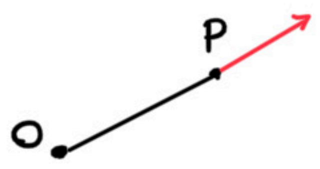
# GRAVITAZIONE

## • Forze centrali

1. In ogni punto la direzione passa in un punto fisso chiamato centro della forza
2. Il modulo dipende solo dalla distanza dal centro



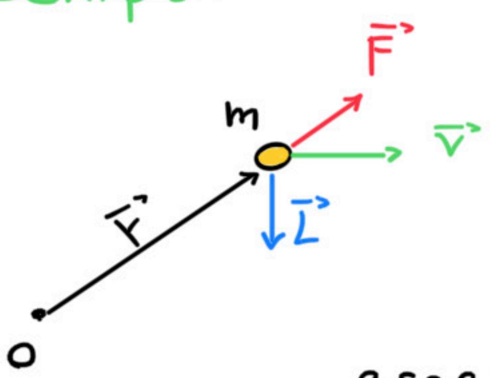

$\overline{OP} = \vec{r}$
$\hat{u}_r$ = versore direzione $\overline{OP}$
$\vec{r} = r\,\hat{u}_r$

Per cui la forza:
$\vec{F} = F(r) \cdot \hat{u}_r$

Il segno determina l'azione della forza e convenzionalmente si pone:

- $F > 0$ Repulsiva
- $F < 0$ Attrattiva

esempio:



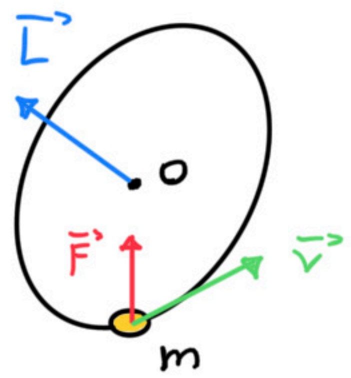

Posto il polo nel centro di forza:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = r\hat{u}_r \wedge F\hat{u}_r$$

essendo: due vettori // l'angolo compreso tra essi sarà di 0°, quindi $\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ perciò il momento angolare è costante nel tempo, ossia è conservato (rispetto al centro della forza).

$$L = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \text{COSTANTE}$$

## Osserviamo in 3 dimensioni

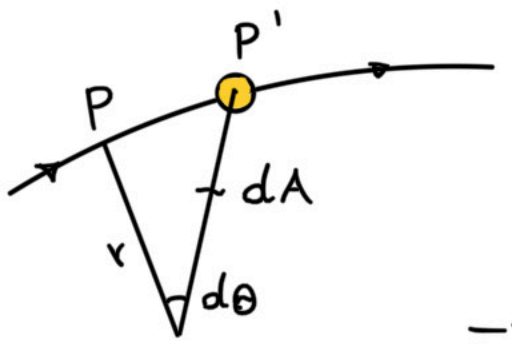



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \implies \vec{L} \perp \vec{r}, \vec{v}$$

ma io ho che $\vec{L}$ è costante in direzione, quindi il piano $\vec{r}, \vec{v}$ fisso e il moto è curvilineo in un piano fisso che contiene il centro.

! Il verso di $\vec{L}$ ci definisce il verso di percorrenza della traiettoria.

Osserviamo più da vicino il punto di massa m, la variazione istantanea dell'angolo rispetto al centro di forza di uno spostamento infinitesimo.




$$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_\theta}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\vec{v_r} + \vec{v_\theta})$$

$$= \underbrace{\vec{r} \wedge m\vec{v_r}}_{0} + \vec{r} \wedge m\vec{v_\theta} = \vec{r} \wedge m\vec{v_\theta}$$

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v_\theta}$ con $\vec{v_\theta} = r\dfrac{d\theta}{dt}$, ma $|\vec{L}|$ costante

significa che $|\vec{L}| = m r v_\theta = m r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$, se assumo m costante, allora deduco che:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{COSTANTE}$$

Proviamo a calcolare l'area dA, spazzata da P.

$$dA = A_{\hat{POP'}} = r\,d\theta\,\frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}d\theta$$

per cui si definisce la velocità areale (velocità di spazzamento) dA/dt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{ma} \quad L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{quindi:}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}}$$

La conserv. di $L$ => velocità areale è costante

La traiettoria di un punto in un campo di forze centrali giace su un piano fisso passante per il centro ed è percorsa con velocità areale costante

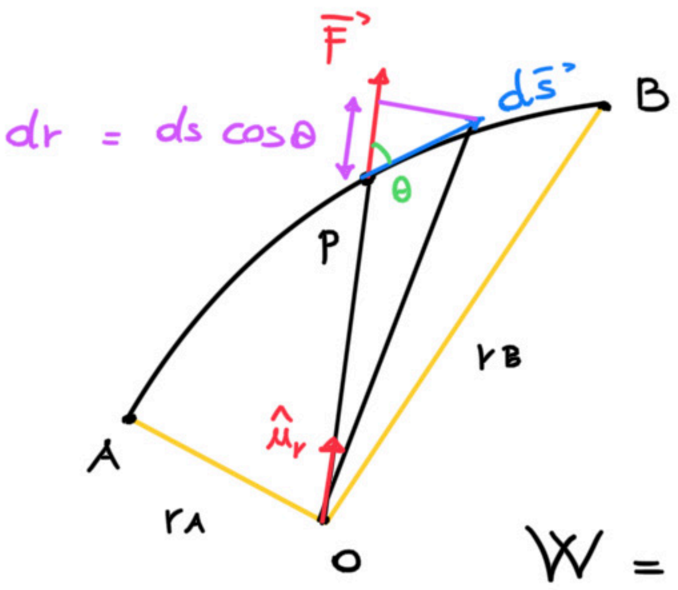
Osserviamo il caso di una traiettoria chiusa:

$$\frac{dA}{dt} = \text{COSTANTE} = \frac{A}{T}$$

con $A$ = area totale
$T$ = Tempo di percorrenza o periodo

$$\frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2mA}{L}}$$

• Conservatività delle forze centrali




$$dW = F(r)\,\hat{u}_r \cdot d\vec{s}$$

$$= F(r)\cdot dr$$

$$W = \int_A^B F(r)\,\underbrace{\hat{u}_r \cdot d\vec{s}}_{\text{Prod. scalare}}$$

$$W = \int_A^B F(r)\,\underbrace{ds\cdot\cos\theta}_{\text{in figura}}$$

$$W = \int_A^B F(r)\cdot dr = -(U_B - U_A)$$

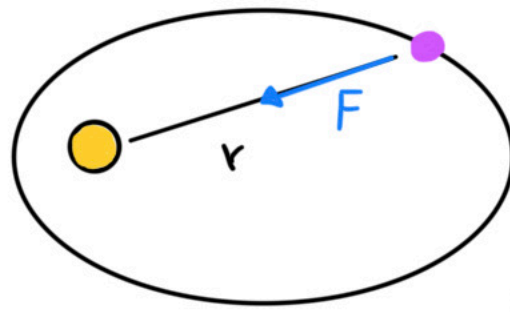
L'integrale della forza è l'energia potenziale, per cui:

$W = -\Delta U$ → il lavoro dipende solo dalle coordinate A, B quindi posso applicare la conserv. dell'energia.

LE FORZE CENTRALI SONO CONSERVATIVE

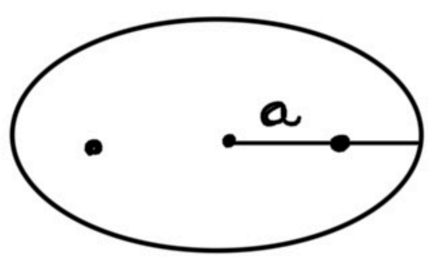
# Leggi di Keplero

① I pianeti percorrono orbite ellittiche attorno al sole, che occupa uno dei due fuochi dell'ellisse.




② La velocita' areale con cui il raggio vettore ($r$), che unisce il sole al pianeta, descrive l'orbita e' costante (dalle proprieta' delle forze centrali)

③ Il quadrato del periodo di rivoluzione e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita.

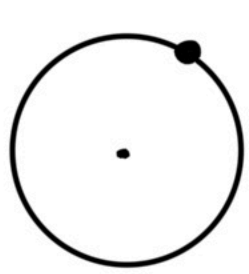



$$\boxed{T^2 = Ka^3}$$

▽ In realta' le leggi di Keplero sono una sorta di leggi cinematiche; tuttavia non spiegano cosa causi il moto

• Teoria della gravitazione universale (1687)

Le orbite dei pianeti possono essere approssimate con orbite circolari. Quindi:



▽ Velocita' areale costante => moto circolare uniforme

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \text{se } r \text{ costante allora } \frac{dA}{dt} \text{ costante}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ costante

▽ La forza agente sul pianeta deve essere centripeta:

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

con: $T$ = periodo di riv.
$r$ = raggio dell'orbita
$m$ = massa del pianeta

dalla 3ª Kep.

$$T^2 = K a^3 = K r^3$$

$$F = m \frac{4\pi^2 r}{K r^3} = \frac{4\pi^2 m}{K r^2}$$ (e' inversam. prop a $\frac{1}{r^2}$)

- quindi la forza del sole sui pianeti e' inversamente proporzionale a $r^2$, ossia al quad. della distanza

## Consideriamo il sistema sole - Terra

$m_T$ = massa Terra

$m_S$ = massa Sole

$F_{S,T}$ = forza sole su terra = $\frac{4\pi^2 m_T}{K_T r^2}$

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2 m_S}{K_S r^2}$$

ma:

$$F_{T,S} = F_{S,T} \Rightarrow \frac{\cancel{4\pi^2} m_T}{K_T \cancel{r^2}} = \frac{\cancel{4\pi^2} m_S}{K_S \cancel{r^2}}$$

Percio' si ottiene che:

$$\frac{m_T}{K_T} = \frac{m_S}{K_S}$$

## Costante universale di gravitazione (Definizione)

$$\boxed{G = \frac{4\pi^2}{m_T K_S} = \frac{4\pi^2}{m_S K_T}}$$

Per cui il modulo di $F_{S,T}$ e' simmetrica tra i due corpi:

## Legge di gravitazione universale

$$\boxed{F = G \frac{m_S m_T}{r^2}}$$

con direzione lungo la congiungente $T \rightarrow S$ e $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg\, s}$

" Date due masse di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza reciproca, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la congiungente, cui modulo dipende dal prodotto delle due masse e dal reciproco del quadrato della distanza"

Osservazione:

$$|F| = \frac{G m_T m}{r_T^2} = m\vec{g}$$

per cui:

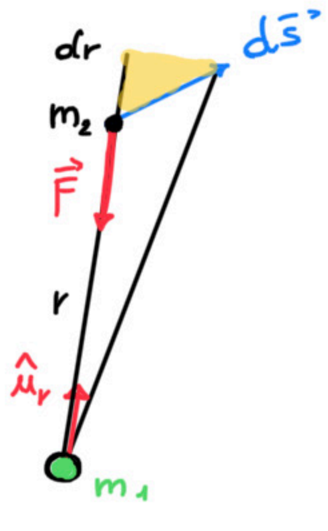
$$\boxed{g = \frac{G m_T}{r_T^2}}$$

Osservazione: In genere si assume che le masse siano concentrate nel centro degli oggetti e in genere che le masse che orbitano siano inerziali (massa gravitazionale = inerziale)

· Proprieta' della forza di gravita'

1. Azione a distanza
2. E' una forza centrale
3. E' conservativa

- Energia potenziale gravitazionale




$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{s}$$

$$= -\frac{G m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$W = \int_A^B -\frac{G m_1 m_2}{r^2} dr = -G m_1 m_2 \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

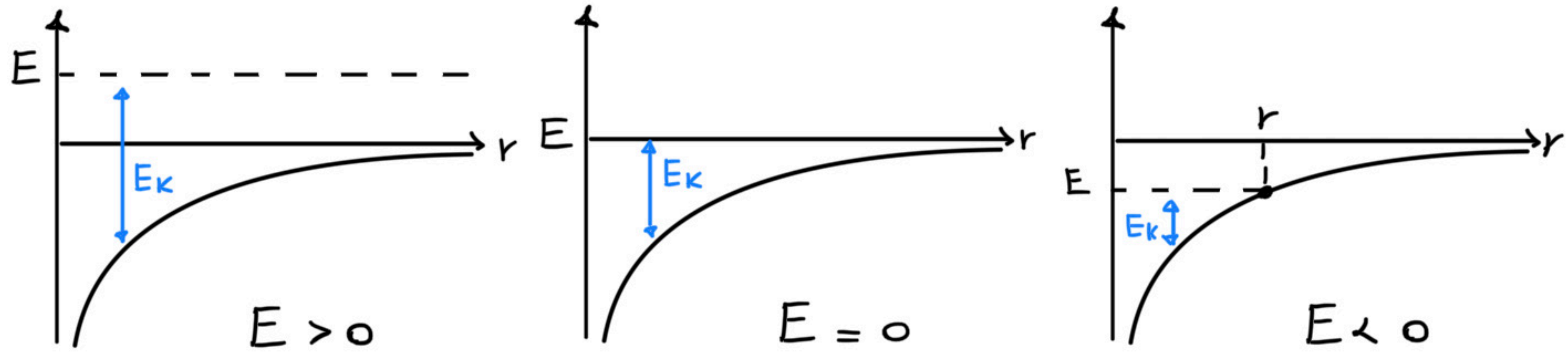
$$= -\left[\frac{G m_1 m_2}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -\frac{G m_1 m_2}{r_B} + \frac{G m_1 m_2}{r_A}$$

$$= U_A - U_B = -\Delta U$$

Quindi: $\boxed{U = -\frac{G m_1 m_2}{r}}$ Energia potenziale gravitazionale

Oss: $U = 0$ a distanza infinita

esempi di casi: Energia meccanica ($E = U + K$)




① Orbita Iperbolica
r può assumere qualsiasi valore, orbita aperta

② Orbita parabolica
r può assumere qualsiasi valore, orbita aperta

La traiettoria viene curvata (comete)

③ Orbita ellittica
Orbita chiusa, m ei legato a M (pianeti e satelliti)

• Definizioni

Afelio: Distanza massima dal sole
Perielio: Distanza minima dal sole

! Nel moto dei satelliti si usano i termini Apogeo e Perigeo in modo analogo ai termini precedenti

• Energia meccanica

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

Consideriamo un oggetto di massa m in orbita (di raggio r) attorno ad un oggetto di massa M.

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Big\} \text{Ricavo } v^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

per cui:

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}}$$

Energia meccanica per un'orbita chiusa ($E < 0$)

Osservazione: Il modulo dell'en. pot. e' sempre maggiore di quella cinetica

$|U| > |K|$

Esercizio: Ricavare la massa del sole, noto T della terra e la distanza terra-sole.

$T = 3{,}156 \cdot 10^7 \, s$

$a = \underline{1{,}496 \cdot 10^{11} \, m}$

1 unita' astronomica (U.A.)

Approssimiamo l'orbita della terra come circolare. Applico 3ª Kep.

$$\frac{G m_S \cancel{m_T}}{a^2} = m_T \omega_T^2 a = \cancel{m_T} \frac{4\pi^2}{T^2} a$$

$$m_S = \frac{4\pi^2 a^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}156 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{30} \, Kg$$

La massa del sole si indica con $\underline{M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \, Kg}$

Formule per esercizi:

Velocita': $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

Periodo orbita: $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

Momento angolare: $L = m\sqrt{GMr}$

## Energia meccanica:

**Circolari**

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

**Ellittiche:**

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$ (semiasse maggiore)

## Massa ridotta

$$\mu = \frac{M \cdot m}{M+m}$$

## Equazione del moto

Il moto relativo dei punti materiali sottoposti alla interazione gravitazionale e' equivalente al moto di un punto materiale con massa ridotta e sottoposto ad una forza uguale alla forza di interazione.

Equazione del moto di m rispetto a M e' uguale a quella in un sistema inerziale sostituendo la massa con quella ridotta

$$\boxed{\vec{F} = \mu \cdot \vec{a}}$$

- **Energia**

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}$$

conviene usare le coordinate polari:

$v_r$, $v_\theta$ con $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad e \quad v_\theta = \frac{d\theta}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{GMm}{r}$$

ricordiamo che:

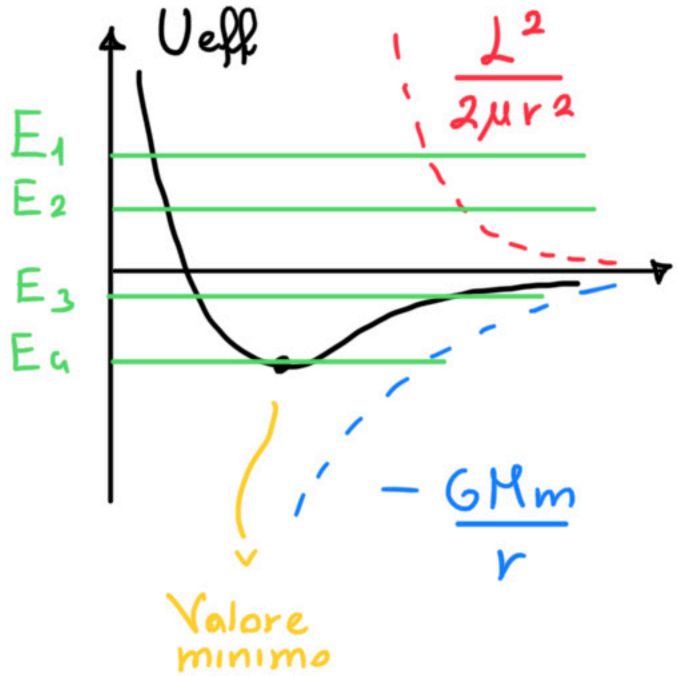
$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right)\right] - \frac{GMm}{r}$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{\text{En. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}}_{\text{Energia potenziale centripeta}} - \frac{GMm}{r}$$

Epot efficace

$$\overbrace{U_{eff}}^{} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{GMm}{r}$$

• Grafico di en. pot. efficace




- $E_1, E_2$, valore minimo del raggio, orbita aperta → IPERBOLE O PARABOLA
- $E_3$, Valore minimo al valore massimo del raggio → ORBITA ELLITTICA
- $E_4$, valore minimo = valore massimo → ORBITA CIRCOLARE

Esercizio (sulle slide)

---

Trasferimento di Hohmann (Homann Transfer)

Come passare da un orbita circolare all'altra con $\underbrace{\text{efficienza}}_{\text{minor quantità di carburante}}$?
Si usa un'orbita ellittica, i cui afelio e perielio, intersecano tangenzialmente le orbite circolari. Dato che il costo della spedizione in orbita di un satellite e' proporzionale al suo peso, occorre che l'oggetto sia più leggero possibile.

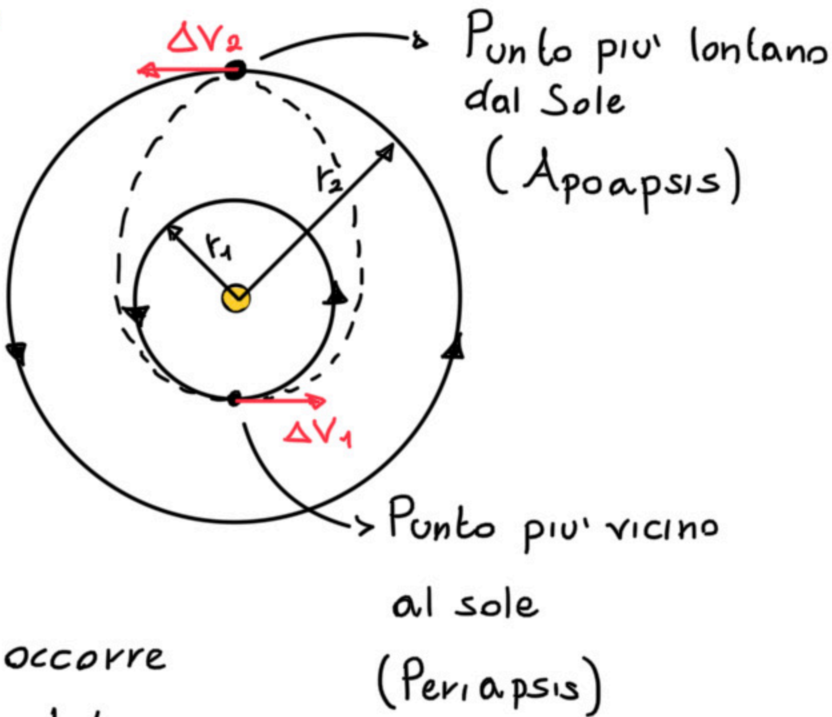
Esempio: Andare dalla terra su Marte

$r_1$ = Raggio orbita della Terra

m = Massa astronave

$r_2$ = Raggio orbita esterna

M = Massa centrale




1. Occorre un impulso per entrare nell' orbita ellittica (fase di uscita dall' orbita di raggio $r_1$)
2. Quando arriva all' Apoapsis, occorre un secondo impulso per uscire dall' orbita ellittica (fase di entrata nell' orbita di raggio $r_2$)

! Occorre determinare i valori di $\Delta\vec{V_1}$ e $\Delta\vec{V_2}$

Periapsis: $V_p$ = Velocita' nel punto piu' vicino

Apoaxis: $V_a$ = Velocita' nel punto piu' lontano

Per le orbite circolari:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

Per le orbite ellittiche occorre sapere quanto vale il semiasse maggiore, si nota che: $\underline{2a = r_1 + r_2} = r_p + r_a$

! Effettivamente io non conosco il centro dell' orbita ellittica, ma so sicuramente che $r_1 < a < r_2$ per costruzione.

Cerco i valori di:

$$E_1 \text{ (energia per } r_1) = -\frac{GMm}{2r_1}$$

$$E_2 \text{ (energia per } r_2) = -\frac{GMm}{2r_2}$$

$$E_e \text{ (energia per ellisse)} = -\frac{GMm}{2a}$$

• In che ordine sono messe? Osservo i raggi per cui: $\frac{1}{r_2} < \frac{1}{a} < \frac{1}{r_1}$

$E_1 < E_e < E_2$ ← e ribalto per i segni negativi

Quindi:

$E_1$ e' l'energia + negativa quindi occorre fornire energia per spostare su orbita ellittica

$E_2$ ha energia superiore a $E_e$, quindi occorre fornire energia per uscire dall' orbita ellittica ed entrare nell'orbita circolare finale.

Occorre un impulso per entrare nell'orbita ellittica e un impulso per uscirne, per cui per l'Impulso va considerata il valore della forza e la durata di accensione dei razzi.

Le velocita' in gioco sono:

$v_p$ e $v_a$, e $v_{c1}$ e $v_{c2}$ (orbite circolari)

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_p - v_{c1} \\ \Delta v_2 &= v_{c2} - v_a \end{aligned}\right\} \Delta v_{TOT} = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \qquad v_{c2} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$$

Come calcolo $v_p$ e $v_a$? Applico la conservazione di E e L all'apogeo e al perigeo.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} \\ m v_a r_a = m v_p r_p \end{cases}$$

Io so che nell'orbita ellittica si conserva l'energia meccanica:

$$E_m = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$-\frac{GM}{a} = v^2 - 2\frac{GM}{r}$$

$$v^2 = -\frac{GM}{a} + 2\frac{GM}{r} =$$

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Ricordiamo ora che $2a = r_1 + r_2 = r_p + r_a$

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$