

---

# 1 Advanced Designs

---

## 1.1 Dynamische Programmierung

---

### Anwendung

Anwendung, wenn sich Teilprobleme überlappen:

1. Wir charakterisieren die Struktur einer optimalen Lösung
2. Wir definieren den Wert einer optimalen Lösung rekursiv
3. Wir berechnen den Wert einer optimalen Lösung (meist bottom-up Ansatz)
4. Wir konstruieren eine zugehörige optimale Lösung aus berechneten Daten

---

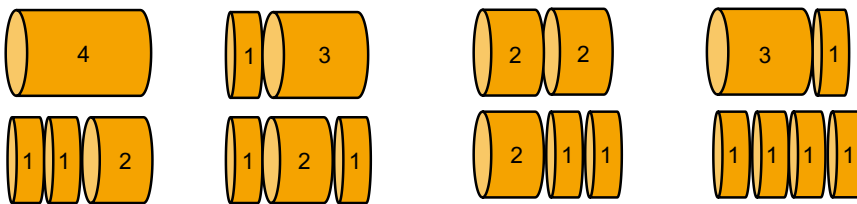
### 1.1.1 Stabzerlegungsproblem

---

**Ausgangsproblem:** Stangen der Länge  $n$  cm sollen so zerschnitten werden, dass der Erlös  $r_n$  maximal ist, indem die Stange in kleinere Stäbe geschnitten wird.

Länge $i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis $p_i$	0	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30

**Beispiel:** Gesamtstange hat Länge 4. Welchen Erlös kann man max. erhalten?



Optimaler Erlös: zwei 2cm lange Stücke ( $5 + 5 = 10$ )

### Aufteilung der Stange

- Stange mit Länge  $n$  kann auf  $2^{n-1}$  Weisen zerlegt werden
- Position  $i$ : Distanz vom linken Ende der Stange
- Aufteilung in  $k$  Teilstäbe ( $1 \leq k \leq n$ )
- optimale Zerlegung:  $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$
- maximaler Erlös:  $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$
- z.B.:  $r_4 = 10$  (siehe oben)

## Rekursive Top-Down Implementierung

CUT-ROD(p,n) // p Preis-Array, n Stangenlänge

```
1 IF n == 0
2   return 0;
3 q = -∞;
4 FOR i = 1 TO n // nicht Start bei 0, sonst kein Rekursionsschritt
5   q = max(q, p[i] + CUT-ROD(p, n - i));
6 return q;
```

## Stabzerlegung via Dynamischer Programmierung:

Ziel Mittels dynamischer Programmierung wollen wir CUT-ROD in einen effizienten Algorithmus verwandeln.

Bemerkung Naiver rekursiver Ansatz ist **ineffizient**, da dieser immer wieder diesselben Teilprobleme löst.

Ansatz Jedes Teilproblem nur einmal lösen. Falls die Lösung eines Teilproblems nochmal benötigt wird, schlagen wir diese nach.

- Reduktion von exponentieller auf polynomielle Laufzeit.
- Dynamische Programmierung wird zusätzlichen Speicherplatz benutzen um Laufzeit einzusparen.

## Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation:

**Idee – Rekursiver Top-Down-Ansatz mit Memoisation** Speicherung der Lösungen der Teilprobleme

Laufzeit:  $\Theta(n^2)$

MEMOIZED-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...] be new array
2 FOR i = 0 TO n
3   r[i] = -∞
4 return MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r)
```

MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n, r) // r new Array

```
1 IF r[n] ≥ 0 // Abfrage ob vorhanden
2   return r[n]
3 IF n == 0
4   q = 0
5 ELSE
6   q = -∞
7   FOR i = 1 to n
8     q = max(q, p[i] + MEMOIZED-CUT-ROD-AUX(p, n - i, r))
9   r[n] = q // Abspeichern
10 return q
```

### Bottom-Up Ansatz:

- Laufzeit:  $\Theta(n^2)$
- Sortieren der Teilprobleme nach ihrer Größe und lösen in dieser Reihenfolge
- Alle Teilprobleme kleiner als das momentane Problem sind bereits gelöst

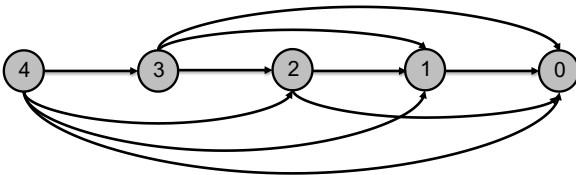
#### BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...n] be a new array
2 r[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4     q = -∞
5     FOR i = 1 TO j
6         q = max(q, p[i] + r[j - i])
7     r[j] = q
8 return r[n]
```

#### EXTENDED-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```
1 Let r[0...n] and s[0...n] be new arrays
2 r[0] = 0, s[0] = 0
3 FOR j = 1 TO n
4     q = -∞
5     FOR i = 1 TO j
6         IF q < p[i] + r[j-i]
7             q = p[i] + r[j - i]
8             s[j] = i
9     r[j] = q
10 return r and s
```

Teilproblemgraph ( $i \rightarrow j$  bedeutet, dass Berechnung von  $r_i$  den Wert  $r_j$  benutzt)



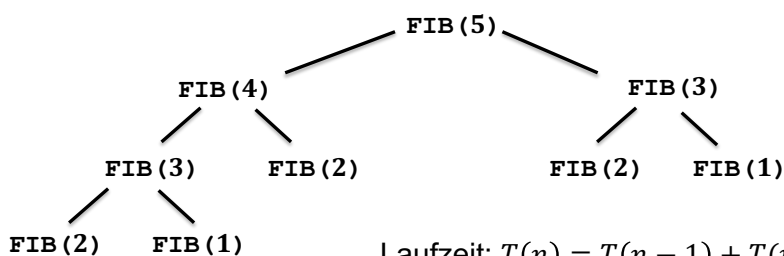
### Fibonacci-Zahlen

- $F_1 = F_2 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Naiver rekursiver Algorithmus:

#### FIB(n)

```
1 IF n ≤ 2
2     f = 1;
3 ELSE
4     f = FIB(n-1) + FIB(n-2);
5 return f;
```



Laufzeit:  $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1)$   
 $\Rightarrow \Theta(2^n)$

Gleiche Teilprobleme werden wieder mehrmals gelöst

### Rekursiver Algorithmus mit Memoisation:

- Wieder Abspeichern von Teilproblemen um Laufzeit einzusparen
- Laufzeit:  $\Theta(n)$

#### MEMOIZED-FIB(n)

```
1 Let m[0...n-1] be a new array
2 FOR i = 0 TO n - 1
3     m[i] = 0
4 return MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)
```

#### MEMOIZED-FIB-AUX(n, m)

```
1 IF m[n-1] != 0
2     return m[n-1];    // Auslesen von gespeicherten Werten
3 IF n ≤ 2
4     f = 1;
5 ELSE
6     f = MEMOIZED-FIB-AUX(n-1, m) + MEMOIZED-FIB-AUX(n-2, m);
7 m[n-1] = f;
8 return f;
```

### Bottom-Up Algorithmus:

Hier wieder Berechnen aller Teilprobleme von unten beginnend

#### BOTTOM-UP-FIB(n)

```
1 Let m[0...n] be a new array
2 FOR i = 1 TO n
3     IF i ≤ 2
4         f = 1;
5     ELSE
6         f = m[i-1] + m[i-2];
7     m[i] = f;
8 return m[n];
```

## 1.2 Greedy-Algorithmus

### Idee – Greedy-Algorithmus

- Trifft stets die Entscheidung, die in diesem Moment am besten erscheint
- Trifft **lokale** optimale Entscheidung (evtl. nicht global die Beste)

### 1.2.1 Aktivitäten-Auswahl-Problem

#### Definition – Aktivitäten-Auswahl-Problem

- 11 anstehende Aktivitäten  $S = \{a_1, \dots, a_{11}\}$
- Startzeit  $s_i$  und Endzeit  $f_i$ , wobei  $0 \leq s_i < f_i < \infty$
- Aktivität  $a_i$  findet im halboffenen Zeitintervall  $[s_i, f_i)$  statt
- Zwei Aktivitäten sind kompatibel, wenn sich deren Zeitintervalle nicht überlappen

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s_i$	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
$f_i$	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Aktivitäten:  $\{a_3, a_9, a_{11}\}$

Aktivitäten:  $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$

Aktivitäten:  $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$

#### Ansatz mittels dynamischer Programmierung

- Menge von Aktivitäten, die starten nachdem  $a_i$  endet und enden, bevor  $a_j$  startet  
 $S_{ij} = \{a \in S, a = (s, f) : s \geq f_i, f < s_j\}$
- Definiere maximale Menge  $A_{ij}$  von paarweise kompatiblen Aktivitäten in  $S_{ij}$ .  
 $c[i, j] = |A_{ij}|$
- Optimale Lösung für Menge  $S_{ij}$  die Aktivitäten  $a_k$  enthält:  
 $c[i, j] = \max_{a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\}$  (0, falls  $S_{ij} = \emptyset$ )

#### Greedy-Wahl

- lokal die beste Wahl
- Auswahl der Aktivität mit geringster Endzeit (möglichst viele freie Ressourcen)
- Also hier Teilprobleme, die nach  $a_1$  starten
- $S_k = \{a_i \in S : s_i \geq f_k\}$ : Menge an Aktivitäten, die starten, nachdem  $a_k$  endet
- *Optimale-Teilstruktur-Eigenschaft*  
Wenn  $a_1$  in optimaler Lösung enthalten ist, dann besteht optimale Lösung zu ursprünglichem Problem aus Aktivität  $a_1$  und allen Aktivitäten zur einer optimalen Lösung des Teilproblems  $S_1$

## Rekursiver Greedy-Algorithmus

**Voraussetzung:** Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert

Laufzeit:  $\Theta(n)$

### RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s,f,k,n)

```
1 // s Anfangszeitenarray, f Endzeitenarray,
2 // k Index von Teilproblem, n Größe Anfangsproblem
3 m = k + 1;
4 WHILE m ≤ n and s[m] < f[k] // Suche nach erster Kompatibilität
5     m = m + 1;
6 IF m ≤ n
7     // Ausgabe des Elements und Berechnung weiterer Aktivitäten
8     return {am} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, m, n)
9 ELSE
10    return ∅
```

## Iterativer Greedy-Algorithmus

**Voraussetzung:** Aktivitäten sind monoton steigend nach der Endzeit sortiert

Laufzeit:  $\Theta(n)$

### GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s,f)

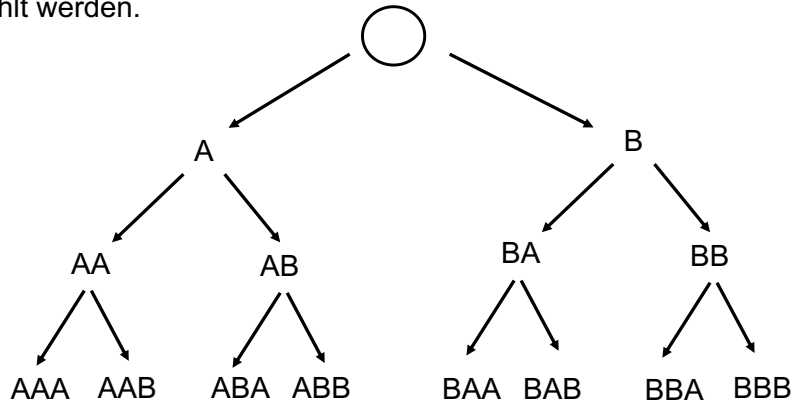
```
1 n = s.length;
2 A = {a1};
3 k = 1; // Index des zuletzt hinzugefügten Elements in A
4 FOR m = 2 TO n
5     IF s[m] ≥ f[k] // Findet zuerst endende Aktivität in Menge
6         A = A ∪ {am}; // Fügt diese hinzu, falls kompatibel
7         k = m;
8 return A;
```

### 1.3 Backtracking

#### Suchbaum - Baum der Möglichkeiten

Darstellung aller für ein Problem bestehenden Möglichkeiten

Problem: Aus den Buchstaben A, B soll dreimal nacheinander einer gewählt werden.



Der Suchraum ist die Menge aller für ein Problem bestehende Möglichkeiten.

#### Idee – Backtracking

- Lösung finden via Trial and error
- Schrittweises Herantasten an die Gesamtlösung
- Falls Teillösung inkorrekt → Gehe einen Schritt zurück und probiere eine andere Möglichkeit
- Voraussetzung:
  - Lösung setzt sich aus Komponenten zusammen (Sudoku, Labyrinth,..)
  - Mehrere Wahlmöglichkeiten für jede Komponente
  - Teillösung kann auf Korrektheit getestet werden

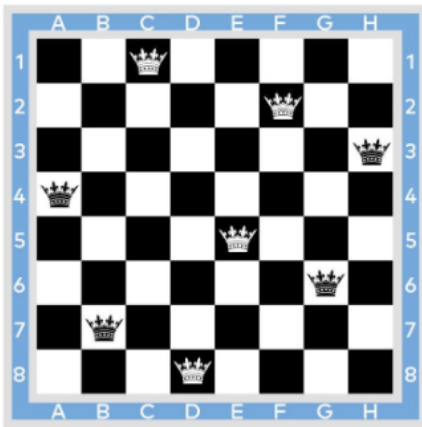
#### Allgemeiner Backtracking-Algorithmus

BACKTRACKING(A, s)

```
1 IF alle Komponenten richtig gesetzt
2   return true;
3 ELSE
4   WHILE auf aktueller Stufe gibt es Wahlmöglichkeiten
5     wähle einen neuen Teillösungsschritt
6     Teste Lösungsschritt gegen vorliegende Einschränkungen
7     IF keine Einschränkung THEN
8       setze die Komponente
9     ELSE
10      Auswahl(Komponente) rückgängig machen
11      BACKTRACKING(A, s + 1)
```

## Damenproblem

Auf einem Schachbrett der Größe  $n \cdot n$  sollen  $n$  Damen so positioniert werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $n$  Damen so aufzustellen, dass keine Damen eine andere schlägt.



- $n = 8$  : 4 Milliarden Positionierungen
- Optimierte Suche: In jeder Zeile/Spalte nur eine Dame
- Reduziert Problem auf 40.000 Positionierungen (ohne Diagonale)

ABBILDUNG 1: Beispielhafte Darstellung des Damenproblems

PLACE-QUEENS(Q,r) // Q Array von Damenpositionen, r Index der ersten leeren Zeile

```

1 IF r == n
2   return Q;
3 ELSE
4   FOR j = 0 TO n - 1 // Mögliche Positionierungen
5     legal = true;
6     FOR i = 0 TO r - 1 // Evaluation der mgl. Bedrohungen
7       IF (Q[i] == j) OR (Q[i] == j + r - i) OR (Q[i] == j - r + i)
8         legal = false;
9     IF legal == true
10      Q[r] = j;
11      PLACE-QUEENS(Q, r + 1)

```

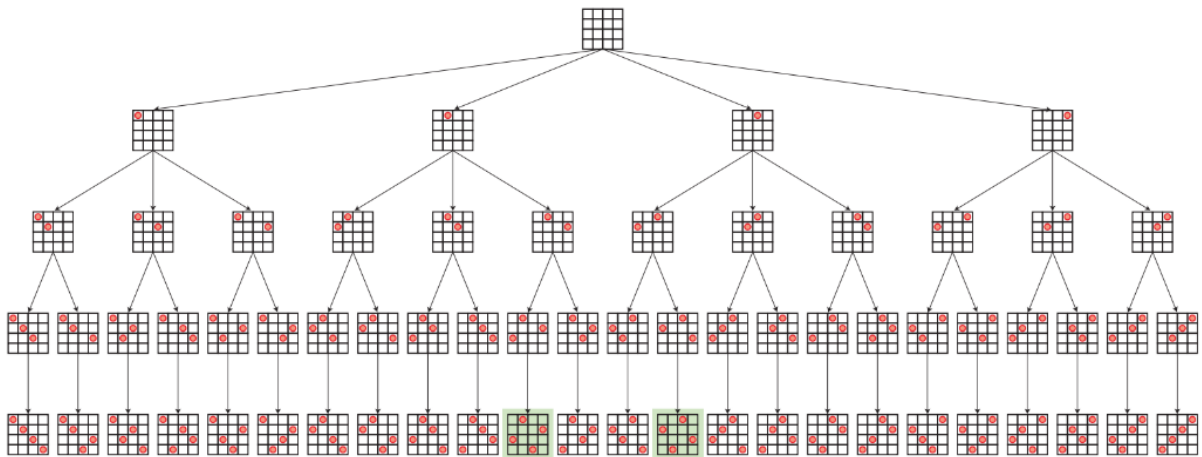


ABBILDUNG 2: Mögliche Pfade von Place-Queens



## 1.4 Metaheuristiken

### Optimierungsproblem

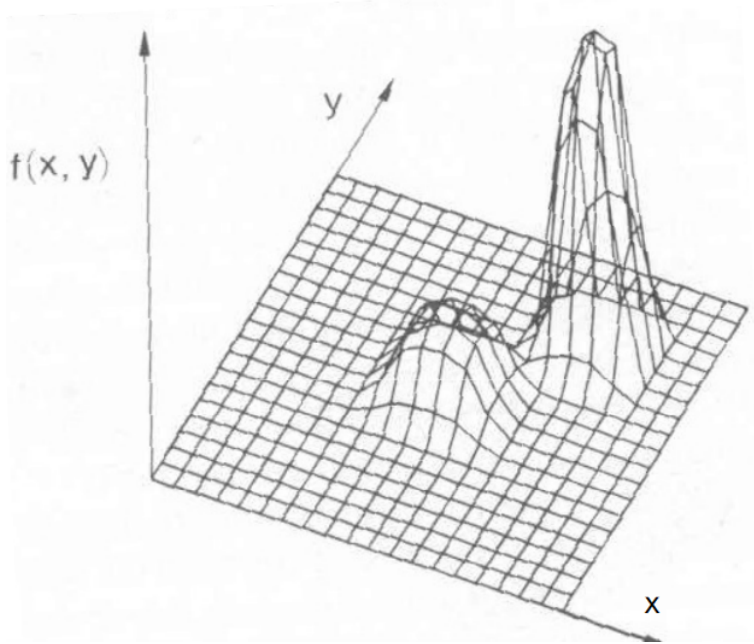


ABBILDUNG 3: Beispiel Optimierungsproblem

- Lösungsstrategien:
    - Exakte Methode
    - Approximationsmethode
    - Heuristische Methode
  - Einschränkungen
    - Antwortzeit
    - Problemgröße
- ⇒ exkludieren oft exakte Methoden

### Heuristik

- Technik um Suche zur Lösung zu führen
  - Metaheuristik (Higher-Level-Strategie)
    - soll z.B. Hängenbleiben bei lokalem Maxima verhindern
  - Leiten einer Suche
    1. Finde eine Lösung (z.B. mit Greedy-Algorithmus)
    2. Überprüfe die Qualität der Lösung
    3. Versuche eine bessere Lösung zu finden
      - Herausfinden in welcher Richtung bessere Lösung evtl. liegt
      - ggf. Wiederholung dieses Prozesses
  - Finden einer besseren Lösung
    - Modifikation der Lösung durch erlaubte Operationen
    - Dadurch erhalten wir Nachbarschaftslösungen
- ⇒ Suche nach besseren Lösungen in der Nachbarschaft

## Rucksackproblem

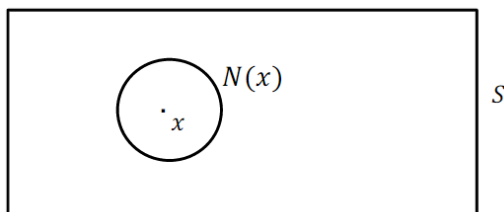
**Ziel:** Höchster Wert der Gegenstände im Rucksack

Beispiel:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	79	32	47	18	26	85	33	40	45
Größe	85	26	48	21	22	95	43	45	55

ABBILDUNG 4: Beispielgegenstände für Rucksackproblem

- Rucksack hat eine Kapazität von 101, 9 verschiedene Gegenstände
- Beispiellösung: Gegenstand 3 + 5 (Wert 73, Größe 70)
- Nachbarschaftslösungen:
  - Gegenstände 2,3 und 5: Wert 105, Größe 96
  - Gegenstände 1,3 und 5: Wert 152, Größe 155 (Gewichtsüberschreitung problematisch)
  - Gegenstand 3: Wert 47, Größe 48



### Nachbarschaft:

- Suchraum  $S$  kann sehr groß sein
- Einschränkung des Suchraums in der Nähe der Startlösung  $x$
- Distanzfunktion  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$
- Nachbarschaft:  $N(x) = \{y \in S : d(x, y) \leq \epsilon\}$

## Zufällige Suche

### Idee – Zufällige Suche

- Suche nach globalem Optimum
- Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
- Wahl einer neuen zufälligen Lösung in jeder Iteration
- Falls die neue Lösung besseren Wert liefert  $\Rightarrow$  als neue **aktuelle** Lösung setzen
- Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei

Code:

#### RANDOM-SEARCH

```
1 best <- irgendeine initiale zufällige Lösung
2 REPEAT
3     S <- zufällige Lösung // von "best" unabhängig
4     IF (Quality(S) > Quality(best)) THEN
5         best <- S
6 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Zeit ist vorbei
7 return best
```

- Nachteile
- Potentiell lange Laufzeit
  - Laufzeit abhängig von der initialien Konfiguration
- Vorteile
- Algorithmus **kann** beim globalen Optimum terminieren

## Bergsteigeralgorithmus

### Idee – Bergsteigeralgorithmus

- Nutzung einer iterativen Verbesserungstechnik
- Anwenden der Technik auf **aktuelle** Lösung im Suchraum
- Auswahl einer neuen Lösung aus Nachbarschaft in jeder Iteration
- Falls diese besseren Wert liefert, überschreiben der **aktuellen** Lösung
- Falls nicht, Wahl einer anderen Lösung aus Nachbarschaft
- Terminierung, falls keine weiteren Verbesserungen auffindbar oder Zeit vorbei

### Code

#### HILL-CLIMBER

```
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
6     REPEAT
7         wähle R aus der Nachbarschaft von S
8         IF Quality(R) > Quality(S) THEN
9             S <- R
10    UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
11    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
12        best <- S
13    S <- irgendeine zufällige Lösung
14 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
15 return best
```

- Nachteile
- Algorithmus terminiert in der Regel bei lokalem Optimum
  - Keine Auskunft, inwiefern sich lokale Lösung von Globaler unterscheidet
  - Optimum abhängig von Initialkonfiguration

- Vorteile
- Einfach anzuwenden

## Iterative lokale Suche

### Idee – Iterative lokale Suche

- Suche nach anderen lokalen Optima bei Fund eines lokalen Optimas
- Lösungen nur in der Nähe der "Homebase"
- Entscheidung, ob neue oder alte Lösung
- Bergsteigeralgo zu Beginn, danach aber großen Sprung um anderes Optimum zu finden

### Code

#### ITERATIVE-LOCAL-SEARCH

```
1 T <- Distribution von möglichen Zeitintervallen
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 H <- S      // Wahl des Homebasepunktes
4 best <- S
5 REPEAT
6   time <- zufälliger Zeitpunkt in der Zukunft aus T
7   REPEAT
8     wähle R aus der Nachbarschaft von S
9     IF Quality(R) > Quality(S) THEN
10      S <- R
11   UNTIL S ist ideale Lösung oder time ist erreicht oder totale Zeit erreicht
12   IF Quality(S) > Quality(best) THEN
13     best <- S
14   H <- NewHomeBase(H,S)
15   S <- Perturb(H)
16 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
17 return best
```

- Perturb
- ausreichend weiter Sprung (außerhalb der Nachbarschaft)
  - Aber nicht soweit, dass es eine zufällige Wahl ist

- NewHomeBase
- wählt die neue Startlösung aus
  - Annahme neuer Lösungen nur, wenn die Qualität besser ist

## Simulated Annealing

### Idee – Simulated Annealing

- Wenn neue Lösung besser, dann wird diese immer gewählt
- Wenn neue Lösung schlechter, wird diese mit gewisser Wahrscheinlichkeit gewählt:  
$$Pr(R, S, t) = e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$$
- Der Bruch ist negativ, da  $R$  schlechter ist als  $S$

### SIMULATED-ANNEALING

```
1 t <- Temperatur, initial eine hohe Zahl
2 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
3 best <- S
4 REPEAT
5     wähle R aus der Nachbarschaft von S
6     IF Quality(R) > Quality(S) oder zufälliges
7          $Z \in [0, 1] < e^{\frac{Quality(R) - Quality(S)}{t}}$  THEN
8         S <- R
9     dekrementiere t
10    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
11        best <- S
12 UNTIL best ist die ideale Lösung oder Temperatur  $\leq 0$ 
13 return best
```

## Tabu-Search

### Idee – Tabu-Search

- Speichert alle bisherigen Lösungen und Liste und nimmt diese nicht nochmal
- Kann sich jedoch wieder von der optimalen Lösung entfernen
- Tabu List hat maximale Größe, falls voll, werden älteste Lösungen gelöscht

### TABU-SEARCH

```
1 l <- maximale Größe der Tabu List
2 n <- Anzahl der zu betrachtenden Nachbarschaftslösungen
3 S <- irgendeine initiale zufällige Lösung
4 best <- S
5 L <- { } Tabu List der Länge l
6 Füge S in L ein
7 REPEAT
8     IF Length(L) > l THEN
9         Entferne ältestes Element aus L
10    wähle R aus Nachbarschaft von S
11    FOR n - 1 mal DO
12        Wähle W aus Nachbarschaft von S
13        IF W  $\notin$  L und (Quality(W) > Quality(R)) oder R  $\in$  L THEN
14            R <- W
15    IF R  $\notin$  L THEN
16        S <- R
17        Füge R in L ein
18    IF Quality(S) > Quality(best) THEN
19        best <- S
20 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
21 return best
```

## Populationsbasierte Methode

- Bisher: Immer nur Betrachtung einer einzigen Lösung
- Hier: Betrachtung einer Stichprobe von möglichen Lösungen
- Bei der Bewertung der Qualität spielt die Stichprobe die Hauptrolle
- z.B. Evolutionärer Algorithmus

## Evolutionärer Algorithmus

### Idee – Evolutionärer Algorithmus

- Algorithmus aus der Klasse der Evolutionary Computation
- *generational Algorithmus*: Aktualisierung der gesamten Stichprobe pro Iteration
- *steady-state Algorithmus*: Aktualisierung einzelner Kandidaten der Probe pro Iteration
- *Resampling-Technik*: Generierung neuer Stichproben basierend auf vorherigen Resultaten

Abstrakter Code (Allgemeiner Breed und Join):

#### ABSTRACT-EVOLUTIONARY-ALGORITHM

```
1 P <- generiere initiale Population
2 best <- □ // leere Menge
3 REPEAT
4     AssesFitness(P)
5     FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
6         IF best = □ oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
7             best <-  $P_i$ 
8     P <- Join(P, Breed(P))
9 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
10 return best
```

Breed Erstellung neuer Stichprobe mithilfe Fitnessinformation

Join Fügt neue Population der Menge hinzu

#### Initialisierung der Population

- Initialisierung durch zufälliges Wählen der Elemente
- Beeinflussung der Zufälligkeit bei Vorteilen möglich
- Diversität der Population (alle Elemente in Population einzigartig)
- Falls neue zufällige Wahl eines Individuums
  - Entweder Vergleich mit allen bisherigen Individuen ( $O(n^2)$ )
  - Oder besser: Nutzen eines Hashtables zur Überprüfung auf Einzigartigkeit ( $O(n)$ )

### Idee – Evolutionsstrategie

- Generiere Population zufällig
- Beurteile Qualität jedes Individuums
- Lösche alle bis auf die  $\mu$  besten Individuen
- Generiere  $\frac{\lambda}{\mu}$ -viele Nachfahren pro bestes Individuum
- Join Funktion: Die Nachfahren ersetzen die Individuen

Algorithmus der Evolutionsstrategie

#### $(\mu, \lambda)$ -EVOLUTION-STRATEGY

```
1  $\mu$  <- Anzahl der Eltern (initiale Lösung)
2  $\lambda$  <- Anzahl der Kinder
3 P <- {}
4 FOR  $\lambda$ -oft DO
5   P <- {neues zufälliges Individuum}
6 best <-  $\square$ 
7 REPEAT
8   FOR jedes individuelle  $P_i \in P$  DO
9     AssesFitness( $P_i$ )
10    IF best =  $\square$  oder Fitness( $P_i$ ) > Fitness(best) THEN
11      best <-  $P_i$ 
12  Q <- die  $\mu$  Individueen deren Fitness() am Größten ist
13  P <- {}
14  FOR jedes Element  $Q_j \in Q$  DO
15    FOR  $\frac{\lambda}{\mu}$ -oft DO
16      P <- P  $\cup$  {MUTATE( $Q_j$ )}
17 UNTIL best ist die ideale Lösung oder totale Zeit erreicht
18 return best
```



## 1.5 Amortisierte Analyse

### Kosten von Operationen

- Bisher: Betrachtung von Algorithmen, die Folge von Operationen auf Datenstrukturen ausführen
- Abschätzung der Kosten von  $n$  Operationen im Worst-Case
- Dies liefert die obere Schranke für die Gesamtkosten der Operationenfolge
- Nun: **Amortisierte Analyse**: Genauere Abschätzung des Worst Case
- Voraussetzung: Nicht alle Operationen in der Operationenfolge gleich teuer
- z.B. eventuell abhängig vom aktuellen Zustand der Datenstruktur
- Amortisierte Analyse garantiert die mittlere Performanz jeder Operation im Worst-Case

### Beispiel Binärzähler

Eigenschaften

- $k$ -Bit Binärzähler hier als Array
- Codierung der Zahl als  $x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i b_i$
- Initialer Array für  $x = 0$ :

$b_{k-1}$	$b_{k-2}$					$b_2$	$b_1$	$b_0$
0	0	...			...	0	0	0

Inkrementieren eines Binärzählers

- Erhöhe  $x$  um 1
- Beispiel:  $x = 3$
- INCREMENT kostet 3, da sich drei Bitpositionen ändern

$b_{k-1}$	$b_{k-2}$					$b_2$	$b_1$	$b_0$
0	0	...			...	0	1	1
$b_{k-1}$	$b_{k-2}$					$b_2$	$b_1$	$b_0$
0	0	...			...	1	0	0

+1

Teuerste INCREMENT-Operation

- INCREMENT flippt  $k - 1$  Bits von 1 zu 0 und 1 Bit von 0 auf 1
- Kosten nicht konstant, stark abhängig von Datenstruktur

$b_{k-1}$	$b_{k-2}$					$b_2$	$b_1$	$b_0$
0	1	...			...	1	1	1
$b_{k-1}$	$b_{k-2}$					$b_2$	$b_1$	$b_0$
1	0	...			...	0	0	0

+1

Traditionelle Worst-Case Analyse

- Worst-Case Kosten von  $n$  INCREMENT-Operationen auf  $k$ -Bit Binärzähler
- Anfangswert  $x = 0$
- Schlimmster Kostenfall: INCREMENT-Operation hat  $k$  Bitflips
- $n$ -mal inkrementieren sorgt für Kosten:  $T(n) \leq n \cdot k \in O(kn)$

## Aggregat Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Methode für Amortisierte Analyse
- Sequenz von  $n$ -Operationen kostet Zeit  $T(n)$
- Durchschnittliche Kosten pro Operation  $\frac{T(n)}{n}$
- Ziel:  $T(n)$  genau berechnen, **ohne** jedes Mal Worst-Case anzunehmen
- Ansatz: Aufsummation der **tatsächlich** anfallenden Kosten aller Operationen

Durchführung:

$b_4$ $b_3$ $b_2$ $b_1$ $b_0$	Schritt看ten	Gesamtkosten	$b_4$ $b_3$ $b_2$ $b_1$ $b_0$	Schritt看ten	Gesamtkosten
0 0 0 0 0	0	0	0 0 1 0 1		8
0 0 0 0 1	+1	1	0 0 1 1 0	+1	10
0 0 0 1 0	+1	2	0 0 1 1 1	+1	11
0 0 0 1 1	+1	3	0 1 0 0 0	+1	15
0 0 1 0 0	+1	4	0 1 0 0 1	+1	16
0 0 1 0 1	+1	7	0 1 0 1 0	+1	18
	1	8		2	
$b_4$ $b_3$ $b_2$ $b_1$ $b_0$	Schritt看ten	Gesamtkosten			
0 1 0 1 0		18			
0 1 0 1 1	+1	19			
0 1 1 0 0	+1	22			
0 1 1 0 1	+1	23			
0 1 1 1 0	+1	25			
0 1 1 1 1	+1	26			

- Bisher noch kein Worst-Case
- Nächste Operation hätte max. Kosten
- Jede 2. Operation minimale Kosten
- In jeder Operation ändert sich  $b_0$
- In jeder 2. ändert sich  $b_1$  etc

Genauere Kostenanalyse:

- Nun in der Lage  $T(n)$  genau auszurechnen
- Bei  $n$  Operationen ändert sich das Bit  $b_i$  genau  $\lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor$ -mal
- Bits  $b_i$  mit  $i > \log_2 n$  ändern sich nie
- Über alle  $k$  Bits aufsummieren liefert:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{n}{2^i} \rfloor = n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2n \in O(n)$$

- Obere Schranke:  $T(n) \leq 2n$
- Kosten jeder INCREMENT-Operation im Durchschnitt:  $\frac{2n}{n} = 2 \in O(1)$

## Account Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Besteuerung einiger Operationen, so dass sie Kosten anderer Operationen mittragen
- Zuweisung von höherem Kosten (Amortisierte Kosten), als ihre tatsächlichen Kosten sind
- **Guthaben:** Differenz zwischen amortisierten und tatsächlichen Kosten
- Nutzung dieses Guthabens für Operationen bei denen amortisiert < tatsächlich gilt
- Guthaben darf nicht negativ werden:

Summe amortisierte Kosten > Summe tatsächliche Kosten

Wahl der Amortisierten Kosten - Binärzähler:

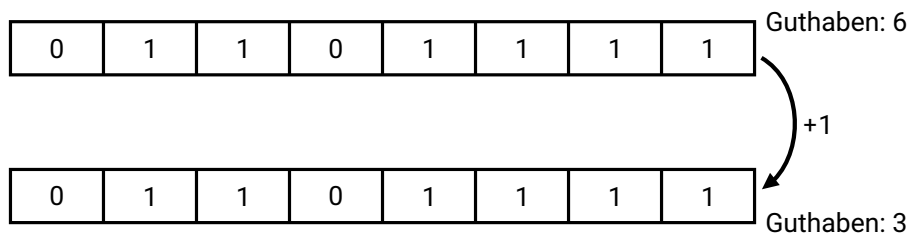
- Setzen eines Bits von 0 → 1 zahlt 2 Einheiten ein / Bezeichnung  $f_i$
- Setzen eines Bits von 1 → 0 zahlt 0 Einheiten ein / Bezeichnung  $e_i$
- Tatsächliche Kosten  $t_i$ : Anzahl der Bitflips bei der  $i$ -ten INCREMENT-Operation

$$t_i = e_i + f_i$$

- Amortisierte Kosten betragen:  $a_i = 0 \cdot e_i + 2 \cdot f_i$

Kostenbeispiel:

- Jede Bitflip Operation kostet zusätzlich 1 Einheit
- Setzen Bit 0 → 1: Zahlt 2 ein, kostet aber 1 → +1 Guthaben
- Setzen Bit 1 → 0: Zahlt 0 ein, kostet aber 1 → -1 Guthaben



Obere Schranken der Kosten:

- Guthaben auf dem Konto entspricht der Anzahl der auf 1 gesetzten Bits
- Kosten:  $T(n) \sum_{i=1}^n t_i \leq v \sum_{i=1}^n a_i$ , für ein konstantes  $v$
- Nun Abschätzung dieser Formel zum Erhalten einer oberen Schranke
- Beobachtung: Bei jeder INCREMENT höchstens ein neues Bit von 0 auf 1
- Für alle  $i$  gilt damit  $f_i \leq 1$
- Amortisierte Kosten jeder Operation höchstens  $2 \cdot f_i \leq 2$
- Insgesamt:  $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$

## Potential-Methode - Beispiel Binärzähler

Eigenschaften:

- Betrachtung welchen Einfluss die Operationen auf die Datenstruktur haben
- Potentialfunktion  $\phi(i)$ : Hängt vom aktuellen Zustand der Datenstruktur nach  $i$ -ter Operation ab
- Ausgangspotential sollte vor jeglicher Operation nicht negativ sein:  $\phi(0) \geq 0$

Amortisierte Kosten:

- Amortisierte Kosten der  $i$ -ten Operation: (Summe tatsächliche Kosten + Potentialänderung)

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

- Summe der amortisierten Kosten:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (t_i + \phi(i) - \phi(i-1)) = \sum_{i=1}^n t_i + \phi(n) - \phi(0)$$

- Wenn für jedes  $i$  gilt  $\phi(i) \geq \phi(0)$ :

Summe der amor. Kosten ist gültige obere Schranke an Summe der tatsächlichen Kosten

Potential-Methode anhand des Binärzählers:

- $\phi(i)$ : Anzahl der 1-en im Array nach  $i$ -ter INCREMENT-Operation

→  $\phi(i)$  nie negativ und  $\phi(0) = 0$

- Angenommen  $i$ -te Operation setzt  $e_i$  Bits von 1 auf 0, dann hat diese Operation Kosten  $t_i \leq e_i + 1$

- Neues Potential:  $\phi(i) \leq \phi(i-1) - e_i + 1 \Leftrightarrow \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i$

- Amortisierte Kosten der  $i$ -ten INCREMENT-Operation:

$$a_i = t_i + \phi(i) - \phi(i-1) \leq e_i + 1 + 1 - e_i = 2$$

- Insgesamt:  $T(n) = \sum_{i=1}^n t_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \leq 2n \in O(n)$