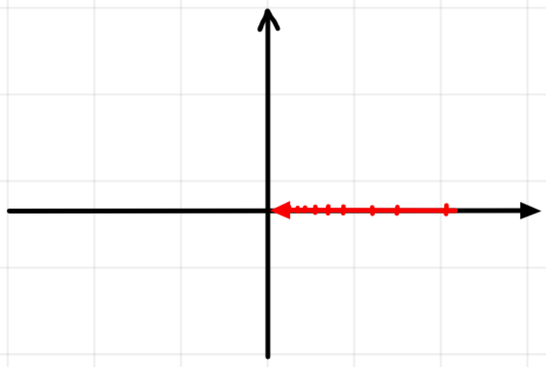
LIMITI E CONTINUITÀ: ESERCIZI

esercizio 1

$f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4}$ dominio: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



Studio $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ per vedere
1. se esiste
2. quanto vale

Cerchiamo se ci sono delle successioni di punti / delle direzioni in cui il limite è facile

Poiché al num. ho un prodotto, se metto x o $y = 0$ il limite è facile (⟵)

Prendo una successione di punti P_n fatta da punti del tipo $(1/n, 0)$

$f(P_n) = f(1/n, 0) = 0 \quad \forall n$ perché si annulla il numeratore

Ora mi muovo lungo la bisettrice, al fine di bilanciare il grado tra num. e den.

Prendo una successione di punti lungo la bisettrice, tipo $Q_n = (1/n, 1/n)$

$$f(Q_n) = f(1/n, 1/n) = \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^4}{2} = \frac{1}{2}$$

↳ il limite non esiste, perché

$$\lim_{n\to+\infty} f(P_n) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} f(Q_n) = \frac{1}{2}$$

Più semplicemente, anche senza scrivere esplicitamente le successioni, mi restringo prima alla direzione $y = 0$ e poi alla direzione $x = y$, che danno limiti diversi

come posso controllare tutti i modi per avvicinarsi al punto $P_0 = (x_0, y_0)$

Coordinate polari

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$ e controllo se dipende da θ oppure no

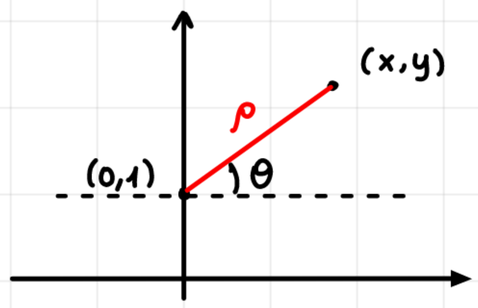
esercizio 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \longrightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{2\cdot\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos^2\theta\sin\theta = 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Il limite esiste e fa 0

esercizio 3

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-y+1}{x+y-1}$ con $x \neq 1-y$



Provo in coordinate polari

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta + 1$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta - \rho\sin\theta - 1 + 1}{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + 1 - 1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ dipende da $\theta \Rightarrow \nexists$ limite

Senza coordinate polari avrei preso 2 direzioni:

- retta $y = 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x,1) = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x-1+1} = 1$$

- retta $y = x+1$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x+1) = \lim_{x\to 0} \frac{x - x - 1 + 1}{x + x + 1 - 1} = 0$$

$\nexists$ limite

esercizio 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ è continua in $(0,0)$?

Devo dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

coordinate polari:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^2} = \sin\theta\cos\theta$$ fa $0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k}{2}\pi$

$\longrightarrow$ il limite non fa $\emptyset$

restringimento alle rette $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$ dipende da $m \longrightarrow$ il limite non fa $\emptyset$

esercizio 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ $\exists a$ per cui f è continua ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} = a$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos^4\theta + \rho\sin^3\theta = \lim_{\rho\to 0} \rho\,(\rho\cos^4\theta + \sin^3\theta) = 0$$

Se $a = 0 \Rightarrow f(x,y)$ continua

esercizio 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$ è continua in $(0,0)$?

con le rette:

$y = mx \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{m} = 0$ se $m \neq 0$

se $m = 0$ siamo su $y = 0$ e quindi $f(x,y) = 0$

$\longrightarrow$ su tutte le rette il limite fa $\emptyset$

ma ciò non basta!

coordinate polari: $= \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ $\sin\theta$ può tendere a 0 e dare $\frac{0}{0}$

Neanche le coordinate polari aiutano

Prendo come direzione la parabola $y = x^2$

$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$ $\longrightarrow$ il limite non esiste

esercizio 6

$$\lim_{x^2+y^2\to +\infty} \frac{y - x^2 + x^4 + y^6}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\rho\to +\infty} \frac{\rho\sin\theta - \rho^2\cos^2\theta + \rho^4\cos^4\theta + \rho^6\sin^6\theta}{\rho^2}$$

raccolgo ρ^2 o ρ^4 ?

$$\lim_{\rho\to\infty} \underbrace{\frac{\sin\theta}{\rho}}_{\to 0} - \cos^2\theta + \underbrace{\rho^2\cos^4\theta + \rho^4\sin^6\theta}_{\text{limitato}}$$

Raccolgo ρ^2

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^2 \left(\underbrace{\frac{\sin\theta}{\rho^3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}}_{\to 0} + \underbrace{\cos^4\theta + \rho^2\sin^6\theta}_{\geq 1} \right) = +\infty$$

E se avessi raccolto ρ^4 ?

$$\lim_{\rho\to +\infty} \rho^4 \left(\underbrace{\frac{\sin\theta}{\rho^5}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\cos^2\theta}{\rho^4}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\cos^4\theta}{\rho^4}}_{\to 0} + \sin^6\theta \right)$$ indeterminato

$0 \leq \cdot \leq 1$, se tendesse a 0 avrei $\infty \cdot 0$

esercizio 7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^6}$$

polari: $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\sin^4\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^6\sin^6\theta}$ difficile

Scelgo alcune traiettorie più semplici, come $y = 0$ o $x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$

$\longrightarrow \nexists$ limite

$\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{0+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = +\infty$

esercizio 8

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y^2}{y^6} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Provo con $x = y^3$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^8}{2y^6} = 0$$

Ipotizzo che il limite sia 0 e provo a verificarlo col teorema dei carabinieri

$$\longrightarrow \quad 0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^6} \leq ?$$

devo trovare qualcosa che $\longrightarrow 0$

Sicuramente $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^6} \leq \dfrac{x^2y^2}{y^6} = \dfrac{x^2}{y^4}$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0 \longrightarrow \text{il limite di partenza fa } 0$$

esercizio 9

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin^2 x \cdot \log(2-y)}{x^2+(y-1)^2}$$

! Non voglio applicare subito le c. polari perché avrei $\sin(\rho\cos\theta)$ e $\log(2-\rho\sin\theta-1)$!

Uso i limiti notevoli

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\overbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}^{1}\cdot x^2 \cdot \overbrace{\frac{\log(1+(1-y))}{1-y}}^{1}\cdot(1-y)}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\cdot(1-y)}{x^2+(y-1)^2} \cdot \overbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\log(1-(1-y))}{1-y}}^{1}$$

studio questo

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\cdot(1-\rho\sin\theta-1)}{\rho^2\cos^2\theta+(\rho\sin\theta+1-1)^2} = \lim_{\rho\to 0} -\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} -\rho\cos^2\theta\sin\theta = 0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

esercizio 10

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x-y} \qquad \text{CE: } x\neq y \rightsquigarrow \theta\neq\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x-y} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho(\cos\theta-\sin\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\overset{\to 0}{\rho^2}\,\overbrace{\cos^2\theta\sin\theta}^{\text{limitato}}}{\underbrace{\cos\theta-\sin\theta}_{\neq 0 \text{ ma può tendere a } 0}} \longrightarrow \frac{0}{0}$$

Provo $y = x + x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+x^4)}{x-x-x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6}{-x^4} \longrightarrow \nexists \text{ limite perché dx} \neq \text{sx}$$

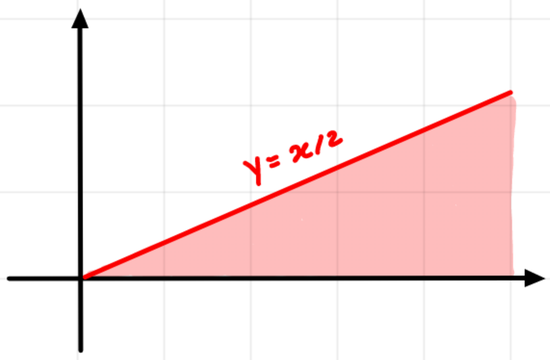
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^6}{-x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3(1+x^3)}{-x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x^3)}{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^6}{-x^4} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3(1+x^3)}{-x^4} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x^3)}{-x} = +\infty$$

esercizio 11

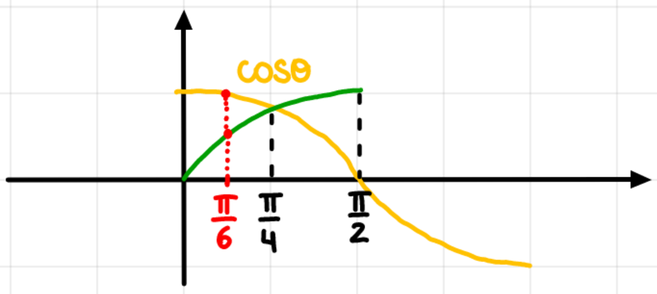
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x-y} \longrightarrow$$ risolvi ma su $x \geq 0$ e $0 < y < \frac{x}{2}$

↳ mi posso avvicinare a 0 restando nella zona rossa



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x-y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho(\cos\theta - \sin\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \overset{0}{\rho^2} \frac{\overbrace{\cos^2\theta \sin\theta}^{\text{limitato}}}{\underbrace{\cos\theta - \sin\theta}}$$

$\cos\theta \neq \sin\theta \quad \forall \theta \in [0, \pi/6]$
inoltre è anche discosto da 0



$$\cos\theta - \sin\theta > \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} > 0$$

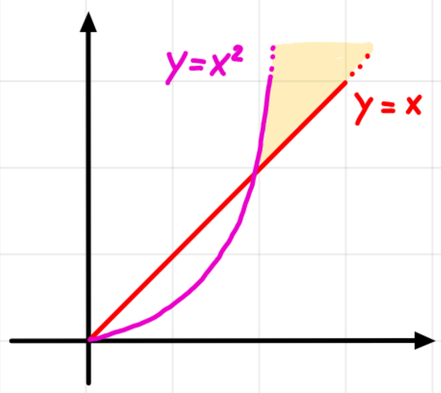
esercizio 12

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$$

Se $y=0 \longrightarrow \lim_{x^2\to+\infty} \frac{0}{1+x^2} = 0$

Se $x=0 \longrightarrow \lim_{y^2\to+\infty} \frac{y^6}{1+y^2} = +\infty$

$\longrightarrow \nexists$ limite



Adesso vincoliamo il dominio su $0 < x < y < x^2$

In tale dominio $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

coordinate polari:

$$\lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}}} \frac{\rho^6 \sin^6\theta}{1+\rho^2} = +\infty$$

$\sin^6\theta \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$

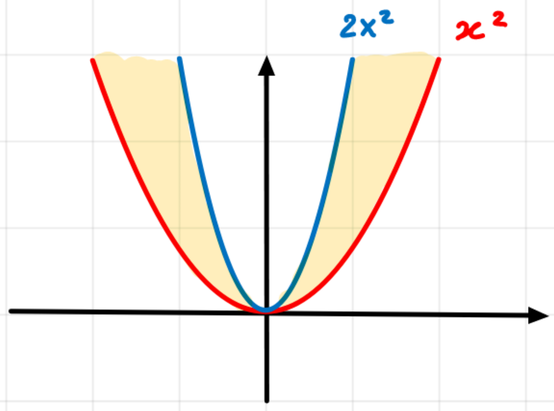
$+\infty$

DERIVABILITÀ : ESERCIZI

esempio 1

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{se altrove} \end{cases}$$



▸ Dimostra che è derivabile ma non continua

continuitá: La funzione non è continua perché il limite fuori dal dominio fa 0 e dentro fa 1

derivabilitá: Se prendo un qualsiasi vettore passante per zero, questo non sarà mai interamente contenuto nel dominio tra le due parabole, ma avrà sempre almeno un piccolo pezzo fuori.
Ciò è dovuto al fatto che le due parabole in zero hanno tangente orizzontale
Qualsiasi retta che passa per l'origine almeno per un pezzo sta fuori dalla parabola, e quindi la funzione sulle rette, almeno per un pochino, è costantemente 0 (valore della funzione fuori dal dominio)

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall v \mid \|v\| = 1$ perché $\forall v \; \exists$ segmento che ha direzione v, passa da $(0,0)$ e non entra nella zona gialla $\Rightarrow$ su quel segmento $f \equiv 0$

esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$

ⓐ
$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{2y^3x}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{3y^2(x^2+y^2) - y^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_2^3}{h^2 \underbrace{(v_1^2+v_2^2)}_{\substack{=1 \\ \|v\|=1}}} \cdot \frac{1}{h} = v_2^2$$

<u>oss</u>: se $v = (1,0) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}$

se $v = (0,1) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$

esercizio 3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x y$

1. derivate parziali su $\mathbb{R}^2$
2. $\frac{\partial f}{\partial v}$ in $(0,0)$
3. diff in $(0,0)$ e $d_{(0,0)} f\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$
4. piano tg al grafico

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y$

   $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x$

2. $\|v\| = 1$ $\quad v = (v_1, v_2)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hv_1} \cdot \cancel{h} v_2 - 0}{\cancel{h}} = v_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_2$$

3. $f \in C^1 \Rightarrow$ vale il teo del differenziale totale $\longrightarrow$ f è differenziabile

$$d_{(0,0)} f[v] = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0} v_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=1} v_2 = v_2 \longrightarrow d_{(0,0)} f[v] = v_2$$

$$d_{(0,0)} f\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot 2 = 2$$

4. Piano tangente a $z = f(x,y) \longrightarrow$ Prendo lo sviluppo di Taylor

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{d_{(0,0)} f\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}}_{y} + o\left(\left\|\begin{matrix}x-0\\y-0\end{matrix}\right\|\right)$$

$$f(x,y) = 0 + y + o\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\| \longrightarrow \text{il piano tg è } z = y$$

esercizio 4

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \blacktriangleright\ f \text{ è diff su } \mathbb{R}^2$$

Sicuramente su $(x,y) \neq (0,0)$ f è diff perché è C^1

In $(x,y) = (0,0)$: a. calcolo le derivate parziale (con rapp. incrementale)

a. $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ analogamente

↪ non so se il diff esiste, ma se esiste $d_{(0,0)} f[v] = 0$

Allora faccio il limite $v = (h, k)$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{d_{(0,0)} f\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^4 k^2}{h^2 + k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^4 k^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 0 \ ?$$

coordinate polari: $h = \rho \cos\theta$

$k = \rho \sin\theta$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^6 \cos^4\theta \sin^2\theta}{(\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta)^{3/2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\overset{3}{\cancel{6}}} \cos^4\theta \sin^2\theta}{\cancel{\rho^3}} = 0 \longrightarrow \text{il diff } \exists \text{ ed è nullo}$$

esercizio 5

$$f : \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. $d_{(1,0)} f \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $d_{(0,0)} f \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b. la funzione è la stessa di prima, quindi $d_{(0,0)} f \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$

a. $d_{(1,0)} f \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$

↪ faccio d. parziali e ho finito

STUDI DI FUNZIONE

esercizio 1

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = 9x^2 - 2xyz - z^2 + z^2x^2 - 2y^2 + 1$

▶ Verificare che $(0,0,0)$ è p.to critico e classificarlo

Soluzione

$f_x = 18x - 2yz + 2z^2x$

$f_y = -2xz - 4y$

$f_z = -2xy - 2z + 2zx^2$

$\nabla f(0,0,0) = 0 \longrightarrow (0,0,0)$ è p.to critico

$f_{xx} = 18 + 2z^2$ $\quad f_{yy} = -4$ $\quad f_{zz} = -2 + 2x^2$

$f_{xy} = -2z$ $\quad f_{yx} = -2x$ $\quad f_{zx} = -2y + 4zx$

$f_{xz} = -2y + 4zx$ $\quad f_{yz} = -2x$ $\quad f_{zy} = -2x$

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 18 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = -2 \end{matrix} \longrightarrow (0,0,0) \text{ sella}$$

esercizio 2

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

▶ Studiare la funzione

Segno: $f > 0$ perché esponenziale

Inf f: L'inf è 0 perché $f > 0$ e $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} e^{-(x^2+y^2)} = 0$

Sup f: le sup è $< +\infty$ perché il dominio di f è tutto $\mathbb{R}^2$ e $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f = 0$

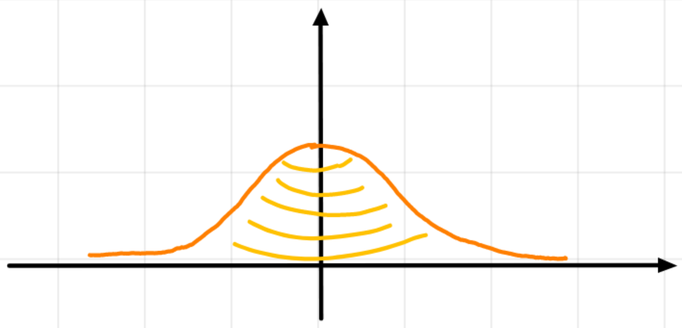
le sup $\equiv$ max, perché la funzione è continua e limitata

Troviamo il p.to di max con le derivate

$$\nabla f = \left(-2x\, e^{-(x^2+y^2)},\ -2y\, e^{-(x^2+y^2)}\right) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

Siccome so che c'è un max, e l'unico p.to critico è $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ è p.to di max

$f(0,0) = 1$: $\operatorname{Max}_{\mathbb{R}^2} f$



OSS: f ha una simmetria di rotazione

In coordinate polari dipende solo da ρ

esercizio 3

$f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 + 1$

▸ Piano tg, concavitá, sviluppo al 2° ordine nei punti $(0,1)$ e $(0,0)$

$f \in C^2 \Rightarrow$ tutte le domande hanno senso

$f_x = 3x^2 + 2xy$

$f_y = x^2 + 2y$

$f_{xx} = 6x + 2y$

$f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 2x$

Sviluppo:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + o\left(\left|\begin{matrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{matrix}\right|^2\right)$$

oppure

$$f(x,y) = f(P_0) + d_{P_0}f[P-P_0] + \frac{1}{2}(P-P_0)^T H_f(P_0)(P-P_0) + o(|P-P_0|^2)$$

<u>Nel punto $(0,1)$</u>

Piano tg: $2 + 0\cdot(x-0) + 2(y-1) = 2 + 2y - 2 = 2y \longrightarrow z = 2y$

concavitá: $H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \longrightarrow$ convessa

<u>Nel punto $(0,0)$</u>:

Piano tg: $z = 1 + 0(x) + 0(y) = 1$

concavitá: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

Poiché un autovalore è 0 allora $(0,0)$ è p.to critico degenere

Non può essere un max perché $\lambda_2 > 0$ e quindi in una direzione cresco

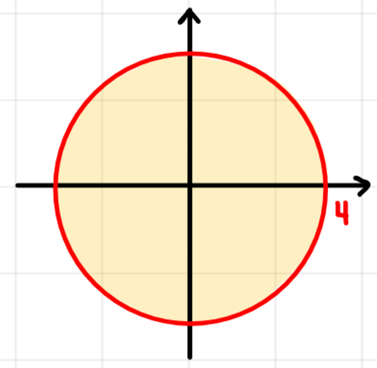
Io non ho informazioni lungo la direzione $x \longrightarrow$ studio $f(x,0) = x^3 + 1$

$f(x,0)$ ha un flesso in $x = 0$

↳ $(0,0)$ non è né max, né min, né sella

esercizio 4

$f(x,y) = xy\sqrt{16-x^2-y^2}$



Dominio: $16-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 16 \longrightarrow$ cfr di raggio 4

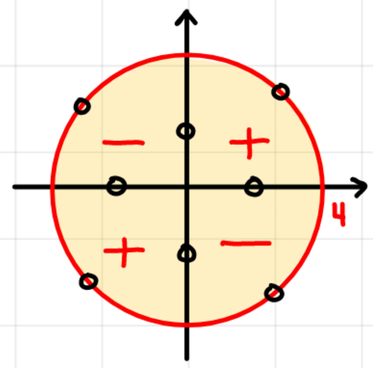
⚠ $f \in C^2$ su $\{x^2+y^2<16\}$,

perché la derivata della radice non è definita quando $\sqrt{16-x^2-y^2}=0$ ⚠

Segno: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2=16 \end{array}\right\} f \equiv 0$

se x,y concordi $\longrightarrow f>0$

se x,y discordi $\longrightarrow f<0$



Se osservo ogni spicchio (ex il primo quadrante), l'insieme è compatto e f è continua, quindi per Weierstrass mi aspetto di trovare un max/min su A

Dal segno, mi aspetto un p.to critico su ogni spicchio (x Fermat)

(2 max locali, 2 min locali)

Vediamo dove si annulla il gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y\sqrt{16-x^2-y^2} & \frac{1}{2}\frac{-2x^2y}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \\ x\sqrt{16-x^2-y^2} & \frac{1}{2}\frac{-2xy^2}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(16-x^2-y^2) - x^2y = 0 & ** \\ x(16-x^2-y^2) - xy^2 = 0 & * \end{cases}$$

$$(x+y)(16-x^2-y^2) - (x+y)xy = 0$$

$$(x+y)(16-x^2-y^2-xy) = 0$$

I. $x+y=0 \longrightarrow x=-y$ lo metto in *

$-y(16-y^2-y^2)+y^3=0$

$-16y+y^3+y^3+y^3=0$

$y(3y^2-16)=0$

$\longrightarrow$ $y=0 \longrightarrow x=0$

$y=\sqrt{\frac{16}{3}} \longrightarrow x=-\sqrt{\frac{16}{3}}$

$y=-\sqrt{\frac{16}{3}} \longrightarrow x=\sqrt{\frac{16}{3}}$

II. $16-x^2-y^2=xy \longrightarrow$ lo metto in **

$xy^2-x^2y=0$

$xy(y-x)=0 \longrightarrow y=0 \longrightarrow x=0$

$x=y \longrightarrow 16-3x^2=0 \longrightarrow x=\sqrt{\frac{16}{3}} \longrightarrow y=\sqrt{\frac{16}{3}}$

$x=-\sqrt{\frac{16}{3}} \longrightarrow y=\sqrt{\frac{16}{3}}$

Punti critici

$(0,0) \longrightarrow$ né max né min

$(\sqrt{16/3}, -\sqrt{16/3}) \longrightarrow$ min

$(-\sqrt{16/3}, \sqrt{16/3}) \longrightarrow$ min

$(\sqrt{16/3}, \sqrt{16/3}) \longrightarrow$ max

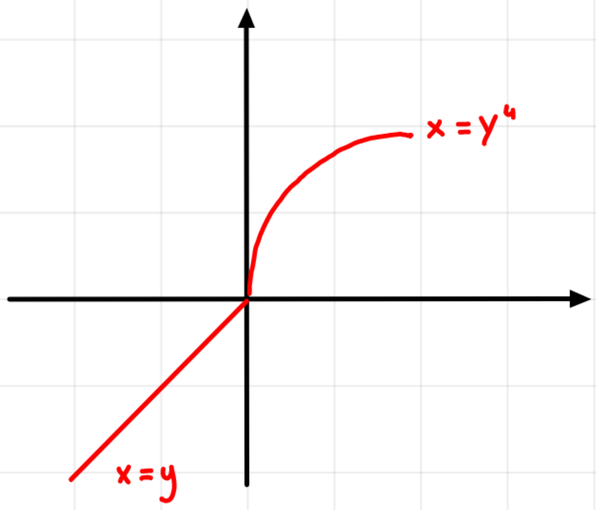
$(-\sqrt{16/3}, -\sqrt{16/3}) \longrightarrow$ max

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

esempio 1

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,t) & t \leq 0 \\ (t^2, \sqrt{t}) & t > 0 \end{cases}$$

▶ f è continua in $t=0$?



$\gamma(t): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

È una fz definita a tratti che per $t \leq 0$ percorre la bisettrice $x = y$, per $t>0$ la $x = y^4$

È una funzione in 1 variabile → faccio limite dx e sx

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+} \gamma(t) = \lim_{t\to 0^+} (t^2, \sqrt{t}) = (0,0) \\ \lim_{t\to 0^-} \gamma(t) = \lim_{t\to 0^-} (t,t) = (0,0) \end{array}\right\}$$

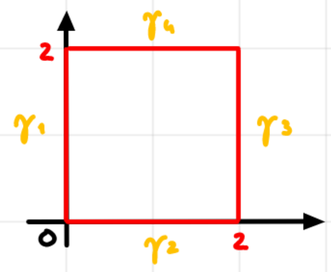
è continua perché $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \gamma(0) = (0,0)$

MAX - MIN VINCOLATI

esempio 1

$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3xy$

- Max e min di f su $D = \{0 \leq x,y \leq 2\}$
- Inf e sup di f su $\mathbb{R}^2$



Max e min $\exists$ x weierstrass

$f \in C^2 \longrightarrow f$ diff $\Rightarrow$ se i max e min sono interni li trovo col gradiente

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \longrightarrow y^4 - y = 0 \longrightarrow y(y^3 - 1) = 0 \begin{cases} y = 0 \longrightarrow x = 0 \\ y = 1 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$A = (0,0)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \longrightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

det $= -9 < 0 \longrightarrow$ sella ; l' Hessiano non ci aiuta

$B = (1,1)$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

det $= 27 > 0$

tr $= 12 > 0$

$\longrightarrow (1,1)$ minimo locale

Ricerco punti singolari sul bordo

$(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$

Ricerco p.ti critici sul bordo

- Su γ_2, $y = 0 \longrightarrow f(x,0) = x^3$ crescente su $0 < x < 2$

  Nessun p.to critico su γ_2
- Su γ_1, $x = 0 \longrightarrow f(0,y) = y^3$ crescente su $0 < y < 2$

  Nessun p.to critico su γ_1
- Su γ_4, $y = 2 \longrightarrow f(x,2) = x^3 + 8 - 6x$

  $\frac{d}{dx} f(x,2) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  Ho un punto critico su $\gamma_4 : (\sqrt{2}/2, 2)$
- Su γ_3, $x = 2$

  Ho un p.to critico su $\gamma_3 : (2, \sqrt{2}/2)$

Candidati : $(1,1)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, 0)$

$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(2, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, 0)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
-1	0	8	8	4	$8-4\sqrt{2}$ ≈ 2	$8-4\sqrt{2}$ ≈ 2

$(1,1)$ p.to di min assoluto

$(0,2)(2,0)$ p.ti di max assoluti

Inf e sup su $\mathbb{R}^2$

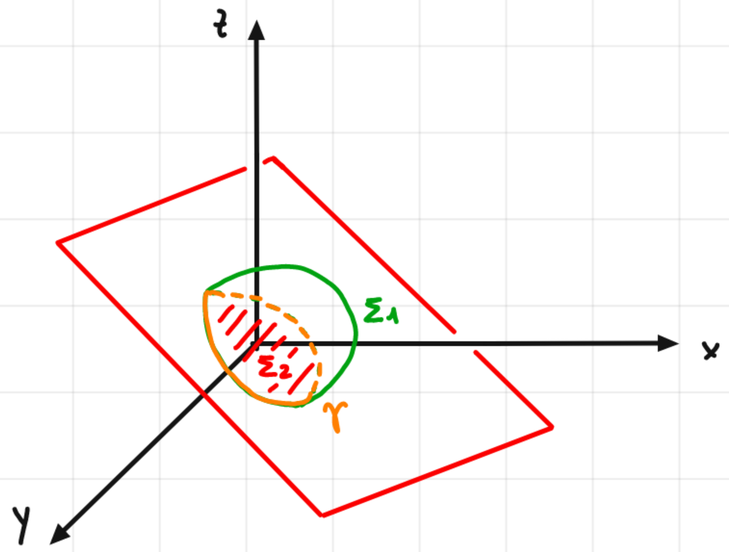
Prendo $f(x,0) = x^3 \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty \longrightarrow \sup(f) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty \qquad \inf(f) = -\infty$

esercizio (ora 40): si usa Lagrange

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x - y^2 + z$

$D = \{ x^2 + y^2 + z^4 \leq 4 , \quad x + z \geq 0 \}$



Il piano x+z=0 è quello che sul piano xz sarebbe la bisettrice del 2° e del 4° quadrante
x+z>0 è la parte che sta sopra il piano
Va intersecata con la sfera di centro O e raggio 2

Per Weierstrass ci sono Max e min di f su D

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \implies$ non ci sono p.ti critici interni: Max e Min sono su ∂D

$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \gamma$

$\Sigma_1 = \{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 4}_{g(x,y)} = 0 , \quad x + y > 0 \}$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

Uso Lagrange: $\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = -2\lambda y \\ 2z = \lambda \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$

⚠ così cerco i p.ti critici su tutta la sfera, poi scelgo quelli con $x + z > 0$

2 opzioni:
- $\lambda = -1 \longrightarrow x = z = -1/2 \quad ; \quad x + z < 0 \Rightarrow \notin \Sigma_1$
- $y = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow x = z = \sqrt{2}$

Su $\Sigma_2 \cup \gamma \qquad x + z = 0 \longrightarrow f|_{\Sigma_2 \cup \gamma} = -y^2$ e il max si ha se $y = 0$

il min si ha per y più grande possibile $(y = \pm 2)$

- $y = 0$ è tutto un diametro $S = \{ y = 0, \ x + z = 0$
- $y = \pm 2$ sono punti $P = (0, \pm 2, 0)$

Candidati: $A = (0,2,0)$, $B = (0,-2,0)$, $S = \{ y = 0, \ x + z = 0 \}$, $C = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

$f(C) = 2\sqrt{2}$

$f(A) = -4 \longrightarrow$ A,B p.ti di minimo

$f(B) = -4 \longrightarrow$ C p.to di massimo

$f|_S = 0$

SUPERFICI

esercizio teorico

Prendo una superficie Γ definita in maniera non esplicita : $\Gamma = \{ g(x,y,t) = 0 \}$

Suppongo che $\exists$ parametrizzazione regolare $\pi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

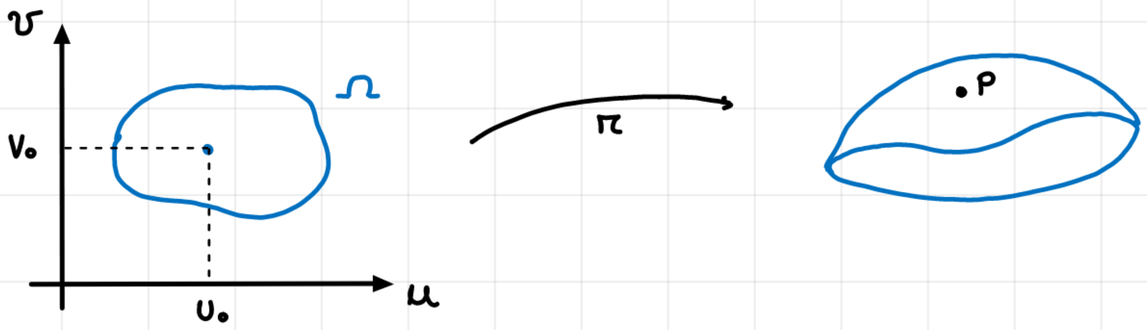
Preso $P \in \Gamma$

$\Rightarrow$ Voglio dim che $\nabla g(P) \perp \Gamma = \{ g(x,y,z) = 0 \}$, ovvero $\nabla g(P) \parallel \vec{n}_P$

Se vogliamo la versione bidimensionale di ciò che avevamo fatto per mostrare che in una curva il gradiente era perpendicolare alle curve di livello

dimostrazione :

$P = (x_0, y_0, z_0) = \pi(u_0, v_0)$



π manda P sulla superficie

$\pi(u,v)$ parametrizza Γ , quindi significa che $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ risolvono l'equazione che individua Γ , cioè $g(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0 \quad \forall u,v \in \Omega$

$\downarrow$

Se questa funzione fa 0 per ogni u,v vuol dire che se io derivo rispetto a u o rispetto a v ottengo 0

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$$

$\longrightarrow$ derivata della funzione composta

$$\longrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \langle \nabla g(\pi), \pi_u \rangle$$

in (x_0, y_0)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x_0, y_0) = \langle \nabla g(P), \pi_u(u_0, v_0) \rangle = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(x_0, y_0) = \langle \nabla g(P), \pi_v(u_0, v_0) \rangle = 0$$

$\Rightarrow \nabla g(P) \perp \text{Span}\{ \langle \pi_u(u_0, v_0), \pi_v(u_0, v_0) \rangle$

$\Rightarrow \nabla g(P) \perp$ piano tg in P

$\Rightarrow \nabla g(P) \perp$ alla superficie in P

$\Rightarrow \nabla g(P) \parallel \vec{n}_P \quad \square$

esercizio

$f(x,y) = \frac{x^6+y^6}{6} - xy \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. classificare p.ti critici
2. trovare inf e sup
3. parametrizzare $z = f(x,y)$
4. trovare piano tg in qualche punto (con Taylor e parametrizzazione)

① $\nabla f = \begin{pmatrix} x^5 - y \\ y^5 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y^5 = x \\ y = x^5 \end{cases} \to \begin{cases} y = x^5 \\ (x^5)^5 = x \end{cases} \to \begin{cases} x^{25} = x \\ y = x^5 \end{cases} \to \begin{cases} x(x^{24}-1) = 0 \\ - \end{cases}$

P.ti critici $\to$ $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (-1,-1)$

Calcolo Hessiano

$H_f = \begin{pmatrix} 5x^4 & -1 \\ -1 & 5y^4 \end{pmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det = -1 < 0 \to$ sella

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det = 25 - 1 = 24 > 0$, $tr = 10 > 0 \to$ p.to minimo

$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \to$ p.to minimo

② $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} \frac{x^6+y^6}{6} - xy = \lim_{\rho \to \infty} \frac{\rho^6\cos^6\theta + \rho^6\sin^6\theta}{6} - \rho^2\cos\theta\sin\theta = \lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \underbrace{\left(\underbrace{\rho^4 \underbrace{\frac{\cos^6\theta + \sin^6\theta}{6}}_{\text{discosto da 6 e } > 0}}_{\text{discosto da 0 e } > 0} - \overbrace{\cos\theta\sin\theta}^{\text{limitato}}\right)} = +\infty$

Il $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ è $+\infty$

$\downarrow$

f ha minimo su $\mathbb{R}^2$ e i p.ti critici sono A, B, C $\Rightarrow$ B, C che sono minimi locali sono anche minimi assoluti

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = f(1,1) = f(-1,-1) = -\frac{2}{3}$

esercizio

$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 - 2y^2$

$A = \{x^2+y^2 \leq 4\}$ ▸ Max e Min di f su A

f è continua, A compatto $\Rightarrow \exists$ Max e min di f su A

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2) - 2x \\ 4y(x^2+y^2) - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x(2x^2+2y^2-1) = 0 \\ 4y(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$y = 0 \rightarrow 2x(2x^2-1) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 0 \rightarrow 4y(y^2-1) = 0 \rightarrow y = 0$, $y = \pm 1$

$\longrightarrow$ p.ti critici interni: $(0,0)$, $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$

Analizziamo il bordo ∂A

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$f(\gamma(t)) = 12 - 4\sin^2 t$

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -8\cos t \sin t = 0 \iff t = \frac{k\pi}{2} \longrightarrow (2,0), (-2,0), (0,2), (0,-2)$

Non ho punti singolari perché:
- $f \in C^\infty$
- ∂A regolare

Conclusioni

$f(0,0) = 0$

$f(0,1) = f(0,-1) = -1$ → min

p.ti min

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

$f(0,2) = f(0,-2) = 5$

$f(2,0) = f(-2,0) = 12$ → max

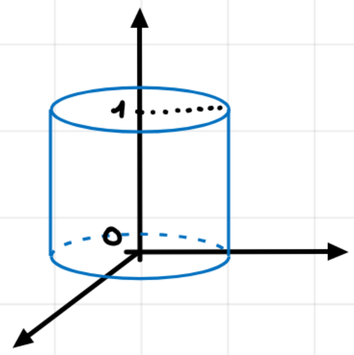
p.ti max

esercizio

$\Phi(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t) \qquad t \in [0,1]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

▶ disegnare, dire se è regolare, piano tg alla superficie in $\Phi(1/2, \pi/2)$



La proiezione della superficie sul piano xy è una cfr $\longrightarrow$ cilindro

↳ su tutti i piani //

Per dire se è regolare verifico che $\vec{n}$ sia ben definito $\forall$ punto

$\Phi_t = (0,0,1)$

$\Phi_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$$\Phi_t \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{sempre} \neq 0$$

↳ $\|\Phi_t \times \Phi_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \neq 0$

Φ regolare

Per il piano tg: $\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 1/2)$

$\Phi_t(1/2, \pi/2) = (0,0,1)$

$\Phi_\theta(1/2, \pi/2) = (-1,0,0)$

$\longrightarrow$ Piano tg: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(1/2, \pi/2) + \overbrace{\lambda \Phi_t(1/2, \pi/2) + \rho \Phi_\theta(1/2, \pi/2)}^{\text{span di } \Phi_t(1/2,\pi/2),\, \Phi_\theta(1/2,\pi/2)}$

$(x,y,z) = (0, 1, \frac{1}{2}) + \lambda(0,0,1) + \rho(-1,0,0)$

$$\begin{cases} x = -\rho \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} + \lambda \end{cases} \longrightarrow \text{piano tg: } y = 1$$

CURVE : ESERCIZI

esercizio 1

Disegnare un grafico con le curve di livello

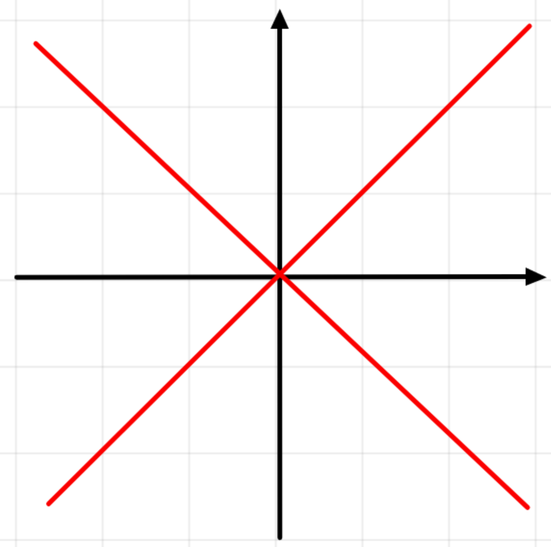
$f(x,y) = x^2 - y^2$

Voglio disegnare $z = x^2 + y^2 \longrightarrow \Gamma_c = \{x^2 + y^2 = c\} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Significa disegnare l'intersezione del grafico col piano z=c, e lo faccio per ogni c
L'insieme di queste curve va a ricostruire il grafico

Partiamo da $z = 0$

$\Gamma_c = \{x^2 - y^2 = 0\} = \{x - y = 0\} \cup \{x + y = 0\}$

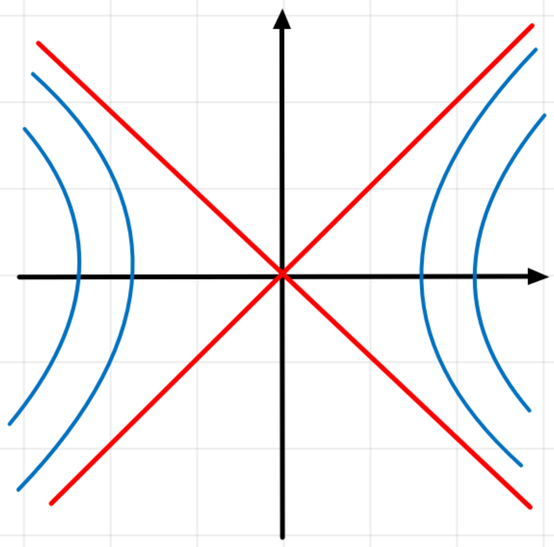


Ora considero $c > 0$

$\Gamma_c = \{x^2 - y^2 = c\}$

↳ Iperbole con fuochi nell'asse x, con semiassi di lunghezza $\sqrt{c}$

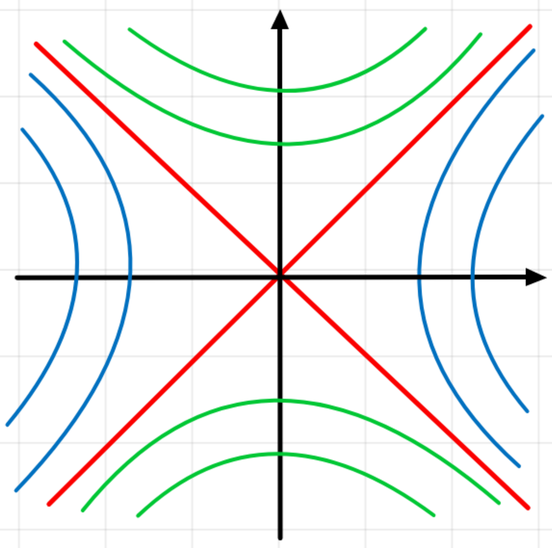
$\longrightarrow$ diventano ↑ al crescere di c



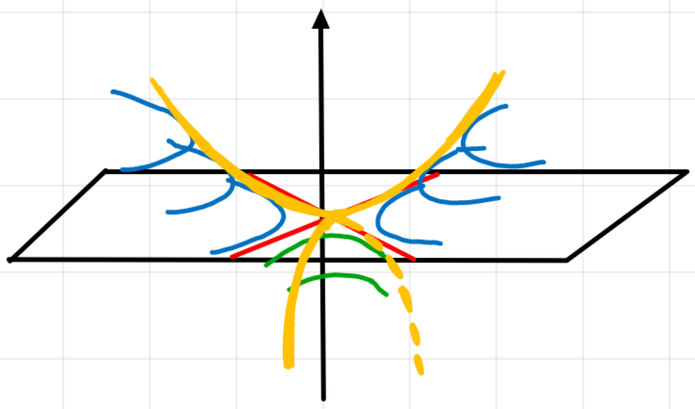
Ora considero $c < 0$

$\Gamma_c = \{x^2 - y^2 = c\} = \{y^2 - x^2 = \overbrace{-c}^{>0}\}$

↳ Iperbole con fuochi sull'asse y, con semiassi di lunghezza $\sqrt{-c}$



Provo a disegnarlo in 3d



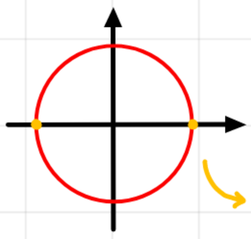
$\rightsquigarrow$ punto di sella
x eccellenza

TEOREMA DEL DINI : ESERCIZI

esercizio

Vediamo quando $\{x^2+y^2=1\}$ si può scrivere come grafico $y=f(x)$ o $x=f(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 \iff (x,y) = (1,0)$ o $(-1,0)$



qui non si può descrivere come $y=f(x)$, perché $\forall x$ ho 2 valori di y

↳ però si può scrivere come $x=g(y)$

perché $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) \neq 0$

Analogamente non posso descrivere il grafico come $x=g(y)$ in $(0,1)$ e $(0,-1)$

esercizio

$A = \{y+2x+\sin x = 0\}$ dire se A è localmente un grafico rispetto a x o y

CASO 1: $y=f(x)$

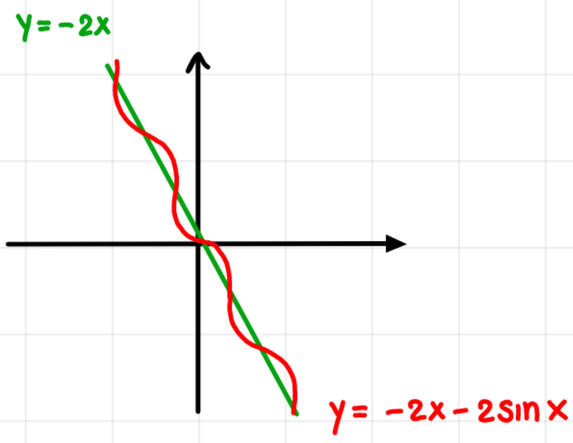
$y = -2x - \sin x$ ⟶ si può risolvere direttamente senza Dini

CASO 2: $x=g(y)$

Il procedimento diretto qui è difficile ⟶ Uso Dini

$F(x,y) = y+2x+\sin(x)$ è C^1

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2+\cos(x)$ sempre positivo ⟶ $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ sempre ⟶ posso scrivere $F(x,y)=0$ come grafico $x=g(y)$ in ogni suo punto



$y = -2x - \sin x$

esercizio

$\Gamma = \{(y-x^2)^2 = 0\}$ si può usare Dini? Γ è regolare

$F = (y-x^2)^2$ è C^1

$\nabla F = (2(y-x^2)(-2x),\ 2(y-x^2)) = 0$ in ogni punto di Γ ⟶ Dini <u>NON</u> si può applicare mai

perché $(x,y) \in \Gamma \iff (y-x^2)^2 = 0 \iff y-x^2 = 0$

Γ regolare? $\Gamma = \{(y-x^2)^2=0\} = \{y-x^2=0\} = \{y=x^2\}$

Γ è una parabola $\Rightarrow$ si può esplicitare come grafico ed è SEMPRE regolare

Il fatto che Dini non funzioni non dipende qui dalla regolarità della curva, ma dal modo in cui è descritta
Dini non funziona perché il quadrato fa sì che sembri che ogni valore viene preso 2 volte

esercizio

Trovare il vettore tg a $\Gamma = \{x^2 + 3y^2 = 4\}$ (se esiste)

e scrivere l'equazione della retta tg in $(2,0)$

Soluzione: Posso usare vari metodi

1. Parametrizzo A

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

2. Uso il Teorema del Dini per parametrizzare

$F(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4$

- F è C^1
- $\nabla F = (2x, 6y) \longrightarrow \nabla F = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ $\longrightarrow$ Γ è ovunque regolare e si può scrivere il vettore tg

  ↳ ma in ogni caso $F(0,0) = -4$ quindi $(0,0) \notin \Gamma$

Fisso $(x_0, y_0) \in \Gamma$

Se $F_y(x_0, y_0) \neq 0 \Longrightarrow$ vicino a (x_0, y_0) Γ si scrive come $y = f(x)$ e $f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$

$f'(x_0) = -\dfrac{2x_0}{6y_0}$

Posso parametrizzare Γ come $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{\gamma}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2x_0}{6y_0} \end{pmatrix}$

Il vettore tg è $\dot{\gamma}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2x_0}{6y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y_0 \\ -2x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Retta tangente in $(2,0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$

$x = 2$

$y = -\lambda 4 \longrightarrow$ vuol dire y qualsiasi $\longrightarrow$ Retta: $x = 2$

esercizio

Studiare qualitativamente la curva $C = \{e^{xy} + x - y - e = 0\}$ vicino a $(1,1)$

Intanto $(1,1) \in C$ quindi l'esercizio ha senso

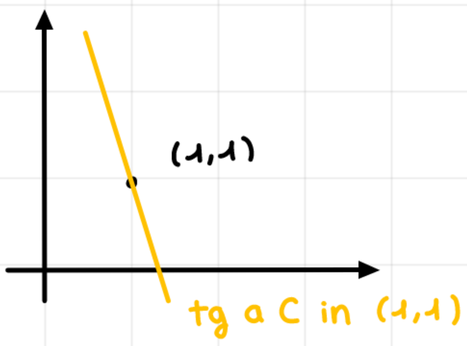
$F(x,y) = e^{xy} + x - y - e$ e usiamo Dini per vedere la tg a C in $(1,1)$

$\nabla F(1,1) = (ye^x + 1, xe^y - 1) = (e+1, e-1)$

Quindi in $(1,1)$ C è regolare e il vettore tangente è $\perp \nabla F$

$\longrightarrow$ $v = (1-e, 1+e) \sim (-1, 3)$ (per fare un disegno approssimativo)

In (1,1) C è grafico di y=f(x) e f decrescente



Alternativamente noto che:

$y'(1) = -\dfrac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = \dfrac{1-e}{1+e} < 0$ e quindi $y(x)$ decrescente

▶ concavitá in $(1,1)$?

Io so che $F(x, y(x)) = 0$ quindi $e^{xy(x)} + x - y(x) - e = 0$ vicino $x = 1$

<u>Derivo in x</u>

$e^{xy(x)} \cdot (y(x) + xy'(x)) + 1 - y'(x) = 0$ derivata prima

$x = 1$

$y(1) = 1$ $\longrightarrow$ $e(1 + y'(1)) + 1 - y'(x) = 0$ $\longrightarrow$ $y'(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$

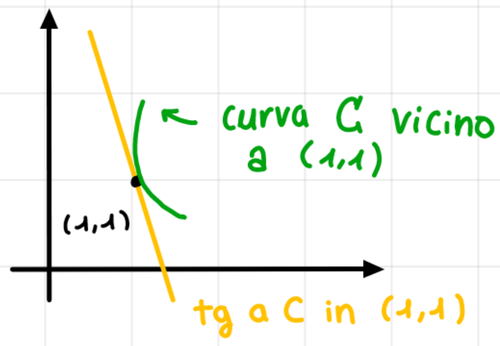
Derivata seconda:

$e^{xy(x)} \cdot (y(x) + xy'(x))^2 + e^{xy(x)} \cdot (y'(x) + y'(x) + xy''(x)) - y''(x) = 0$

in $x = 1$ $\longrightarrow$ $y(1) = 1$ $\longrightarrow$ $y'(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$

$\hookrightarrow$ $e \cdot \left(1 + \dfrac{1-e}{1+e}\right)^2 + e\left(2 \cdot \dfrac{1-e}{1+e} + y''(1)\right) - y''(1) = 0$

$\hookrightarrow$ $y''(1) = \dfrac{2e(e^2-3)}{(e-1)^3} > 0$ $\longrightarrow$ concavitá verso l'alto



MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

esempio:

$\Phi(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$ $\quad t \in (0,1)$ $\quad \theta \in [0,2\pi]$

Abbiamo già visto che il piano tangente in P = (0, 1, 1) era y=1
Possiamo farlo adesso in un altro modo

Abbiamo
$$\left.\begin{array}{l} \Phi_t(\pi/2, 1) = (0,0,1) \\ \Phi_\theta(\pi/2, 1) = (-1,0,0) \\ P = (0,1,1) \end{array}\right\}$$
per trovare il piano tg posso usare i coseni direttori

Trovo il normale : $\Phi_t \times \Phi_\theta = (0,1,0)$

E so che $ax + by + cz = d$ è $\perp$ (a,b,c) da nozioni geometriche

$\longrightarrow$ $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = d$ $\longrightarrow$ $\{y = d\}$ è normale a $\Phi_t \times \Phi_\theta$

$P \in \{y = d\} \Rightarrow y = 1$

esercizio

Per quali α la curva $\Gamma_\alpha = \{x^2y^2 + 2y^4 - y^2 = \alpha\}$ è regolare ?

Chiamo $F(x,y) = x^2y^2 + 2y^4 - y^2 = \alpha$

$\Gamma_\alpha = \{F(x,y) = \alpha\}$

È chiaro che il gradiente è il solito
Mi conviene trovarlo, vedere dove si annulla, e una volta trovati tali punti vedo a che curve di livello appartengono.
Tutti gli altri valori di alfa vanno bene, perchè per tali alfa nessun punto annulla il gradiente

$\nabla F = (2xy^2, 2x^2y + 8y^3 - 2y) = 0$ quando $y = 0$ e x qualsiasi

$x = 0$ e $8y^3 - 2y = 0 \rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

A quali curve $\in$ questi punti ?

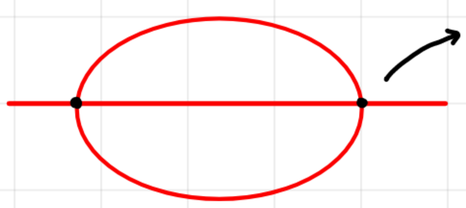
$F(x,0) = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \longrightarrow (x,0) \in \Gamma_0$

$F(0,1/2) = F(0,-1/2) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \longrightarrow (0, \pm 1/2) \in \Gamma_{-1/4}$

$\forall \alpha \neq 0, -\frac{1}{8}$ Γ_α è regolare perché posso applicare Dini

Vediamo Γ_0 e $\Gamma_{-1/8}$

$\Gamma_0 = \{x^2y^2 + 2y^4 - y^2 = 0\} = \{y^2(x^2 + 2y^2 - 1) = 0\} = \underbrace{\{y = 0\}}_{\text{retta}} \cup \underbrace{\{x^2 + 2y^2 = 1\}}_{\text{ellisse}}$



la curva non è regolare

$\Gamma_{-1/8} = \{ x^2y^2 + 2y^4 - y^2 = -1/8 \}$

So che $(0, \frac{1}{2})$ e $(0, -\frac{1}{2})$ sono minimi locali di $F(x,y)$, perché:

- $\nabla F(0, 1/2) = \nabla F(0, -1/2) = 0$
- $H_f(0, 1/2) = H_f(0, -1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Allora in $\Gamma_{-1/8}$ i punti $(0, 1/2)$ e $(0, -1/2)$ sono isolati $\Rightarrow$ non formano una curva

esercizio 3: ora 38

$$S = \left\{ (x,y,z) \,, \quad \begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = 5 \\ x^2+y^2 = 1 \end{matrix} \right\} \,, \quad f(x,y,z) = xy + z$$

A) Provare che S ha parametrizzazione regolare e trovare la retta tangente in (1, 0, 2)
B) Trovare max e min se esistono di f su S

Soluzione

Ⓐ Scrivo $g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 5$, $g_2 = x^2 + y^2 - 1$ $\longrightarrow$ così $S = \{ g_1 = 0 \,, \; g_2 = 0 \}$

$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$

$\nabla g_1 \neq 0$ e $\nabla g_2 \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$ $\longrightarrow$ ma i punti del tipo $(0,0,z) \notin S$, perché $g_2(0,0,z) \neq 0$

Quindi su S $\nabla g_1 \neq 0$ e $\nabla g_2 \neq 0$

Poi devo verificare che non siano paralleli

$\nabla g_1 \parallel \nabla g_2 \iff z = 0$ ma i punti $(x,y,0) \notin S$ infatti se $z \neq 0$ $\left. \begin{matrix} g_1 = x^2+y^2-5 \\ g_2 = x^2+y^2-1 \end{matrix} \right\}$ non possono essere $= 0$ contemporaneamente

$\longrightarrow$ S regolare

Ora cerco la retta tangente

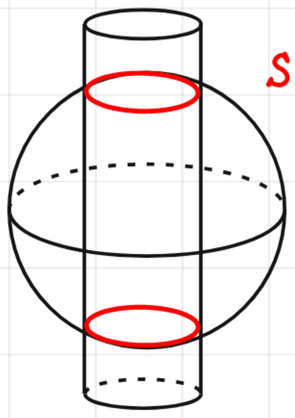
$\nabla g_1(1,0,2) = (2,0,4)$
$\nabla g_2(1,0,2) = (2,0,0)$ $\longrightarrow$ $\nabla g_1, \nabla g_2$ generano lo spazio normale ad S

$\hookrightarrow$ cerco un vettore $\perp$ a questi due $\longrightarrow$ $v = (0,1,0)$ è $\perp \nabla g_1$ e $\perp \nabla g_2$

Retta Tangente $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero $\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

y qualsiasi

Ⓑ f è C^1 , S compatto $\longrightarrow$ $\exists$ Max e min



S : è l'intersezione tra la sfera e il cilindro

Uso Lagrange: $\nabla f = (y, x, 1)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \lambda 2x + \mu 2x \\ x = \lambda 2y + \mu 2y \\ 1 = \lambda 2z + 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 5 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$z = \pm 2 \rightarrow$ infatti sono le quote delle due cfr.

$$\longrightarrow \begin{cases} y = (2\lambda + 2\mu)x \\ x = (2\lambda + 2\mu)y \\ z = \pm 2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = (2\lambda + 2\mu)x \\ x = (2\lambda + 2\mu)^2 x \quad * \\ z = \pm 2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ma $x^2+y^2 \neq 1$

$\rightarrow$ $(2\lambda+2\mu)^2 = 1 \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ z = \pm 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \pm 2 \end{array}$ tutte le combinazioni

candidati: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right)$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = \frac{5}{2}$ max

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right) = -\frac{5}{2}$ min

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right) = -\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) = \frac{3}{2}$

Soluzione alternativa

$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$

$\longrightarrow$ si vede che $v = (y, -x, 0)$ è $\perp \nabla g_1$ e ∇g_2

dire che $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \iff \nabla f \perp v \iff \langle \nabla f \cdot v \rangle = 0$

Potevo scrivere come sistema

$$\begin{cases} y \cdot y + x \cdot (-x) + 1 \cdot 0 = 0 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ x^2+y^2 = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 5 \end{cases}$$

esercizio 4

$S = \left\{ (x,y,z) \text{ tc } \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \right\}$ ▸ Studiare la regolarità di S_R

Se $0 < R < 1 \Rightarrow S_R = \emptyset$

Se $R = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$ è una cfr $\longrightarrow$ è regolare ma ⚠ attenzione $\nabla g_1 = \nabla g_2 = (2x, 2y, 0)$

Dini non si applica

se $R > 1 \longrightarrow S_R = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \pm R \end{array} \right\}$ è regolare e si dimostra come nell' es precedente

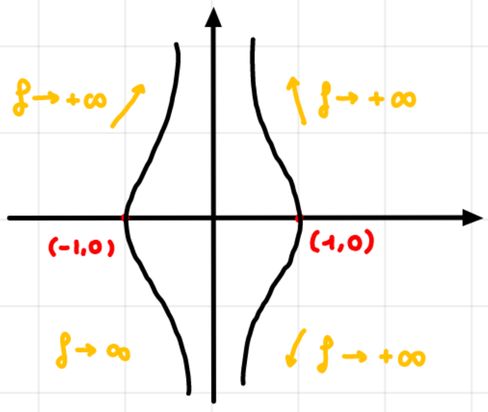
esercizio 5 (ora 39)

$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad C = \left\{ x^2 = \frac{1}{1+y^2} \right\}$ ▸ Max e min di f su C

soluzione

C non è compatto! ci sono successioni (x_n, y_n) tc $y_n \longrightarrow \infty$

Com'è fatto C?
- è simmetrico rispetto ad x e rispetto a y
- $\frac{1}{1+y^2} \leq 1$ e $= 1 \iff y = 0$
- $\frac{1}{1+y^2} \longrightarrow 0$ quando $y \longrightarrow \pm\infty$



$f(x,y) = x^2 + y^2 > y^2 \longrightarrow +\infty$ per $y \to \pm\infty$

$\sup_C f = +\infty \qquad \nexists \operatorname{Max}_C f$

Per una variante di Weierstrass $\exists$ min

$\longrightarrow$ cerco i punti critici di f su C con i moltiplicatori di Lagrange

$g(x,y) = x^2 - \frac{1}{1+y^2} \longrightarrow C = \{ g(x,y) = 0 \}$

$\nabla g = \left\{ 2x, \frac{2y}{(1+y^2)^2} \right\} = 0 \iff (x,y) = (0,0) \notin C \longrightarrow C$ regolare

NB: $x \neq 0$ perché altrimenti $y \to \infty$

NB: $x \neq 0$

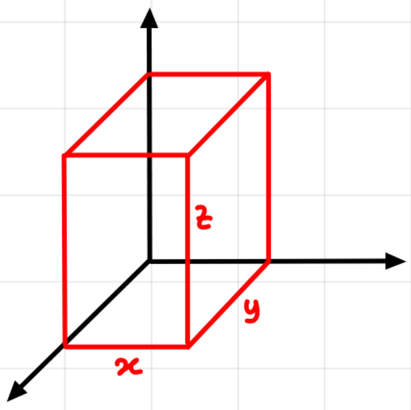
$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = \frac{2\lambda y}{(1+y)^2} \\ x^2 = \frac{1}{1+y^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \frac{y}{(1+y^2)^2} \\ x^2 = \frac{1}{1+y^2} \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow y = 0 \\ \searrow 1 = \frac{1}{(1+y^2)^2} \longrightarrow y = 0 \end{array}$$

punti critici: $(1,0)$ e $(-1,0)$

$f(1,0) = f(-1,0) = 1 \implies (1,0)$ e $(-1,0)$ sono minimi assoluti

esercizio 6: problema isoperimetrico

Prendo un parallelepipedo di lati x, y, z



$\mathrm{Vol}(R) = xyz$

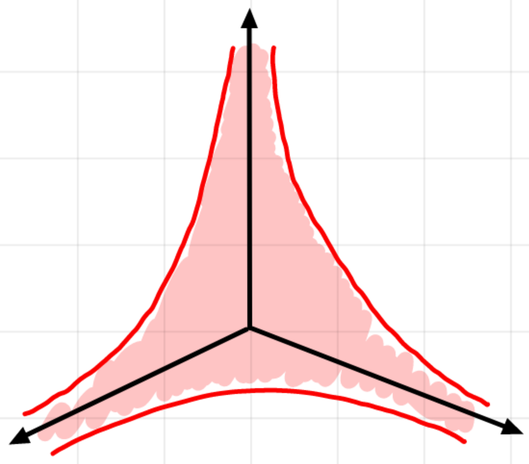
$\mathrm{Area}(R) = 2(xy + yz + zx)$

Problema: Fisso $\mathrm{Area}(R) = 2A_0$ con $A_0 = (xy + yz + zx)$

Voglio $\operatorname{Max} V(R)$

OSS: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \implies \mathrm{Vol}(R) = 0 \longrightarrow$ il max è nell' insieme $\left\{ \begin{array}{l} xy + yz + zx = A_0 \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{array} \right\}$

Vediamo come è fatto questo insieme



$g(x,y,z) = xy + yz + zx = A_0$

$f(x,y,z) = xyz$

Studio $\underset{f=A_0}{\mathrm{Max}}\, f$ e prendo solo i valori a coordinate > 0

$\nabla g = (y+z,\ x+z,\ y+x)$

$\nabla f = (yz,\ xz,\ xy)$

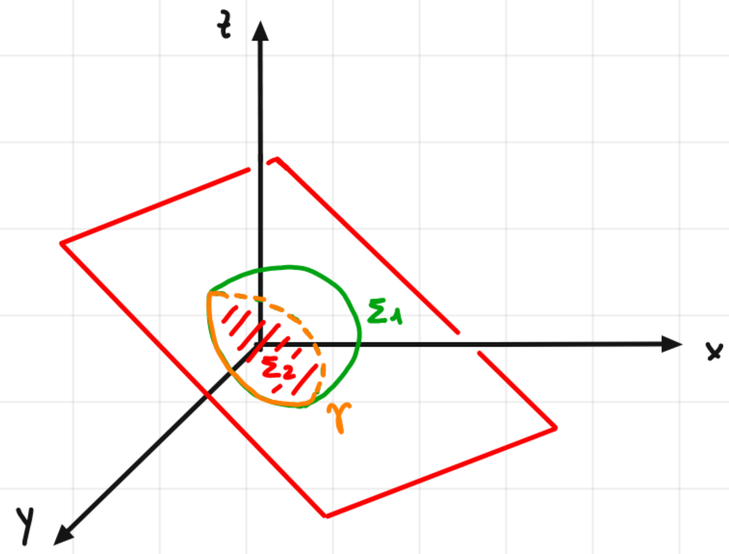
$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + zx = A_0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ si ottiene $x = y = z$, ovvero R è il cubo

esercizio (ora 40)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = x - y^2 + z$

$D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 , \quad x + z \geq 0 \}$



Il piano x+z=0 è quello che sul piano xz sarebbe la bisettrice del 2° e del 4° quadrante
x+z>0 è la parte che sta sopra il piano
Va intersecata con la sfera di centro O e raggio 2

Per Weierstrass ci sono Max e min di f su D

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \implies$ non ci sono p.ti critici interni: Max e Min sono su ∂D

$\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \gamma$

$\Sigma_1 = \{ \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 4}_{g(x,y)} = 0 , \quad x + y > 0 \}$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

Uso Lagrange: $\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = -2\lambda y \\ 2z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

⚠ così cerco i p.ti critici su tutta la sfera, poi scelgo quelli con $x + z > 0$

2 opzioni:
- $\lambda = -1 \to x = z = -1/2 \quad ; \quad x + z < 0 \implies \notin \Sigma_1$
- $y = 0 \to \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to x = z = \sqrt{2} \\ \to P = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) \end{matrix}$

Su $\Sigma_2 \cup \gamma \quad x + z = 0 \to f|_{\Sigma_2 \cup \gamma} = -y^2$ il max di f si ha per $y = 0$
il min si ha per y^2 più grande possibile $(y = \pm 2)$

- $y = 0$ ho tutto un diametro di massimi che chiamo $S = \{ y = 0 , \ x + z = 0 , \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \}$
- $y = \pm 2$ sono candidati minimi $A = (0,2,0)$, $B = (0,-2,0)$

Candidati: $A = (0,2,0)$, $B = (0,-2,0)$, $S = \{ y = 0, \ x + z = 0 , \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \}$, $C = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ punto singolare

$f(C) = 2\sqrt{2} \qquad f(B) = -4 \qquad \to A, B$ p.ti di minimo

$f(A) = -4 \qquad f|_S = 0 \qquad \to C$ p.to di massimo

oss: Come potrei parametrizzare γ ?

$\gamma = \{ x + z = 0 , \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \} \to \begin{matrix} x = -z \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{matrix}$ ellisse

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos\theta \\ 2 \sin\theta \\ -\sqrt{2} \cos\theta \end{pmatrix}$ coordinate ellittiche per x e y: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

esercizio

$f(x,y) = 4x + \frac{y}{2} + 3$ D è chiuso e limitato

$D = \{ x^4 + y^4 = 1 \}$ $\Rightarrow \exists \max_D f$ e $\min_D f$ ▸ Trova Max e Min

Chiamo $g = x^4 + y^4 - 1$

$\nabla g = (4x^3, 4y^3) = 0 \iff (x,y) = (0,0) \notin D$

D è regolare $\longrightarrow$ uso Lagrange

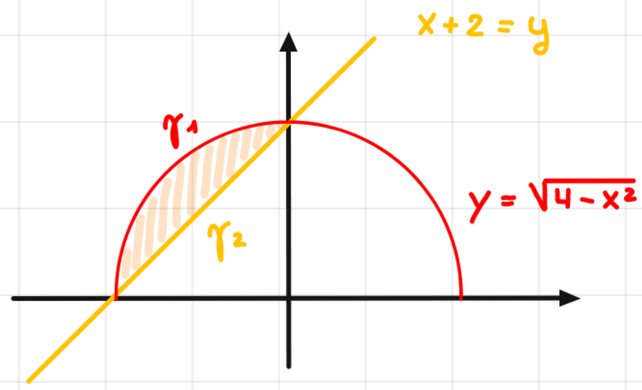
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = 4\lambda x^3 \\ 1/2 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x^3 = 1/\lambda \\ y^3 = 1/8\lambda \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = 1/\sqrt[3]{\lambda} \\ y = 1/\sqrt[3]{\lambda} \cdot 2 \end{matrix} \longrightarrow x = 2y$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 16y^4 + y^4 = 1 \end{cases} \longrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{17}} \longrightarrow P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{17}}, \frac{1}{\sqrt[4]{17}} \right) \text{ max}, \quad P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{17}} \right) \text{ min}$$

esercizio

$f(x,y) = y - x^2$

$D = \{ x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \}$



▸ Max e min ?

Max e min $\exists$ x W.

$\nabla f \neq 0 \Rightarrow$ Max e min $\in \partial D$

Studio $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t+2 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -2t \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \longrightarrow (x,y) = (1/2, 5/2) \notin \gamma_2$

$\longrightarrow$ non ho punti critici su γ_2

Studio $\gamma_1(\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in [\pi/2, \pi]$

$\frac{d}{d\theta} f(\gamma_1(\theta)) = \frac{d}{d\theta}(2\sin\theta - 4\cos^2\theta) = 2\cos\theta + 8\cos\theta\sin\theta = 2\cos\theta(1 + 4\sin\theta) = 0 \iff \begin{matrix} \cos\theta = 0 \notin \gamma_1 \\ \sin\theta = -\frac{1}{4} \notin \gamma_1 \end{matrix}$

non ci sono p.ti critici su γ_1

Restano solo i p.ti singolari $A = (0,2)$ e $B = (-2,0)$

$f(A) = 2$ MAX

$f(B) = -4$ min

INTEGRALI

esercizio 1

$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy \qquad T=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le \tfrac{x}{2}\} = \{0\le y\le 1 \quad 0\le x\le y2$$

$$\iint_T e^{y^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{2y} e^{y^2}dx\right)dx = \int_0^1 [e^{y^2}x]_{x=0}^{x=2y}\,dy = \int_0^1 2y\,e^{y^2}dy = [e^{y^2}]_0^1 = e-1$$

esercizio 2

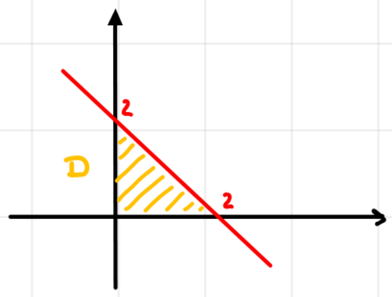
$f(x,y) = x+y^2$ su $D=\{1\le x^2+y^2\le 4\}$

$\Omega = \{0\le\theta\le 2\pi\ ,\ 1\le\rho\le 2\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2\int_0^{2\pi}\rho^2\cos\theta+\rho^3\sin^2\theta\,d\theta d\rho = \int_1^2\int_0^{2\pi}\rho^3\sin^2\theta\,d\theta d\rho = \int_1^2\rho^3 d\rho\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}\pi$$

esercizio 3

$\iint_D (x^2-y^2)\sin(x+y)^2\,dxdy$ su $D=\{y\ge 0\ ,\ x\ge 0\ ,\ x+y\le 2\}$



Utilizzo un cambio di variabile: $\begin{cases} v = x+y \\ u = x-y\end{cases}$

$(x^2-y^2)\sin(x+y)^2 \rightsquigarrow uv\sin(v^2)$ che è più facile

Come cambia D?

Questo cambio di variabile, lo abbiamo studiato e sappiamo che è lineare, è una rotazione e una dilatazione
Pertanto il triangolo D diventa un altro triangolo dopo il cambio di variabile

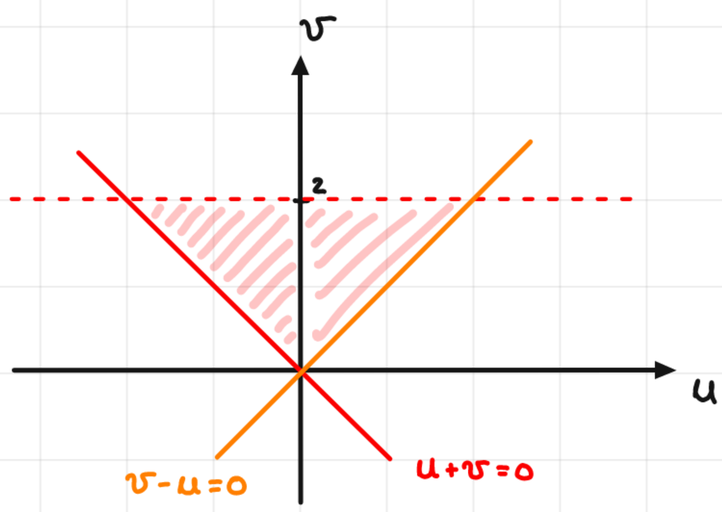
Quindi $\begin{matrix} 2x = u+v \\ 2y = v-u\end{matrix}$ il cambio è: $\Phi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\ ,\ \frac{v-u}{2}\right) \longrightarrow J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\det|J_\Phi| = 1/2$

$y\ge 0 \Rightarrow \frac{v-u}{2}\ge 0$

$x\ge 0 \Rightarrow \frac{u+v}{2}\ge 0 \longrightarrow \Omega = \{v-u\ge 0\ ,\ u+v\ge 0\ ,\ v\le 2\}$

$x+y\le 2 \Rightarrow v\le 2$



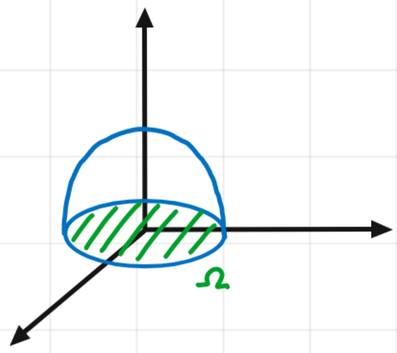
Ω è semplice, quindi

$$\iint f\,dxdy = \iint_\Omega \frac{uv\sin v^2}{2}\,du\,dv = \int_0^2\left[\int_{-v}^{v} uv\sin v^2\,du\right]dv =$$

$$= \int_0^2\Big(v\sin v^2\underbrace{\int_{-v}^{v} u\,du}_{=0}\Big)dv = 0 \qquad \text{perché} \quad \int_{-v}^{v} u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-v}^{v} = \frac{v^2-v^2}{2} = 0$$

esercizio 4

$D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad , \quad z \geq 0 \}$ ▸ Vol(D) ?



Lo facciamo per fili

Devo descrivere la base come un insieme da cui partono i fili, e devo scegliere la base in modo che tutti i fili che partono da lì coprono tutta la figura

$$D = \{ \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\Omega \text{ base}} \; ; \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \}$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz \; dx dy = \iint_{x^2+y^2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy =$$ passo in coordinate polari

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1-\rho^2} \, d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{3/2} \right]$$

INTEGRALI IMPROPRI

esercizio 1

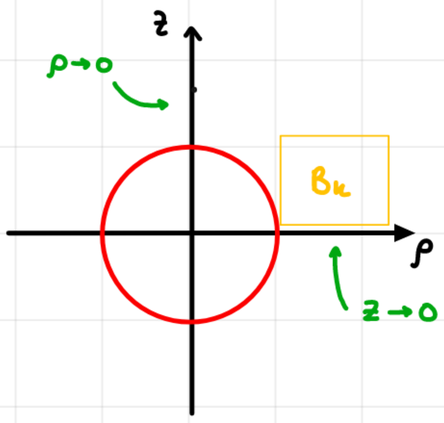
$f(x,y,z) = \dfrac{1}{z^3(x^2+y^2)^2}$ dire se è integrabile su $D = \{ x^2+y^2+z^2 \geq 1 \}$

Vedo se $\exists$ finito $\lim\limits_{k\to\infty} \iiint\limits_{B_k} \dfrac{1}{z^3(x^2+y^2)^2}$ $\rightsquigarrow$ come prendo B_k ?

Prima passo in coordinate cilindriche

$$\Phi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow |\det J_\Phi| = \rho$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z\geq 1} \frac{1}{z^3(x^2+y^2)^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} \iint\limits_{\rho^2+z^2\geq 1} \frac{\rho}{z^3\rho^4}\,d\rho\,dz\,d\theta = 2\pi \iint\limits_{\rho^2+z^2\geq 1} \frac{1}{z^3\rho^3}\,d\rho\,dz$$



Se $\dfrac{1}{z^3\rho^3}$ è integrabile su $\rho^2+z^2\geq 1$ allora f integrabile su D

$B_k = \{ 1 \leq \rho \leq 2,\ \frac{1}{k} \leq z \leq 1 \}$

Prendo dei Bk che non invadono tutto lo spazio, ma se già qui trovo che la funzione diverge allora a maggior ragione non sarà integrabile su tutto il dominio
Prendo dei Bk che si avvicinano all'asse z=0

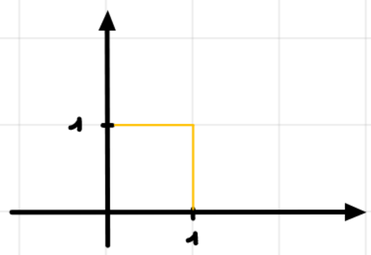
$$\iint\limits_{B_k} \frac{1}{z^3\rho^3}\,dz\,d\rho = \int_1^2 \int_{1/k}^1 \frac{1}{z^3\rho^3}\,dz\,d\rho = \underbrace{\int_1^2 \frac{d\rho}{\rho^3}}_{\text{finito}} \int_{1/k}^1 \frac{dz}{z^3}$$

$k\to\infty \Rightarrow \displaystyle\int_{1/k}^1 \frac{dz}{z^3} = +\infty$ diverge

La funzione non è integrabile su $\{\rho^2+z^2\geq 1\}$ e quindi f non è integrabile su D

esercizio 2

$\displaystyle\iint\limits_{0\leq x,y\leq 1} \left(\frac{y}{x^2}\right)^\alpha dxdy$ è finito per qualche α ?



Suppongo $\alpha > 0$

↳ Ho problemi in $x \to 0$

$B_k = \{ \frac{1}{k} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \}$

$$\int_{1/k}^1 \frac{1}{x^{2\alpha}} \underbrace{\int_0^1 y^\alpha}_{\text{limitato}} \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^{-2\alpha+1}}{2\alpha+1} \right]_{1/k}^1 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{-2\alpha+1}} \cdot \frac{1}{2\alpha+1}$$

$\alpha < \frac{1}{2} \to$ converge
$\alpha \geq \frac{1}{2} \to$ diverge

Suppongo $\alpha < 0$

↳ Ho problemi in $y \to 0$

$B_k = \{ 0 \leq x \leq 1,\ 1/k \leq y \leq 1 \}$

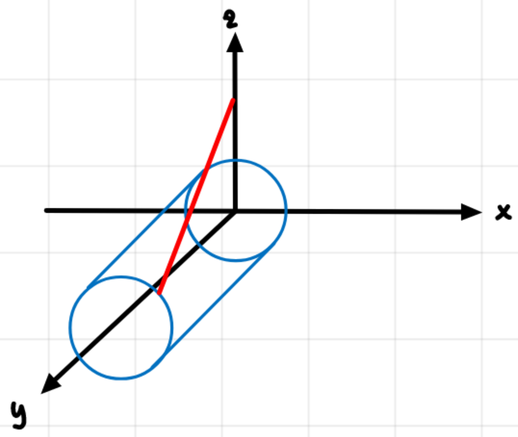
$$\iint \left(\frac{x^2}{y}\right)^{-\alpha} dxdy = \underbrace{\cancel{\int_0^1 x^{-2\alpha}\,dx}}_{\text{limitato}} \cdot \int_{1/k}^1 y^\alpha\,dy = \left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{1/k}^1 = -\frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{k^{\alpha+1}}$$

$\alpha > -1 \longrightarrow$ converge
$\alpha \leq -1 \longrightarrow$ diverge

L'integrale converge per $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$

esercizio 3

$$\iiint_C y\,dx\,dy\,dz \quad \text{su } C = \{ x^2+z^2 \le 1 \ , \ z+y \le 1 \ , \ y \ge -1 \}$$



$$C = \{ -1 \le y \le 1-z \ , \ x^2+z^2 \le 1 \}$$

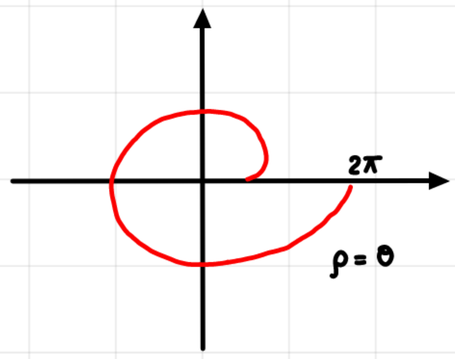
$$\iint_{x^2+z^2\le 1} \left[\int_{-1}^{1-z} y\,dy \right] dx\,dz = \iint_{x^2+z^2\le 1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{1-z} dx\,dz$$

$$\frac{1}{2} \iint_{x^2+z^2\le 1} (1-z)^2 - 1 \ dx\,dz = \frac{1}{2} \iint_{x^2+z^2\le 1} z^2 - 2z \ dx\,dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 \sin^2\theta - 2\rho^2 \sin\theta \ d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{2}{3}\sin\theta \ d\theta = \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\sin\theta \, d\theta}}_{0} + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

esercizio 4

Calcolare il baricentro di

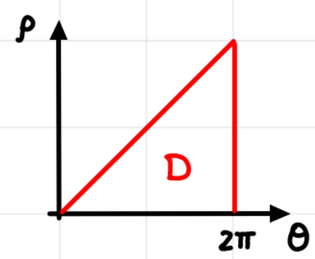


$$\beta = \frac{1}{A(S)} \cdot \begin{pmatrix} \iint_S x \\ \iint_S y \end{pmatrix}$$

Si scrive bene in coordinate polari

$\Phi : D \to S$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{con } D :$$



$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} \rho \, d\theta \, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2}{2} d\theta = \left[\frac{\theta^3}{6} \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3$$

$\iint_S x\,dx\,dy$ integro nell'altro senso

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_\rho^{2\pi} \rho^2 \cos\theta \, d\theta \right] d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 \sin\theta \right]_\rho^{2\pi} d\rho = \int_0^{2\pi} -\rho^2 \sin(\rho) \, d\rho = -\left[\rho^2 \cos\rho - 2\int_0^{2\pi} \rho\cos\rho \, d\rho \right] = \dots = 4\pi^2$$

$\longrightarrow$ x del baricentro è $\dfrac{4\pi^2}{\frac{4}{3}\pi^3} = \dfrac{3}{\pi}$

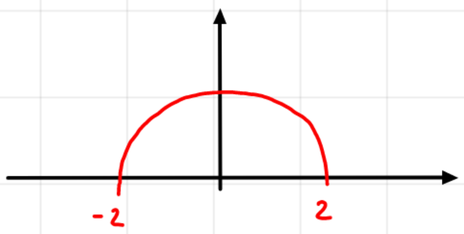
Analogo per $\iint y\,dx\,dy \longrightarrow -8\pi^3 + 4\pi$

$\longrightarrow$ y del baricentro è $\dfrac{3}{\pi^2} - 2$

INTEGRALI DI LINEA

esercizio

$$\int_\gamma x^2 y \, ds$$



$$\gamma(t) = \begin{cases} 2\cos t \\ 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{4\sin^2 + 4\cos^2 t} = 2$$

$$\int_\gamma x^2 y \, ds = \int_0^\pi 4\cos^2 t \cdot 2 \cdot \sin t \cdot 2 \, dt = 16 \int_0^\pi \cos^2 t \sin t \, dt = \frac{32}{3}$$

esercizio baricentro dell' elica

$$\gamma = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\beta = \frac{1}{\ell(\gamma)} \begin{pmatrix} \int_\gamma x \, ds \\ \int_\gamma y \, ds \\ \int_\gamma z \, ds \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{R^2+1}$$

$$\ell(\gamma) = 2\pi\sqrt{R^2+1}$$ (fatto l'altra volta)

$$\int_\gamma x \, ds = \int_0^{2\pi} R\cos t \sqrt{R^2+1} \, dt = R\sqrt{R^2+1} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

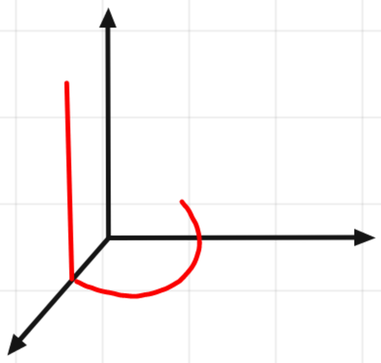
$$\int_\gamma y \, ds = \dots = \emptyset$$

$$\int_\gamma z \, ds = \int_\gamma t \cdot \sqrt{R^2+1} \, dt = \sqrt{R^2+1} \int_0^{2\pi} t \, dt = \sqrt{R^2+1} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{R^2+1} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

esercizio 1

$$\iint_S x^3 e^z \, d\sigma \qquad S = \{ 0 \le z \le h \ , \ x^2 + y^2 \le r \ , \ x \ge 0 \}$$



Parametrizzo: $T = \left\{ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le t \le z \right\}$

$$\Phi : T \longrightarrow S \qquad \Phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ t \end{pmatrix}$$

$\Phi_t = (0,0,1)$

$\Phi_\theta = (-r\sin\theta \ , \ r\cos\theta \ , \ 0)$

$$|\Phi_t \times \Phi_\theta| = \left| \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = r > 0 \qquad \text{regolare}$$

$$\iint_S x^3 e^z \, d\sigma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^h r^3 \cos^3\theta \, e^t \cdot r \, dt \, d\theta = r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta \int_0^h e^t dt = r^4 (e^h - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overset{\cos^2\theta \cdot \cos\theta}{\overset{\shortparallel}{\cos^3\theta}} \, d\theta =$$

$$= r^4 (e^h - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)(\cos\theta) \, d\theta = r^4 (e^h - 1) \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^4 (e^h - 1)\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} r^4 (e^h - 1)$$

esercizio 2

$$\iint_\Sigma x^2 \, d\sigma \qquad \Sigma = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

Coordinate sferiche: $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \Sigma$

$\Phi = (\sin\varphi\cos\theta \ , \ \sin\varphi\sin\theta \ , \ \cos\varphi)$

$\Phi_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta \ , \ \sin\varphi\cos\theta \ , \ 0)$

$\Phi_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta \ , \ \cos\varphi\sin\theta \ , \ -\sin\varphi)$

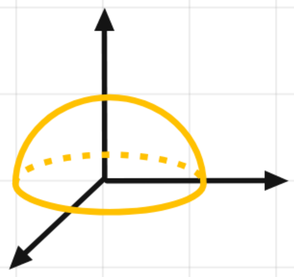
$$\longrightarrow \quad \Phi_\theta \times \Phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2\varphi\cos\theta \\ -\sin^2\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi| = \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \sin\varphi$$

$$\iint_\Sigma x^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\varphi \cos^2\theta \cdot \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi = \dots = \frac{4}{3}\pi$$

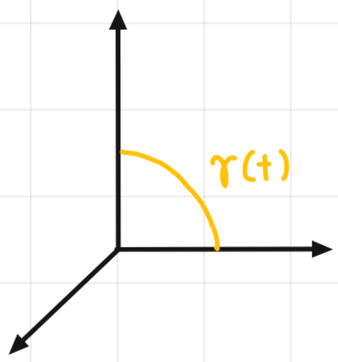
esercizio 3

Baricentro della semisfera $S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ , \ z \ge 0 \}$



$$B(S) = \frac{1}{A(S)} \left(\iint_S x \, d\sigma \ , \ \iint_S y \, d\sigma \ , \ \iint_S z \, d\sigma \right)$$

Uso la formula delle superfici di rotazione



$$\gamma(t) = (R\cos t,\ 0,\ R\sin t) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

$$|\dot\gamma| = R$$

$$A(S) = 2\pi \int_\gamma x(t)\, ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} R^2 \cos t\, dt = 2\pi R^2 \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2$$

$$\iint_S x\, d\sigma = \iint_S y\, d\sigma = 0 \qquad \times \text{ simmetria}$$

$$\iint_S z\, d\sigma \longrightarrow$$ Per calcolarlo parametrizzo S come grafico di $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$\Phi : \{u^2 + v^2 \leq 1\} \longrightarrow S$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

$$\Phi_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

$$\Phi_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

$$\longrightarrow \quad |\Phi_u \times \Phi_v| = \sqrt{1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$\iint_S z\, d\sigma = \iint_{u^2 + v^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\, du\, dv = R \iint_{u^2 + v^2 \leq R^2} du\, dv = \pi R^3$$

Quindi $B(S) = \dfrac{1}{2\pi R^2}(0, 0, \pi R^3) = (0, 0, R/2)$

CAMPI VETTORIALI

ORA 59

esercizio 1

$F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z \\ \cos(x+y) \\ x \end{pmatrix}$

F conservativo?
Se sì, qual'è il suo potenziale?

Se $\text{rot}(F) = 0 \Rightarrow F$ cons. perché $\mathbb{R}^3$ è sc

$\partial_x F_2 = -\sin(x+y) = \partial_y F_1$

$\partial_z F_2 = 0 = \partial_y F_3$ $\longrightarrow$ F conservativo

$\partial_z F_1 = 1 = \partial_x F_3$

Come trovo U? Cerco $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tc $\nabla U = F$

Parto da $\partial_z U = x \Longrightarrow U = xz + g(x,y)$

Ho aggiunto a xz una generica funzione g che dipende da x, y, che infatti mi scompare quando derivo rispetto a z

$\partial_x U = \cancel{z} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \cos(x+y) + \cancel{z} \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) \Rightarrow g(x,y) = \sin(x+y) + h(y)$

$\longrightarrow U = xz + \sin(x+y) + h(y)$

$\partial_y U = \cos(x+y) + \frac{\partial h(y)}{\partial y} = \cos(x+y) \Longrightarrow h(y)$ è una costante $c \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow U = xz + \sin(x+y) + c$

esercizio 2

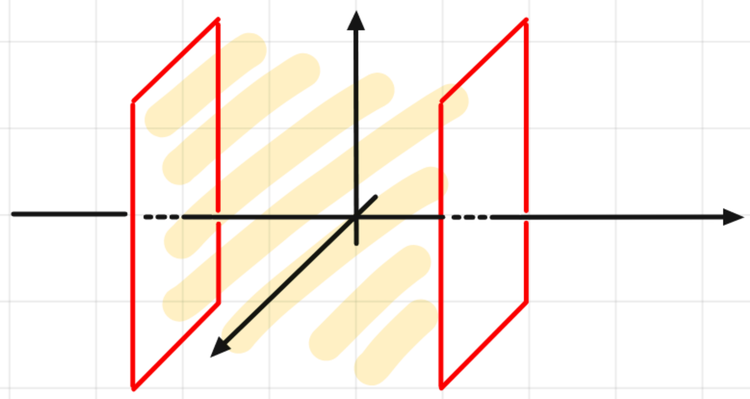
$F: \left(\frac{xz}{x^2-1}, \frac{1}{2}\sin y, \frac{1}{2}\log(x^2-1) \right)$ $\quad F: \mathbb{R}^3 \setminus \{-1 \leq x \leq 1\}$, $F \in C^1$

$x^2-1>0$

Prendo $\gamma = \left(\frac{1}{3}t^3 + 2, 2t^2, 2t \right)$ $\quad t \in [0,1]$ $\quad$ ▸ Lavoro di F lungo γ

Soluzione

Io non voglio calcolare l'integrale esplicitamente perché è troppo lungo
Cerco un potenziale



$\mathbb{R}^3 \setminus \{-1 \leq x \leq 1\}$ non è sc, ma prendendo l'unione di $\{x>1\}$ e $\{x<-1\}$ che sono sc noto che $\gamma(t)$, se guardo la x, è sempre >2

$\Rightarrow \gamma(t) \subseteq \{x>1\}$

Vedo se F è conservativo su $\{x>1\}$ $\longrightarrow$

$\partial_y F_1 = 0 = \partial_x F_2$

$\partial_z F_1 = \frac{x^2}{x^2-1} = \partial_x F_3$ $\longrightarrow$ F è conservativo

$\partial_z F_2 = 0 = \partial_y F_3$

Potenziale ?

$\partial_z U = \frac{1}{2}\log(x^2-1)$ quindi $U = \frac{1}{2} z \log(x^2-1) + g(x,y)$

$\partial_x U = z \cdot \frac{x}{x^2-1} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{xz}{x^2-1} \longrightarrow g(x,y) = h(y)$ non dipende da x

$U = \frac{z}{2}\log(x^2-1) + h(y)$

$\partial_y U = \frac{\partial h(y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin y \longrightarrow h = -\frac{1}{2}\cos(y) + c$

$\longrightarrow U = \frac{z}{2}\log(x^2-1) + \frac{1}{2}\cos(y) + c$

Lavoro: $\gamma(0) = (2,0,0)$

$\gamma(1) = (7/3, 2, 2)$

$$\int_\gamma F ds = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) =$$

$$\frac{2}{2}\log\left(\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{2}\cos(0) = \log\left(\frac{40}{9}\right) - \frac{1}{2}\cos(2) + \frac{1}{2}$$

OSSERVAZIONE 1

U che ho trovato è anche il potenziale su x<-1

OSSERVAZIONE 1

Prendo $\gamma(t) = (t,0,0)$ $t \in [-2,2]$

γ passa dove F non è definita $\Rightarrow \nexists \int_\gamma F \cdot ds$, ma $U(\gamma(-2))$ e $U(\gamma(2))$ sono ben definiti

Fare $U(\gamma(2)) - U(\gamma(-2))$ produce un numero HA NON HA SENSO

x casa

① $F(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{-y}{1+x^2+y^2}\right)$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

è cons su $\mathbb{R}^2$? [NO]

② $F(x,y) = (y, x)$ $\gamma = (\cos(t), \sin(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

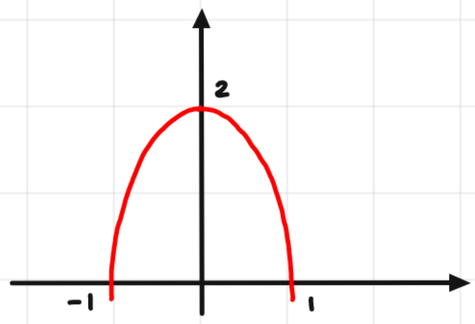
Calcolare $\int_\gamma F ds$ [0]

③ $F(x,y) = (y, xy)$ $\gamma \in (\cos(t), \sin(t))$ $t \in [0, \pi/2]$

Calcolare $\int_\gamma F \cdot ds$ $\left[-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{9}\right]$

esercizio Gauss - Green ora 60

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right) \qquad F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



ⓐ $\operatorname{rot} F = 0$?

ⓑ conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

ⓒ conservativo su $\{y>0\}$?

ⓓ $\int_\beta F \cdot ds$?

<u>Soluzione</u>

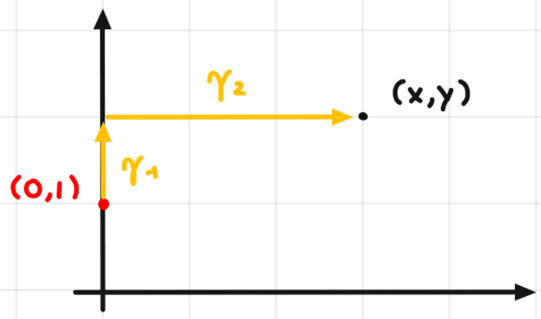
ⓐ e ⓑ giá fatti (appunti teoria)

ⓒ $\{y>0\}$ è semplicemente connesso perché ho rimosso $(0,0)$

$\Longrightarrow$ F è connesso

Per il potenziale scelgo un punto a piacere (es 0,1) e un generico punto x, y

$U(x,y) - U(0,1) = \int_\gamma F \cdot ds$ con γ che congiunge $(0,1)$ a (x,y)



$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in (1, y) \qquad \dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma_2 = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \quad t \in (0, x)$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int \frac{t}{t^2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 \, dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot ds = \int_0^x \frac{-y}{t^2+y^2} + 0 \, dt = -\int_0^x \frac{y}{t^2+y^2} \, dt$$

FLUSSI - CAMPI

esercizio 1

Calcolare il flusso uscente da $\Sigma_R = \{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$ di $F = (x, 0, y)$

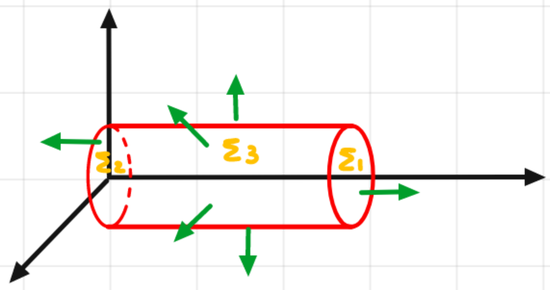
Soluzione

$$\iint_{\Sigma_R} F \cdot n_e \, d\sigma = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} 1 \, dx dy dz = \frac{4}{3}\pi R^3$$

esercizio 2

Calcolare il flusso uscente da ogni faccia del cilindro $S = \{ x^2 + z^2 \le 1, \ 0 \le y \le 1 \}$ del campo $F = (e^z, e^y, e^x)$

In questo caso il teorema della divergenza ci viene in aiuto ma non posso usarlo per risolvere l'intero esercizio come prima.



Su Σ_1 $\quad \vec{n_e} = (0, 1, 0)$

$F \cdot \vec{n_e} = e^y = e \quad (\text{su } \Sigma_1 \ \ y = 1)$

$$\iint_{\Sigma_1} F \cdot n_e \, d\sigma = \iint_{x^2+z^2 \le 1} e \, dx dz = \pi e$$

Su Σ_2 $\quad \vec{n_e} = (0, -1, 0)$

$F \cdot \vec{n_e} = -e^y = -1 \quad (\text{su } \Sigma_2 \ \ y = 0)$

$$\iint_{\Sigma_2} F \cdot \vec{n_e} \, d\sigma = -\iint_{x^2+z^2 \le 1} 1 \, dx dz = -e$$

Su Σ_3

$$\iint_{\Sigma_3} F \cdot \vec{n_e} \, ds = \iint_{\partial S} F \cdot n_e \, ds - \iint_{\Sigma_1} F \cdot \vec{n_e} \, ds - \iint_{\Sigma_2} F \cdot n_e \, ds \quad \text{e} \quad \iint_{\partial S} F \cdot n_e \, ds = \iiint_S \operatorname{div} F \, dx dy dz \quad \times \text{ teo divergenza}$$

$$\iiint_S \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint_S e^y dx dy dz$$

Devo scegliere come integrare e scelgo di farlo per fili

$$\iiint_S e^y dx dy dz = \iint_{x^2+z^2 \le 1} \left[\int_0^1 e^y dy \right] dx dz = \iint_{x^2+z^2 \le 1} [e - 1] \, dx dy =$$

$$= (e-1) \iint_{x^2+z^2 \le 1} 1 \, dx dz = \pi e - \pi$$

Quindi in definitiva

$$\iiint_{\Sigma_3} F \cdot n_e \cdot d\sigma = \underbrace{(\pi e - \pi)}_{= \iint_{\partial S} F \cdot n_e d\sigma} - \underbrace{\pi e - (-\pi)}_{= -\iint_{\Sigma_2} F n_e d\sigma} = 0$$

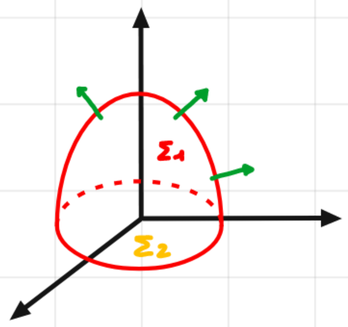
$$-\iint_{\Sigma_2} F \cdot n_e d\sigma$$

esercizio 3

Sia $\Sigma_1 = \{ z = 1 - x^2 - y^2 \ , \ 0 \le z \le 1 \}$ orientata verso l'alto

$F = (y, 1, z)$; calcoliamo $\iint_{\Sigma_1} F \cdot \vec{n} \, d\sigma$

Soluzione



⚠ Questo qui non è l'esterno din solido, perché Sigma è soltanto la superficie laterale (manca il pezzo sotto)
Però posso chiudere il paraboloide definendo Sigma2 ⚠

Chiamo $\Sigma_2 = \{ z = 0 \ , \ x^2 + y^2 \le 1 \}$

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial D$ con $D = \{ 0 \le z \le 1 \ , \ z \le 1 - x^2 - y^2 \} = \{ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 \}$

Orientiamo Σ_2 con $n = (0, 0, -1)$

Scegliamo la normale verso il basso così complessivamente l'unione di wuestesuperfici orientate è il bordo del solido ee normali sono quelle uscenti, quindi possiamo usare il Teo della divergenza
Cosa guadagno? Se voglio calcolare l'integrale su Sigma1 direttamente devo farmi l'integrale di superficie sul paraboloide (che va però parametrizzato), mentre su Sigma2 è molto più facile
Cosa perdo? Devo fare un <u>integrale tridimensionale</u> invece che di superficie
↳ ma viene facile

$$\iint_{\Sigma_1} F \cdot \vec{n_e} + \iint_{\Sigma_2} F \cdot \vec{n_e} = \iint_{\partial D} F \cdot \vec{n_e} = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint_D 1 \, dx dy dz$$

integro x strati: $x^2 + y^2 \le 1 - z$
le z variano tra 0 e 1

$$\int_0^1 \left[\iint_{x^2+y^2 \le 1-z} 1 \, dx dy \right] dz = \int_0^1 \pi (1 - z) \, dz = \frac{\pi}{2}$$

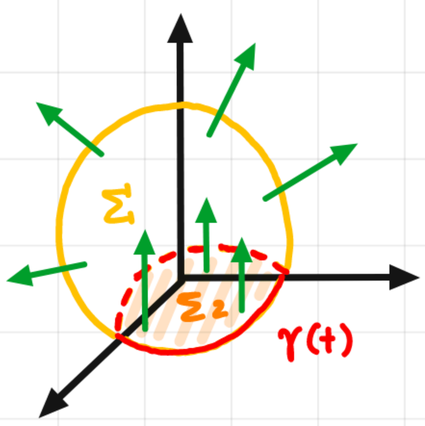
Su Σ_2 $F \cdot \vec{n_e} = -z = 0$ perché su Σ_2 $z = 0$ $\Longrightarrow$ $\iint_{\Sigma_1} F \cdot \vec{n_e} = \frac{\pi}{2}$

esercizio 4 (ORA 66)

$F = (y^2 \cos(xz), \ x^3 e^{yz}, \ -e^{-xyz})$ $\qquad \Sigma = \{ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8 \} \cap \{ z \ge 0 \}$

▶ Calcolare $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, d\sigma$ con n uscente dalla porzione di sfera

Soluzione



La cosa curiosa è che questa sfera ha centro in z=2
Poi siccome z>0 vuol dire che la mia Sigma è un bel po' di sfera ma non tutta

Mi verrebbe in mente di usare Stokes $\quad \partial\Sigma = \gamma(t) = \begin{cases} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{cases}$

Se $z = 0$ $\rightarrow$ $x^2 + y^2 + 4 = 8$ $\Longrightarrow$ $x^2 + y^2 = 4$

↳ cfr di raggio 2 sul piano $z = 0$

Allora $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} = \oint_{\partial^+ \Sigma} F \cdot ds + \int_{\partial^+ \Sigma} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \ldots$ conti

Altrimenti, noto che $\gamma(t)$ è anche $\partial^+\Sigma_2$ con $\Sigma_2 = \{x^2+y^2 \le 2,\ z=0\}$ orientata verso l'alto

L'integrale su Sigma del rotore lo scarichiamo al bordo e diventa l'integrale su gamma orientato verso l'alto, ma poi lo riportiamo su una superficie diversa (Sigma2) di cui gamma è sempre il bordo
Cioè usiamo il teorema di Stokes due volte per cambiare superficie

Posso usare Stokes 2 volte per dire

$$\iint_{\Sigma} \text{rot}(F)\cdot\vec{n}\, d\sigma = \oint_{\gamma(+)} F\cdot ds = \iint_{\Sigma_2} \text{rot}\, F\cdot \underbrace{\vec{n}}_{(0,0,1)}\, dx\,dy$$

$$\iint_{\Sigma_2} \text{rot}(F)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dx\,dy = \iint_{\Sigma_2} (\text{rot}\,F)_k\, dx\,dy = \iint_{\Sigma_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\Sigma_2}\left[3x^2 \overset{e^0}{e^{yz}} - 2y\overset{\cos(0)}{\cos(xz)}\right] dx\,dy =$$

funzione dispari su dominio simmetrico

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 2\\ z=0}} (3x^2-2y)\, dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 4} 3x^2\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3\rho^2\cos^2\theta\,\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta \int_0^2 3\rho^3 d\rho = 12\pi$$

* 3^ soluzione video ora 66

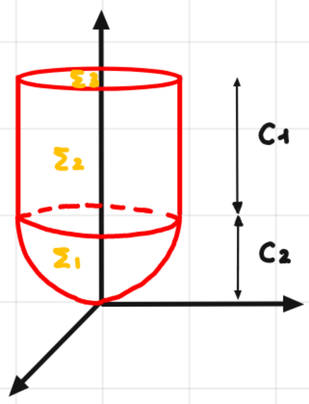
esercizio 5

$C = \{ z \le 4,\ x^2+y^2 \le z,\ x^2+y^2 \le 1 \}$

① Vol C e area laterale

② $F = (x,0,0)$ flusso uscente da C

③ Flusso uscente da Σ_3



Soluzione

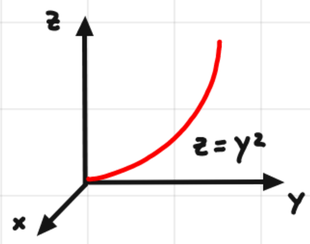
① $\text{Vol}(C) = \text{Vol}(C_1) + \text{Vol}(C_2) =$

$$3\pi + \text{Vol}(C_2) = 3\pi + \iiint_{C_2} 1\, dx\,dy\,dz = 3\pi + \int_0^1\left[\iint_{x^2+y^2\le z} 1\, dx\,dy\right] dz = 3\pi + \pi\int_0^1 z\, dz = \frac{7}{2}\pi$$

Area laterale ?

$A(\Sigma_2) = 6\pi$ facile

$A(\Sigma_1)$ devo parametrizzare $\longrightarrow$ uso la formula x superfici di rotazione



$\gamma(t) = (0, t, t^2) \quad 0 \le t \le 1$

$\dot\gamma(t) = (0, 1, 2t)$

$|\dot\gamma| = \sqrt{1+4t^2}$

$$A(\Sigma_1) = 2\pi\int_0^1 \overset{y(t)}{\rho(t)}\cdot|\dot\gamma|\, dt = 2\pi\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = -\frac{\pi}{4}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \dots = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

② Uso teo divergenza

$$\iint_{\partial C} F\cdot n_e^c = \iiint_C \text{div}\, F\, dx\,dy\,dz = \iiint_C 1\, dx\,dy\,dz = \text{Vol}(C) = \frac{7}{2}\pi$$

③ $n_e = (0,0,1)$
$F = (x,0,0)$ $\longrightarrow$ $F\cdot n_e = 0$ $\longrightarrow$ $\iint_{\Sigma_3} F\cdot n_e\, d\sigma = 0$

esercizio 6

$D = \{ (x-z)^2 + (y+z)^2 \leq z^2 \}$ $\quad 0 \leq z \leq 5$

$F = (xz,\ x-y,\ z)$

Flusso uscente da D

Soluzione

Com'è fatto D: sul piano $z = k$

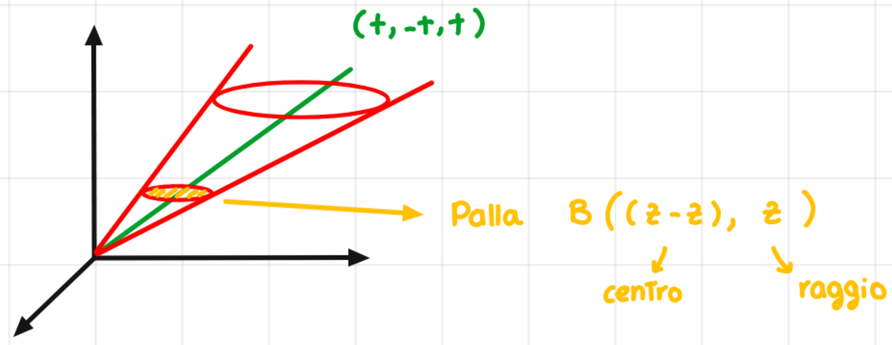
i) $(x-k)^2 + (y-k)^2 \leq k^2$ cerchio di centro $(k, -k)$ e raggio k

ii) il raggio cresce linearmente con z

$\Longrightarrow$ D è un cono non rettilineo che ha l'asse sulla retta $(t, -t, t)$ (data in forma parametrica)

$$\iint_{\partial D} F \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iiint_D z \, dx\,dy\,dz =$$

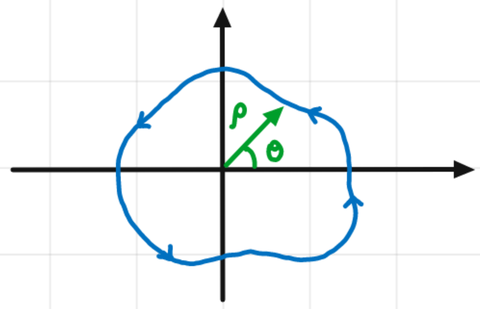
$$\int_0^5 \left[\iint_{B((z,-z),z)} z \, dx\,dy \right] dz = \int_0^5 z \left[\iint_{B((-z,z),z)} 1 \, dx\,dy \right] dz = \int_0^5 \pi z^3 dz = \frac{625}{4}\pi$$



esercizio 7

Area di una superficie con bordo in coordinate polari

$$A \text{ con } \partial^+ A = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \gamma(\theta)$$



$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ A} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \overset{x(\theta)}{\rho\cos\theta}\left[\overset{y'(\theta)}{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}\right] - \overset{y(\theta)}{\rho\sin\theta}\left[\overset{x'(\theta)}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}\right]\Big\} \, d\theta =$$

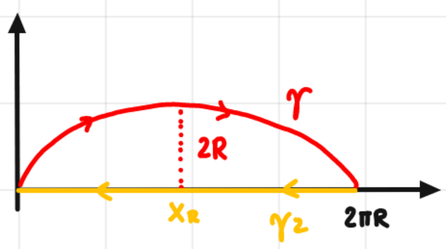
Gauss-Green $\quad F = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$; $\operatorname{rot}(F) = 1$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ \rho\rho'\cancel{\cos\theta}\sin\theta + \rho^2\cos^2\theta - \rho\rho'\cancel{\sin\theta}\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta \right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta$$

esercizio 8 : Area Cicloide

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta - \sin\theta) \\ r(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} r(1-\cos\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$



Il massimo della y si ha quando il coseno è il più piccolo possibile
Quando theta = pigreco

$\longrightarrow$ la curva è percorsa in senso ORARIO

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2\pi r - t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in (0, 2\pi r)$$

$\partial^- A = \gamma \cup \gamma_2$

$$\text{Area}(A) = -\int_{\partial^+ A} y\,dx = \int_{\partial^- A} y\,dx = \int_\gamma y\,dx + \int_{\gamma_2} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{y}}\,dx = \int_\gamma y\,dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{r(1-\cos\theta)}_{y(\theta)} \cdot \underbrace{r(1-\cos\theta)}_{x'(\theta)}\, d\theta = r^2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \, d\theta = 2\pi r^2 - r^2\pi = 3\pi r^2$$

esercizio 9

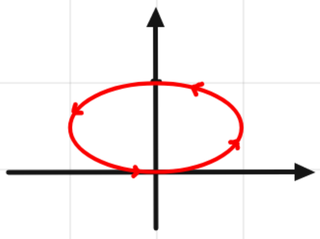
$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; (x^2+y^2)^2 - y \leq 0 \}$

Calcolare $\iint_D x \, dx dy$

Soluzione

Come è fatto D? Vediamo $\partial D = \{ (x^2+y^2)^2 = y \} \xrightarrow{\text{coordinate polari}} \partial D = \{ \rho^4 = \rho \sin\theta \} \; : \; \rho = \sqrt[3]{\sin\theta}$

∂D si parametrizza come $\begin{cases} x(\theta) = \overset{\rho}{\sqrt[3]{\sin\theta}} \cdot \cos\theta \\ y(\theta) = \sqrt[3]{\sin\theta} \cdot \sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$



$\iint_D x \, dx dy$ = Gauss-Green $(P,Q) = (0, \frac{x^2}{2})$ $= \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2} dy$

N.B. $y(\theta) = (\sin\theta)^{4/3} \longrightarrow y'(\theta) = \frac{4}{3} (\sin\theta)^{1/3} \cdot \cos\theta$

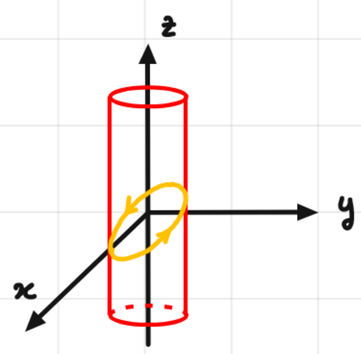
$$\iint_D x \, dx dy = \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \underbrace{(\sin\theta)^{2/3} \cdot \cos^2\theta}_{x^2(\theta)} \cdot \underbrace{\frac{4}{3} (\sin\theta)^{1/3} \cos\theta}_{y'(\theta)} \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin\theta \cos^3\theta \, d\theta = 0$$

esercizio 10

$F(x, x+y, x+y+z) \qquad F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$C = \{ x^2+y^2 = 1 \} \cap \{ z = y \}$

Orientato come in figura



Definisco $D = \{ x^2+y^2 \leq 1 \, , \; y = z \}$ orientato verso l'alto da $\vec{n}$

$C = \partial^+ D$

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\oint_C F \cdot ds = \oint_{\partial^+ D} F \, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_D \text{rot}(F) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Ora devo parametrizzare D: $\quad D = \{ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\sin\theta) \, , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , \; 0 \leq \rho \leq 1 \}$

$\Phi_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta)$

$\Phi_\theta = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, \rho\cos\theta)$

$$|\Phi_\rho \times \Phi_\theta| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix}$$

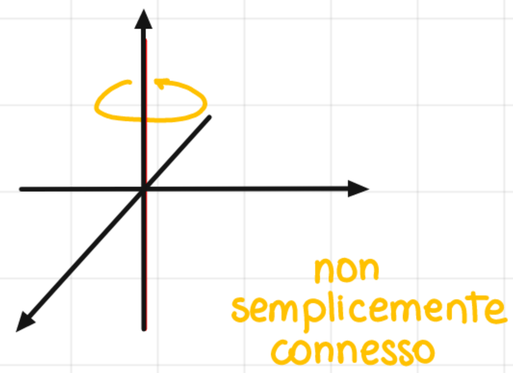
NB: orientato verso l'alto

$$\oint_C F \cdot ds = \iint_D \text{rot} F \cdot \vec{n} \, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1, -1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \rho \end{pmatrix} d\theta \, d\rho = 2\pi \int_0^1 2\rho \, d\rho = 2\pi \left[\rho^2 \right]_1^1 = 2\pi$$

OSS Si poteva calcolare direttamente la circuitazione senza usare Stokes (ora 68)

esercizio 11

$F = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z \right)$ è conservativo sul suo dominio di definizione?



Dominio di F: $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , (x,y) \neq (0,0) \} \Rightarrow$ è $\mathbb{R}^3 \setminus$ asse z

$\mathrm{rot}(F) = 0$ (x es)

D non SC $\Longrightarrow$ devo cercare una curva test che circonda la singolarità

es: cfr sul piano $z = 0 \longrightarrow \gamma = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\dot{\gamma} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$$\longrightarrow \oint_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\cos\theta, \sin\theta, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \, d\theta \Rightarrow F \text{ conservativo}$$

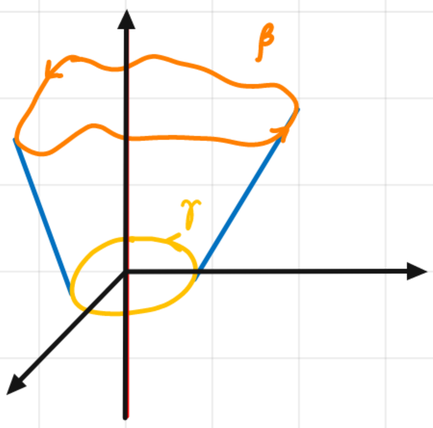
OSS: Potenziale di F: $U = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \frac{z^2}{2} + c$

OSS: Chi garantisce che la curva test gamma è sufficiente?

NB Abbiamo dimostrato un risultato simile in 2D con il teorema di Gauss Green
Poniamoci il problema in 3D

2D: Gauss Green = 3D: Stokes

$\Rightarrow$ È Stokes che ci garantisce che gamma è sufficiente. Perché?



Prendo una curva beta orientata come gamma che circonda la singolarità, e poi prendo una superficie S che non interseca l'asse z tale che il bordo si S sia l'unione di gamma e beta

$$\Rightarrow 0 = \iint_S \mathrm{rot}\, F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_\gamma F ds - \int_\beta F ds \Rightarrow \oint_\gamma F ds = \oint_\beta F ds$$

FORME CHIUSE - ESATTE

esercizio 1 (ora 74)

$\omega = xyz^2\, dx \wedge dy \wedge dz$ è chiusa ed esatta ?

Soluzione

$d\omega \in \Lambda^4(\mathbb{R}^3) = \{0\} \longrightarrow \omega$ è chiusa

Provo a cercare una primitiva del tipo $\alpha = f(x,y,z)\, dy \wedge dz$

$d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \longrightarrow$ Basta che $\frac{\partial f}{\partial x} = xyz^2 \Rightarrow \frac{x^2yz}{2}$

ω è esatta con primitiva $\alpha = \frac{x^2yz^2}{2} dy \wedge dz$

esercizio 2

$\omega = x\, dx \wedge dy + z\, dz \wedge dx$ è chiusa ed esatta ?

chiusura

$d\omega = dx \wedge dx \wedge dy + dz \wedge dz \wedge dx = 0$

esattezza

Prendo $\alpha = a dx + b dy + c dz$ $\quad a,b,c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funzioni C^2

$d\alpha = a_y\, dy \wedge dx + a_z\, dz \wedge dx + b_x\, dx \wedge dy + b_z\, dz \wedge dy + c_x\, dx \wedge dz + c_y\, dy \wedge dz =$

$= (-a_y + b_x)\, dx \wedge dy + (-a_z + c_x)\, dx \wedge dz + (-b_z + c_y)\, dy \wedge dz$

Voglio che: $\begin{cases} -a_y + b_x = x \\ -a_z + c_x = -z \\ -b_z + c_y = 0 \end{cases}$ Provo con $a = 0$

Se $a = 0 \Rightarrow b_x = x$; $c_x = -z$; $c_y = b_z$

$\longrightarrow \begin{array}{l} b = \frac{x^2}{2} + h(z) \\ c = -zx + g(y,z) \end{array} \longrightarrow$ Se prendo $h = g = 0$ ho anche $c_y = b_z = 0$ e va bene

Quindi $\alpha = \frac{x^2}{2} dy - zx\, dz$

esercizio 3

$\omega = x\, a(y)\, dx + y\, b(x)\, dy$

esistono $a, b \in C^1$ tc ω sia chiusa ? Ed esatta su $\mathbb{R}^2$?

chiusura

$d\omega = x a_y\, dy \wedge dx + b_x\, dx \wedge dy = (x a_y - y b_x)\, dy \wedge dx = 0 \Rightarrow x a_y = y b_x$ ok se $a_y = y$ e $b_x = x$

ovvero $a = \frac{y^2}{2}$; $b = \frac{x^2}{2}$

Quindi $\omega = \frac{xy^2}{2} dx + \frac{x^2y}{2} dy$ è chiusa

esattezza

La primitiva di una 1-forma è una funzione, quindi devo trovare f tc $df = \omega$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{xy^2}{2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2 y}{2} \end{cases} \Longrightarrow f = \frac{x^2y^2}{4} \Longrightarrow \omega \text{ è esatta su } \mathbb{R}^2$$

esercizio 4

$\omega = (3x^2y + yz)\,dx + x(x^2+z)\,dz + xy\,dz$

ω è chiusa ed esatta su $\mathbb{R}^3$?

chiusura

$$d\omega = \cancel{(3x^2+z)\,dy\wedge dx} + \cancel{y\,dz\wedge dx} \cancel{+(3x^2+z)\,dx\wedge dy} + \cancel{x\,dz\wedge dy} + \cancel{y\,dx\wedge dz} + \cancel{x\,dy\wedge dz} = 0$$

esattezza

Cerco $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tc $df = \omega$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y + yz \\ f_y = x^3 + zx \\ f_z = xy \end{cases} \longrightarrow f = xyz + g(x,y) \quad \text{la metto in } f_x$$

$$\longrightarrow f_x = yz + g_x(x,y) = 3x^2y + yz \Longrightarrow g_x(x,y) = 3x^3y \Longrightarrow g = x^3y + h(y)$$

$$\longrightarrow f_y = xz + x^3 + h_y(y) = x^3 + zx \Longrightarrow h(y) = \text{costante}$$

α: $f = xyz + x^3y + c$ primitiva di ω

esercizio 1 (ora 76)

$\omega = -\dfrac{x}{y-x^2}\,dx + \dfrac{1}{2(y-x^2)}\,dy$

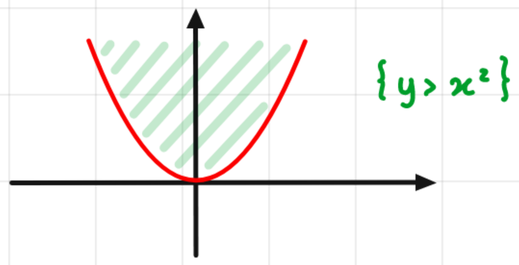
▸ è esatta su $\{y > x^2\}$?

Nel caso trovare una primitiva e calcolare $\int_\gamma \omega$ con $\gamma = \begin{pmatrix} t \\ 3+\sin t \end{pmatrix}$ con $t \in [0, \pi/2]$

Soluzione

$$d\omega = \left(\partial_y \frac{x}{y-x^2} + \partial_x \frac{1}{2(y-x^2)}\right) dx\wedge dy = \left(-\frac{x}{(y-x^2)^2} + \frac{+\cancel{2}x}{\cancel{2}(y-x^2)^2}\right) dx\wedge dy \longrightarrow \omega \text{ è chiusa}$$

Com'è fatto il dominio ? È semplicemente connesso $\longrightarrow$ ω esatta



primitiva: U tc $dU = -\dfrac{x}{y-x^2}\,dx + \dfrac{1}{2(y-x^2)}\,dy$

Provo a sistemare il denominatore e poi aggiusto il tiro

Se parto da $\ln(y-x^2) \xrightarrow{d} \dfrac{1}{y-x^2}\cdot(-2x)\,dx + \dfrac{1}{y-x^2}\,dy \longrightarrow U = \dfrac{1}{2}\ln(y-x^2) + c$

Infine calcoliamo $\int_\gamma \omega$ (NB: $\gamma(t) \in \{y > x^2\}$)

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-t}{3+\sin t - t^2} + \frac{1}{2(3+\sin t - t^2)}\cdot \cos(t)\right] dt \longrightarrow \text{è complicato; meglio usare il potenziale}$$

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(\pi/2)) - U(\gamma(0)) = \frac{1}{2}\left\{\ln\left[4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] - \ln(3)\right\}$$

SUCCESSIONI

esercizio 1 (ora 84)

$$f_n(x) = n\int_0^x y^2 e^{-n^2y^2}\,dy$$

- Dire se f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$
- Dire se f_n converge uniformemente su $\mathbb{R}$

Soluzione

Già la convergenza puntuale non è banale perché fissata la x dobbiamo far vedere la convergenza di una funzione con un integrale dentro: il punto chiave è fissare la x
Se io fisso la x, sto facendo il limite di un integrale quindi posso usare il teorema dello scambio di limite, quindi fare l'integrale del limite di quella successione

Chiamo $g_n = ny^2e^{-n^2y^2} \longrightarrow$ quindi $f_n(x) = \int_0^x g_n(y)\,dy$ voglio vedere se posso usare i teoremi di passaggio al limite (per x fissato)

Voglio far vedere che, fissato x, $g_n(y) \to g$ uniformemente su $[0,x]$

NB: g_n pari $\Rightarrow$ f_n dispari $\Rightarrow$ studio solo per $x \in \mathbb{R}^+$

$g_n(y) = ny^2e^{-n^2y^2} \to 0$ puntualmente $\forall y \in \mathbb{R}$

conv. unif: $\sup g_n(y)$?

$g_n(0) = 0$ e $\lim_{y\to\infty} g_n(y) = 0 \implies$ mi aspetto un massimo per $y \in (0,+\infty)$

$$g_n'(y) = 2ny e^{-n^2y^2} - 2n^3y^2e^{-n^2y^2} = 2ny e^{-n^2y^2}(1-n^2y) \longrightarrow y = \frac{1}{n^2}$$

$$g_n = ny^2e^{-\frac{n^2}{y^2}}$$

$$g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{n^4}e^{-\frac{n^2}{n^4}} = \frac{1}{n^3}e^{-\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 0$$

$$\forall x \quad \sup_{[0,x]} |g_n - g| = \sup_{[0,x]} g_n \leq \sup_{\mathbb{R}^+} g_n = g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 0 \longrightarrow g_n \to g \text{ uniformemente su } \mathbb{R}^+$$

Quindi, essendo $f_n(x) = \int_0^x g_n(x)$ ho che $f(x) = \lim_n f_n(x) = \int_0^x \lim_n g_n(x) = 0$

$\implies f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbb{R}$ □

Adesso studio la convergenza uniforme

$f_n(x) = n\int_0^x y^2e^{-n^2y^2}\,dy \longrightarrow$ È facile stimare la convergenza sui compatti

Perché $g_n \geq 0 \implies \int_0^x g_n(y)\,dy$ è una fz. crescente in x (th. monotonia)

Il difficile è su $\mathbb{R} \to$ cambio di variabile

$$f_n = n\int_0^x y^2e^{-n^2y^2}\,dy \underset{z=ny}{=} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}}\int_0^{nx} z^2e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{n^2}\int_0^{nx} z^2e^{-z^2}\,dz$$

Ora, $z^2e^{-z^2}$ è integrabile (impropriamente) su $\mathbb{R}^+ \longrightarrow$ vuol dire che $\int_0^{+\infty} z^2e^{-z^2}\,dz = a \in \mathbb{R}$

Allora $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\int_0^{nx} z^2e^{-z^2}\,dz \leq \frac{1}{n^2}\int_0^{\infty} z^2e^{-z^2}\,dz = \frac{a}{n^2}$

Allora $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \leq \frac{I}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ fn converge a 0 uniformemente su R+

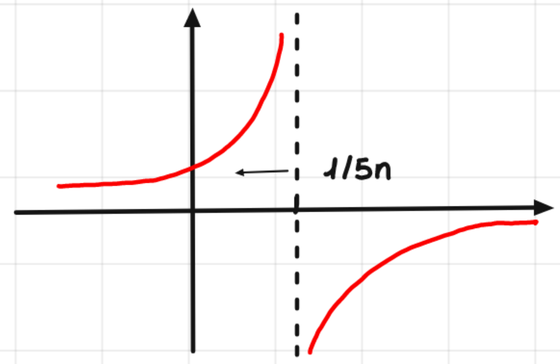
esercizio 2

Sia $f_n(x) = \dfrac{2}{1-5nx}$ ▶ Trovare l'insieme di convergenza (puntuale o uniforme)

Soluzione

f_n è definita per $x \neq \frac{1}{5n}$, però per $x = 0$ $f_n(0)$ ben definita $\forall n$

per $x_0 > 0$ f_n è definita per $n > \frac{1}{5x_0}$



Quindi posso studiare la convergenza puntuale su ogni punto
Se ci fosse stato un punto in cui la funzione non era definita lì non potevo farla

$f_n(0) \equiv 2 \quad \forall n$

$f_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \longrightarrow \quad f_n \to f = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

Ovviamente fn non può tendere uniformemente a f su (-inf, 0] perché f continua e f no
Oppure anche perché il sup su R di fn-f = +infinito, perché quando la x si avvicina a 1/5n la f vale 0 e fn tende a +infinito

Studio separatamente la convergenza su (-infinito, - a] e [b, +infinito), visto che in 0 ho diversi problemi
- la funzione f non è continua
- l'asintoto mi si schiaccia su 0

Su $(-\infty, -a)$ f_n è crescente $\longrightarrow \sup\limits_{(-\infty,-a)} |f_n - f| = \sup\limits_{(-\infty,-a)} f_n = f_n(-a) \longrightarrow 0$ perché in $-a$ ho conv. punt.

Su $[b, +\infty)$ f_n è negativa e crescente per $n > \frac{1}{5b} \longrightarrow \sup\limits_{[b,+\infty)} |f_n - f| = -f(b) \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow f_n \to 0$ uniformemente su $(-\infty, -a] \cup [b, +\infty)$

SERIE DI FUNZIONI

esercizio 1 (ora 90)

Studiare la somma di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n^2}$

Soluzione

La somma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n^2} = \sin(x) \sum \frac{1}{n^2}$ perché $\sin(x)$ non dipende da n

$\sin(x) \sum \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{\text{somma notevole}} \sin(x)$

La convergenza è totale su $\mathbb{R}$ perché $\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(x)}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

esercizio 2

Studiare $\sum \frac{\cos(nx)}{n^4 + n^2}$

Ho convergenza totale su $\mathbb{R}$: $\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n^4 + n^2} \right| < \frac{1}{n^4+n^2} < \frac{1}{n^4}$ e $\sum \frac{1}{n^4}$ converge

Questa volta però non si calcola esplicitamente la somma della serie

esercizio 3

Studiare per $x \geq 0$ la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2+x^3}$

Soluzione

Per $x = 0$ la serie converge a 0

Per $x > 0$ $\sum \frac{x}{n^2+x^3} = x \sum \frac{1}{n^2+x^3} \leq x \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ fissato x: La serie converge puntualmente su $x \geq 0$

Convergenza totale:

Devo calcolare $\sup_{x \geq 0} \underbrace{\frac{x}{n^2+x^3}}_{\text{lo chiamo } f_n(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(0) = 0 \\ \lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0 \\ f_n \geq 0 \end{array}\right\} \text{Ho un max assoluto su } (0, +\infty) \text{ che chiamo } M_n$$

$$f_n'(x) = \frac{(n^2+x^3) - 3x^2 \cdot x}{(n^2+x^3)^2} = \frac{n^2 - 2x^3}{(n^2+x^3)^2} = 0 \quad \text{per} \quad x = \sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}$$

$$M_n = f_n\left(\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}\right) = \frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}}{n^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}\right)^3} = \frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}}{\frac{3}{2} n^2}$$

Quindi $\sum_n \sup_{x \geq 0} |f_n| = \sum_n M_n = \sum_n \frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}}{\frac{3}{2} n^2} < +\infty$ perché $\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{2}}}{\frac{3}{2} n^2} \sim \frac{n^{2/3}}{n^2} = \frac{1}{n^{4/3}}$ e $\frac{4}{3} > 1$

↳ converge tot.

esercizio 4

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge su $\mathbb{R}$? Come?

convergenza puntuale

$\forall x$ $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$ perché $\frac{x^n}{n!}$ è lo sviluppo in serie di Taylor $\longrightarrow$ La serie converge puntualmente a e^x

convergenza totale su IR

$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{x!} \right| = +\infty \longrightarrow$ non ho convergenza totale

convergenza uniforme su IR

$\sup_{\mathbb{R}} \left| e^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \right| = +\infty \longrightarrow$ non ho convergenza uniforme su IR

Sto confrontando un esponenziale con una potenza che vale al più k.
Comunque io fissi k all'infinito domina l'esponenziale

Proviamo sui compatti

Potrei fare quella totale che in questo caso è più facile, ma per esercizio cerchiamo manualmente quella uniforme

Scrivo il polinomio di Taylor all'ordine k con resto di Lagrange

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad 0 < |\xi| < |x|$$

$$\sup_{x \in [-a,a]} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \sup_{x \in [-a,a]} \left| e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^a}{(n+1)!} \cdot a^{n+1}$$

$$\longrightarrow \sup_{x \in [-a,a]} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{e^a}{(n+1)!} \cdot a^{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{perché} \quad \sum \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < +\infty \implies \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

C'è convergenza uniforme sui compatti

esercizio 1 (ora 93)

Convergenza di $\sum_{n \geq 1} x e^{-nx}$ su IR e somma delle serie (se possibile)

convergenza puntuale

- $x = 0 \longrightarrow a_n(0) = 0 \longrightarrow S(0) = 0$

- $x > 0 \longrightarrow x \sum e^{-nx}$ uso il criterio della radice

  $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x} < 1 \iff -x < 0$ (sempre nel nostro caso)

  quindi $\sum_{n \geq 1} x e^{-nx}$ converge puntualmente $\forall x$

- $x < 0 \longrightarrow x \sum e^{-nx}$ uso il criterio della radice

  $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = \frac{1}{e^x} < 1 \iff x > 0 \longrightarrow$ ho che $\frac{1}{e^x} > 1 \longrightarrow \sum x e^{-nx}$ diverge $\forall x < 0$

convergenza totale

La studio su $\mathbb{R}^+$ (so che su $(-\infty, 0)$ non ho nemmeno quella puntuale)

$$\sum_n \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |x \cdot e^{-nx}|$$

Noto che $a_n(0) = 0$ e che $\lim_{x \to \infty} x e^{-nx} = 0$

Inoltre $a_n \geq 0$

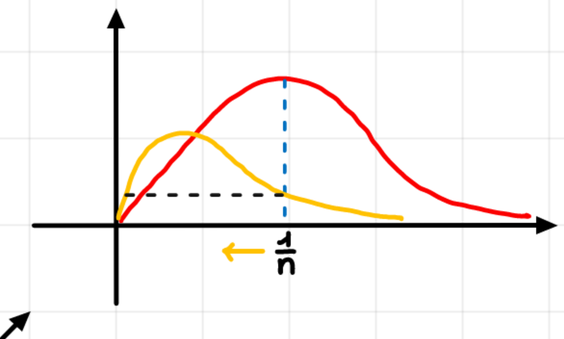
$\rightarrow$ Ho un massimo assoluto su $[0, \infty)$

$a_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1-nx) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$

$\sup |xe^{-nx}| = \left|\frac{1}{n}\cdot e^{-1}\right| = \frac{1}{ne}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{ne} = \frac{1}{e}\sum \frac{1}{n} \longrightarrow$ diverge

↳ non ho convergenza totale su $[0,+\infty)$



Dove sta il problema?
Il punto di massimo x=1/n si sposta verso lo 0 al punto di massimo
Questo significa che come io fisso un punto a caso positivo, prima o poi il punto di massimo lo attraverserà e cadrà fuori dall'intervallo che sto studiando: la funzione sarà decrescente sul mio intervallo e il sup sarà in corrispondenza della x scelta (bordo dell'intervallo, che converge per convergenza puntuale)

Ho convergenza totale su $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$

Infatti dato δ $\exists$ n_0 tc $\frac{1}{n_0} < \delta$, e quindi $a_n(x)$ decrescente su $[\delta,+\infty)$ definitivamente

Quindi

$\sum_{n\geq n_0} \sup_{[\delta,+\infty)} |a_n(x)| = \sum_{n\geq n_0} a_n(\delta) < +\infty$ perché $\sum a_n(x)$ converge puntualmente

Di conseguenza ho la convergenza uniforme su (0, +infinito), resta da controllare se posso esterlnderla anche in 0
Vediamo la somma delle serie prima

$S(0) = \sum_{n\geq 1} a_n(0) = 0$

- $x > 0$: $S(x) = \sum_{n\geq 0} x\cdot e^{-xn} = x \underbrace{\sum (e^{-x})^n}_{\text{serie geometrica } q<1} = x\cdot \frac{1}{1-e^{-x}}$

- $x < 0$: non converge

$$S(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x}{1-e^{-x}} & x > 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE : $S(x)$ è continua ?

$\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot(1+x+\dots)}{(\cancel{1}+x+\dots)-\cancel{1}} = 1 \longrightarrow$ non è continua in 0

Non c'è convergenza uniforme su $[0,+\infty)$ x teo continuità

esercizio 2

Convergenza di $\sum_{n\geq 1} \frac{(\log(n))^{nx}}{n^n}$

<u>convergenza puntuale</u>

- $x = 0 \longrightarrow \sum \frac{1}{n^n} \longrightarrow$ converge x criterio radice
- $x > 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\log(n))^{nx}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log^x(n)}{n} = 0 < 1 \longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(\log(n))^{nx}}{n^n}$ converge

• $x < 0$ idem al caso precedente

La serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$

<u>convergenza totale</u>

Cerchiamo di capire come è fatta la funzione $\frac{(\log(n))}{n^n}^{nx}$ Si tratta di una funzione esponenziale

• $\log(n) > 1$ se $n > 2$

per $n > 2$ $\lim_{x \to \infty} \frac{(\log)^{nx}}{n^n} = +\infty$ (esponenziale) Non c'è convergenza totale su R

Vediamo $(-\infty, M)$

La funzione è crescente $\longrightarrow$ $\sup_{n>2} \left| \frac{\log(n)^{nx}}{n^n} \right| = \frac{(\log(n))^{M \cdot n}}{n^n}$

$\sum_{n \geq 2} \frac{(\log(n))^{M \cdot n}}{n^n}$ converge x convergenza puntuale in M

<u>esercizio 3</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^{2n}}{3^n}$ convergenza

$$\sum (-1)^n \frac{(x+4)^{2n}}{3^n} = 1 - \frac{(x+4)^2}{3} + \frac{(x+4)^4}{9} + \dots$$

è come $\sum a_k (x+4)^k$ in cui $a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \frac{(-1)^{k/2}}{3^{k/2}} & k \text{ pari} \end{cases}$

$\lim_{\substack{k \text{ PARI} \\ k \to \infty}} \sqrt{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\lim_{\substack{k \text{ disp} \\ k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$

$\longrightarrow$ $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\longrightarrow$ ho convergenza per $|x+4| < \sqrt{3}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

esercizio 1 (x casa)

vedi pdf ora 101 l'esercizio in verde ✓

esercizio 2

$$\begin{cases} y'' - 2y' = xe^x + x \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

▶ Ci sono dati iniziali yo e y1 per cui $\lim_{x\to\infty} y(x) < 0$?

omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 2 \rightarrow y_0 = A + Be^{2x}$

particolare: cerco y_1 di $y'' - 2y' = x$

Parto con $y_1 = ax^2 + bx$ (di 2° grado perché risonante)

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2ax + b \\ y_1'' &= 2a \end{aligned}\right\} \quad y_1'' - 2y_1' = 2a - 4ax - 2b = x \longrightarrow \begin{aligned} a &= -1/4 \\ b &= -1/4 \end{aligned} \longrightarrow y_1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

cerco y_2 di $y'' - 2y' = xe^x$

Parto con $y_2 = (ax+b)e^x$ qui non aumento il grado perché non va in risonanza

[...] conti

$y_2 = -xe^x$

generale: $y = A + Be^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - xe^x$

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = y_0 \\ y'(0) &= 2B - 1 - \frac{1}{4} = y_1 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} B &= \frac{y_1}{2} - \frac{5}{8} \\ A &= y_0 - \frac{y_1}{2} + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

soluzione PC: $y_0 - \frac{y_1}{2} + \frac{5}{8} + \underbrace{\left(\frac{y_1}{2} - \frac{5}{8}\right)e^{2x}}_{\text{termine dominante}} - xe^x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}$ cosa succede per $x \to \infty$

$\frac{y_1}{2} - \frac{5}{8} > 0 \qquad \lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$

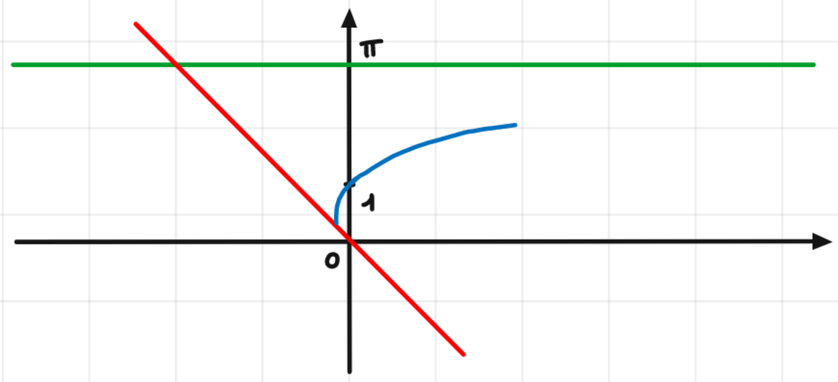
$\frac{y_1}{2} - \frac{5}{8} \leq 0 \qquad \lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} y(x) < 0 \iff \frac{y_1}{2} - \frac{5}{8} < 0$ ovvero $y_1 \leq \frac{5}{4}$, y_0 qualsiasi

esercizio 1 (ora 105)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin(y)}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \text{non direttamente a variabili separabili}$$

soluzione qualitativa



Per $x = -y$ il teo di Cauchy non vale

$y = 0, \pi$ sono soluzioni costanti

$\hookrightarrow$ $0 < y(x) < \pi \longrightarrow \sin(y) > 0$

$x + y(x) > 0$ perché non posso oltrepassare

Quindi $y'(x) > 0 \quad \forall x \in I_{max} \Longrightarrow y(x)$ crescente

Determiniamo I_{max}:

- $x \geq 0$: $x + y(x) > y(x) > y(0) = 1 \Longrightarrow \left|\dfrac{\sin y}{x+y}\right| < 1$ sulle soluzioni $y(x) \Longrightarrow T_{max} = +\infty$ per teo esistenza globale
- $x < 0$: per forza $y(x)$ prima o poi tocca $y = -x$ in un punto $-1 < x_0 < 0$

  $I_{max} = (x_0, +\infty)$

Cosa succede in x_0? Se $x \to x_0^+$ ho che $x + y(x) \to 0^+$ e quindi $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{\sin(y)}{x+y} = +\infty$ $\quad$ " y' "

Vuol dire che nell'interno destro di x0 la funzione y ha pendenza verticale (perché la derivata va a infinito)

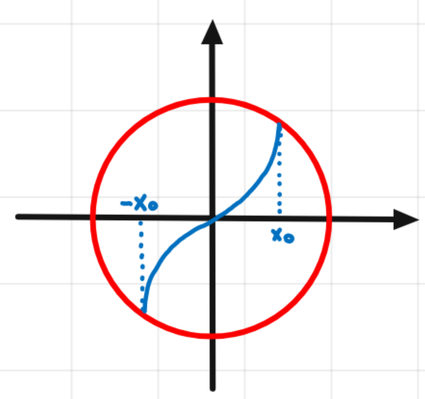
esercizio 2

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-1|}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1) Per quali (x0, y0) vale il teorema di esistenza locale
2) Cosa succede se parto da (x0, y0) = (0,0)
3) Cosa succede se parto da (x0, y0) = (1,-1)

1. Per usare il teorema di esistenza e unicità locale è necessario che $x^2 + y^2 \neq 1$
2. $y(x)$ è dispari?

   se $z(x) = -y(-x)$ allora $\begin{cases} z'(x) = y'(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{|(-x)^2+y^2(-x)-1|}} = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2+z^2-1|}} \\ z(0) = -y(-0) = -y(0) = 0 \end{cases}$



z(x) risolve il problema di Cauchy con x0, y0=(0, 0) $\longrightarrow$ $y(x)$ è dispari

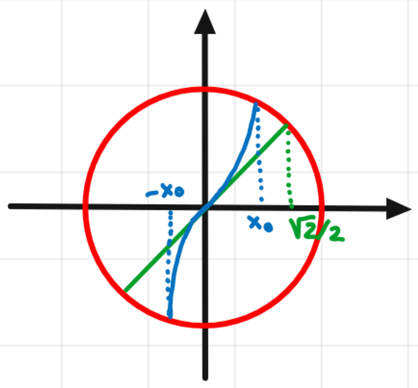
$y' > 0 \Longrightarrow y$ crescente

$I_{max} = (-x_0, x_0)$; $0 < x_0 < 1$

$y'(x) = +\infty \quad x \to x_0^-$

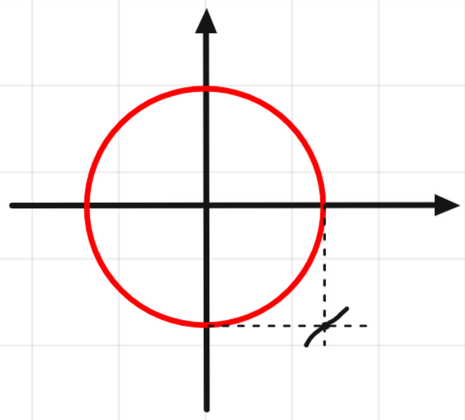
CONCAVITÀ: Studio $y'' \longrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)' = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(-2x-2yy')}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \longrightarrow y'' = \dfrac{x + \overbrace{yy'}^{>0}}{\underbrace{(1-x^2-y^2)^{3/2}}_{>0}}$ $\quad$ se $x > 0$ $y(x) > 0$ (perché $y(0) = 0$ e $y \nearrow$)

$y'' > 0$ se $x > 0$ e $y'' < 0$ se $x < 0$



OSS $y'(0) = 1 \Rightarrow 0 < x_0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ perché:

3. y esiste localmente e la derivata è positiva quindi y crescente



Poiché $y \nearrow$: $x^2 + y^2(x) - 1 > \delta > 0 \quad \forall x$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-1|}} > \frac{1}{\delta} \quad \forall x \quad \Longrightarrow \text{ la soluzione } \exists \ \forall x \in \mathbb{R}$$

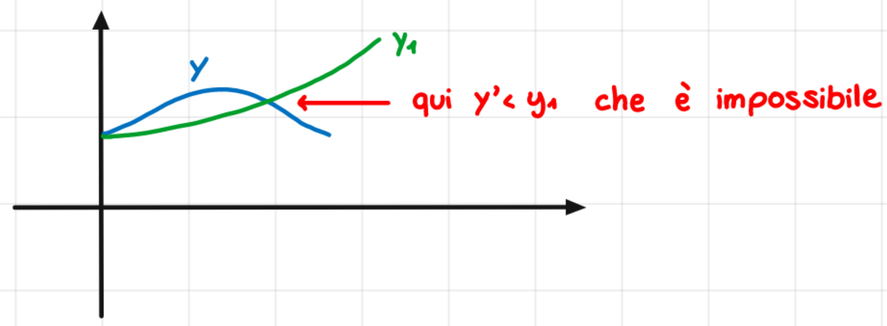
esercizio 3

$$\begin{cases} y' = (y+x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

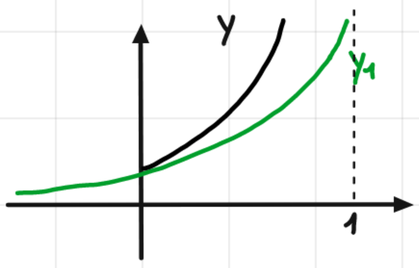
- $y' > 0 \Rightarrow y$ crescente
- se $x \geq 0 \rightarrow y \geq 1$ (x dato iniziale)

  ↳ e poi $(y+x)^2 > y^2$ in quanto $x, y > 0$

  Quindi $y(x) > y_1(x)$ dove $y_1(x)$ risolve $\begin{cases} y_1' = y_1^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{dim}]{\text{si può}}$



Ora y_1 si trova x separazione di variabili $\longrightarrow y_1 = \frac{1}{1-x}$



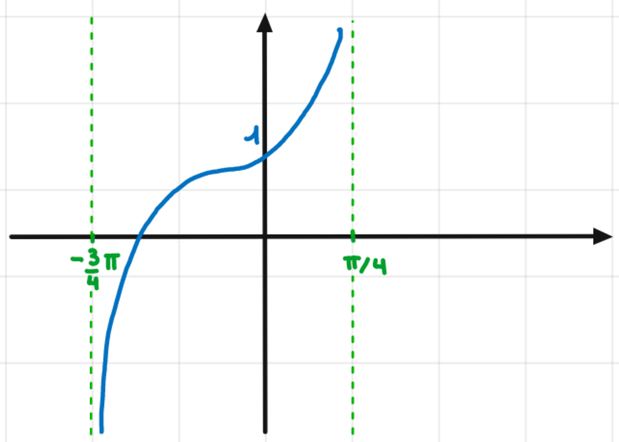
$\longrightarrow T_{MAX} = x_0 < 1$

Per trovare esplicitamente $y(x)$ uso la sostituzione $z = y + x$

$\longrightarrow$ Se y è soluzione di PC $\Rightarrow z$ è soluzione di $\begin{cases} z' = y' + 1 = (y+x)^2 + 1 = z^2 + 1 \\ z(0) = y(0) + 0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z' = z^2 + 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

$$\int_1^{z(x)} \frac{dz}{z^2+1} = \int_0^x 1 \, ds = \operatorname{arctg}(z) - \overset{\pi/4}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{arctg}(1)}} = x \longrightarrow \operatorname{arctg}(z) = x + \frac{\pi}{4} \longrightarrow z = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x \longrightarrow I_{max} = \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi, \overset{<1}{\frac{\pi}{4}}\right)$$



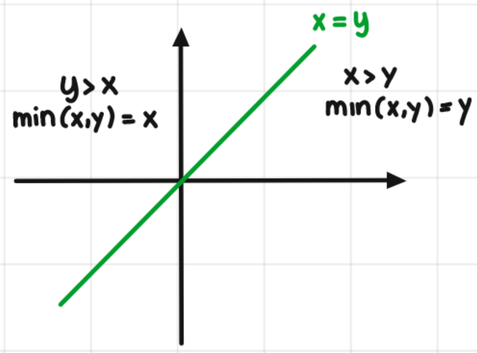
esercizio 1 (ora 106)

$$\begin{cases} y' = \min(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

► esistenza, $y(0) = a$, sol. esplicita per $y(-1) = 0$

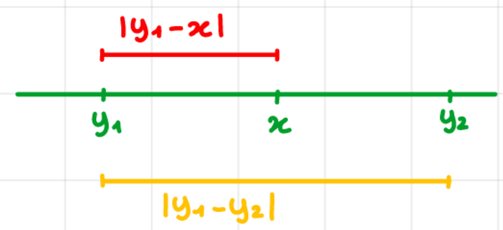
Soluzione

La funzione $\min(x,y)$ non è C^1



Possiamo far vedere che la funzione min è una funzione 1-Lipschitziana

- Se $y_1, y_2 > x$ $\quad |\min(x,y_1) - \min(x,y_2)| = |x - x| = 0 < |y_1 - y_2|$ ✓
- Se $y_1, y_2 < x$ $\quad |\min(x,y_1) - \min(x,y_2)| = |y_1 - y_2|$ ✓
- Se $y_1 < x < y_2$ $\quad |\min(x,y_1) - \min(x,y_2)| = |y_1 - x| < |y_1 - y_2|$ ✓



Quindi $|\min(x,y_1) - \min(x,y_2)| < |y_1 - y_2| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

→ vale teo esistenza e unicitá locale

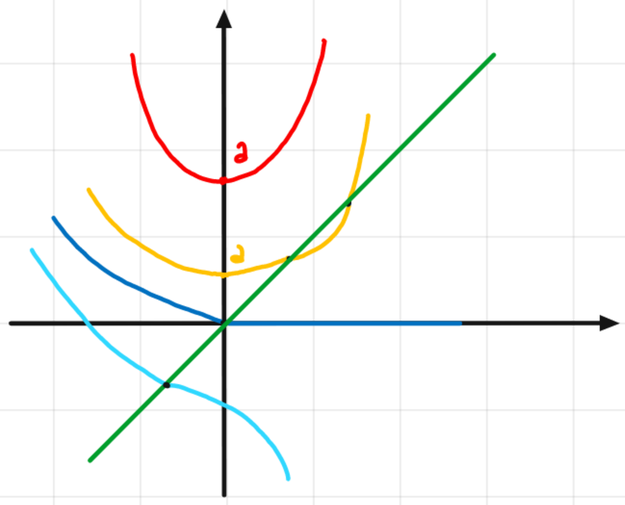
Inoltre $|\min(x,y)| < |y| \ \forall x \Rightarrow$ ho esistenza globale su $\mathbb{R}$

2. Cosa succede ?

Se siamo dove $y > x \rightarrow \min(y,x) = x$ risolvo $\begin{cases} y' = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \rightsquigarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}$

Se siamo dove $y < x \rightarrow \min(y,x) = y$ risolvo $\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \rightsquigarrow y = \frac{y_0}{e^{x_0}} \cdot e^x$ NB: $y_0 > 0 \rightarrow y \nearrow$, $y_0 < 0 \rightarrow y \searrow$

Quando una soluzione arriva all'interfaccia y=x si parte con un nuovo problema di Cauchy con dato iniziale opportuno



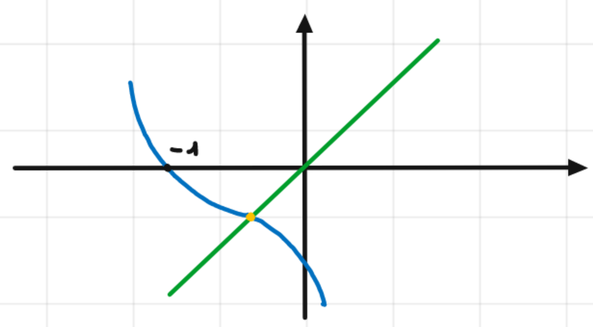
Per a grande ho solo parabola perché $y(x) > x \ \forall x$

Per a non troppo grandi e > 0 ho un pezzo di parabola, poi attraverso l'interfaccia e ho una parte di esponenziale verso l'alto → attraverso di nuovo l'interfaccia e finisco con parabola

Per $a = 0$: parto con parabola e continuo con retta

Per $a < 0$ parto con parabola, attraverso l'interfaccia e finisco con exp ma rivolta verso il basso

3. $\begin{cases} y' = \min(x,y) \\ y(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow$ Parto con parabola e finisco con esponenziale



All' inizio ho $\begin{cases} y' = x \\ y(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x^2-1}{2}$ fino al punto di interfaccia:

vale fino a $y = x = \frac{x^2-1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

↳ a me serve $1 - \sqrt{2}$

Quindi $y(x) = \frac{x^2-1}{2}$ per $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}]$

Poi parto con un nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y & \text{(sono su } y \leq x\text{)} \\ y(1-\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2} & \text{(parto da } y=x\text{)} \end{cases} \longrightarrow \quad y = \frac{1-\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\, e^{x}$$

In conclusione:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} & \text{per } x \leq 1-\sqrt{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\, e^{x} & \text{per } x \geq 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

esercizio 2

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = a \end{cases} \qquad \blacktriangleright \text{ CASI } a=0 \text{ e } a=\sqrt{3}$$

CASO $a = 0$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

Il problema di Cauchy è ben definito quindi ha una soluzione locale
Inoltre vedo che la funzione è dispari: la soluzione è sempre crescenre

$$\int_0^y \frac{dy}{y^2+1} = \int_0^x \frac{dx}{x^2+1} \longrightarrow \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg}(x) \longrightarrow y = x \qquad I_{max} = (-\infty, +\infty)$$

CASO $a = \sqrt{3}$

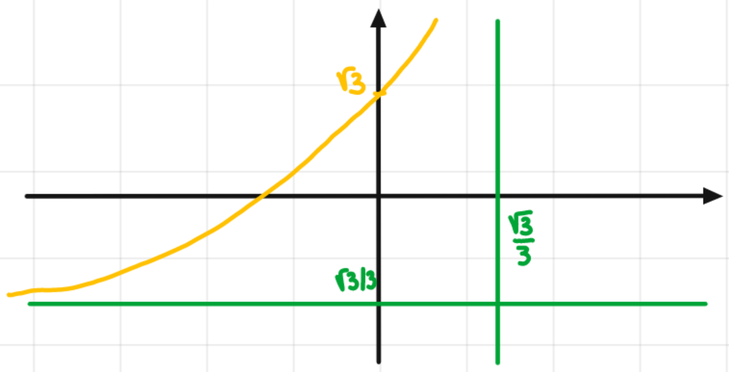
y è crescente, ma non si può dimostrare che è dispari perché non torna il dato iniziale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\int_{\sqrt{3}}^y \frac{dy}{y^2+1} = \int_0^x \frac{dx}{x^2+1} \longrightarrow \operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(x) \longrightarrow \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{\pi}{3} \longrightarrow y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}(x)\right)$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}(\pi/3) + x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/3)\, x} = \frac{\sqrt{3} + x}{1 - \sqrt{3}\cdot x} \longrightarrow \text{problema in } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



esercizio 1 (ora 107)

$$\begin{cases} y' = 1 - \log(x+y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soluzione

$z(x) = y(x) + x$ se y risolve PC

$z' = y' + 1 = 2 - \log(x+y) = 2 - \log(z)$

$z(0) = y(0) + 0 = 1$

z risolve $\begin{cases} z' = 2 - \log(z) \\ z(0) = 1 \end{cases}$

- $z > 0$ per CE
- e^2 soluzione costante $(e^2 > 1)$

$\longrightarrow$ $0 < z(x) < e^2 \quad \forall x \in (T_{min}, T_{max})$

Se $0 < z < e^2$ allora

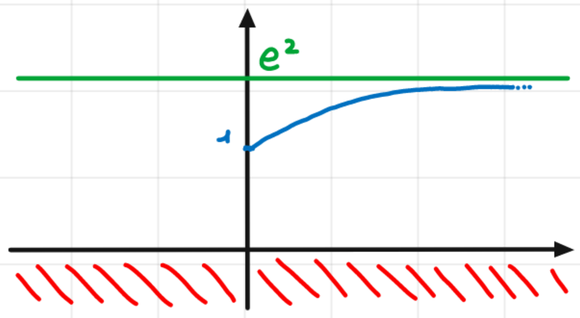
1) $2 - \log(z) \geq 0 \Rightarrow z$ crescente

2) per $x > 0$ $\quad |2 - \log(z)| < 2 \Rightarrow$ per $x \geq 0$ ho esistenza globale $\Rightarrow T_{max} = +\infty$

3) z crescente, $T_{max} = +\infty$

$z < e^2 \Rightarrow z(x)$ ha un asintoto orizzontale per $x \to \infty$

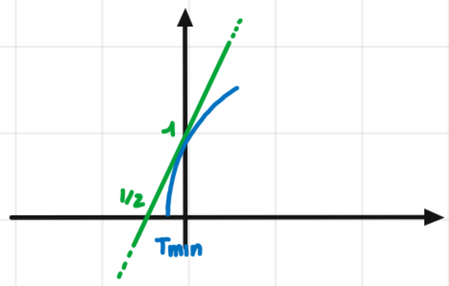
Quindi $\exists\, \ell \in [1, e^2]$ tc $\lim_{x\to\infty} z'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} z(x) = \ell$ $\Longrightarrow$ $z' = 2 - \log(z) \xrightarrow{z \to \infty} 0 = 2 - \log(\ell) \longrightarrow \ell = e^2$



4) concavitá

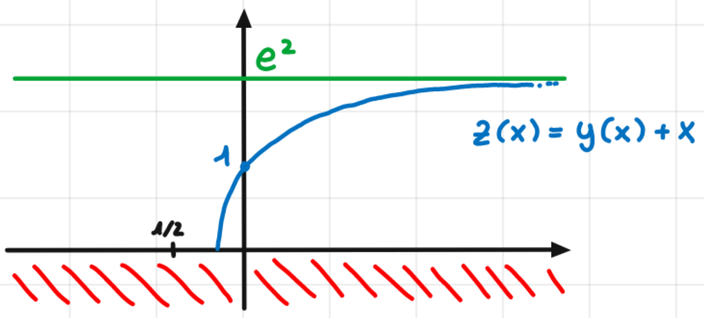
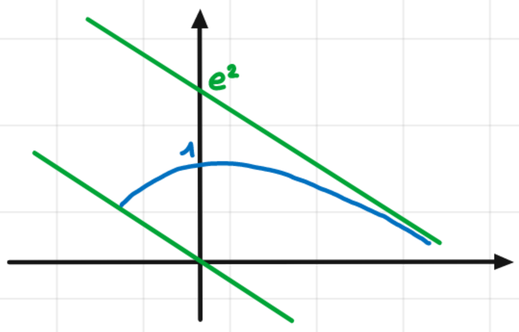
$z'' = (z')' = (2 - \log(z))' = -\frac{1}{z} \cdot \underbrace{z'}_{>0} < 0 \Rightarrow z''(x) < 0 \quad \forall x \Rightarrow z$ è concava: sta tutta sotto la sua tg

$z'(0) = 2$



$\longrightarrow$ T_{min}: $\frac{1}{2} < T_{min} < 0$

$\lim_{x \to T_{min}^+} z'(x) = \lim_{x \to T_{min}^+} 2 - \log(\underbrace{z(x)}_{\to 0}) = +\infty \longrightarrow$ pendenza verticale



$\longrightarrow$