

# Apprentissage par renforcement appliqué

## Notions fondamentales

[revision 3.2]

Brahim Chaib-draa

Brahim.Chaib-Draa@ift.ulaval.ca



Université Laval

2020-05-29

- 1** Vue d'ensemble
- 2** Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement
- 3** L'univers du point de vue de l'agent
- 4** Pour aller plus loin

## **Vue d'ensemble**

---

## **1** Vue d'ensemble

- Le paradigme d'apprentissage par renforcement
- Environnement : l'univers de l'agent

## **2** Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement

## **3** L'univers du point de vue de l'agent

## **4** Pour aller plus loin

## **Vue d'ensemble**

---

### **Le paradigme d'apprentissage par renforcement**

# Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

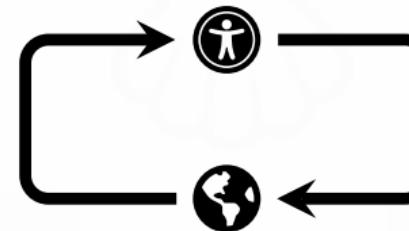
- ❶ – Un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ❷ – Un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.-à-d. un signal de récompense 🎉 ou 🙅
- ❸ – Un **but** (pour l'agent) : l'état final à atteindre



# Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

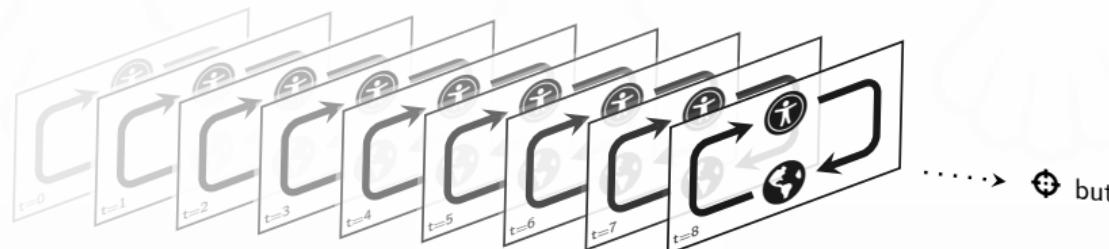
- ❶ – Un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- ❷ – Un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.- -d. un signal de **récompense** 🎊 ou 🚫
- ❸ – Un **but** (pour l'agent) : l'état final éteindre



# Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

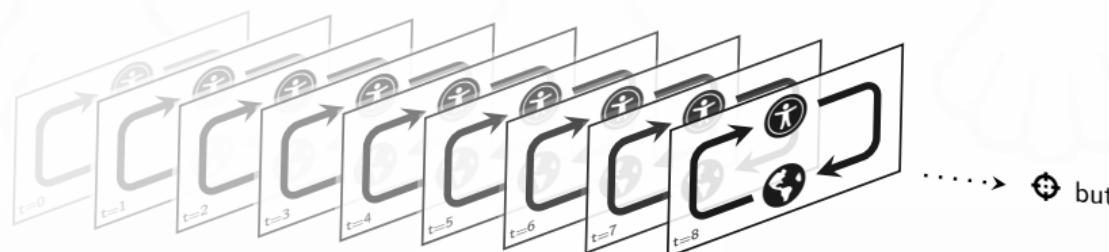
- Un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- Un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.- -d. un signal de **récompense** 🎊 ou 🙅
- Un **but** (pour l'agent) : l'état final à atteindre



# Qu'est-ce que l'apprentissage par renforcement ?

De façon informelle :

- Un **agent** : une entité qui **observe, prend des décisions, agit et apprend de ses actions**
- Un **environnement** : l'univers où l'agent existe. Pour chaque action prise par l'agent, l'univers **renvoie une rétroaction** 🎉, c.- -d. un signal de **récompense** 🎊 ou 🙅
- Un **but** (pour l'agent) : l'état final à atteindre



## ★ – L'objectif (informel) de l'apprentissage par renforcement :

Que l'**agent** trouve par lui-même la **meilleure stratégie** (une **politique optimale**) pour atteindre ce **but** en se basant uniquement sur les **récompenses**.

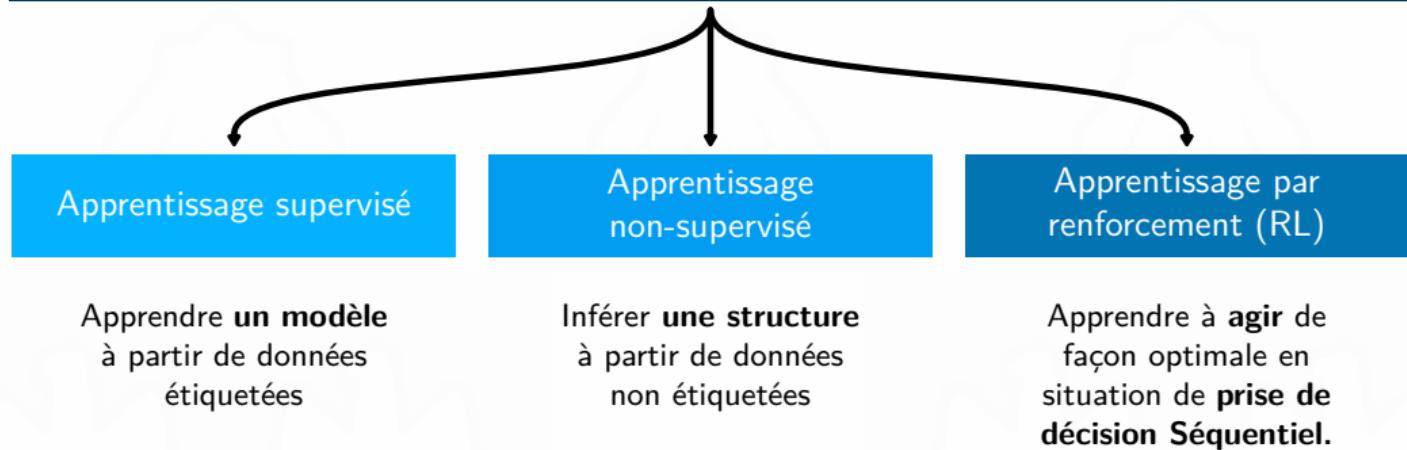
Apprentissage machine  
(ML)

Problème de Décision Séquentiel  
(PDS)

Apprentissage par renforcement (RL)

# Situer l'apprentissage par renforcement par rapport aux autres paradigmes d'apprentissage machine

## L'apprentissage machine (ML)



# En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
- Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
  - 1 Sauter hors de l'avion
  - 2 compter jusqu'à 10
  - 3 😊 ... ensuite mettre son parachute !
- Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,  
ex : Arroser des semences de plan de tomate → des belles tomates mûres en santé
- ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,  
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaannge !!
- Problème** : Comment savoir si une récompense  $r$  est causée par l'action  $a$  ?

# En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
  - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
    - 1 Sauter hors de l'avion
    - 2 compter jusqu'à 10
    - 3 ... ensuite mettre son parachute !
  - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,  
ex : Arroser des semences de plan de tomate  $\mapsto$  des belles tomates mûres en santé
  - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,  
ex : J'ensemence des plants de tomate  $\rightarrow$  Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaannge !!
- Problème :** Comment savoir si une récompense  $r$  est causée par l'action  $a$  ?

# En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
  - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
    - 1 Sauter hors de l'avion
    - 2 compter jusqu'à 10
    - 3 ... ensuite mettre son parachute !
  - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,  
ex : Arroser des semences de plan de tomate → des belles tomates mûre en santé
  - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,  
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaannge !!
- Problème :** Comment savoir si une récompense  $r$  est causée par l'action  $a$  ?

# En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
  - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
    - 1 Sauter hors de l'avion
    - 2 compter jusqu'à 10
    - 3 ... ensuite mettre son parachute !
  - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,  
ex : Arroser des semences de plan de tomate → des belles tomates mûre en santé
  - ⚠ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,  
ex : J'ensemence des plants de tomate → Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaanne !
- Problème :** Comment savoir si une récompense  $r$  est causée par l'action  $a$  ?

**En quoi l'apprentissage par renforcement est différent des autres paradigmes ?**

- **Pas d'étiquette**, juste des **observations** et un signal de **récompense**
  - Les données sont **séquentielles** et **ordonnées** (leur ordre fait une différence),
    - 1 Sauter hors de l'avion
    - 2 compter jusqu'à 10
    - 3 ... ensuite mettre son parachute !
  - Les récompenses sont **dépendantes des actions** exécutées,  
ex : Arroser des semences de plan de tomate → des belles tomates mûres en santé
  - ▲ Les conséquences d'une action ne sont pas nécessairement immédiates,  
ex : J'ensemence des plants de tomate ↫ Yééé !! Les tomates sont mûres ... on maaaannge !!

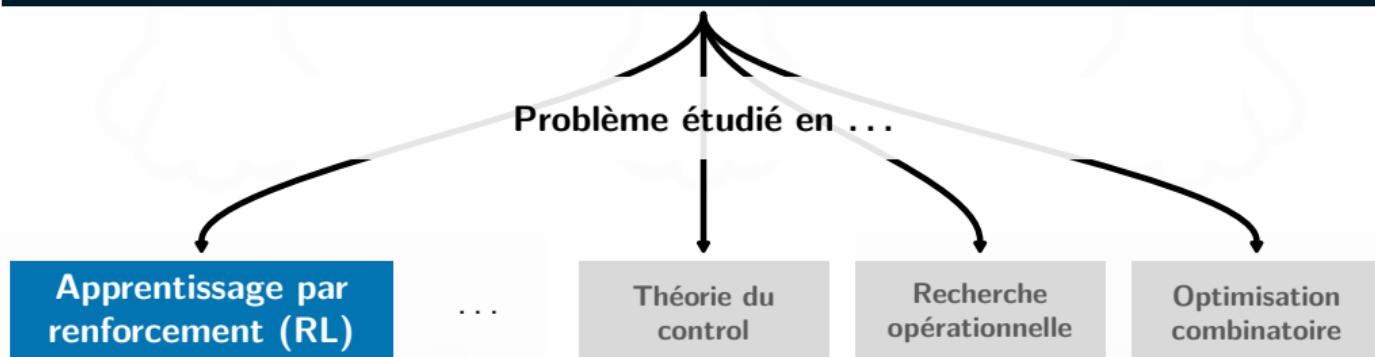
#### **Idée clé à retenir :**

En RL, les données ne sont pas *indépendantes* et *identiquement distribuées*.

(contrairement à l'assumption qu'on fait en apprentissage profond)

# Situer le RL par rapport aux autres approches de résolution de Problème de Décision Séquentiel

## Problème de Décision Séquentiel (PDS)



# En quoi l'apprentissage par renforcement se distingue-t-il des autres approches ?

## Cas où l'approche RL se distingue :

- 1 Aucun **modèle** de l'environnement n'existe et la seule façon de **recueillir de l'information** sur l'environnement est **par interaction** avec celui-ci ;
- 2 Un **modèle** de l'environnement est disponible, mais il est **incomplet et/ou inexact** ;
- 3 Un **modèle** de l'environnement est disponible, mais il n'existe **pas de solution analytique** ;

## Composante clé du RL

- Echantillonnage et Optimization ;
- Utilisation d'approximateur de fonction ;

 – Un **modèle de l'environnement** : C'est la représentation abstraite que l'agent possède du comportement de l'univers  
Ex. : les règles de la physique , les règles d'un jeu  

# Situer le RL par rapport aux autres approches de résolution de Problème de Décision Séquentiel

## Problème de Décision Séquentiel (PDS)

Pas de modèle de l'environnement  
(ou modèle imparfait)  
**et/ou**  
pas de solution analytique.

Un modèle exact  
de l'environnement est disponible  
**et**  
une solution analytique existe.

Apprentissage par  
renforcement (RL)

Théorie du  
contrôle

Recherche  
opérationnelle

Optimisation  
combinatoire

...

## **Vue d'ensemble**

---

**Environnement : l'univers de l'agent**

- **Simulateur** : Simulateur de physique, jeux vidéo, ...
  - **Robotique** : Pilotage d'aéronef, manipulation d'un bras robot, ...
  - **Ressource réelle** : Calculateur en grappe (*cluster*), système de contrôle industriel ...
- ⋮

## Exemple d'environnement : simulateur

**Simulateur de physique** pour l'étude de la locomotion :

TerrainRL Simulator [1]

▶ Publication

▶ Projet

▶ GitHub

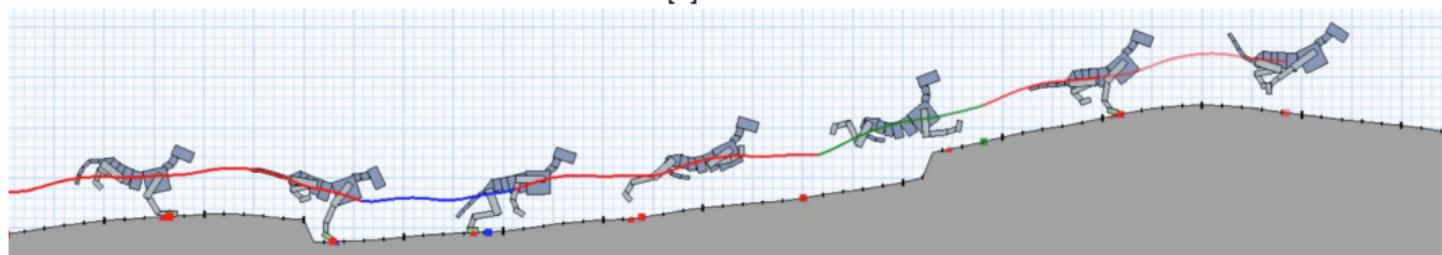


Image : University of British Columbia & UC Berkley

▶ Vidéo

- *Terrain-Adaptive Locomotion Skills Using Deep Reinforcement Learning (MACE, 2016) [2]*

▶ Publication

# Exemple d'environnement : simulateur

L'environnement de recherche basée la suite de jeux Atari de OpenAI Gym

▶ OpenAI - Atari



Image : OpenAI

- *Playing Atari with Deep Reinforcement Learning (DQN, 2013) [3]* ▶ Vidéo
- *Human-level control through deep reinforcement learning (Publication dans la revue Nature) [4]* ▶ GitHub

# Exemple d'environnement : simulateur

L'environnement de recherche PySC2 par Deepmind basée le jeu StarCraft II de *Blizzard Entertainment*.

[▶ PySC2 GitHub](#)

[▶ Vidéo: PySC2 feature layer API](#)

[▶ StarCraft II](#)

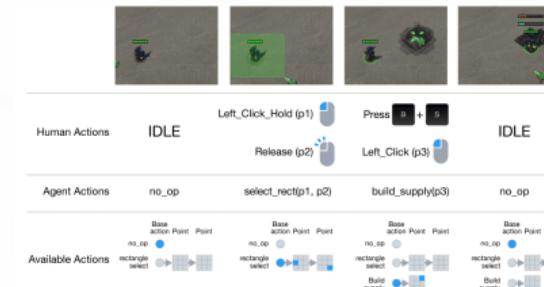


Image : DeepMind

- Deepmind and blizzard open starcraft II ai research environment [▶ Publication](#)
- StarCraft II : A New Challenge for Reinforcement Learning [5] [▶ Publication](#)
- Mastering the Real-Time Strategy Game StarCraft II (AlphaStar, 2019) [▶ Publication](#)
- DeepMind AlphaStar : The inside story [▶ Vid o \(5 min\)](#)

## Exemple d'environnement : robotique

Pilotage autonome d'a閞onef :

*Stanford University autonomous helicopter*

▶ Projet



Image : Stanford Autonomous Helicopter

▶ Vid o

- *An Application of Reinforcement Learning to Aerobatic Helicopter Flight (LQR, 2006) [6]*

# Exemple d'environnement : robotique

**Automatisation de chaine logistique** : flexible et r siliente face aux changements

Covariant

► Covariant.ai / Use cases

► Covariant.ai / Research



► Vid o (3:38 min)



► Vid o (9 min)

Image : covariant.ai

- *AI Helps Warehouse Robots Pick Up New Tricks (WIRED)* ► Magazine
- *AI-powered robot warehouse pickers are now ready to go to work (MIT Technology Review)* ► Magazine
- *Covariant, ABB partner to integrate AI and robots for warehouses (The Robot Report)* ► Magazine

# Exemple d'environnement : ressources industrielles

## Problème de gestion des ressources :

- Gestion des tâches dans un calculateur en grappe (*computer cluster*) :

*Resource Management with Deep Reinforcement Learning* (DeepRM, 2016) [7] [▶ Publication](#)

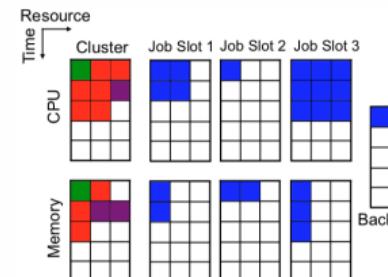


Image : Publication *Resource Management with Deep Reinforcement Learning*, MIT & Microsoft Research

- Gestion de la température d'un m gacentre de données :

*DeepMind AI Reduces Google Data Centre Cooling Bill by 40%* [▶ Publication](#)

# Particularité des différents types d'environnements

## Problèmes et enjeux

### Simulateur :

- oblige une planification à long terme (délais d'observation de cause à effet) ;
- oblige une stratégie efficace d'exploration/exploitation ;
- espace d' tats/d'observation est en haute dimension ;
- temps réel (Atari, Starcraft, Dota 2) ;
- information est imparfaite (Atari, Starcraft, Dota 2) ;
- espace d'action est en haute dimension (Starcraft, Dota 2) ;
- coopération multi agent (Dota 2) ;

### Robotique :

- l'espace d'action et d'observation est continu ;
- temps réel ;
- information est imparfaite(l'univers étant observé au moyen de senseurs qui sont limités/bruit ) ;

## **Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement**

---

## 1 Vue d'ensemble

## 2 Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement

- Le langage des Processus de Décision de Markov (MDP)
- Terminologie et notation en RL
- Interaction agent-environnement

## 3 L'univers du point de vue de l'agent

## 4 Pour aller plus loin

**Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement**

---

**Le langage des Processus de Décision de Markov (MDP)**

## Pourquoi utiliser les MDP ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de Problème de Décision Séquentiel **en contexte d'incertitude**.
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitelement ou implicitement** un MDP.
- *Markovien ?*

## Pourquoi utiliser les MDP ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de Problème de Décision Séquentiel **en contexte d'incertitude**.
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitelement ou implicitement** un MDP.
- ***Markovien ?***

# Pourquoi utiliser les MDP ?

- C'est un **formalisme mathématique** pour l'étude de Problème de Décision Séquentiel **en contexte d'incertitude**.
- C'est l'outil dont on se sert en RL pour définir le problème
- Règle générale, on va chercher à résoudre **explicitelement ou implicitement** un MDP.
- **Markovien** ? Pour un processus de décision, cela signifie que **l'environnement est entièrement caractérisé par l'état présent**  $\Rightarrow$  l'historique n'apporte aucune information supplémentaire.

## Propriété de Markov

« *Le futur est indépendant du passé étant donné le présent* »

$$p(s_{t+1}|s_t, a_t) = p(s_{t+1}|s_1, a_1, \dots, s_t, a_t)$$

Un MDP est défini par un tuple,  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A}, r, p, s_0 \rangle$  tel que :

- $\mathcal{S}$  est l'ensemble des **『tats』 valides**
- $\mathcal{A}$  est l'ensemble des **actions** valides
- $r(s, a, s')$  spécifie la fonction de **récompense**
- $p(s'|s, a)$  spécifie le **modèle** du système
- $s_0$  est l'**『tat initiale** du système

$$s \in \mathcal{S} \quad \text{Notation explicite : } s \in \mathcal{S}_t$$

$$a \in \mathcal{A} \quad \text{Notation explicite : } a \in \mathcal{A}(s) \text{ ou } a \in \mathcal{A}_t$$

$$r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{P}$$



## Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement

---

### Terminologie et notation en RL

# Notation

Convention dans le cadre du cours :

Terme **notation** [Terme anglophone<sup>1</sup> , Terme alternatif<sup>2</sup> , ... ]

exemple : Trajectoire  $\tau$  [Trajectory, Episode, Rollout]

**Note au lecteur :** Soyez avis  que la littérature en *apprentissage par renforcement* est riche, diverse et influencée par de multiples domaines d'expertise : mathématiques, théorie du contrôle, recherche opérationnelle, statistique, science informatique, robotique, neuroscience ...

**Il n'existe pas de notations unifiées** en *RL*   l'heure actuelle et **la terminologie** utilisée pour nommer un même concept **peut varier d'un auteur à l'autre**.

**Recommandation :**

- vérifier comment l'auteur définit la notation pour l'article que vous consultez ;
- portez attention au contexte d'utilisation ;

---

1. La grande majorité de la littérature en *RL* est anglophone

2. Une précision sera apportée lorsque la nuance entre deux termes est un détail important étant donné le contexte d'utilisation.

# Notation

## Convention relativement à la typographie

$c$  est un scalaire

$C$  est un vecteur aléatoires (est souvent omise dans la littérature afin de simplifier la formulation)

$\mathbf{c}$  est la réalisation d'un vecteur aléatoires

$\mathcal{C}$  est un espace de probabilité (l'ensemble des valeurs possibles d'une variable aléatoires)

- Temps  $t$  [*Time step*] et Horizon  $T$  [*Time horizon*]
-  tat  $s_t$  [*State*] vs Observation  $\mathbf{o}_t$  [*Observation*]
- Action  $\mathbf{a}_t$  [*Action*] et Politique  $\pi_\theta(s_t|\mathbf{a}_t)$  [*Policy*]
- Trajectoire  $\tau$  [*Trajectory, Episode, Rollout*]
- Modèle  $p(s'|s, \mathbf{a})$  [*Model, Transition function, System dynamic, Dynamic*]
- R ecompense  $r_t$  [*Reward*] et Retour  $G_t$  [*Return*]
- L'objectif  $\pi_\theta^*$  en RL [*RL Objective*]

# Temps et horizon

## Temps $t$ [Time step]

- Peut-être discret ou continu<sup>1</sup>
- N'est pas nécessairement temporel. Ex. : une machine t at

## Horizon $T$ [Time horizon]

- Le dernier temps  $t$  d'une séquence,  
Par exemple pour une séquence d'action  $a_t$   
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_T$$
- Peut-être fini ou infinie<sup>2</sup>

1. Voir note de bas de page 2, page 48 de Reinforcement Learning : An introduction [8]

2. Pour le cas horizon-infini  $T = \infty$ , voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour G sur un horizon infini](#)

# Observation vs tat

**Observation**<sup>1</sup>  $\mathbf{o}_t \in \mathcal{O}$  [Observation]

- L'espace d'état  $\mathcal{O}$  est l'ensemble des tats observables  $\mathbf{o}$  possibles d'un environnement.
- $\mathbf{o}$  représente **une partie de l'information disponible** sur l'environnement.

$$\odot \subseteq \odot \rightarrow \mathbf{o}_t$$

**tat**  $\mathbf{s}_t \in \mathcal{S}$  [State]

- L'espace d'état  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des tats  $\mathbf{s}$  possibles d'un environnement.
- $\mathbf{s}$  représente **la totalité des informations disponibles** sur l'environnement.

$$\odot = \odot \rightarrow \mathbf{s}_t$$

Si  $\mathbf{s}_t = \mathbf{o}_t$  alors on dit que l'environnement est **compl tement** observé.

Si  $\mathbf{s}_t \supset \mathbf{o}_t$  alors on dit que l'environnement est **partiellement** observé.

1. Mise en garde sur la notation :  $\mathbf{s}_t$  est souvent employé dans la littérature pour noter un état partiellement observé au lieu de  $\mathbf{o}_t$  alors qu'il serait techniquement plus juste d'utiliser  $\mathbf{s}_t$ . Porter une attention particulière au contexte d'utilisation. 

# Action et Politique

## Action $a_t \in \mathcal{A}$ [Action]

- L'espace d'action  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des actions  $a$  valides d'un environnement.
- L'espace d'action peut-être :
  - 1 discret** ex. : choix d'action du jeu pacman (, , , )
  - 2 continu** ex. : commande de direction et de profondeur d'un avion

## Politique $\pi_\theta(s_t|a_t)$ [Policy]

- C'est une stratégie, une façon d'agir qui indique quelle action  $a_t$  prendre en fonction du contexte (l'état  $s_t$ ) Ex : « le client a toujours raison », « la meilleure défensive c'est l'offensive », ...
-  t chaque temps  $t$ , la politique  $\pi_\theta$  est utilisée pour sélectionner l'action  $a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)$

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{S} &\longrightarrow [0, 1] \\ (\mathbf{a}, \mathbf{s}) &\longmapsto \pi_\theta(\mathbf{a}_t | \mathbf{s}_t) \quad \doteq \quad \mathbb{P}[A_t = \mathbf{a} | S_t = \mathbf{s}; \theta]\end{aligned}$$

où  $\theta$  est un vecteur de paramètre.

# Trajectoire

## Trajectoire $\tau$ [Trajectory, Episode, Rollout]

- C'est une séquence complète d' tats  $s$  et d'actions  $a$  jusqu'à terminaison, peu importe l'issue.

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

**Notation : Distribution de probabilité de la trajectoire  $\tau$  induite par la politique  $\pi_\theta$  ( $\tau \sim \pi_\theta$ )**

$$\tau \sim \pi_\theta \implies s_1 \sim p(\cdot) \quad a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t) \quad s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)$$

$$\pi_\theta(\tau) = \pi_\theta(s_1, a_1, \dots, s_T, a_T) = p(s_1) \prod_{t=1}^T \pi_\theta(a_t | s_t) p(s_{t+1} | s_t, a_t)$$

# Modèle

**Modèle  $p(s'|s, a)$**  [Model  $p$ , Transition function  $T$ , System dynamic, Dynamic]

- Ce sont les règles qui gouvernent l'environnement.  
Ex. : les règles de la physique , les règles d'un jeu  , ...
- Dans le contexte du **RL sans-modèle**, puisque le modèle est inconnu, alors celui-ci est **modéliser comme une distribution de probabilité** qui satisfait la propriété de Markov

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(s', r | s, a) \longmapsto p(s', r | s, a) \doteq \mathbb{P}[S_{t+1} = s', R_{t+1} = r | S_t = s, A_t = a]$$

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(s', s, a) \longmapsto p(s' | s, a) \doteq \mathbb{P}[S_{t+1} = s' | S_t = s, A_t = a]$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{P}[S_{t+1} = s', R_{t+1} = r | S_t = s, A_t = a]$$

Remarque :  $1 = \sum_{s' \in \mathcal{S}} p(s' | s, a)$  pour tous  $s \in \mathcal{S}$  et  $a \in \mathcal{A}$

# Une intuition à propos du modèle $p$

**Problème :** En RL, le modèle de l'environnement est généralement inconnu (ou inexact)

**Solution :** Modéliser l'environnement comme une variable aléatoire

Un bon moyen pour visualiser cette approche et comprendre le rôle que joue  $p$  dans les formules math m tiques en RL est de regarder le comportement des *Processus de Markov*. [Exemple interactif](#)

**Intuition :** Imaginez-vous sur un bateau à la dérive avec

$s$  = vos coordonnées géographiques

et  $p$  = les courants marins, l'influence des marées et du vent ...

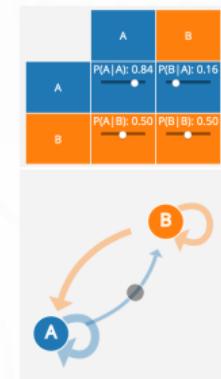


Image : Setosa blog

## Processus de Markov $\langle \mathcal{S}, p, s_0 \rangle$

- C'est comme un MDP, mais sans action  $a$  ni récompense  $r$
- Le passage d'un état  $s$  à un autre est strictement basé sur le modèle  $p(s'|s)$ .

$$p : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow [0, 1]$$

# R  compense, retour et objectif

**Id  e cl   : formaliser la notion de but** 

**R  compense**  $r_t \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$  [Reward]

   C'est le « feedback » imm  diat de l'environnement en cons  quence d'une action.

- Fonction de r  compense (version    3 arguments, forme la plus courante)

$$r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{s}_{t+1}) \longmapsto r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t, \mathbf{s}_{t+1})$$

- Fonction de r  compense (version    2 arguments)

$$r : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \longmapsto r(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) &\doteq \mathbb{E}_{(\mathbf{s}', r) \sim p(\cdot | \mathbf{s}, \mathbf{a})} [R_{t+1} = r | S_t = \mathbf{s}, A_t = \mathbf{a}] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}} p(\mathbf{s}', r | \mathbf{s}, \mathbf{a}) r(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{s}') \end{aligned}$$

Notation abr  g  e  e :  $r_t \doteq r(\mathbf{s}_{t-1}, \mathbf{a}_{t-1}, \mathbf{s}_t)$

★ Observation : L'agent re  oit la r  compense **apr  s** avoir ex  cut   l'action

# R  compense, retour et objectif

**Id  e cl   : formaliser la notion de but** 

## Retour $G_t$ [Return]

- La **somme des r  compenses future**   partir du temps  $t$  jusqu' à l'horizon  $T$ .
- Cas :  $T = \text{horizon fini}^1$  (Ce sera l'assumption pour le reste du cours)

$$G_t(\tau) \doteq \sum_{t'=t}^T r(s_{t'}, a_{t'}, s_{t'+1})$$

## ★ | L'objectif (formel) de l'apprentissage par renforcement [RL objective]

 **Maximiser** le total des r  compenses  $r$  accumulé au cours d'une trajectoire  $\tau$

$$\begin{aligned}\pi_\theta^* &= \arg \max_{\theta} \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [ G_t(\tau) ] \\ &= \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(s_t, a_t, s_{t+1}) \sim \pi_\theta(\tau)} [ r(s_t, a_t, s_{t+1}) ]\end{aligned}$$

1. Pour le cas horizon-infini  $T = \infty$ , voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour  \$G\$  sur un horizon infini](#)

## Retour et *Discount factor*

**Idée clé** : les récompenses reçues immédiatement ont plus de valeur que celle reçue plus tard

### Retour $G_t$ avec *Discount factor* [Discounted Return]

- La **somme des récompenses future (avec *Discount factor*  $\gamma$ )**   partir du temps  $t$  jusqu'à l'horizon  $T$  avec  $T = \text{horizon fini}$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} G_t(\tau) &\doteq \sum_{t'=t}^T \gamma^{t'-t} r(s_{t'}, a_{t'}, s_{t'+1}) \quad \text{avec } 0 \leq \gamma \leq 1 \\ &= r(s_t, a_t, s_{t+1}) + \gamma^1 r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + \gamma^2 r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + \dots \end{aligned}$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies G_t(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) \quad \text{« L'agent est étroit d'esprit et ne considère pas le futur »}$$

$$\gamma \rightarrow 0.5 \implies G_t(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) + 0.5 \cdot r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + 0.25 \cdot r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + 0.125 \cdot r(s_{t+3}, a_{t+3}, s_{t+4}) + \dots$$

$$\gamma \rightarrow 1 \implies G_t(\tau) = 1 \cdot r(s_t, a_t, s_{t+1}) + 1 \cdot r(s_{t+1}, a_{t+1}, s_{t+2}) + 1 \cdot r(s_{t+2}, a_{t+2}, s_{t+3}) + \dots$$

« L'agent ne fait pas de différence entre les récompenses présentes et futures »

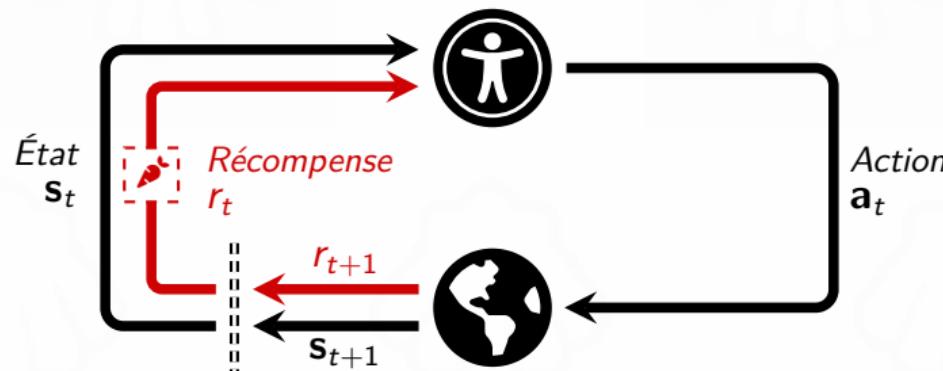
1. Pour le cas horizon-infini  $T = \infty$ , voir la section : [Pour aller plus loin : Le Retour G sur un horizon infini](#)

**Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement**

---

**Interaction agent-environnement**

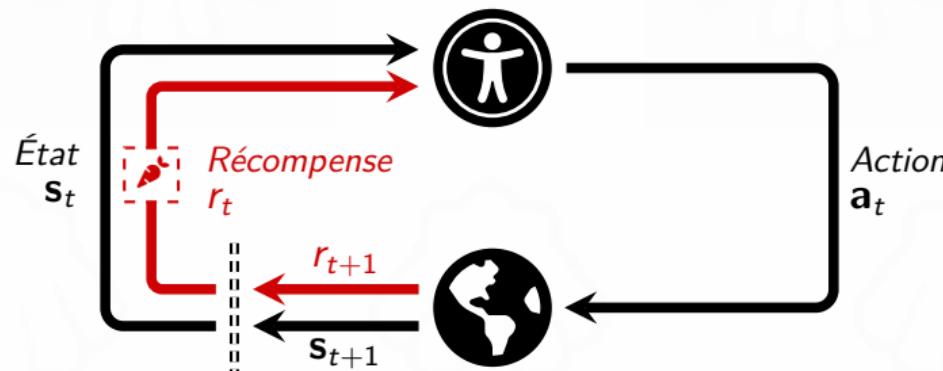
# Le cycle d'interaction



Pour tout temps  $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent observe l'environnement :  $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent choisit et exécute une action :  $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un signal de r ompense (une rétroaction) :  $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel état résultant de cette action :  $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

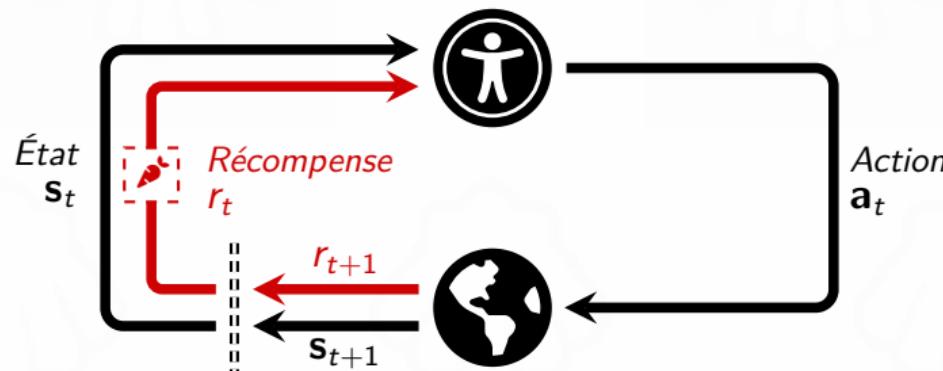
# Le cycle d'interaction



Pour tout temps  $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent **observe l'environnement** :  $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** :  $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de r ompense** (une rétroaction) :  $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel ** tat résultant** de cette action :  $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

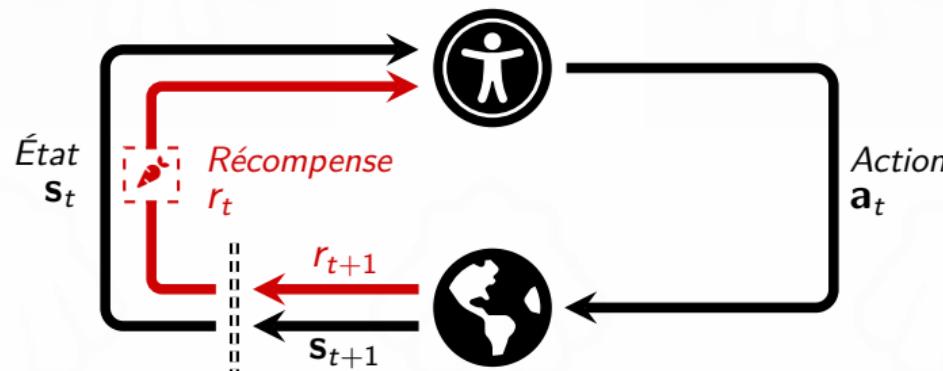
# Le cycle d'interaction



Pour tout temps  $t = 0, 1, 2, \dots, T$

- 1 L'agent **observe l'environnement** :  $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** :  $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de r  ompense** (une r  troaction) :  $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel état r  sultant de cette action :  $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

# Le cycle d'interaction



Pour tout temps  $t = 0, 1, 2, \dots, T$

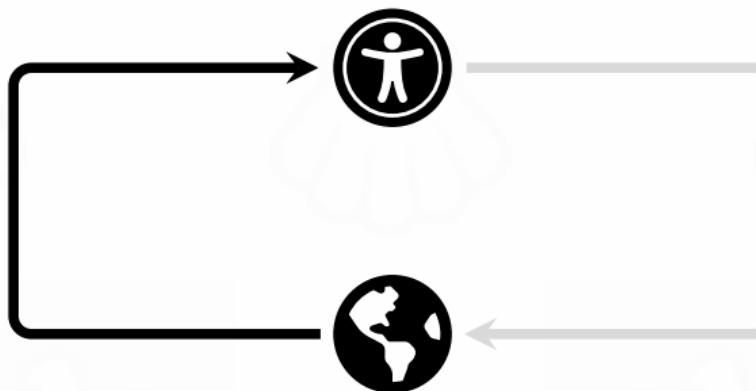
- 1 L'agent **observe l'environnement** :  $s_t \in \mathcal{S}$
- 2 Basé sur cette observation, l'agent **choisit et exécute une action** :  $a_t \in \mathcal{A}(s_t)$
- 3 L'environnement renvoie un **signal de récompense** (une rétroaction) :  $r_{t+1} \in \mathcal{R}$
- 4 et renvoie le nouvel ** tat résultant** de cette action :  $s_{t+1} \in \mathcal{S}$

# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 1$

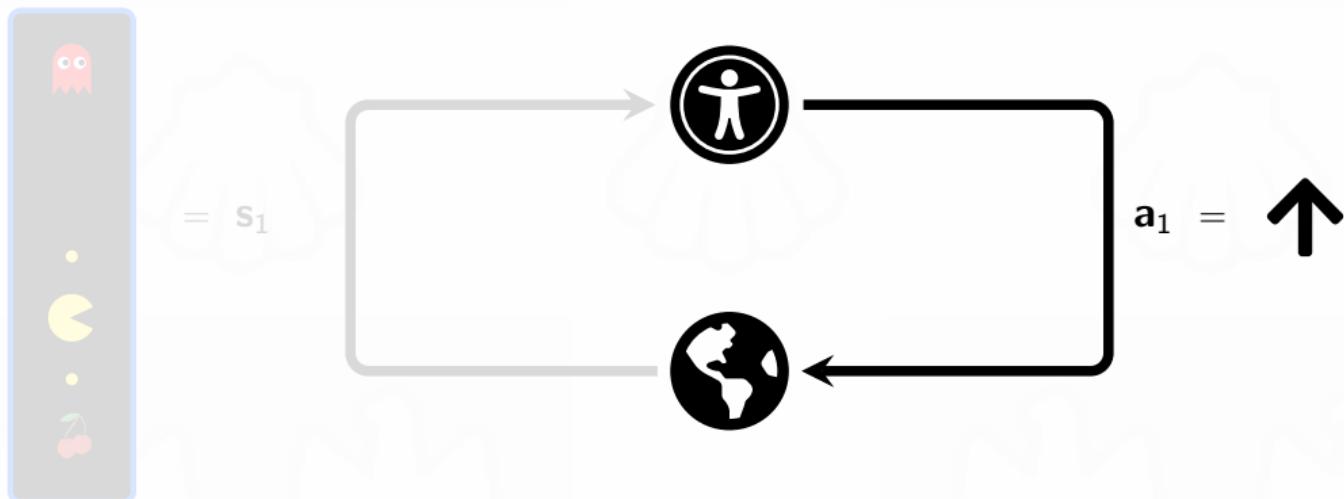


=  $s_1$



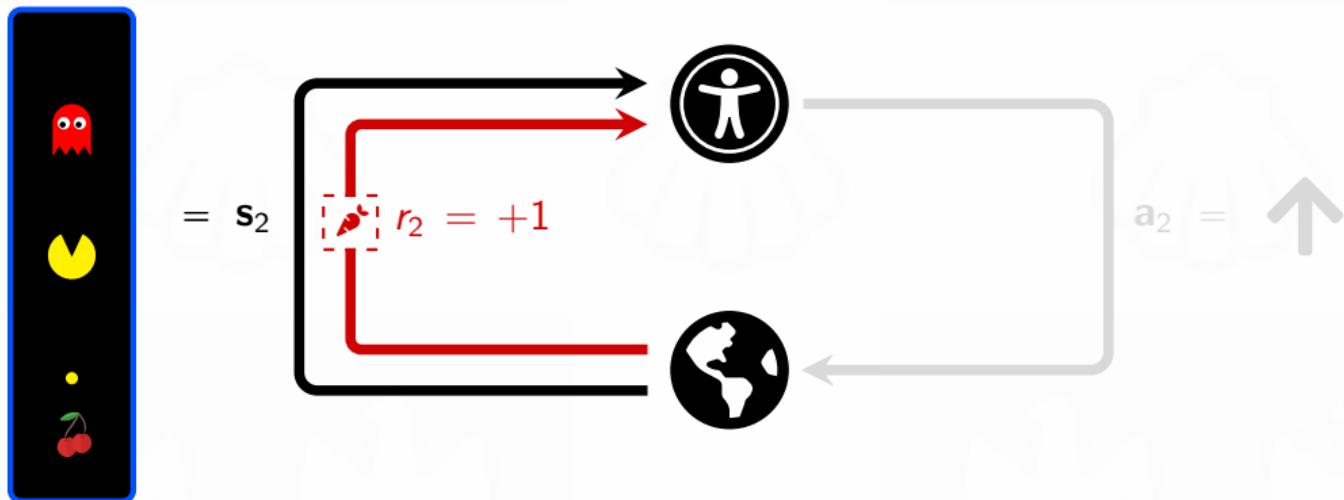
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 1$



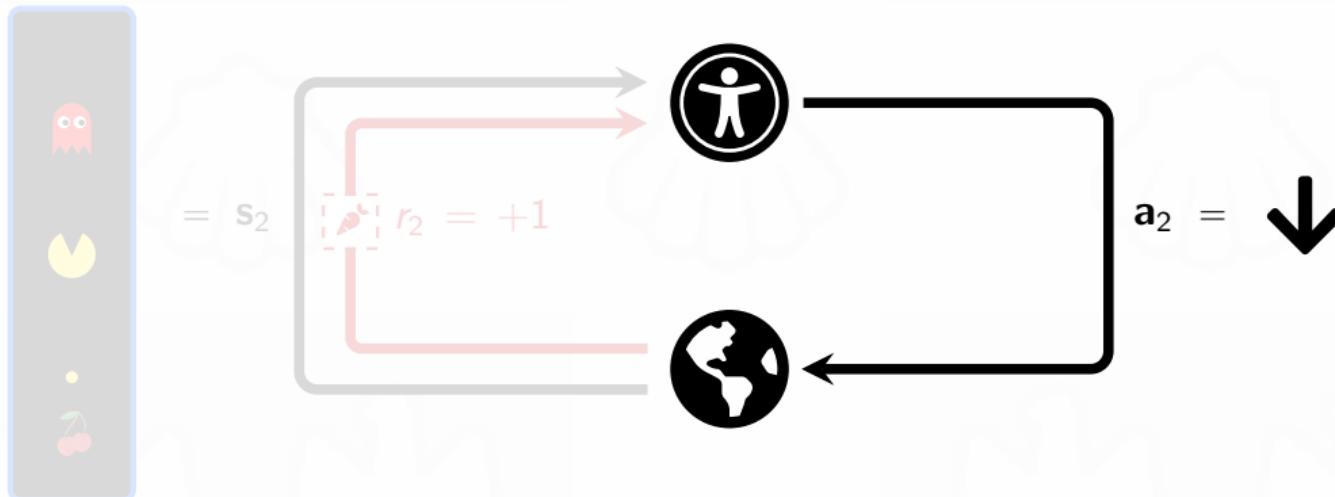
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 2$



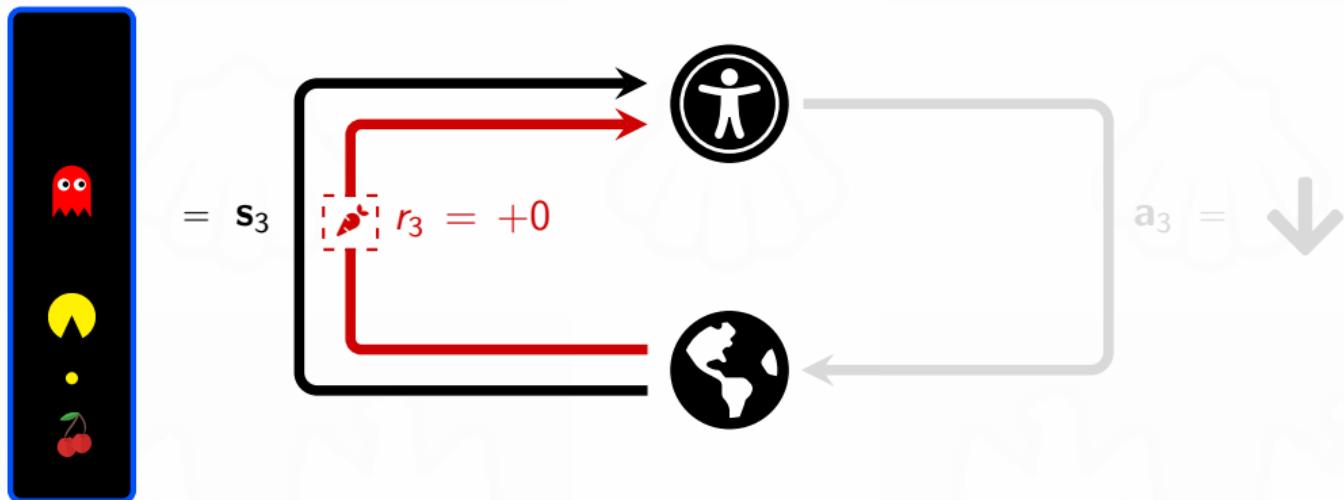
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 2$



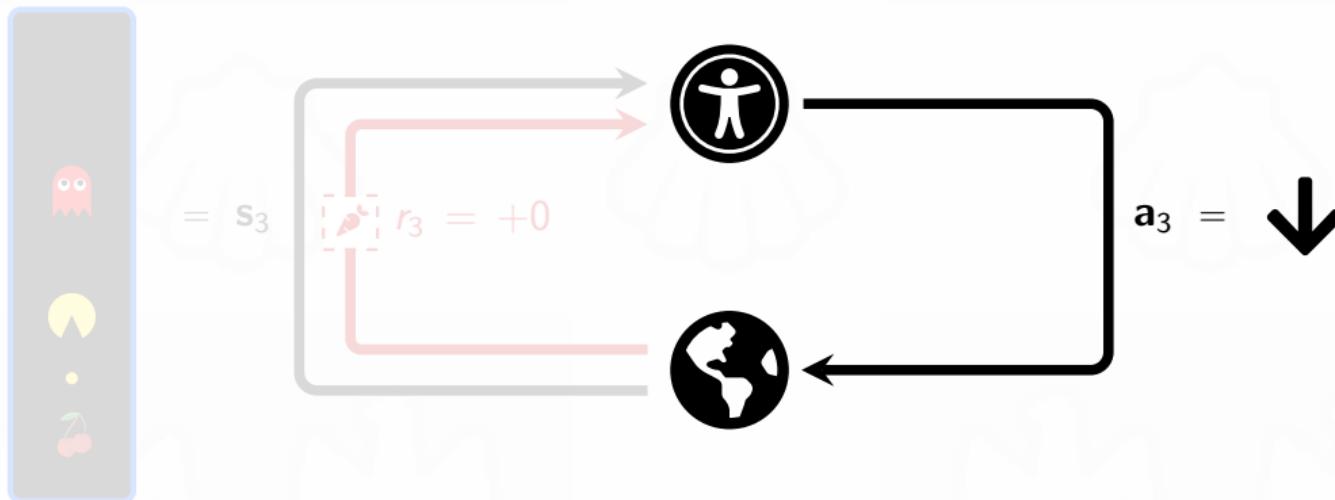
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 3$



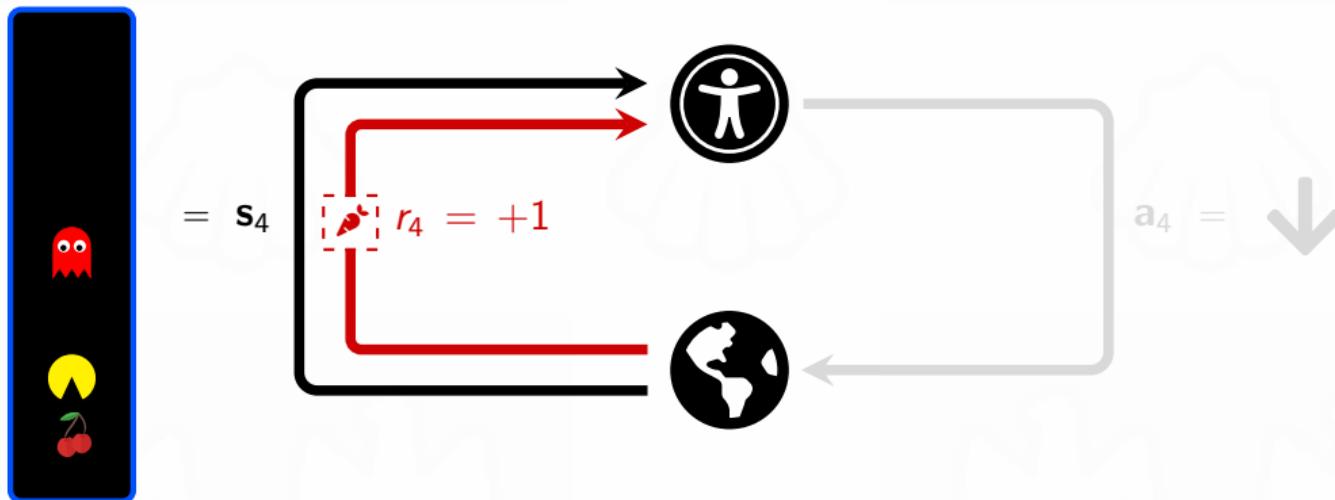
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 3$



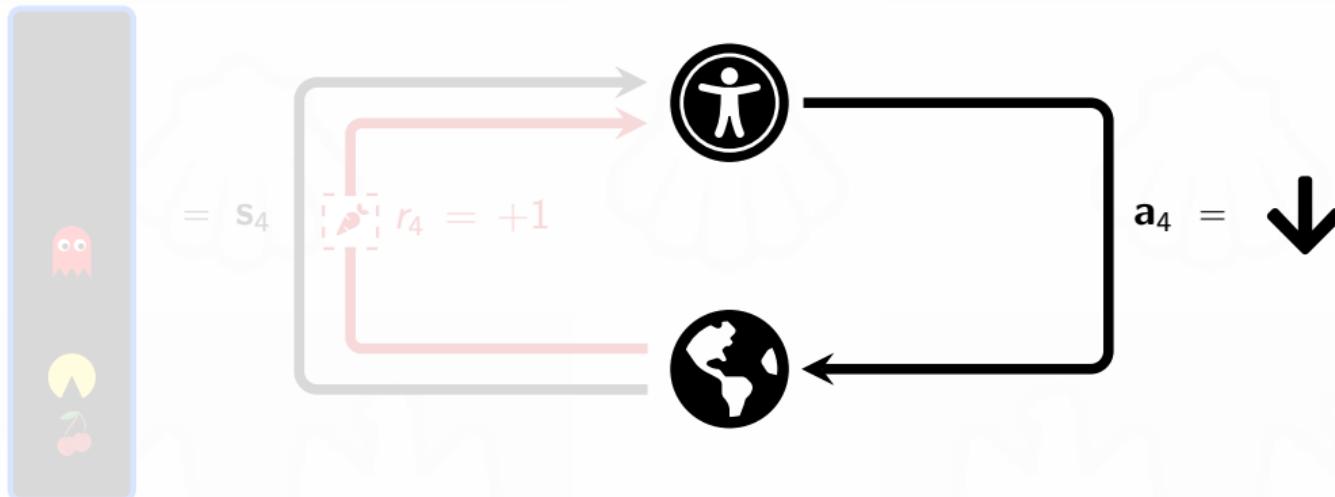
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 4$



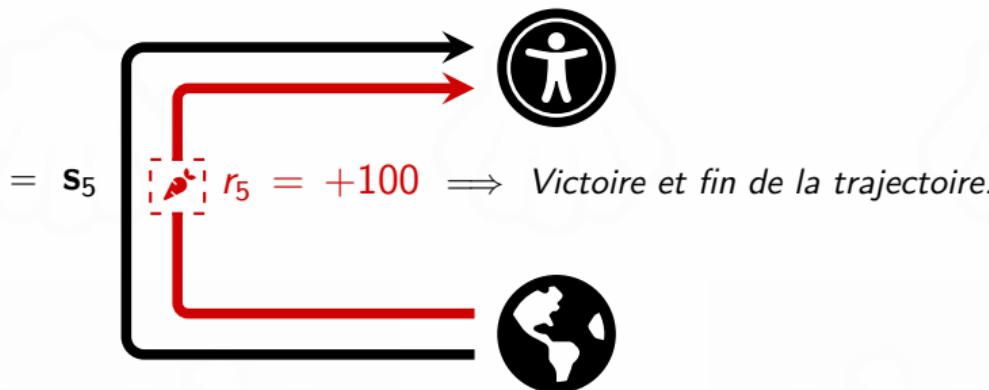
# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 4$



# Le cycle d'interaction

Temps  $t = 5$



## **L'univers du point de vue de l'agent**

---

## 1 Vue d'ensemble

## 2 Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement

## 3 L'univers du point de vue de l'agent

- Ce qu'on cherche à faire
- Quelle information l'agent peut-il utiliser pour apprendre ?
- Les fonctions de valeur  $Q^\pi$  et  $V^\pi$
- Équation d'optimalité de Bellman

## 4 Pour aller plus loin

L'univers du point de vue de l'agent

---

**Ce qu'on cherche à faire**

# Le problème d'apprentissage par renforcement (Rappel)

## ★ – (Informellement) L'objectif de l'apprentissage par renforcement :

Que l'**agent** trouve par lui-même **la meilleure stratégie** (une **politique optimale**) pour atteindre un **but** en se basant uniquement sur les **récompenses** retournées par l'environnement.

## ★ – (Formellement) L'objectif de l'apprentissage par renforcement :

👉👉👉 **Maximiser** le total des récompenses  $r$  accumulé au cours d'une trajectoire  $\tau$

$$\begin{aligned}\pi_\theta^* &= \arg \max_{\theta} \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [G_t(\tau)] \\ &= \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{(s_t, a_t, s_{t+1}) \sim \pi_\theta} [r(s_t, a_t, s_{t+1})]\end{aligned}$$

avec l'assumption que  $\gamma = 1$

**OK . . . par où on commence ?**

## L'univers du point de vue de l'agent

---

**Quelle information l'agent peut-il utiliser pour apprendre ?**

### L'agent ne sait pas :

- comment l'environnement fonctionne ;
- comment la fonction de récompense est définie ;
- les conditions pour qu'une trajectoire termine ;

### L'agent sait :

- qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punis ;
- que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

Question : Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense  $S \times R$  ?

Quel est le problème avec cette approche ?

### L'agent ne sait pas :

- comment l'environnement fonctionne ;
- comment la fonction de récompense est définie ;
- les conditions pour qu'une trajectoire termine ;

### L'agent sait :

- qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punis ;
- que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

**Question :** Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense  $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$  ?

Quel est le problème avec cette approche ?

**L'agent ne sait pas :**

- comment l'environnement fonctionne ;
- comment la fonction de récompense est définie ;
- les conditions pour qu'une trajectoire termine ;

**L'agent sait :**

- qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punis ;
- que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

**Question :** Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense  $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$  ?

Quel est le problème avec cette approche ?

**L'agent ne sait pas :**

- comment l'environnement fonctionne ;
- comment la fonction de récompense est définie ;
- les conditions pour qu'une trajectoire termine ;

**L'agent sait :**

- qu'une bonne action est récompensée et qu'une mauvaise action est punis ;
- que plus il reçoit de récompenses, plus la vie est belle ;

**Question :** Et si l'agent construisait un *mapping* action-récompense  $\mathcal{S} \times \mathcal{R}$  ?

Quel est le problème avec cette approche ?

##  valu  les conséquences d'une action : voir le long terme

**Problème :** L'agent n'a aucun moyen direct de savoir si la récompense qu'il reçoit maintenant est due à l'action qu'il vient juste d'exécuter !

**Pris seul, une récompense ne dit pas grand-chose**

Elle peut être due à une action qui est arrivée longtemps auparavant

Ex. : mettre son parachute avant de sauter en bas d'un avion

Donc la seule façon pour l'agent d'évaluer les conséquences des actions qu'il prend est **en gardant une vue d'ensemble** de la trajectoire  $\Rightarrow$  la seule quantité qui lui permet de déduire qu'il a fait quelque chose de bien durant une trajectoire, c'est **le retour**

$$G_1(\tau) = r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_{\tau-2} + r_{\tau-1} + r_{\tau}$$

avec l'assumption que  $\gamma = 1$

##  valuer le ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

On sait maintenant que l'agent **doit évaluer les conséquences** de ses actes **en se basant sur le retour**  $G_1$  des trajectoires  $\tau$ .

Présentement la seule information que l'agent peut déduire du retour  $G_1$  est qu'une trajectoire  $\tau$  est meilleure qu'une autre  $\tau'$ .

Si  $\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, \dots, s_T, a_T, r_{T+1} \mapsto \text{ }$

et  $\tau' = s'_1, a'_1, r'_2, s'_2, a'_2, r'_3, \dots, s'_T, a'_T, r'_{T+1} \mapsto \text{à}$

alors  $\tau > \tau'$

##  valu  le ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

**Question :** Comment **identifier le ou les cause(s)** qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui  
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

**ou**

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un **moyen pour comparer les segments** d'une trajectoire entre eux tout **en respectant la contrainte de vue d'ensemble**.

##  valu  le ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

Question : Comment identifier le ou les cause(s) qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui  
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

**ou**

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un moyen pour comparer les segments d'une trajectoire entre eux tout en respectant la contrainte de vue d'ensemble.

##  valu  le ou les cause(s) d'une réaction ? (Est-ce possible ?)

Question : Comment **identifier le ou les cause(s)** qui font que cette trajectoire est meilleure que les autres ? Comment l'agent peut-il faire pour évaluer la causalité d'un vnement ?

« Est-ce que cette personne est toujours vivante aujourd'hui  
parce qu'elle a arrêté de fumer le mois dernier

**ou**

  cause qu'elle a mis un parachute avant de sauter d'un avion hier ? »

L'agent a besoin d'un **moyen pour comparer les segments** d'une trajectoire entre eux tout **en respectant la contrainte de vue d'ensemble**.

## Choisir le bon point de vue

**Question :** Sur quelle base l'agent pourrait-il comparer des segments de trajectoire ?

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, s_3, a_3, r_4, s_4, a_4, r_5, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

**Exemple :** Par rapport à l'utilité de ...

- (s) = d'être assis dans un cours important et [prendre des notes ou regarder son cellulaire ou ...]
- (s, a) = de prendre des notes et d'être assis dans un cours important
- $\pi(s)$  = de suivre la bonne habitude de toujours noter ce qui est important en cours

(s) ----- (s, a)

$\pi(s)$

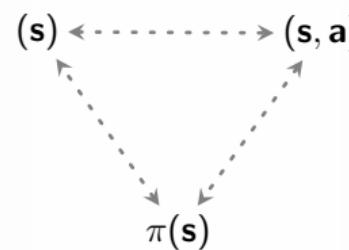
## Choisir le bon point de vue

**Question :** Sur quelle base l'agent pourrait-il comparer des segments de trajectoire ?

$$\tau = s_1, a_1, r_2, s_2, a_2, r_3, s_3, a_3, r_4, s_4, a_4, r_5, \dots, s_T, a_T, r_{T+1}$$

**Exemple :** Par rapport à l'utilité de ...

- (s) = d'être assis dans un cours important et [prendre des notes ou regarder son cellulaire ou ...]
- (s, a) = de prendre des notes et d'être assis dans un cours important
- $\pi(s)$  = de suivre la bonne habitude de toujours noter ce qui est important en cours



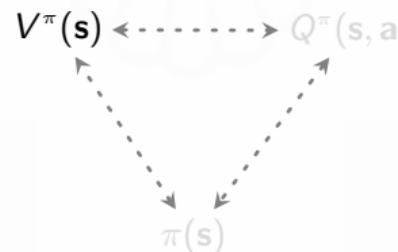
## Choisir le bon point de vue

### Perspective à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$  est la valeur d'être dans une état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$Q^\pi(s, a)$  est la valeur d'exécuter une action  $a$  à partir d'un état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$\pi(s)$  est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment dans la formulation des problèmes en *RL*.

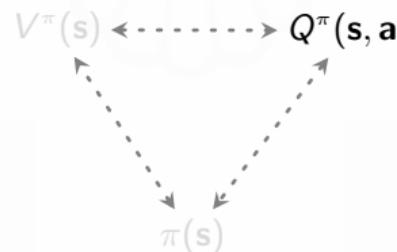
# Choisir le bon point de vue

## Perspective à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$  est la valeur d'être dans une état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$Q^\pi(s, a)$  est la valeur d'exécuter une action  $a$  à partir d'un état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$\pi(s)$  est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment  
dans la formulation des problèmes en *RL*.

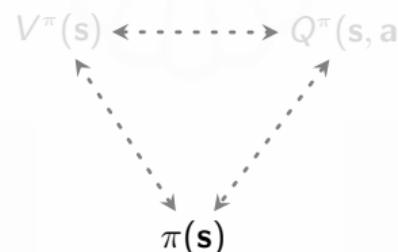
# Choisir le bon point de vue

## Perspective à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$  est la valeur d'être dans une état  $s$   
et de continuer d'agir en suivant la politique  $\pi$

$Q^\pi(s, a)$  est la valeur d'ex閐uter une action  $a$  à partir d'un état  $s$   
et de continuer d'agir en suivant la politique  $\pi$

$\pi(s)$  est l'utilité d'agir selon une politique particulière



Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment dans la formulation des problèmes en *RL*.

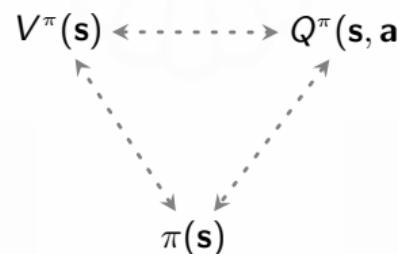
# Choisir le bon point de vue

## Perspective à propos des trajectoires (plus formellement)

$V^\pi(s)$  est la valeur d'être dans une état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$Q^\pi(s, a)$  est la valeur d'exécuter une action  $a$  à partir d'un état  $s$   
et de continué d'agir en suivant la politique  $\pi$

$\pi(s)$  est l'utilité d'agir selon une politique particulière



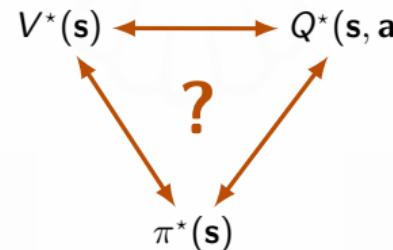
Ce sont trois **idées fondamentales** qui reviennent constamment dans la formulation des problèmes en *RL*.

## Apprendre quoi ? $\pi$ , $V^\pi$ ou $Q^\pi$

Ce trio est aussi au coeur d'un **dilemme critique à la résolution** de problème de RL :

*Qu'est-ce que l'agent doit apprendre pour atteindre l'objectif ?*

*On doit optimiser quoi concrètement ?*



On va tenter d'éclaircir la question pendant le reste du cours

## L'univers du point de vue de l'agent

---

**Les fonctions de valeur  $Q^\pi$  et  $V^\pi$**

## La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

**Réponds à la question :**   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l'  tat  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  si on prend l'action  $a$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[ r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi_\theta(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

## La valeur d'une action à partir d'un  tat [Q-function, action-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

**Réponds à la question :**   quel point prendre cette action à partir de cet état est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l'état  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  si on prend l'action  $a$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[ r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi_\theta(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

## La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

**Réponds à la question :**   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l'  tat  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  si on prend l'action  $a$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[ r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi_\theta(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

## La valeur d'une action à partir d'un à tat [Q-function, action-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^{\tau} \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $Q^\pi(s_t, a_t)$

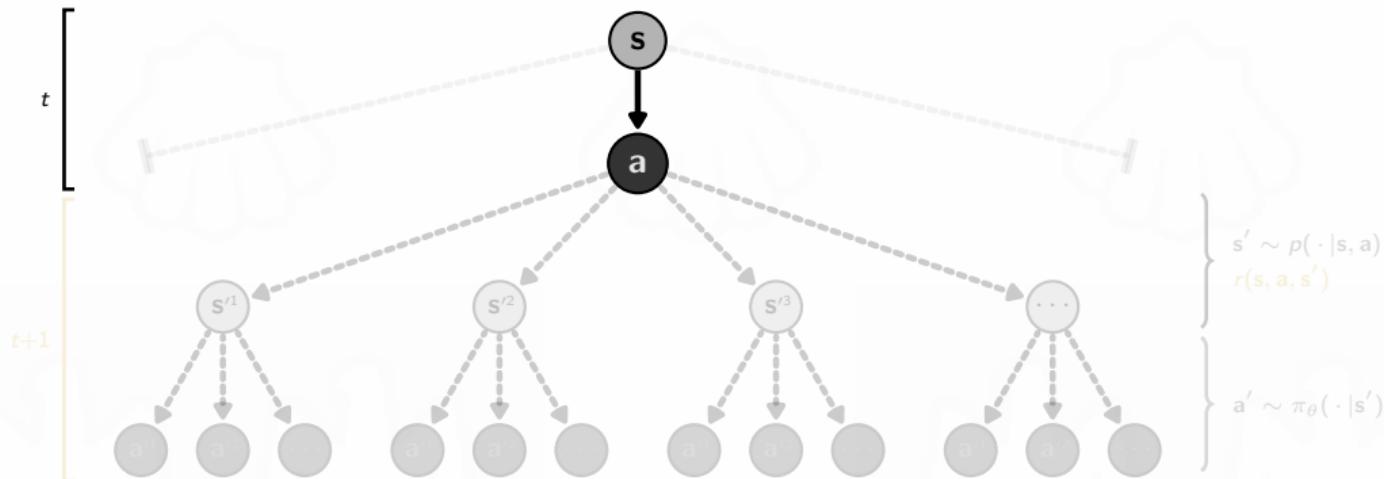
**Réponds à la question :**   quel point prendre cette action à partir de cet   tat est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l'  tat  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  si on prend l'action  $a$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} Q^\pi(s_t, a_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [G_t | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[ r_{t+1} + \gamma \mathbb{E}_{a_{t+1} \sim \pi_\theta(\cdot | s_{t+1})} [Q^\pi(s_{t+1}, a_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a' | s') Q^\pi(s', a') \right] \end{aligned}$$

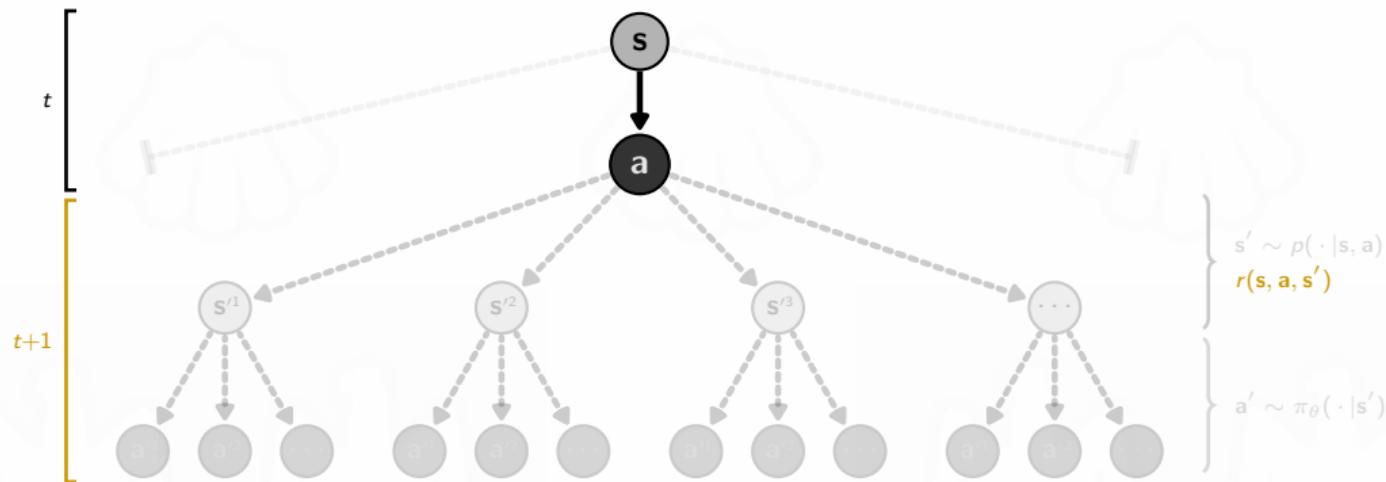
## Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tôt

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$



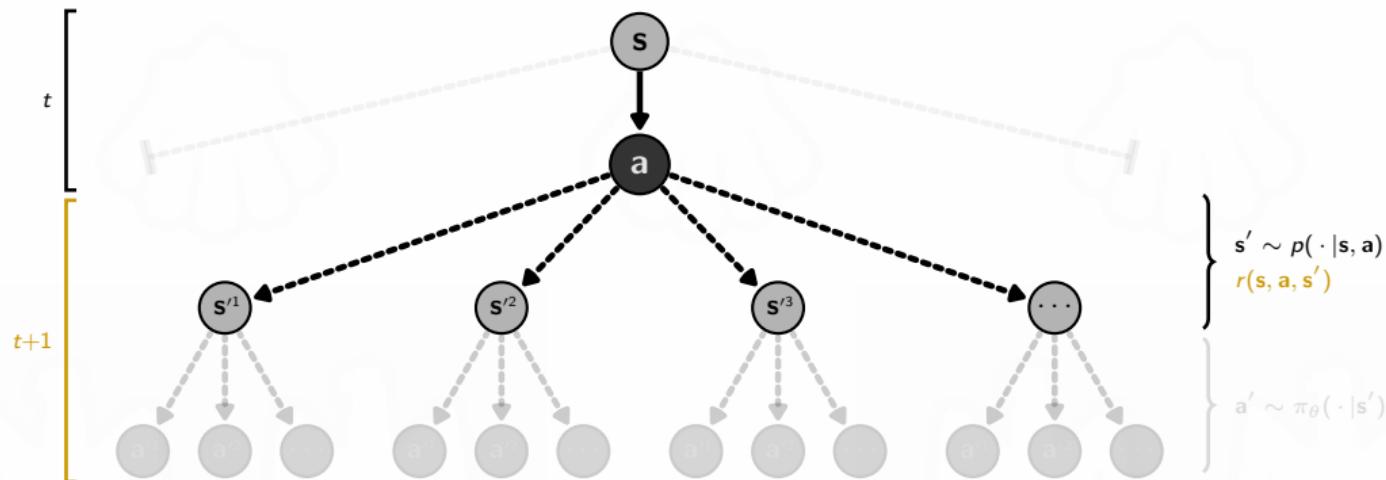
## Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tat

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$



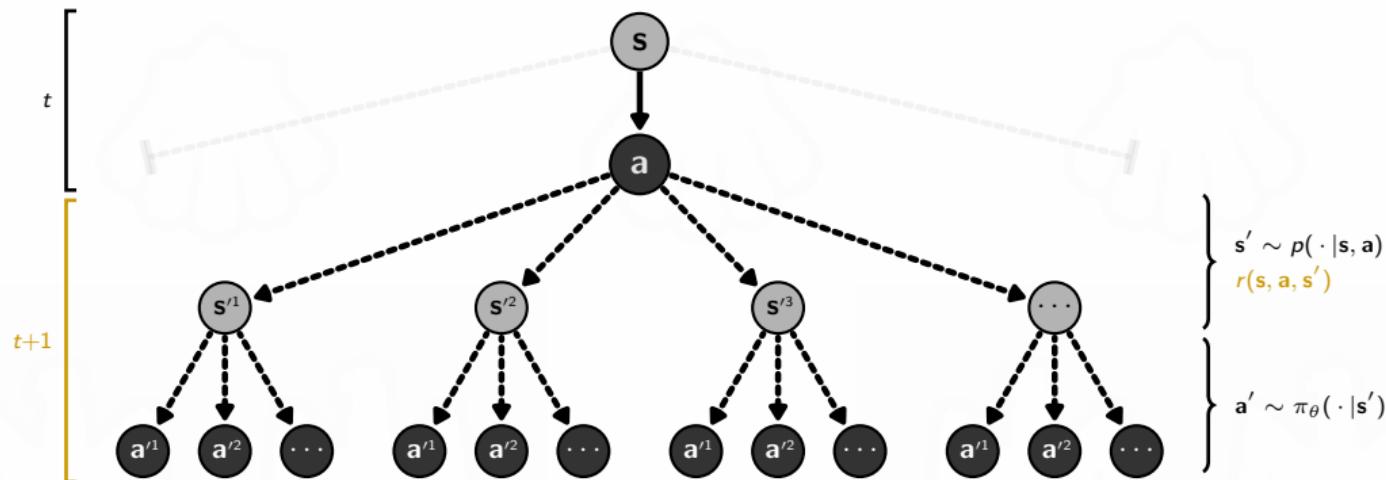
## Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tôt

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$



## Diagramme de la valeur d'une action à partir d'un à tat

$$Q^\pi(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \sum_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} \pi_\theta(a'|s') Q^\pi(s', a') \right]$$



## La valeur d'un  t t [Value function, state-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

**R pons à la question :**  A quel point cet  t t est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l' t t  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

## La valeur d'un  t t [Value function, state-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

**R pons à la question :**  A quel point cet  t t est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l' t t  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

## La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = \textcolor{red}{r_{t+1}} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

**R pons à la question :**  A quel point cet état est bon ?

**Comment :** En calculant  partir de l'état  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [\textcolor{red}{r_{t+1}} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} \left[ \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

## La valeur d'un  t t [Value function, state-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = \textcolor{red}{r_{t+1}} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

**R pons à la question :**  A quel point cet  t t est bon ?

**Comment :** En calculant à partir de l' t t  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [\textcolor{red}{r_{t+1}} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} \left[ \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})] \right] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

## La valeur d'un  tat [Value function, state-value function]

**Rappel :**  $r_{t+1} = r(s_t, a_t, s_{t+1})$

**Remarque :**  $G_t(\tau) = \sum_{k=t}^T \gamma^{k-t} r(s_k, a_k, s_{k+1}) = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \dots = r_{t+1} + \gamma G_{t+1}$

### La fonction de valeur $V^\pi(s_t)$

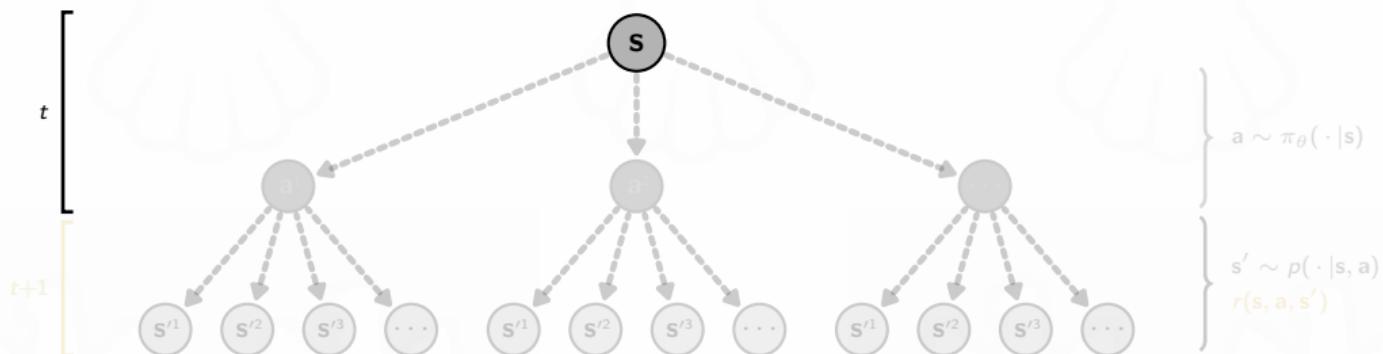
**R pons à la question :**  A quel point cet état est bon ?

**Comment :** En calculant  partir de l'état  $s_t$  la valeur attendue du retour  $G_t$  tout en suivant la politique  $\pi$  jusqu'à la fin de la trajectoire.

$$\begin{aligned} V^\pi(s_t) &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [G_t | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta(\tau)} [r_{t+1} + \gamma G_{t+1} | S_t = s] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [Q^\pi(s_t, a_t)] \\ &= \mathbb{E}_{a_t \sim \pi_\theta(\cdot | s_t)} [\mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1})]] \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a | s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')] \end{aligned}$$

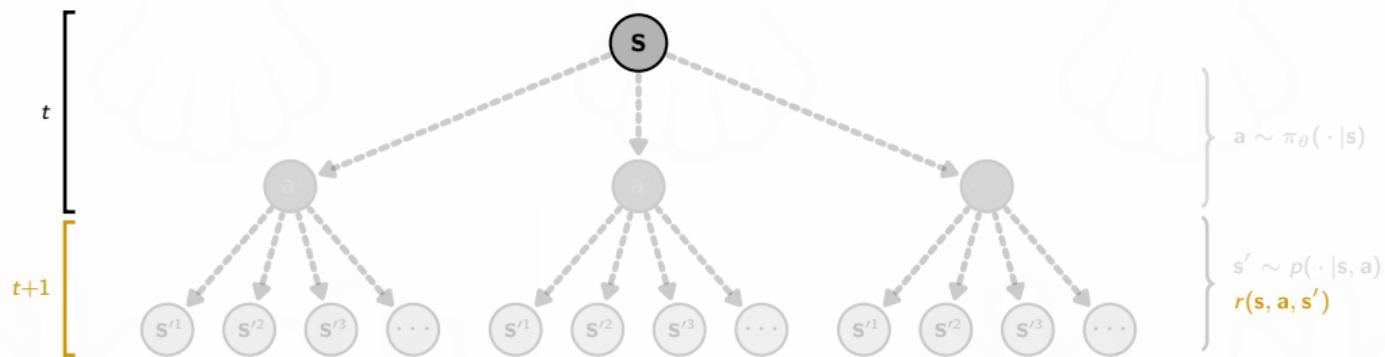
# Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$



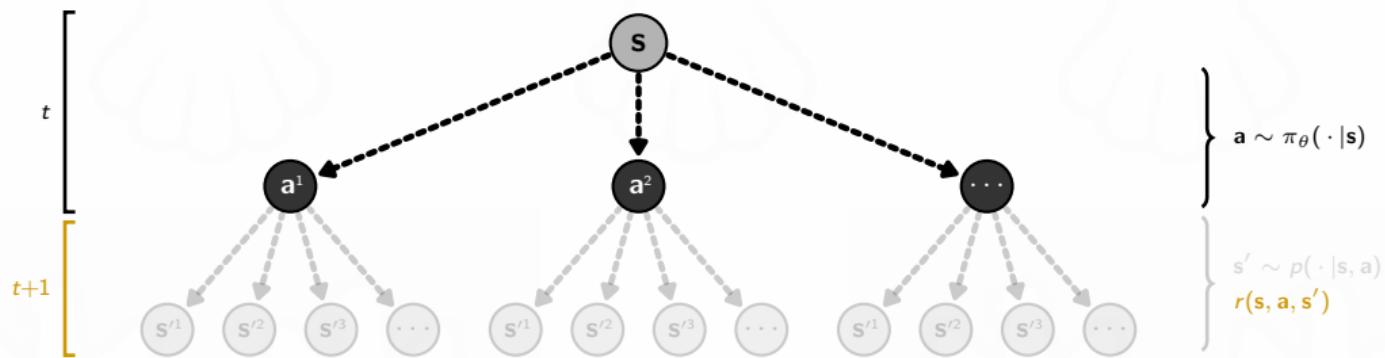
# Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$



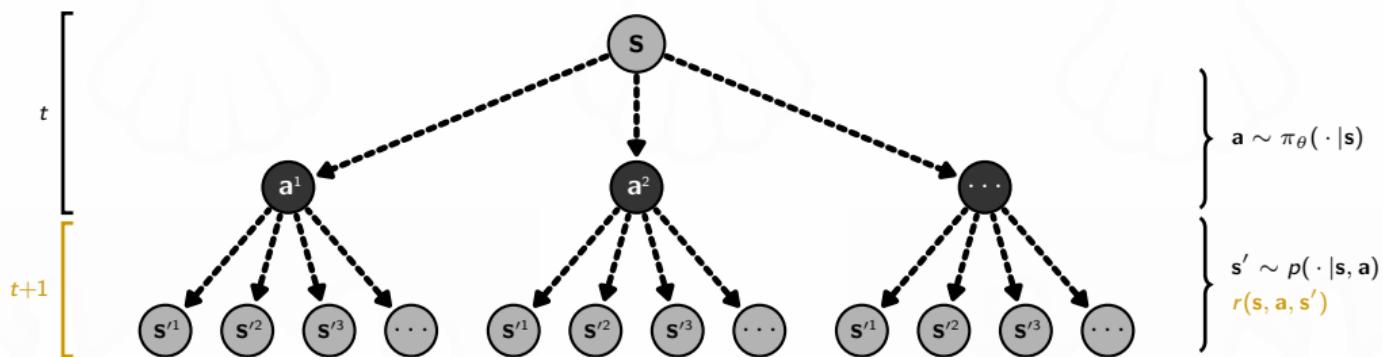
# Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$



# Diagramme de la valeur d'un  t t

$$V^\pi(s_t) = \sum_{a \in \mathcal{A}_t} \pi_\theta(a|s_t) \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^\pi(s')]$$



L'univers du point de vue de l'agent

---

**Équation d'optimalité de Bellman**

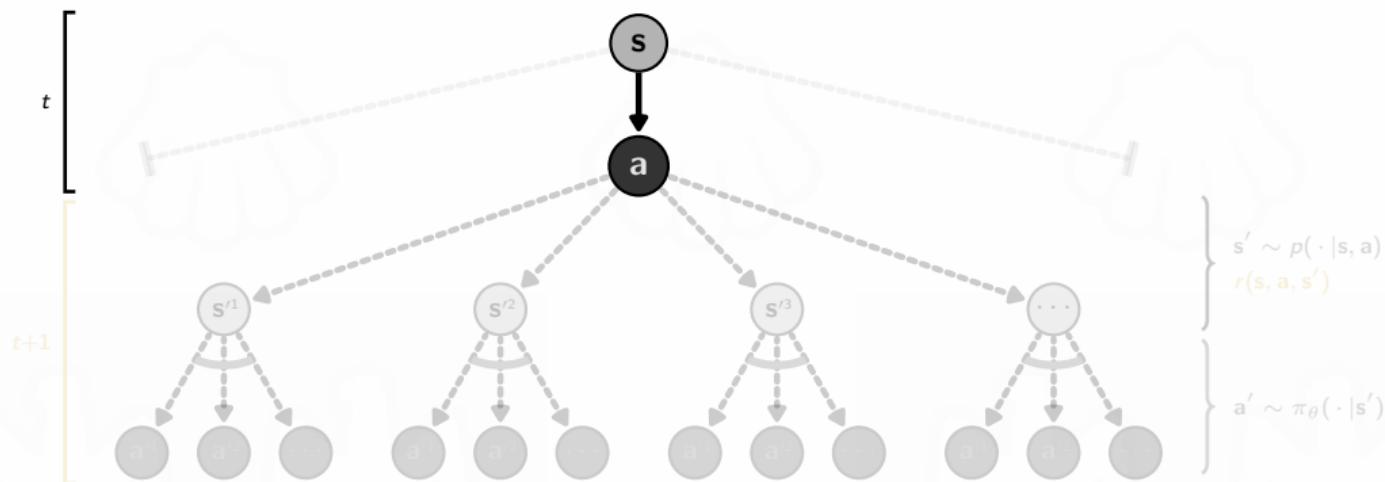
## La fonction de valeur optimale $Q^*(s_t, a_t)$

**R pons à la question :**   quel point prendre cette action à partir de cet état est bon si on agit optimalement à partir de ce point jusqu'à la fin de la trajectoire ?

$$\begin{aligned} Q^*(s_t, a_t) &= \max_{\pi} Q^{\pi}(s_t, a_t) \quad \text{pour tous } s \in \mathcal{S} \text{ et } a \in \mathcal{A} \\ &= \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a_t)} \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_t} Q^*(s_{t+1}, a') \right] \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s' | s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s', a') \right] \end{aligned}$$

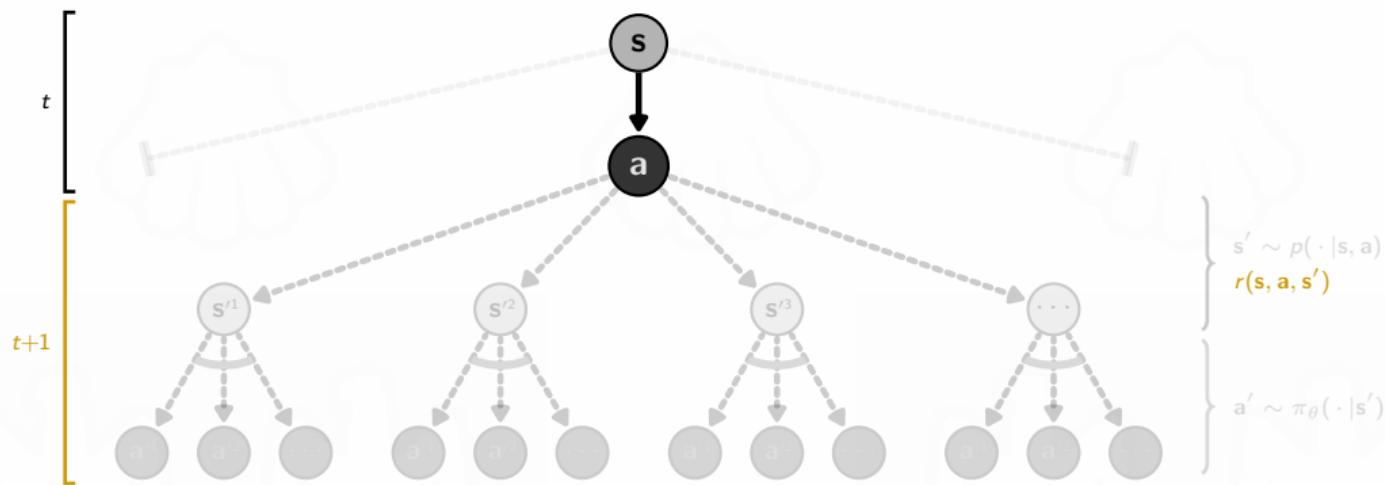
## Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un à tat

$$Q^*(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s', a') \right]$$



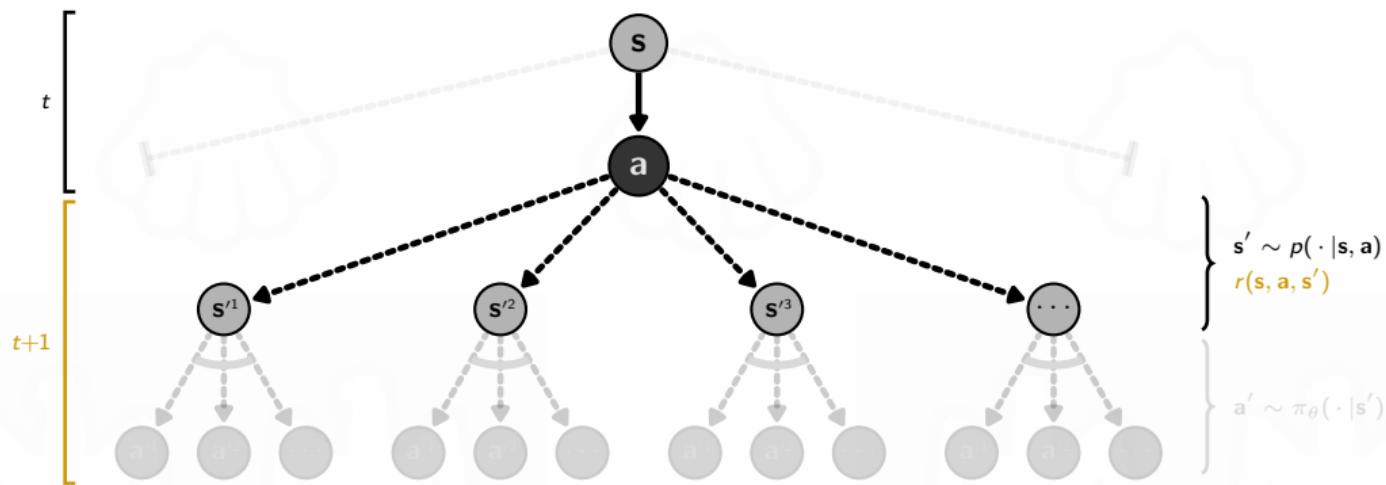
## Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un à tat

$$Q^*(s_t, a_t) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(s', a') \right]$$



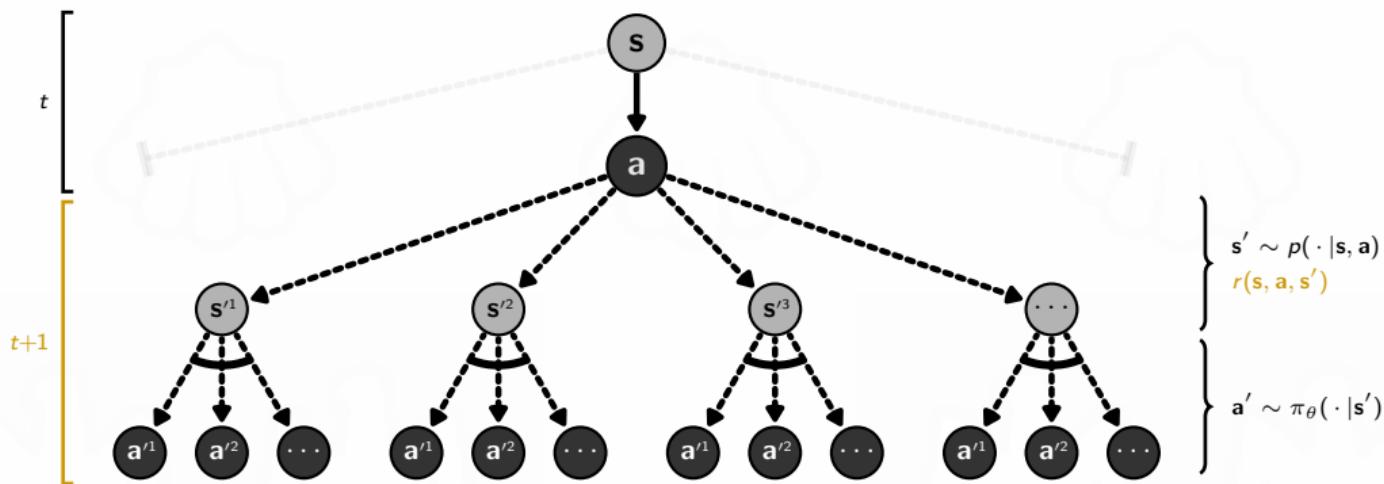
## Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un à tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$



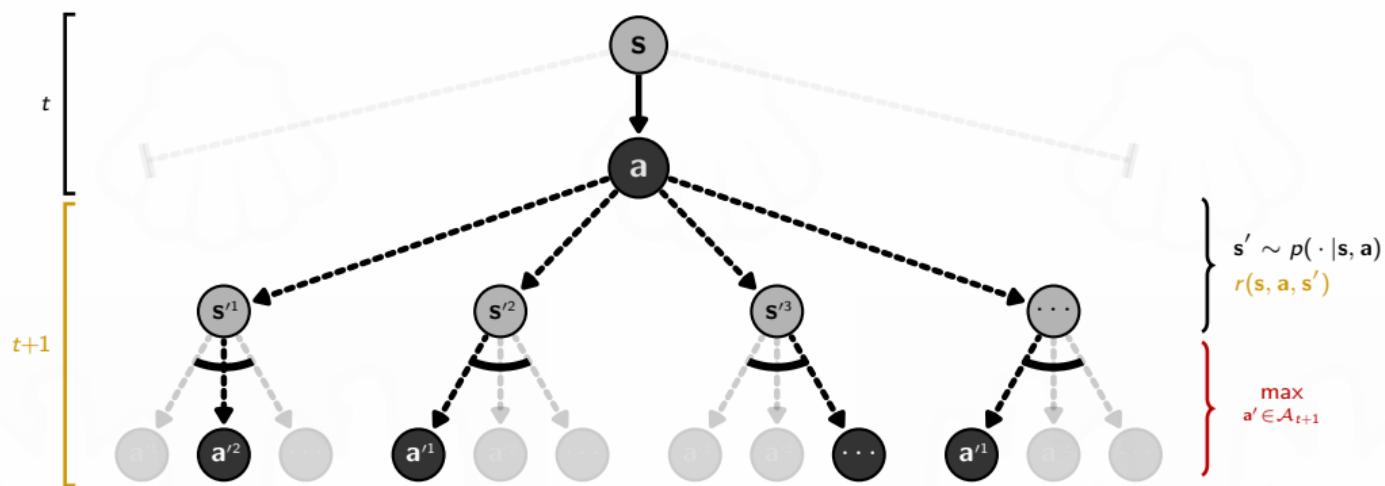
## Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un à tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$



## Diagramme de la valeur optimale d'une action à partir d'un à tat

$$Q^*(\mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) = \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}_t) \left[ r_{t+1} + \gamma \max_{\mathbf{a}' \in \mathcal{A}_{t+1}} Q^*(\mathbf{s}', \mathbf{a}') \right]$$



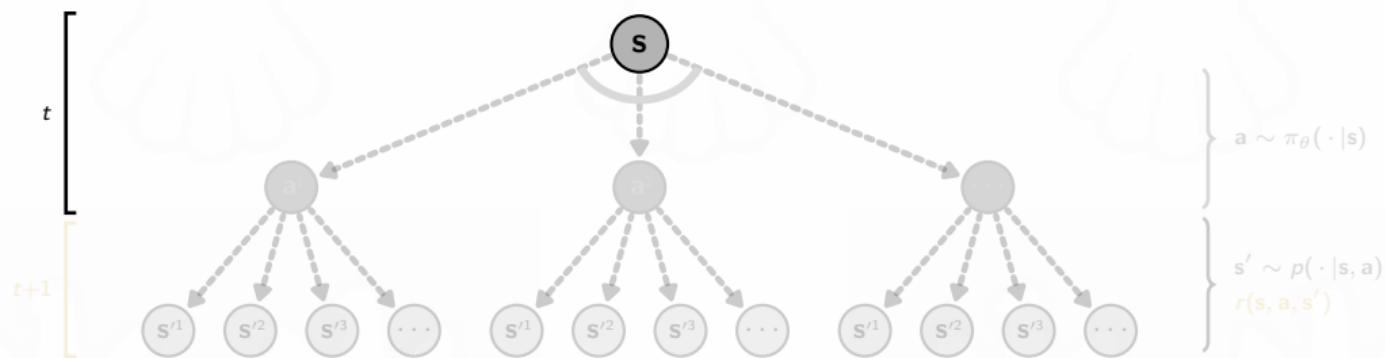
## La fonction de valeur optimale $V^*(s_t)$

**R pons à la question :**   quel point cet état est bon **si on agit optimalement à partir de ce point** jusqu'à la fin de la trajectoire ?

$$\begin{aligned} V^*(s_t) &= \max_{\pi} V^\pi(s_t) \quad \text{pour tous } s \in \mathcal{S} \\ &= \max_{a \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}_{s_{t+1} \sim p(\cdot | s_t, a)} \left[ r_{t+1} + \gamma V^*(s_{t+1}) \right] \\ &= \max_{a \in \mathcal{A}_t} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')] \end{aligned}$$

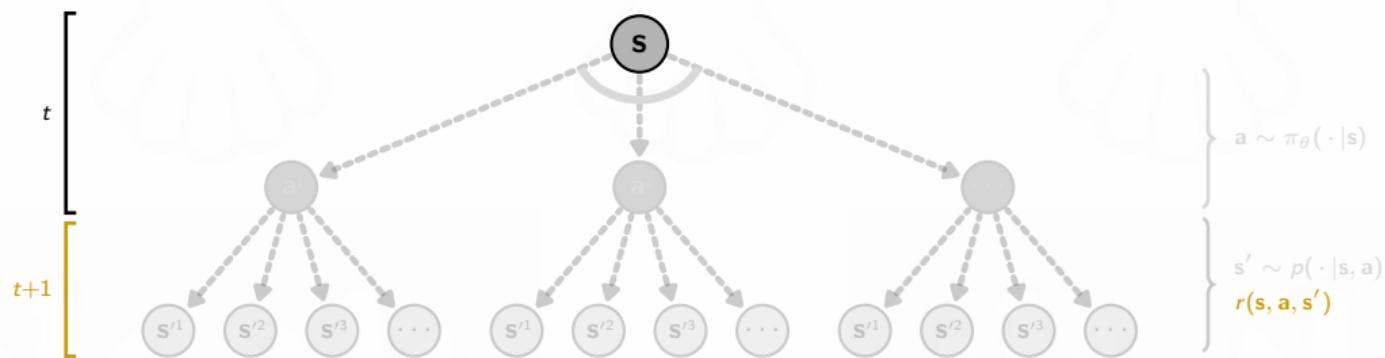
# Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{a \in A_t} \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')]$$



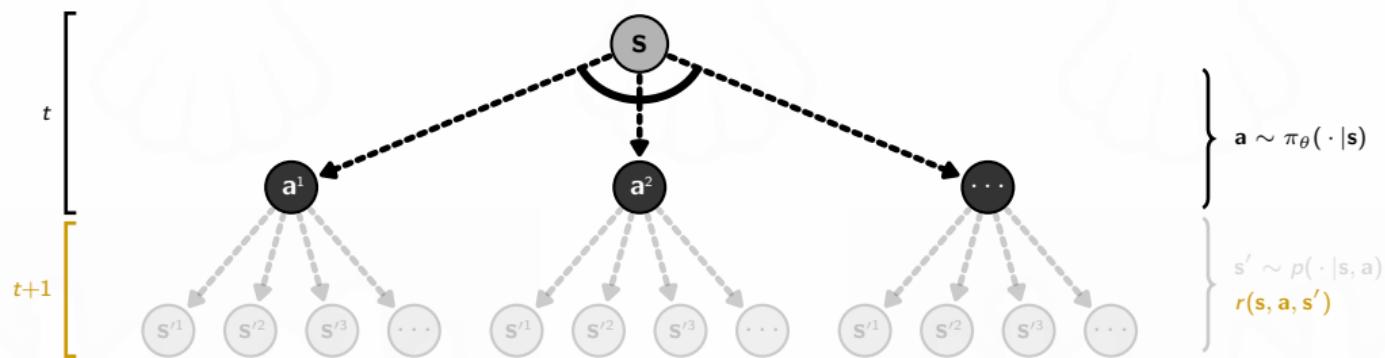
## Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(s_t) = \max_{a \in A_t} \sum_{s' \in S_{t+1}} p(s'|s_t, a) [r_{t+1} + \gamma V^*(s')]$$



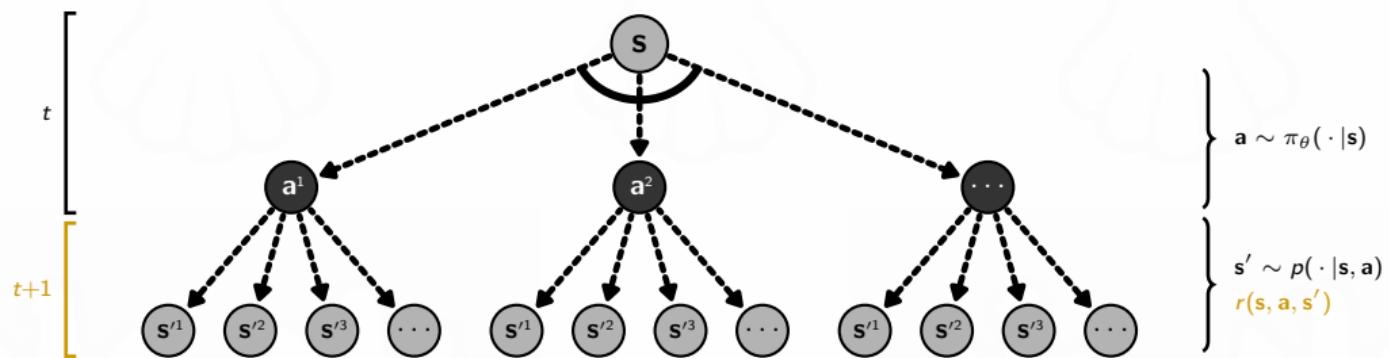
## Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}) [r_{t+1} + \gamma V^*(\mathbf{s}')]$$



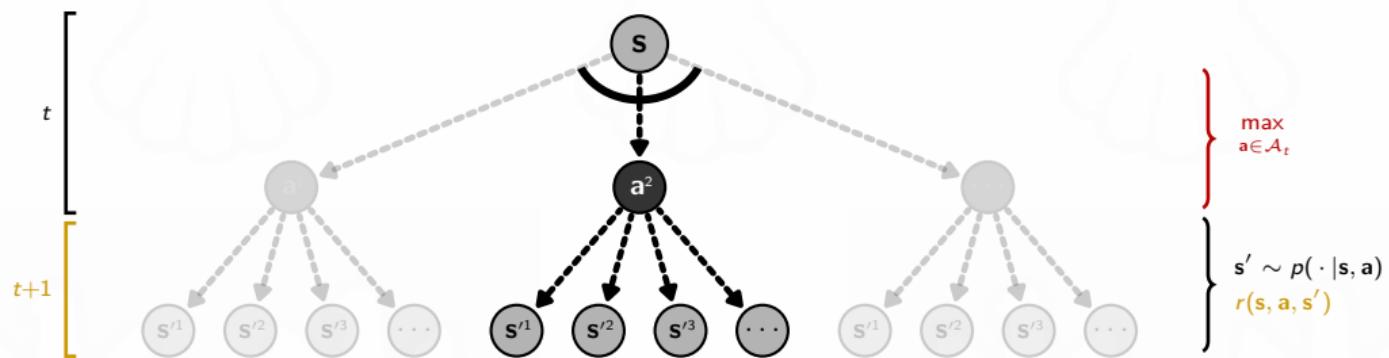
## Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}) [r_{t+1} + \gamma V^*(\mathbf{s}')]$$



## Diagramme de la valeur optimale d'un  t t

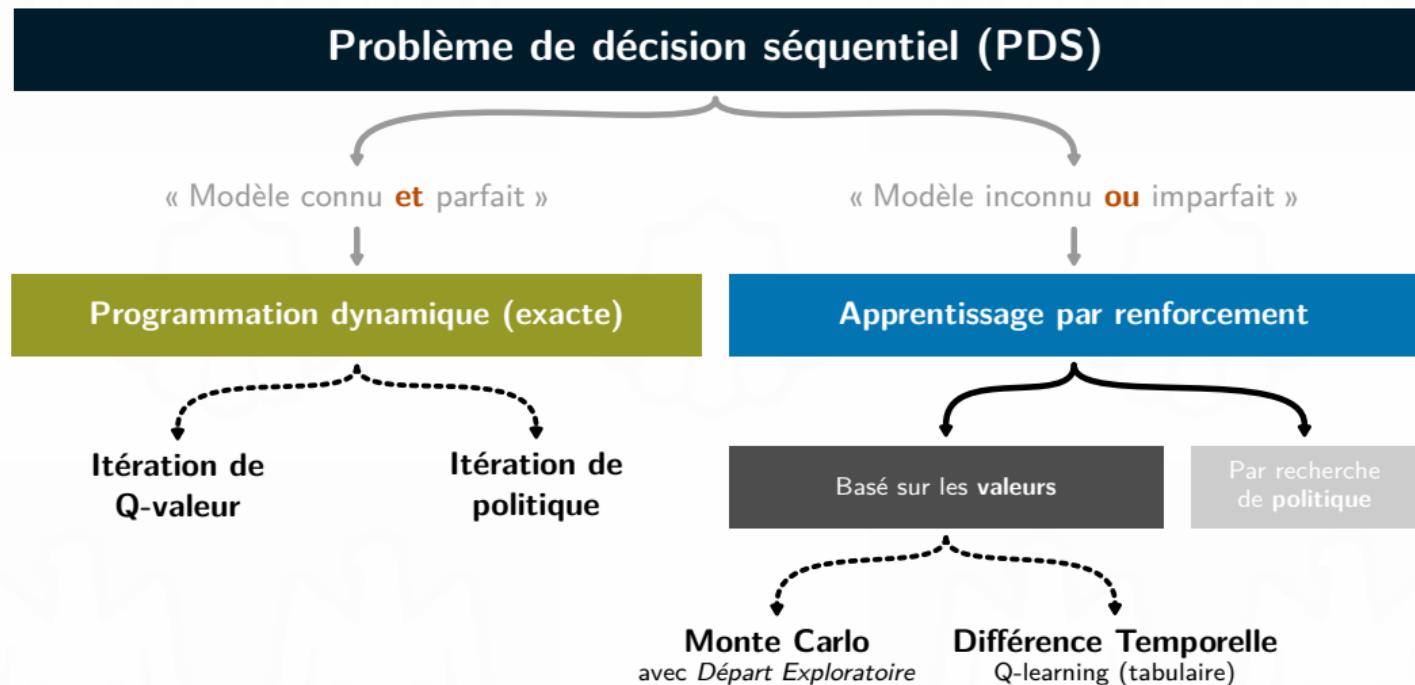
$$V^*(\mathbf{s}_t) = \max_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t} \sum_{\mathbf{s}' \in \mathcal{S}_{t+1}} p(\mathbf{s}' | \mathbf{s}_t, \mathbf{a}) [r_{t+1} + \gamma V^*(\mathbf{s}')]$$



## **Prochaine partie**

---

## Prochaine partie



**Pour aller plus loin**

---

**1** Vue d'ensemble

**2** Formalisme et outil de l'apprentissage par renforcement

**3** L'univers du point de vue de l'agent

**4** Pour aller plus loin

- Complément théorique
- Références

## Le futur prometteur de l'apprentissage par renforcement

- The Power of Self-Learning Systems - Présentation au *MIT + Center for Brains, Minds & Machines*, 2019 par Demis Hassabis, Co-Founder & CEO, *DeepMind*

▶ Vidéo: The Power of Self-Learning Systems - 63 minutes

Pour aller plus loin

---

**Complément théorique**

# Le Retour G sur un horizon infini

**Contexte :** cas où l'environnement n'a **pas de terminaison** (par « design » ou en cas limite).

$T = \infty \implies$  la trajectoire  $\tau$  ne peut pas être segment  en ** pisode**  
 $\implies$  **tâche continue**

**Problème no 1 :** Le retour  $G_t(\tau)$  pourrait être infini

**Solution :** Utiliser un « discounted factor  $\gamma$  » tel que  $\gamma < 1$

(Normalement :  $0 \leq \gamma \leq 1$ )

Dans la mesure où il existe une limite à l'espace de récompense  $\mathcal{R}$ , alors le retour sur un horizon infini aura une valeur finie.<sup>1</sup>

$$G_t(\tau) \doteq \sum_{t'=t}^{\infty} \gamma^{t'-t} r(\mathbf{s}_{t'}, \mathbf{a}_{t'}, \mathbf{s}_{t'+1})$$

1. « Reinforcement Learning : An introduction », section 3.3 « Returns and Episodes » et 3.4 « Unified Notation for Episodic and Continuing Tasks » par Sutton & Barto [8]

# Le Retour G sur un horizon infini

**Contexte :** cas où l'environnement n'a **pas de terminaison** (par « design » ou en cas limite).

$T = \infty$     $\implies$    la trajectoire  $\tau$  ne peut pas être segment  en ** pisode**  
                   $\implies$    **tâche continue**

**Problème no 2 :**  tant donné que la trajectoire  $\tau$  ne termine jamais,

-   quel moment commencer l'apprentissage ?
- comment structurer l'expérience en vue de l'apprentissage ?

**Solution :** *Online learning method, Continual learning, Meta-RL, ...*

## Lecture recommandé

**Online learning :** « Reinforcement Learning : An introduction », section 6.2 « Advantages of TD Prediction Methods » par Sutton & Barto comme exemple de méthode *Online*. [8]

**Continual learning :** L'introduction de « Progress & Compress : A scalable framework for continual learning » par Schwarz et al. (*DeepMind*) donne un bon aper  du domaine. [9]

**Meta-RL :** « Meta Reinforcement Learning » par Lilian Weng donne un bon aper  du domaine. Lil'Log blog est son blogue personnel. Elle est présentement chercheuse chez OpenAI (2020) [10]

Pour aller plus loin

---

Références

## References I

1. BERSETH, G., PENG, X. B. & van de PANNE, M. Terrain RL Simulator. 1-10. arXiv : 1804.06424. <http://arxiv.org/abs/1804.06424> (2018).
2. PENG, X. B., BERSETH, G. & VAN DE PANNE, M. Terrain-adaptive locomotion skills using deep reinforcement learning. *ACM Transactions on Graphics* **35**, 1-15. ISSN : 15577368 (2016).
3. MNIH, V. *et al.* Playing Atari with Deep Reinforcement Learning. 1-9. arXiv : 1312.5602. <http://arxiv.org/abs/1312.5602> (2013).
4. MNIH, V. *et al.* Human-level control through deep reinforcement learning. *Nature* **518**, 529-533. ISSN : 14764687. <https://web.stanford.edu/class/psych209/Readings/MnihEtAlHassabis15NatureControlDeepRL.pdf> (2015).
5. VINYALS, O. *et al.* StarCraft II: A New Challenge for Reinforcement Learning. arXiv : 1708.04782. <http://arxiv.org/abs/1708.04782> (2017).
6. ABBEEL, P., COATES, A., QUIGLEY, M. & NG, A. Y. An Application of Reinforcement Learning to Aerobatic Helicopter Flight. *Advances in Neural Information Processing Systems* (2006).

## References II

7. MAO, H., ALIZADEH, M., MENACHE, I. & KANDULA, S. Resource management with deep reinforcement learning. *HotNets 2016 - Proceedings of the 15th ACM Workshop on Hot Topics in Networks*, 50-56 (2016).
8. SUTTON, R. S. & BARTO, A. G. *Reinforcement learning: An introduction*. 2<sup>e</sup> ´ed. ( d. MIT PRESS) ISBN : 978-0262039246.  
<http://incompleteideas.net/book/RLbook2018.pdf> (Cambridge, MA, 2018).
9. SCHWARZ, J. *et al.* Progress & compress: A scalable framework for continual learning. *35th International Conference on Machine Learning, ICML 2018* **10**, 7199-7208. arXiv : 1805.06370. <https://deepmind.com/research/publications/progress-compress-scalable-framework-continual-learning> (2018).
10. WENG, L. *Meta Reinforcement Learning (Lil'Log)*. 2019.  
<http://lilianweng.github.io/lil-log/2019/06/23/meta-reinforcement-learning.html>.