

Apprentissage par renforcement appliqué

Algorithmes fondamentaux

[revision 3.5]

Brahim Chaib-draa

Brahim.Chaib-Draa@ift.ulaval.ca



Université Laval

2020-06-25

- 1 Concept clé en RL
- 2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement
- 3 Modèle connu **et** parfait \implies pas d'apprentissage requis
- 4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)
- 5 Pour aller plus loin

Concept clé en RL

1 Concept clé en RL

- Apprentissage *sans modèle* vs apprentissage *basé sur un modèle*
- Apprentissage vs Planification
- Prédiction vs Contrôle
- Apprentissage EN-ligne vs HORS-ligne

2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

3 Modèle connu **et** parfait \implies pas d'apprentissage requis

4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)

5 Pour aller plus loin

Concept HAUT niveau :

- Apprentissage **sans modèle** vs apprentissage **basé sur un modèle**
[*Model-free vs model-based*]
- **Apprentissage vs Planification**
[*Learning vs Planning*]

Concept BAS niveau :

- **Prédiction vs Contrôle**
[*Prediction vs Control*]
- Apprentissage **EN-ligne** vs **HORS-ligne**
[*ON-line learning vs OFF-line learning*]

Concept clé en RL

Apprentissage *sans modèle* vs apprentissage *basé sur un modèle*

Apprentissage sans modèle vs apprentissage basé sur un modèle

Concept HAUT niveau

Méthode sans modèle [Model-free]

- L'agent **ne dépend pas d'un modèle** pour apprendre ;
- Il apprend par essai et erreur ;



Méthode basée sur un modèle [Model-based]

- 1 Soit l'agent **apprend un modèle** de A à Z ;
- 2 ou l'agent **améliore un modèle** par expérience ;
- 3 ou l'agent connaît le modèle à priori ;



Concept clé en RL

Apprentissage vs Planification

Apprentissage vs Planification

Concept HAUT niveau

Apprentissage [Learning]

Acquérir des habiletés ou des connaissances soit par :

- 1 essai et erreur ;
- 2 imitation ;
- 3 ou sous la supervision d'un professeur Ex. *curriculum learning* ;



Planification [Planning]

D eterminer les étapes nécessaires à l'atteinte d'un **but** et mesurer les efforts nécessaires ;

Prérequis : avoir **un modèle de l'environnement**

Ex. un calendrier, une carte, les règles de physique, les règles d'un jeu ...



Concept clé en RL

Prédiction vs Contrôle

Prédiction vs Contrôle

Concept BAS niveau

Prediction [Prediction]

Basé sur mes **connaissances actuelles**, qu'est-ce que je peux déduire/induire (  propos du **futur**)¹.

Implique une notion d'incertitude.

Ex. de prédiction : estimer Q^π ou V^π



Contrôle [Control]

Choisir une stratégie **optimale** afin d'atteindre un **but**.

Ex. de contrôle : estimer V^* , Q^* ou π^*



1. Contrairement à son utilisation dans le domaine des statistiques où le terme prédiction n'implique pas nécessairement la notion de futur.

Concept clé en RL

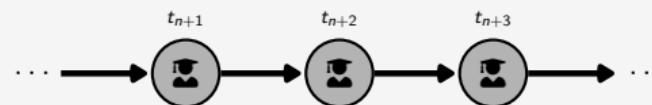
Apprentissage EN-ligne vs HORS-ligne

Apprentissage EN-ligne vs HORS-ligne

Concept BAS niveau

Apprentissage EN-ligne [ON-line learning]

L'apprentissage se fait **au fur et à mesure** que l'agent exécute des actions dans l'environnement.



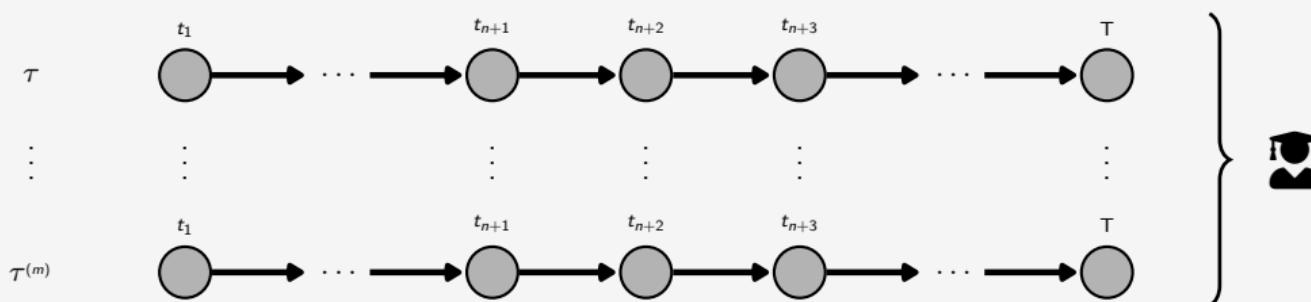
Exemple : *TD-learning*.

Apprentissage EN-ligne vs HORS-ligne

Concept BAS niveau

Apprentissage HORS-ligne [OFF-line learning]

La phase d'apprentissage est retardée après la collecte d'une série de trajectoires τ .



avec m le nombre de trajectoires collecté [$m = \text{batch size}$]

Ex : Batch RL. [wikipedia](#).

Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

1 Concept clé en RL

2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

- Taxonomie du RL/DRL
- Pourquoi autant d'algorithmes ?
- Comparaison des types de méthode en RL

3 Modèle connu **et** parfait \implies pas d'apprentissage requis

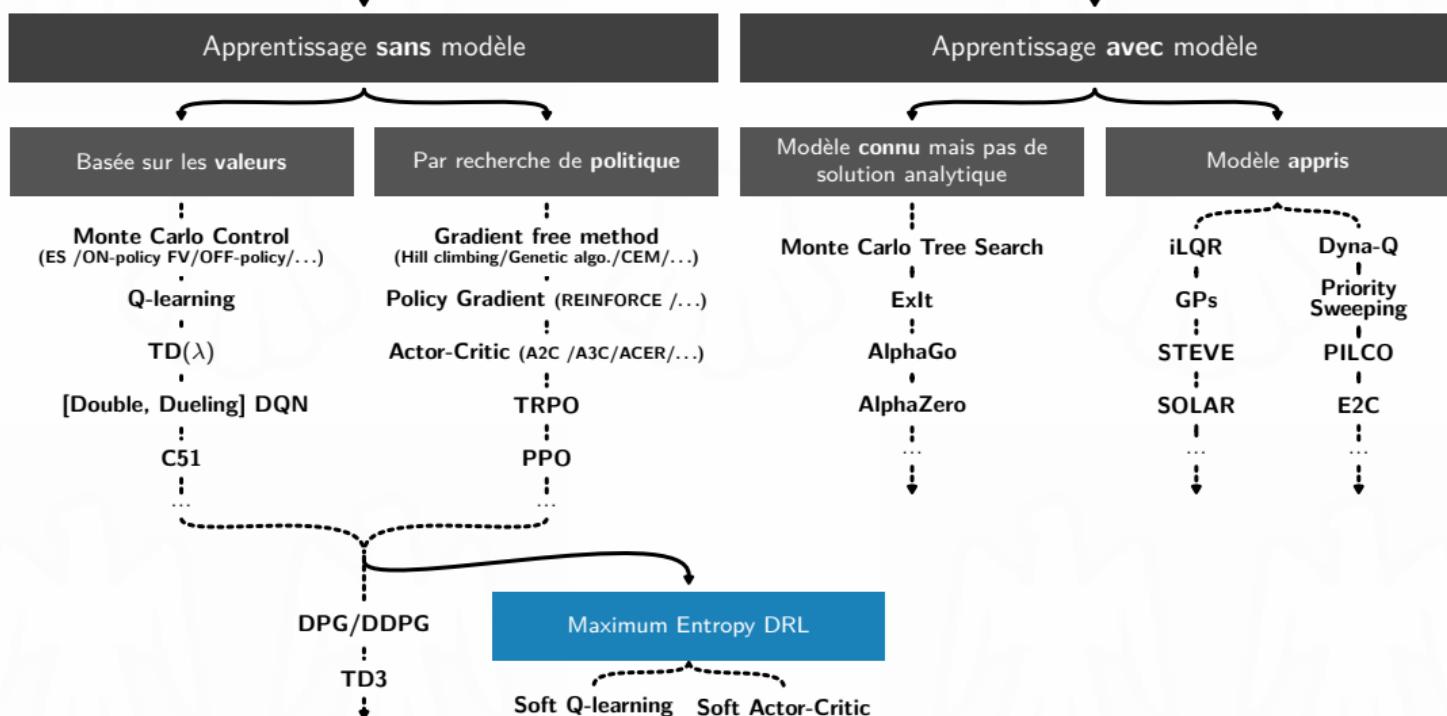
4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)

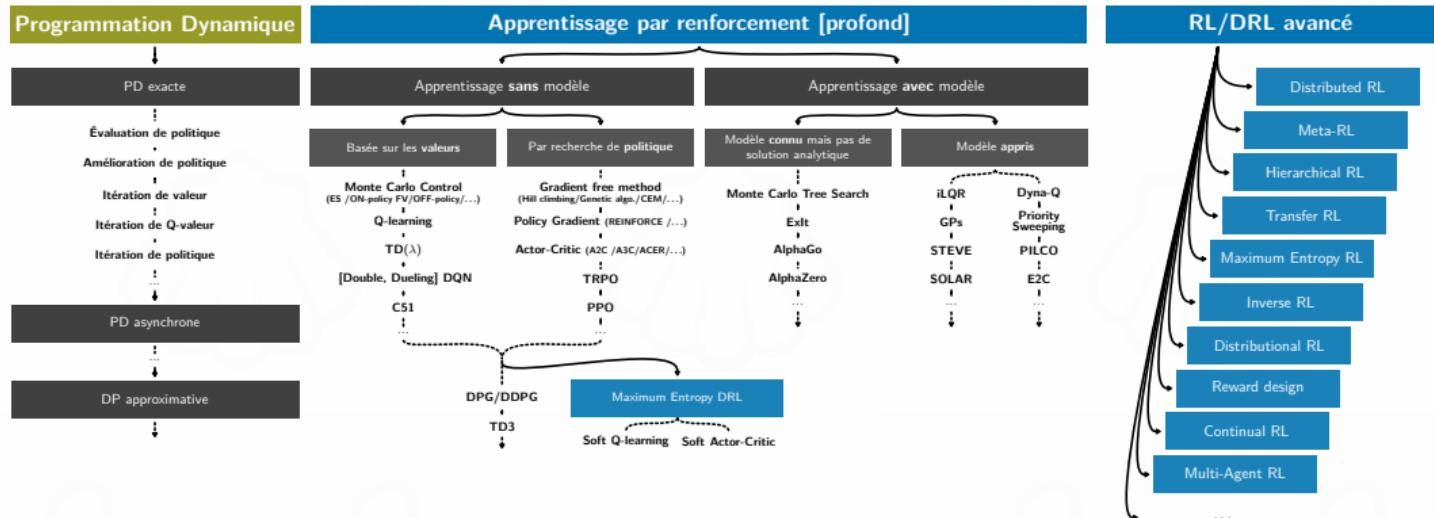
5 Pour aller plus loin

Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

Taxonomie du RL/DRL

Apprentissage par renforcement [profond]





Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

Pourquoi autant d'algorithmes ?

Pourquoi autant d'algorithmes ?

Diff  ent compromis ex. : On a peu de puissance de calcul, mais g  nerer de nouvelles trajectoires est tr  s rapide, donc c'est plus efficace d'utiliser un algorithme de type *Monte-Carlo* qu'un par *Diff  rence Temporelle* ;

Diff  entes assomptions ex : On fait l'assumption qu'on a acc  s à un mod  le parfait, donc on peut utiliser un algorithme de *Programmation Dynamique* ;

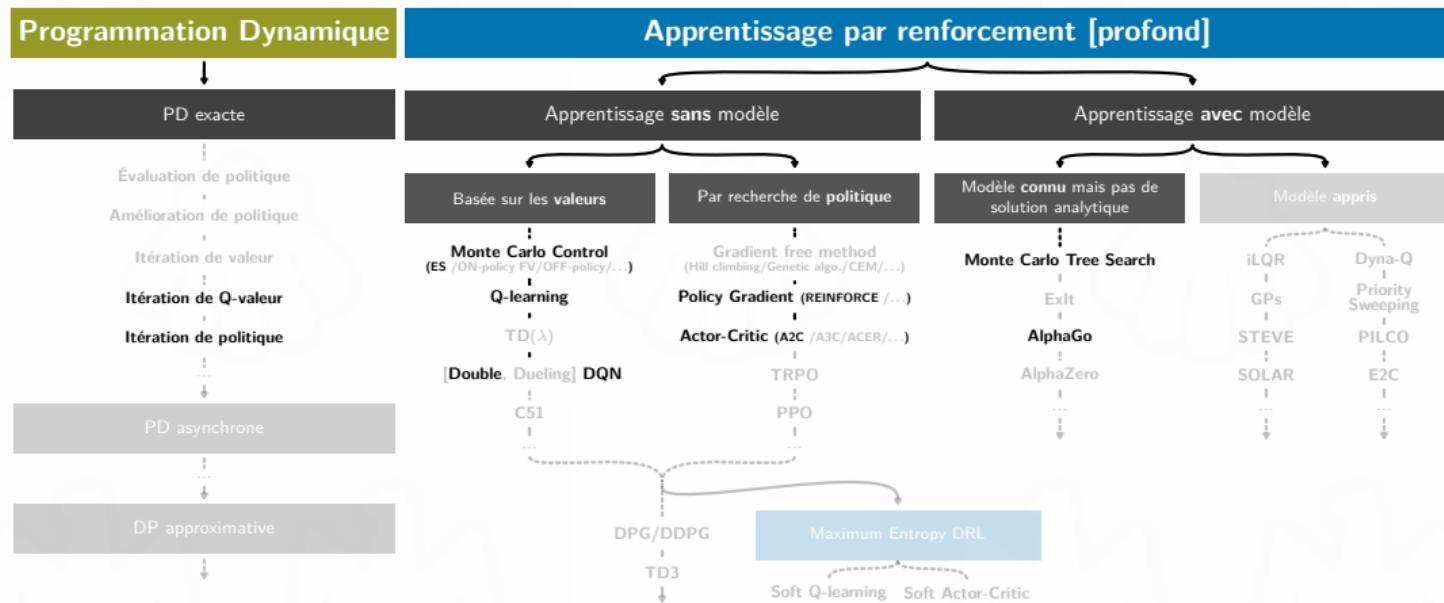
Diff  rente contrainte Ex. : On a besoin d'un algorithme qui fonctionne sur des espaces d'actions continues, donc on ne peut pas utiliser les algorithmes de la famille *Q-learning* ;

Plus de d  tail au fur et à mesure

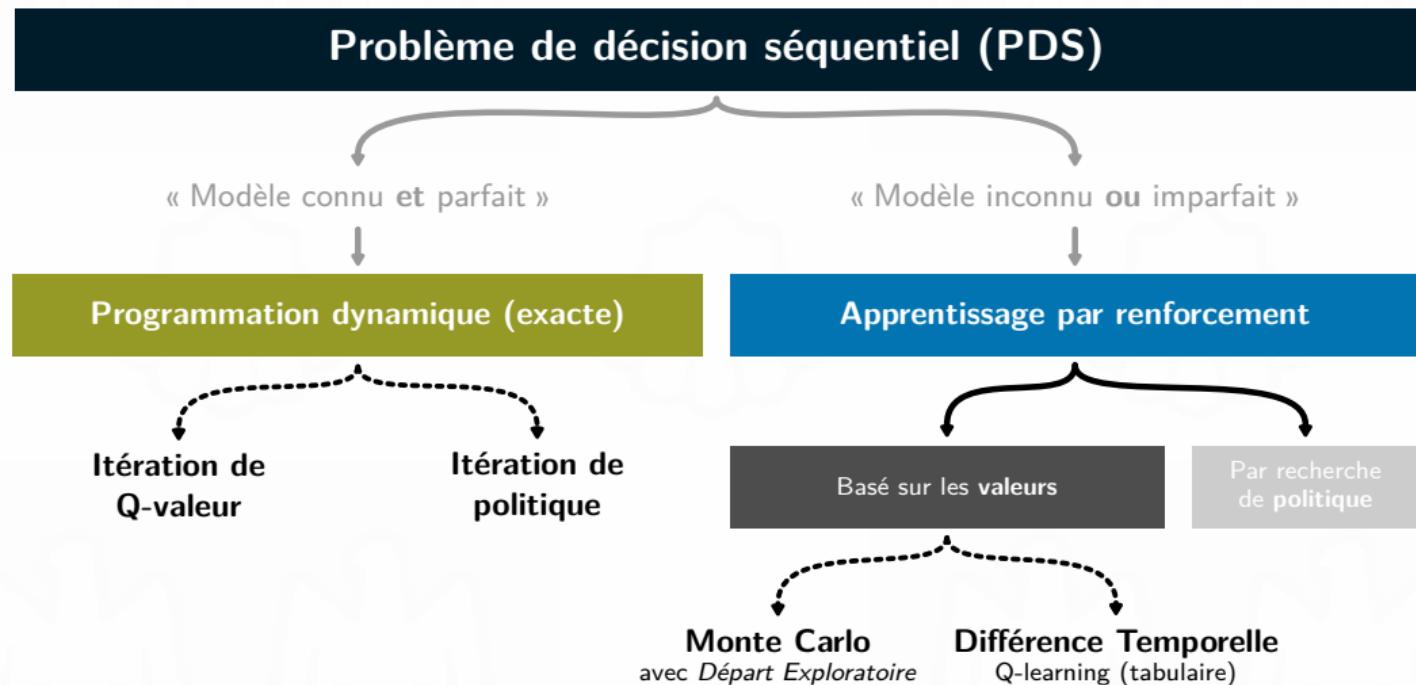
Note : Voir *Reinforcement Learning coach>Selecting an Algorithm* pour un bon exemple illustrant le niveau de complexité que repr  sente le choix d'algorithme en RL.

▶ [RL Coach / selecting an algorithm](#)

Algorithmes couverts dans le cours



Algorithmes vu dans cette partie



Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

Comparaison des types de méthode en RL

Notation

Pour aider à distinguer l'origine des composantes d'un algorithme, nous allons utiliser la notation :

$s_t^{(k)}$ lorsque la composante est un échantillon

s_t autrement (ex. choisie au hazard, résultant d'un calcul, ...)

Terminologie | « Backup Operation »

L'opération de **mise à jour** d'un *V*-valeur (ou *Q*-valeur) par une **estimation** de son possible successeur¹

V-valeur \leftarrow approximation du successeur possible de *V*-valeur

$$\text{Ex. : } Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$

1. Voir l'excellente explication par Andre G. Barto pour plus de détail dans REINFORCEMENT LEARNING AND DYNAMIC PROGRAMMING, section 2.2 [1]

Programmation dynamique : Estimer la valeur en utilisant l'**espérance mathématique**, le **modèle** de l'environnement et l'**estimation courantes** ;
 Ex. *Backup operation* pour Itération de Q-valeur

$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$

RL par méthode Monte-Carlo : Estimer la valeur en utilisant la **moyenne empirique** sur des ** chantillons de trajectoire τ complets** ;
 Ex. *Backup operation* pour *Monte Carlo ES*

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$

RL par Différence Temporelle : Estimer la valeur en utilisant des ** chantillons de trajectoire τ partielle + l'estimation courante** du reste de la trajectoire ;
 Ex. *Backup operation* pour *Q-learning*

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1}^{(k)})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$

Programmation dynamique : Estimer la valeur en utilisant l'espérance mathématique, le modèle de l'environnement et l'estimation courantes ;

Ex. *Backup operation* pour Itération de Q-valeur

$$Q_{i+1}^{\pi}(\mathbf{s}, \mathbf{a}) \leftarrow \mathbb{E}_{\mathbf{s}' \sim p} \left[\underbrace{r(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}')}_\text{modèle} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}(\mathbf{s}')} Q_i^{\pi}(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$

RL par méthode Monte-Carlo : Estimer la valeur en utilisant la moyenne empirique sur des échantillons de trajectoire τ complets ;

Ex. *Backup operation* pour Monte Carlo ES

$$Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \frac{1}{k} \left[\underbrace{G_t^{(k)}(\tau)}_\text{échantillon} - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right]$$

RL par Différence Temporelle : Estimer la valeur en utilisant des échantillons de trajectoire τ partielle + l'estimation courante du reste de la trajectoire ;

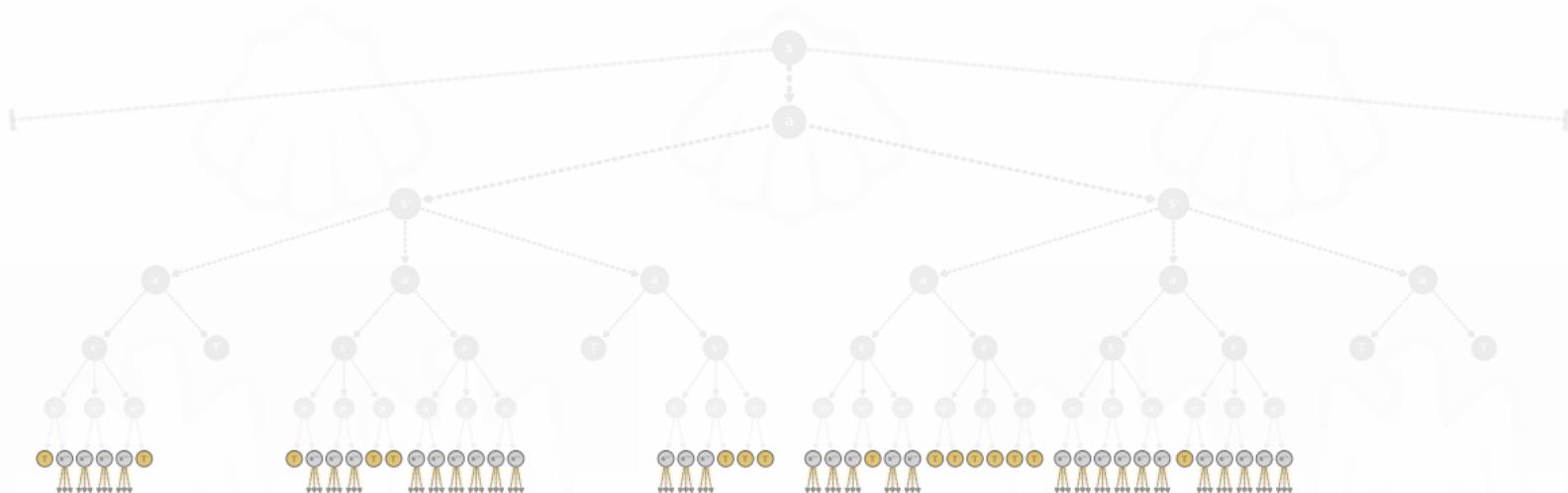
Ex. *Backup operation* pour *Q-learning*

$$Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \alpha \left[\underbrace{r_{t+1}^{(k)}}_\text{échantillon} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}(\mathbf{s}_{t+1})} Q_k^{\pi}(\underbrace{\mathbf{s}_{t+1}^{(k)}, \mathbf{a}'}_\text{chantillon}) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right]$$

Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

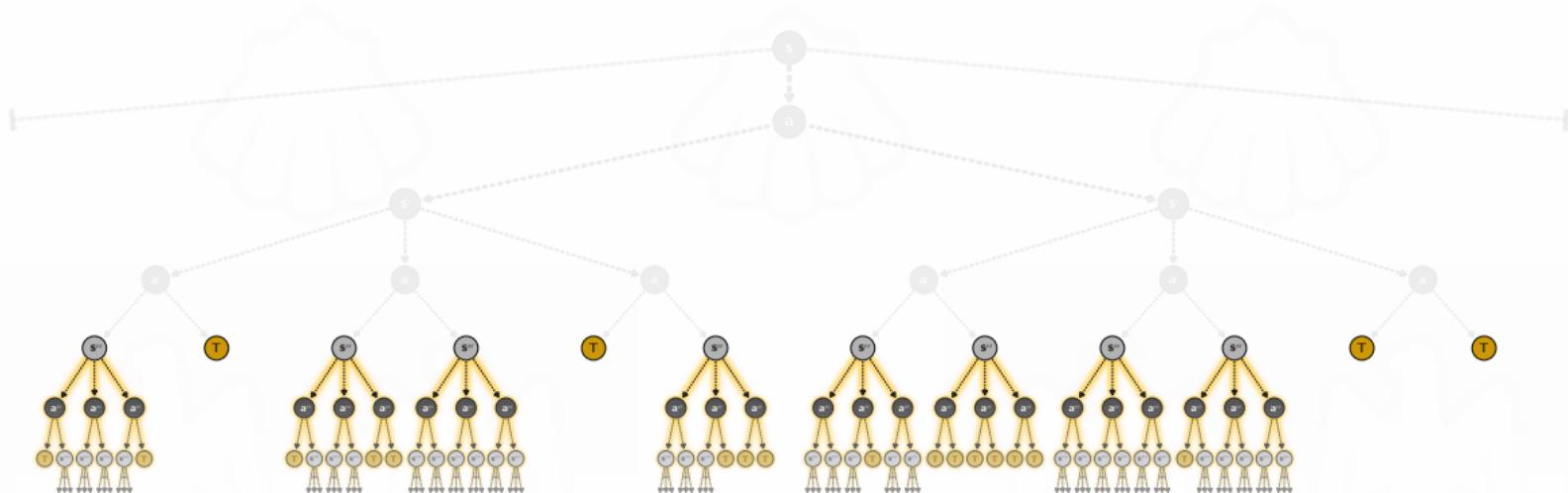
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

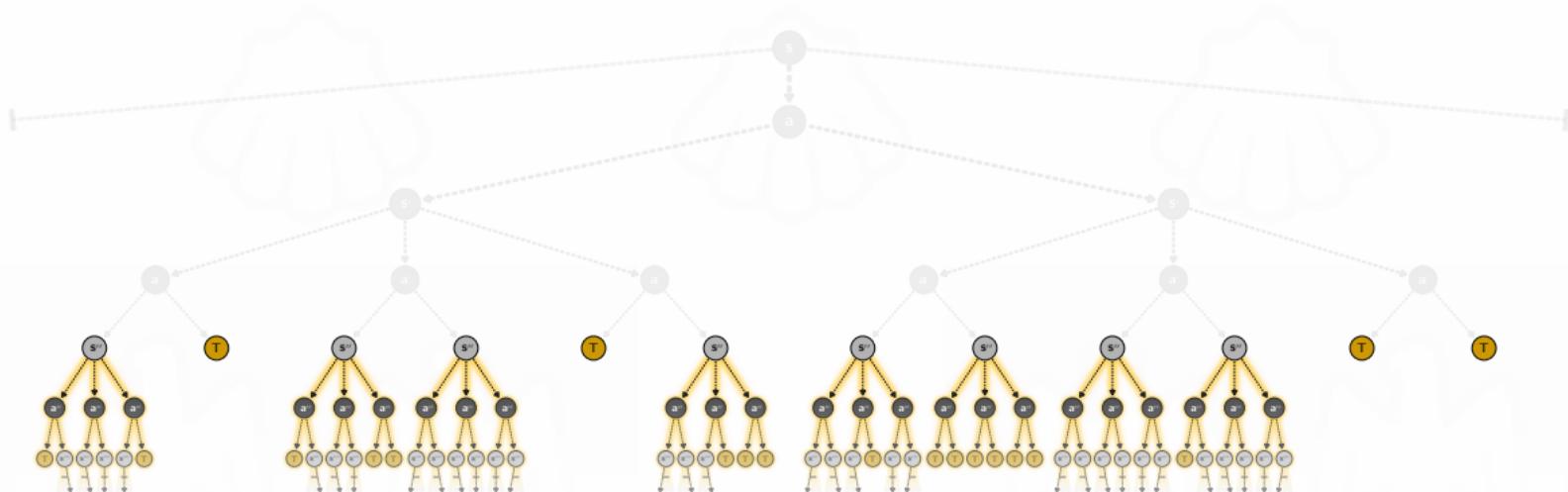
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

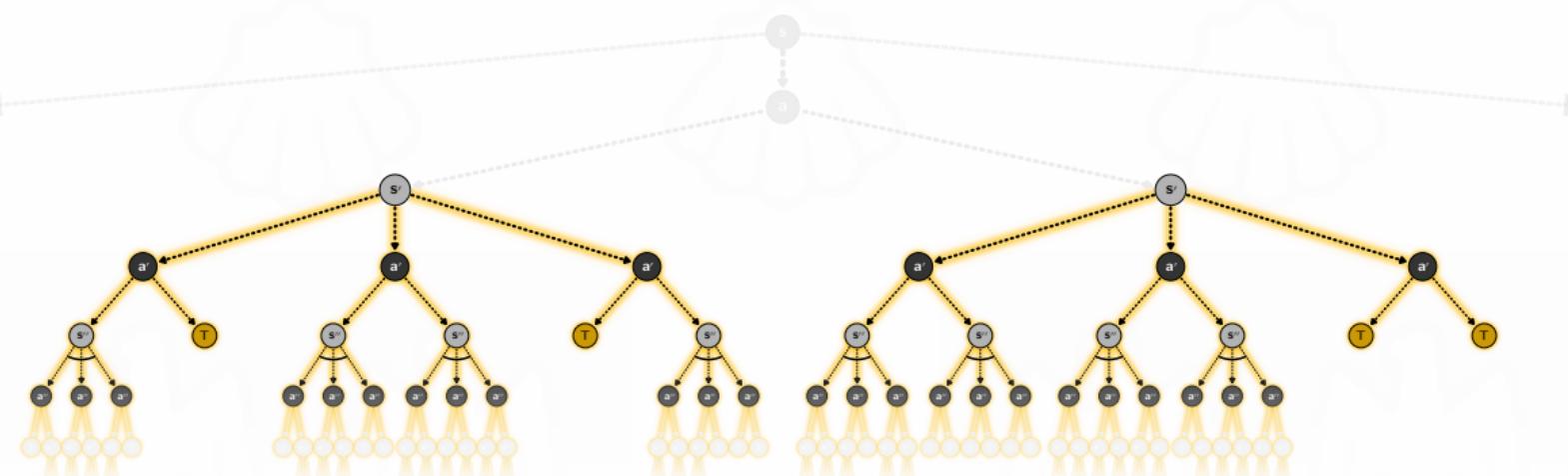
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

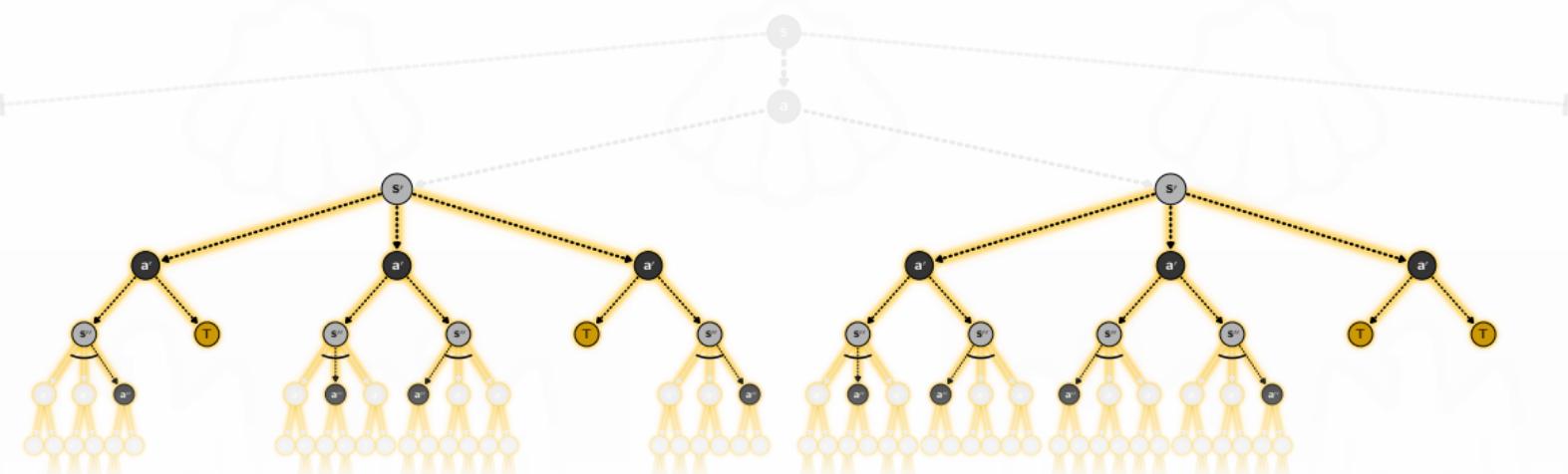
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

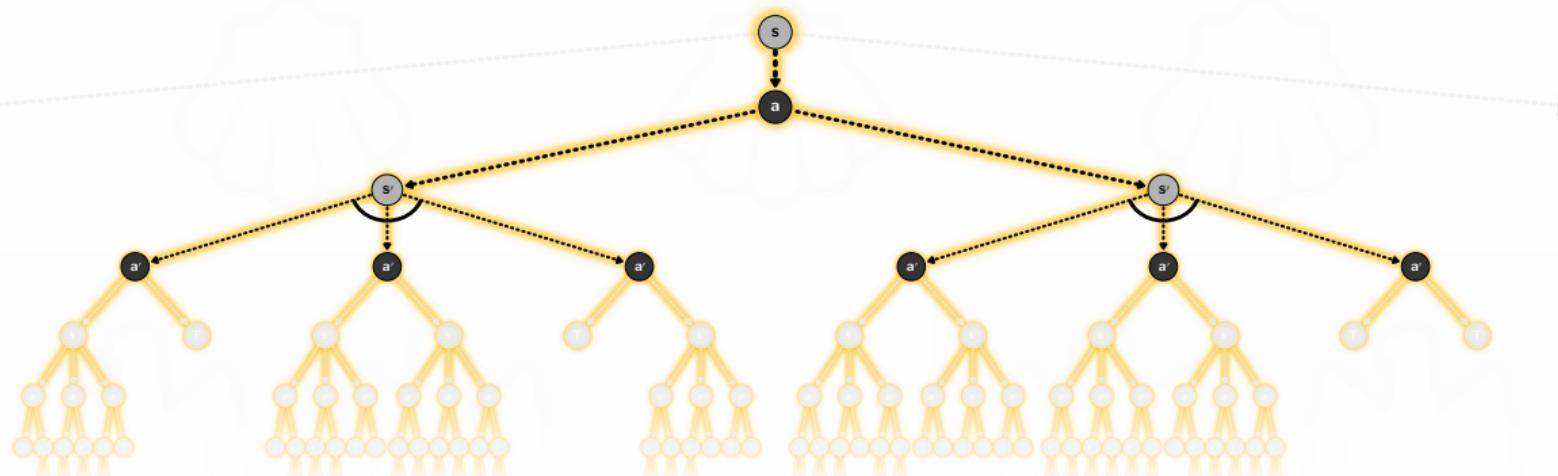
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

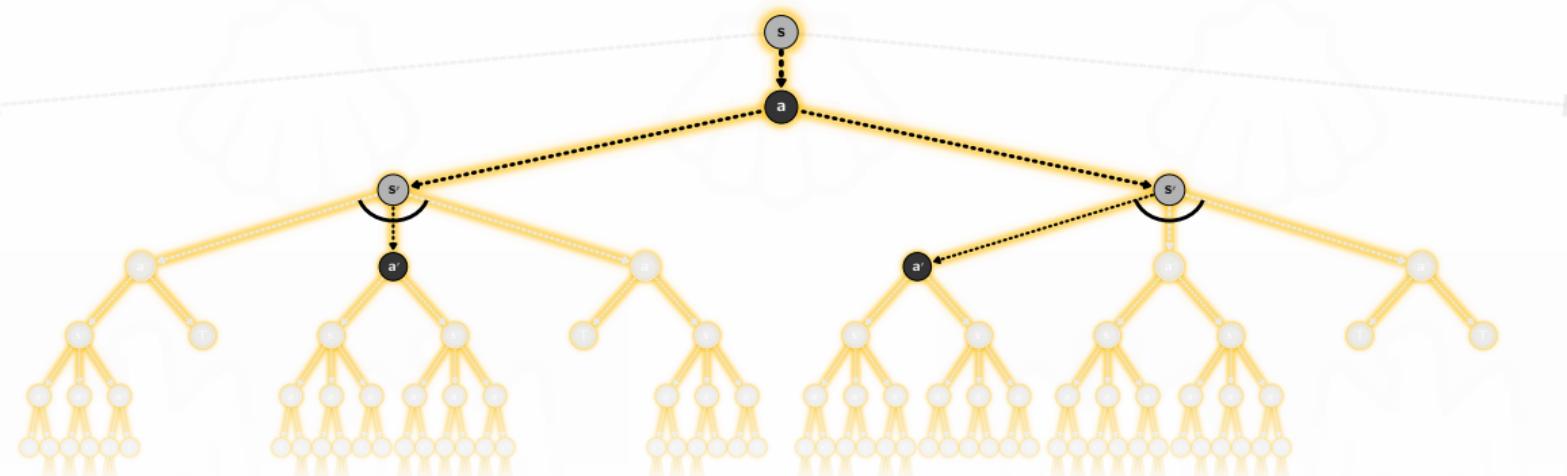
$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : Programmation Dynamique

Ex.: Algorithme *Itération de Q-valeur*

$$Q_{i+1}^{\pi}(s, a) \leftarrow \mathbb{E}_{s' \sim p} \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^{\pi}(s', a') \right]$$



Backup diagram : méthode Monte-Carlo

Ex.: Algorithme Monte-Carlo ES

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode Monte-Carlo

Ex.: Algorithme Monte-Carlo ES

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode Monte-Carlo

Ex.: Algorithme Monte-Carlo ES

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode Monte-Carlo

Ex.: Algorithme Monte-Carlo ES

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode Monte-Carlo

Ex.: Algorithme Monte-Carlo ES

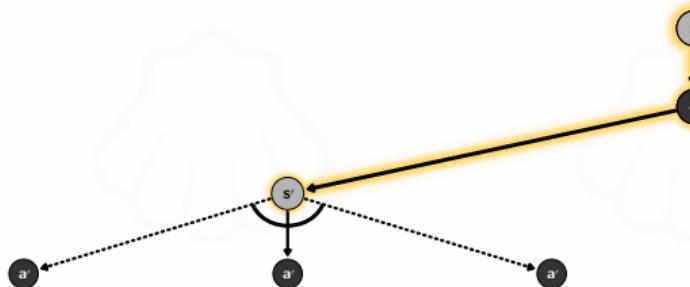
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

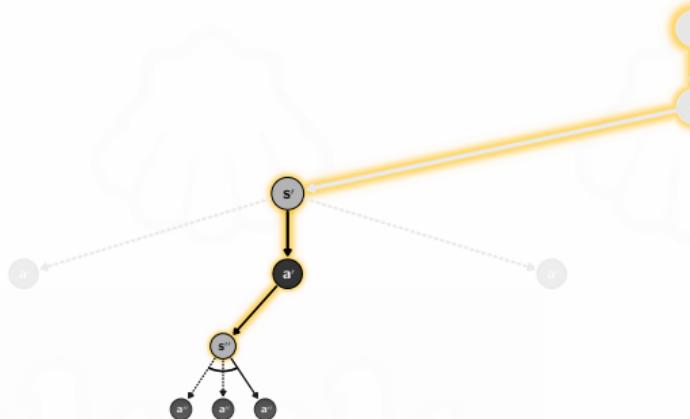
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

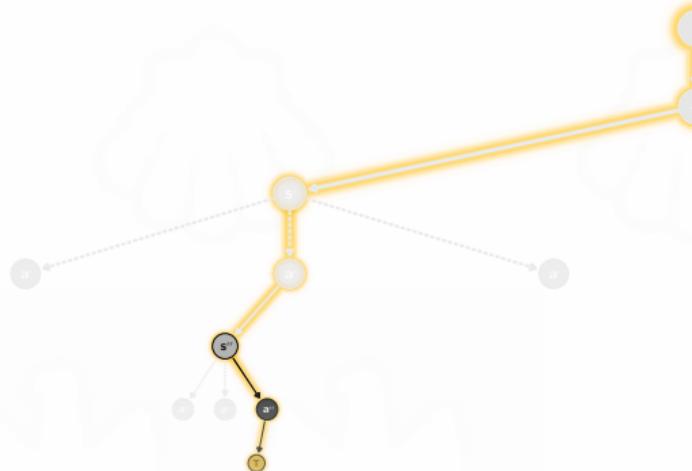
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

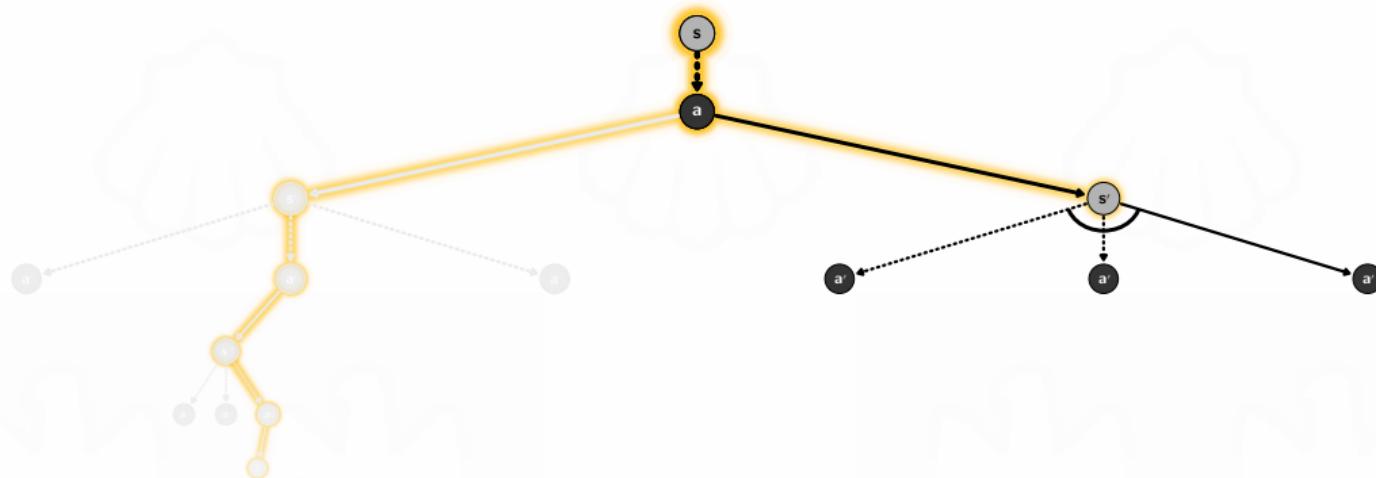
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

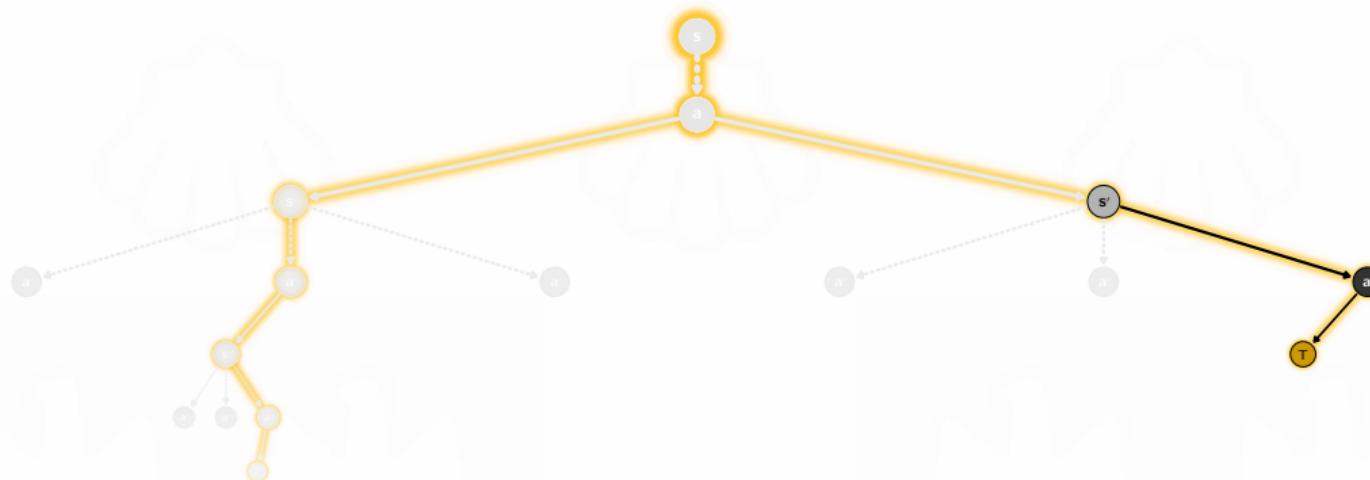
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

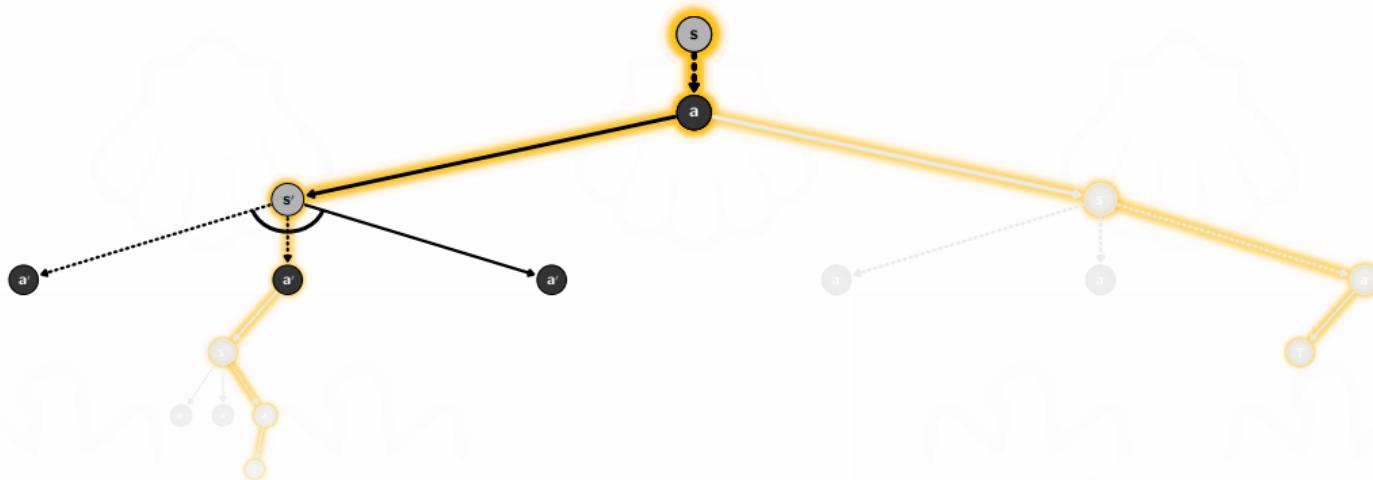
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

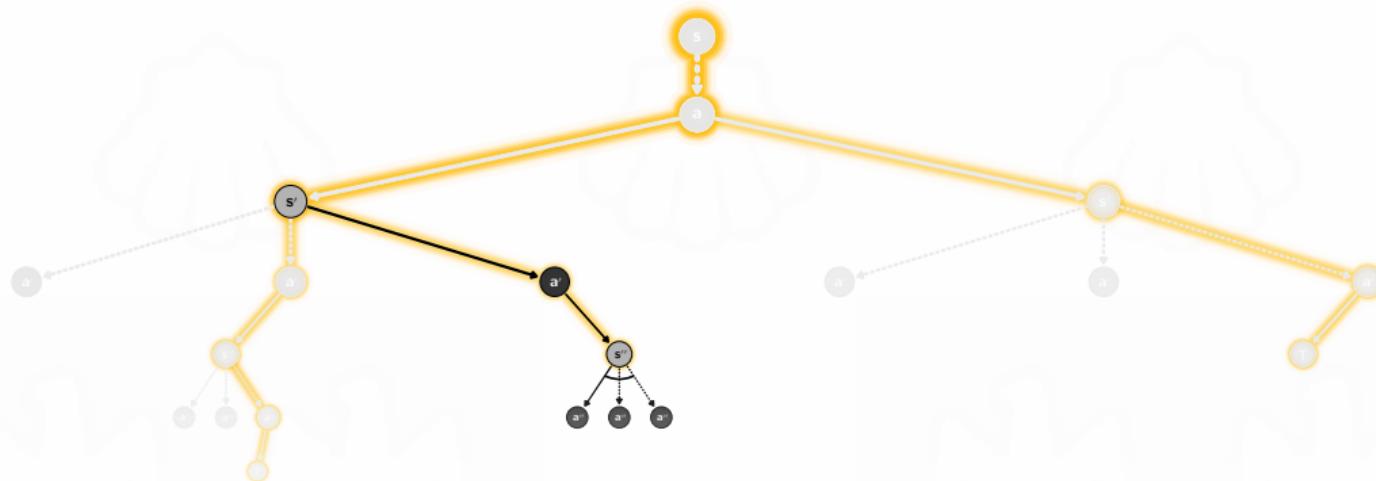
$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Backup diagram : méthode par Différence Temporelle

Ex.: Algorithme *Q-Learning*

$$Q_{k+1}^{\pi}(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^{\pi}(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^{\pi}(s_t, a_t) \right]$$



Modèle connu et parfait \Rightarrow pas d'apprentissage requis

1 Concept clé en RL

2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

3 Modèle connu et parfait \implies pas d'apprentissage requis

- Méthode par Programmation Dynamique exacte
- DP : Itération de Q-valeur
- DP : Itération de politique

4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)

5 Pour aller plus loin

Modèle connu **et parfait** \Rightarrow pas d'apprentissage requis

Méthode par **Programmation Dynamique exacte**

Programmation dynamique (exacte) et processus de décision séquentielle

« Supposons qu'après avoir lu un livre sur les cubes Rubik, on sait comment résoudre tous les cubes Rubik ... juste en r f chissant et sans jamais en avoir pris un dans ses mains. »



Image : Cube Rubik

- Caractéristique :**
- Résolution par planification \implies requiert un modèle de l'environnement ;
 - Type d'algorithme hors-ligne et sans phase d'apprentissage ;
c.- -d. que la solution est calculée sans que l'agent ait à interagir avec l'environnement

- Idées clés :**
- 1 **D ecomposer** le problème difficile en sous-problèmes plus simples ;
 - 2 Trouver une **solution optimale**   chaque sous-problème ;
 - 3 **Résoudre récursivement** en utilisant les solutions des sous-problèmes ;

Programmation dynamique (exacte) et processus de décision séquentielle

- **Pro :** ■ Garantie de trouver une solution optimale exacte ;
- **Con :** ■ Dois avoir accès au modèle de l'environnement ;
■ Fonctionne sous l'assumption que le modèle est parfait (c.- -d. sans zone grise ni erreur) ;
■ Victime de la malédiction de la dimensionnalité :
 Très gourmand en mémoire et sur le plan computationnel
 \implies Perd en efficacité pratique plus l'espace d'état/action devient massif¹ ;

Pourquoi étudier ces méthodes dans un cours sur le RL alors ?

- Toutes les méthodes de RL aspirent à des résultats similaires à ceux obtenus par DP, mais en se libérant des contraintes du DP² ;
- **Pro** Procure une solide fondation pour comprendre certains mécanismes fondamentaux de l'apprentissage par renforcement ;

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4, section 7 « Efficiency of Dynamic Programming » par Sutton & Barto [2]

2. Quitte à perdre certaines propriétés du DP à l'occasion : garantie de solution optimale, production d'une solution exacte

Programmation dynamique (exacte) et processus de décision séquentielle

- ! Pro :
 - Garantie de trouver une solution optimale exacte ;

- ! Con :
 - Dois avoir accès au modèle de l'environnement ;
 - Fonctionne sous l'assumption que le modèle est parfait (c.-d. sans zone grise ni erreur) ;
 - Victime de la malédiction de la dimensionnalité :
 - Très gourmand en mémoire et sur le plan computationnel
 \implies Perd en efficacité pratique plus l'espace d'état/action devient massif¹ ;

Pourquoi étudier ces méthodes dans un cours sur le RL alors ?

- Toutes les méthodes de RL aspirent à des résultats similaires à ceux obtenus par DP, mais en se libérant des contraintes du DP² ;

- ! Pro : Procure une solide fondation pour comprendre certains mécanismes fondamentaux de l'apprentissage par renforcement ;

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4, section 7 « Efficiency of Dynamic Programming » par Sutton & Barto [2]

2. Quitte à perdre certaines propriétés du DP à l'occasion : garantie de solution optimale, production d'une solution exacte

Terminologie

« Backup Operation »

L'opération de **mise à jour** d'un *V*-valeur (ou *Q*-valeur) par une **estimation** de son possible successeur¹

$$V\text{-valeur} \leftarrow f_{\text{approximation du successeur possible de } V\text{-valeur}}$$

« Sweep »

Une exécution d'un « *Backup Operation* » sur chaque *V*-valeurs (ou *Q*-valeurs) d'un espace.

1. Voir l'excellente explication par Andre G. Barto pour plus de détail dans REINFORCEMENT LEARNING AND DYNAMIC PROGRAMMING, section 2.2 [1]

Modèle connu et parfait \Rightarrow pas d'apprentissage requis

DP : Itération de Q-valeur

Itération de Q-valeur [Q-value itération]

« *Think about every possible scenario ... obsessively, leave no stone unturned.* »

- Idées clés :**
- **1 Estimer et stocker** la Q-valeur **de chaque couples**  tat-action de l'univers ;
 - **2 Répéter [infiniment]** en améliorant progressivement l'estimation jusqu'à convergence vers une solution exacte ;

$$Q_i^\pi \xrightarrow{i \rightarrow \infty} Q^*$$

- Pro :**
- Intuitif et rapide à implémenter ;
 - Convergence garantie¹ ;

- Con :**
- Mémoire requise pour la *Q-table*² : $2 \cdot |\mathcal{S} \times \mathcal{A}|$
 - Limiter aux problèmes avec espace d'état/action de taille modeste ;
Exemple : espace d'action discrète, facteur de branchement limité, ...

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4 (introduction, 4.4 et 4.6) par Sutton & Barto [2]

2. Version synchrone de l'algorithme : les *backup operations* sont effectué en parallèle

Itération de Q-valeur [Q-value itération]

« *Think about every possible scenario ... obsessively, leave no stone unturned.* »

- Idées clés :**
- 1 Estimer et stocker la Q-valeur **de chaque couples**  tat-action de l'univers ;
 - 2 Répéter [infiniment] en améliorant progressivement l'estimation jusqu'à convergence vers une solution exacte ;

$$Q_i^\pi \xrightarrow{i \rightarrow \infty} Q^*$$

- Pro :**
- Intuitif et rapide à impl m enter ;
 - Convergence garantie¹ ;

- Con :**
- Mémoire requise pour la *Q-table*² : $2 \cdot |\mathcal{S} \times \mathcal{A}|$
 - Limiter aux problèmes avec espace d'état/action de taille modeste ;
Exemple : espace d'action discrète, facteur de branchement limité, ...

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4 (introduction, 4.4 et 4.6) par Sutton & Barto [2]

2. Version synchrone de l'algorithme : les *backup operations* sont effectué en parallèle

➡ Algorithme | Itération de Q-valeur

R  p ter avec $i = 1, 2, 3, \dots$ jusqu'à convergence vers Q^* :

$$Q_{i+1}^\pi(s, a) \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s, a) \left[r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q_i^\pi(s', a') \right] \quad \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$$

>_ En pratique | Itération de Q-valeur

On **arrête prématurément** l'algorithme au lieu d'itérer à l'infinie en impl mantant un moyen d'évaluer l'estimation et en spécifiant la marge d'erreur ε visée.

Conséquence :

- ▶ L'algorithme **converge approximativement** : $Q^\pi \xrightarrow{\approx} Q^*$
- ▶ et **retourne** $\pi \approx \pi^*$ au lieu de la valeur exacte

>_ Pseudocode | Itération de Q-valeur¹ (Version synchrone)

```

Init: foreach  $s \in \mathcal{S}$ ,  $a \in \mathcal{A}(s)$  do  $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow 0$ 
Init: threshold hyperparam( $\epsilon$ )  $> 0$                                      « Crit re d'arr t »

repeat                                                                 « sweep i »
   $\Delta \leftarrow 0$ 
   $Q\text{-table}_{old} \leftarrow Q\text{-table}$ 
  foreach  $s \in \mathcal{S}$  and  $a \in \mathcal{A}(s)$  do
     $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) \left[ r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q\text{-table}_{old}[s', a'] \right]$  « Backup operation »
     $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |Q\text{-table}_{old}[s, a] - Q\text{-table}[s, a]|)$ 
  until  $\Delta < \epsilon$                                          «  $Q^\pi \xrightarrow{\approx} Q^*$  »

Output:  $\pi^*(s) \approx \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s)} Q\text{-table}[s, a]$  « Produis une politique d terministe »

```

1. Pseudocode inspir  de « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4.4, page 83 « Value Iteration » par Sutton & Barto [2]

Modèle connu **et parfait** \Rightarrow pas d'apprentissage requis

DP : Itération de politique

Itération de politique [Policy iteration]

« Think freely, see where it leads you . . . explore until you've seen it all. »

Idées clés :

- 1 A chaque « sweep », **considérer une seule action par état** (fixer la politique) ;
- 2 **Estimer et stocker** la V-valeur **de chaque état** de l'univers ;
- 3 **Choisir une meilleure** politique en ´valuant le **futur immédiat** (*one-step look-ahead*) ;
- 4 **Répéter [infiniment]** en améliorant progressivement l'estimation jusqu'à convergence vers une solution exacte ;

$$V_k^\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} V^* \quad \text{et} \quad \pi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi^*$$

Pro :

- Intuitif et rapide ´ implémenter ;
- Convergence garantie¹ et plus rapide² que *Itération de Q-valeur* ;

Con :

- Mémoire requise pour la *V-table* et la *\$\pi\$-table*³ : $3 \cdot |\mathcal{S}|$
- Limiter aux problèmes avec espace d'état/action de taille modeste ;

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », section 4.0, 4.3 et 4.6 par Sutton & Barto [2]

2. Sous certaines conditions. Voir preuve de convergence.

3. Version synchrone de l'algorithme : les *backup operations* sont effectués en parallèle

Itération de politique [Policy iteration]

« Think freely, see where it leads you . . . explore until you've seen it all. »

- Idées clés :**
- 1 A chaque « sweep », **considérer une seule action par état** (fixer la politique) ;
 - 2 **Estimer et stocker** la V-valeur **de chaque**  tat de l'univers ;
 - 3 **Choisir une meilleure** politique en ´valuant le **futur immédiat** (*one-step look-ahead*) ;
 - 4 **Répéter [infiniment]** en améliorant progressivement l'estimation jusqu'à convergence vers une solution exacte ;

$$V_k^\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} V^* \quad \text{et} \quad \pi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi^*$$

- Pro :**
- Intuitif et rapide ´ implémenter ;
 - Convergence garantie¹ et plus rapide² que *Itération de Q-valeur* ;
- Con :**
- Mémoire requise pour la *V-table* et la *\$\pi\$-table*³ : $3 \cdot |\mathcal{S}|$
 - Limiter aux problèmes avec espace d'état/action de taille modeste ;

1. Voir « Reinforcement Learning : An introduction », section 4.0, 4.3 et 4.6 par Sutton & Barto [2]

2. Sous certaines conditions. Voir preuve de convergence.

3. Version synchrone de l'algorithme : les *backup operations* sont effectués en parallèle

☛ Algorithme | Itération de politique

$\forall s \in \mathcal{S}$, fixer arbitrairement la **politique courante** π_k telle que $\pi_0(s) = a \in \mathcal{A}(s)$

Répéter ( tape 1 et 2) avec $k = 1, 2, 3, \dots$ **jusqu'à convergence** vers V^* et π^* :

1 Évaluer la politique courante

Répéter avec $i = 1, 2, 3, \dots$ **jusqu'à convergence** vers V^π :

$$V_{i+1}^\pi(s) \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s, \pi_k(s)) [r(s, \pi_k(s), s') + \gamma V_i^\pi(s')] \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

2 Améliorer la politique courante

$$\pi_{k+1}(s) \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s)} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V^\pi(s')] \quad \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)$$

➤ En pratique | Itération de politique

On **arrête prématurément** l'algorithme au lieu d'itérer à l'infinie comme dans *Itération de Q-valeur*.

Conséquence :

- L'algorithme **converge approximativement** : $V^\pi \xrightarrow{\approx} V^*$ et $\pi \xrightarrow{\approx} \pi^*$

>_ Pseudocode | Itération de politique¹ (Version synchrone)

Init: **foreach** $s \in \mathcal{S}$ **do** $V\text{-table}[s] \leftarrow 0$ **and** $\pi\text{-table}[s] \leftarrow a \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily
Init: threshold hyperparam(ϵ) > 0

« Crit re d'arr t »

repeat

1 %.... tape d' valuation de politique.....

repeat $\Delta \leftarrow 0$ $V\text{-table}_{old} \leftarrow V\text{-table}$ **foreach** $s \in \mathcal{S}$ **do**

$$V\text{-table}[s] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, \pi\text{-table}[s]) [r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}_{old}[s']]$$

$$\Delta \leftarrow \max(\Delta, |V\text{-table}_{old}[s] - V\text{-table}[s]|)$$

« sweep i »

until $\Delta < \epsilon$

2 %.... tape d'amélioration de politique.....

 $\pi\text{-IsStable} \leftarrow true$ **foreach** $s \in \mathcal{S}$ **do** $a_{old} \leftarrow \pi\text{-table}[s]$

$$\pi\text{-table}[s] \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) [r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}[s']]$$

if $a_{old} \neq \pi\text{-table}[s]$ **then** $\pi\text{-IsStable} \leftarrow false$

« Backup operation »

until $\pi\text{-IsStable}$ « $V^\pi \xrightarrow{\approx} V^*$ et $\pi \xrightarrow{\approx} \pi^*$ »**Output:** $\pi^*(s) \approx \pi\text{-table}[s]$

« Produis une politique d terministe »

1. Pseudocode inspir  de « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4.3, page 80 « Policy Iteration » par Sutton & Barto [2]

Comparaison

> Pseudocode | Itération de Q-valeur

Init: $\text{foreach } s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s) \text{ do } Q\text{-table}[s, a] \leftarrow 0$
Init: threshold hyperparam(ϵ) > 0

```
repeat
     $\Delta \leftarrow 0$ 
     $Q\text{-table}_{old} \leftarrow Q\text{-table}$ 
    foreach  $s \in \mathcal{S}$  and  $a \in \mathcal{A}(s)$  do
         $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) \left[ r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q\text{-table}_{old}[s', a'] \right]$ 
         $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |Q\text{-table}_{old}[s, a] - Q\text{-table}[s, a]|)$ 
    until  $\Delta < \epsilon$ 
Output:  $\pi^*(s) \approx \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s)} Q\text{-table}[s, a]$ 
```

> Pseudocode | Itération de politique

Init: $\text{foreach } s \in \mathcal{S} \text{ do } V\text{-table}[s] \leftarrow 0$ and $\pi\text{-table}[s] \leftarrow a \in \mathcal{A}(s)$ arbitrarily
Init: threshold hyperparam(ϵ) > 0

repeat

- 1 %.... tage d' valuation de politique


```

           $\Delta \leftarrow 0$ 
           $V\text{-table}_{old} \leftarrow V\text{-table}$ 
          foreach  $s \in \mathcal{S}$  do
               $V\text{-table}[s] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, \pi\text{-table}[s]) \left[ r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}_{old}[s'] \right]$ 
               $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |V\text{-table}_{old}[s] - V\text{-table}[s]|)$ 
          until  $\Delta < \epsilon$ 
      
```
- 2 %.... tage d'amélioration de politique


```

           $\pi\text{-IsStable} \leftarrow true$ 
          foreach  $s \in \mathcal{S}$  do
               $a_{old} \leftarrow \pi\text{-table}[s]$ 
               $\pi\text{-table}[s] \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) \left[ r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}[s'] \right]$ 
              if  $a_{old} \neq \pi\text{-table}[s]$  then  $\pi\text{-IsStable} \leftarrow false$ 
          until  $\pi\text{-IsStable}$ 
      
```

Output: $\pi^*(s) \approx \pi\text{-table}[s]$

Comparaison

> Pseudocode | Itération de Q-valeur

```

init: foreach  $s \in \mathcal{S}$ ,  $a \in \mathcal{A}(s)$  do  $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow 0$ 
init: threshold hyperparam( $\epsilon$ ) > 0

repeat
     $\Delta \leftarrow 0$ 
     $Q\text{-table}_{old} \leftarrow Q\text{-table}$ 
    foreach  $s \in \mathcal{S}$  and  $a \in \mathcal{A}(s)$  do
         $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) \left[ r(s, a, s') + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s')} Q\text{-table}_{old}[s', a'] \right]$ 
         $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |Q\text{-table}_{old}[s, a] - Q\text{-table}[s, a]|)$ 
    until  $\Delta < \epsilon$ 
Output:  $\pi^*(s) \approx \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s)} Q\text{-table}[s, a]$ 

```

> Pseudocode | Itération de politique

```

Init: foreach  $s \in \mathcal{S}$  do  $V\text{-table}[s] \leftarrow 0$  and  $\pi\text{-table}[s] \leftarrow a \in \mathcal{A}(s)$  arbitrarily
Init: threshold hyperparam( $\epsilon$ ) > 0

repeat
1   ... Etape d' valuation de politique
    repeat
         $\Delta \leftarrow 0$ 
         $V\text{-table}_{old} \leftarrow V\text{-table}$ 
        foreach  $s \in \mathcal{S}$  do
             $V\text{-table}[s] \leftarrow \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, \pi\text{-table}[s]) \left[ r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}_{old}[s'] \right]$ 
             $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |V\text{-table}_{old}[s] - V\text{-table}[s]|)$ 
        until  $\Delta < \epsilon$ 
    2   ... Etape d'amplification de politique
         $\pi\text{-IsStable} \leftarrow true$ 
        foreach  $s \in \mathcal{S}$  do
             $a_{old} \leftarrow \pi\text{-table}[s]$ 
             $\pi\text{-table}[s] \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s'|s, a) \left[ r(s, a, s') + \gamma V\text{-table}[s'] \right]$ 
            if  $a_{old} \neq \pi\text{-table}[s]$  then  $\pi\text{-IsStable} \leftarrow false$ 
        until  $\pi\text{-IsStable}$ 
Output:  $\pi^*(s) \approx \pi\text{-table}[s]$ 

```

Itération de valeur/politique

Exemple interactif

 valuation de politique dans l'environnement GridWorld

▶ Exemple interactif



Image : REINFORCEjs, Stanford

■ REINFORCEjs ▶ Projet ▶ GitHub

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

1 Concept clé en RL

2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

3 Modèle connu **et** parfait \Rightarrow pas d'apprentissage requis

4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)

- RL par méthode Monte-Carlo [MC]
- Algorithme Monte-Carlo avec départ exploratoire
- RL par Différence temporelle [TD]
- Q-learning (tabulaire)

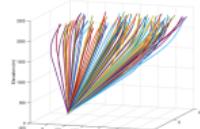
5 Pour aller plus loin

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

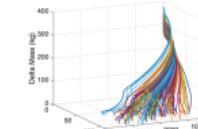
« Supposons qu'on souhaite concevoir une **fusée autonome** avec pour objectif d'atterrir sur la planète Gliese 581c¹ puis re d閞oller, **sur quelle base** peut-on d閙ontrer les systèmes de **navigation, de guidage et de contrôle** ?

D'un point de vue appliqué, est-ce que la **garantie d'optimalité** et la **propriété d'exactitude** sont des **conditions nécessaires** ? »

Complément : Voir [Deep Reinforcement Learning for Six Degree-of-Freedom Planetary Powered Descent and Landing](#), partie I. Introduction, pour une comparaison des méthodes de RL par rapport aux méthodes traditionnelles par Contrôle optimal dans le domaine de l'aérospatial. (Plus spécifiquement, dans le cadre du problème d'atterrissement autonome à une coordonné précise sur Mars)



6-DOF Trajectories



6-DOF Fuel-Mass Along the Trajectories

1. « Gliese 581c ... is classified as a super-Earth ... there are no measurements of its radius. Furthermore, the radial velocity method used to detect it only puts a lower limit on the planet's mass, which means theoretical models of planetary radius and structure can only be of limited use ... », [wikipedia](#)

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

▲ **Problème :** On n'a **pas de modèle** de l'environnement (Il est inconnu ou imparfait)



On ne peut pas prédire de comportement dans cet environnement ;

Concrètement : Pas de modèle



$p(s'|s, a)$ et $r(s, a, s')$ **inconnu**



Impossible de calculer une solution optimale **exacte** *  priori* ;

Solution : **Interagir** avec l'environnement (réellement ou en simulateur) afin d'**apprendre** les composantes nécessaires pour trouver une solution optimale :

- $V^\pi(s)$, $Q^\pi(s, a)$, $\pi(a|s)$ pour le RL **sans** modèle ;
- $p(s'|s, a)$ et $V^\pi(s)$, $Q^\pi(s, a)$, $\pi(a|s)$ pour le RL **avec** modèle (apris) ;

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

RL par méthode Monte-Carlo [MC]

Méthodes Monte-Carlo et processus de décision séquentielle

« Try many many time, learn from mistakes . . . once in a while. »

Caractéristiques :

- **Interagit** avec l'environnement pour recueillir de l'information ;
- Collecte des ** chantillons** de trajectoires τ **complètes** ;
- Phase d'apprentissage **hors-ligne** ;
- Apprentissage **sans-modèle** ;
- Pas de « Bootstrap » contrairement aux méthodes de *DP* ;
- N'exploite pas la *propriété de Markov* ;

Idées clés : Utiliser la **moyenne empirique** de plusieurs **trajectoires τ complètes** pour approximer l'espérance math matische des *quations de Bellman* ;

Pourquoi  a marché ?

Méthodes Monte-Carlo et processus de décision séquentielle

« *Try many many time, learn from mistakes . . . once in a while.* »

Caractéristiques :

- **Interagit** avec l'environnement pour recueillir de l'information ;
- Collecte des ** chantillons** de trajectoires τ **complètes** ;
- Phase d'apprentissage **hors-ligne** ;
- Apprentissage **sans-modèle** ;
- Pas de « Bootstrap » contrairement aux méthodes de *DP* ;
- N'exploite pas la *propriété de Markov* ;

Idées clés : Utiliser la **moyenne empirique** de plusieurs **trajectoires τ complètes** pour approximer l'espérance math matische des *equations de Bellman* ;

Pourquoi  a marché ?

La loi des grands nombres

Estimé de Monte-Carlo (formellement)

Soit

- \mathcal{X} un espace d'閑nements possible,
- x une réalisation de la variable aléatoire X ,
- f_X la distribution probabilité **continue** suivie par la v.a. X ,
- $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ des échantillons tirés de f_X
- $g(\cdot)$ une fonction mesurable,

alors pour N suffisamment grand

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{x \in \mathcal{X}} g(x) f_X(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)}) = \widehat{g}_N$$

avec \widehat{g}_N la moyenne empirique de l'espérance mathématique $\mathbb{E}[g(X)]$

Estimé de Monte-Carlo (formellement)

Soit

- \mathcal{X} un espace d'閑nements possible,
- x une r閏alisation de la variable al閍toire X ,
- \mathbb{P}_X la distribution probabilité **discrète** suivie par la v.a. X ,
- $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$ des échantillons tirés de \mathbb{P}_X
- $g(\cdot)$ une fonction mesurable,

alors pour N suffisamment grand

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \mathbb{P}(X = x) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)}) = \hat{g}_N$$

avec \hat{g}_N la moyenne empirique de l'espérance mathématique $\mathbb{E}[g(X)]$

Estimé de Monte-Carlo (considération pratique)

$$\widehat{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)})$$

Dans le contexte du RL :

$$Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \leftarrow \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau)$$

est un « backup operation » qui est répétée à chaque couple ** tat-action** rencontré dans une trajectoire échantillonnée.

Estimé de Monte-Carlo (considération pratique)

$$\widehat{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)})$$

Dans le contexte du RL :

$$Q_{k+1}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau)$$

est un « backup operation » qui est répétée à chaque couple ** tat-action** rencontré dans une trajectoire échantillonnée.

Estimé de Monte-Carlo (considération pratique)

$$\widehat{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)})$$

Dans le contexte du RL :

$$Q_{k+1}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau)$$

est un « backup operation » qui est répétée à chaque couple ** tat-action** rencontré dans une trajectoire échantillonnée.

Problème : Plus le nombre dchantillons dpisode k devient grand, plus ce calcule devient couteux en mémoire et en temps de calcul. Cest inefficace 

Estimé de Monte-Carlo (considération pratique)

$$\widehat{g}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x^{(n)})$$

Dans le contexte du RL :

$$Q_{k+1}^\pi(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau)$$

est un « backup operation » qui est répétée à chaque couple ** tat-action** rencontré dans une trajectoire échantillonnée.

Problème : Plus le nombre dchantillons dpisode k devient grand, plus ce calcule devient couteux en mémoire et en temps de calcule. **C'est inefficace** 

Solution : Implémentation incrémentale du calcule de la moyenne

Estimé de Monté Carlo (considération pratique)

Implémentation incrémental du calcul de la moyenne :

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + \sum_{j=1}^{k-1} G_t^{(j)}(\tau) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + (k-1) \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} G_t^{(j)}(\tau) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + (k-1) Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + k Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right) \\
 &= Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right]
 \end{aligned}$$

Estimé de Monté Carlo (considération pratique)

Implémentation incrémental du calcul de la moyenne :

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G_t^{(j)}(\tau) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + \sum_{j=1}^{k-1} G_t^{(j)}(\tau) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + (k-1) \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} G_t^{(j)}(\tau) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + (k-1) Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right) \\
 &= \frac{1}{k} \left(G_t^{(k)}(\tau) + k Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right) \\
 &= Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right]
 \end{aligned}$$

Estim  de Monte-Carlo (consid ration pratique)

« Update rule », forme g nerale¹

$$\text{Estimate}^{\text{New}} \leftarrow \text{Estimate}^{\text{Old}} + \text{StepSize} \left[\underbrace{\text{Target} - \text{Estimate}^{\text{Old}}}_{\text{estimate "error"}} \right]$$

➤ En pratique | Méthode Monte-Carlo

Implémentation incrémentale du calcul de la moyenne

$$Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^\pi(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$$

1. Voir explication dans « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 2, page 31 « Incremental Implementation » par Sutton & Barto [2]

Méthodes Monte-Carlo et processus de décision séquentielle

-  **Pro :**
- Pas besoin de modèle ;
 - Phase d'**apprentissage** exécuté par « **batch** » \implies est un avantage lorsque les ressources computationnelles sont inférieur à la capacité à produire de nouvelles trajectoires ;
 - **Aucun biais**¹ ;
 - Les estimés de chaque état sont indépendant l'un de l'autre \implies il est possible de restreindre l'échantillonnage à un sous-ensemble d'état d'intérêt ;
-  **Con :**
- **Dépend de la capacité à générer beaucoup de trajectoires** \implies est un enjeu si la production de trajectoire est longue, couteuse ou risqué ;
 - Fonctionne seulement sur les **environnements de type ´pisodique** ;
(chaque trajectoire doit terminer)
 - **Beaucoup de variances**² ;

1. car le retour $G_t(\tau) = \sum_{t'=t}^T \gamma^{t'-t} r(s_{t'}, a_{t'}, s_{t'+1})$ est un estimateur non biais  de $V^\pi(s_t)$

2. car le retour $G_t(\tau)$ dépend d'une grande quantité de phénomènes aléatoires (probabilité de sélection d'action, probabilité de transition, probabilité de récompense)

Méthodes Monte-Carlo (Enjeux pratiques)

Convergence vers Q^* et π^* garantie sous l'**assumption** que :

- 1 le processus d'*『valuation de politique』* se fait sur une infinité d'épisodes ;
- 2 chaque couple état-action a été visité un nombre infini de fois dans la limite d'une infinité d'épisodes ;

➤_ En pratique | Méthode de Monté Carlo

Enjeux → contourner ses deux assumptions d'une façon qui permet de . . .

- 1 relaxer le prérequis d'avoir à générer une infinité de trajectoires ;
- 2 adresser le **dilemme exploration/exploitation** (assurer l'exploration suffisante de l'espace) ;

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

Algorithme Monte-Carlo avec départ exploratoire

Algorithme Monte-Carlo avec départ exploratoire [Monte-Carlo ES]

- Idées clés :**
- 1 Version *Monte-Carlo* de l'algorithme *Itération de politique* ;
 - 2 **Alterne épisode par épisode** entre * valuation et Amélioration de Politique* ;
 - 3   chaque épisode, considérer **exclusivement de la première visite** fait à un * tat-action* pour les calculs (*First-visit MC*)² ;
 - 4 **Choisir aléatoirement le point de départ** de chaque trajectoire échantillonnée ;
(départ exploratoire)

$$Q_k^\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Q^* \quad \text{et} \quad \pi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi^*$$

- Pro :**
- Adressé le *dilemme d'exploration/exploitation* en utilisant l'idée de **départ exploratoire** ;
 - Contourne le prérequis d'infinité d'épisode en acceptant le fait que chaque étape d'* valuation de politique* provoque un **plus petit déplacement** $Q_k \rightarrow Q_k^\pi$;
- Con :**
- La preuve formelle de convergence de *Monte-Carlo ES* est un problème ouvert.

2. Il existe également une version *Every-Visit MC* avec des propriétés théoriques légèrement différente

➡ Algorithme | Monte-Carlo avec *départ exploratoire*

$\forall s \in \mathcal{S}$, fixer arbitrairement la **politique courante** π_k tel que $\pi_0(s) = a \in \mathcal{A}(s)$

Répéter pour chaque trajectoire $\mathcal{T}^{(k=1,2,3,\dots)}$ jusqu'à convergence vers Q^* et π^* :

- ▶ Choisir (le point de départ) $s_0 \in \mathcal{S}$ et $a_0 \in \mathcal{A}(s_0)$ aléatoirement ;
- ▶ Générer une trajectoire en suivant $\pi_k(\cdot)$ jusqu'à terminaison ;

$$\mathcal{T}^{(k)} = s_0, a_0, r_1, s_1, a_1, r_2, \dots, s_t, a_t, r_{t+1}, \dots, s_{T-1}, a_{T-1}, r_T$$

Répéter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire $\mathcal{T}^{(k)}$:

Seulement si le couple (s_t, a_t) est une première visite (dans cette trajectoire) :

- 1 $\mathcal{G}(s, a) \leftarrow \mathcal{G}(s, a) \cup \{ G_t^{(k)} \}$
- 2 ** valuer la politique courante**

$$Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \leftarrow \frac{1}{|\mathcal{G}(s, a)|} \sum_{G_t \in \mathcal{G}(s, a)} G_t^{(\cdot)}$$

- 3 **Améliorer la politique courante**

$$\pi_{k+1}(s_t) \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s_t)} Q_{k+1}^\pi(s_t, a)$$

>_ Pseudocode | Monte-Carlo avec *départ exploratoire et moyenne incr mentale*¹

```

Init: foreach  $s \in \mathcal{S}$ ,  $a \in \mathcal{A}(s)$  do  $Q\text{-table}[s, a] \leftarrow 0$  and  $K\text{-table}[s, a] \leftarrow 0$ 
Init: foreach  $s \in \mathcal{S}$  do  $\pi\text{-table}[s] \leftarrow a \in \mathcal{A}(s)$  arbitrarily
Init: threshold hyperparam( $\epsilon$ ) > 0 ,  $\Delta \leftarrow 0$  ,  $\pi\text{-IsStable} \leftarrow \text{true}$                                 « Crit re d'arr t »

repeat
     $(s_0, a_0) \leftarrow \text{random.select}(s \in \mathcal{S})$ ,  $\text{random.select}(a \in \mathcal{A}(s))$ 
     $T \leftarrow \text{Generate trajectory following } \pi\text{-table}[s]$  from  $(s_0, a_0)$  to terminal state
     $G \leftarrow 0$ 
    foreach  $t \in T$  |  $t = T-1, T-2, \dots, 2, 1, 0$  do
         $G \leftarrow \gamma G + r_{t+1}$ 
        if  $(s_t, a_t)$  is not in  $T[0, t-1]$  then it's first-visit
             $Q\text{-table}_{old} \leftarrow Q\text{-table}$  ,  $a_{old} \leftarrow \pi\text{-table}[s_t]$                                 « pour la v rification de stabilit  »
            %.... t pe d' valuation de politique ...
             $K\text{-table}[s_t, a_t] \leftarrow K\text{-table}[s_t, a_t] + 1$ 
             $Q\text{-table}[s_t, a_t] \leftarrow Q\text{-table}_{old}[s_t, a_t] + 1/\text{len}(K\text{-table}[s_t, a_t]) \left[ G_t - \gamma Q\text{-table}_{old}[s_t, a_t] \right]$           « Backup operation »
            %.... t pe d'amélioration de politique ...
             $\pi\text{-table}[s_t] \leftarrow \arg \max_{a \in \mathcal{A}(s_t)} Q\text{-table}[s_t, a]$                                 « Backup operation »
            %.... t pe de v rification de stabilit  ...
             $\Delta \leftarrow \max(\Delta, |Q\text{-table}_{old}[s_t, a_t] - Q\text{-table}[s_t, a_t]|)$ 
            if  $a_{old} \neq \pi\text{-table}[s]$  then  $\pi\text{-IsStable} \leftarrow \text{false}$ 

until  $\Delta < \epsilon$  and  $\pi\text{-IsStable}$  for a arbitrary number of trajectories
Output:  $\pi^*(s) \approx \pi\text{-table}[s]$                                 «  $Q^\pi \xrightarrow{\approx} Q^*$  et  $\pi \xrightarrow{\approx} \pi^*$  »
                                « Produit une politique déterministe »

```

1. Pseudocode inspiré de « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 5.3, page 99 « Monte Carlo Control » par Sutton & Barto [2]

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

RL par Différence temporelle [TD]

Méthodes par Différence Temporelle

« Try something and learn from your mistakes as you go. »

Caractéristiques :

- **Int agit** avec l'environnement pour recueillir de l'information ;
- Collecte des ** chantillons** de trajectoire τ **partiels** ;
- « Bootstrap » comme avec les méthodes de *DP* ;
- Phase d'apprentissage **EN-ligne** ;
- Apprentissage **sans-modèle** ;
- Exploite la *propriété de Markov* ;

Idées clés : Apprendre **au fur et à mesure**, en se basant sur des ** chantillons d'interaction** avec l'environnement **et** sur l'**estimation courante** (« Bootstrap ») ;

Méthodes par Différence Temporelle (considération pratique)

« Update rule », forme générale (rappel)

$$\text{Estimate}^{\text{New}} \leftarrow \text{Estimate}^{\text{Old}} + \text{StepSize} \left[\underbrace{\text{Target} - \text{Estimate}^{\text{Old}}}_{\text{estimate ``error''}} \right]$$

➤_ En pratique | « Backup operation » pour les méthodes par Différence Temporelle

Idées clés : Donner plus de poids aux expériences récentes ;

Comment ? Calculer la moyenne pondérée des récompenses pass es³

Exemple (Algorithmes SARSA) :

$$Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[\underbrace{r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, a_{t+1})}_{\text{TD target}} - \underbrace{Q_k^\pi(s_t, a_t)}_{\text{TD error}} \right]$$

avec le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$, léchantillon $r_{t+1}^{(k)}$ et Q_k^π un estimateur du vrai Q .

3. Aussi appellé « Exponential recency-weighted average ». Voir [Complément théorique : Dérivation de la moyenne pondérée des récompenses passées](#)

Méthodes par Différence Temporelle (considération pratique)

« Update rule », forme générale (rappel)

$$\text{Estimate}^{\text{New}} \leftarrow \text{Estimate}^{\text{Old}} + \text{StepSize} \left[\underbrace{\text{Target} - \text{Estimate}^{\text{Old}}}_{\text{estimate ``error''}} \right]$$

➤_ En pratique | « Backup operation » pour les méthodes par Différence Temporelle

Idées clés : Donner plus de poids aux expériences récentes ;

Comment ? Calculer la moyenne pondérée des récompenses pass es³

Exemple (Algorithmes SARSA) :

$$Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \leftarrow Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[\underbrace{r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, a_{t+1})}_{\text{TD target}} - \underbrace{Q_k^\pi(s_t, a_t)}_{\text{TD error}} \right]$$

avec le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$, léchantillon $r_{t+1}^{(k)}$ et Q_k^π un estimateur du vrai Q .

3. Aussi appellé « Exponential recency-weighted average ». Voir [Complément théorique : Dérivation de la moyenne pondérée des récompenses passées](#)

Méthodes par Différence Temporelle (considération pratique)

« Update rule », forme générale (rappel)

$$\text{Estimate}^{\text{New}} \leftarrow \text{Estimate}^{\text{Old}} + \text{StepSize} \left[\underbrace{\text{Target} - \text{Estimate}^{\text{Old}}}_{\text{estimate "error"}} \right]$$

➤_ En pratique | « Backup operation » pour les méthodes par Différence Temporelle

Idées clés : Donner plus de poids aux expériences récentes ;

Comment ? Calculer la moyenne pondérée des récompenses pass es³

Exemple (Algorithm SARSA) :

$$Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \alpha \left[\underbrace{r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_{t+1}^{(k)}, \mathbf{a}_{t+1})}_{\text{TD target}} - \underbrace{Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t)}_{\text{TD error}} \right]$$

avec le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$, léchantillon $r_{t+1}^{(k)}$ et Q_k^{π} un estimer du vrai Q .

3. Aussi appellé « Exponential recency-weighted average ». Voir [Complément théorique : Dérivation de la moyenne pondérée des récompenses passées](#)

Méthodes par Différence Temporelle (considération pratique)

Learning rate $\alpha \in]0, 1]$

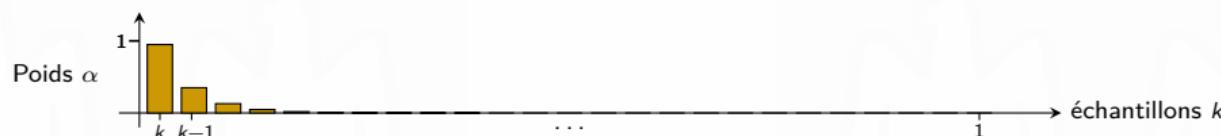
$$Q_{k+1}^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \leftarrow Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_{t+1}^{(k)}, \mathbf{a}_{t+1}) - Q_k^{\pi}(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \right]$$

Exemple avec $\alpha = 0.1$: « Lointain passé, passé ressent, présent ... c'est tout aussi important ! »



$$Q_6 = 0.1 \cdot (r^{(5)} + \gamma Q'_5) + 0.09 \cdot (r^{(4)} + \gamma Q'_4) + 0.081 \cdot (r^{(3)} + \gamma Q'_3) + 0.07289 \cdot (r^{(2)} + \gamma Q'_2) + 0.0656 \cdot (r^{(1)} + \gamma Q'_1) + 0.59045 \cdot Q_1$$

Exemple avec $\alpha = 0.95$: « C'est aujourd'hui qui est important parce qu'avant ... j'étais dans le champ ! »



$$Q_6 = 0.95 \cdot (r^{(5)} + \gamma Q'_5) + 0.0475 \cdot (r^{(4)} + \gamma Q'_4) + 0.00235 \cdot (r^{(3)} + \gamma Q'_3) + 0.0001 \cdot (r^{(2)} + \gamma Q'_2) + 0.0 \cdot (r^{(1)} + \gamma Q'_1) + 0.0 \cdot Q_1$$

Méthodes par Différence Temporelle

- 👍 Pro :
- Pas besoin de modèle ;
 - Peu apprendre **au fur et à mesure** \Rightarrow est un avantage lorsque les trajectoires sont longues à exécuter ;
 - Peu apprendre **de trajectoire incomplète** \Rightarrow est un avantage lorsqu'on n'a pas de garantie que les trajectoires terminent à coup sûr ;
 - **Peu de variances**¹ ;

- 👎 Con :
- **Légèrement biaisé**² ;
 - Les valeurs prises lors de l'initialisation peuvent avoir une incidence sur le résultat de l'apprentissage ;

1. car le « TD target » $r(s_t, a_t, s_{t+1}) + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1})$ dépend de phénomène aléatoire sur un seul « step » (sélection d'action, transition, récompense)

2. car le « TD target » $r(s_t, a_t, s_{t+1}) + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1})$ est un estimé biaisée du vrai $Q^\pi(s_t, a_t)$

Apprentissage par renforcement (sans modèle)

Q-learning (tabulaire)

Q-learning (tabulaire) [Tabular Q-learning]

- Idées clés :**
- C'est une **approximation stochastique** de l'algorithme **Itération de Q-valeur** ;
 - Apprentissage **OFF-policy** \Rightarrow la politique π qui est apprise est indépendante de la politique μ suivie 脿 l'échantillonnage ;

$$Q_k^\pi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Q^* \quad \text{et} \quad \pi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi^*$$

- Pro :**
- Converge vers Q^* même si l'algorithme agit de façon sous-optimale 脿 l'échantillonnage
 \Rightarrow l'algorithme converge 脡ventuellement, **peu importe le choix d'actions** ;
- Con :**
- La convergence vers Q^* dépend d'une **exploration suffisante** de l'espace $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$
 \Rightarrow une stratégie exploratoire adéquate compte tenu de l'environnement est déterminante ;

➡ Algorithme | Q-Learning (tabulaire)

Soit $\mu(\cdot|s_t)$, une politique exploratoire de votre choix, (ex. : aléatoirement, « greedy », « ϵ -greedy », . . .) la politique cible $\pi(\cdot|s)$, le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$ et le « global step » $k \leftarrow 0$

R  p ter pour chaque trajectoire τ jusqu'à convergence vers π^* :

R  p ter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire τ :

- 1 $r_{t+1}^{(k)}, s_{t+1}^{(k)}$ \longleftarrow ex  cuter $a_t \sim \mu(\cdot|s_t)$ dans l'environnement et observer la r  action ;
- 2 $\pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})$ \longleftarrow $\arg \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k(s_{t+1}^{(k)}, a');$
- 3 $Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t)$ \longleftarrow $Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, \pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})) - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$
- 4 $k \leftarrow k + 1$

➤_ En pratique | Q-Learning (tabulaire)

On fait d  croître tranquillement le « learning rate » α en suivant une s  quence telle que

$$\{ \alpha_k \mid (\forall k \in [1, 2, \dots] \mid 0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \leq 1) \}$$

➡ Algorithme | Q-Learning (tabulaire)

Soit $\mu(\cdot|s_t)$, une politique exploratoire de votre choix, (ex. : aléatoirement, « greedy », « ϵ -greedy », . . .) la politique cible $\pi(\cdot|s)$, le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$ et le « global step » $k \leftarrow 0$

R  p ter pour chaque trajectoire τ jusqu'à convergence vers π^* :

R  p ter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire τ :

- 1 $r_{t+1}^{(k)}, s_{t+1}^{(k)}$ \longleftarrow ex  cuter $a_t \sim \mu(\cdot|s_t)$ dans l'environnement et observer la r  action ;
- 2 $\pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})$ \longleftarrow $\arg \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k(s_{t+1}^{(k)}, a');$
- 3 $Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t)$ \longleftarrow $Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, \pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})) - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$
- 4 $k \leftarrow k + 1$

➤_ En pratique | Q-Learning (tabulaire)

On fait d  croître tranquillement le « learning rate » α en suivant une s  quence telle que

$$\{ \alpha_k \mid (\forall k \in [1, 2, \dots] \mid 0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \leq 1) \}$$

➡ Algorithme | Q-Learning (tabulaire)

Soit $\mu(\cdot|s_t)$, une politique exploratoire de votre choix, (ex. : aléatoirement, « greedy », « ϵ -greedy », . . .) la politique cible $\pi(\cdot|s)$, le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$ et le « global step » $k \leftarrow 0$

R  p  ter pour chaque trajectoire τ jusqu'à **convergence** vers π^* :

R  p  ter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire τ :

- 1 $r_{t+1}^{(k)}, s_{t+1}^{(k)}$ \leftarrow ex  cuter $a_t \sim \mu(\cdot|s_t)$ dans l'environnement et observer la r  action ;
- 2 $\pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})$ \leftarrow $\arg \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k(s_{t+1}^{(k)}, a');$
- 3 $Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t)$ \leftarrow $Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, \pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})) - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$
- 4 $k \leftarrow k + 1$

➤_ En pratique | Q-Learning (tabulaire)

On fait **d  croire tranquillement** le « learning rate » α en suivant une s  quence telle que

$$\{ \alpha_k \mid (\forall k \in [1, 2, \dots] \mid 0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \leq 1) \}$$

➡ Algorithme | Q-Learning (tabulaire)

Soit $\mu(\cdot|s_t)$, une politique exploratoire de votre choix, (ex. : aléatoirement, « greedy », « ϵ -greedy », . . .) la **politique cible** $\pi(\cdot|s)$, le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$ et le « global step » $k \leftarrow 0$

R  p ter pour chaque trajectoire τ jusqu'à **convergence** vers π^* :

R  p ter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire τ :

- 1 $r_{t+1}^{(k)}, s_{t+1}^{(k)} \quad \longleftarrow \quad$ ex  cuter $a_t \sim \mu(\cdot|s_t)$ dans l'environnement et observer la r  action ;
- 2 $\pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)}) \quad \longleftarrow \quad \arg \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k(s_{t+1}^{(k)}, a');$
- 3 $Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \quad \longleftarrow \quad Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, \pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)})) - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$
- 4 $k \leftarrow k + 1$

➤_ En pratique | Q-Learning (tabulaire)

On fait **d  croire tranquillement** le « learning rate » α en suivant une s  quence telle que

$$\{ \alpha_k \mid (\forall k \in [1, 2, \dots] \mid 0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \leq 1) \}$$

➡ Algorithme | Q-Learning (tabulaire)

Soit $\mu(\cdot|s_t)$, une politique exploratoire de votre choix, (ex. : aléatoirement, « greedy », « ϵ -greedy », ...) la politique cible $\pi(\cdot|s)$, le « learning rate » $\alpha \in]0, 1]$ et le « global step » $k \leftarrow 0$

R  p  ter pour chaque trajectoire τ jusqu'à **convergence** vers π^* :

R  p  ter pour chaque « timestep » $t = 0, 1, 2, \dots, t, t+1, \dots, T$ de la trajectoire τ :

- 1 $r_{t+1}^{(k)}, s_{t+1}^{(k)} \quad \longleftarrow \quad$ ex  cuter $a_t \sim \mu(\cdot|s_t)$ dans l'environnement et observer la r  action ;
- 2 $\pi(\cdot|s_{t+1}^{(k)}) \quad \longleftarrow \quad \arg \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k(s_{t+1}^{(k)}, a') ; \quad \langle \text{ substitution : « the max trick » } \rangle$
- 3 $Q_{k+1}^\pi(s_t, a_t) \quad \longleftarrow \quad Q_k^\pi(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1}^{(k)} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}(s_{t+1})} Q_k^\pi(s_{t+1}^{(k)}, a') - Q_k^\pi(s_t, a_t) \right]$
- 4 $k \leftarrow k + 1$

➤_ En pratique | Q-Learning (tabulaire)

On fait **d  croire tranquillement** le « learning rate » α en suivant une s  quence telle que

$$\{ \alpha_k \mid (\forall k \in [1, 2, \dots] \mid 0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \leq 1) \}$$

Q-learning

Exemple interactif

Q-learning dans l'environnement GridWorld

Vous pouvez aussi changer l'algorithme pour SARSA dans les paramètres.

► Exemple interactif



Image : REINFORCEjs, Stanford

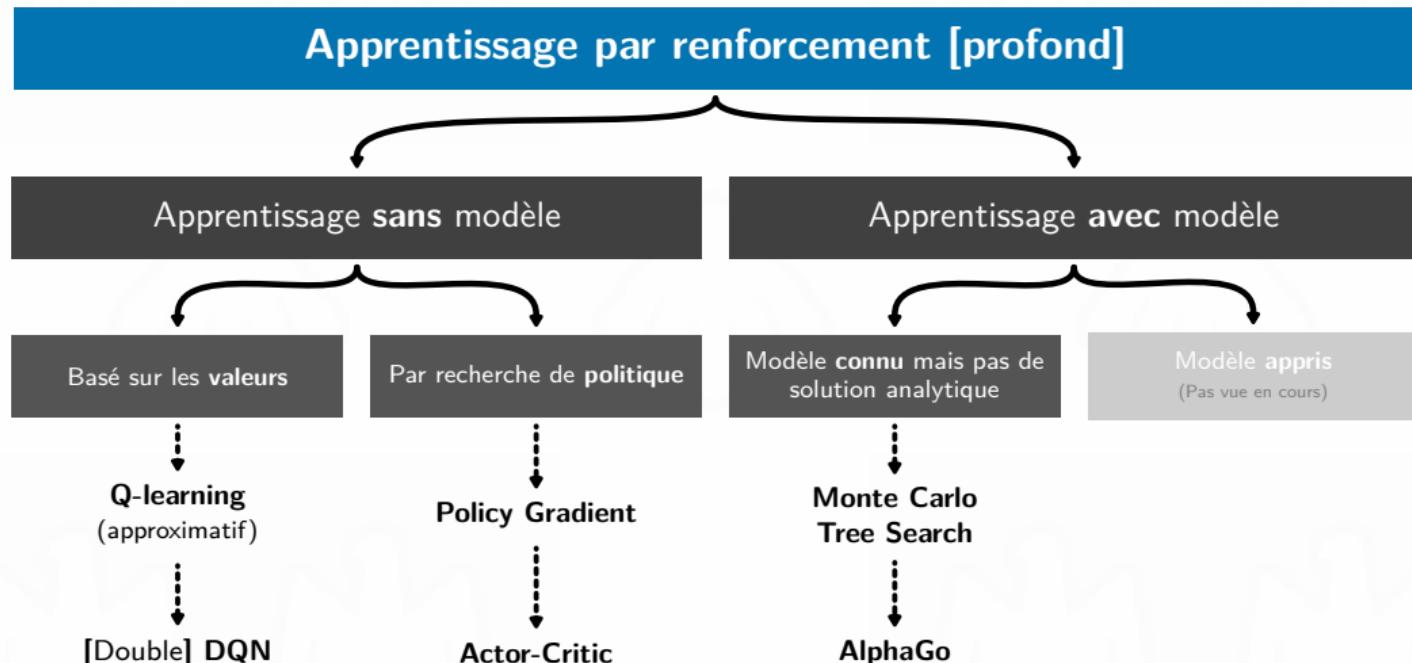
■ REINFORCEjs

► Projet

► GitHub

Prochaine partie

Prochaine partie



Pour aller plus loin

1 Concept clé en RL

2 Paysage algorithmique de l'apprentissage par renforcement

3 Modèle connu **et** parfait \Rightarrow pas d'apprentissage requis

4 Apprentissage par renforcement (sans modèle)

5 Pour aller plus loin

- Complément théorique
- Ressource théorique
- Références

Pour aller plus loin

Complément théorique

Méthode par Différence Temporelle

Dérivation de la moyenne pondérée des récompenses passées :

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}(s_t, a_t) &= Q_k(s_t, a_t) + \frac{1}{k} \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k(s_t, a_t) \right] \\
 &= Q_k(s_t, a_t) + \alpha \left[G_t^{(k)}(\tau) - Q_k(s_t, a_t) \right] \\
 &\quad \left\langle \text{ avec } G_t^{(k)}(\tau) \approx r^{(k)}(s_t, a_t, s_{t+1}) + Q_k(s_{t+1}, a_{t+1}) \right\rangle \\
 &= Q_k(s_t, a_t) + \alpha \left[r^{(k)}(s_t, a_t, s_{t+1}) + Q_k(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_k(s_t, a_t) \right] \\
 &= \alpha \left(r^{(k)}(s_t, a_t, s_{t+1}) + Q_k(s_{t+1}, a_{t+1}) \right) + (1 - \alpha)Q_k(s_t, a_t) \\
 &= \alpha \left(r^{(k)} + Q'_k \right) + (1 - \alpha)Q_k \\
 &= \alpha \left(r^{(k)} + Q'_k \right) + (1 - \alpha) \left[\alpha \left(r^{(k-1)} + Q'_{k-1} \right) + (1 - \alpha)Q_{k-1} \right] \\
 &= \alpha \left(r^{(k)} + Q'_k \right) + (1 - \alpha)\alpha \left(r^{(k-1)} + Q'_{k-1} \right) + (1 - \alpha)^2 Q_{k-1} \\
 &= \alpha \left(r^{(k)} + Q'_k \right) + (1 - \alpha)\alpha \left(r^{(k-1)} + Q'_{k-1} \right) + (1 - \alpha)^2 \left(r^{(k-2)} + Q'_{k-2} \right) + \\
 &\quad \cdots + (1 - \alpha)^{k-1} \alpha \left(r^{(1)} + Q'_1 \right) + (1 - \alpha)^k Q_1 \\
 &= (1 - \alpha)^k Q_1 + \sum_{i=1}^k \alpha(1 - \alpha)^{k-i} \left(r^{(i)} + Q'_i \right)
 \end{aligned}$$

$\left\langle \text{ avec } Q_1 \text{ l'estimé initial de } Q^\pi \right\rangle$

Pour aller plus loin

Ressource théorique

Programmation dynamique

- « Dynamic Programming and Optimal Control », Vol. 1 et 2, 4e Edition
par Dimitri P. Bertsekas

Abstract : ... oriented towards modelling, conceptualization, finite-horizon problems, ... mathematical analysis and computation, treats infinite horizon problems extensively, and provides an up-to-date account of approximate large-scale dynamic programming and reinforcement learning ...;

- « Reinforcement Learning : An introduction », chapitre 4 [2]
par Sutton & Barto

Algorithme : *『Evaluation de politique, Am lioration de politique, Itération de V-valeur, Itération de politique et Itération de politique g n ralis  (GPI)』;*

Différence temporel [Temporal Difference (TD)]

- « The Paths Perspective on Value Learning », Distill, 2019 [3]
par Greydanus & Olah

Algorithme : *Sarsa, Expected Sarsa, Q-learning et Double Q-learning* ;

Abstract : A closer look at how Temporal Difference learning merges paths of experience for greater statistical efficiency ;

Pour aller plus loin

Références

References I

1. BARTO, A. G. Reinforcement Learning and Dynamic Programming. *IFAC Proceedings Volumes* **28**, 407-412. ISSN : 14746670 (1995).
2. SUTTON, R. S. & BARTO, A. G. *Reinforcement learning: An introduction*. 2^e ´ed. ( d. MIT PRESS) ISBN : 978-0262039246. <http://incompleteideas.net/book/RLbook2018.pdf> (Cambridge, MA, 2018).
3. GREYDANUS, S. & OLAH, C. The Paths Perspective on Value Learning. *Distill* **4**. <https://distill.pub/2019/paths-perspective-on-value-learning> (2019).