig von Initialkonfiguration

– Vorteile

- * Einfach anzuwenden

• Iterative lokale Suche

– Idee und Ablauf

- * Suche nach anderen lokalen Optima bei Fund eines lokalen Optimas
- * Lösungen nur in der Nähe der "Homebase"
- * Entscheidung, ob neue oder alte Lösung
- * Bergsteigeralgo zu Beginn, danach aber großen Sprung um anderes Optimum zu finden

– Code

```
ITERATIVE-LOCAL-SEARCH
 1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
 2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
 3 H <- S      // Wahl des Homebasepunktes
 4 best <- S
 5 REPEAT
 6   time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
 7   REPEAT
 8     wähle R aus der Nachbarschaft von S
 9     IF Quality(R) > Quality(S) THEN
10       S <- R
11   UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
12   IF Quality(S) > Quality(best) THEN
13     best <- S
14   H <- NewHomeBase(H,S)
15   S <- Perturb(H)
16 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
17 return best
```

* Perturb:

- ausreichend weiter Sprung (außerhalb der Nachbarschaft)
- Aber nicht soweit, dass es eine zufällige Wahl ist

* NewHomeBase:

- wählt die neue Startlösung aus
- Annahme neuer Lösungen nur, wenn die Qualität besser ist

• Simulated Annealing

- Idee und Ablauf

- * Wenn neue Lösung besser, dann wird diese immer gewählt
- * Wenn neue Lösung schlechter, wird diese mit gewisser Wahrscheinlichkeit gewählt

$$Pr(R, S, t) = e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$$
- * Der Bruch ist negativ, da R schlechter ist als S

- Code

```

SIMULATED-ANNEALING
1 t <- Temperatur, initial eine hohe Zahl
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     wähle R aus der Nachbarschaft von S
6     IF Quality(R) > Quality(S) oder zufälliges
7          $Z \in [0, 1] < e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$  THEN
8         S <- R
9     dekrementiere t
10    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
11        best <- S
12 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Temperatur  $\leq 0$ 
13 return best

```

- Tabu-Search

* Idee und Ablauf

- Speichert alle bisherigen Lösungen und Liste und nimmt diese nicht nochmal
- Kann sich jedoch von der optimalen Lösung entfernen
- Tabu List hat maximale Größe, falls voll, werden älteste Lösungen gelöscht

* Code

```

TABU-SEARCH
1 l <- maximale Größe der Tabu List
2 n <- Anzahl der zu betrachtenden Nachbarschaftslösungen
3 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
4 best <- S
5 L <- {} Tabu List der Länge l
6 Füge S in L ein
7 REPEAT
8     IF Length(L) > l THEN
9         Entferne ältestes Element aus L
10        wähle R aus Nachbarschaft von S
11        FOR n - 1 mal DO
12            Wähle W aus Nachbarschaft von S
13            IF W  $\notin$  L und (Quality(W) > Quality(R)) oder R  $\in$  L) THEN
14                R <- W
15            IF R  $\notin$  L THEN
16                S <- R
17                Füge R in L ein
18            IF Quality(S) > Quality(best) THEN
19                best <- S
20 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
21 return best

```

- **Populationsbasierte Methode**

- Bisher: Immer nur Betrachtung einer einzigen Lösung
- Hier: Betrachtung einer Stichprobe von möglichen Lösungen
- Bei der Bewertung der Qualität spielt die Stichprobe die Hauptrolle
- z.B. Evolutionärer Algorithmus

- **Evolutionärer Algorithmus**

- *Idee und Ablauf*
 - * Algorithmus aus der Klasse der Evolutionary Computation
 - * *generational Algorithmus*: Aktualisierung der gesamten Stichprobe pro Iteration
 - * *steady-state Algorithmus*: Aktualisierung einzelner Kandidaten der Probe pro Iteration
 - * *Resampling-Technik*: Generierung neuer Stichproben basierend auf vorherigen Resultaten
- *Abstrakter Code (Allgemeiner Breed und Join)*

```
ABSTRACT-EVOLUTIONARY-ALGORITHM

1 P <- generiere initiale Population
2 best <- [] // leere Menge
3 REPEAT
4     AssesFitness(P)
5     FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
6         IF best = [] oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
7             best <-  $P_i$ 
8         P <- Join(P, Breed(P))
9     UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
10    return best
```

- * *Breed*: Erstellung neuer Stichprobe mithilfe Fitnessinformation
- * *Join*: Fügt neue Population der Menge hinzu
- *Initialisierung der Population*
 - * Initialisierung durch zufälliges Wählen der Elemente
 - * Beeinflussung der Zufälligkeit bei Vorteilen möglich
 - * Diversität der Population (alle Elemente in Population einzigartig)
 - * Falls neue zufällige Wahl eines Individuums
 - Entweder Vergleich mit allen bisherigen Individuen ($O(n^2)$)
 - Oder besser: Nutzen eines Hashtables zur Überprüfung auf Einzigartigkeit ($O(n)$)

- Evolutionsstrategien - Ideen

- * Generiere Population zufällig
- * Beurteile Qualität jedes Individuums
- * Lösche alle bis auf die μ besten Individuen
- * Generiere $\frac{\lambda}{\mu}$ -viele Nachfahren pro bestes Individuum
- * Join Funktion: Die Nachfahren ersetzen die Individuen

- Algorithmus der Evolutionsstrategie

(μ, λ) -EVOLUTION-STRATEGY

```
1   $\mu \leftarrow$  Anzahl der Eltern (initiale Lösung)
2   $\lambda \leftarrow$  Anzahl der Kinder
3  P  $\leftarrow \{ \}$ 
4  FOR  $\lambda$ -oft DO
5    P  $\leftarrow \{$ neues zufälliges Individuum $\}$ 
6  best  $\leftarrow \square$ 
7  REPEAT
8    FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
9      AssesFitness( $P_i$ )
10     IF best =  $\square$  oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
11       best  $\leftarrow P_i$ 
12     Q  $\leftarrow$  die  $\mu$  Individuen deren Fitness() am Größten ist
13     P  $\leftarrow \{ \}$ 
14     FOR jedes Element  $Q_j \in Q$  DO
15       FOR  $\frac{\lambda}{\mu}$ -oft DO
16         P  $\leftarrow P \cup \{MUTATE(Q_j)\}$ 
17 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
18 return best
```

7.5 Amortisierte Analyse

- Kosten von Operationen

- Bisher: Betrachtung von Algorithmen, die Folge von Operationen auf Datenstrukturen ausführen
- Abschätzung der Kosten von n Operationen im Worst-Case
- Dies liefert die obere Schranke für die Gesamtkosten der Operationenfolge
- Nun: **Amortisierte Analyse**: Genauere Abschätzung des Worst Case
- Voraussetzung: Nicht alle Operationen in der Operationenfolge gleich teuer
- z.B. eventuell abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur
- Amortisierte Analyse garantiert die mittlere Performanz jeder Operation im Worst-Case

- Beispiel Binärzähler

- Eigenschaften

- * k -Bit Binärzähler hier als Array
- * Codierung der Zahl als $x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$
- * Initialer Array für $x = 0$:

b_{k-1}	b_{k-2}						b_2	b_1	b_0
0	0	0	0	0

- Inkrementieren eines Binärzählers

- * Erhöhe x um 1
- * Beispiel: $x = 3$
- * INCREMENT kostet 3, da sich drei Bitpositionen ändern

b_{k-1}	b_{k-2}						b_2	b_1	b_0
0	0	0	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}						b_2	b_1	b_0
*	0	0	1	0	0

+1

- Teuerste INCREMENT-Operation

- * INCREMENT flippt $k - 1$ Bits von 1 zu 0 und 1 Bit von 0 auf 1
- * Kosten nicht konstant, stark abhängig von Datenstruktur

b_{k-1}	b_{k-2}						b_2	b_1	b_0
0	1	1	1	1
b_{k-1}	b_{k-2}						b_2	b_1	b_0
*	1	0	0	0	0

+1

- Traditionelle Worst-Case Analyse

- * Worst-Case Kosten von n INCREMENT-Operationen auf k -Bit Binärzähler
- * Anfangswert $x = 0$
- * Schlimmster Kostenfall: INCREMENT-Operation hat k Bitflips
- * n -mal inkrementieren sorgt für Kosten: $T(n) \leq n \cdot k \in O(kn)$

• Aggregat Methode - Beispiel Binärzähler

- Eigenschaften

- * Methode für Amortisierte Analyse
- * Sequenz von n -Operationen kostet Zeit $T(n)$
- * Durchschnittliche Kosten pro Operation $\frac{T(n)}{n}$
- * Ziel: $T(n)$ genau berechnen, **ohne** jedes Mal Worst-Case anzunehmen
- * Ansatz: Aufsummation der **tatsächlich** anfallenden Kosten aller Operationen

- Durchführung

b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittosten	Gesamtkosten	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittosten	Gesamtkosten
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	+1	8
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	+1	10
0	0	0	1	0	2	3	0	0	1	1	1	+1	11
0	0	0	1	1	1	4	0	1	0	0	0	+1	15
0	0	1	0	0	3	7	0	1	0	0	1	+1	16
0	0	1	0	1	1	8	0	1	0	1	0	+1	18
b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittosten	Gesamtkosten	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	Schrittosten	Gesamtkosten
0	1	0	1	0	18	18	0	1	0	1	0	+1	19
0	1	0	1	1	1	19	0	1	1	0	0	+1	22
0	1	1	0	0	3	22	0	1	1	0	1	+1	23
0	1	1	0	1	1	23	0	1	1	1	0	+1	25
0	1	1	1	0	2	25	0	1	1	1	1	+1	26
0	1	1	1	1	1	26							

- Genauere Kostenanalyse

- * Nun in der Lage $T(n)$ genau auszurechnen
 - * Bei n Operationen ändert sich das Bit b_i genau $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$ -mal
 - * Bits b_i mit $i > \log_2 n$ ändern sich nie
 - * Über alle k Bits aufsummieren liefert:
- $$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2n \in O(n)$$
- * Obere Schranke: $T(n) \leq 2n$
 - * Kosten jeder INCREMENT-Operation im Durchschnitt: $\frac{2n}{n} = 2 \in O(1)$

- Bisher noch kein Worst-Case
- Nächste Operation hätte max. Kosten
- Jede 2. Operation minimale Kosten
- In jeder Operation ändert sich b_0
- In jeder 2. ändert sich b_1 etc

- **Account Methode - Beispiel Binärzähler**

- *Eigenschaften*

- * Besteuerung einer Operationen, so dass sie Kosten anderer Operationen mittragen
- * Zuweisung von höherer Kosten (Amortisierte Kosten), als ihre tatsächlichen Kosten sind
- * **Guthaben:** Differenz zwischen amortisierten und tatsächlichen Kosten
- * Nutzung dieses Guthabens für Operationen bei denen amortisiert < tatsächlich
- * Guthaben darf nicht negativ werden:
Summe amortisierte Kosten > Summe tatsächliche Kosten

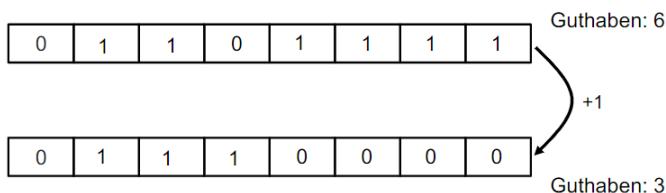
- *Wahl der Amortisierten Kosten - Binärzähler*

- * Setzen eines Bits von 0 → 1 zahlt 2 Einheiten ein / Bezeichnung f_i
- * Setzen eines Bits von 1 → 0 zahlt 0 Einheiten ein / Bezeichnung e_i
- * Tatsächliche Kosten t_i : Anzahl der Bitflips bei der i -ten INCREMENT-Operation

$$t_i = e_i + f_i$$
- * Amortisierte Kosten betragen: $a_i = 0 \cdot e_i + 2 \cdot f_i$

- *Kostenbeispiel*

- * Jede Bitflip Operation kostet zusätzlich 1 Einheit
- * Setzen Bit 0 → 1: Zahlt 2 ein, kostet aber 1 → +1 Guthaben
- * Setzen Bit 1 → 0: Zahlt 0 ein, kostet aber 1 → -1 Guthaben



- *Obere Schranken der Kosten*

- * Guthaben auf dem Konto entspricht der Anzahl der auf 1 gesetzten Bits
- * Kosten: $T(n) \sum_{i=1}^n t_i \leq v \sum_{i=1}^n a_i$
- * Nun Abschätzung dieser Formel zum Erhalten einer oberen Schranke
- * Beobachtung: Bei jeder INCREMENT höchstens ein neues Bit von 0 auf 1
- * Für alle i gilt damit $f_i \leq 1$
- * Amortisierte Kosten jeder Operation höchstens $2 \cdot f_i \leq 2$
- * Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$

- **Potential-Methode - Beispiel Binärzähler**

- *Eigenschaften*

- * Betrachtung welchen Einfluss die Operationen auf die Datenstruktur haben
- * Potentialfunktion $\phi(i)$: Hängt vom aktuellen Zustand der Datenstruktur nach i -ter Operation ab
- * Ausgangspotential sollte vor jeglicher Operation nicht negativ sein $\phi(0) \geq 0$

- *Amortisierte Kosten*

- * Amortisierte Kosten der i -ten Operation: (Summe tatsächliche Kosten + Potentialänderung)

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

- * Summe der amortisierten Kosten:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (t_i + \phi(i) - \phi(i-1)) = \sum_{i=1}^n t_i + \phi(n) - \phi(0)$$

- * Wenn für jedes i gilt $\phi(i) \geq \phi(0)$:

Summe der amor. Kosten ist gültige obere Schranke an Summe der tatsächlichen Kosten

- *Potential-Methode anhand des Binärzählers*

- * $\phi(i)$: Anzahl der 1-en im Array nach i -ter **INCREMENT**-Operation

$\rightarrow \phi(i)$ nie negativ und $\phi(0) = 0$

- * Angenommen i -te Operation setzt e_i Bits von 1 auf 0, dann hat diese Operation Kosten $t_i \leq e_i + 1$

- * Neues Potential: $\phi(i) \leq \phi(i-1) - e_i + 1 \Leftrightarrow \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i$

- * Amortisierte Kosten der i -ten **INCREMENT**-Operation:

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i + 1 + 1 - e_i = 2$$

- * Insgesamt: $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$

8 NP

- **Berechnungsprobleme**

- Sind alle Probleme in polynomieller Zeit lösbar? ($O(n^k)$)
- Nein \Rightarrow Manche nur in superpolynomieller Zeit lösbar
- Polynomielle Probleme: "*einfach*"
- Superpolynomielle Probleme: "*hart*"

- **Klasse P**

- Klasse aller Polynomialzeitprobleme
- Problem ist *effizient lösbar* gdw. es in polynomieller Zeit lösbar ist
- Gilt für Polynome beliebigen Grades (auch n^k)
- Zeitkomplexität n^k mit großem k bedenklich, jedoch fast nie notwendig
- n beschreibt die Länge der Eingabe
- Beispiele: Binäre Addition, Kürzeste Wege, Sortieren,...

- **Klasse NP**

- Enthält "*einfach zu verifizierende*" Probleme (polynomieller Zeit)
- Enthält Probleme mit "*kurzem Beweis*" (Länge polynomiell in Länge der Instanz)
- Also: Klasse aller Probleme, deren Lösung in Polynomialzeit verifizierbar ist
- Beispiele: Sudoku, 3D-Matching,...
- Beispiel: *Faktorisierungsproblem*
 - * Jede nicht Primzahl kann eindeutig als Primzahlprodukt geschrieben werden
 - * $35 = 5 \cdot 7$, $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$,...
 - * Faktorisieren auf klassischen Computern schwer
 - * $n \xrightarrow{\text{schwer}} p, q$
 - * $n, p, q \xrightarrow{\text{leicht}}$ ist $n = p \cdot q$?
- *Rucksackproblem* auch in polynomieller Laufzeit verifizierbar

- *Hamilton-Kreis-Problem*
 - * Hamiltonischer Kreis: Zyklus, der alle Knoten, aber nicht unbedingt alle Kanten enthält
 - * Entscheidungsalgorithmus listet alle möglichen Permutationen der Knoten aus G auf
 - * Prüfung bei jeder Permutation, ob es ein Hamiltonischer Kreis ist
 - * Laufzeit:
 - Kodierung via Adjazenzmatrix: m Knoten \Rightarrow Matrix mit $n = m \times m$ Einträgen
 - $m!$ mögliche Permutationen der Knoten
 - $\Omega(m!) = \Omega(\sqrt{n!}) = \Omega(2^{\sqrt{n}})$
 - \Rightarrow superpolynomiale Laufzeit (liegt **nie** in $O(n^k)$)
 - * **Allerdings:** Einfacher, wenn nur Beweis verifiziert werden muss
 - \Rightarrow Test, ob es sich um Permutation der Knoten handelt
 - \Rightarrow Test, ob alle angegebenen Kanten auf Kreis im Graphen existieren
 - \Rightarrow Verifikationsalgorithmus V mit quadratischer Laufzeit
 - * Verifikationsalgorithmus: $V(x, y) = 1/0$ (1, falls Kreis/ 0, falls nicht)
 - * Damit: Hamilton-Kreis $\in \text{NP}$

- **Entscheidungsproblem vs Optimierungsproblem**

- Optimierungsproblem: Lösung nimmt bestimmten Wert an
- Entscheidungsproblem: Binäre Antwort (Ja/Nein)
- Bei NP Betrachtung von Entscheidungsproblemen
- Optimierungsproblem oft in verwandtes Entscheidungsproblem umwandelbar
- Verwandtes Entscheidungsproblem: dem zu optimierenden Wert wird eine Schranke auferlegt

- **P versus NP**

$$L \in P \longrightarrow L \in NP \longrightarrow P \subseteq NP$$

- Für viele wichtige Probleme ist jedoch unbekannt, ob sie in P (effizient) lösbar sind
- Unbekannt ob $P \neq NP$
- Intuitive Frage: Ist das Finden eines Beweises schwieriger als dessen Überprüfung?
 \Rightarrow Ja, also $P \neq NP$ gilt
 - In den letzten 50 Jahren kein Beweis für $P = NP$
 - Eines der wichtigsten offenen Probleme der theoretischen Informatik
 - Konsequenzen eines Beweises von $P = NP$:
 - * $P = NP$: **dramatisch**, vieles bisher schwieriges lösbar (Rucksack, Kryptographie)
 - * $P \neq NP$: **nicht dramatisch**, mgl. interessante Konsequenzen in Kryptographie

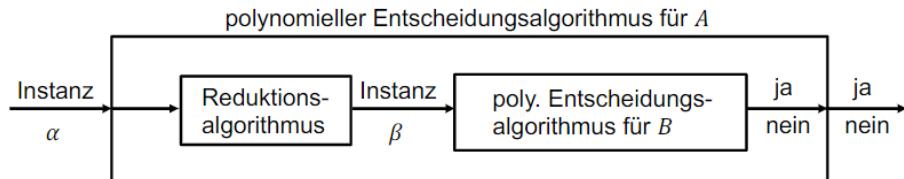
- **NP-Vollständigkeit**

- Problem befindet sich in NP
- Problem ist so "schwer" wie jedes Problem in NP
- Beweis: Zeigen, dass kein effizienter Algorithmus existiert
- Werkzeug: Reduktionen (zum Vergleich verschiedener Probleme)
- *NP-Härte/NP-Schwere:*
 - * Klassifikation von Problemen als schwierig, trotz fehlender genauer Zuordnung
 - * *Starke Indikatoren*, dass Problem L nicht in P ist:
 - L ist mindestens so schwierig, wie alle anderen Probleme in NP
 - Daraus folgt, dass L nur in P, wenn $P = NP$ (unwahrscheinlich)
- *Definitionen*
 - * Problem L ist **NP-schwer**, wenn $L' \leq_p L$ für alle $L' \in NP$
 - * Problem L ist **NP-vollständig**, wenn L sowohl NP-schwer als auch in NP ist
 - * z.B.: Hamilton-Kreis ist NP-vollständig

• Reduktionen

- Reduktionsidee

- * Betrachte Problem A , das wir in polynomieller Zeit lösen wollen
- * Bereits bekannt: Problem B (in polynomieller Zeit lösbar)
- * Benötigt wird Prozedur, die Instanzen der Probleme ineinander überführt
 \Rightarrow Transformation benötigt polynomielle Zeit
 \Rightarrow Antworten sind gleich



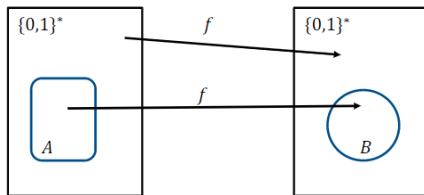
- Beispiel:

- * Intuitiv: Reduktion von A auf B , wenn Umformulierung möglich
 \Rightarrow Jede Instanz A kann leicht in Instanz von B umformuliert werden
 \Rightarrow Lösung der Instanz B liefert Lösung von Instanz A
- * Reduktion: Lösen von linearen Gleichungen auf quadratische Gleichungen
 - Lineare Gleichung $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$
 - Quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, x = 0$
 - Quadratische Gleichung liefert also auch Lösung für lineare Gleichung

- Formale Definition:

A lässt sich auf B in **polynomieller Zeit reduzieren**, mit Schreibweise $A \leq_p B$, wenn eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ existiert, sodass für alle $x \in \{0, 1\}^*$ gilt:
 $x \in A$ genau dann, wenn $f(x) \in B$

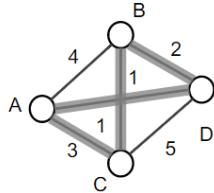
Illustration der Polynomialzeitreduktion:



- Travelling-Salesman Problem

- Beschreibung

- * Reisender plant Rundreise durch mehrere Städte
 - * Start und Ziel ist eine vorgegebene Stadt
 - * Jede Stadt nur einmal besuchen
 - * Ziel: Minimale Reiselkosten



Eine optimale Route mit Kosten 7 verläuft von $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

- Problem:

- * Anzahl der Rundreisen $(n - 1)!$
 - * Stark nach oben explodierende Zahlen
 - * Brute-Force für große n praktisch unmöglich
 - * Es existiert kein effizienter Algorithmus, der das TSP effizient löst
 - * TSP ist **NP-vollständig**

- Beweis NP-Vollständigkeit

- * Zeigen: TSP gehört zu NP und TSP ist NP-schwer

- TSP gehört zu NP

- * Gegeben: Instanz des Problems TSP, Folge der n Knoten der Tour (Zertifikat)
 - * Verifikationsalgorithmus überprüft, ob Folge jeden Knoten genau einmal enthält
 - * Außerdem Aufsummieren der Kantenkosten und überprüfen, ob diese maximal k ist
 - * Verifikation läuft in polynomieller Laufzeit \Rightarrow gehört zu NP

- TSP ist NP-schwer

* Wir zeigen $HAM - KREIS \leq_p TSP$

* Start: Instanz von $HAM - KREIS$ mit $G = (V, E)$

* Konstruiere Instanz von TSP

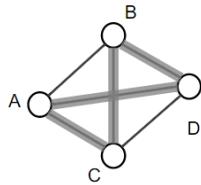
$\Rightarrow G' = (V, E')$ mit $E' = \{(i, j) : i, j \in V \text{ und } i \neq j\}$

* Definiere Kostenfunktion $c(i, j) = 0$, falls $(i, j) \in E / c(i, j) = 1$, falls $(i, j) \notin E$

* Instanz von TSP ist $< G', c, 0 >$ (Konstruktion in polynomieller Zeit) (0: Kosten von 0)

* **Zeige jetzt:** G besitzt hamiltonischen Kreis $\Leftrightarrow G'$ enthält Tour mit Kosten ≤ 0

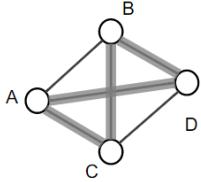
* \Rightarrow Graph G besitzt einen hamiltonischen Kreis h



Jede Kante von h gehört zu E und daher besitzt laut Kostenfunktion der Graph G' die Kosten 0.

Damit ist h eine Tour in G' mit den Kosten 0.

* \Leftarrow Graph G besitzt eine Tour h' mit Kosten kleiner gleich 0



Die Kosten der Kanten in E' haben die Werte 0 und 1. Die Kosten der Tour betragen exakt 0 und jede Kante muss die Kosten 0 haben.

Damit hat h' nur Kanten von E .

Damit folgt, dass h' ein Hamiltonischer Kreis des Graphen G ist.