

Apprentissage par renforcement appliqué

Notions fondamentales

[revision 4.0]

Brahim Chaib-draa

Brahim.Chaib-Draa@ift.ulaval.ca



Université Laval

2020-07-31

1 Vue d'ensemble

2 Formalisme et outils mathématiques du RL

3 L'univers du point de vue de l'agent

4 Pour aller plus loin

Vue d'ensemble

1 Vue d'ensemble

- Le paradigme d'apprentissage par renforcement
- Environnement : l'univers de l'agent

2 Formalisme et outils mathématiques du RL

3 L'univers du point de vue de l'agent

4 Pour aller plus loin

Vue d'ensemble

Le paradigme d'apprentissage par renforcement

Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

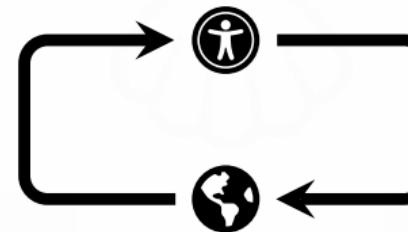
- ❶ ↳ un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ❷ ↳ un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.-à-d. un signal de récompense 🎉 ou 💩
- ❸ ↳ un **but** (pour l'agent) : l'état final à atteindre



Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

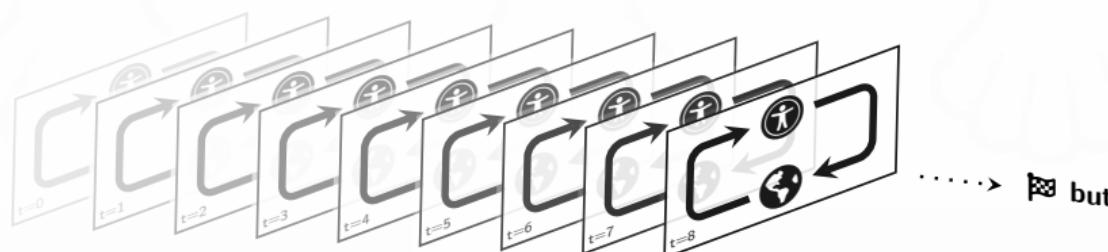
- ① ⇔ un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ② ⇔ un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.-à-d. un signal de **récompense** 👍 ou 👎
- ③ ⇔ un **but** (pour l'agent) : l'état final à atteindre



Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

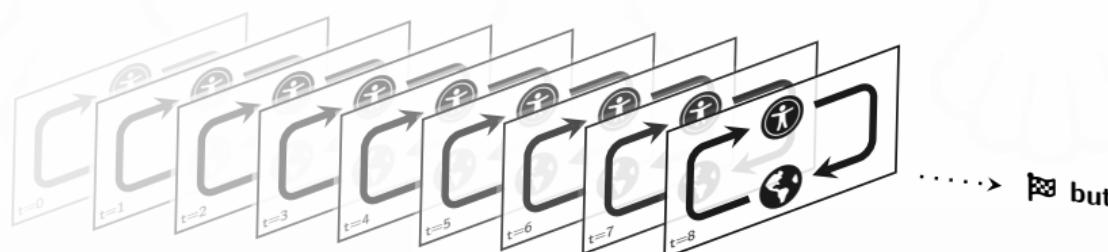
- ① ⇔ un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ② ⇔ un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.- -d. un signal de **récompense** 🎊 ou 🚫
- ☒ ⇔ un **but** (pour l'agent) : l'état final éteindre



Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

- ① ⇔ un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ② ⇔ un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎁, c.- -d. un signal de **récompense** 🎉 ou 🚫
- ☒ ⇔ un **but** (pour l'agent) : l'état final éteindre



★ – L'objectif (informel) de l'apprentissage par renforcement :

Que l'**agent** trouve par lui-même la **meilleure stratégie** (une **politique optimale**)
pour atteindre ce **but** en se basant uniquement sur les **récompenses**.

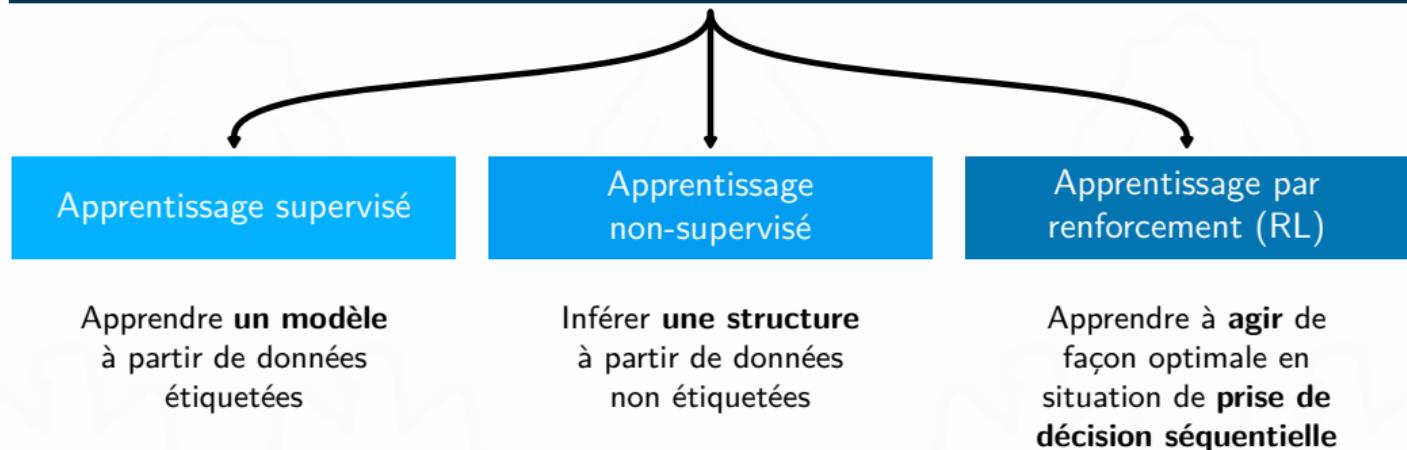
Apprentissage machine (ML)

Problème de Prise de Décision
Séquentielle (PDS)

Apprentissage par renforcement (RL)

Situer l'apprentissage par renforcement par rapport aux autres paradigmes d'apprentissage machine

L'apprentissage machine (ML)



Apprendre **un modèle**
  partir de données
 tiquet es

Inférer **une structure**
  partir de données
non ´tiquet es

Apprendre ´**agir** de
facon optimale en
situation de **prise de
décision séquentielle**

En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
- Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
 - 1 Sauter hors de l'avion
 - 2 compter jusqu'à 10
 - 3 😳 ... ensuite mettre son parachute !
- Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,
ex : Arroser des semences de plants de tomate → des belles tomates mûres en santé
- ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaanne !
- Problème :** Comment savoir si une récompense r est causée par l'action a ?

En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
 - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
 - 1 Sauter hors de l'avion
 - 2 compter jusqu'à 10
 - 3 😱 ... ensuite mettre son parachute !
 - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,
ex : Arroser des semences de plants de tomate → des belles tomates mûres en santé
 - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaange !!
- Problème :** Comment savoir si une récompense r est causée par l'action a ?

En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
 - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
 - 1 Sauter hors de l'avion
 - 2 compter jusqu'à 10
 - 3 ... ensuite mettre son parachute !
 - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,
ex : Arroser des semences de plants de tomate → des belles tomates mûres en santé
 - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaanne !
- Problème :** Comment savoir si une récompense r est causée par l'action a ?

En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
 - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
 - 1 Sauter hors de l'avion
 - 2 compter jusqu'à 10
 - 3 ... ensuite mettre son parachute !
 - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,
ex : Arroser des semences de plants de tomate → des belles tomates mûres en santé
 - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaanne !
- Problème :** Comment savoir si une récompense r est causée par l'action a ?

En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
 - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
 - 1 Sauter hors de l'avion
 - 2 compter jusqu'à 10
 - 3 ... ensuite mettre son parachute !
 - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,
ex : Arroser des semences de plants de tomate → des belles tomates mûres en santé
 - ▲ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,
ex : J'ensemence des plants de tomate ↗ Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaannge !!

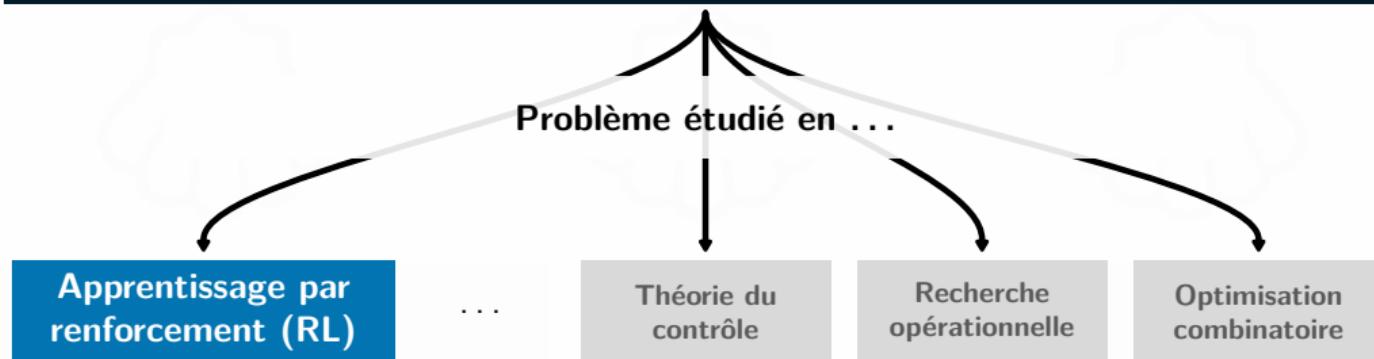
Idée clé à retenir :

En RL, les données **ne sont pas indépendantes et identiquement distribuées**

(contrairement à l'assumption qu'on fait en apprentissage profond)

Le RL par rapport aux autres approches de résolution de problème de PDS

Problème de Prise de Décision Séquentielle (PDS)



En quoi l'apprentissage par renforcement se distingue-t-il des autres approches ?

Cas où l'approche RL se distingue :

- 1 Aucun **modèle** de l'environnement n'existe et la seule façon de **recueillir de l'information** sur l'environnement est **par interaction** avec celui-ci ;
- 2 Un **modèle** de l'environnement est disponible, mais il est **incomplet et/ou inexact** ;
- 3 Un **modèle** de l'environnement est disponible, mais l'**espace de recherche est intractable** ;

Composante clé du RL

- chantillonnage et optimisation ;
- Utilisation d'approximateur de fonction ;

 – Un **modèle de l'environnement** : C'est la représentation abstraite que l'agent possède du comportement de l'univers
Ex. : les règles de la physique , les règles d'un jeu  

Le RL par rapport aux autres approches de résolution de problème de PDS

Problème de Prise de Décision Séquentielle (PDS)

Pas de modèle de l'environnement
(ou modèle imparfait)
et/ou
l'espace de recherche est
intractable.

Un modèle exact
de l'environnement est disponible
et
une solution analytique existe.

Apprentissage par
renforcement (RL)

Théorie du
contrôle

Recherche
opérationnelle

Optimisation
combinatoire

...

Vue d'ensemble

Environnement : l'univers de l'agent

- **Simulateur** : Simulateur de physique, jeux vidéo, ...
 - **Robotique** : Pilotage d'aéronef, manipulation d'un bras robot, ...
 - **Ressource réelle** : Calculateur en grappe (*cluster*), système de contrôle industriel ...
- ⋮

Exemple d'environnement : simulateur

Simulateur de physique pour l'étude de la locomotion :

TerrainRL Simulator [1]

▶ Publication

▶ Projet

▶ GitHub

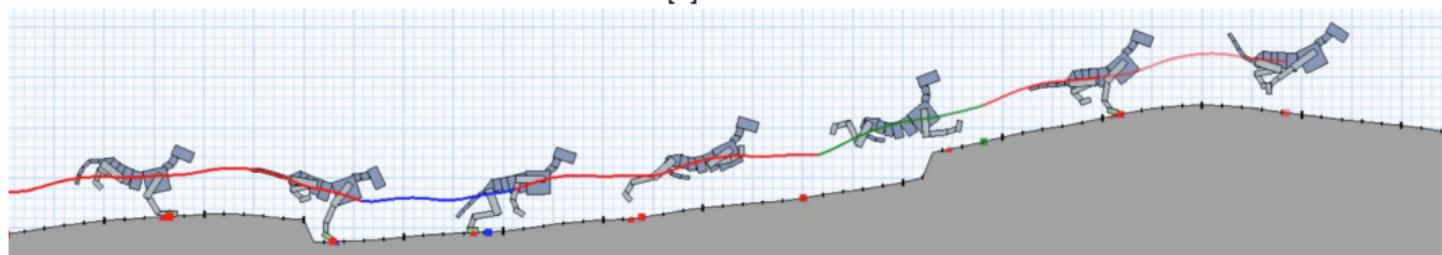


Image : University of British Columbia & UC Berkley

▶ Vidéo

- *Terrain-Adaptive Locomotion Skills Using Deep Reinforcement Learning (MACE, 2016) [2]*

▶ Publication

Exemple d'environnement : simulateur

L'environnement de recherche *Gym[Atari]* par *OpenAI*, basé sur la suite de jeux *Atari*

► OpenAI – Gym[Atari]

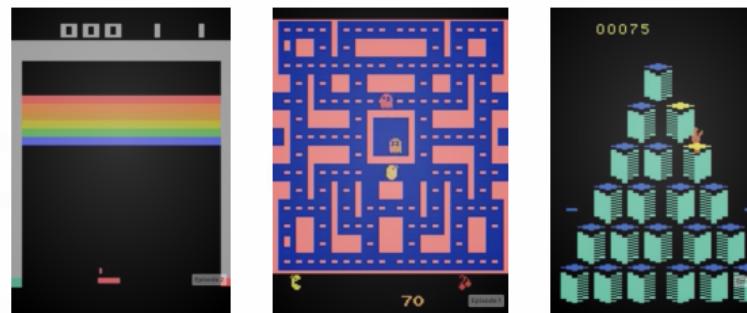


Image : OpenAI

- *Playing Atari with Deep Reinforcement Learning (DQN, 2013) [3]* ► Vidéo
- *Human-level control through deep reinforcement learning*. Publié dans la revue *Nature* [4]
 - GitHub

Exemple d'environnement : simulateur

L'environnement de recherche PySC2 par Deepmind, basé sur le jeu *StarCraft II* de Blizzard Entertainment.

[PySC2 GitHub](#)

[Vidéo: PySC2 feature layer API](#)

[StarCraft II](#)

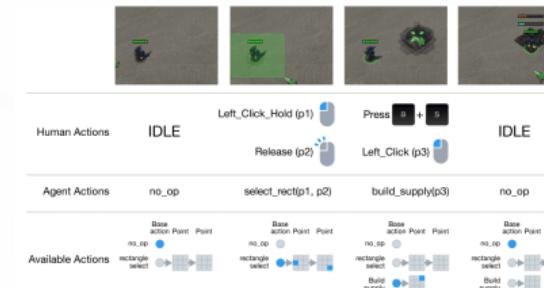


Image : DeepMind

- DeepMind and Blizzard open StarCraft II as an AI research environment [Publication](#)
- StarCraft II : A New Challenge for Reinforcement Learning [5] [Publication](#)
- AlphaStar : Mastering the Real-Time Strategy Game StarCraft II (AlphaStar, 2019) [Publication](#)
- AlphaStar : The inside story [Vid o \(5 min\)](#)

Exemple d'environnement : robotique

Pilotage autonome d'a閞onef :

Stanford University autonomous helicopter

▶ Projet



Image : Stanford Autonomous Helicopter

▶ Vidéo

- *An Application of Reinforcement Learning to Aerobatic Helicopter Flight (LQR, 2006) [6]*

Exemple d'environnement : robotique

Automatisation de chaîne logistique : flexible et résiliente face aux changements

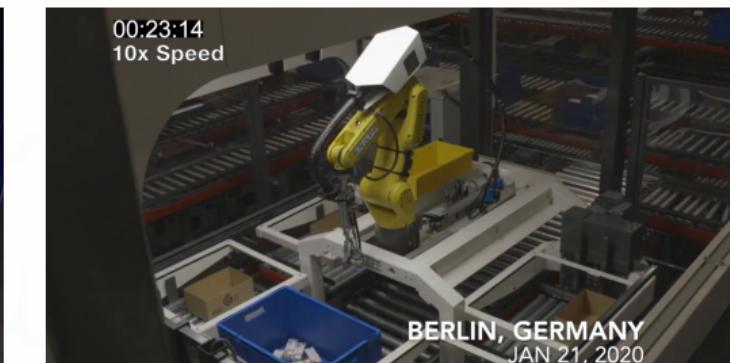
Covariant

► Covariant.ai / Use cases

► Covariant.ai / Research



► Vid o (3:38 min)



► Vid o (9 min)

Image : covariant.ai

- *AI Helps Warehouse Robots Pick Up New Tricks (WIRED)* ► Magazine
- *AI-powered robot warehouse pickers are now ready to go to work (MIT Technology Review)* ► Magazine
- *Covariant, ABB partner to integrate AI and robots for warehouses (The Robot Report)* ► Magazine

Exemple d'environnement : ressources industrielles

Problème de gestion des ressources :

- Gestion des tâches dans un calculateur en grappe (*computer cluster*) :

Resource Management with Deep Reinforcement Learning (DeepRM, 2016) [7] [▶ Publication](#)

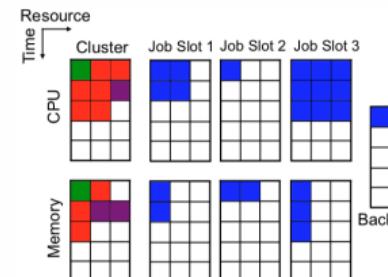


Image : Publication *Resource Management with Deep Reinforcement Learning*, MIT & Microsoft Research

- Gestion de la température d'un m gacentre de données :

DeepMind AI Reduces Google Data Centre Cooling Bill by 40% [▶ Publication](#)

Particularités des différents types d'environnements

Caractéristiques propres aux simulateurs :

- espace d' tats/d'observation discret ou continu ;
- espace d'action discret ou continu ;
- espace possiblement en haute dimension (ex. : *Starcraft*, *Dota 2*) ;
- peut être temps réel (ex. : *Atari*, *Starcraft*, *Dota 2*) ;
- peut être un problème d'information imparfaite (ex. : *Atari*, *Starcraft*, *Dota 2*) ;
- peut nécessiter une coopération multi-agent (ex. : *Dota 2*) ;

Caractéristiques propres à la robotique :

- espace d'action et d'observation continu et en haute dimension ;
- temps réel ;
- information imparfaite (l'univers étant observé au moyen de senseurs qui sont limités/bruités) ;

Enjeux communs à tous les environnements :

- planification à long terme (délais d'observation de cause à effet) ;
- stratégie efficace d'exploration/exploitation ;

Formalisme et outils mathématiques du RL

1 Vue d'ensemble

2 Formalisme et outils mathématiques du RL

- Langage des Processus de Décision de Markov [*MDP*]
- Terminologie et notation en RL
- Interaction agent-environnement

3 L'univers du point de vue de l'agent

4 Pour aller plus loin

Formalisme et outils mathématiques du RL

Langage des Processus de Décision de Markov [MDP]

Pourquoi utiliser les Processus de Décision de Markov ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de problèmes de Prise de Décision Séquentielle **en contexte d'incertitude**
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitelement ou implicitement** un *MDP*
- *Markovien ?*

Pourquoi utiliser les Processus de Décision de Markov ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de problèmes de Prise de Décision Séquentielle **en contexte d'incertitude**
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitelement ou implicitement** un *MDP*
- ***Markovien* ?**

Pourquoi utiliser les Processus de Décision de Markov ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de problèmes de Prise de Décision Séquentielle **en contexte d'incertitude**
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitement ou implicitement** un *MDP*
- **Markovien ?**

Pour un processus de décision, être Markovien signifie que **l'environnement est entièrement caractérisé par l'état présent** \implies L'historique n'apporte aucune information supplémentaire

Propriété de Markov

« *Le futur est indépendant du passé étant donné le présent* »

$$p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = p(\mathbf{s}_{t+1} | \mathbf{s}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)$$

Un MDP est défini par un tuple, $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, r, p, s_0 \rangle$ tel que :

- \mathcal{S} est l'ensemble des ** tats** valides
- \mathcal{A} est l'ensemble des **actions** valides
- $r(s, a, s')$ spécifie la fonction de **récompense**
- $p(s'|s, a)$ spécifie le **modèle** du système
- s_0 est l'** tat initial** du système

$$s \in \mathcal{S} \quad \text{Notation explicite : } s \in \mathcal{S}_t$$

$$a \in \mathcal{A} \quad \text{Notation explicite : } a \in \mathcal{A}(s) \text{ ou } a \in \mathcal{A}_t$$

$$r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{P}$$



Formalisme et outils mathématiques du RL

Terminologie et notation en RL

Notation

Convention dans le cadre du cours :

Terme **notation** [Terme anglophone¹ , Terme alternatif² , ...]

exemple : Trajectoire τ [Trajectory, Episode, Rollout]

Note au lecteur : Soyez avis  que la littérature en *apprentissage par renforcement* est riche, diverse et influencée par de multiples domaines d'expertise : mathématiques, théorie du contrôle, recherche opérationnelle, statistique, science informatique, robotique, neuroscience ...

Il n'existe pas de notations unifiées en *RL*   l'heure actuelle et **la terminologie** utilisée pour nommer un même concept **peut varier d'un auteur à l'autre**.

Recommandation :

- vérifier comment l'auteur définit la notation pour l'article que vous consultez ;
- portez attention au contexte d'utilisation ;

1. La grande majorité de la littérature en RL est anglophone

2. Une précision sera apportée lorsque la nuance entre deux termes est un détail important étant donné le contexte d'utilisation.

Notation

Convention relativement à la typographie

c est un scalaire

C est un vecteur aléatoires (est souvent omise dans la littérature afin de simplifier la formulation)

\mathbf{c} est la réalisation d'un vecteur aléatoires

\mathcal{C} est un espace de probabilité (l'ensemble des valeurs possibles d'une variable aléatoires)

- Temps t [*Time step*] et Horizon T [*Time horizon*]
-  tat \mathbf{s}_t [*State*] vs Observation \mathbf{o}_t [*Observation*]
- Action \mathbf{a}_t [*Action*] et Politique $\pi(\mathbf{s}_t|\mathbf{a}_t)$ [*Policy*]
- Trajectoire τ [*Trajectory, Episode, Rollout*]
- Modèle $p(\mathbf{s}'|\mathbf{s}, \mathbf{a})$ [*Model, Transition function, System dynamic, Dynamic*]
- Récompense r_t [*Reward*] et Retour G_t [*Return*]
- L'objectif π^* en RL [*RL Objective*]

Temps et horizon

Temps t [Time step]

- Peut être discret ou continu¹
- N'est pas nécessairement temporel (ex. : une machine  t at)

Horizon T [Time horizon]

- C'est le dernier temps t d'une séquence
- L'horizon T peut être fini ou infini²
- Pour une séquence d'état finie $s_{t \in [1..T]}$, on a

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_{t-1}, s_t, s_{t+1}, \dots, s_{T-1}, s_T$$

avec s_T appelé l'** tat Terminal**

1. Voir note de bas de page 2, page 48 de Reinforcement Learning : An introduction [8]

2. Pour le cas horizon-infini $T = \infty$, voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour G sur un horizon infini](#)

Observation vs tat

Observation¹ $\mathbf{o}_t \in \mathcal{O}$ [Observation]

- L'espace d'état \mathcal{O} est l'ensemble des tats observables \mathbf{o} possibles d'un environnement
- \mathbf{o} représente une partie de l'information disponible sur l'environnement

$$\text{eye icon} \subseteq \text{globe icon} \mapsto \mathbf{o}_t$$

tat $\mathbf{s}_t \in \mathcal{S}$ [State]

- L'espace d'état \mathcal{S} est l'ensemble des tats \mathbf{s} possibles d'un environnement
- \mathbf{s} représente la totalité des informations disponibles sur l'environnement

$$\text{eye icon} = \text{globe icon} \mapsto \mathbf{s}_t$$

Si $\mathbf{s}_t = \mathbf{o}_t$ alors on dit que l'environnement est compl tement observé.

Si $\mathbf{s}_t \supset \mathbf{o}_t$ alors on dit que l'environnement est partiellement observé.

1. Mise en garde sur la notation : \mathbf{s}_t est souvent employé dans la littérature pour noter un état partiellement observé au lieu de \mathbf{o}_t alors qu'il serait techniquement plus juste d'utiliser \mathbf{s}_t . Porter une attention particulière au contexte d'utilisation. 

Action

Action $a_t \in \mathcal{A}$ [Action]

- L'espace d'action \mathcal{A} est l'ensemble des actions a valides d'un environnement
- L'espace d'action peut-être :

discret ex. : Les actions possibles dans le jeu pacman ($\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$)

continu ex. : Les commandes de direction et de profondeur d'un avion 

Politique

Politique π [Policy]

- C'est une stratégie, une façon d'agir qui indique quelle action a_t prendre en fonction du contexte
ex. : « le client a toujours raison », « la meilleure défensive c'est l'offensive », ...
- La politique peut être soit de type **déterministe** : $a_t = \pi(s_t)$

exemple : $\pi_{greedy} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}$
 $s \longmapsto \pi_{greedy}(s_t) \doteq \arg \max_a Q^\pi(s_t, a)$

soit de type **stochastique** : $a_t \sim \pi(\cdot | s_t)$

exemple : $\pi_{gaussian} : \mathcal{A} \times \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1]$
 $(a, s) \longmapsto \pi_{gaussian}(a_t | s_t) \doteq \mathbb{P}_{A \sim \mathcal{N}(\mu(s), \Sigma)} [A_t = a | S_t = s]$

Trajectoire

Trajectoire τ [Trajectory, Episode, Rollout]

- C'est une séquence complète d' tats s et d'actions a jusqu'à terminaison, peu importe l'issue

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

Modèle

Modèle $p(\mathbf{s}'|\mathbf{s}, \mathbf{a})$ [Model p , Transition function T , System dynamic, Dynamic]

- Ce sont les règles qui gouvernent l'environnement
ex. : les règles de la physique , les règles d'un jeu  , ...
- Dans le contexte du **RL sans-modèle**, puisqu'on n'a pas accès au modèle, alors on le **définit comme une distribution de probabilité** qui satisfait la propriété de Markov

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(\mathbf{s}', r, \mathbf{s}, \mathbf{a}) \longmapsto p(\mathbf{s}', r | \mathbf{s}, \mathbf{a}) \doteq \mathbb{P}[S_{t+1} = \mathbf{s}', R_{t+1} = r | S_t = \mathbf{s}, A_t = \mathbf{a}]$$

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(\mathbf{s}', \mathbf{s}, \mathbf{a}) \longmapsto p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}, \mathbf{a}) \doteq \mathbb{P}[S_{t+1} = \mathbf{s}' | S_t = \mathbf{s}, A_t = \mathbf{a}]$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{P}[S_{t+1} = \mathbf{s}', R_{t+1} = r | S_t = \mathbf{s}, A_t = \mathbf{a}]$$

Remarque : $1 = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}, \mathbf{a})$ pour tous $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ et $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$

Une intuition à propos du modèle p

Problème : En RL, le modèle de l'environnement est généralement inconnu (ou inexact)

Solution : Modéliser l'environnement comme une variable aléatoire

Un bon moyen pour visualiser cette approche et comprendre le rôle que joue p dans les formules mathématiques en RL est de regarder le comportement des *Processus de Markov*

Exemple interactif

Intuition : Imaginez-vous sur un bateau à la dérive avec :

- l'état $s =$ vos coordonnées géographiques
- et le modèle $p = \{$ les courants marins, l'effet des marées et du vent $\}$



Image : Setosa blog

Processus de Markov $\langle \mathcal{S}, p, s_0 \rangle$

- C'est comme un MDP, mais sans action a ni récompense r
- Le passage d'un état s à un autre est strictement basé sur le modèle $p(s'|s)$

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1]$$

Récompense, retour et objectif

Idée clé : formaliser la notion de **but** 

Récompense $r_t \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ [Reward]

❖ C'est le « feedback » immédiat de l'environnement en conséquence d'une action

- Fonction de récompense (version à 3 arguments, forme la plus courante)

$$\begin{aligned} r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{s}_{t+1}) &\longmapsto r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{s}_{t+1}) \end{aligned}$$

- Fonction de récompense (version à 2 arguments)

$$\begin{aligned} r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) &\longmapsto r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \quad \doteq \quad \mathbb{E}_{(\mathbf{s}', r) \sim p(\cdot | \mathbf{s}, \mathbf{a})} [R_{t+1} = r | S_t = \mathbf{s}, A_t = \mathbf{a}] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}} p(\mathbf{s}', r | \mathbf{s}, \mathbf{a}) r(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}') \end{aligned}$$

Notation abr g e  : $r_t \doteq r(\mathbf{s}_{t-1}, \mathbf{a}_{t-1}, \mathbf{s}_t)$

★★★ **Note** : L'agent reçoit la récompense **après** avoir exécuté l'action

Récompense, retour et objectif

Idée clé : formaliser la notion de **but** 

Retour G_t [Return]

- La **somme des récompenses futures**   partir du temps t jusqu'à l'horizon T
- Cas : $T = \text{horizon fini}^1$ (Ce sera l'assumption pour le reste du cours)

$$G_t(\tau) \doteq \sum_{t'=t}^T r(s_{t'}, a_{t'}, s_{t'+1})$$

Notation : On emploie souvent $G(\tau)$ lorsque qu'on calcule le retour sur une trajectoire complète $t = 1, 2, \dots, T$

★ | L'objectif (formel) de l'apprentissage par renforcement [RL objective]

👉👉👉 **Maximiser** le total des récompenses r accumulées au cours d'une trajectoire τ

$$\begin{aligned}\pi^* &= \arg \max_{\pi} \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G(\tau)] \\ &= \arg \max_{\pi} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(s_t, a_t, s_{t+1}) \sim \pi(\tau)} [r(s_t, a_t, s_{t+1})]\end{aligned}$$

1. Pour le cas horizon-infini $T = \infty$, voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour \$G\$ sur un horizon infini](#)

Retour et *Discount factor*

Idée clé : les récompenses reçues immédiatement ont plus de valeur que celles reçues plus tard

Retour G_t avec *Discount factor* [Discounted Return]

- La **somme des récompenses futures (avec *Discount factor* γ)**   partir du temps t jusqu' à l'horizon T avec $T = \text{horizon fini}$ ¹

$$\begin{aligned} G_t(\tau) &\doteq \sum_{t'=t}^T \gamma^{t'-t} r(s_{t'}, a_{t'}, s_{t'+1}) \quad \text{avec } 0 \leq \gamma \leq 1 \\ &= r(s_t, a_t, s_{t+1}) + \gamma^1 r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + \gamma^2 r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + \dots \end{aligned}$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies G(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) \quad \text{« L'agent est étroit d'esprit et ne considère pas le futur »}$$

$$\gamma \rightarrow 0.5 \implies G(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) + 0.5 \cdot r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + 0.25 \cdot r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + 0.125 \cdot r(s_{t+3}, a_{t+3}, s_{t+4}) + \dots$$

$$\gamma \rightarrow 1 \implies G(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) + 1 \cdot r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + 1 \cdot r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + \dots$$

« L'agent ne fait pas de différence entre les récompenses présentées et futures »

1. Pour le cas horizon-infini $T = \infty$, voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour G sur un horizon infini](#)

Distribution de probabilité d'une trajectoire

Notation $\tau \sim \pi(\tau)$ | Distribution de probabilité de la trajectoire τ induite par la politique π

■ Cas politique stochastique :

$$\tau \sim \pi(\tau) \implies s_1 \sim p(\cdot) \quad a_t \sim \pi(\cdot | s_t) \quad s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)$$

$$\pi(\tau) = \pi(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T p(s_{t+1} | s_t, a_t) \pi(a_t | s_t)$$

■ Cas politique déterministe :

$$\tau \sim \pi(\tau) \implies s_1 \sim p(\cdot) \quad a_t = \pi(s_t) \quad s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)$$

$$\pi(\tau) = \pi(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T p(s_{t+1} | s_t, \pi(s_t))$$

Distribution de probabilité d'une trajectoire

Notation $\tau \sim \pi(\tau)$ | Distribution de probabilité de la trajectoire τ induite par la politique π

■ Cas politique stochastique :

$$\tau \sim \pi(\tau) \implies s_1 \sim p(\cdot) \quad a_t \sim \pi(\cdot | s_t) \quad s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)$$

$$\pi(\tau) = \pi(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T p(s_{t+1} | s_t, a_t) \pi(a_t | s_t)$$

■ Cas politique déterministe :

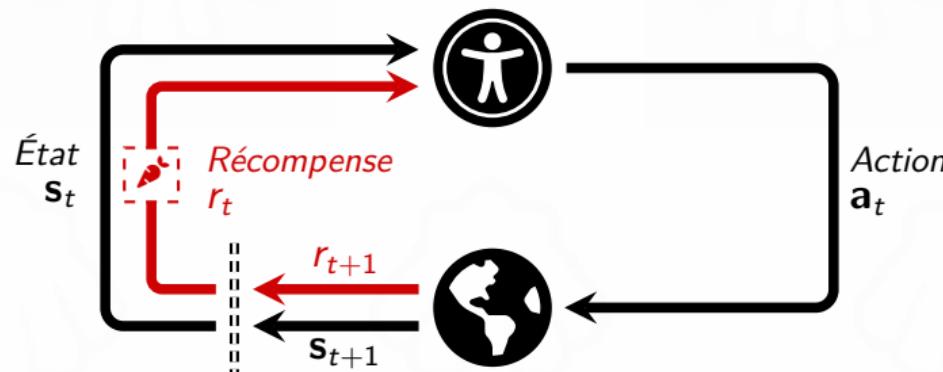
$$\tau \sim \pi(\tau) \implies s_1 \sim p(\cdot) \quad a_t = \pi(s_t) \quad s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)$$

$$\pi(\tau) = \pi(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T p(s_{t+1} | s_t, \pi(s_t))$$

Formalisme et outils mathématiques du RL

Interaction agent-environnement

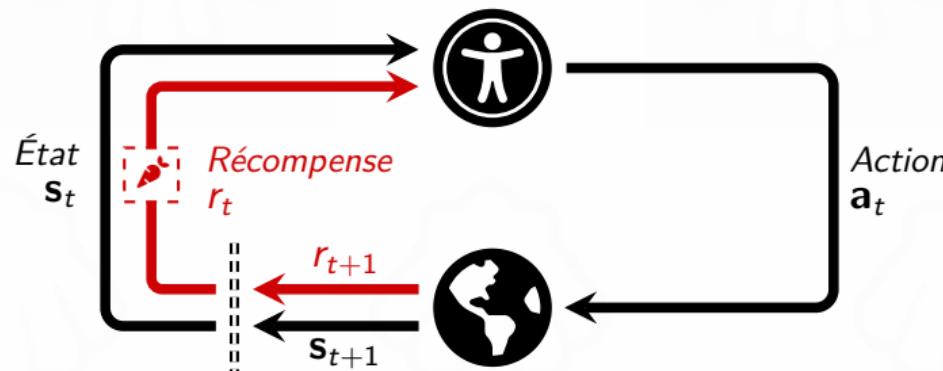
Le cycle d'interaction



Pour tout temps $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent **observe l'environnement** : $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** : $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de r  ompense** (une r  troaction) : $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel ** tat r  sultant** de cette action : $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

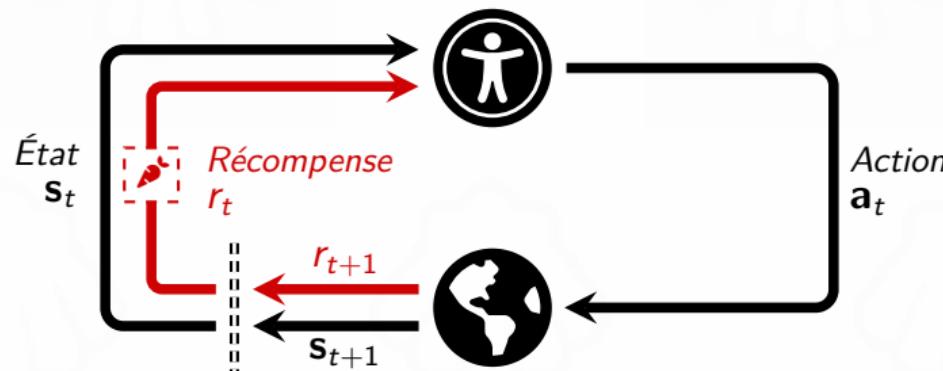
Le cycle d'interaction



Pour tout temps $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent **observe l'environnement** : $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** : $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de récompense** (une rétroaction) : $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel ** tat résultant** de cette action : $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

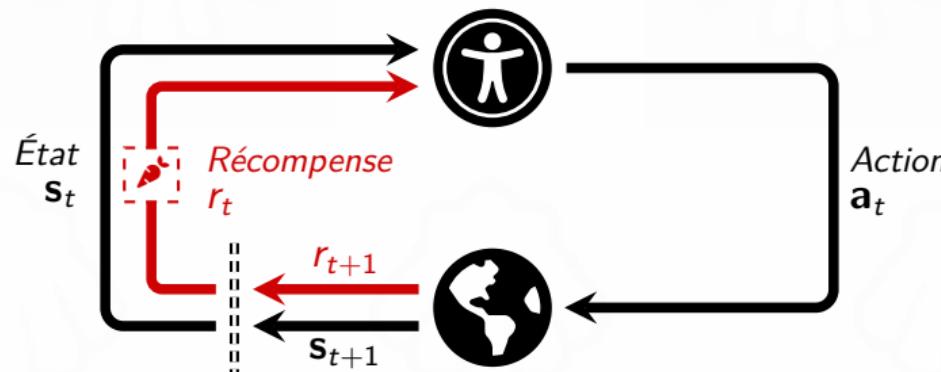
Le cycle d'interaction



Pour tout temps $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent **observe l'environnement** : $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** : $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de r  ompense** (une r  troaction) : $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel état r  ultant de cette action : $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

Le cycle d'interaction



Pour tout temps $t = 0, 1, 2, \dots, T$

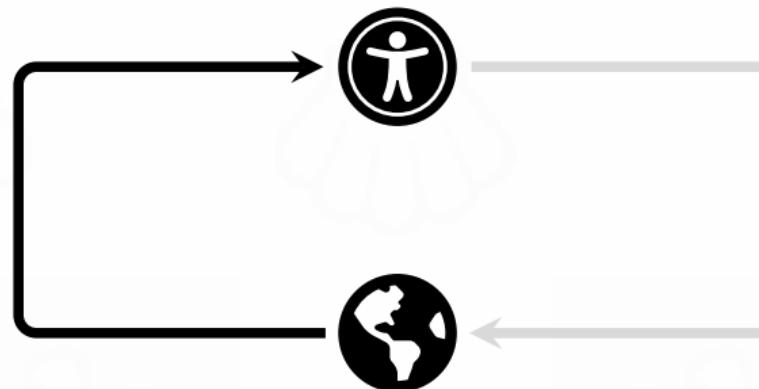
- 1 L'agent observe l'environnement : $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent choisit et exécute une action : $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un signal de r ecompense (une r etroaction) : $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel état r esultant de cette action : $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

Le cycle d'interaction

Temps $t = 1$

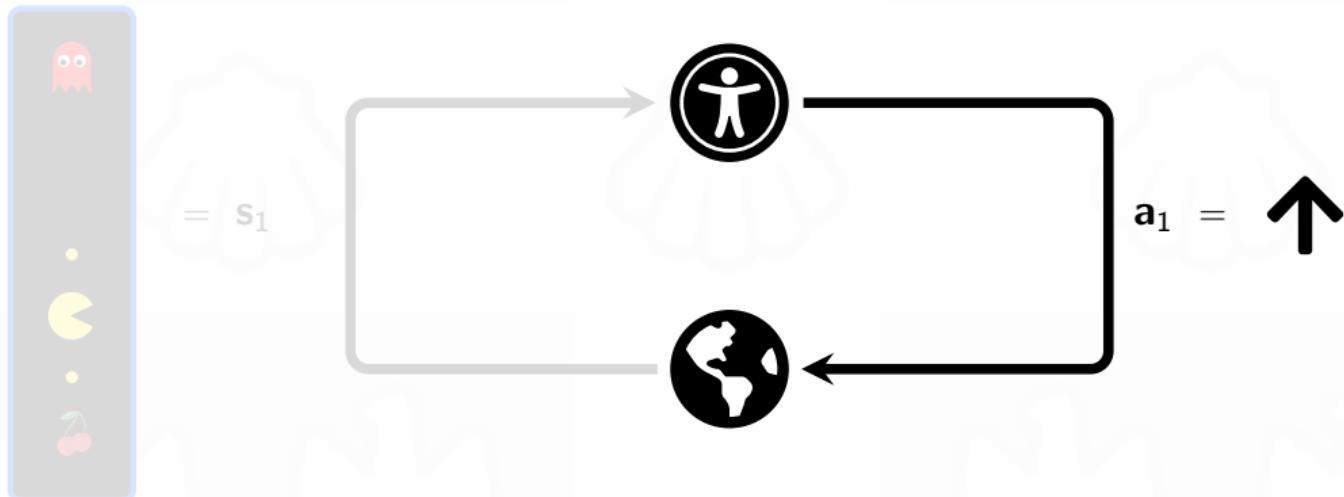


= s_1



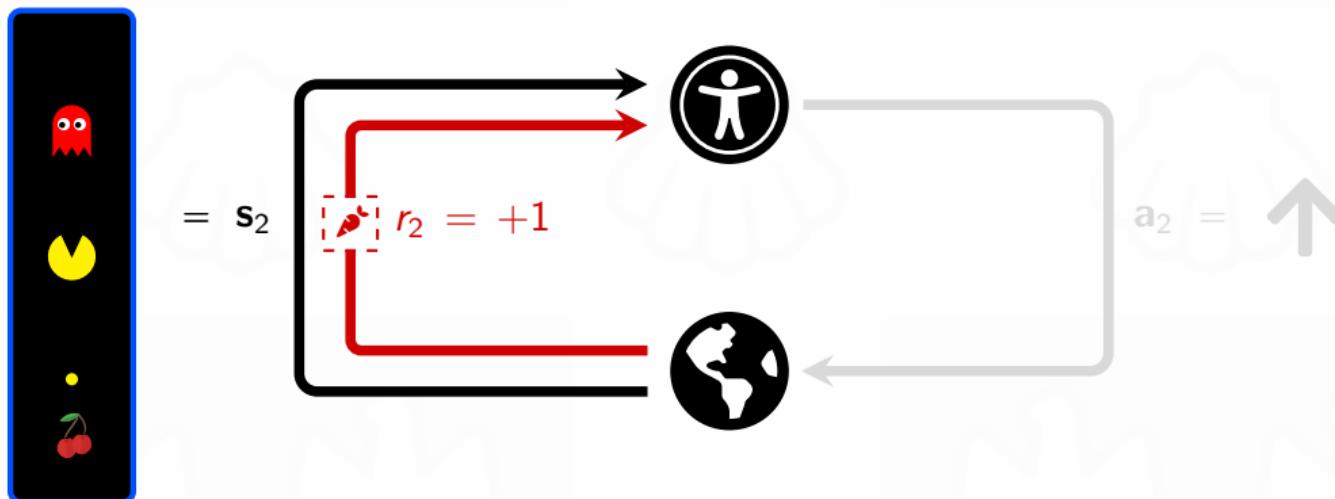
Le cycle d'interaction

Temps $t = 1$



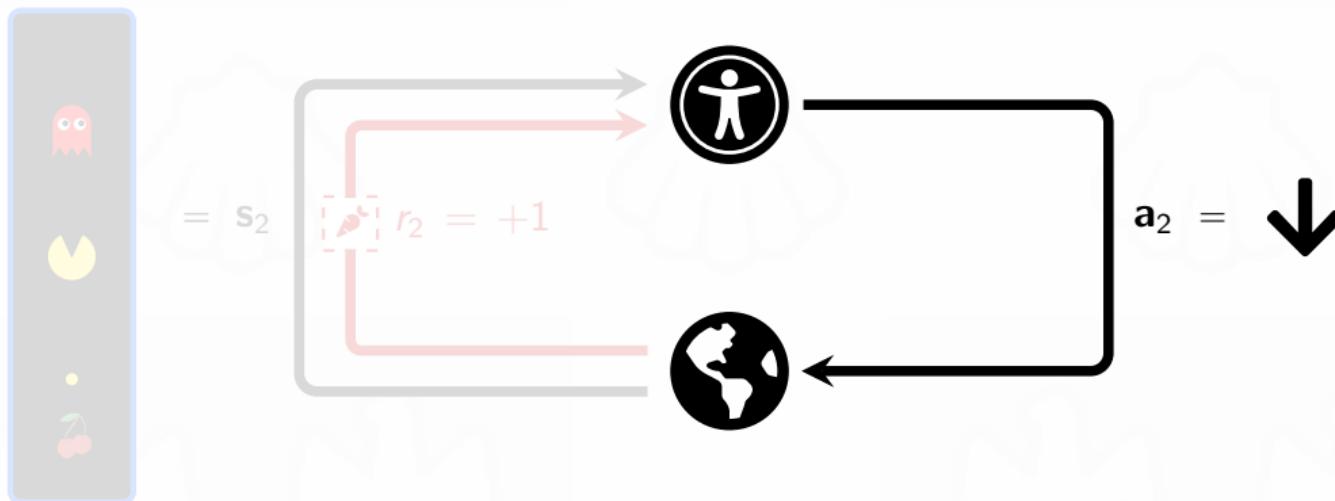
Le cycle d'interaction

Temps $t = 2$



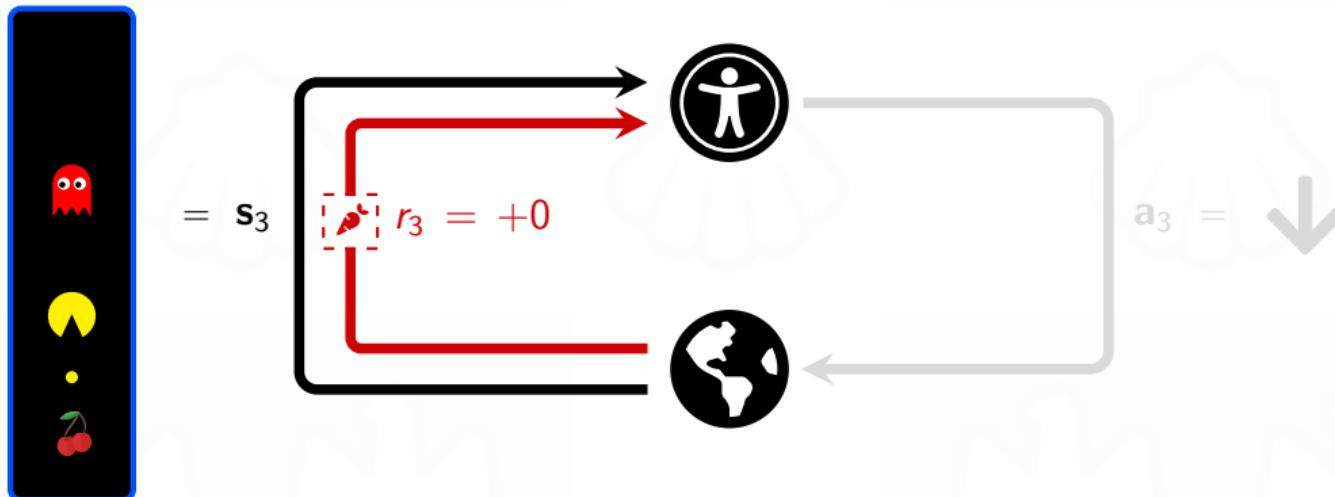
Le cycle d'interaction

Temps $t = 2$



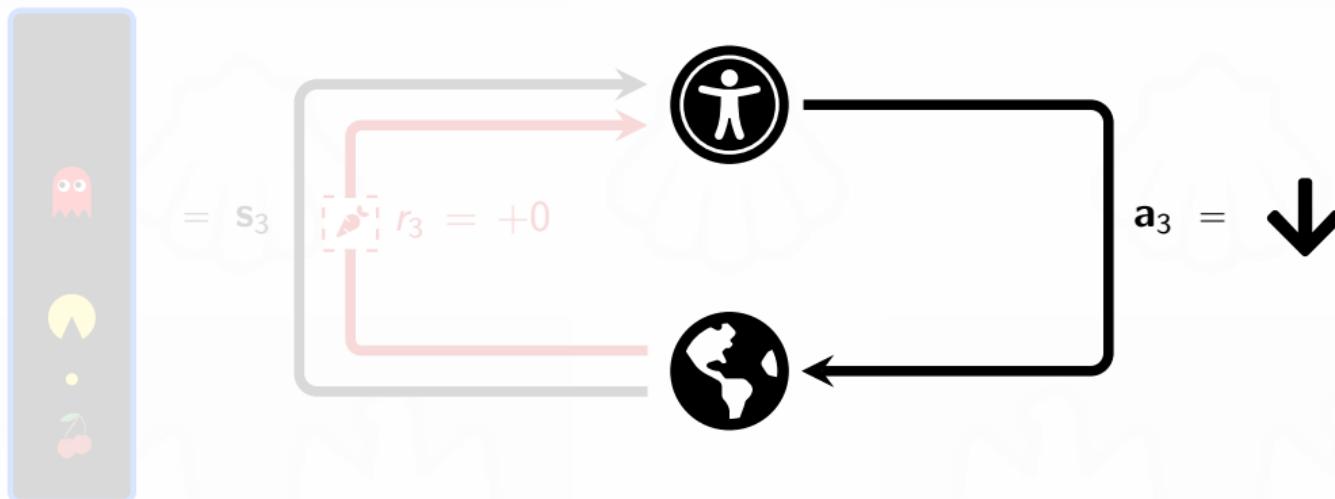
Le cycle d'interaction

Temps $t = 3$



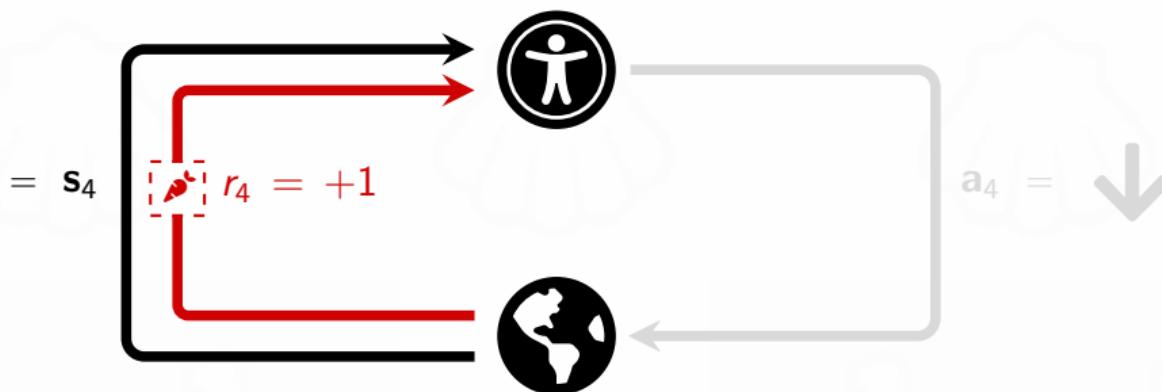
Le cycle d'interaction

Temps $t = 3$



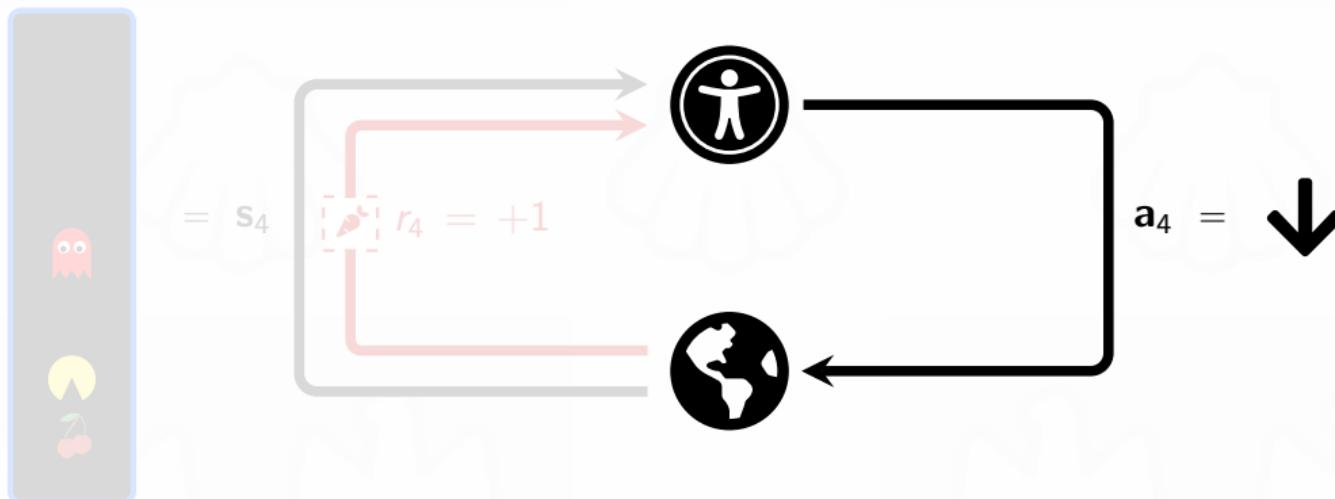
Le cycle d'interaction

Temps $t = 4$



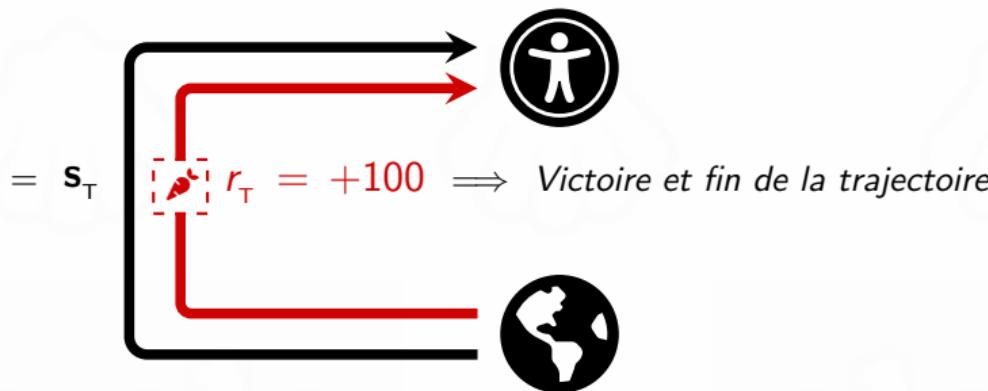
Le cycle d'interaction

Temps $t = 4$



Le cycle d'interaction

Temps $t = 5$



L'univers du point de vue de l'agent

1 Vue d'ensemble

2 Formalisme et outils mathématiques du RL

3 L'univers du point de vue de l'agent

- Ce qu'on cherche à faire
- Quelle information l'agent peut-il utiliser pour apprendre ?
- Les fonctions de valeur Q^π et V^π
- L'équation d'optimalité de Bellman

4 Pour aller plus loin

L'univers du point de vue de l'agent

Ce qu'on cherche à faire

Le problème d'apprentissage par renforcement (Rappel)

(Informellement) L'objectif de l'apprentissage par renforcement

Que l'**agent** trouve par lui-même **la meilleure stratégie** (c.- -d. une politique optimale) pour atteindre un **but** en se basant uniquement sur les r trocations émises par l'environnement comme signal de **récompense**.

(Formellement) L'objectif de l'apprentissage par renforcement

 **Maximiser** le total des récompenses r accumulés au cours d'une trajectoire τ

$$\begin{aligned}\pi^* &= \arg \max_{\pi} \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G(\tau)] \\ &= \arg \max_{\pi} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(s_t, a_t, s_{t+1}) \sim \pi} [r(s_t, a_t, s_{t+1})]\end{aligned}$$

avec l'assumption que $\gamma = 1$

OK . . . par où on commence ?

L'univers du point de vue de l'agent

Quelle information l'agent peut-il utiliser pour apprendre ?

L'agent ne connaît pas :

- a comment l'environnement fonctionne ;
- b comment la fonction de récompense est définie ;
- c les conditions à éviter pour qu'une trajectoire termine avec un échec ;
- d les conditions à remplir pour qu'une trajectoire termine avec succès ;

L'agent sait :

- 1 qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punie ;
- 2 que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

Question : Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense $\mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$?

Quel est le problème avec cette approche ?

L'agent ne connaît pas :

- a comment l'environnement fonctionne ;
- b comment la fonction de récompense est définie ;
- c les conditions à éviter pour qu'une trajectoire termine avec un échec ;
- d les conditions à remplir pour qu'une trajectoire termine avec succès ;

L'agent sait :

- 1 qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punie ;
- 2 que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

Question : Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$?

Quel est le problème avec cette approche ?

L'agent ne connaît pas :

- a comment l'environnement fonctionne ;
- b comment la fonction de récompense est définie ;
- c les conditions à éviter pour qu'une trajectoire termine avec un échec ;
- d les conditions à remplir pour qu'une trajectoire termine avec succès ;

L'agent sait :

- 1 qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punie ;
- 2 que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

Question : Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$?

Quel est le problème avec cette approche ?

L'agent ne connaît pas :

- a comment l'environnement fonctionne ;
- b comment la fonction de récompense est définie ;
- c les conditions à éviter pour qu'une trajectoire termine avec un échec ;
- d les conditions à remplir pour qu'une trajectoire termine avec succès ;

L'agent sait :

- 1 qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punie ;
- 2 que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

Question : Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$?

Quel est le problème avec cette approche ?

 valu  les conséquences d'une action : voir le long terme

Problème : L'agent n'a aucun moyen direct de savoir si la récompense qu'il reçoit maintenant est due à l'action qu'il vient juste d'exécuter !

Pris seul, une récompense ne dit pas grand-chose.

Elle peut être due à une action qui est arrivée longtemps auparavant.

ex. : mettre son parachute avant de sauter en bas d'un avion

Donc la seule façon pour l'agent d'évaluer les conséquences des actions qu'il prend est **en gardant une vue d'ensemble** de la trajectoire \Rightarrow la seule quantité qui lui permet de déduire qu'il a fait quelque chose de bien durant une trajectoire, c'est **le retour**

$$G_1(\tau) = r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_{\tau-2} + r_{\tau-1} + r_\tau$$

avec l'assumption que $\gamma = 1$

 valu  la ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

On sait maintenant que l'agent **doit évaluer les conséquences** de ses actes **en se basant sur le retour** G_1 des trajectoires τ .

Présentement la seule information que l'agent peut déduire du retour G_1 est qu'une trajectoire τ est meilleure qu'une autre τ' .

Si $\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, \dots, s_T, a_T, r_{T+1} \mapsto \text{ }$

et $\tau' = s'_1, a'_1, r'_2, s'_2, a'_2, r'_3, \dots, s'_T, a'_T, r'_{T+1} \mapsto \text{à}$

alors $\tau > \tau'$

 valu  la ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

Question : Comment **identifier la ou les cause(s)** qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

ou

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un **moyen pour comparer les segments** d'une trajectoire entre eux tout **en respectant la contrainte de vue d'ensemble**.

 valu  la ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

Question : Comment **identifier la ou les cause(s)** qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

ou

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un **moyen pour comparer les segments** d'une trajectoire entre eux tout **en respectant la contrainte de vue d'ensemble**.



 valu  la ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

Question : Comment **identifier la ou les cause(s)** qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

ou

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un **moyen pour comparer les segments** d'une trajectoire entre eux tout **en respectant la contrainte de vue d'ensemble**.

Choisir le bon point de vue

Question : Sur quelle base l'agent pourrait-il comparer les segments d'une trajectoire ?

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, s_3, a_3, r_4, s_4, a_4, r_5, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

Exemple : Par rapport à l'utilité ...

- (s) \Leftrightarrow d'être assis dans un cours important et [prendre des notes ou regarder son cellulaire ou ...];
- (s, a) \Leftrightarrow de prendre des notes et d'être assis dans un cours important;
- $\pi(s)$ \Leftrightarrow de suivre la bonne habitude de toujours noter ce qui est important en cours;

(s) ----- (s, a)

$\pi(s)$

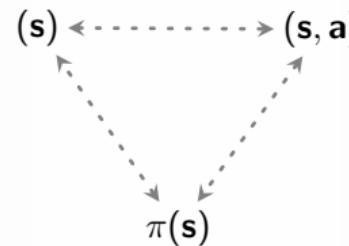
Choisir le bon point de vue

Question : Sur quelle base l'agent pourrait-il comparer les segments d'une trajectoire ?

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, s_3, a_3, r_4, s_4, a_4, r_5, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

Exemple : Par rapport à l'utilité ...

- (s) \Leftrightarrow d'être assis dans un cours important et [prendre des notes ou regarder son cellulaire ou ...];
- (s, a) \Leftrightarrow de prendre des notes et d'être assis dans un cours important;
- $\pi(s)$ \Leftrightarrow de suivre la bonne habitude de toujours noter ce qui est important en cours;



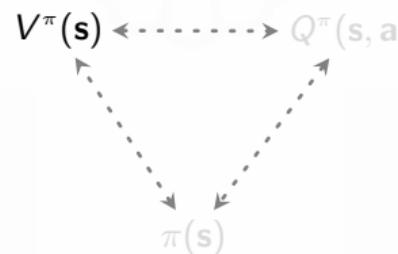
Choisir le bon point de vue

Perspectives à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$ est la valeur d'être dans un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$Q^\pi(s, a)$ est la valeur d'ex閐uter une action a à partir d'un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$\pi(s)$ est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment
dans la formulation des problèmes en *RL*.

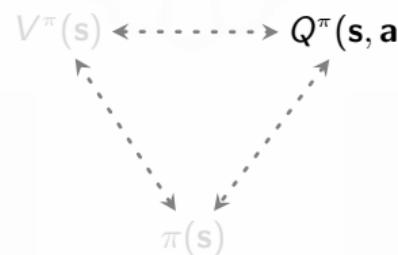
Choisir le bon point de vue

Perspectives à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$ est la valeur d'être dans un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$Q^\pi(s, a)$ est la valeur d'ex閐uter une action a à partir d'un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$\pi(s)$ est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment dans la formulation des problèmes en *RL*.

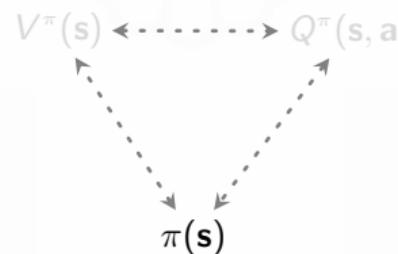
Choisir le bon point de vue

Perspectives à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$ est la valeur d'être dans un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$Q^\pi(s, a)$ est la valeur d'ex閐uter une action a à partir d'un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$\pi(s)$ est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment
dans la formulation des problèmes en *RL*.

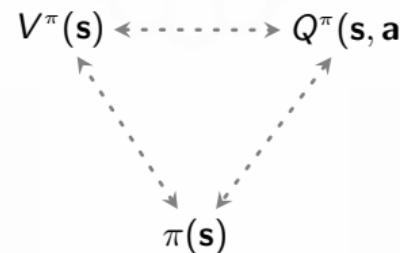
Choisir le bon point de vue

Perspectives à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$ est la valeur d'être dans un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$Q^\pi(s, a)$ est la valeur d'ex閐uter une action a à partir d'un état s
et de continuer d'agir en suivant la politique π

$\pi(s)$ est l'utilité d'agir selon une politique particulière



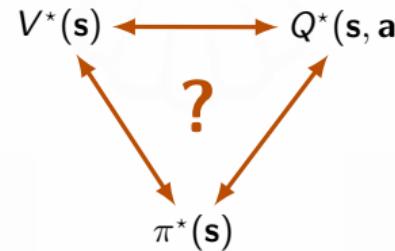
Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment
dans la formulation des problèmes en *RL*.

Apprendre quoi ? π , V^π ou Q^π

Ce trio présente un **dilemme fondamental** dans la recherche de solutions aux problèmes de RL :

« *Qu'est-ce que l'agent doit apprendre pour atteindre l'objectif ?* »

« *On doit optimiser quoi concrètement ?* »



On va tenter d'éclaircir la question pendant le reste du cours

L'univers du point de vue de l'agent

Les fonctions de valeur Q^π et V^π

La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

Répond à la question : «   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'  tat s_t la valeur attendue du retour G_t si on prend l'action a_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

Répond à la question : «   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'  tat s_t la valeur attendue du retour G_t si on prend l'action a_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = \color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}}$

La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

Répond à la question : «   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'  tat s_t la valeur attendue du retour G_t si on prend l'action a_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [\color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

Répond à la question : «   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'  tat s_t la valeur attendue du retour G_t si on prend l'action a_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tat

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$

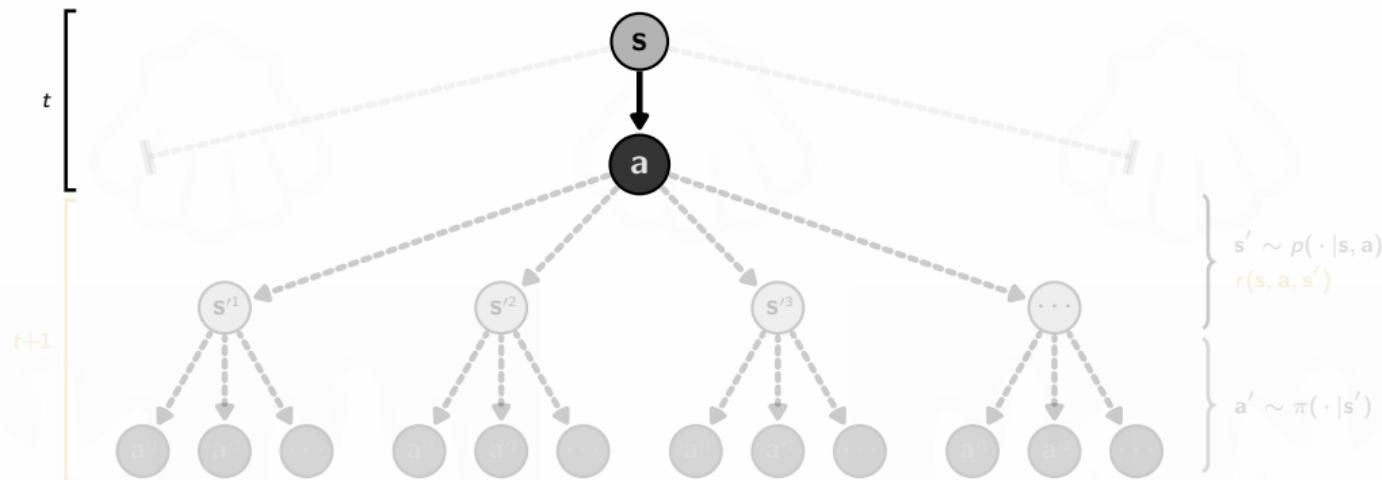


Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tôt

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$

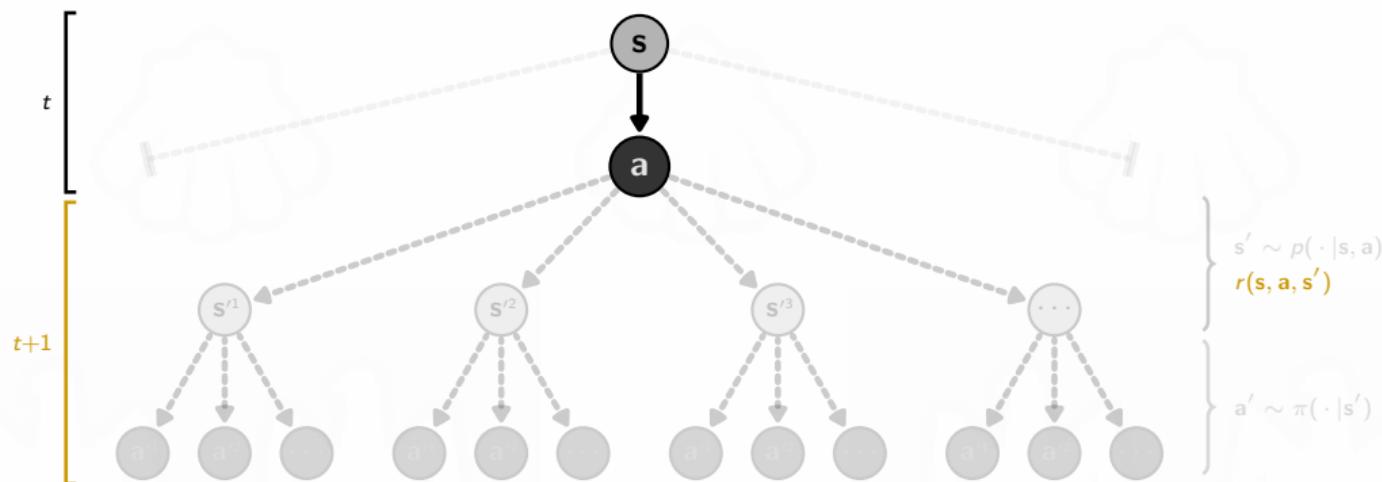


Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tôt

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in A_{t+1}} \pi(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$

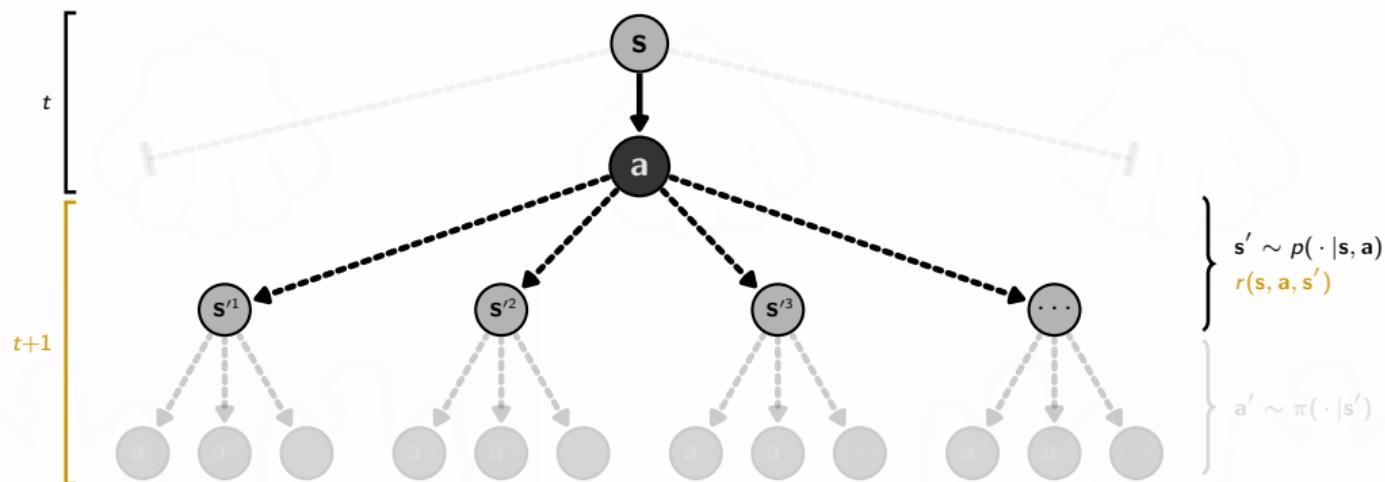
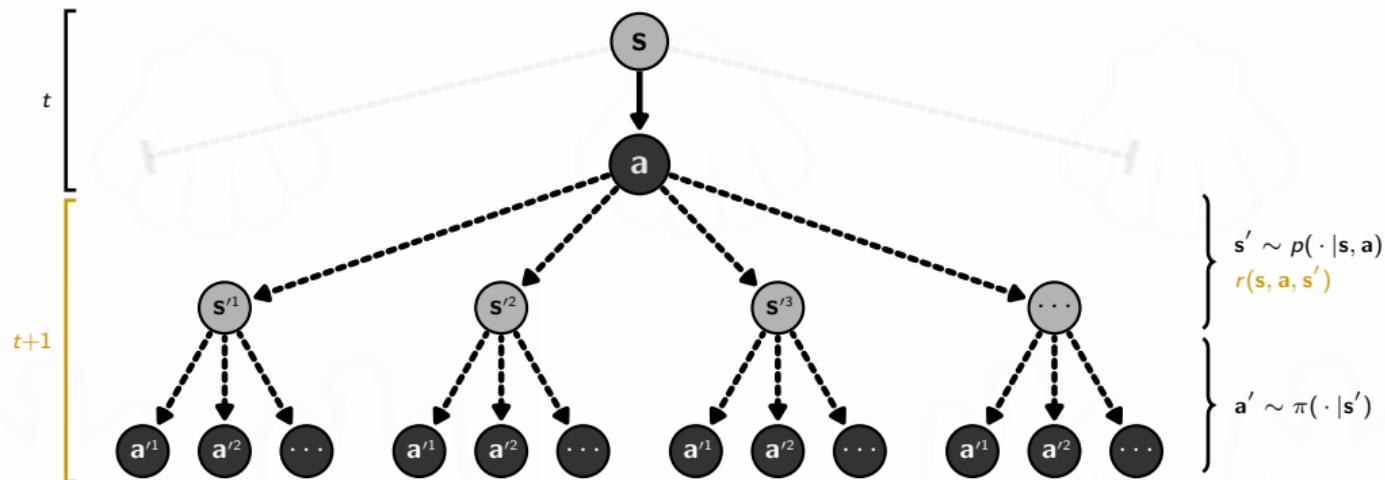


Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tat

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in A_{t+1}} \pi(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$



La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

Répond à la question : «  A quel point cet état est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'état s_t la valeur attendue du retour G_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = \color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}}$

La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

Répond à la question : «  A quel point cet état est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'état s_t la valeur attendue du retour G_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [\color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} \left[\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = \color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}}$

La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

Répond à la question : «  A quel point cet état est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'état s_t la valeur attendue du retour G_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [\color{red}{r_{t+1} + \gamma G_{t+1}} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} \left[\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

Répond à la question : «  A quel point cet état est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'état s_t la valeur attendue du retour G_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

Rappel : $r_{t+1} \doteq r(s_t, a_t, s_{t+1})$

Remarque : $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

Répond à la question : «  A quel point cet état est bon ? »

Comment : En calculant à partir de l'état s_t la valeur attendue du retour G_t tout en suivant la politique π jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$

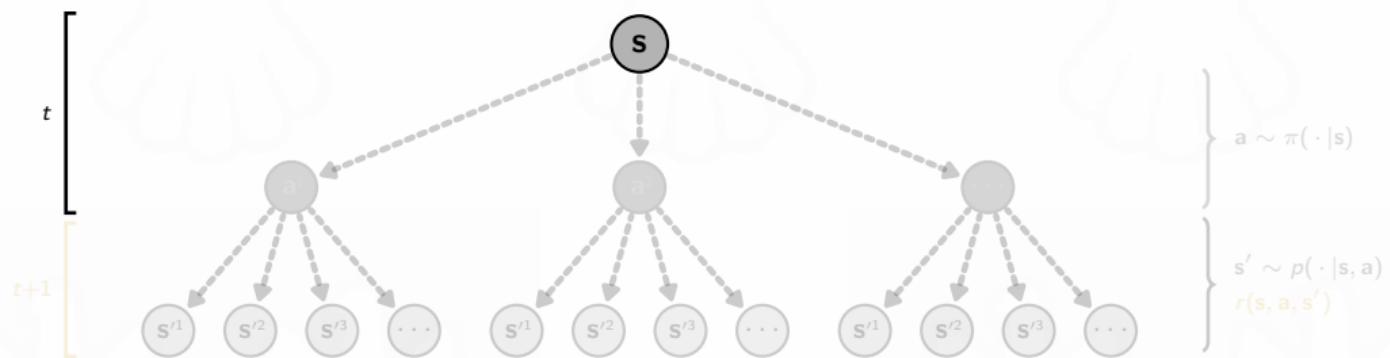


Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$

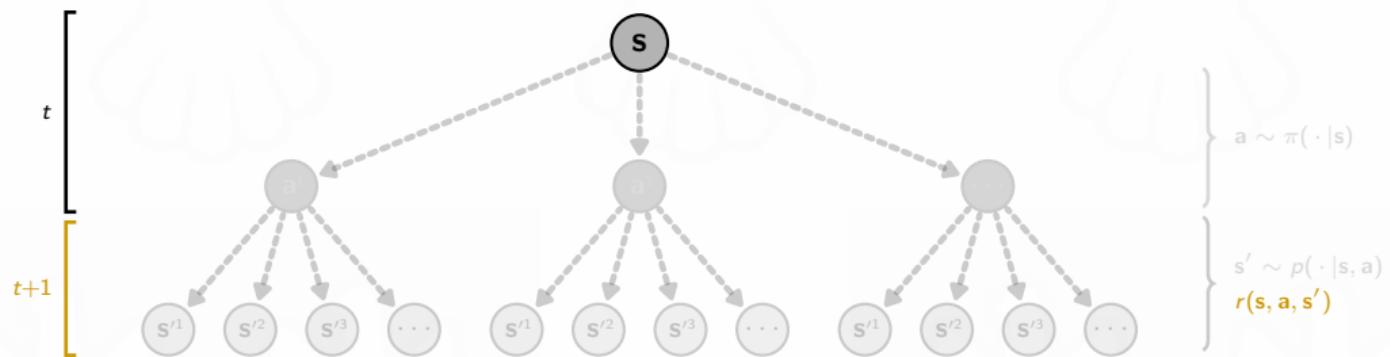


Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$

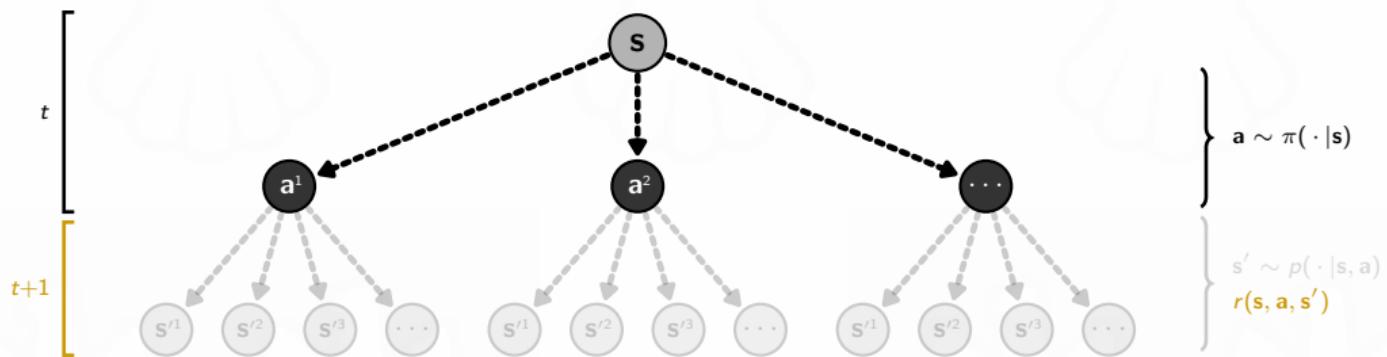
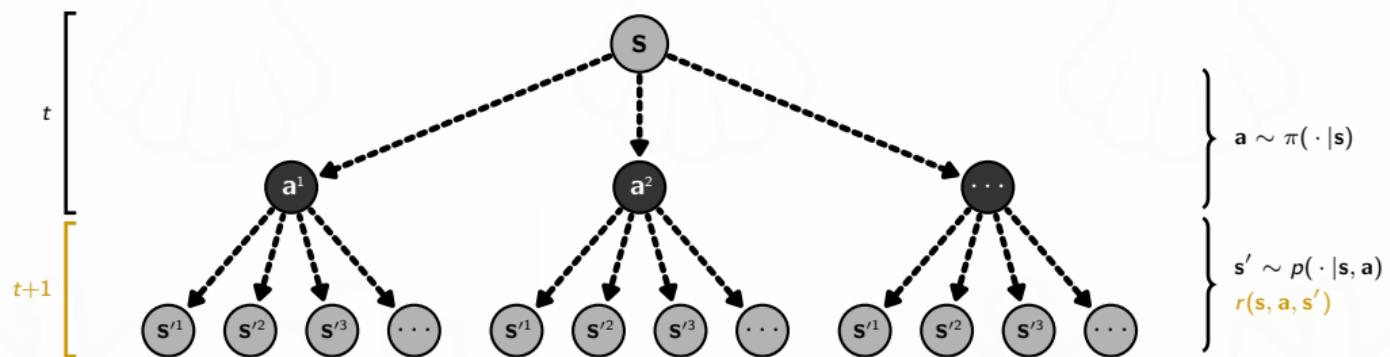


Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$



L'univers du point de vue de l'agent

L'équation d'optimalité de Bellman

La fonction de valeur optimale $Q^*(s_t, a_t)$

Répond à la question : «  quel point prendre cette action à partir de cet état est bon **si on agit optimalement à partir de ce point** jusqu'à la fin de la trajectoire ? »

$$\begin{aligned} Q^*(s_t, a_t) &= \max_{\pi} Q^{\pi}(s_t, a_t) \quad \text{pour tous } s \in \mathcal{S} \text{ et } a \in \mathcal{A} \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s_{t+1}, a') \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s', a') \right] \end{aligned}$$

Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$

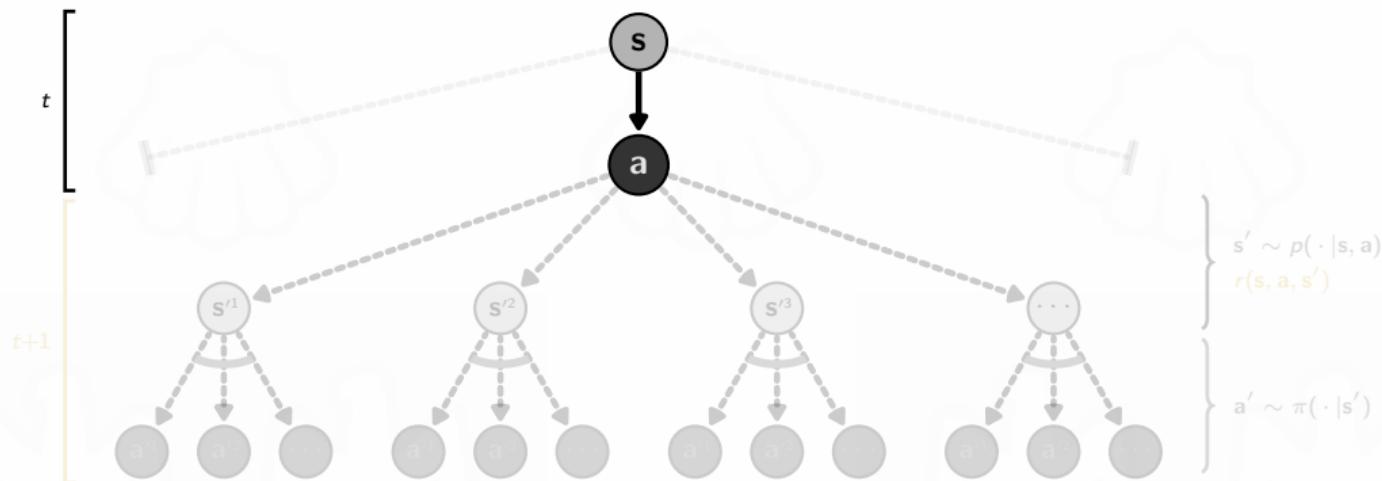


Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un tat

$$Q^*(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s', a') \right]$$

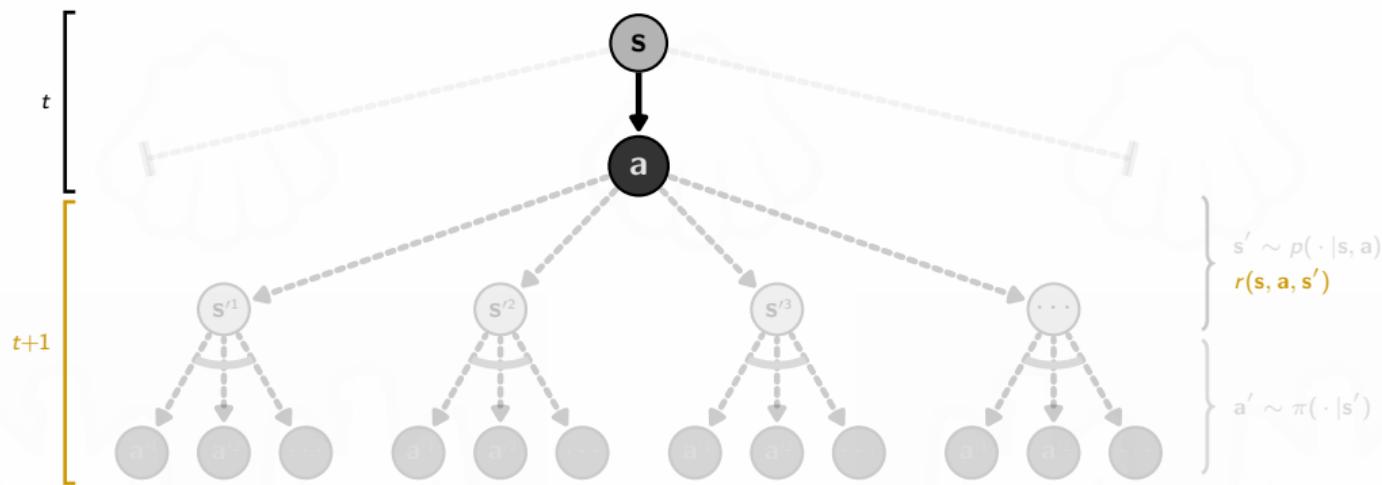


Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$

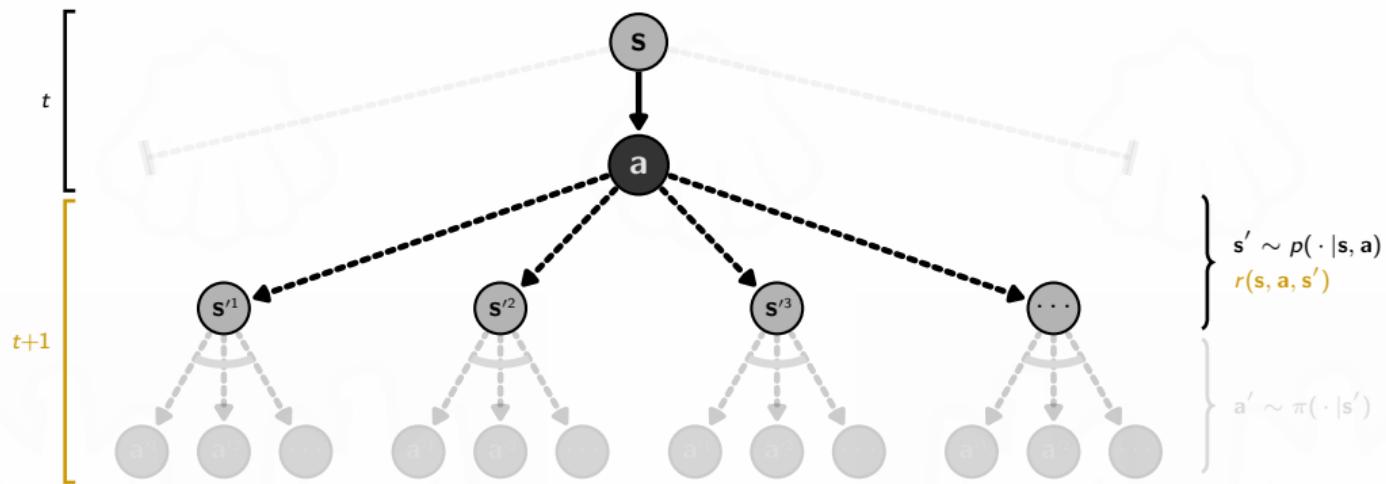


Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$

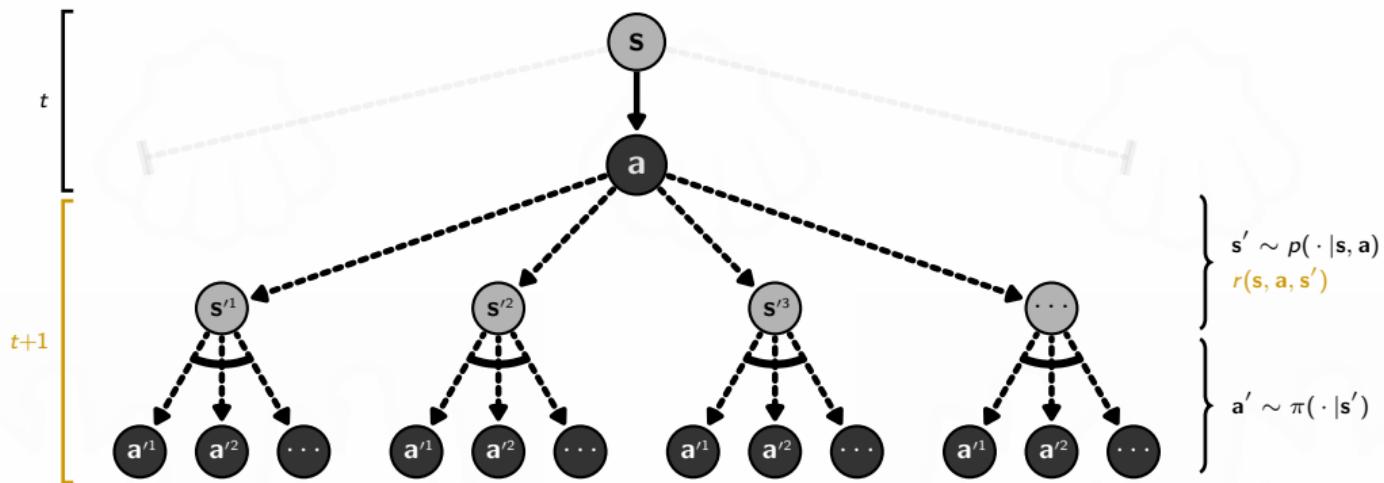
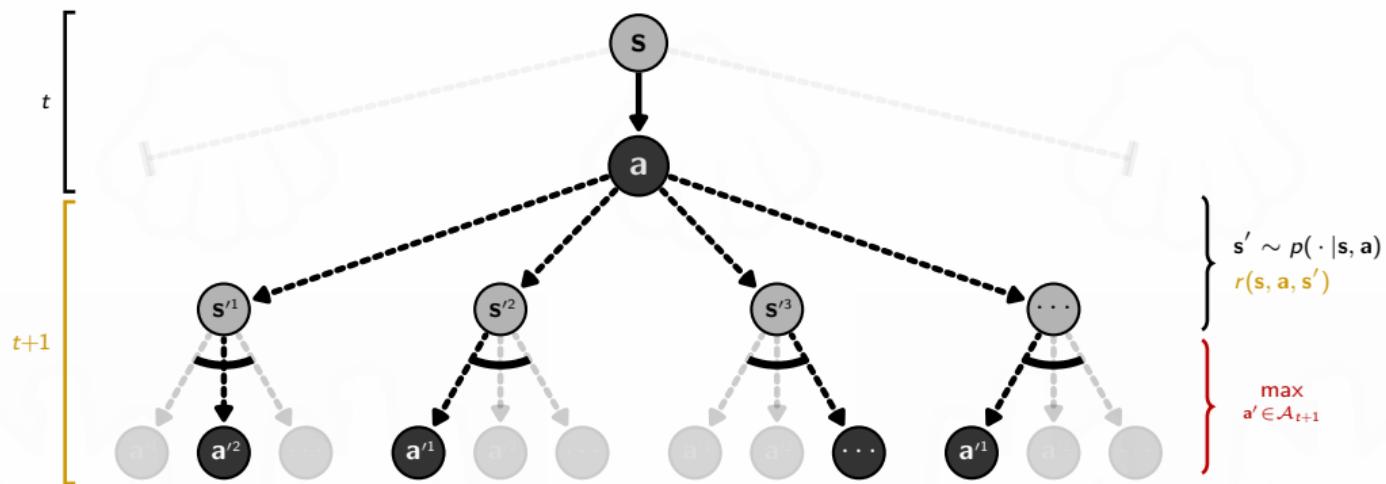


Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$



La fonction de valeur optimale $V^*(s_t)$

Répond à la question : «  quel point cet état est bon **si on agit optimalement à partir de ce point jusqu'à la fin de la trajectoire ?** »

$$\begin{aligned} V^*(s_t) &= \max_{\pi} V^{\pi}(s_t) \quad \text{pour tous } s \in \mathcal{S} \\ &= \max_{a \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a)} \left[r_{t+1} + \gamma V^*(s_{t+1}) \right] \\ &= \max_{a \in \mathcal{A}_t} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')] \end{aligned}$$

Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(s_t) = \max_{a \in A_t} \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')]$$

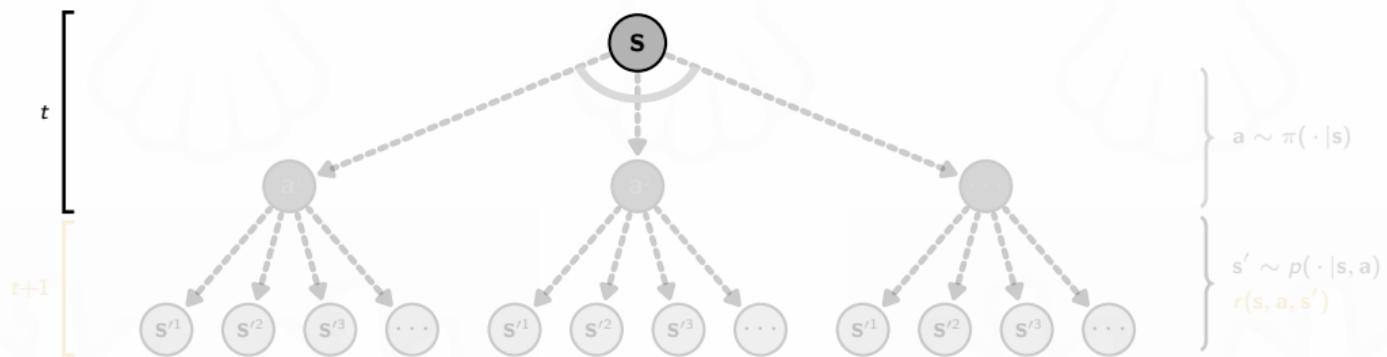


Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(s_t) = \max_{a \in A_t} \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')]$$

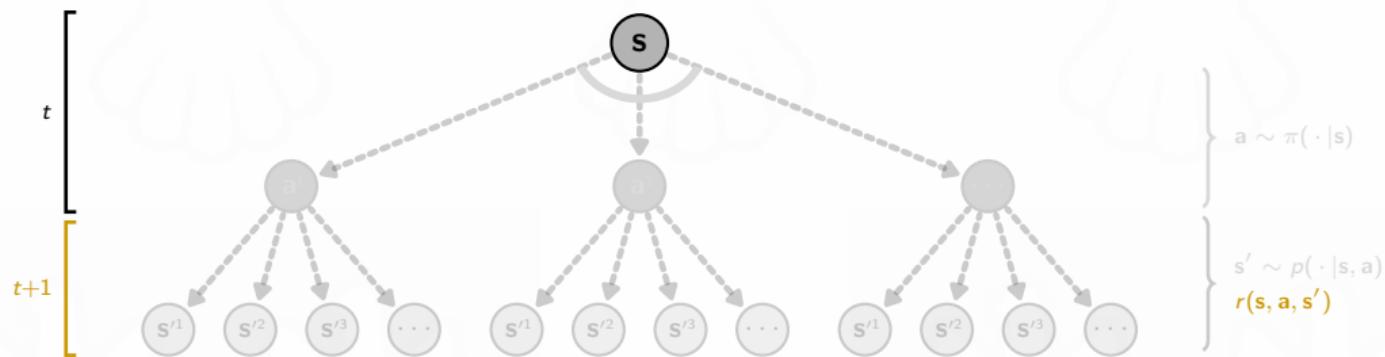


Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(s_t) = \max_{a \in A_t} \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')]$$

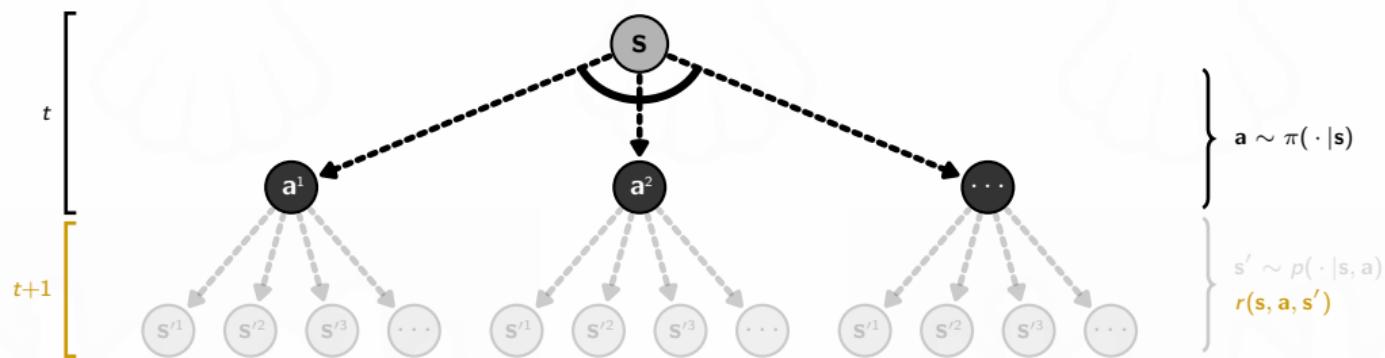


Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}) [r_{t+1} + \gamma V^*(\mathbf{s}')]$$

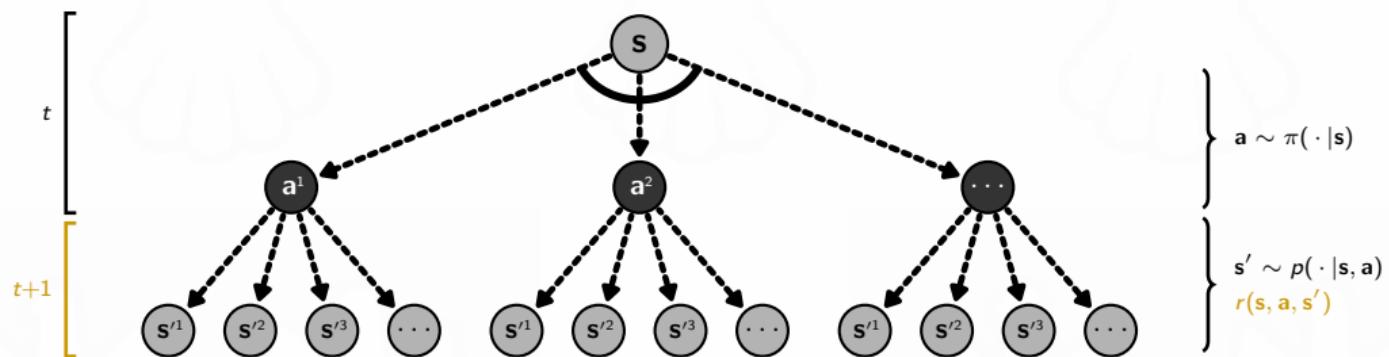
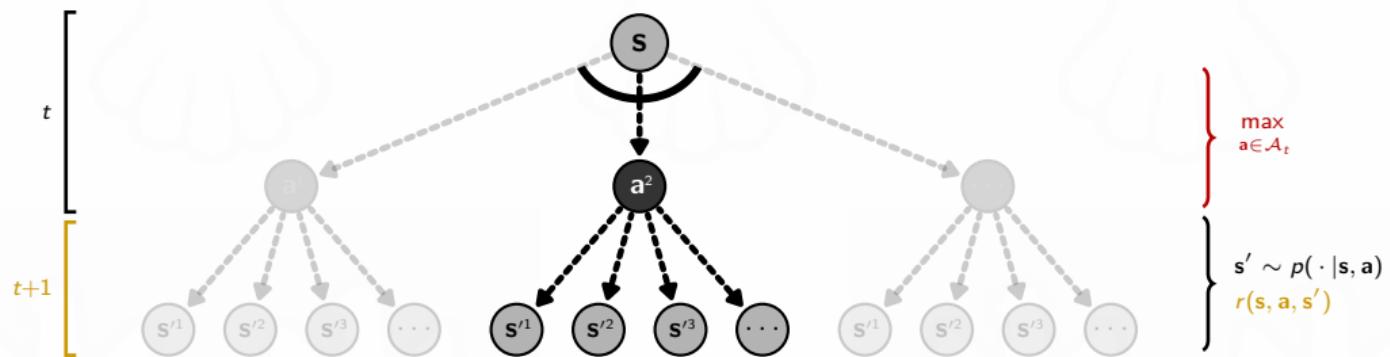


Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}) [r_{t+1} + \gamma V^*(\mathbf{s}')]$$



Prochaine partie

Prochaine partie

Problème de Prise de Décision Séquentielle (PDS)

« Modèle connu et parfait »
↓

Programmation dynamique (exacte)

Itération de Q-valeur

Itération de politique

« Modèle inconnu ou imparfait »
↓

Apprentissage par renforcement

Basé sur les valeurs

Par recherche de politique

Monte-Carlo
avec *Départ Exploratoire*

Différence Temporelle
Q-learning (tabulaire)

Pour aller plus loin

1 Vue d'ensemble

2 Formalisme et outils mathématiques du RL

3 L'univers du point de vue de l'agent

4 Pour aller plus loin

- Complément théorique
- Références

Le futur prometteur de l'apprentissage par renforcement

- The Power of Self-Learning Systems - Présentation au *MIT + Center for Brains, Minds & Machines*, 2019 par Demis Hassabis, Co-Founder & CEO, *DeepMind*

▶ Vidéo: The Power of Self-Learning Systems - 63 minutes

Pour aller plus loin

Complément théorique

Le Retour G sur un horizon infini

Contexte : Cas où l'environnement n'a **pas de terminaison** (par « design » ou en cas limite)

$T = \infty \implies$ la séquence d'interaction entre l'agent et l'environnement
ne peut pas être segmentée en ** pisodes**
 \implies **tâche continue**

Problème no 1 : Le retour $G_t(\tau)$ pourrait être infini

Solution : Utiliser un « discounted factor γ » tel que $\gamma < 1$ (normalement : $0 \leq \gamma \leq 1$)
Dans la mesure où il existe une limite à l'espace de récompense \mathcal{R} ,
le retour sur un horizon infini aura une valeur finie¹

$$G_t(\tau) \doteq \sum_{t'=t}^{\infty} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}, \mathbf{s}_{t'+1})$$

1. « Reinforcement Learning : An introduction », section 3.3 « Returns and Episodes » et 3.4 « Unified Notation for Episodic and Continuing Tasks » par Sutton & Barto [8]

Le Retour G sur un horizon infini

Contexte : Cas où l'environnement n'a **pas de terminaison** (par « design » ou en cas limite)

$T = \infty \implies$ la séquence d'interaction entre l'agent et l'environnement
ne peut pas être segmentée en ** pisodes**
 \implies **tâche continue**

Problème no 2 :  tant donné que la trajectoire τ ne termine jamais,

-   quel moment commencer l'apprentissage ?
- comment structurer l'expérience en vue de l'apprentissage ?

Solution : *Online learning method, Continual learning, Meta-RL, ...*

Lectures recommandés

Online learning : « Reinforcement Learning : An introduction », section 6.2 « Advantages of TD Prediction Methods » par Sutton & Barto comme exemple de méthode *Online*. [8]

Continual learning : L'introduction de « Progress & Compress : A scalable framework for continual learning » par Schwarz et al. (*DeepMind*) donne un bon aper  du domaine. [9]

Meta-RL : « Meta Reinforcement Learning » par Lilian Weng donne un bon aper  du domaine. Lil'Log blog est son blogue personnel. Elle est présentement chercheuse chez OpenAI (2020) [10]

Pour aller plus loin

Références

Références I

1. BERSETH, G., PENG, X. B. & van de PANNE, M. Terrain RL Simulator. 1-10. arXiv : 1804.06424. <http://arxiv.org/abs/1804.06424> (2018).
2. PENG, X. B., BERSETH, G. & VAN DE PANNE, M. Terrain-adaptive locomotion skills using deep reinforcement learning. *ACM Transactions on Graphics* **35**, 1-15. ISSN : 15577368 (2016).
3. MNIH, V. *et al.* Playing Atari with Deep Reinforcement Learning. 1-9. arXiv : 1312.5602. <http://arxiv.org/abs/1312.5602> (2013).
4. MNIH, V. *et al.* Human-level control through deep reinforcement learning. *Nature* **518**, 529-533. ISSN : 14764687. <https://web.stanford.edu/class/psych209/Readings/MnihEtAlHassabis15NatureControlDeepRL.pdf> (2015).
5. VINYALS, O. *et al.* StarCraft II: A New Challenge for Reinforcement Learning. arXiv : 1708.04782. <http://arxiv.org/abs/1708.04782> (2017).
6. ABBEEL, P., COATES, A., QUIGLEY, M. & NG, A. Y. An Application of Reinforcement Learning to Aerobatic Helicopter Flight. *Advances in Neural Information Processing Systems* (2006).

Références II

7. MAO, H., ALIZADEH, M., MENACHE, I. & KANDULA, S. Resource management with deep reinforcement learning. *HotNets 2016 - Proceedings of the 15th ACM Workshop on Hot Topics in Networks*, 50-56 (2016).
8. SUTTON, R. S. & BARTO, A. G. *Reinforcement learning: An introduction*. 2^e ´ed. ( d. MIT PRESS) ISBN : 978-0262039246.
<http://incompleteideas.net/book/RLbook2018.pdf> (Cambridge, MA, 2018).
9. SCHWARZ, J. *et al.* Progress & compress: A scalable framework for continual learning. *35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018* **10**, 7199-7208. arXiv : 1805.06370. <https://deepmind.com/research/publications/progress-compress-scalable-framework-continual-learning> (2018).
10. WENG, L. *Meta Reinforcement Learning (Lil'Log)*. 2019.
<http://lilianweng.github.io/lil-log/2019/06/23/meta-reinforcement-learning.html>.