



Università degli Studi di Pisa

Dipartimento di Ingegneria Chimica, Chimica Industriale e Scienza dei Materiali

FENOMENI DI TRASPORTO

per i corsi del nuovo ordinamento degli studi universitari

Roberto Mauri

Pisa, 2003

Premessa

Questo volume è rivolto agli studenti dei corsi di laurea triennale e di laurea specialistica nelle classi dell'Ingegneria e delle Scienze e Tecnologie del nuovo ordinamento degli studi universitari. In questo ambito, l'obiettivo formativo dei corsi a cui questo testo si rivolge è quello di dare una prima esposizione dei fondamenti dei fenomeni di trasporto e degli strumenti operativi che ne derivano. In particolare, in questo testo si espongono le basi della meccanica dei fluidi e del trasporto di calore e di massa, relativi al trasporto di tre delle quattro quantità fisiche che si conservano in natura, cioè la quantità di moto, l'energia e il calore. Il trasporto della quarta grandezza conservativa, la carica elettrica, non viene considerato anche se, dal momento che il suo studio ricalca quello del trasporto di massa, lo studente può trovare in questo testo tutte le basi fisiche e matematiche necessarie.

I mezzi in cui hanno luogo i fenomeni trasporto si suppongono continui, anche se talvolta si fa cenno alle loro basi molecolari, con l'intento di fare chiarezza sulle basi fisiche dei fenomeni considerati. Dunque, l'apparato matematico di cui si fa uso è quello della meccanica dei corpi continui e deformabili.

La caratteristica distintiva dello studio dei fenomeni di trasporto è quella di unificare l'approccio fisico e matematico di tutti i tipi di trasporto. Prendendo come riferimento il trasporto di calore, tali fenomeni si descrivono infatti in termini di causa ed effetto, rappresentati da una *forza motrice* e dal *flusso* della grandezza trasportata, oltre che dalla *resistenza*, che misura l'entità dell'opposizione del sistema al trasporto e che è responsabile della dissipazione dell'energia. Tale approccio, che è tipico dell'ingegneria chimica, è alla base del testo "principe" di questa disciplina, cioè *Transport Phenomena*, scritto da Bird, Stewart e Lightfoot e pubblicato nel 1960, in cui l'analisi microscopica dei fenomeni precede il loro studio macroscopico. Tutti i libri di testo che sono stati pubblicati in seguito, o perlomeno tutti i più importanti, hanno seguito questo impostazione originaria.

Questo testo è il risultato di venti anni di insegnamento dei fenomeni di trasporto, di cui due svolti al Massachusetts Institute of Technology, quindici alla City University di New York e tre all'Università di Pisa, rivolto a studenti di Ingegneria Chimica, Meccanica, Nucleare e Biomedica. Come tale, rappresenta il modo in cui credo che questo materiale vada insegnato. Anzitutto, sono convinto che alla base dell'insegnamento di questa disciplina vada posta la spiegazione della fisica dei fenomeni e la loro analisi dimensionale. Dunque, anche quando ciò va a scapito del rigore matematico, credo che sia più opportuno iniziare a spiegare i processi da un punto di vista macroscopico e fenomenologico, mentre i modelli matematici che li descrivono si devono sviluppare in un secondo tempo. Questo approccio, che è in contrasto con quello dei libri di testo più usati, è particolarmente adatto alla nuova struttura dei corsi di studio dell'università italiana, dove i fenomeni di trasporto vengono studiati in modo elementare nei corsi della laurea triennale e successivamente approfonditi, quando è il caso, durante la laurea specialistica.

In base a quanto detto sopra, questo testo è stato pensato in maniera modulare. Ad esempio, per un corso semestrale di fenomeni di trasporto, ci si può limitare a seguire le parti relative all'analisi macroscopica dei fenomeni, cioè i capitoli 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 13, 14 e 15, confinando lo studio degli altri capitoli ad un corso successivo. Tuttavia, va sottolineato che il materiale trattato in questo volume è molto di più di quello che ci si aspetta di poter coprire in due semestri di insegnamento.

Spetta all'istruttore scegliere quali argomenti privilegiare, anche in base alle necessità degli studenti: banalmente, gli studenti di ingegneria meccanica sono più interessati allo studio della turbolenza, quelli di ingegneria biomedica allo studio dei fenomeni superficiali.

Una considerazione a parte va fatta riguardo agli esercizi che vengono proposti alla fine di ciascun capitolo. Essi vanno considerati come una parte integrante del libro di testo, perché in campo scientifico non si può dire di aver capito un argomento se non se ne sanno risolvere gli esercizi. Tuttavia, mentre nei libri di testo più usati, di matrice anglosassone, le soluzioni degli esercizi non vengono indicate, in questo volume esse sono riportate tutte alla fine. Ciò è dovuto al fatto che nelle università inglesi e americane questi esercizi vengono assegnati agli studenti come compiti a casa, che vengono poi corretti dai "tutors" (che sono, in genere, degli studenti di dottorato a cui si fornisce il manuale con le soluzioni), mentre nelle università italiane essi vengono svolti in classe e dunque, da questo punto di vista, costituiscono una parte integrante del corso di studio.

Infine, vorrei rispondere ad una obiezione che ho spesso ricevuto dai miei studenti: nel libro di testo non si trovano tutte le proprietà fisiche richieste per risolvere alcuni dei problemi proposti. Questa "mancanza" è voluta ed è motivata dal fatto che in questo modo lo studente è obbligato a consultare altri testi, in particolare gli *handbooks* (si pensi al Perry per l'ingegneria chimica) che lo accompagneranno per tutti gli anni in cui svolgerà la sua professione di ingegnere.

Vorrei ringraziare molte generazioni di studenti e colleghi che hanno contribuito a plasmare questo volume con i loro suggerimenti e le loro domande. Uno speciale ringraziamento va al Professor Cosimo Rizzo: la forma finale di questo testo è fortemente migliorata in chiarezza grazie al suo contributo. In ogni caso, ringrazio in anticipo coloro, soprattutto quelli a cui questo testo è destinato, che vorranno segnalare ogni inadeguatezza o errore, contribuendo così a rendere questo sussidio didattico il più valido possibile.

Roberto Mauri

Pisa, marzo 2003

FENOMENI DI TRASPORTO

per i corsi del Nuovo Ordinamento degli studi universitari

Roberto Mauri

*Dipartimento di Ingegneria Chimica, Chimica Industriale e Scienza dei Materiali
Università di Pisa*

Indice

Premessa	i
0. Termodinamica ed evoluzione	1
0.1 Statica e dinamica	2
0.2 Equilibrio locale	3
0.3 Introduzione alla meccanica dei corpi continui	5
0.3.1 La pressione	6
0.3.2 Gli sforzi di taglio	7
0.4 Convezione e diffusione	8
0.4.1 I flussi convettivi	9
0.4.2 I flussi diffusivi e le equazioni costitutive	10
0.5 Viscosità	11
0.6 Conducibilità termica	13
0.7 Diffusività molecolare	14
0.8 Diffusione come esempio di "random walk"	15
0.9 Esempi di diffusione	17
0.10 Esercizi	18
1. Statica dei fluidi	19
1.1 Equilibrio idrostatico	19
1.1.1 Caso di fluido incomprimibile	19
1.1.2 Caso di gas ideale	20
1.2 Manometri	20
1.3 Tensione superficiale	22
1.4 L'equazione di Young-Laplace	24
1.4.1 Approccio termodinamico	24
1.4.2 Approccio meccanico	25
1.5 Angolo di raccordo	27
1.6 Esercizi	28
2. Aspetti generali della fluidodinamica	30
2.1 Introduzione	31
2.2 Il numero di Reynolds	31
2.3 Strato limite e resistenza viscosa	32
2.4 Condizioni al contorno	35
2.5 Turbolenza	36
2.6 Esercizi	38

3.	Bilanci macroscopici	39
3.1	Bilancio di massa ed equazione di continuità	39
3.2	Bilancio di energia meccanica ed equazione di Bernoulli	41
3.3	Bilancio di quantità di moto	44
3.4	Ricapitolazione dell'equazione di Bernoulli	46
3.4.1	Effetto della non uniformità del campo di velocità	46
3.4.2	Effetto delle forze di attrito	47
3.4.3	Effetto della presenza di pompe	48
3.5	Perdite di carico nella convezione forzata all'interno di tubi	48
3.6	Perdite di carico localizzate	51
3.6.1	Esempio di perdite di carico localizzate	51
3.7	Flusso attorno ad un oggetto sommerso	53
3.8	Esercizi	54
4.	Campo di velocità e pressione	58
4.1	Flusso di fluidi newtoniani all'interno di un condotto	58
4.2	Reologia dei fluidi	60
4.3	Flusso di fluidi non newtoniani all'interno di un condotto	61
4.4	Flusso in mezzi porosi	63
4.4.1	Letti fissi e letti fluidizzati	66
4.4.2	Filtri	67
4.5	Flusso quasi stazionario	68
4.6	Flusso capillare	69
4.7	Esercizi	71
5.	Le equazioni fondamentali dei fenomeni di trasporto	73
5.1	Conservazione della massa; l'equazione di continuità	73
5.2	Conservazione della quantità di moto; l'equazione di Cauchy	77
5.3	Conservazione del momento della quantità di moto	79
5.4	Le equazioni costitutive	80
5.5	Conservazione dell'energia	81
5.6	Equazioni del moto per fluidi newtoniani incomprimibili	84
6.	Flussi unidirezionali	86
6.1	Flusso in un canale o in un tubo	86
6.1.1	Viscosimetro a caduta	87
6.2	Flusso azimutale tra due dischi paralleli	89
6.3	Flusso radiale tra due dischi paralleli	90
6.4	Flusso dovuto al movimento rapido di una parete	92
6.5	Drenaggio di un film liquido da una parete verticale	95
6.6	Metodi integrali	96
6.7	Esercizi	98
7.	Lo strato limite	100
7.1	Analisi del problema	100
7.2	Soluzione autosimile di Blasius	102
7.3	Distacco dello strato limite	106

7.4	Metodi integrali	107
7.5	Esercizi	110
8.	Conduzione di calore	111
8.1	Introduzione	111
8.2	Flusso di calore unidirezionale	113
8.2.1	Geometria piana	113
8.2.2	Geometria cilindrica	114
8.2.3	Geometria sferica	116
8.3	Il solido composto	116
8.3.1	Caso a geometria cilindrica	118
8.4	Approssimazione di quasi stazionarietà	118
8.5	Esercizi	121
9.	Conduzione con generazione di calore	123
9.1	Generazione uniforme	123
9.1.1	Geometria piana	123
9.1.2	Geometria cilindrica	124
9.1.3	Geometria sferica	125
9.2	Conduzione con reazione chimica	127
9.2.1	Calcolo asintotico per $Da \ll 1$	128
9.2.2	Calcolo asintotico per $Da \gg 1$	129
9.3	Esercizi	131
10.	Bilancio macroscopico di energia	133
10.1	Introduzione	133
10.2	Il coefficiente di scambio termico	134
10.3	Scambiatori di calore	136
10.3.1	Geometrie più semplici	136
10.3.2	Geometrie più complesse	139
10.4	Alettature di raffreddamento	140
10.5	Esercizi	142
11.	Conduzione di calore variabile nel tempo	144
11.1	Equazione dl trasporto di calore	144
11.2	Trasporto di calore in un mezzo semi-infinito	145
11.2.1	Due solidi a contatto	146
11.2.2	Raffreddamento di un film in caduta libera	147
11.3	Campo di temperatura generato da un impulso di calore	148
11.4	Trasporto di calore in un solido finito	149
11.5	Scambio di calore in un tubo	152
11.6	Esercizi	154
12.	Lo strato limite termico	156
12.1	Analisi dimensionale del problema	156
12.2	Lo strato limite termico	158
12.2.1	$Re \gg 1$	160

12.2.2 $Re << 1$	161
12.3 L'analogia di Colburn-Chilton	162
12.3.1 Relazione tra δ e δ_T	164
12.4 Esercizi	166
13. Equazioni costitutive del trasporto di massa	167
13.1 Flussi e velocità	167
13.2 Le equazioni di bilancio	169
13.3 Le equazioni costitutive	170
13.4 Risposte ad alcune domande	173
13.5 Condizioni al contorno	176
14. Trasporto di massa stazionario	178
14.1 Diffusione attraverso un film stagnante	178
14.2 Diffusione con reazione chimica eterogenea	181
14.2.1 Geometria piana	181
14.2.2 Geometria sferica	183
14.3 Diffusione con reazione chimica omogenea del prim'ordine	184
14.3.1 Calcolo asintotico per $Da << 1$	186
14.3.2 Calcolo asintotico per $Da >> 1$	187
14.4 Diffusione con reazione chimica omogenea del second'ordine	188
14.5 Esercizi	189
15. Trasporto di massa non stazionario	190
15.1 Trasporto attraverso una membrana	190
15.2 Evaporazione di un liquido da un serbatoio	192
15.3 Combustione di una particella di carbone	194
15.4 Evaporazione non stazionaria	197
15.5 Esercizi	199
16. Trasporto di massa convettivo	201
16.1 Esempio di trasporto molare per conduzione	201
16.2 Strato limite massico	204
16.3 Strato limite massico per $Re << 1$	207
16.4 Approssimazione quasi stazionaria	209
16.5 Esercizi	210
17. Fenomeni di trasporto in un flusso turbolento	211
17.1 Caratteristiche fondamentali della turbolenza	211
17.2 Scale dei tempi e delle distanze per il flusso turbolento	213
17.3 Le equazioni mediate nel tempo	215
17.3.1 Le grandezze medie	215
17.3.2 Conservazione della massa	216
17.3.3 Conservazione della quantità di moto	216
17.3.4 Conservazione dell'energia e delle specie chimiche	217
17.3.5 I flussi turbolenti	218
17.4 Diffusività turbolente	220

17.4.1	Il concetto di diffusività turbolenta	220
17.4.2	Variabili adimensionali di parete	221
17.4.3	Calcolo della diffusività turbolenta	221
17.5	Profilo di velocità alla parete	222
17.6	Modelli più complessi	225
18.	La convezione naturale	228
18.1	La approssimazione di Boussinesq	228
18.2	Flusso in un canale verticale	230
18.3	Analisi dimensionale	231
18.4	Strato limite nella convezione naturale	233
18.5	Correlazioni sperimentali	235
18.6	Esercizi	236
19.	L'irraggiamento	237
19.1	La legge di Stefan-Boltzmann	237
19.2	Emissione e assorbimento della radiazione	240
19.2.1	La legge di Kirchhoff	240
19.2.2	Il fattore angolare	241
19.2.3	Esempio: radiazione tra corpi neri in ambiente adiabatico	242
19.2.4	Scambio di radiazione tra corpi grigi	243
19.3	Radiazione e conduzione	244
19.4	Esempio: progetto di un pannello solare	245
19.5	Esercizi	247
20.	L'antidiffusione	248
20.1	Il potenziale chimico	248
20.2	Stabilità chimica	249
20.3	Esempio: condizioni di equilibrio in miscele binarie regolari	251
20.4	Trasporto molare in miscele binarie regolari	254
20.5	Generalizzazione per miscele qualsiasi	255
20.6	La pressione osmotica	256
Appendice A1	- Alcune proprietà di composti puri a 1 atm	259
Appendice A2	- Viscosità e tensione superficiale di alcuni fluidi	260
Appendice A3	- Equazioni del moto	261
A3.1	Coordinate cartesiane x, y, z	261
A3.2	Coordinate cilindriche r, ϕ, z	262
A3.3	Coordinate sferiche r, θ, ϕ	263
Appendice A4	- Fattori di conversione	264
Soluzione degli esercizi - Parte 1		265
Soluzione degli esercizi - Parte 2		287
Indice analitico		310

0. Termodinamica ed evoluzione

I fenomeni di trasporto, come dice il nome, si riferiscono allo studio di come alcune quantità fisiche (calore, quantità di moto e materia) relative a sistemi complessi, costituiti da un numero elevatissimo di particelle (atomi o molecole) si possano trasferire da un punto ad un altro. Come in termodinamica, i sistemi considerati si suppongono continui, anche se talvolta, per fare chiarezza sulle basi fisiche dei fenomeni considerati, si fa cenno alle loro basi molecolari.

La caratteristica distintiva di questa disciplina è quella di unificare l'approccio fisico e matematico di tutti i tipi di trasporto. Per chiarire questo punto, si prenda come riferimento il trasporto di calore, dove, quando tra due serbatoi c'è una differenza di temperatura (causa), viene a stabilirsi un flusso termico (effetto). Ora, se consideriamo altri tipi di fenomeni di trasporto, ci accorgiamo che si possono interpretare tutti nello stesso modo, cioè in termini di una causa, che chiamiamo *forza motrice* (*driving force*, in inglese) e di un effetto, che è il *flusso* della grandezza trasportata. Vediamo alcuni esempi.

- Una pentola d'acqua su una piastra molto calda. La differenza di temperatura tra i due lati della lamina di metallo della pentola causa un flusso di calore dalla parte calda a quella fredda, calore che scalda l'acqua.
- Una goccia d'inchiostro in un bicchiere d'acqua. La differenza di concentrazione tra le zone all'interno e quelle all'esterno della goccia causa un flusso di inchiostro dalle regioni ad alta concentrazione a quelle a bassa, finché l'inchiostro sarà uniformemente distribuito nell'acqua.
- Una differenza di pressione tra due punti lungo un tubo causa un flusso massico del fluido che riempie il tubo dalla regione ad alta a quella a bassa pressione.
- Una differenza di velocità tra due punti di un fluido in moto laminare causa un flusso di quantità di moto tra la zona a velocità più elevata a quella a velocità più bassa.
- Una differenza di tensione elettrica tra due punti lungo un filo conduttore provoca una corrente elettrica, cioè un flusso di carica elettrica, dal punto a tensione più alta a quello a tensione più bassa.

Consideriamo il primo esempio: a causa del calore trasportato dalle regioni calde a quelle fredde, cioè dalla piastra all'acqua, la temperatura dell'acqua tende a diventare uguale a quella della piastra. Quindi il flusso di calore si mantiene stazionario (cioè costante nel tempo) soltanto se le temperature dell'acqua e della piastra sono mantenute costanti, quindi scaldando, per esempio elettricamente, la piastra e raffreddando l'acqua, compiendo cioè delle operazioni che richiedono energia. Ora, in condizioni stazionarie, l'energia interna della pentola è costante, e quindi l'energia immessa deve essere bilanciata da quella uscente, cioè dal calore trasportato.

In generale un sistema fisico, lasciato a se stesso, tende a portarsi verso uno stato di equilibrio stabile, in cui temperatura, composizione, pressione, velocità e campo elettrico sono uniformi (cioè sono gli stessi ovunque). Viceversa, se le differenze (o meglio, i gradienti) di queste grandezze (cioè le forze motrici) sono diversi da zero, si genera un flusso costante di energia, massa, quantità di moto o carica elettrica. Ora, questo stato di disequilibrio si può mantenere solo a spese di un'energia che immettiamo nel sistema, e che poi il sistema *dissipa*¹

¹ Il termine *dissipazione di energia* significa qui *conversione in calore*. Infatti, l'energia si conserva e dunque non si può consumare.

durante il fenomeno di trasporto. In altre parole, durante il trasporto di una grandezza fisica si dissipà dell'energia, che in condizioni stazionarie deve essere continuamente reintegrata, immettendola nel sistema dall'esterno.

Tornando all'esempio della pentola, il trasporto di calore non avviene con la stessa facilità in tutti i materiali: è più facile nei materiali conduttori, e meno in quelli isolanti. Per questo useremo una pentola di alluminio (che è un ottimo conduttore) se vogliamo far bollire dell'acqua in fretta, mentre ne useremo una di terracotta (che è un pessimo conduttore) se vogliamo preparare un intingolo, che richiede molto tempo e piccoli flussi di calore. Questa specie di attrito che si oppone al flusso di calore è rappresentato dalla cosiddetta *resistenza termica*, una caratteristica del sistema in esame, che è il termine di proporzionalità tra il gradiente di temperatura e il flusso di calore. In generale, nei fenomeni di trasporto si può ritenere che la forza motrice sia proporzionale al flusso attraverso un coefficiente, detto *resistenza*, che misura l'entità dell'opposizione del sistema al trasporto. Tale resistenza è responsabile della dissipazione dell'energia.

Nel seguito del testo queste linee guida, fondate sui concetti di forza motrice, flusso e resistenza, verranno applicate allo studio della meccanica dei fluidi e del trasporto di calore e di massa, che corrispondono al trasporto di tre delle quattro quantità fisiche che si conservano in natura: la quantità di moto, l'energia e la massa. Il trasporto della quarta grandezza conservativa, la carica elettrica, non viene considerato anche se, dal momento che il suo studio ricalca quello del trasporto di massa, lo studente può trovare in questo testo tutte le basi fisiche e matematiche necessarie.

0.1 Statica e dinamica

Se versiamo dell'acqua bollente in un contenitore chiuso (cioè con pareti impermeabili ad un flusso di materia), rigido e a pareti isolanti (cioè con pareti impermeabili ad un flusso di calore), l'acqua, che all'inizio sarà soggetta a moti interni, avrà temperature non uniformi ed evaporerà parzialmente, alla fine si arresterà nel suo moto (equilibrio meccanico), raggiungerà una temperatura stazionaria ed uniforme (equilibrio termico), e cesserà di evaporare² (equilibrio chimico). In genere, se prendiamo un sistema fisico complesso (cioè composto da un numero elevatissimo di componenti fondamentali, come gli atomi) e lo isoliamo, per esempio lo mettiamo in una scatola rigida e isolata, il sistema si evolverà fino a raggiungere uno stato finale, detto di equilibrio, dopo di che il sistema cesserà di evolversi, cioè rimarrà inalterato nel tempo. Queste regole generali sono contenute nella termodinamica, in particolare nelle sue due leggi. La prima legge stabilisce che l'energia di un sistema isolato è costante, così che, anche se l'energia si può trasformare da una forma all'altra, non si può creare né distruggere. La seconda legge stabilisce che, nell'evolversi da uno stato all'altro, un sistema isolato tende a dirigersi verso il suo stato di equilibrio stabile.

Quindi, in definitiva, la termodinamica ci dice che un sistema isolato si evolve in modo da conservare la sua energia e che la sua evoluzione è diretta verso un ben definito stato di equilibrio stabile. Se però vogliamo studiare in che modo un sistema si evolve, la termodinamica non ci è di alcun aiuto. Infatti, nonostante il suo nome (fuorviante), la termodinamica è la scienza che studia i sistemi complessi in equilibrio, ed è quindi di scarso

² In altre parole, a livello microscopico, la quantità d'acqua che evapora sarà bilanciata dalla quantità di vapore acqueo che condensa.

aiuto nello studio delle *trasformazioni*, cioè dei processi che avvengono in assenza di equilibrio. Per esempio, nell'esempio precedente dell'acqua bollente, la termodinamica ci dice che alla fine l'acqua raggiungerà una temperatura finale di equilibrio, e potrà anche predire quale sarà questa temperatura, ma non ci può dire quanto tempo ci vorrà per raggiungerla né come si comporta il sistema in tale intervallo di tempo.

A questo punto, sarebbe facile concludere che la termodinamica non serve a nulla: dopotutto, se ci guardiamo attorno, i sistemi che ci circondano sono ben lontani dall'equilibrio. Il nostro corpo, per esempio, è costantemente in disequilibrio termico con l'ambiente circostante, poiché la sua temperatura di 37°C è raramente uguale a quella dell'ambiente. Infatti, negli esseri viventi, l'equilibrio si raggiunge solo dopo la morte. La nostra conclusione sarebbe tuttavia sbagliata, poiché la termodinamica ci indica anche i limiti di qualsiasi processo. Per esempio, quando è in vita, il nostro corpo riesce a mantenere il suo stato di disequilibrio soltanto a spese di una certa quantità di energia che assumiamo dall'esterno con il cibo e con l'aria. Ora, la termodinamica ci indica la quantità minima di energia che dobbiamo assumere se vogliamo produrre una certa minima quantità di lavoro necessario a mantenerci in vita. Tuttavia, se vogliamo determinare in quanto tempo e in che modo questa energia si possa dissipare, la termodinamica non ci è di alcun aiuto: per questo occorre conoscere come l'energia (e analogamente la massa e la quantità di moto) si muova da un punto all'altro. Questo è l'argomento di studio dei *fenomeni di trasporto*.

0.2 Equilibrio locale

In questo paragrafo, vogliamo determinare quando un sistema si possa considerare localmente all'equilibrio termodinamico, in modo che le variabili termodinamiche (temperatura, pressione, entropia, energia interna, potenziale chimico, fugacità, ecc.) si possano definire localmente e possiamo così avvalerci, localmente, di tutte le relazioni termodinamiche valide per sistemi di dimensioni finite. È, questa, la cosiddetta condizione di *equilibrio locale*.

L'importanza della condizione di equilibrio locale è ovvia: mentre alcuni processi ideali (tra cui quelli reversibili) si possono schematizzare come se fossero composti di una successione di stati di equilibrio e quindi si possono studiare completamente usando la termodinamica, i processi reali sono composti da una successione di stati di disequilibrio (anche quando gli stati di partenza e di arrivo sono stati di equilibrio) e la termodinamica non può, a rigore, esservi applicata. Eppure, quando studiamo, ad esempio, uno scambiatore di calore, in cui il calore passa da un a sorgente calda ad una fredda e un fluido scorre da punti ad alta pressione a punti a bassa pressione, incontriamo termini quali distribuzione di temperatura e di pressione, usiamo cioè dei termini, quali temperatura e pressione, che sono stati introdotti in termodinamica per caratterizzare sistemi all'equilibrio. Ciò sembrerebbe indicare che anche in condizioni di evidente non equilibrio, in cui la temperatura e la pressione non sono uniformi, tali variabili si possono, a volte, definire *localmente* e in questo paragrafo intendiamo studiare quando questo è possibile.

Sappiamo che in un sistema composto da un numero finito N di particelle e mantenuto all'equilibrio termodinamico, una qualsiasi grandezza termodinamica intensiva A fluttua attorno al suo valore di equilibrio, \bar{A} , che è costante nel tempo e uniforme nello spazio, in

modo che il valore relativo di tali oscillazioni, $\delta A / \bar{A}$, risulta proporzionale a $1/\sqrt{N}$.³ Dunque, possiamo dire che un sistema si trova in una condizione di equilibrio locale quando queste fluttuazioni termiche sono maggiori delle variazioni dovute a disomogeneità spaziali o temporali di \bar{A} . Più precisamente, un sistema si trova in una condizione di equilibrio locale quando sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- a) È possibile dividere il sistema in volumi elementari (che poi ne costituiscono i “punti materiali”) sufficientemente grandi da poter contenere un grande numero N di particelle, in modo che le fluttuazioni δA di ogni grandezza fisica A siano piccole, cioè $\delta A/A \ll 1$.
- b) La variazione ΔA dovuta al gradiente macroscopico $\nabla \bar{A}$ è minore delle fluttuazioni δA . Analoga considerazione vale per le variazioni temporali di \bar{A} .

Dunque, detta λ la dimensione lineare di tali volumi elementari, la condizione di equilibrio locale richiede che:

$$\frac{\lambda \nabla \bar{A}}{\bar{A}} \leq \frac{\delta A}{\bar{A}} \ll 1. \quad (0.2.1)$$

Ad esempio, in un sistema gassoso, assumendo di voler definire ogni grandezza con una precisione dello 0.1% (cioè $\delta A/A = 10^{-3}$) e considerando che $\delta A/A \approx 1/\sqrt{N}$, dove N è il numero di particelle contenute nei volumi elementari, il volume elementare conterrà $N \approx 10^6$ particelle, occupando un volume di $\lambda^3 \approx 10^{-15} \text{ cm}^3$, corrispondente ad una dimensione lineare $\lambda \approx 0.1 \mu\text{m}$. Da qui vediamo, ad esempio, che il gradiente massimo di temperatura che possiamo imporre pur soddisfacendo alla condizione di equilibrio locale è $\nabla T < 10^3 T/\lambda$ e dunque per temperature ordinarie otteniamo $\nabla T < 10^4 \text{ K/cm}$, che è chiaramente soddisfatto in tutti i casi ragionevoli. Per sistemi liquidi o solidi la condizione di equilibrio locale è applicabile ancora più facilmente.

A questo punto, dobbiamo ripensare a come cambiano i concetti termodinamici fondamentali di temperatura, pressione e densità di particelle quando vengono applicati a sistemi non omogenei e non stazionari, in particolare a fluidi in movimento. Ci rendiamo subito conto che le ultime due grandezze non richiedono alcuna “revisione” fondamentale: essendo legate all’energia e alla massa del sistema, esse sono infatti delle quantità intrinsecamente scalari e dunque si può definire la temperatura $T(\mathbf{r}, t)$ e la densità $\rho(\mathbf{r}, t)$ del sistema in un punto \mathbf{r} e ad un certo istante t . Al contrario, quando applicato ad un sistema continuo, il concetto di pressione, essendo legato alla quantità di moto (o alle forze agenti nel sistema), va ripensato nell’ambito della meccanica dei continui.

³ C. Rizzo e R. Mauri, *Termodinamica per l’Ingegneria Chimica*, Capitolo 15. Questo mostra come la termodinamica classica (in cui non ci sono fluttuazioni) descriva sistemi composti da un numero infinito di particelle.

0.3 Introduzione alla meccanica dei corpi continui

In un sistema continuo, le particelle che lo compongono a livello microscopico sono soggette, oltre che a forze esterne, come la gravità o il campo elettrico, a forze di interazione intermolecolare. A seconda dell'entità di tali forze, il sistema si definisce solido, liquido o gassoso. Se immaginiamo di dividere il sistema in due parti con una superficie di separazione, ognuna delle due parti eserciterà sull'altra una forza, pari alla somma delle forze intermolecolari che le particelle situate da una parte esercitano su quelle situate dall'altra parte. A livello macroscopico, tale forza per unità di superficie si chiama *sforzo* σ , e si può scomporre nelle sue due componenti normale e tangenziale rispetto alla superficie di separazione (vedi **figura 0.3.1**). La componente normale si chiama *pressione* p , mentre quella tangenziale è lo *sforzo di taglio* τ .

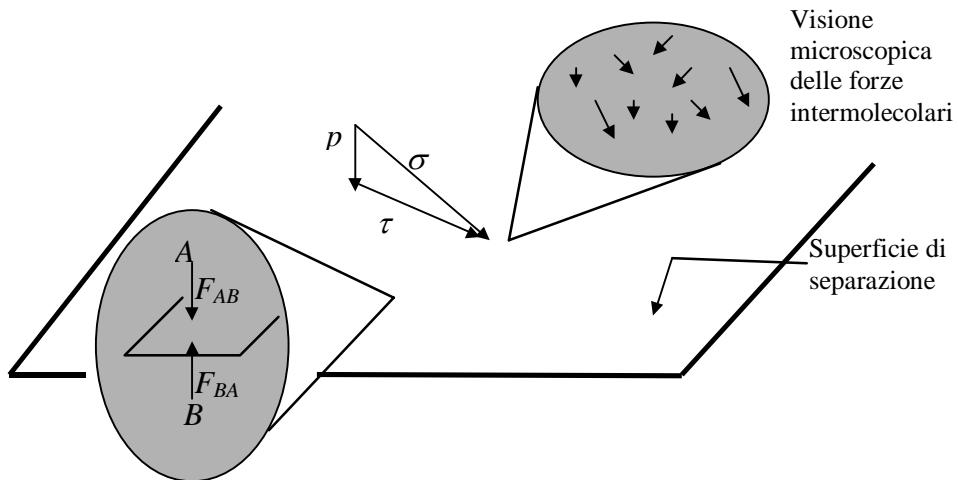


Figura 0.3.1.

Nei corpi solidi, le forze intermolecolari sono così forti che le particelle elementari hanno una propria posizione fissa (si pensi agli atomi in un reticolo cristallino), così che macroscopicamente vediamo che i solidi tendono a mantenere la propria forma. Al contrario, i fluidi si deformano liberamente, e quando si tenta di modificarne la forma si osserva lo scorrimento di strati di fluido l'uno rispetto all'altro, finché si raggiunge una nuova forma. Durante tale scorrimento, nel fluido si sviluppano delle forze d'attrito microscopico, che si traducono macroscopicamente in uno sforzo di taglio. Quando il fluido è in quiete, tuttavia, tali forze dissipative sono ovviamente assenti, e dunque nel fluido si hanno solamente degli sforzi normali di pressione.

Come è ben noto dalla termodinamica, lo stato di una sostanza pura in equilibrio, come un fluido in quiete, è completamente determinato non appena si fissano due variabili indipendenti⁴. Perciò, per una data temperatura T e pressione p , la densità⁵ del fluido ρ è fissata. Se la densità cambia di poco nell'arco delle variazioni di T e p considerate, il fluido si

⁴ Questa è una conseguenza della regola delle fasi di Gibbs.

⁵ La densità è l'inverso del volume specifico, ed è definita come la massa per unità di volume, $[\rho]=ML^{-3}$. Nel sistema MKS essa è misurata in $Kg\ m^{-3}$.

può approssimare come *incomprimibile*, mentre quando tali variazioni sono rilevanti, il fluido è *comprimibile* (basti pensare al gas ideale, in cui ρ è proporzionale a p/T). In genere, i liquidi si considerano incomprimibili e i gas comprimibili, anche se, ovviamente, ci sono casi in cui grosse escursioni termiche provocano cambiamenti di densità rilevanti anche nei liquidi mentre, viceversa, in altri processi i cambiamenti di pressione e temperatura sono così piccoli che anche la densità dei gas si può considerare costante.

0.3.1 La pressione

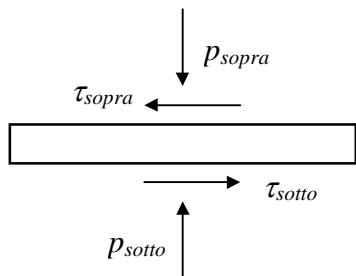


Figura 0.3.2

Come si è visto nel paragrafo precedente, la pressione è il modulo della forza per unità di superficie esercitata dal fluido perpendicolarmente alle pareti del suo contenitore o, in modo più preciso, è il limite del rapporto (modulo della forza normale)/(area) quando l'area tende a zero, con $[p] = ML^{-2}T^2$. L'unità di misura della pressione nel sistema MKS è quindi il *Pascal* (*Pa*), definito come Newton per metro quadro: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$.

Intorno ad un qualsiasi punto del fluido possiamo immaginare di far passare una superficie che separi il fluido in due parti. Ognuna di queste due parti eserciterà

sull'altra una forza uguale e contraria, poiché, se così non fosse, la forza “netta” risultante dall'azione del fluido sulla superficie ne provocherebbe il movimento.⁶ Infatti, un semplice bilancio di forze sulle due facce dell'elemento di volume di spessore infinitesimo di **figura 0.2** dimostra che $p_{\text{sopra}} = p_{\text{sotto}}$, ovvero la pressione del fluido che sta da una parte della superficie di separazione è uguale alla pressione del fluido che sta dall'altra parte, cioè la pressione è indipendente dal verso della superficie. Per gli sforzi di taglio, anche se un bilancio di forze dimostra che $\tau_{\text{sopra}} = \tau_{\text{sotto}}$, tali forze tangenziali provocherebbero a loro volta uno scorrimento relativo degli strati di fluido, così che possiamo concludere che gli sforzi di taglio in un fluido in quiete sono nulli.

A questo punto, la domanda fondamentale che ci poniamo è se la pressione dipende dalla direzione della superficie. In altri termini, ci chiediamo se

$$p_x = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta S_x}; \quad p_y = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta S_y}; \quad p_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta S_z}$$

sono uguali oppure no. In fondo, in termodinamica si dà per scontato⁷ che la pressione sia uno scalare come la temperatura, così che $p_z = p_y = p_x$; tuttavia la cosa non è ovvia.

Per rispondere a questa domanda, consideriamo il tetraedro di **figura 0.3.3**, costruito attorno al sistema di assi cartesiani xyz , e scriviamo, ad esempio, il bilancio delle forze esercitate su di esso dal fluido circostante nella direzione z . Poiché in assenza di movimento il

⁶ A livello microscopico per ogni coppia di molecole A e B a cavallo della superficie di separazione, la forza F_{AB} esercitata da A su B , che contribuisce alla forza normale di pressione della parte superiore su quella inferiore, è uguale e contraria alla forza F_{BA} esercitata da B su A , che invece contribuisce alla forza di pressione inversa (vedi **Figura 0.3.1**).

⁷ La ragione per cui in termodinamica si dà per scontato che p sia uno scalare è che la pressione è la quantità termodinamicamente coniugata al volume V : siccome V è uno scalare, lo è anche p .

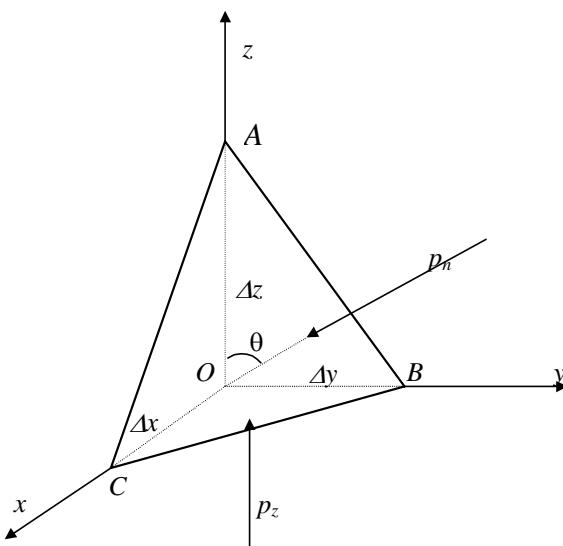
fluido esercita una forza di pressione perpendicolare alla superficie, il bilancio di forze comprenderà la forza $F_z = p_z S_{OBC}$ esercitata sul triangolo OBC di area S_{OBC} , la componente z della forza $F_n = p_n S_{ABC}$ esercitata sulla superficie ABC e la forza di gravità, cioè

$$p_z S_{OBC} - p_n S_{OBC} \cos\theta - \rho g V_{OABC} = 0,$$

dove ρ è la densità del fluido, g è l'accelerazione di gravità, V_{OABC} è il volume del tetraedro, θ è l'angolo mostrato in figura, mentre p_z e p_n sono le pressioni medie esercitate dal fluido sulle facce del tetraedro. Ora, considerando che:

$$S_{OBC} = \Delta x \Delta y / 2; \quad S_{OBC} = \Delta x \Delta y / (2 \cos \theta); \quad V_{OABC} = \Delta x \Delta y \Delta z / 6,$$

dividendo per $\Delta x \Delta y / 2$ otteniamo:



$$p_z = p_n + \rho g \Delta z / 3.$$

A questo punto, mantenendo fisso l'angolo θ , facciamo tendere il piano ABC verso l'origine: ovviamente Δz tenderà a zero, annullando il termine gravitazionale, e inoltre, le pressioni medie saranno sostituite dalle pressioni puntuali nell'origine, indicando che $p_z = p_n$.

Simili bilanci di forze possono essere scritti anche per le direzioni x e y , così che alla fine troviamo,

Figura 0.3.3. Forze su un elemento di fluido in quiete.

$$p_z = p_y = p_x = p \quad (0.3.1)$$

Poiché sia l'angolo θ che l'origine O sono scelti a caso, possiamo così concludere che la pressione in ogni punto è indipendente dalla direzione.

0.3.2 Gli sforzi di taglio

Nei paragrafi precedenti abbiamo più volte affermato che lo sforzo di taglio è legato all'attrito interno del fluido. Il modo più semplice per vederlo è notare che, dati due strati di fluido adiacenti che si muovono con velocità diverse a causa dell'attrazione reciproca, le molecole più lente tenderanno a ritardare, accelerando, quelle che si muovono più rapidamente, cercando in definitiva di annullare le differenze di velocità. Nel caso di un gas, lo stesso risultato viene ottenuto per effetto della diffusione molecolare: molecole veloci diffondono nelle regioni popolate da particelle più lente e, attraverso le conseguenti collisioni, trasmettono alle molecole più lente una certa quantità di moto. Ovviamente, se non applicassimo nessuna forza dall'esterno, la differenza di velocità tra i due strati non si potrebbe mantenere e il fluido finirebbe per muoversi con velocità uniforme. A livello

macroscopico, queste interazioni molecolari si possono vedere (vedi **figura 0.3.4**) come un flusso netto di quantità di moto J_Q nella direzione normale al moto del fluido⁸.

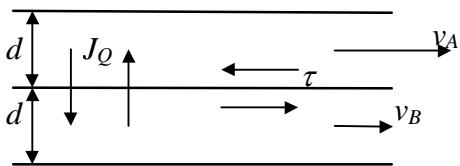


Figura 0.3.4

elemento di fluido agiscono le forze indicate in **figura 0.3.5**. In questa figura, abbiamo già tenuto conto del fatto che: 1) come visto precedentemente, in un bilancio fatto a livello microscopico, le forze volumetriche, come la gravità, sono trascurabili rispetto a quelle superficiali, e perciò sono state omesse; 2) il valore della pressione è indipendente dalla direzione della superficie su cui agisce; 3) i due sforzi di taglio che agiscono sulle superfici orizzontali devono essere uguali, come mostra un semplice bilancio di forze; lo stesso vale per i due flussi J_Q che agiscono sulle superfici verticali. A questo punto, imponendo che il momento delle forze indicate in **figura 0.3.5** sia uguale a zero, otteniamo:

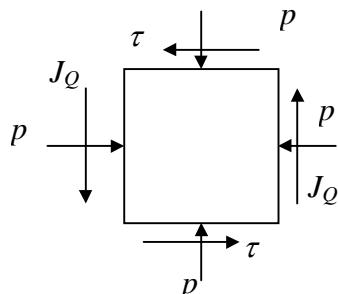


Figura 0.3.5

Questo meccanismo, per cui due filetti di fluido adiacenti tendono a portarsi alla stessa velocità, si può descrivere attraverso gli sforzi di taglio τ , che sono delle forze "di attrito" nella stessa direzione di moto del fluido. Ora, considerando che lo sforzo di taglio ha le stesse dimensioni del flusso di quantità di moto (cioè, come vedremo nel paragrafo successivo, la quantità di moto che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo), vediamo che alla superficie di un elemento di fluido agiscono le forze indicate in **figura 0.3.5**. In questa figura, abbiamo già tenuto conto del fatto che: 1) come visto precedentemente, in un bilancio fatto a livello microscopico, le forze volumetriche, come la gravità, sono trascurabili rispetto a quelle superficiali, e perciò sono state omesse; 2) il valore della pressione è indipendente dalla direzione della superficie su cui agisce; 3) i due sforzi di taglio che agiscono sulle superfici orizzontali devono essere uguali, come mostra un semplice bilancio di forze; lo stesso vale per i due flussi J_Q che agiscono sulle superfici verticali. A questo punto, imponendo che il momento delle forze indicate in **figura 0.3.5** sia uguale a zero, otteniamo:

$$\tau = -J_Q. \quad (0.3.2)$$

Questa relazione è molto importante, poiché mostra che lo sforzo di taglio è *uguale* (a parte il segno) al flusso di quantità di moto *nella direzione ad esso normale*.

0.4 Convezione e diffusione

Grandezze fisiche quali massa, quantità di moto ed energia, si possono trasferire in due modi fondamentalmente diversi tra loro. La prima modalità, detta convezione, è legata al movimento macroscopico d'insieme del mezzo⁹ in cui queste grandezze sono definite. Così, ad esempio, il trasporto convettivo di energia (calore) consiste nel moto di un fluido più caldo verso una regione più fredda: le molecole del fluido traslano trasportando con sé un'energia termica legata alla temperatura. Lo stesso si può dire del trasporto convettivo di massa e di quantità di moto: in questi casi l'insieme delle molecole di fluido trasportano con sé una massa o una quantità di moto.

La seconda modalità di trasporto è la diffusione, in cui massa, quantità di moto ed energia passano da un punto ad un altro senza alcuno spostamento d'insieme di materia. Nel

⁸ Quantitativamente, dato che per ogni particella di massa m che passa dalla regione con velocità v_B alla regione con velocità v_A c'è un trasporto di quantità di moto in direzione ortogonale al moto del fluido data da $m(v_A - v_B)$, il flusso della quantità di moto nella stessa direzione è uguale al prodotto di $m(v_A - v_B)$ per il numero di collisioni per unità di tempo e di area interfacciale.

⁹ La convezione esiste solo quando il mezzo è un fluido. In un solido, il moto d'insieme può essere soltanto una traslazione o una rotazione rigide, che ovviamente non hanno alcun effetto sul trasporto interno delle grandezze fisiche.

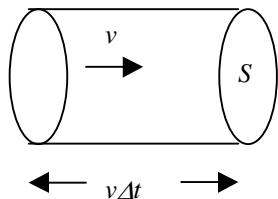
caso di trasporto di energia, questo meccanismo si chiama conduzione ed indica il processo in cui il calore passa dalle regioni più calde a quelle più fredde di un corpo senza che le particelle che costituiscono il corpo abbiano moti d'insieme (si pensi ad un cucchiaio di metallo che, immerso in un liquido bollente, si scalda).

Nel seguito, descriveremo i fenomeni di trasporto in base al flusso di massa, quantità di moto ed energia, definiti come la quantità di massa, di quantità di moto e di energia che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo, rispettivamente.

0.4.1 I flussi convettivi

In base a quanto visto sopra, durante la convezione, il fluido si muove con velocità d'insieme v . Dunque, all'interno di un fluido in moto uniforme con velocità v , si consideri un cilindro di sezione S e lunghezza $v\Delta t$ (vedi **figura 0.4.1**); durante l'intervallo di tempo Δt , il fluido che riempie il cilindro attraverserà la sezione S , e tale fluido ha massa uguale a $M_c = \rho S v \Delta t$. Il flusso massico convettivo J_{cM} è definito come la massa M_c divisa per S e per Δt , cioè:

$$J_{cM} = \frac{M_c}{S\Delta t} = \rho v . \quad (0.4.1)$$



Nello stesso modo il flusso convettivo di quantità di moto, J_{cQ} , è uguale al rapporto tra la quantità di moto Q_c contenuta nel cilindro, pari alla quantità di moto per unità di volume, ρv , moltiplicata per il volume $Sv\Delta t$, divisa per S e per Δt , cioè:

$$J_{cQ} = \frac{Q_c}{S\Delta t} = \rho v^2 . \quad (0.4.2)$$

Figura 0.4.1

Infine, il flusso convettivo di energia termica, J_{cU} , è uguale al rapporto tra l'energia termica E_c contenuta nel cilindro, pari all'energia per unità di volume, $(\rho / M_w) \tilde{c}_v (T - T_0)$, moltiplicata per il volume $Sv\Delta t$, divisa per S e per Δt , cioè:

$$J_{cU} = \frac{E_c}{S\Delta t} = \rho c_v v (T - T_0) . \quad (0.4.3)$$

Qui c_v è il calore specifico massico, $c_v = \tilde{c}_v / M_w$, uguale al calore specifico molare, \tilde{c}_v , diviso per il peso molecolare M_w , mentre $T - T_0$ è la differenza di temperatura tra la temperatura di lavoro e una temperatura di riferimento arbitraria T_0 per l'energia interna del fluido.

0.4.2 I flussi diffusivi e le relazioni costitutive

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato l'interazione tra filetti fluidi adiacenti e abbiamo visto che: 1) il flusso di quantità di moto in direzione trasversale al moto, cioè di natura diffusiva (infatti non esiste movimento in quella direzione) è uguale allo sforzo di taglio (*shear stress* in inglese) nella direzione longitudinale; 2) sforzo di taglio e gradiente di velocità (detto anche *velocità di deformazione*, oppure *shear rate*, in inglese) sono legati l'uno all'altro. In effetti, la relazione tra sforzo di taglio e gradiente di velocità, detta *relazione costitutiva* dello sforzo di taglio, è una delle proprietà dinamiche fondamentali di un fluido.

In genere, lo sforzo di taglio è tanto maggiore quanto maggiore è il gradiente di velocità, cioè la curva $\tau = \tau(dv/dz)$ è monotona crescente. Lo studio del legame che intercorre tra sforzo di taglio e gradiente di velocità è parte della scienza della *reologia*.

Il comportamento reologico più semplice è quello dei fluidi, cosiddetti, newtoniani, in cui lo sforzo di taglio è proporzionale al gradiente di velocità. Tutti i gas, la maggior parte dei liquidi puri e le soluzioni a basso peso molecolare (ad esempio gli oli e le soluzioni diluite di polimeri) si comportano come fluidi newtoniani e dunque seguono la relazione costitutiva di Newton:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dz}. \quad (0.4.4)$$

dove μ è la viscosità del fluido, che quindi esprime l'attrito interno, o la resistenza interna, del fluido allo scorrimento. Dimensionalmente, la viscosità ha dimensioni $[\mu] = MLT^{-1}$ e nel sistema MKS si esprime in $N\ s\ m^{-2}$, cioè $Kg\ s^{-1}m^{-1}$, comunemente chiamato *Poiseuille*. In unità CGS, invece, che sono le più usate per la viscosità, si usa il *Poise* (P), che è definito come $1\ P = 1\ g\ s^{-1}\ cm^{-1}$ o, più convenientemente, in *centipoise* ($1\ cP = 0.01\ P$). La viscosità dell'acqua a temperatura ambiente è di circa $1\ cP$. Riassumendo: $1\ Poiseuille = 10\ P = 1000\ cP$.

L'equazione costitutiva dello sforzo di taglio si può riscrivere come:

$$J_Q = -\nu \frac{d(\rho v)}{dz}, \quad (0.4.5)$$

che stabilisce che il flusso diffusivo di quantità di moto, J_Q , è proporzionale al gradiente della densità di quantità di moto $q = \rho v$, attraverso un coefficiente di proporzionalità $\nu = \mu/\rho$. La grandezza ν è chiamata viscosità cinematica, ha dimensioni L^2T^{-1} e si esprime in m^2/s nel sistema MKS.

La relazione costitutiva vista è simile alla legge di Fourier per il trasporto diffusivo di calore (detto comunemente *conduzione*),

$$J_U = -k \frac{dT}{dz}, \quad (0.4.6)$$

dove J_U è il flusso di calore, cioè di energia interna, e k è la conducibilità termica (indicata come λ nei testi di lingua tedesca). Indicando con c_v il calore specifico massico, considerando che $u = c_v(T - T_0)$ è l'energia interna specifica (per unità di massa) e ρu è la densità di energia

(cioè l'energia interna per unità di volume), la legge di Fourier stabilisce che il flusso di energia interna è proporzionale al gradiente della densità di energia attraverso il coefficiente di diffusività termica $\alpha=k/\rho c_v$, cioè

$$J_U = -\alpha \frac{d(\rho u)}{dz}. \quad (0.4.7)$$

La diffusività termica α ha le stesse dimensioni $L^2 T^1$ della viscosità cinematica ν e quindi nel sistema MKS si misura in m^2/s .

Nello stesso modo, queste equazioni costitutive sono simili alla legge di Fick, che descrive il trasporto diffusivo massico di una specie "A", presente in una miscela con concentrazione ω_A , uguale alla massa di A diviso la massa totale,

$$J_{M_A} = -D \frac{d(\rho \omega_A)}{dz}. \quad (0.4.8)$$

in cui il flusso massico di A è proporzionale al gradiente della concentrazione di A (cioè della sua densità massica) attraverso il coefficiente di diffusione di massa D , che ha dimensioni $L^2 T^1$ e quindi è anch'esso espresso in m^2/s nel sistema MKS. Dunque, la viscosità cinematica ν , la diffusività termica α e il coefficiente di diffusione di massa D hanno le stesse dimensioni (cioè $L^2 T^1$). Per motivi di convenienza, talvolta si preferisce usare il sistema CGS, definendo lo *Stokes* ($1 S = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$), e il *centistokes* ($1 \text{ cS} = 0.01 \text{ S}$), dove $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ S} = 10^6 \text{ cS}$.

Fisicamente, ν è una misura della "velocità" di diffusione della quantità di moto, cioè di quanto velocemente la quantità di moto si diffonde, in assenza di convezione, grazie alle interazioni molecolari. Nello stesso modo, α e D indicano la "velocità" con cui il calore o la massa si diffondono, in assenza di moti d'insieme di tipo convettivo.

0.5 Viscosità

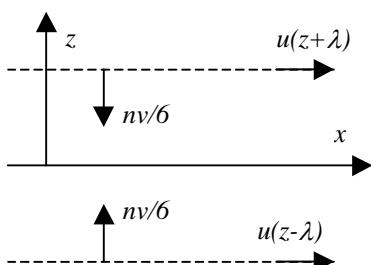


Figura 0.5.1

Si consideri un gas di densità uniforme e temperatura T che macroscopicamente si muova lungo la direzione x con una velocità media $u=u(z)$ che dipende della coordinata trasversale z . Poiché le molecole del gas sono soggette a fluttuazioni termiche, al moto con velocità macroscopica (cioè media) u si sovrappone un moto caotico, caratterizzato da una velocità media v , con $v \approx \sqrt{3kT/m} \ll u$, dove m è la massa di una molecola. Delle n molecole per unità di volume di cui il gas è composto, circa un terzo avranno velocità dirette lungo l'asse z e di queste metà, o $n/6$ molecole, avranno una velocità media v nella direzione $+z$ e metà lungo $-z$.

Dunque, in media, ci saranno $nv/6$ molecole che nell'unità di tempo attraversano un'area unitaria del piano $z=\text{costante}$ dal basso verso l'alto (ovvero $nv/6$ è il flusso molecolare medio verso l'alto), e altrettante che lo attraversano dall'alto verso il basso. Ora, in media, queste

molecole hanno avuto l'ultima collisione con un'altra molecola ad una distanza dal piano pari al cammino libero medio λ . Dunque, poiché la velocità longitudinale media u è una funzione di z , le molecole che si muovono verso il basso trasportano una quantità di moto nella direzione x uguale a $mu(z+\lambda)$, mentre quelle che si muovono verso l'alto ne trasportano una pari a $mu(z-\lambda)$. Se ne deduce che il trasporto netto della componente x della quantità di moto nella direzione $+z$, cioè il flusso di quantità di moto (che come abbiamo visto è uguale allo sforzo di taglio), è dato da:

$$J_Q = \tau = \left(\frac{1}{6} nv \right) [mu(z - \lambda)] - \left(\frac{1}{6} nv \right) [mu(z + \lambda)]. \quad (0.5.1)$$

Espandendo $u(z)$ in serie di Taylor e trascurando termini di ordine superiore al primo otteniamo:

$$u(z + \lambda) = u(\lambda) + \lambda \frac{du}{dz} + \dots; \quad \text{e} \quad u(z - \lambda) = u(\lambda) - \lambda \frac{du}{dz} + \dots$$

e quindi

$$\tau = \mu \frac{dv}{dz}. \quad (0.5.2)$$

dove μ è la viscosità, data da

$$\mu = \frac{1}{3} nm \lambda v = \frac{1}{3} \rho \lambda v. \quad (0.5.3)$$

Questo risultato, ottenuto da Maxwell nel 1860, ci permette di fare alcune previsioni interessanti. Infatti, il cammino libero medio si può facilmente valutare considerando che il numero di molecole, in moto con velocità V , che urtano nel tempo Δt una data molecola "bersaglio" supposta ferma è uguale al numero di molecole contenute nel volume di un cilindro con base¹⁰ $\sigma_0 = \pi d^2$, dove d è il diametro di una molecola, e altezza $V\Delta t$ (banalmente, durante il tempo Δt tutte le molecole contenute nel cilindro saranno andate a sbattere contro la molecola "bersaglio"). Ciò significa che il numero di urti per unità di tempo è $\pi n V d^2$ e l'intervallo di tempo medio τ che intercorre tra un urto e quello successivo è uguale a

$$\tau = \frac{1}{\pi n V d^2}.$$

Dunque vediamo che il libero cammino medio è dato da

$$\lambda = V\tau = \frac{1}{\pi n d^2} \left(= \frac{1}{n \sigma_0} \right).$$

¹⁰ Questa è la cosiddetta *sezione d'urto*, che qui consideriamo costante.

Infine, considerando che $v \approx \sqrt{3kT/m}$, concludiamo che la viscosità di un gas è uguale a¹¹

$$\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \frac{\sqrt{mkT}}{d^2} \left(= \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{mkT}{3}} \right). \quad (0.5.4)$$

La cosa più interessante di questo risultato è che μ non dipende da n , e quindi dalla pressione del gas. Infatti, all'aumentare della pressione e quindi della densità del gas, aumentano gli urti intermolecolari, cioè ci sono più molecole che trasportano trasversalmente la quantità di moto, ma diminuisce anche, proporzionalmente, l'efficacia di questo trasporto perché diminuisce il cammino libero medio. A causa delle ipotesi fatte, questa analisi è valida solo per fluidi a bassa densità, cioè quando $d \ll \lambda$. Al diminuire di λ , essa perde progressivamente di validità. In particolare, nel caso di liquidi, in cui $d \approx \lambda$, l'analisi perde completamente di validità e va radicalmente cambiata.

L'altra conclusione che possiamo trarre dal risultato visto è che $\mu \propto \sqrt{T}$, cioè la viscosità cresce al crescere della temperatura. In realtà, se si considera che gli urti tra le molecole sono parzialmente inelastici, si trova che la sezione d'urto tende a decrescere con la temperatura, quindi si trova che, in definitiva, $\mu \propto T^{0.7}$. Questo comportamento è ben diverso da quello di un liquido, in cui invece la viscosità decresce al crescere della temperatura. Infatti, in un liquido, dato che il cammino libero medio è molto piccolo, le molecole si urtano direttamente e dunque al crescere della temperatura il trasporto di quantità di moto è più agevole e diminuisce, di conseguenza, la viscosità.

0.6 Conducibilità termica

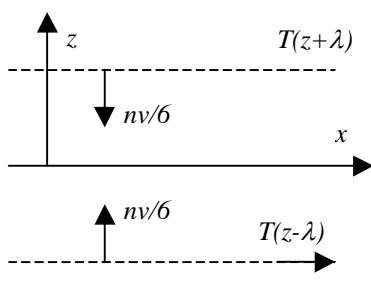


Figura 0.6.1

Il problema è molto simile al precedente, con la differenza che qui studiamo il trasporto di energia interna. Ogni molecola trasporta una energia interna $\varepsilon = c(T - T_0)$, dove c è il calore specifico a volume costante per molecola (cioè uguale al calore specifico molare diviso per il numero di Avogadro N_A) e T_0 è la temperatura di riferimento per l'energia interna. Il risultato si può dunque ottenere da quello visto sopra, sostituendo mu con $\varepsilon = c(T - T_0)$,

$$J_U = \left(\frac{1}{6} nv \right) [\varepsilon(z - \lambda)] - \left(\frac{1}{6} nv \right) [\varepsilon(z + \lambda)]. \quad (0.6.1)$$

Espandendo $\varepsilon(z) = c[T(z) - T_0]$ in serie di Taylor e trascurando termini di ordine superiore al primo otteniamo:

¹¹ Un'analisi più precisa rivela che $\lambda = (\sqrt{2}n\sigma_0)^{-1}$ e $v = [(8kT)/(\pi n)]^{1/2}$.

$$T(z+\lambda) = T(\lambda) + \lambda \frac{dT}{dz} + \dots \quad T(z-\lambda) = T(\lambda) - \lambda \frac{dT}{dz} + \dots$$

e quindi concludiamo che

$$J_u = -\kappa \frac{dT}{dz}, \quad (0.6.2)$$

dove κ è la conducibilità termica, data da

$$\kappa = \frac{1}{3} cn \lambda v. \quad (0.6.3)$$

Infine, sostituendo i valori della velocità media di fluttuazione v e del cammino libero medio λ otteniamo:

$$\kappa = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \frac{c}{d^2} \sqrt{\frac{kT}{m}} \left(= \frac{c}{\sigma_0} \sqrt{\frac{kT}{3m}} \right). \quad (0.6.4)$$

Dunque anche la conducibilità termica, come la viscosità, non dipende dalla pressione; la sua dipendenza dalla temperatura, invece, è legata a come il calore specifico varia con T . Confrontando l'espressione di μ con quella di κ vediamo che il loro rapporto è dato da:

$$\frac{\kappa}{\mu} = \frac{c}{m} = \frac{\tilde{c}_v}{M_w} = c_v \Rightarrow \frac{\alpha}{v} = 1, \quad (0.6.5)$$

dove $\tilde{c}_v = N_A c$ è il calore specifico molare a volume costante, mentre $M_w = N_A m$ è la massa di una mole (comunemente, anche se impropriamente, detto peso molecolare). Esiste dunque una relazione molto semplice tra questi due coefficienti di trasporto. In realtà, si vede sperimentalmente che il rapporto (α/v) varia tra 1.3 e 2.5. Considerando le approssimazioni piuttosto forti fatte in questa analisi, tale discrepanza si può considerare come straordinariamente piccola.

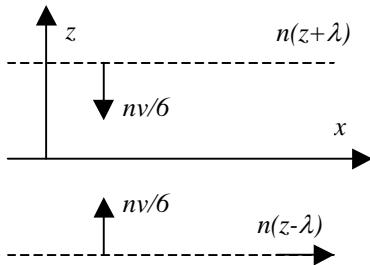
0.7 Diffusività molecolare

Il problema è molto simile a quelli precedenti, con la differenza che in questo caso studiamo il trasporto di massa. Nella specie, si ritiene che ogni molecola di una specie chimica fissata " i " (e della quale si omette, nel seguito, il pedice) trasporti una massa m da regioni con concentrazione $c(z+\lambda)$ a regioni con concentrazione $c(z-\lambda)$, dove $c = mn$. Il risultato si può dunque ottenere da quello visto sopra, ottenendo:

$$J_M = \left(\frac{1}{6} mv \right) [n(z-\lambda)] - \left(\frac{1}{6} mv \right) [n(z+\lambda)]. \quad (0.7.1)$$

Espandendo $n(z)$ in serie di Taylor e trascurando termini di ordine superiore al primo otteniamo:

$$n(z + \lambda) = n(\lambda) + \lambda \frac{dn}{dz} + \dots; \quad n(z - \lambda) = n(\lambda) - \lambda \frac{dn}{dz} + \dots,$$



e quindi concludiamo che

$$J_M = -D \frac{dc}{dz}, \quad (0.7.2)$$

dove D è il coefficiente di diffusione (o diffusività molecolare), dato da

Figura 0.7.1

$$D = \frac{1}{3} \lambda v. \quad (0.7.3)$$

Infine, sostituendo i valori della velocità media di fluttuazione v e del cammino libero medio λ otteniamo:

$$D = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \frac{1}{nd^2} \sqrt{\frac{kT}{m}} \left(= \frac{1}{n\sigma_0} \sqrt{\frac{kT}{3m}} \right). \quad (0.7.4)$$

Dunque concludiamo che $D \propto 1/P$ e che $D \propto \sqrt{T}$. Confrontando l'espressione di D con quella di α (o quello di v) vediamo che il loro rapporto è dato da:

$$\frac{D}{v} = \frac{\rho}{nm} = 1. \quad (0.7.5)$$

Sperimentalmente, si trova che questo rapporto è uguale a 1.3-1.5: date le approssimazioni fatte, un tale risultato è sorprendente. Si noti infine che nei liquidi (e solidi) tali risultati sono molto diversi. Infatti mentre nei gas D , α e v sono approssimativamente uguali tra loro e dell'ordine di $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$, nei liquidi D è dell'ordine di $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, mentre α e v sono ancora dell'ordine di $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ in molti casi.

0.8 Diffusione molecolare come esempio di “random walk”

La diffusione molecolare si può considerare anche come un random walk¹² eseguito da una molecola di gas, supponendo che le sue collisioni con le altre molecole siano

¹² Benché in alcuni libri italiani “random walk” venga tradotto come “passeggiata casuale”, qui preferiamo mantenere la dizione inglese.

statisticamente indipendenti. Il vettore spostamento \mathbf{R} coperto dalla molecola dopo N urti è uguale alla somma degli N spostamenti elementari \mathbf{r}_i ,

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i, \quad (0.8.1)$$

dove ogni spostamento elementare ha direzione casuale, cioè $\langle \mathbf{r}_i \rangle = \mathbf{0}$, così che $\langle \mathbf{R} \rangle = \mathbf{0}$. Questo risultato è in accordo con quanto detto, cioè che il processo diffusivo non comporta alcun spostamento netto di materia. Ora, supponendo che ogni spostamento elementare abbia la stessa lunghezza $|\mathbf{r}_i| = \ell$, otteniamo:

$$\langle R^2 \rangle = \langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle r_i^2 \rangle + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle = N\ell^2, \quad (0.8.2)$$

(si consideri il caso $N=2$ per convincersene: il prodotto $\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle$ è uguale a $\ell^2 \langle \cos \theta \rangle$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Essendo tale angolo casuale, il prodotto in esame risulta nullo).

A questo punto, si può dimostrare¹³ che ℓ è legato al cammino libero medio λ utilizzato nei paragrafi precedenti attraverso la relazione seguente:

$$\ell^2 = 2\lambda^2 = 2v^2\tau^2, \quad (0.8.3)$$

dove τ è il tempo che in media intercorre tra due urti successivi e v la velocità media. Infine, considerando che

$$N = (\Delta t)/\tau,$$

otteniamo:

$$\langle R^2 \rangle = 6D(\Delta t), \quad (0.8.4)$$

dove abbiamo definito lo stesso coefficiente di diffusione del paragrafo precedente,

$$D = \frac{1}{3}\lambda v. \quad (0.8.5)$$

Si noti che decomponendo il moto della molecola nelle tre direzioni x , y e z e definendo $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, si ottiene:

$$\langle X^2 \rangle = \langle Y^2 \rangle = \langle Z^2 \rangle = 2D(\Delta t). \quad (0.8.6)$$

¹³ F. Reif, "Statistical Thermal Physics", McGraw Hill, pag. 486.

Così abbiamo definito la diffusione in due modi diversi: come risposta del sistema ad un gradiente di concentrazione, o come random walk di una molecola in un sistema omogeneo. La diffusività ne è risultata definita come rapporto tra flusso e gradiente di concentrazione oppure come velocità di crescita dello spostamento quadratico medio della molecola. Il fatto che queste due definizioni conducano allo stesso risultato non è affatto intuitivo e costituisce l'esempio più semplice del teorema della fluttuazione dissipativa dimostrato da H.B. Callen e T.A. Welton nel 1951.

0.9 Esempi di diffusione

Supponiamo di avere un solido a temperatura uniforme, e immaginiamo che all'istante $t=0$ la temperatura delle pareti cambi bruscamente. A questo punto, la temperatura nei punti interni del corpo comincerà a cambiare, con tanto maggior ritardo rispetto a $t=0$ quanto più il punto considerato dista dalle pareti. Infatti, ad una distanza l dalla parete, l'informazione che la temperatura della parete è cambiata, e quindi il cambiamento stesso di temperatura, arriverà solo dopo un tempo dell'ordine di $t=l^2/\alpha$, dove α è la diffusività termica del corpo. Così, se il corpo in esame ha una dimensione lineare pari ad L , ci vorrà un tempo dell'ordine di L^2/α perché il corpo raggiunga grosso¹⁴ modo il nuovo stato di equilibrio, con temperatura ovunque uguale alla temperatura imposta alle pareti (vedi **figura 0.9.1**).

Nello stesso modo, se in un bicchiere contenente, ad esempio, acqua in quiete introduciamo una goccia piccolissima di inchiostro di cui studiamo la diffusione nell'acqua, vediamo che dopo un intervallo di tempo t le dimensioni della goccia saranno dell'ordine di

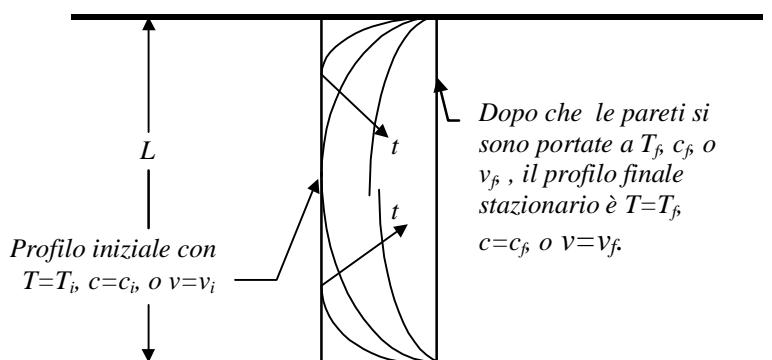


Figura 0.9.1. Profilo di temperatura T , concentrazione c e velocità v in funzione del tempo in un sistema (solido o fluido) compreso tra due lamine a distanza L , quando i valori di T , c e v cambiano bruscamente alle pareti. Il tempo caratteristico necessario per passare dallo stato iniziale a quello finale è pari al rapporto tra L^2 e la diffusività di energia (cioè α), di massa (cioè D), o di quantità di moto (cioè ν).

$l=\sqrt{Dt}$; quindi, supponendo che il bicchiere abbia una dimensione lineare L , dopo un tempo dell'ordine di L^2/D si sarà raggiunto grosso modo lo stato stazionario, con concentrazione di inchiostro uniforme, cioè l'acqua nel bicchiere sarà uniformemente colorata.

Ora, dopo aver visto che le caratteristiche della diffusione di energia sono pressoché identiche a quelle della diffusione di massa, possiamo passare

¹⁴ Poiché lo stato di equilibrio viene raggiunto in modo asintotico, qui ci riferiamo al tempo necessario perché lo stato di equilibrio venga raggiunto al 99%.

allo studio della diffusione di quantità di moto, mostrando che anche questo processo ubbidisce alle stesse regole degli altri due, cioè si comporta come qualsiasi altro processo di diffusione. Supponiamo di avere un fluido compreso tra due lamine, inizialmente in quiete (vedi **figura 0.9.1**). All'istante $t=0$ supponiamo che le due lamine vengano messa in movimento.¹⁵ A questo punto, la velocità, e quindi la quantità di moto, all'interno del sistema comincerà a cambiare, ma non subito. Infatti, ad una distanza l dalla parete, l'informazione che la velocità delle pareti è cambiata arriverà solo dopo un tempo $t=l^2/\nu$, dove ν è la viscosità cinematica. Così, se la distanza tra le due lamine è pari ad L , ci vorrà un tempo dell'ordine di L^2/ν , perché il sistema raggiunga grossso modo il nuovo stato stazionario, con profilo di velocità uniforme.

Si noti che anche se le dimensioni di α , D e ν sono le stesse, i loro valori numerici sono molto diversi. Per esempio, valori tipici per l'acqua sono: $\alpha \approx 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$, $D \approx 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ e $\nu \approx 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$. Perciò, i tempi della diffusione di massa sono molto più lenti di quelli della diffusione termica e di quelli della diffusione di quantità di moto.

0.10 Esercizi

0.1 In occasione della festa del Ringraziamento (Thanksgiving), negli Stati Uniti è tradizione mangiare il tacchino arrosto. I tacchini (morti) che si trovano al supermercato sono contenuti in una confezione in cui sono indicati i seguenti tempi di cottura:

Massa del tacchino [Kg]	tempo di cottura per Kg di tacchino [min/Kg]
2.5 - 4.5	45 - 55
4.5 - 7.5	40 - 45
8.0 - 11.5	35 - 40

In base a quanto visto nel paragrafo 2.3, ci attendiamo che i tempi di cottura dovrebbero essere proporzionali al quadrato della dimensione lineare tipica del tacchino, così che

$$(\text{tempo di cottura}) \times (\text{massa del tacchino})^{-2/3} = C = \text{costante.}$$

- Confrontare numericamente questa equazione con la tabella. Si faccia l'ipotesi di tacchini sferici con densità costante.
- Determinare la diffusività termica media del tacchino e confrontarla con quella dell'acqua.

¹⁵ Questo esempio è stato pensato per ricalcare esattamente i due precedenti. Sarebbe più fisicamente rilevante considerare che soltanto una delle due lamine fosse posta in movimento, tenendo ferma l'altra, così che lo stato stazionario consisterebbe in un profilo di velocità lineare. Ciò sarebbe analogo al caso in cui la temperatura, o la concentrazione, ad una delle due pareti cambiasse bruscamente, mentre il loro valore sull'altra faccia rimanesse costante, dando origine, all'equilibrio, a profili di temperatura o di concentrazione lineari. In tutti questi casi, si passerebbe dallo stato iniziale, con temperatura, concentrazione o velocità iniziali uniformi, allo stato stazionario finale, con profili lineari, in tempi caratteristici che sono dell'ordine di L^2/α , L^2/D e L^2/ν , rispettivamente.

1. Statica dei fluidi

1.1 Equilibrio idrostatico

Dall'esperienza, sappiamo che in un fluido in quiete la pressione è costante lungo ogni sezione orizzontale, ma varia con la quota.¹ In questo paragrafo intendiamo studiare tale variazione.

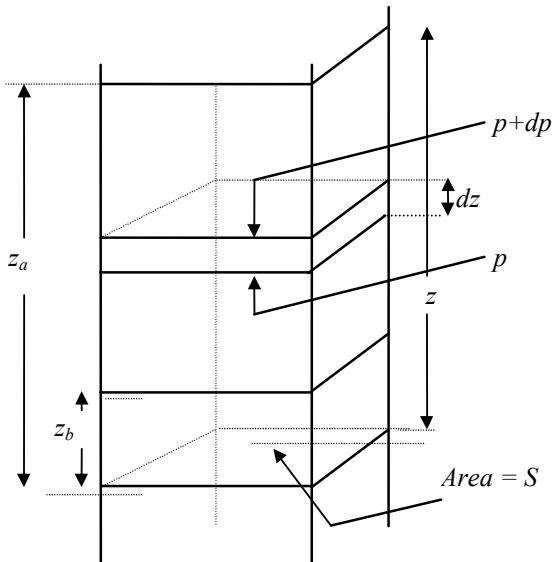


Figura 1.1.1 - Equilibrio idrostatico

Si consideri la colonna di fluido verticale di **figura 1.1.1**. Un semplice bilancio delle forze verticali agenti sul volume elementare Sdz dà il seguente risultato:

$$pS - (p+dp)S - \rho g S dz = 0,$$

dove ρ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità, e in cui il verso positivo è quello rivolto verso l'alto. Con qualche passaggio otteniamo:

$$dp = -\rho g dz \quad (1.1.1)$$

Si noti che questa relazione, come tutti i risultati successivi, è indipendente dalla sezione S . Per poter integrare rispetto a z l'equazione (1.1.1) dobbiamo conoscere la legge di variazione di ρ con p . Consideriamo i due casi più importanti, cioè quello di fluido incompressibile, con densità costante, e quello di fluido compressibile che si comporti come un gas ideale.

1.1.1 Caso di fluido incompressibile

Quando la densità si può considerare costante, l'equazione (1.1.1) è facilmente integrabile tra $z=z_a$ e $z=z_b$, dando il risultato seguente:

$$p_b - p_a = \rho g(z_a - z_b). \quad (1.1.2)$$

Si noti che $\rho g(z_a - z_b)$ è il peso della colonna di liquido di sezione unitaria, $S=1$, compresa fra le sezioni $z=z_b$ e $z=z_a$, ed ha le dimensioni di una pressione. Infatti:

$$[\rho g \Delta z] = ML^{-3} \times LT^{-2} \times L = ML^{-1}T^{-2} = \left[\frac{\text{forza}}{\text{superficie}} \right] = [\text{pressione}].$$

che nel sistema MKS si misura in Pascal, dove $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$.

¹ Questa conclusione si può raggiungere anche con semplici considerazioni di simmetria.

In questo caso, viene quindi naturale misurare la pressione, a meno del termine ρg , in funzione dell'altezza di una colonna di un dato fluido. I fluidi più usati sono l'acqua e il mercurio. Considerando che la densità del mercurio è di 13600 Kg m^{-3} , la pressione di 1 atmosfera, pari a $1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, corrisponde a quella esercitata da una colonna di mercurio alta 760 mm , e si indica con 760 mm Hg (1 mm Hg si dice anche *Torr*, cioè Torricelli).

1.1.2 Caso di gas ideale

In un gas ideale la densità ρ è legata alla pressione p attraverso la ben nota equazione,

$$\rho = \frac{M_W p}{RT}, \quad (1.1.3)$$

dove M_W è il peso molecolare, cioè la massa, in kilogrammi, di mille moli di fluido, espresso in Kilogrammi per kilomoli, $[M_W] = \text{Kg/Kmol}$, R è la costante dei gas, uguale a 8314.47 J/Kmol K , e T è la temperatura assoluta.

Sostituendo l'equazione (1.1.3) nella (1.1.1), otteniamo:

$$dp/p + (gM_W/RT) dz = 0.$$

Questa equazione si può facilmente integrare tra le sezioni $z=z_a$ e $z=z_b$, assumendo che la temperatura T resti costante, ottenendo:

$$\ln(p_b/p_a) = - (gM/RT) (z_b - z_a), \quad \text{da cui: } \frac{p_b}{p_a} = \exp\left\{\frac{gM_W}{RT}(z_a - z_b)\right\}, \quad (1.1.4)$$

detta "equazione barometrica" isotermica.

1.2 Manometri

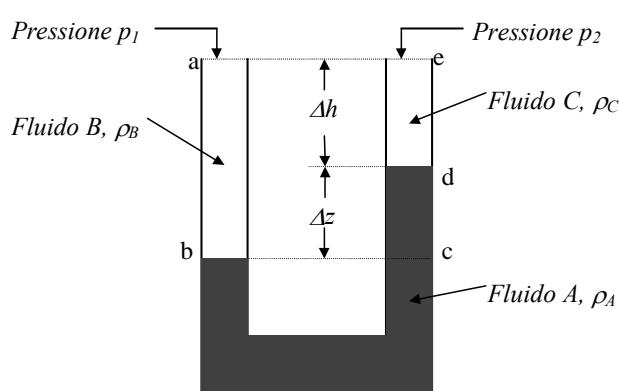


Figura 1.2.1. Il tubo a U.

Il manometro è un importante dispositivo per misurare le differenze di pressione. Il manometro più semplice è il tubo a U, rappresentato in **figura 1.2.1**. Come si vede, un fluido A di densità ρ_A riempie la parte inferiore del tubo ad U, mentre la parte superiore è riempita dei fluidi B e C , di densità inferiore, ed immiscibili col fluido A . Se le pressioni sui due bracci del tubo ad U, p_1 e p_2 , sono diverse, il menisco del fluido A sarà più alto da una parte che dall'altra. Per trovare la relazione tra questa differenza di quota, Δz , e la

differenza di pressione $p_1 - p_2$, consideriamo la seguente uguaglianza:

$$p_1 - p_2 = (p_a - p_b) + (p_b - p_c) + (p_c - p_d) + (p_d - p_e).$$

Ora, dal momento che ogni differenza di pressione è uguale al prodotto della densità del fluido, l'accelerazione di gravità e la differenza di quota [vedi equazione (1.1.3)], otteniamo:

$$p_1 - p_2 = -\rho_B g(\Delta h + \Delta z) + 0 + \rho_A g \Delta z + \rho_C g \Delta h$$

cioè,

$$p_1 - p_2 = (\rho_A - \rho_B)g \Delta z + (\rho_C - \rho_B)g \Delta h. \quad (1.2.1)$$

Il tubo a U si usa sostanzialmente in due modi (vedi **figura 1.2.2**), per misurare la pressione differenziale e la pressione relativa. Nel primo caso, si misura la differenza di pressione tra due punti in cui è presente lo stesso liquido, per esempio a monte e a valle di una valvola in cui scorre un liquido. In questo caso, i fluidi B e C sono gli stessi (sono infatti il liquido in esame), così che $\rho_C = \rho_B$, e quindi l'equazione (1.2.1) si semplifica,

$$p_1 - p_2 = (\rho_A - \rho_B)g \Delta z. \quad (1.2.2)$$

Si noti che la pressione differenziale è indipendente dalla distanza Δh , e quindi dalla profondità del tubo ad U, oltre che dalla sua sezione.

Nel secondo tipo di utilizzo del tubo a U, uno dei bracci è a contatto col fluido di cui si vuol misurare la pressione, e l'altro braccio con l'atmosfera. In questo caso, applicando l'equazione (1.2.1), in cui in genere si può trascurare la densità ρ_C dell'aria, si determina la *pressione relativa*, cioè la differenza tra la pressione assoluta del fluido, p_1 , e quella atmosferica, p_a .

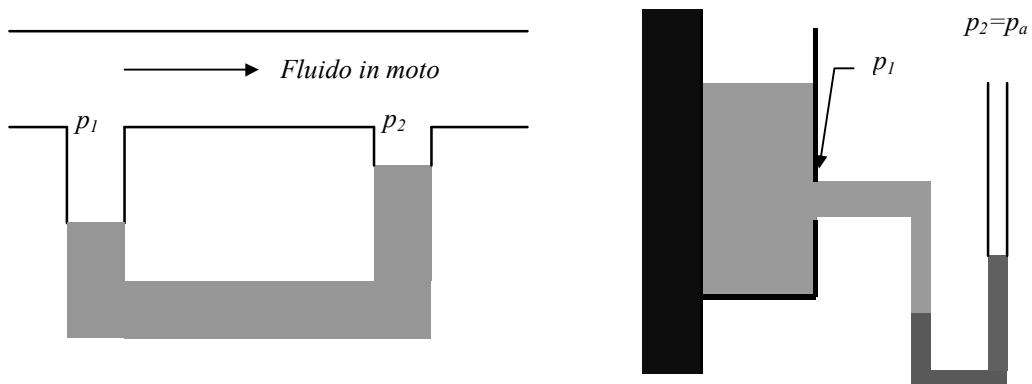


Figura 1.2.2. Misure di pressione differenziale (a sinistra) e relativa (a destra).

1.3 Tensione superficiale

Nella maggior parte delle applicazioni, gli effetti legati alla presenza di superfici² di separazione sono trascurabili, poiché al crescere della dimensione L di un sistema l'impatto dei fenomeni superficiali diminuisce come $1/L$, dato che il volume cresce come L^3 , mentre la superficie cresce come L^2 . Esistono tuttavia dei sistemi in cui questo non è vero e nei quali i fenomeni superficiali hanno una importanza, spesso determinante. In particolare, citiamo tre esempi di tali sistemi:

1. La superficie di separazione tra un liquido e il suo vapore con cui è in equilibrio, in sistemi ad uno o più componenti.
2. Una bolla di sapone, composta da un film liquido circondato da entrambe le parti da un gas.
3. Un film di un lubrificante (olio, ad esempio) sulla superficie libera di un liquido (ad es. acqua).

La regione di separazione tra due fasi, nota come interfaccia, in realtà non è una superficie bidimensionale (nel senso matematico del termine), bensì una regione, di spessore piccolo ma non nullo, in cui le proprietà del sistema sono diverse da quelle presenti nel bulk delle due fasi. Se non siamo troppo vicini al punto critico, in corrispondenza del quale la distinzione tra le fasi svanisce, lo spessore di questa regione è dell'ordine di alcuni raggi molecolari, cioè dell'ordine del centesimo di micron. Nonostante a queste scale di lunghezza l'ipotesi del continuo non sia applicabile, per comodità di ragionamento supporremo che le proprietà del sistema varino con continuità nella regione interfacciale, passando da quelle proprie di una fase a quelle proprie dell'altra.

Indicando con A_s l'area della superficie di separazione tra due fluidi, si consideri il lavoro δW necessario per contrarre reversibilmente tale superficie di una quantità infinitesima dA_s :

$$\delta W = \sigma dA_s \quad (1.3.1)$$

La grandezza σ così definita è detta *tensione superficiale*, con dimensioni di una forza per unità di lunghezza (o energia per unità di superficie) ed è la caratteristica fondamentale per descrivere l'interfaccia.

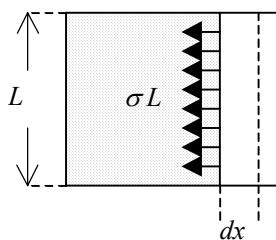


Figura 1.3.1

Per meglio capire il significato della tensione superficiale, si consideri un film delimitato da una contorno rettangolare costruito in modo che uno dei lati sia mobile (vedi **figura 1.3.1**). In questo caso, la tensione superficiale σ è la forza per unità di lunghezza diretta lungo la normale interna al contorno e tendente a diminuire la superficie del film.

L'espressione del lavoro reversibile vista sopra ha la stessa espressione formale del lavoro $\delta W = -pdV$ necessario per cambiare reversibilmente il volume di un sistema. Dunque si può dire che σ ha per la superficie lo stesso ruolo che $-p$

² In realtà, la regione di separazione tra due fluidi immiscibili ha uno spessore piccolo ma non nullo. In questo capitolo tuttavia, non essendo interessati alla struttura della regione di separazione, considereremo nullo tale spessore.

ha per il volume. Si noti il segno della tensione superficiale: se fosse $\sigma < 0$, sul contorno delimitante la superficie agirebbe una forza diretta lungo la normale esterna, e dunque l'interfaccia tra due fasi tenderebbe a crescere indefinitamente, con la conseguenza che, in generale, non potrebbero esistere due fasi coesistenti. Viceversa, per $\sigma > 0$, la tensione superficiale tende a contrarre la superficie il più possibile (naturalmente mantenendo costanti i volumi delle due fasi). Ecco perché una goccia d'acqua in aria, trascurando l'effetto della gravità, assume una forma sferica. Banalmente, se "rompiamo" la continuità di un fluido (cioè ad esempio, creiamo una bolla gassosa al suo interno) il fluido tenderà a riempirla, cioè a ricostituire la sua continuità, mentre, al contrario, se "rompiamo" la continuità di una membrana in tensione (ad esempio tagliando un palloncino), il taglio si allarga.

Per quanto detto, vediamo che la variazione dell'energia libera di Helmholtz (come quella dell'energia interna e dell'energia libera di Gibbs) di un sistema composto da due fasi coesistenti contiene un termine in più, cioè

$$dA = -SdT - pdV + \sigma dA_s + \sum \mu_i dN_i^{(j)}, \quad (1.3.2)$$

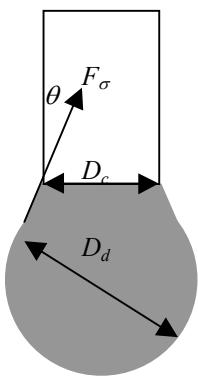


Figura 1.3.2

dove μ_i è il potenziale chimico della specie " i ", mentre $N_i^{(j)}$ è il numero di moli del componente " i " nella fase " j " ($j=1,2$). Ovviamente, abbiamo tenuto conto del fatto che all'equilibrio i potenziali chimici di un componente " i " nelle due fasi sono uguali tra loro, cioè $\mu_i^{(1)} = \mu_i^{(2)} = \mu_i$.

L'esempio più semplice di applicazione della tensione superficiale è quello della formazione di una goccia liquida all'uscita da un capillare (o più semplicemente un rubinetto) di diametro D_c . Sappiamo che la goccia cresce finché il suo peso supera le forze superficiali che la tengono attaccata al capillare e a questo punto la goccia cade. La tensione superficiale agisce lungo la cosiddetta *linea di contatto* (contact line) tra liquido e capillare, che è un cerchio di diametro D_c ; induce dunque una forza $F_\sigma = \sigma\pi D_c$ diretta lungo la tangente alla superficie liquido-gas e il cui verso è dettato dal fatto che la forza superficiale tende a far "richiudere" la goccia (vedi **figura 1.3.2**). Appena prima di cadere, un bilancio di forze ci permette di calcolare le dimensioni massime D_d raggiungibili dalla goccia:

$$\sigma\pi D_c \cos\theta = \rho g \left(\frac{\pi D_d^3}{6} \right). \quad (1.3.3)$$

Naturalmente non conosciamo l'angolo θ . Inizialmente è uguale a 90° , poi decresce gradualmente al crescere della goccia, la quale si "allunga" anche sotto l'effetto del suo peso. Dunque l'ipotesi più semplice è quella di assumere che $\theta = 0$ appena prima del distacco della goccia. In questo caso otteniamo:

$$D_d = \left(\frac{6\sigma D_c}{\rho g} \right)^{1/3}. \quad (1.3.4)$$

E' utile riscrivere questa equazione nella seguente forma adimensionale:

$$\frac{D_d}{D_c} = \left(\frac{6\sigma}{D_c^2 \rho g} \right)^{1/3} = \left(\frac{6}{Bo} \right)^{1/3} = 1.82 Bo^{-1/3}, \quad (1.3.5)$$

dove abbiamo definito il numero di *Bond*:

$$Bo = \frac{D_c^2 \rho g}{\sigma}. \quad (1.3.6)$$

Il numero di Bond esprime il rapporto tra forza di gravità $\rho g L^3$ e forza di superficie σL , dove L è una dimensione caratteristica del sistema, che in questo caso è uguale al diametro del capillare (ovviamente avremmo potuto scegliere anche il raggio).

La relazione trovata è in ottimo accordo con i dati sperimentali, cioè il rapporto tra il diametro delle gocce e quello del capillare è inversamente proporzionale alla radice cubica del numero di Bond; il coefficiente di proporzionalità però è circa 1.6 invece di 1.82. La discrepanza è dovuta al fatto che quando la goccia cade si lascia dietro un "residuo", cioè del liquido che resta attaccato all'orlo del capillare e quindi il volume della goccia che cade (che è la quantità misurata) è inferiore a quello della goccia appena prima di cadere.

Un'importante conseguenza pratica di questo risultato è che possiamo determinare facilmente la tensione superficiale, misurando il diametro delle gocce immediatamente prima di cadere (e ritenendo noti D_c , ρ e g). Infatti, invertendo l'equazione vista (e usando il coefficiente 1.6 invece di 1.82), otteniamo:

$$\sigma = 0.244 \frac{D_d^3 \rho g}{D_c}. \quad (1.3.7)$$

1.4 L'equazione di Young-Laplace

L'equazione di Young-Laplace stabilisce che la tensione superficiale dà origine ad una differenza di pressione a cavallo di un'interfaccia che dipende dalla forma di tale interfaccia. In particolare, consideriamo qui il caso di interfaccia sferica, applicabile al caso di una goccia di liquido immersa in un gas o quello di una bolla di gas presente in un liquido.

1.4.1 Approccio termodinamico

La forza che agisce all'interfaccia tra due fasi in equilibrio termico (stessa temperatura) e chimico (stesso potenziale chimico) è pari alla derivata del potenziale termodinamico appropriato (l'energia libera di Helmholtz, in questo caso) rispetto ad uno spostamento virtuale dell'interfaccia dr , tenendo costanti la temperatura T e i potenziali termodinamici μ_i . Si consideri, per semplicità, un sistema ad un solo componente presente in due fasi³ (indicate con il pedice "i", interno, e "o", esterno), sottoposto ad una trasformazione

³ In questo caso il potenziale chimico coincide con l'energia libera molare g .

in cui il volume totale del sistema sia costante. In questo caso, poiché all'equilibrio, con $r = R$, l'energia libera di Helmholtz A è minima, con [vedi (1.3.2)]

$$dA = -SdT - p_i dV_i - p_o dV_o + \sigma dA_s + \mu(dN_i + dN_o), \quad (1.4.1)$$

otteniamo:

$$\frac{dA}{dr} = -(p_i - p_o) \frac{dV}{dr} + \sigma \frac{dA_s}{dr} = 0,$$

dove $V=V_i$ e abbiamo considerato che il volume totale V_i+V_o e il numero di moli N_i+N_o siano costanti. A questo punto, se la fase “ i ” sta all’interno di una sfera di raggio r (e, naturalmente, la fase “ o ” ne sta all’esterno), si ha: $dV/dr = 4\pi r^2$ e $dA_s/dr = 8\pi r$; così che, per $r=R$, otteniamo infine:

$$(p_i - p_o) = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1.4.2)$$

Nel caso in cui l’interfaccia sia piana, le due pressioni sono uguali, come deve essere. Questa relazione fu ottenuta originariamente da P.S. de Laplace nel 1806 nel suo *Mecanique celeste*, ed è facilmente generalizzabile a superfici non sferiche, ottenendo

$$(p_i - p_o) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.4.3)$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi principali di curvatura della superficie considerata. Un approccio più semplice per determinare la differenza tra la pressione p_i all’interno e quella p_o all’esterno di una goccia è quello di considerare il trasferimento (reversibile) di un volume dV di liquido dall’esterno all’interno della goccia. Poiché il lavoro $\delta W = (p_i - p_o)dV$ necessario per effettuare la trasformazione deve essere uguale al lavoro σdA^s assorbito dal sistema per estendere la superficie dell’interfaccia di una quantità dA^s , ritroviamo la relazione di Laplace vista sopra:

$$(p_i - p_o)4\pi R^2 dR = \sigma 8\pi R dR \Rightarrow (p_i - p_o) = 2\sigma/R.$$

1.4.2 Approccio meccanico

Con riferimento alla **figura 1.4.1**, si consideri una sfera di raggio R contenente un fluido a pressione p_i in equilibrio con un fluido all'esterno a pressione p_o . Se isoliamo sull’interfaccia un quadrato elementare di lato $ds=Rd\theta$, e imponiamo che la somma delle forze agenti su di esso è nulla, vediamo che le forze di pressione, $(p_i-p_o)ds^2$, rivolte verso l'esterno, sono bilanciate dalla somma delle forze superficiali che agiscono sulle quattro facce del quadrato elementare, rivolte verso l'interno, pari a $4(\sigma ds)\sin(d\theta/2) \approx 4\sigma ds(d\theta/2)$, cioè uguale a $(2\sigma/R)ds^2$. In un caso generico, la superficie di separazione ammette due raggi di curvatura e troviamo facilmente l’equazione di Young-Laplace (1.4.3).

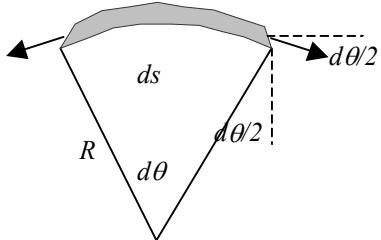
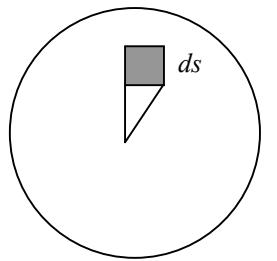


Figura 1.4.1

molto piccola.

A questo punto, è opportuno calcolare la differenza di pressione tipica all'interno di una goccia o di una bolla. Poiché la tensione superficiale tipica in un liquido è di circa 0.05 N/m , troviamo che per una bolla/goccia di 1 mm di raggio Δp è di circa 100 N/m^2 , che è una pressione

Esempio: salita di un liquido lungo un capillare.

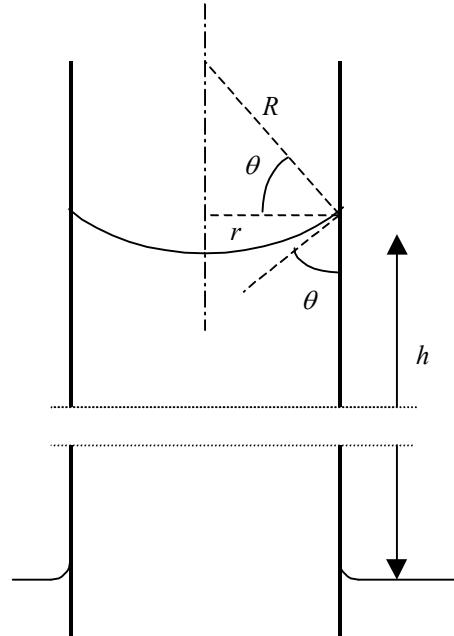


Figura 1.4.2

Immergendo un tubo capillare di raggio r in una bacinella d'acqua, il liquido risale nel tubo fino ad una altezza h dal pelo dell'acqua (vedi **figura 1.4.2**). All'equilibrio otteniamo:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = (\Delta\rho)gh \quad (1.4.4),$$

dove $R = r/\cos\theta$ e θ è l'angolo di raccordo (vedi **paragrafo 1.5**) e $\Delta\rho$ è la differenza di densità tra il liquido e il gas. Il caso più significativo è quello in cui il liquido bagna completamente la superficie del tubo capillare, per cui $\theta = 0$. In questo caso, definendo $D_c = 2r$, otteniamo:

$$h = \frac{4\sigma}{(\Delta\rho)gD_c}, \quad (1.4.5)$$

o, in forma adimensionale,

$$\frac{h}{D_c} = \frac{4}{Bo}, \quad (1.4.6)$$

dove Bo è il numero di Bond definito precedentemente. Scegliendo acqua come liquido, con $\sigma=0.072 \text{ N/m}$, e un capillare di 0.1 mm di raggio, troviamo $h = 15 \text{ cm}$. Anche questo fenomeno può essere usato per misurare la pressione superficiale.

1.5 Angolo di raccordo

In molti esempi, si osserva che un liquido, posto a contatto con un solido, non lo bagna completamente, ma rimane raccolto in una goccia che forma con la superficie del solido un angolo θ detto *angolo di raccordo* (vedi **figura 1.5.1**). Ora, la variazione di energia libera dovuto ad un incremento dS dell'area solida bagnata dal liquido è la seguente:

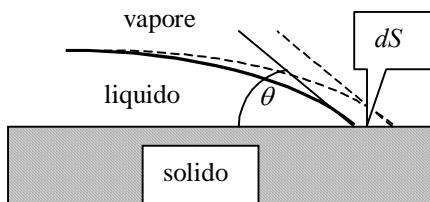


Figura 1.5.1

$$dA^s = dS(\sigma_{SL} - \sigma_{SV}) + dS\sigma_{LV} \cos \theta$$

dove σ_{SL} , σ_{SV} e σ_{LV} sono le tensioni superficiali tra solido e liquido, solido e vapore e liquido e vapore, rispettivamente. All'equilibrio $dA^s = 0$ e dunque si ottiene:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LV}}, \quad (1.5.1)$$

Questa relazione si può anche ricavare facilmente da un bilancio tra le tre forze di tensione superficiale, ciascuna delle quali è diretta verso l'interno della superficie di separazione corrispondente (vedi **figura 1.5.2**). Se $\sigma_{SV} > \sigma_{SL}$, cioè se la tensione superficiale tra solido e vapore è maggiore di quella tra solido e liquido, allora $\cos \theta > 0$ e l'angolo di raccordo è acuto, come nella figura. Se invece $\sigma_{SV} < \sigma_{SL}$, l'angolo di raccordo è ottuso.

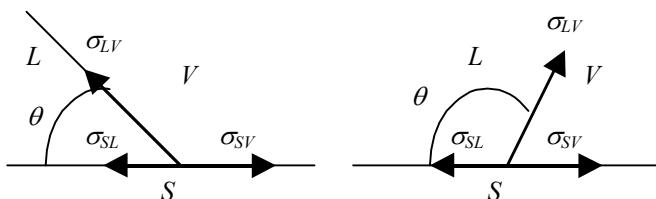
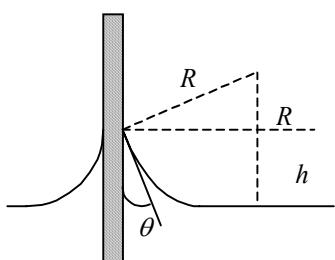


Figura 1.5.2

Quando il liquido bagna completamente la superficie solida, su questa ultima non si forma una membrana di adsorbimento, ma una membrana liquida microscopica. In questo caso, la condizione di equilibrio meccanico dà semplicemente $\cos \theta = 1$, e l'angolo di raccordo sarà uguale a zero.

L'angolo di raccordo si può misurare direttamente tramite tecniche fotografiche, oppure determinando l'altezza massima h raggiunta dal menisco su un piatto parzialmente immerso nel liquido (vedi **figura 1.5.3**). In

questo caso, applicando l'equazione (1.4.4), $2\sigma/R = \Delta\rho gh$, in cui, da considerazioni di geometria elementare, $R(1-\sin\theta) = h$, concludiamo che:



dove

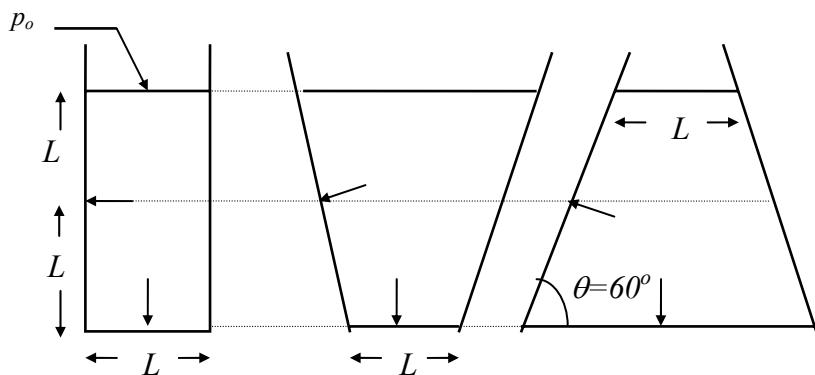
$$\sin \theta = 1 - \frac{(\Delta\rho)gh^2}{2\sigma} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad (1.5.2)$$

Figura 1.10

$$a = \sqrt{\frac{\sigma}{g\Delta\rho}}, \quad (1.5.3)$$

è una lunghezza caratteristica detta *lunghezza capillare*. In un caso tipico, con $a^2 \approx 0.1 \text{ cm}^2$, vediamo che ad un capillare con $r = 1 \text{ mm}$ corrisponde $h \approx 1 \text{ cm}$, mentre per $r = 1 \mu\text{m}$ otteniamo $h \approx 10 \text{ m}$.

1.6 Esercizi



1.1 Con riferimento alla **figura 1.1P**, quanto è la pressione sul fondo dei tre recipienti a sezione quadrata e quella sulle pareti laterali? Quanto è la forza su ogni faccia? Si assumi che il fluido è acqua, con p_0 uguale alla pressione atmosferica e $L=10 \text{ cm}$.

Figura 1.1P

1.2 Si consideri una centrifuga rotante a velocità angolare ω così elevata che la forza centrifuga sia molto maggiore della forza gravitazionale, e la superficie libera del fluido rotante sia un cilindro coassiale con l'asse di rotazione (vedi **figura 1.2P**). Queste condizioni sono generalmente incontrate nelle centrifughe di tipo industriale.

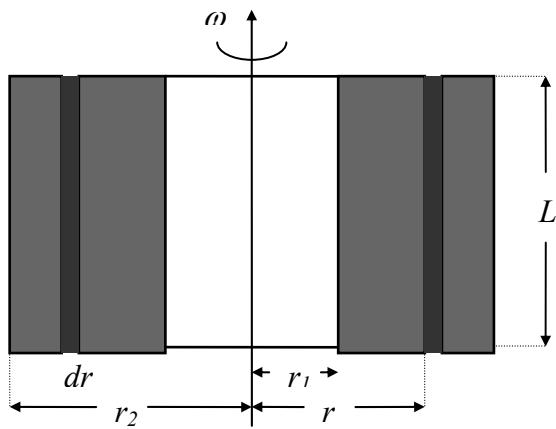


Figura 1.2P. Liquido rotante in una centrifuga ad alta velocità consente di determinare la seguente differenza di pressione tra le superfici con $r=r_1$ e $r=r_2$:

$$p_2 - p_1 = \rho\omega^2 (r_2^2 - r_1^2)/2.$$

1.3 Si determini il profilo del pelo libero dell'acqua contenuta in un cilindro rotante con velocità angolare ω .

1.4 La temperatura dell'atmosfera terrestre diminuisce di circa $5^{\circ}C$ per ogni 1000 metri in elevazione. Se al livello del mare la temperatura dell'aria è di $15^{\circ}C$ e la pressione è di $760mmHg$, a quale altezza la pressione sarà di $380mmHg$? Si assuma che l'aria si comporti come un gas ideale.

1.5 Che errore si sarebbe commesso se nel problema precedente si fosse trattata l'aria come un fluido incomprimibile, con una densità pari al suo valore a $0^{\circ}C$ di temperatura e ad una pressione media di $570mmHg$?

1.6 Per misurare la differenza di pressione a cavallo di una valvola in cui scorre del tetrachloruro di carbonio (peso specifico = 1.6) si utilizza un tubo ad U riempito di mercurio (peso specifico = 13.6). Il manometro indica 200mm. Quant'è la differenza di pressione in Pascal?

1.7 Dell'acqua a $20^{\circ}C$ gocciola da un capillare del diametro di 0.14 cm . Se raccogliamo 20 goccioline e il loro peso complessivo è 0.448 g , si determini la tensione superficiale dell'acqua.

1.8 Recentemente due ricercatori hanno misurato la frequenza di gocciolamento f in funzione della portata volumetrica \dot{V} (in cm^3/s) del liquido che scorre in un capillare, trovando che $X = 1.5\dot{V}$, dove $X = f \sigma \pi D_c / \rho g$, dove σ è la tensione superficiale, D_c il diametro esterno del capillare e ρ la densità del liquido. Si confronti tale risultato con la (1.3.5).

1.9 Si osserva sperimentalmente che la portata volumetrica massima \dot{V} in un capillare in corrispondenza della quale si osserva un gocciolamento corrisponde ad un numero di Weber unitario, cioè $We = (16\rho\dot{V}^2)/(\sigma\pi^2D_c^2) = 1$. a) Si determini la frequenza massima di gocciolamento f ; b) Si trovi f nel caso che il liquido sia acqua e il capillare abbia un diametro $D_c = 1\text{ mm}$.

2. Aspetti generali della meccanica dei fluidi

2.1 Introduzione

Il comportamento di un elemento di un fluido in movimento in un condotto dipende fortemente dalla distanza di quell'elemento di fluido dalle pareti del condotto. In regioni lontane dalle pareti, gli sforzi di taglio, cioè gli attriti e le forze dissipative, sono trascurabili, così che il fluido si comporta come un fluido ideale, incomprimibile e non dissipativo. Come nel caso statico, in questo caso in seno al fluido non vi sono sforzi di taglio e le caratteristiche del suo moto dipendono soltanto dalla pressione. Il suo moto è detto *flusso potenziale*, ed è stato studiato a fondo, soprattutto nel secolo scorso.

Il flusso potenziale è completamente descritto dalla meccanica Newtoniana, in base alle leggi di conservazione della massa e dell'energia meccanica (cioè cinetica e potenziale), e non presenta dissipazioni di energia, cioè conversione di energia meccanica in calore. Questo tipo di moto può esistere anche a distanze piccole dalle pareti; tuttavia, nelle vicinanze delle pareti, la velocità del fluido cambia improvvisamente (vedi **figura 2.1.1**), introducendo delle dissipazioni che non possono essere descritte in termini di moto potenziale. Lo strato di fluido di spessore δ , che caratterizza la distanza massima a cui il fluido risente dell'azione della parete, è detto *strato limite* e fu introdotto da Prandtl nel 1904: gradienti di velocità nella direzione normale al moto e sforzi di taglio nella direzione ad esso paralleli diventano particolarmente importanti in questa regione di spazio.

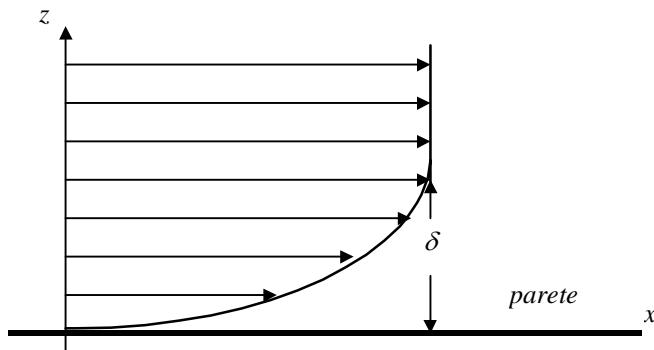


Figura 2.1.1. Profilo di velocità in vicinanza di una parete.

L'introduzione del concetto di strato limite è molto importante. Per esempio, studiando il moto di un corpo solido nell'aria, se supponessimo che il flusso fosse dappertutto potenziale, non potremmo spiegarci l'esistenza della forza di resistenza parallela al moto offerta dall'aria (*drag*), un effetto dissipativo ben noto a chiunque vada in bicicletta pedalando controvento. Nello stesso modo, non potremmo spiegare la portanza (*lift*), cioè la forza di resistenza perpendicolare al moto offerta dall'aria,

che permette agli aerei di "mantenersi" in aria. L'impossibilità di tener conto di fenomeni tanto elementari come il *drag* e il *lift* da parte della fluidodinamica classica veniva chiamato paradosso di d'Alambert.¹

¹ È una fortuna che i fratelli Orville e Wilbur Wright non fossero esperti fluidodinamici, così che non ebbero remore nel cominciare i loro tentativi di volo molto prima che Prandtl finalmente ne spiegasse i fondamenti fisici.

2.2 Il numero di Reynolds

Le caratteristiche del campo di moto di un fluido sono determinate dall'importanza relativa del flusso di quantità di moto dovuto a convezione rispetto a quello dovuto a diffusione viscosa. Il primo si definisce come la quantità di moto che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, ed è uguale (vedi paragrafo 0.4.1) all'energia cinetica per unità di volume, $J_{cQ}=\rho V^2$, dove V è la velocità media del fluido, mentre il flusso di quantità di moto viscosa, $J_Q=\mu dv/dz$, si può approssimare come $J_Q\approx\mu V/L$, dove μ è la viscosità del fluido, mentre L è una distanza caratteristica del campo di moto. Il rapporto tra queste due grandezze è una quantità adimensionale, detto numero di Reynolds, dal nome del suo scopritore,²

$$Re = \frac{\text{convezionediquantita'dimoto}}{\text{diffusionediquantita'dimoto}} = \frac{J_{cQ}}{J_Q},$$

cioè:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}. \quad (2.2.1)$$

Come tutte le grandezze adimensionali, il numero di Reynolds non dipende dalle unità di misura usate, purché ovviamente esse siano mutuamente congruenti. Quindi, per esempio, si possono adottare unità SI, con $[V]=m/s$; $[L]=m$; $[\nu]=m^2/s$, ma non si può misurare V in unità SI ed L e ν in unità CGS, altrimenti Re sarebbe sì adimensionale, ma avrebbe un valore numerico errato (in altre parole, sarebbe espresso in m/cm).

Ancora una volta, notiamo l'analogia tra il trasporto di quantità di moto e quello di energia e di massa, le cui caratteristiche fisiche sono descritte dal numero di Peclet termico e il numero di Peclet massico. Come il numero di Reynolds, anche questi numeri sono definiti come il rapporto tra il flusso (di energia o di massa, a seconda dei casi) convettivo e quello diffusivo, dando i seguenti risultati:

$$Pe_t = \frac{VL}{\alpha}; \quad Pe_m = \frac{VL}{D}. \quad (2.2.2)$$

Il numero di Reynolds (come del resto quelli di Peclet) dà un'immediata indicazione del tipo di trasporto, cioè del regime di moto, presente nel sistema in esame. Per esempio, si consideri un corpo immerso in un fluido in moto. Quando Re è elevato, la convezione prevale sulla diffusione; dunque, considerando che la forza è la quantità di moto trasferita per unità di tempo, e ricordando che $J_{cQ}=\rho V^2$ è la quantità di moto convettiva che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo, troviamo che la forza di resistenza F esercitata dal fluido sul

² In realtà, Reynolds non seguì questa strada per definire il numero che porta il suo nome. Egli capì che il campo di moto all'interno di un tubo deve dipendere da quattro fattori, cioè il diametro del tubo, e la viscosità, densità e velocità media del fluido, e vide che vi è un solo modo con cui queste quattro grandezze si possono raggruppare in un numero adimensionale: il numero di Reynolds, appunto (vedi il problema 2.1).

corpo è proporzionale a $J_C S$, dove S è la sezione del corpo nella direzione normale al moto, cioè,

$$F \approx S \rho V^2. \quad (2.2.3)$$

In questa espressione, come nel seguito di questo testo, il simbolo " \approx " indica "dello stesso ordine di grandezza di". Dunque $A \approx B$ significa che non solo A e B sono proporzionali tra loro, ma anche che il loro rapporto è una costante di ordine 1, cioè $A/B \approx 1$.³

L'equazione (2.2.3) indica che le forze di resistenza esercitata su un corpo da un fluido in cui il corpo è immerso, ad alto numero di Reynolds, sono proporzionali al quadrato della velocità, alla superficie del corpo, e alla densità del fluido, mentre sono indipendenti dalla viscosità del fluido. Come vedremo in seguito, tuttavia, questa affermazione è corretta soltanto quando il moto è turbolento, cioè quando Re eccede un ben preciso (ed elevato) valore. Per esempio, nel caso di una sfera immersa in un fluido in moto turbolento, troviamo: $F=0.22\pi R^2 \rho V^2$, dove R è il raggio della sfera.

Al contrario, quando Re è piccolo, il campo di moto è completamente determinato dalla dissipazione viscosa, mentre si può trascurare la convezione. In questo caso, $F \approx J_0 S$, cioè',

$$F \approx \mu L V, \quad (2.2.4)$$

dove L è una dimensione lineare tipica del corpo, con $S \approx L^2$. Questa relazione mostra che le forze di resistenza esercitate su un corpo da un fluido in cui il corpo è immerso, a basso numero di Reynolds, sono proporzionali alla velocità, alla viscosità del fluido e ad una dimensione lineare del corpo. Per esempio, nel caso di una sfera solida che si muove a bassa velocità in un fluido in quiete, troviamo che $F=6\pi\mu RV$, dove R è il raggio della sfera.

Identiche considerazioni dimensionali valgono anche per la portanza. Si noti che l'equazione (2.2.4) è drasticamente diversa dalla (2.2.3): l'una dipende dalla viscosità del fluido, l'altra dalla sua densità; l'una dipende dal quadrato della velocità, l'altra ne dipende linearmente; l'una dipende dalla sezione del corpo e l'altra da una sua dimensione lineare.

Infine, è opportuno chiarire che, per numeri di Reynolds molto elevati, si instaurano nel liquido in moto fenomeni di instabilità detti *turbolenza*, descritti sommariamente nel paragrafo 2.5 e, più estensivamente, nel capitolo 17.

2.3 Strato limite e resistenza viscosa

In pratica, una divisione netta tra i regimi del campo di moto con $Re \gg 1$ da quelli con $Re \ll 1$ non è sempre possibile. Per esempio, si consideri il moto del vento intorno a una casa, o il flusso dell'acqua di un fiume attorno al pilone di un ponte. In questi casi, il numero di Reynolds definito in funzione delle dimensioni della casa o del pilone [cioè assumendo che L nell'espressione (2.2.1) sia uguale a queste dimensioni macroscopiche], è molto elevato. Ciò significa che il campo di moto descritto sulla scala di lunghezze L è di tipo potenziale, con

³ Talvolta, invece di $A \approx B$, si adotterà la notazione $A = O(B)$, ovvero $A/B = O(1)$.

conseguente conservazione dell'energia. Tuttavia, dobbiamo tener conto del fatto che il fluido a contatto con la parete ha velocità nulla (vedi paragrafo 2.4). Dunque, nelle vicinanze della parete, il profilo di velocità è approssimativamente quello di **figura 2.1.1**, con un flusso convettivo uguale a zero alla parete ed uniforme (cioè con flusso potenziale) a distanze $y > \delta$ dalla parete. Nella regione $y < \delta$, dunque, il trasporto viscoso diventa dominante e la dissipazione che ne deriva genera i fenomeni del drag e del lift spiegati nel paragrafo 2.1. In pratica, ci sono due regimi di moto: lontano dalla parete, per distanze $y \approx L \gg \delta$, il numero di Reynolds è molto elevato, e quindi il campo di velocità è di tipo potenziale; al contrario, molto vicino alla parete, il numero di Reynolds è molto piccolo, poiché sia la velocità che la lunghezza caratteristica sono piccoli, e quindi prevale la dissipazione viscosa. Ovviamente, a distanze intermedie δ , ai margini dello strato limite, i due meccanismi di trasporto sono egualmente importanti, ovvero le *forze* dovute a convezione sono approssimativamente uguali a quelle dovute a diffusione viscosa. Poiché la forza applicata al fluido è pari al prodotto del flusso di quantità di moto per la sezione attraversata, ciò significa che ai margini dello strato limite abbiamo:

$$J_C S_C \approx J_Q S_Q . \quad (2.3.1)$$

Questa relazione va considerata con grande attenzione. Infatti, la convezione agisce in direzione longitudinale e dunque il flusso attraversa una sezione di area $S_C = \delta L$, mentre la diffusione viscosa agisce in direzione trasversale e attraversa una sezione di area $S_Q = L^2$. Dunque l'equazione (2.3.1) comporta che $\rho V^2 / L \approx \mu V / \delta^2$, cioè

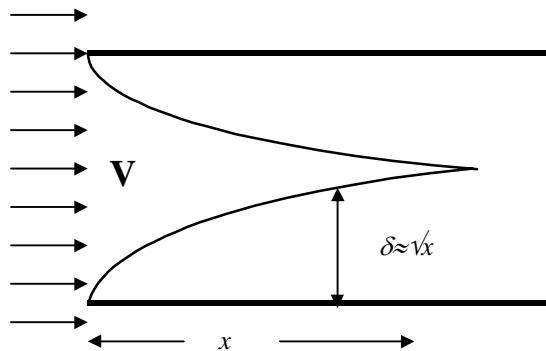


Figura 2.3.1. Strato limite di un fluido in un tubo.

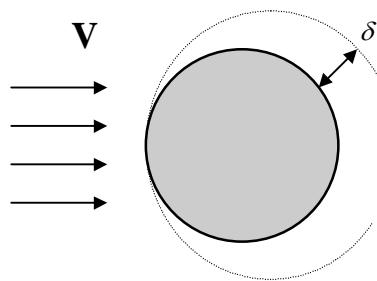


Figura 2.3.2. Strato limite attorno a una sfera.

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}} , \quad (2.3.2)$$

che significa che, anche se la dimensione *relativa* dello strato limite diminuisce come l'inverso della radice quadrata del numero di Reynolds, la sua dimensione *assoluta* cresce come la radice quadrata della dimensione lineare del corpo (cioè $\delta \approx \sqrt{L}$). Questa osservazione è importante, perché sta ad indicare che nel caso di un fluido che fluisce all'interno di un condotto, lo strato limite avrà la forma indicata in **figura 2.3.1**. Dunque, nelle regioni sufficientemente lontane dall'imbocco del condotto, lo strato limite occuperà l'intera sezione, ed il trasporto di quantità di moto sarà dunque controllato dalla diffusione viscosa⁴.

Nel caso di un corpo lambito da un fluido in movimento con alto numero di Reynolds, invece, lo strato limite non può

⁴ Questa osservazione è valida soltanto quando il moto del fluido non è turbolento.

crescere a dismisura, come all'interno del tubo, e il suo profilo è sostanzialmente quello indicato in **figura 2.3.2**, cioè sottile “davanti” ed più spesso “dietro”, finché poi, nella parte posteriore, le linee di flusso e lo strato limite si distaccano dal corpo (vedi paragrafo 7.3). Si noti che, una volta noto lo spessore δ dello strato limite, si può immediatamente determinare la forza esercitata su di un corpo dal fluido che lo lambisce. Infatti, nelle vicinanze della parete, muovendoci da $z=0$ a $z=\delta$, la velocità del fluido aumenta da $v=0$ a $v=V$, e quindi il gradiente di velocità è pari a circa V/δ . Ciò significa che sulle pareti agirà uno sforzo di taglio (cioè una forza per unità di area) $\tau \approx \mu V/\delta$, che è più forte sulla parte anteriore del corpo, dove lo strato limite è più sottile, che sulla parte posteriore. Dunque, quando il corpo è una sfera, in base a facili considerazioni di simmetria si vede che la forza totale applicata al corpo, pari all'integrale di τ sulla superficie del corpo⁵, è diretta lungo la direzione del flusso e costituisce la cosiddetta *resistenza (drag)* del corpo. In un caso più generale, tuttavia, la forza totale ha anche una componente perpendicolare al flusso, detto *portanza (lift)*, responsabile del fatto che un aereo in moto resti sospeso in aria (la portanza bilancia la gravità) o del fatto che un'auto resti più o meno incollata a terra quando prende una curva ad alta velocità.

Questa analisi è, in sintesi, la teoria dello strato limite. Essa mostra che, anche quando il numero di Reynolds è elevato (e quindi ci si aspetterebbe flusso potenziale ovunque e resistenza nulla), esiste una forza di resistenza dovuta alle dissipazioni che avvengono nello strato limite. Anzi, tanto più è alto il numero di Reynolds, tanto più sottile sarà lo spessore δ dello strato limite [vedi Eq. (2.3.2)], tanto più grande sarà il gradiente di velocità all'interno dello strato limite, e quindi tanto maggiore sarà lo sforzo di taglio, e di conseguenza la resistenza, dovuta all'attrito del fluido contro la parete.

Nel caso di un fluido che fluisce lungo una piastra piana di lunghezza L_1 e larghezza L_2 (vedi **figura 2.1.1**), il calcolo della forza di resistenza si può fare facilmente, trovando:

$$F = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \mu \frac{dv}{dz} dx dz \approx L_2 \mu V \int_0^{L_1} \frac{1}{\delta} dz \approx \sqrt{L_2^2 \mu \rho V^3} \int_0^{L_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} \approx \sqrt{L_1 L_2^2 \mu \rho V^3}. \quad (2.3.3)$$

Questo problema fu risolto per la prima volta da Blasius nel 1908, il quale determinò che l'espressione scritta sopra è esatta, con un coefficiente di proporzionalità davanti alla radice quadrata pari a 1.328 (vedi paragrafo 7.2). Come si può ben vedere, una semplice analisi dimensionale come quella condotta qui sopra ci dà essenzialmente l'intero risultato.

Nel caso del moto di un fluido attorno ad un corpo smussato, come un profilo alare, in cui non si verifichi il distacco dello strato limite accennato precedentemente, il calcolo della forza di resistenza è più complesso, ma il risultato è qualitativamente lo stesso, e cioè,

$$F \approx \sqrt{R^3 \mu \rho V^3}, \quad (2.3.4)$$

dove R è il raggio della sfera. Questo risultato sembrerebbe in disaccordo con l'equazione (2.2.3), in cui la forza di resistenza appare proporzionale al quadrato della velocità. In realtà, entrambe le espressioni sono corrette: le equazioni (2.3.3) e (2.3.4) sono valide in regime laminare, assumendo che lontano dalla sfera non ci sia miscelamento fluido in direzione trasversale, mentre l'equazione (2.2.3) è valida in regime turbolento. Tale distinzione sarà chiarita nel paragrafo seguente.

⁵ Tale forza è dovuta *esclusivamente* alle forze di taglio, poiché le forze di pressione si cancellano a vicenda.

Si noti che se il numero di Reynolds macroscopico Re è piccolo, l'analisi precedente non è più valida.⁶ In questo caso, il gradiente di velocità alla parete è approssimativamente uguale a V/L , e quindi si trova la forza di resistenza (2.2.4) vista del paragrafo precedente.

2.4 Condizioni al contorno

Nei paragrafi precedenti abbiamo tacitamente usato il fatto che un fluido a contatto con una parete solida si muove con la stessa velocità della parete. Possiamo immaginare che le molecole di fluido a contatto con le pareti si “infilino” nei pori delle pareti, e ne acquisiscano quindi la velocità. Questa, cosiddetta, condizione al contorno di scorrimento nullo (*no slip boundary condition*) è ovviamente essenziale nel calcolare i profili di velocità. Più in generale, questa condizione indica che non ci possono essere delle discontinuità nel campo di velocità di un fluido in movimento, cioè che all'interfaccia si ha:

$$v = v_0, \quad (2.4.1)$$

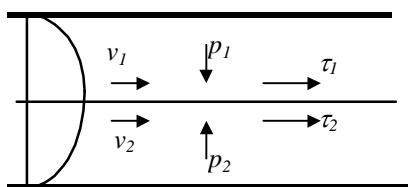


Figura 2.4.1

condizione è un po' come la terza legge di Newton, quella di azione-reazione. Con riferimento alla **figura 2.4.1**, se immaginiamo di “tagliare” un fluido in moto con una superficie, questa condizione stabilisce che non solo le velocità, ma anche gli sforzi di taglio sopra e sotto sono uguali. Si noti che, poiché lo sforzo di taglio è legato al gradiente di velocità, questa seconda condizione al contorno è una specie di continuità nelle derivate prime delle velocità. In genere si ha:

$$v_1 = v_2; \quad p_1 = p_2; \quad \mu_1 dv_1/dy = \mu_2 dv_2/dy. \quad (2.4.2)$$

Quando il fluido è a contatto con una superficie solida, il profilo di velocità si può determinare solo con la condizione di scorrimento nullo. Le ultime due condizioni al contorno sono però necessarie per determinare le forze trasmesse dal fluido alla parete e quindi risalire, in particolare, alle perdite di carico.

Un caso particolare delle condizioni al contorno (2.4.2) si riferisce al moto di un fluido delimitato da una superficie libera (si veda il problema 3.5). Si pensi al moto di un fiume: è chiaro che il problema è un po' come quello schematizzato in figura 2.4.1 in cui nella zona

⁶ In realtà, l'analisi precedente si può ripetere. In questo caso tuttavia, invece di avvicinarci alla parete, supponiamo di allontanarcene, finché arriviamo ad una distanza $\Delta >> L$, tale che $Re_A = V\Delta/\nu = O(1)$. Ora, separando la regione a trasporto convettivo da quella diffusiva, come abbiamo fatto in precedenza, ritroviamo non solo il risultato (2.2.4), ma anche una importante correzione dell'ordine di Re . Una analisi rigorosa di questo tipo fu condotta per la prima volta da Acrivos e Taylor nel 1953 nel caso di trasporto di calore (cioè col numero di Peclet al posto di quello di Reynolds).

“2” sta l’acqua che scorre e nella zona “1” sta l’aria. Allora, le condizioni al contorno (2.4.2) stabiliscono che all’interfaccia tra i due fluidi si abbia: $v_{acqua} = v_{aria}$ e $\mu_{acqua} dv_{acqua}/dy = \mu_{aria} dv_{aria}/dy$, oltre che imporre che la continuità della pressione. A questo punto, la velocità dell’aria all’interfaccia non la conosciamo (e neanche ci interessa conoscerla) mentre, poiché $\mu_{acqua} > \mu_{aria}$, troviamo che $dv_{acqua}/dy = 0$. Ciò significa che lo sforzo di taglio alla superficie libera è nullo (o meglio, trascurabile) e dunque la derivata della velocità in corrispondenza della superficie libera deve essere nulla. In altre parole, la condizione al contorno, invece che $v=0$, adesso è $dv/dy=0$.

2.5 Turbolenza

Fin dagli albori dello studio della meccanica dei fluidi si è sempre saputo che ci sono due modi distinti con cui un fluido si muove in un tubo, poiché alle basse portate la caduta di pressione è proporzionale alla velocità media del fluido, mentre alle alte portate è circa proporzionale al suo quadrato.⁷ La distinzione tra questi due regimi di moto si deve, ancora una volta, a Reynolds, il quale nel 1883 fece scorrere un fluido in un tubo di vetro trasparente, iniettando all’imbocco, con una siringa, un filamento di inchiostro colorato. Reynolds osservò che a bassi regimi il filamento resta intatto, indicando che l’inchiostro, e quindi anche il fluido, scorre in direzione longitudinale, senza alcuna miscelazione trasversale. Questo regime di moto è detto *laminare*. Aumentando successivamente la portata, si raggiunge una, cosiddetta, *velocità critica*, in corrispondenza della quale il filamento colorato comincia prima ad ondeggiare, per poi sparire del tutto, quando l’inchiostro si diffonde su tutta la sezione del tubo. In questo, cosiddetto, regime *turbolento*, il liquido non scorre più esclusivamente in direzione longitudinale, ma invece si muove in modo caotico, formando continuamente dei vortici che trasportano il fluido in direzione trasversale.

Reynolds stabilì che la velocità critica, cioè la separazione tra questi due regimi di moto, dipende solo dal numero di Reynolds. Osservazioni successive hanno mostrato che la realtà è assai più complessa. Per esempio, nel caso del moto di un fluido in un condotto, il flusso è sempre laminare quando Re è inferiore a 2100, e sempre turbolento per Re maggiore di 4000. Per valori intermedi del numero di Reynolds, siamo nella cosiddetta *regione di transizione*, in cui il flusso può essere laminare o turbolento, a seconda delle condizioni del tubo e della distanza dall’imbocco.⁸ In genere, tuttavia, il valore del numero di Reynolds è sufficiente per darci un’idea abbastanza precisa del tipo di regime che ci possiamo attendere.

Una trattazione accurata della turbolenza va al di là degli scopi di questa testo. Ci limiteremo dunque a vederne alcuni aspetti importanti. Prima di tutto, la turbolenza è un fenomeno critico, come il cambio di fase, con una separazione netta tra regime laminare e turbolento. In altre parole, non ci sono regimi a metà laminari e a metà turbolenti: un fluido in moto laminare diventa turbolento non appena si raggiunge la velocità critica. Nello stesso modo, nell’ebollizione, le bolle in un fluido subcritico cominciano ad apparire all’improvviso, non appena si raggiunge la temperatura critica di ebollizione.

La seconda considerazione parte dal fatto che, a parità di condizioni, un flusso turbolento dissipa di più di uno laminare, con conseguente aumento delle perdite di carico.

⁷ In realtà, per portate intermedie la caduta di pressione è proporzionale a $V^{3/2}$, come visto in Eq. (2.7), però Reynolds questo non lo poteva sapere.

⁸ Più il tubo è liscio e più distanti siamo dall’imbocco, tanto più il flusso tende ad essere laminare.

Ora, la prima cosa che una persona di buon senso si chiede a questo punto è la seguente: “perché un fluido che può scorrere di moto laminare con dissipazioni minime decide invece di diventare turbolento, aumentando enormemente le sue perdite di carico?” Purtroppo, nonostante l’enorme sforzo di ricerca prodotto negli ultimi cinquant’anni, una risposta esauriente a questa domanda non esiste.⁹ Sappiamo tuttavia che la turbolenza, come qualsiasi altro processo critico, viene innescata da un disturbo, anche molto piccolo, che inevitabilmente è presente nel sistema. Nel nostro caso, si tratta di un disturbo della quantità di moto, che può venire dalle pareti, come nella *wall turbulence*, o da una disomogeneità del flusso, come nella *free turbulence*. In regime turbolento questo disturbo, invece di venire attenuato e scomparire, come succede in regime laminare, cresce, finché, per ragioni non ancora del tutto chiare, il flusso a livello macroscopico si destabilizza, e cominciano a formarsi dei vortici (*eddies* in inglese). Sembrerebbe quasi che il sistema si ritrovi con un surplus di energia, che non riesce a dissipare in regime di moto laminare, e così comincia a girare su se stesso, pompando l’eccesso di energia cinetica in questi vortici, i quali, inizialmente, sono macroscopici. Per esempio, il vento che lambisce una casa di dimensioni L comincia a formare dei vortici delle stesse dimensioni della casa. Ovviamente, tali vortici microscopici non possono rallentare e scomparire, perché il numero di Reynolds corrispondente è molto elevato, e quindi l’attrito viscoso è trascurabile nei confronti del trasporto convettivo. Invece, i vortici macroscopici si dividono, formando vortici più piccoli, attraverso un processo a flusso potenziale, in cui l’energia cinetica si conserva. A loro volta, i vortici più piccoli si suddividono formandone di ancora più piccoli, e così via, finché si raggiunge una scala di lunghezza δ sufficientemente piccola (da 10 a 100 micron) che il numero di Reynolds corrispondente è circa pari all’unità (vedi paragrafo 17.2). Questo vuol dire che nel moto dei vortici di dimensione δ l’attrito viscoso è altrettanto importante che il trasporto convettivo, e quindi questi vortici “rallentano” e alla fine scompaiono, grazie alla dissipazione viscosa. Dunque l’energia inizialmente “pompata” sottoforma di energia cinetica nei vortici macroscopici, si suddivide in innumerevoli rigagnoli, corrispondenti a vortici sempre più piccoli, finché si disperde in calore, non appena i vortici diventano di dimensione δ . Questi vortici “dissipativi” sono detti vortici di Kolmogorov, dal nome dello scienziato russo che negli anni quaranta spiegò il fenomeno della turbolenza nei termini sopra indicati.

Si noti che solo adesso possiamo comprendere fino in fondo l’analisi condotta alla fine del paragrafo 2.3, che mostra come ad elevati numeri di Reynolds la forza di resistenza viscosa è proporzionale all’energia cinetica ρV^2 [vedi equazione (2.2.3)]. Infatti, questa energia cinetica è pari all’energia pompata nei vortici macroscopici, che non dissipano, ma è anche pari all’energia che raggiunge i vortici microscopici, che sono i responsabili della resistenza viscosa e in cui avviene la dissipazione.

⁹ Arrivato vicino alla fine della sua vita, Lamb, un famoso fisico inglese degli anni trenta, confidò ad un amico che le due cose che avrebbe voluto sapere una volta arrivato in Paradiso (Sir Horace Lamb era un inguaribile ottimista) erano come conciliare meccanica quantistica ed elettrodinamica, e come spiegare la turbolenza. Da allora, mentre l’elettrodinamica quantistica è ormai una disciplina ben nota, la turbolenza continua ad eludere i tentativi di comprensione.

2.6 Esercizi

2.1 Si mostri che, a partire da una dimensione lineare caratteristica L e da viscosità μ , densità ρ e velocità media V del fluido, è possibile costruire un solo gruppo adimensionale indipendente, che risulta essere il numero di Reynolds.

2.2 Come indicato in Figura 2.3.1, un fluido in moto laminare, appena entrato in un condotto, forma uno strato limite alle pareti che cresce in spessore fino ad occupare l'intera sezione del tubo. Da questo punto in poi, il profilo del fluido non cambia, cioè ha raggiunto il suo stato stazionario, detto *fully developed flow*. Supponendo che il condotto abbia una ampiezza R , quale è la distanza L in direzione longitudinale che corrisponde al raggiungimento della condizione di *fully developed flow*?

2.3 Si consideri il problema precedente. La condizione di *fully developed flow* si raggiunge quando al centro del condotto arriva l'informazione che la velocità alle pareti è uguale a zero, e quindi dopo un tempo $t \approx R^2/v$. Ora, poiché durante questo intervallo di tempo il fluido si è spostato di $L \approx Vt$, ritroviamo lo stesso risultato del problema 2.1.

2.4 Nei casi seguenti, determinare se il flusso è laminare o turbolento. a) Acqua a $10^\circ C$ che fluisce in un tubo del diametro di $100\ mm$, con velocità media di $2\ m/s$; b) aria alla pressione di $2\ atm$ e temperatura di $60^\circ C$, in un tubo del diametro di $30\ cm$ e alla velocità di $15\ m/s$; c) fango con densità di $1200\ kg/m^3$ e viscosità di $1\ Pa\cdot s$, pompato in tubo di $15\ mm$ di diametro alla velocità di $0.2\ m/s$.

3. Bilanci macroscopici

I principi della fisica più usati nella meccanica dei fluidi sono le leggi di conservazione della massa, dell'energia meccanica e della quantità di moto, che danno origine alle cosiddette equazioni di continuità, equazione di Bernoulli e equazione di Navier-Stokes. Queste equazioni si possono scrivere sia in modo sia differenziale che in modo integrale. In questo capitolo considereremo la formulazione integrale, applicabile ad una massa finita di fluido in moto. Una trattazione più estesa della formulazione differenziale verrà presentata nei capitoli seguenti.

3.1 Bilancio di massa ed equazione di continuità

In un flusso stazionario, un bilancio di massa è particolarmente semplice: la massa che entra in un volume fissato nell'unità di tempo è uguale alla massa che ne esce, poiché la massa non può essere né creata né distrutta.

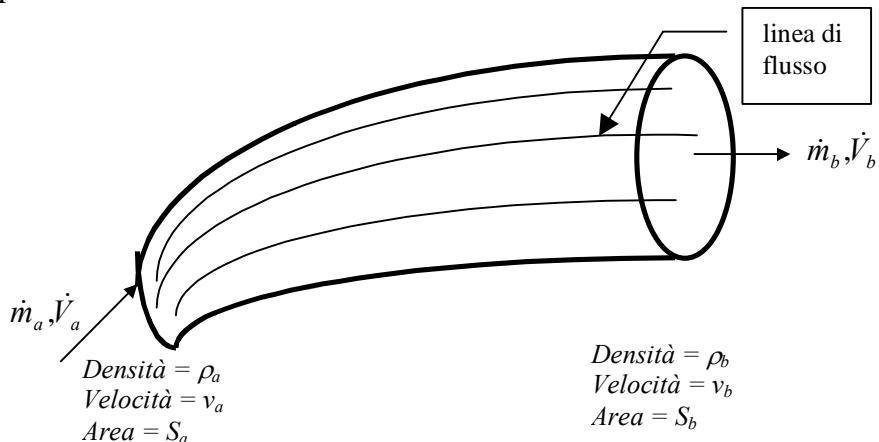


Figura 3.1.1. Bilancio di massa.

Consideriamo il flusso di un fluido in un condotto a sezione variabile, rappresentato in **figura 3.1.1**. Le linee tracciate in figura sono quelle tracciate da una particella immaginaria di fluido nel corso del suo movimento. Sono chiamate *linee di flusso*, e servono a visualizzare il moto del fluido.

Ora scriviamo un bilancio di massa tra le sezioni *a* e *b*. Prima di tutto, partiamo dalla *portata massica* \dot{m} , che è la massa di fluido che attraversa una superficie di area S nell'unità di tempo, cioè $[\dot{m}] = [\text{M}]/[\text{T}]$ e si esprimenel sistema MKS in kg/s . Ora, il rapporto rapporto tra \dot{m} e S è la quantità di moto specifica (cioè quella di un fluido che occupa un volume unitario), e dunque pari al prodotto tra densità del fluido (cioè la massa del fluido di volume unitario) e velocità del fluido:

$$\frac{\dot{m}}{S} \equiv \rho v , \quad (3.1.1)$$

Si noti che, partendo dalla portata massica, che è la grandezza più facilmente misurabile (basta una bilancia e un orologio per misurarla) siamo arrivati prima alla quantità di moto, che

insieme a massa ed energia è una delle grandezze fisiche fondamentali, e poi alla velocità. Anche se l'equazione (3.1.1) può essere considerata come la *definizione* della velocità v del fluido che viene usata nei fenomeni di trasporto, è facile convincersi (vedi problema 3.1) che v coincide con la consueta velocità cinematica.

Dunque l'equazione di continuità, o di conservazione della massa, è semplicemente la seguente:

$$\dot{m} = \rho v S = \text{costante}. \quad (3.1.2)$$

Questa equazione è valida sempre, sia per fluidi comprimibili che incompressibili. Per questi ultimi, ovviamente ρ è costante, e dunque (3.1.2) si semplifica in:

$$\dot{V} = v S = \text{costante}, \quad (3.1.3)$$

dove V è il volume, e \dot{V} è la portata volumetrica, esprimibile, ad esempio, in m^3/s .

In genere, anche quando la densità è costante, la velocità varia da punto a punto, e quindi il bilancio di massa va scritto per una sezione infinitesima del condotto, di area dS , come $d\dot{m} = \rho v dS$. Quindi, integrando, otteniamo:

$$\dot{m} = \rho \int_S v dS = \rho \bar{v} S \quad (3.1.4)$$

dove \bar{v} è la velocità media,

$$\bar{v} = \frac{I}{S} \int_S v dS. \quad (3.1.5)$$

Si osservi che la velocità media è anche uguale alla portata volumetrica che attraversa una sezione di area unitaria, cioè

$$\bar{v} = \dot{V} / S. \quad (3.1.6)$$

Ovviamente, questo è il modo con cui si misura la velocità media del fluido.

Nel caso particolare di sezioni circolari, cioè con $S = \pi R^2$, dove R è il raggio della sezione, l'equazione di continuità per un fluido incompressibile dà:

$$\frac{\bar{v}_a}{\bar{v}_b} = \left(\frac{R_b}{R_a} \right)^2. \quad (3.1.7)$$

Questa analisi si può facilmente generalizzabile al caso non stazionario, ottenendo:

$$\frac{dM}{dt} = (\rho v S)_a - (\rho v S)_b, \quad (3.1.8)$$

dove M è la massa di fluido contenuta nel volume di controllo considerato. Questa equazione esprime il fatto che la massa entrante meno quella uscente deve essere uguale alla massa accumulata nel sistema.

3.2 Bilancio di energia meccanica ed equazione di Bernoulli

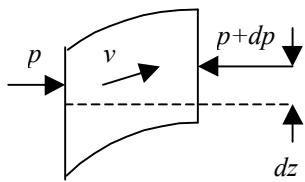


Figura 3.2.1

Consideriamo dapprima il caso di flusso potenziale stazionario di un fluido incomprimibile, e scriviamo un bilancio dell'energia meccanica per l'elemento di volume dV , con massa $dm = \rho dV$, rappresentato in **figura 3.2.1**. Non essendoci dissipazione, l'energia meccanica globale si deve conservare, cioè la variazione dell'energia potenziale e cinetica, $(\rho g z) dV$ e $(\rho v^2/2) dV$, contenute nell'elementino di volume deve essere uguale alla differenza dW tra l'energia entrante e quella uscente,

$$d\left(\rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2\right) dV = dW.$$

dove dW è uguale al lavoro fornito dal fluido all'entrata, meno il lavoro perso dal fluido quando esce. Infatti, la pressione p che agisce all'imbocco dell'elementino di volume compie un lavoro positivo pdV per fare entrare il fluido, e nello stesso modo, la pressione $p+dp$ all'uscita compie un lavoro negativo, $-(p+dp)dV$ per fare uscire lo stesso volume dV di fluido. Dunque, possiamo concludere che $dW = -dpdV$, ottenendo infine:

$$\frac{dp}{\rho} + gdz + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \quad (3.2.1)$$

Questa è l'equazione di Bernoulli. L'integrale di questa equazione è il seguente:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = costante, \quad (3.2.2)$$

che mostra che, in assenza di attrito, la somma dei tre termini dovuti a pressione, quota e velocità è costante.

Rivediamo ora questo bilancio in modo più accurato. L'energia all'interno di un volume elementare fissato è la somma di energia interna, energia cinetica e energia potenziale:

$$\rho e = \frac{\text{energia}}{\text{volume di fluido}} = \rho u + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z, \quad (3.2.3)$$

dove u è l'energia interna specifica, cioè per unità di massa. Dunque la conservazione dell'energia (cioè il primo principio della termodinamica) stabilisce che l'energia accumulata è uguale all'energia entrante meno quella uscente,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = (\rho v e S)_a - (\rho v e S)_b + \dot{W} + \dot{Q}, \quad (3.2.4)$$

dove $\rho v e$ è il flusso d'energia, mentre \dot{W} e \dot{Q} sono il flusso di lavoro e il flusso di calore trasmessi al sistema per unità di tempo, rispettivamente. A sua volta, il lavoro si può considerare come la somma del lavoro fatto dalle forze di pressione, PvS (lo stesso visto sopra) e di quello scambiato al contorno del sistema (il cosiddetto “shaft work”), ad esempio tramite una pompa, che indichiamo con $\dot{W}_p = \dot{m}w_p$. Inoltre, il calore \dot{Q} , trasmesso al sistema da una sorgente più calda, viene indicato per comodità con $\dot{Q} = \dot{m}q$. Dunque otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = -\Delta \left(\frac{1}{2} \rho v^3 S \right) - g\Delta(\dot{m}z) - \Delta(pvS) - \Delta(\dot{m}u) + \dot{m}w_p + \dot{m}q, \quad (3.2.5)$$

Si noti che in genere v non è costante nella sezione S e dunque il primo termine a secondo membro andrebbe scritto come

$$-\Delta \left(\frac{1}{2} \rho \int_S v^3 dS \right) = -\Delta \left(\frac{1}{2} \alpha \rho v^3 S \right) \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{\int v^3 dS}{\bar{v}^3 S}. \quad (3.2.6)$$

Naturalmente α dipende dal profilo di velocità nella sezione. Per flussi turbolenti il profilo è piuttosto piatto e dunque $\alpha \approx 1$; per flussi laminari $\alpha \neq 1$, ma in questi casi il contributo del termine cinetico è spesso trascurabile. Nel seguito, si indicherà con v la velocità media, a meno che non si dica esplicitamente il contrario. Questo punto viene sviluppato oltre nel paragrafo successivo.

A questo punto, si consideri per semplicità il caso *stazionario*, in cui la portata \dot{m} è costante. Dunque, ricordando che $p v S = \dot{m} p / \rho$, otteniamo, dividendo (3.2.5) per \dot{m} :

$$0 = \Delta \left(\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) + (\Delta u - q) - w_p. \quad (3.2.7)$$

Si assuma che le due sezioni siano infinitamente vicine (così che i Δ diventino differenziali). Allora, poiché (primo principio della termodinamica)

$$du = Tds - pd(1/\rho), \quad (3.2.8)$$

dove s è l'entropia specifica per unità di massa, e considerando che (secondo principio della termodinamica)

$$Tds - dq = dh_f \geq 0, \quad (3.2.9)$$

dove h_f è l'energia dissipata per unità di massa e l'uguaglianza si riferisce a processi di equilibrio (cioè reversibili, non dissipativi), otteniamo:

$$d(p/\rho) + du - dq = dp/\rho + dh_f. \quad (3.2.10)$$

Dunque l'equazione di conservazione dell'energia nel caso stazionario riferita a due sezioni infinitamente vicine diventa:

$$\frac{1}{2}dv^2 + gdz + \frac{dp}{\rho} = dw_p - dh_f, \quad (3.2.11)$$

facilmente integrabile in un volume di controllo finito:

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \int_a^b \frac{dp}{\rho} = w_p - h_f. \quad (3.2.12)$$

Nel caso di fluidi incomprimibili l'equazione di Bernoulli si semplifica nel modo seguente:

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} = w_p - h_f. \quad (3.2.13)$$

Infine, in transitorio (cioè quando non si può dividere per \dot{m}), l'equazione di Bernoulli si può generalizzare, ottenendo:

$$\frac{d(\rho e)}{dt} dv = -\frac{1}{2} d(\dot{m}v^2) - gd(\dot{m}z) - \frac{1}{\rho} d(\dot{m}p) + d(\dot{m}w_p) - d(\dot{m}h_f). \quad (3.2.14)$$

Esempio: il tubo di Pitot

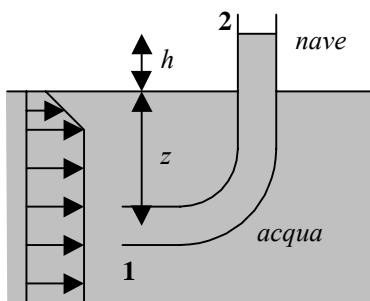


Figura 3.2.1

Il tubo di Pitot, mostrato in **figura 3.2.1**, è usato per determinare la velocità di aerei e navi relativa a quella del fluido (aria o acqua) che li circonda, o la velocità di fluidi che investono un oggetto stazionario. Si supponga che un tubo a J (il tubo di Pitot) sia solidale con un corpo (una nave, supponiamo) in moto con velocità v rispetto ad un fluido con densità ρ . Applicando l'equazione di Bernoulli (3.2.2) otteniamo:

$$\frac{1}{2}v^2 - gz + \frac{p_1}{\rho} = gh + \frac{p_2}{\rho},$$

dove p_2 è la pressione atmosferica, e le quote sono misurate a partire dal pelo libero. Dunque, poichè p_1 è la pressione idrostatica,

$$p_1 = p_2 + \rho g z,$$

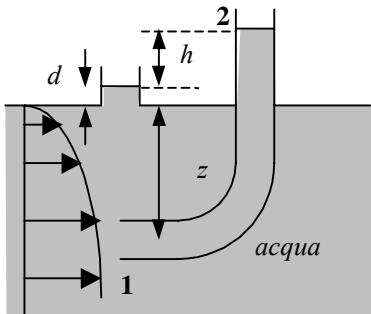


Figura 3.2.2

troviamo la cosiddetta *equazione di Torricelli*,

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.2.15)$$

Il caso del flusso di un fluido in un condotto è leggermente più complesso perché, a differenza del caso precedente, la pressione del fluido nel condotto ci è ignota. In compenso, sappiamo che la velocità del fluido alla parete è nulla. Dunque, apprendo uno sfiatatoio nel condotto (vedi figura

3.2.2), se, come avviene in genere, la pressione nel condotto, p , è maggiore di quella atmosferica, il fluido si posiziona nello sfiatatoio ad una quota d in modo che la sua pressione idrostatica compensi la pressione relativa nel condotto. Infatti, applicando l'equazione di Bernoulli allo sfiatatoio e considerando che la velocità del fluido è nulla, otteniamo: $d = \tilde{p}/\rho g$, dove $\tilde{p} = p - p_a$ è la pressione relativa nel condotto. A questo punto, procedendo come nel caso precedente, è facile mostrare che, posizionando il tubo di Pitot a diverse profondità z e misurando il relativo $h(z)$, possiamo determinare il profilo di velocità

$$v_1(z) = \sqrt{2gh(z)}. \quad (3.2.16)$$

3.3 Bilancio di quantità di moto

Nel bilancio di massa, abbiamo detto che in situazioni stazionarie la massa per unità di tempo (cioè la portata) è costante. Adesso facciamo lo stesso con la quantità di moto, ricordando che la variazione della quantità di moto nel tempo è uguale a una forza. Tuttavia, se è vero che tra le due sezioni a e b di figura 3.1 non si può creare né distruggere alcuna massa, è altresì ovvio che di quantità di moto se ne può creare, o distruggere, sotto forma di forza. Quindi, mentre $\dot{m}_a = \dot{m}_b$, non è vero che $\dot{\mathbf{Q}}_a$ è uguale a $\dot{\mathbf{Q}}_b$, dove \mathbf{Q} è la quantità di moto, e $\dot{\mathbf{Q}}$ la quantità di moto che attraversa la sezione nell'unità di tempo. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, $\dot{\mathbf{Q}}$ è uguale al flusso di quantità di moto moltiplicato per la sezione, cioè $\dot{Q} = SJ_Q = \dot{m}v$, dove $J_Q = \rho v^2$. Dunque, per ogni elemento di volume, come quello di Figura 3.2.1, un bilancio di forze dà come risultato che la somma delle forze esterne è uguale alla differenza tra la quantità di moto che esce dal volume nell'unità di tempo e quella che ne entra,

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{Q}}_b - \dot{\mathbf{Q}}_a. \quad (3.3.1)$$

dove \mathbf{F} sono tutte le forze esercitate sul fluido. Questa equazione è ovviamente vettoriale, dal momento che forze e quantità di moto sono grandezze vettoriali. Ora, le forze esterne indicate nell'equazione (3.3.1) sono di tre tipi: a) la pressione p esercitata da parte del fluido circostante sull'elemento fluido considerato; b) le forze alle pareti, \mathbf{F}'_w , comprendenti sia le forze tangenziali che quelle normali alla parete; esercitate sul fluido sia (direttamente) dalle pareti che (indirettamente) dal fluido all'esterno al tubo; c) altre forze esterne, delle quali consideriamo solo la gravità, \mathbf{F}_g . Perciò otteniamo:

$$\sum \mathbf{F} = p_a \mathbf{S}_a - p_b \mathbf{S}_b + \mathbf{F}'_w + \mathbf{F}_g , \quad (3.3.2)$$

dove \mathbf{S} è un vettore il cui modulo è uguale all'area S e avente la stessa direzione della normale alla sezione, mentre la forza di gravità agisce esclusivamente lungo la direzione verticale. A sua volta, \mathbf{F}'_w si può scrivere come la somma $\mathbf{F}'_w = \mathbf{F}_w + \mathbf{F}_e$ delle forze dovute al fluido all'interno dei tubi, \mathbf{F}_w e di quelle, \mathbf{F}_e , dovute al fluido esterno, che qui riteniamo in quiete e a pressione atmosferica. A questo punto, poiché all'equilibrio la somma delle forze di pressione esercitate su di una superficie chiusa è uguale a zero, il prodotto della pressione atmosferica p_{atm} per le superfici (prese col loro segno) del volume di riferimento deve essere nullo e dunque $\mathbf{F}_e = -p_{atm} (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b)$. Infine otteniamo:

$$\dot{m}_b \mathbf{v}_b - \dot{m}_a \mathbf{v}_a = \sum \mathbf{F} = \tilde{p}_a \mathbf{S}_a - \tilde{p}_b \mathbf{S}_b + \mathbf{F}_w + \mathbf{F}_g ,$$

dove $\tilde{p} = p - p_{atm}$ è la pressione relativa, cioè la differenza tra pressione e pressione atmosferica. Questo risultato si può facilmente generalizzare al caso non stazionario, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = (\rho \mathbf{v}^2 + \tilde{p})_a \mathbf{S}_a - (\rho \mathbf{v}^2 + \tilde{p})_b \mathbf{S}_b + \mathbf{F}_w + \mathbf{F}_g , \quad (3.3.3)$$

dove talvolta è opportuno fare uso della relazione $\rho \mathbf{v}^2 \mathbf{S} = \dot{m} \mathbf{v}$.

Ora vediamo la forma differenziale di tale equazione allo stato stazionario, supponendo, per semplicità, le due sezioni siano infinitamente vicine, così che

$$p_a = p; \quad p_b = p + dp; \quad S_a = S; \quad S_b = S + dS; \quad v_a = v; \quad v_b = v + dv.$$

Analizziamo che fine fanno i diversi termini:

- a) Il termine $\dot{m}_a v_a - \dot{m}_b v_b$ diventa uguale a $\dot{m} dv$.
- b) Il termine $p_a S_a - p_b S_b$ diventa uguale a $-pdS - Sdp$, trascurando il termine $dpdS$.
- c) La forza di gravità è la più semplice, dando un contributo pari a $S\rho g dz$, dove dz è la differenza di quota tra le sezioni b e a .
- d) Le forze che agiscono alla parete sono di due tipi: quelle normali alle pareti, dovute alla pressione, e quelle tangenti alle pareti, dovute agli sforzi di taglio. Le prime danno un contributo pari a $p dS$ (vedi i problemi 3.2 e 3.3), mentre le seconde sono le perdite di carico dovute all'attrito viscoso considerato nel capitolo precedente.

Da questa analisi vediamo che nel caso di flusso potenziale, quando le perdite per attrito sono nulle, otteniamo ancora l'equazione di Bernoulli (3.2.2).¹ Tuttavia, l'importanza di questa derivazione sta nel fatto che, se avessimo considerato la natura vettoriale delle forze, avremmo ottenuto l'equazione seguente: (formalmente, dividiamo tutti i termini nell'equazione per dz , e consideriamo che il gradiente è definito come la derivata, cioè $\nabla = d/dz$):

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} \quad (3.3.4)$$

dove \mathbf{g} è la accelerazione di gravità. Questa è l'equazione di Navier.

3.4 Ricapitolazione dell'equazione di Bernoulli

Riscriviamo per comodità l'equazione di Bernoulli tra due sezioni a e b :

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_a + \frac{v_a^2}{2} = \frac{p_b}{\rho} + gz_b + \frac{v_b^2}{2} \quad (3.4.1)$$

Come abbiamo visto, questa equazione si può generalizzare aggiungendovi dei termini. In particolare, consideriamo qui tre correzioni, dovute a) all'effetto della non uniformità del campo di velocità; b) alla presenza di pareti solide, con relative perdite per attrito viscoso; b) alla presenza di pompe che forniscono energia al fluido. Questi tre effetti introducono nell'equazione di Bernoulli, rispettivamente, una correzione all'espressione dell'energia cinetica, un termine di attrito viscoso ed uno che tien conto della potenza ceduta da pompe o compressori, così che l'equazione di Bernoulli si modifica come:

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_a + \alpha_a \frac{\overline{v}_a^2}{2} + \eta w_p = \frac{p_b}{\rho} + gz_b + \alpha_b \frac{\overline{v}_b^2}{2} + h_f. \quad (3.4.2)$$

Ora analizziamo le tre correzioni.

3.4.1 Effetto della non uniformità del campo di velocità.

Nella maggior parte delle applicazioni, il fluido scorre nelle vicinanze di pareti, con conseguente formazione di strati limite. Per tenerne conto nell'equazione di Bernoulli, sono necessarie due modifiche. La prima, banale e generalmente di scarsa importanza, tien conto che la velocità nella sezione d'urto non è costante, mentre la seconda, assai più importante, è la correzione per gli effetti dell'attrito viscoso.

In questa sottosezione studiamo la prima correzione, dovuta al fatto che nell'equazione di Bernoulli l'energia cinetica per unità di massa è rappresentata come un termine $v^2/2$, dove v è la velocità del fluido, assumendo che il fluido si muova tutto con la

¹ Si noti che in questa derivazione dell'equazione di Bernoulli non abbiamo imposto condizioni sulla natura del fluido, che quindi può essere sia comprimibile che incompressibile.

stessa velocità. Se il profilo di velocità non è uniforme, possiamo pensare di sostituire v con la velocità media, salvo poi introdurre una correzione. Vediamo come fare, ripetendo il percorso visto nella derivazione dell'equazione di conservazione dell'energia.

Consideriamo una sezione dS . La portata massica che la attraversa è $\rho v dS$. Ogni unità di massa di fluido porta con sé una energia cinetica pari a $v^2/2$, così che il flusso di energia cinetica che attraversa l'area dS è $\rho v^3 dS/2$. Dunque l'energia cinetica che fluisce nell'unità di tempo è pari a

$$\dot{E}_c = \frac{I}{2} \rho \int_S v^3 dS = \frac{I}{2} \rho S \langle v^3 \rangle,$$

dove $\langle v^3 \rangle$ è il valore medio del cubo della velocità, il quale infatti compare nell'equazione "esatta" (3.2.5). Ora, il termine che prende il posto di $v^2/2$ nell'equazione di Bernoulli è uguale a \dot{E}_c diviso per la portata massica, cioè l'energia cinetica che fluisce per unità di massa, ottenendo: $\dot{E}_c / \dot{m} = \langle v^3 \rangle / 2\bar{v}$, dove \bar{v} è la velocità media, che talvolta indichiamo con $\langle v \rangle$, o più semplicemente con v . Questo termine si può riscrivere in maniera più conveniente come il prodotto dell'energia cinetica "consueta", $(\bar{v})^2/2$, scritta in funzione della velocità media, per un fattore correttivo α ,

$$\frac{1}{2} \alpha (\bar{v})^2, \quad \text{dove} \quad \alpha = \langle v^3 \rangle / \langle v \rangle^3. \quad (3.4.3)$$

Questo termine è quello che appare nell'equazione (3.4.2). Ovviamente, per poter usare l'espressione (3.4.2), dobbiamo conoscere il profilo di velocità con una certa precisione, cosa non facile. In ogni modo, per flussi turbolenti il profilo di velocità è molto appiattito e quindi α è assai vicino ad 1. Per flussi laminari, invece, il profilo di velocità in un condotto è di tipo parabolico e il fattore correttivo α dipende dalla forma della sezione del tubo, pur essendo in genere compreso tra 0.5 ed 2.0. In particolare, nel caso di flusso in un canale o in un condotto a sezione rettangolare, in cui un lato sia molto maggiore dell'altro, si trova $\alpha = 1.54$, mentre per tubi a sezione circolare $\alpha = 2$ (vedi **Problema 3.4**).

3.4.2 Effetto delle forze di attrito

La seconda correzione, quella dovuta all'effetto delle forze di attrito, è più complessa ed importante. L'attrito si manifesta con la conversione di energia meccanica in calore, quindi in energia interna. Ciò significa che l'energia meccanica non si conserva più, e, invece di essere costante come nell'equazione di Bernoulli "originale", decresce lungo la direzione del moto.

Per fluidi incomprimibili, l'equazione di Bernoulli si modifica con l'introduzione di un termine h_f di attrito [vedi Eq. (3.4.2)]. Questo termine, come gli altri nell'equazione di Bernoulli, è un'energia per unità di massa, e rappresenta l'attrito esercitato su un elemento di fluido di massa unitaria tra le sezioni a e b . A differenza degli altri termini dell'equazione, h_f non si riferisce a proprietà locali, valide nelle sezioni a e b , ma rappresenta delle perdite di energia meccanica *tra* le due sezioni. Inoltre, l'attrito è un fenomeno irreversibile, poiché l'energia meccanica, trasformata in energia interna, non si può ritrasformare completamente in

energia meccanica. Dunque, il segno di h_f è sempre positivo e h_f è uguale a zero solo nel caso di flusso potenziale.

3.4.3 Effetto della presenza di pompe

Si usano delle pompe quando si vuole aumentare l'energia meccanica del fluido. Supponiamo, per esempio, di inserire una pompa tra le sezioni a e b . Ovviamente nel bilancio di energia dovremo inserire anche il lavoro w_p fatto dalla pompa per unità di portata del fluido. In una pompa, inoltre, ci sono sempre delle perdite di energia, per cui soltanto una frazione η dell'energia fornita alla pompa viene poi trasferita al fluido sottoforma di lavoro meccanico, dove η è l'efficienza della pompa. Ovviamente, se invece di una pompa c'è una turbina, che preleva energia dal fluido, w_p è negativo.

3.5 Perdite di carico nella convezione forzata all'interno di tubi

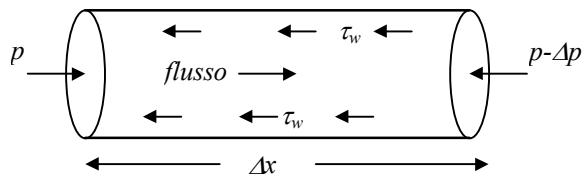


Figura 3.5.1

sezione circolare.

Si consideri un flusso stazionario di un fluido in un tubo orizzontale a sezione circolare costante di raggio R . Se $p_a=p$ e $p_b=p-\Delta p$, dove Δp è la perdita di carico, l'equazione di Bernoulli si riduce a

$$\frac{\Delta p}{\rho} = h_f, \quad (3.5.1)$$

da cui appare che h_f è uguale alle perdite di carico divise per la densità. D'altro lato, un semplice bilancio di forze scritto sull'elemento di volume di lunghezza Δx mostrato in **figura 3.5.1**, conduce al seguente risultato:

$$\sum F = \pi R^2 p - \pi R^2 (p - \Delta p) - (2\pi R \Delta x) \tau_w = 0,$$

dove τ_w è lo sforzo di taglio alla parete. Semplificando questa espressione otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{2\tau_w}{R} = \frac{4\tau_w}{D}, \quad (3.5.2)$$

Le forze di attrito verranno studiate in dettaglio nel capitolo seguente. Qui ci limitiamo a stabilire una relazione tra il fattore h_f e gli sforzi di taglio visti precedentemente nel caso del flusso stazionario di un fluido incomprimibile in un condotto a

dove $D=2R$ è il diametro del tubo. Dunque lo sforzo di taglio alle pareti è noto se si conoscono le perdite di carico, e viceversa. Finalmente, dalle equazioni (3.5.1) e (3.5.2) troviamo la relazione cercata:

$$h_f = \frac{4}{\rho} \frac{\tau_w}{D} \Delta x, \quad (3.5.3)$$

Un altro parametro comunemente usato per descrivere le perdite di carico è il cosiddetto *fattore di attrito f* (detto anche di Fanning), definito come il rapporto tra lo sforzo di taglio alla parete e l'energia cinetica del fluido, cioè

$$f \equiv \frac{\tau_w}{\rho \bar{v}^2 / 2} \quad (3.5.4)$$

Sostituendo l'equazione (3.5.3) nella (3.5.4), otteniamo la relazione seguente tra h_f ed f :

$$h_f = 2f \frac{L}{D} \bar{v}^2. \quad (3.5.5)$$

Come si è visto nel capitolo precedente, quando il moto di un fluido è dominato dalla diffusione viscosa, come ad esempio accade per bassi numeri di Reynolds, lo sforzo di taglio alle pareti è proporzionale al numero di Reynolds (cioè alla velocità media). Ora, il moto di un fluido all'interno di un condotto è dominato dal trasporto viscoso anche per numeri di Reynolds piuttosto alti, purché si resti in regime laminare, poiché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, in condizioni di flusso stazionario lo strato limite occupa l'intera sezione del tubo. Dunque, in questo caso, ci aspettiamo che $\tau_w \propto V$ per $Re < 2100$, così che $f \propto 1/Re$. Più precisamente, come vedremo nel paragrafo seguente, si trova che per tubi circolari,

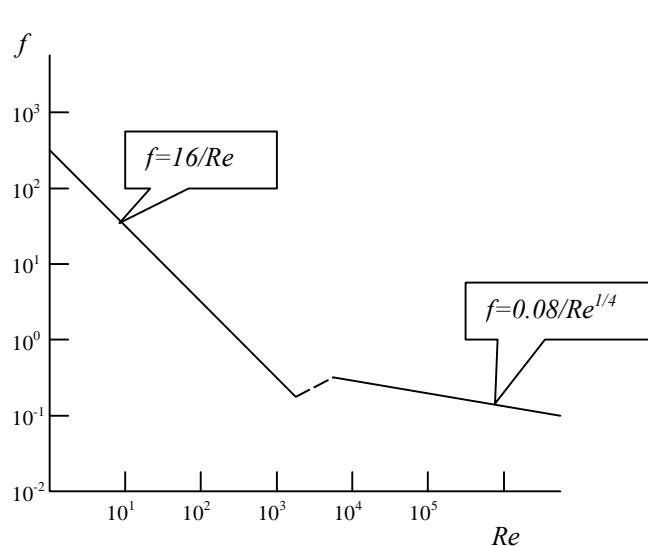


Figura 3.5.2

Per numeri di Reynolds più elevati, il flusso diventa turbolento, e infatti, come previsto, si vede che la dipendenza di f dal numero di Reynolds è meno pronunciata (vedi **figura 3.4.2**, valida per tubi lisci). Infatti, nel capitolo scorso abbiamo visto che nel caso di moto di un fluido attorno ad un corpo in regime turbolento la forza di resistenza diventa proporzionale al quadrato della velocità del fluido e dunque, in questo caso, il fattore di attrito di Fanning sarebbe costante. Nel moto

all'interno di un condotto ciò non accade², e sono state proposte numerose correlazioni, più o meno empiriche, per correlare i numerosissimi dati sperimentali.³ Qui noi considereremo la seguente “classica” correlazione, dovuta a Blasius e valida per tubi lisci:

$$f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad \text{per} \quad Re > 3500. \quad (3.5.7a)$$

Una correlazione più precisa, basata sui diagrammi di Moody (il quale, a sua volta, non ha fatto altro che plottare i risultati degli sperimenti di Nikuradse) è l'equazione di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.28 - 4 \log \left[\frac{\varepsilon}{D} + \frac{4.65}{Re\sqrt{f}} \right], \quad (3.5.7b)$$

in cui ε indica la scabrezza, o rugosità, dei tubi, uguale alla dimensione media delle asperità della parete del condotto. Si noti che, al crescere del numero di Reynolds, a un certo punto f risulta indipendente da Re , finché in regime di completa turbolenza otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.28 + 4 \log(D/\varepsilon). \quad (3.5.7c)$$

La dipendenza della resistenza viscosa dalla rugosità dei tubi in regime turbolento si può spiegare ricordando che, al crescere del numero di Reynolds, diminuisce la dimensione δ dei vortici dissipativi descritti nel capitolo scorso, finché tale dimensione diventa paragonabile alla rugosità, cioè alle dimensioni medie delle irregolarità alla superficie del tubo. A questo punto, questi vortici si possono “infilare” dentro queste specie di pori, aumentando grandemente l'attrito e le perdite di carico. Al contrario, in regime laminare (e stazionario), la sola dimensione caratteristica è il raggio del tubo (infatti, come abbiamo visto, si può pensare che lo strato limite occupi l'intera sezione del tubo), e dunque la rugosità dei tubi conta poco o niente.

La transizione tra regime laminare e regime turbolento è netta soltanto quando conduciamo un esperimento "pulito", cioè utilizzando tubi diritti, lisci e senza vibrazioni, mentre nelle applicazioni pratiche esiste una cosiddetta regione di transizione che consente di "raccordare" la parte laminare del grafico di f con quella turbolenta (vedi la linea tratteggiata di **figura 3.5.2**).

² Una spiegazione qualitativa di questo fatto è la seguente. In un tubo non siamo mai troppo distanti dalle pareti, e dunque non le possiamo mai ignorare. Ciò significa che i vortici di instabilità si muovono dalle pareti, dove si formano, verso l'interno del tubo, finché il campo di moto sarà dappertutto turbolento. Al contrario, nel caso di un corpo lambito da un fluido in movimento, il fluido lontano dal corpo si muove di moto potenziale, come se il corpo non esistesse, e dunque in tale regione dello spazio sarà il trasporto di energia cinetica a prevalere, producendo la legge quadratica vista nel capitolo 2.

³ Le correlazioni più interessanti da un punto di vista teorico sono quella di Blasius e quella di van Karman (vedi paragrafo 17.5). In entrambi i casi, si parte da una distribuzione delle velocità che si suppone nota, presumibilmente misurata sperimentalmente. Per esempio, Blasius assume una distribuzione di velocità che varia con la distanza dal centro del tubo elevata alla potenza $1/7$, mentre von Karman considera il cosiddetto profilo universale di velocità in regime turbolento. Ovviamente, una volta noto il profilo di velocità alla parete, si può determinare lo sforzo di taglio, e da questo il valore del fattore d'attrito. Altre correlazioni, come quella proposta qui, tentano semplicemente di correlare i dati della caduta di pressione in funzione del numero di Reynolds.

3.6 Le perdite di carico localizzate

Il concetto di perdite di carico per attrito resta valido anche quando la variazione di pressione avviene in una regione (generalmente piccola) in cui non si conosce esattamente il campo di moto. Per esempio, quando un fluido attraversa una valvola, o più semplicemente il condotto varia improvvisamente la sua sezione, possiamo descrivere tali perdite di carico (dette perdite di carico localizzate) attraverso un coefficiente k , detto *fattore di attrito localizzato*, da misurare caso per caso, definito come

$$h_f = k \frac{\bar{v}^2}{2}, \quad (3.6.1)$$

dove \bar{v} è la velocità media nella sezione a valle. Possiamo pensare a k come ad un coefficiente di ignoranza, un pò come il coefficiente di scambio termico (o di Newton) nel trasporto di calore, in cui l'effetto della convezione vicino alla parete viene assorbito in un unico coefficiente, che va misurato sperimentalmente. Anche nel nostro caso, non si sa bene che cosa succede al fluido quando passa per una valvola: ci saranno vortici e dissipazioni di ogni tipo, e sarebbe comunque troppo complesso cercare di studiare a fondo il campo di moto. Così, preferiamo usare l'equazione (3.6.1) e misurare il coefficiente k sperimentalmente. Nella

tabella 3.6.1 riportiamo alcuni valori del coefficiente k .

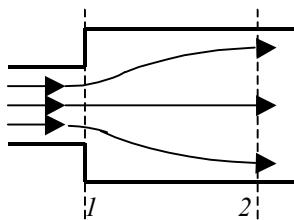
	k
Ingresso smussato in un tubo	0.05
Restringimento	$0.45(1-\beta)$
Allargamento	$[(1/\beta)-1]^2$
Orifizio	$2.7(1-\beta)(1-\beta^2)/\beta^2$
Gomito a 90° smussato	0.4 - 0.9
Gomito a 90° aguzzo	1.3 - 1.9
Gomito a 45°	0.3 - 0.4

Tabella 3.6.1 - Valori di k ; $\beta = (\text{area sez. piccola}) / (\text{area sez. grande})$

3.6.1 Esempio di perdite di carico localizzate

Un esempio di perdite di carico localizzate è il caso del flusso di un fluido incomprimibile in un tubo con un allargamento improvviso (vedi **figura 3.6.1**). Consideriamo il volume di tubo compreso tra la sezione 1, situata appena prima dell'allargamento, e la sezione 2, situata a valle, dove il flusso è ritornato longitudinale e pienamente sviluppato.

Il bilancio di massa è banale:



$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{1}{\beta} v_2, \quad (3.6.2)$$

dove, come visto precedentemente, si definisce

Figura 3.5.1

$$\beta = \frac{\text{area della sezione più piccola}}{\text{area della sezione più grande}} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (3.6.3)$$

L'equazione di Bernoulli dà il risultato seguente:

$$\frac{1}{2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = h_f. \quad (3.6.4)$$

A questo punto, per determinare h_f e poi k definito nell'equazione (3.6.1), resta da determinare $(p_1 - p_2)$. Per far ciò, si consideri l'equazione della quantità di moto nella direzione assiale:

$$\dot{m}v_1 - \dot{m}v_2 + \tilde{p}_1 S_1 - \tilde{p}_2 S_2 = F, \quad (3.6.5)$$

dove F è la somma delle forze di attrito, che supponiamo trascurabili poichè il tratto di tubo considerato è molto corto, più le forze agenti sull'anello di area $(S_2 - S_1)$ in corrispondenza dell'allargamento. Su questo anello agisce all'interno una pressione p_1 e all'esterno la pressione atmosferica; dunque la forza complessiva è $F = -\tilde{p}_1(S_2 - S_1)$, dove il segno meno indica che la forza agisce in direzione contraria al flusso. Dunque dall'equazione della quantità di moto otteniamo:

$$(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1)S_2 = (p_2 - p_1)S_2 = \dot{m}(\nu_1 - \nu_2) = \rho\nu_2 S_2 (\nu_1 - \nu_2). \quad (3.6.6)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione di Bernoulli si può concludere:

$$h_f = \frac{1}{2}\nu_1^2 - \frac{1}{2}\nu_2^2 - \nu_1\nu_2 + \nu_2^2 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)^2. \quad (3.6.7)$$

Dunque, definendo il fattore di attrito k in funzione della velocità a valle ν_2 ,

$$h_f = k \frac{1}{2}\nu_2^2, \quad (3.6.8)$$

otteniamo:

$$k = \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)^2, \quad (3.6.9)$$

in accordo con il valore di **tavola 3.6.1**.

3.7 Flusso attorno ad un oggetto sommerso

Consideriamo il flusso di un fluido incomprimibile attorno ad un oggetto sommerso. In genere, il fluido esercita sul corpo una forza di attrito F_f che scriviamo come

$$F_f = S \left(\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \right) f, \quad (3.7.1)$$

dove S è un'area caratteristica e f è il fattore di attrito,⁴ che in genere dipende dal numero di Reynolds e dalla forma dell'oggetto. La (3.7.1) si può considerare come la definizione più generale del fattore di attrito f ; infatti, nel caso di flusso in un condotto, l'area caratteristica S è l'area bagnata, $F_f/S = \tau_w$ è lo sforzo di taglio alla parete e quindi la (3.7.1) si riduce alla (3.5.4). Nel caso di flusso attorno ad un corpo sommerso, invece, si preferisce prendere per S l'area ottenuta proiettando il volume dell'oggetto su un piano ortogonale alla direzione del flusso, mentre \bar{v} è la velocità (costante) del fluido imperturbato, cioè lontano dall'oggetto. Naturalmente, se è il corpo a muoversi con velocità v costante in un fluido altrimenti in quiete, vale la stessa relazione. Ad esempio, su una sferetta solida di raggio R e densità ρ_s che sedimenta in un fluido in quiete di densità ρ , agiscono due forze: quella di attrito e quella di gravità. La differenza tra queste due forze determina l'inerzia del corpo e dunque la sua accelerazione. A regime, la sferetta raggiunge una velocità massima, detta *velocità terminale* v_∞ , in corrispondenza della quale la forza di attrito bilancia quella di gravità e otteniamo:

$$F_f - F_g = \pi R^2 \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \right) f - \frac{4}{3} \pi R^3 g \Delta \rho = 0, \quad (3.7.2)$$

dove $\Delta \rho = \rho_s - \rho$. Dunque, misurando la velocità terminale, possiamo determinare il fattore di attrito,

$$f = \frac{8gR}{3v_\infty^2} \frac{\Delta \rho}{\rho}. \quad (3.7.3)$$

La forza di attrito, in genere, *non* ha la stessa direzione del flusso; infatti, si può scomporre in due forze, di cui una, la resistenza (*drag*) F_D , ha la direzione del flusso, mentre l'altra, la portanza (*lift*) F_L , ha direzione perpendicolare al flusso. Nel caso di una sfera, la portanza è zero, per simmetria, mentre la resistenza dipende fortemente, come è naturale, dal numero di Reynolds.

Nel caso di piccoli numeri di Reynolds il problema del moto di un fluido attorno ad una sfera fu risolto analiticamente da Stokes, ottenendo il risultato seguente:

$$F_D = 6\pi\mu R v_\infty, \quad (3.7.4)$$

⁴ In molti testi, il fattore di attrito per oggetti sommersi si indica con C_D .

dove μ è la viscosità del fluido. Dunque, utilizzando al definizione (3.7.1) con $S = \pi R^2$, otteniamo:

$$f = \frac{24}{Re}; \quad Re = \frac{\nu_\infty D}{\nu} < 0.1. \quad (3.7.5)$$

Per valori più grandi di Re , il problema diventa molto complesso. Dai valori sperimentali di **figura 3.7.1**, ricaviamo le seguenti correlazioni:

$$f = \frac{18.5}{Re^{3/5}}; \quad 2 < Re < 5 \times 10^2; \quad (3.7.6)$$

$$f = 0.5; \quad 5 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5. \quad (3.7.7)$$

Si noti che per valori intermedi di Re si forma uno strato limite laminare che, se rivestisse tutta la superficie della sfera, causerebbe una dipendenza di F_D da $\nu_\infty^{3/2}$ [vedi (2.3.4)] e di f da $Re^{-1/2}$. In realtà, la resistenza e il fattore di attrito risultano diminuiti dal fatto che lo strato limite si distacca nella parte posteriore della sfera. Per quanto riguarda la (3.7.7), invece, sappiamo che per flussi turbolenti la forza di resistenza è dovuta al flusso di quantità di moto convettivo ρv_∞^2 e dunque è del tutto prevedibile che il fattore di attrito sia costante. Per valori di Reynolds ancora maggiori, tuttavia, entrano in gioco altri effetti che rendono f non costante con Re e che esulano dagli scopi di questo testo.

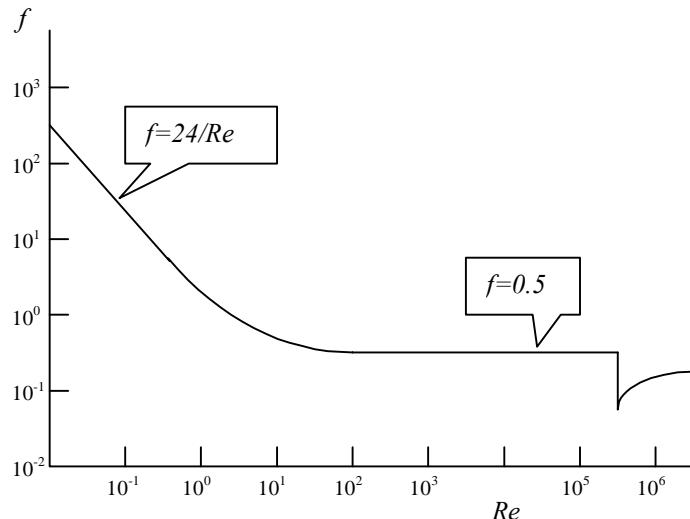


Figura 3.7.1

3.8 Esercizi

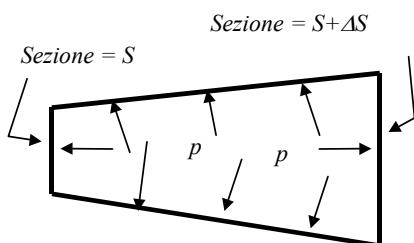


Figura 3.1P

3.1 Calcolare il flusso convettivo di energia cinetica.

3.2 Nella derivazione dell'equazione di Bernoulli abbiamo tenuto conto del fatto che la somma delle forze normali di pressione che agiscono sulla parete di un tubo è uguale a $pΔS$, dove p è la pressione (media) del fluido nel tubo, mentre $ΔS$ è la differenza tra le sezioni di uscita e di entrata. Dimostrate

questa uguaglianza nel caso statico di **figura 3.1P**, considerando che la forza totale che agisce sulle pareti del contenitore deve essere zero.

- 3.3** Questo problema è la continuazione del precedente. Nel caso dinamico, è sufficiente sostituire nella **figura 3.1P** $p + \Delta p$ a p in corrispondenza della sezione $S + \Delta S$, mentre la pressione interna sarà, in media, pari a $p + \Delta p/2$. Mostrare che la correzione introdotta in questo caso rispetto al caso statico considerato nel problema precedente è trascurabile.

- 3.4** Si consideri un fluido in moto laminare attraverso un canale di ampiezza L , con velocità $v(y) = V_{max}(1 - y^2/L^2)$, dove $0 < y < L$ (vedi **figura 3.2P**).

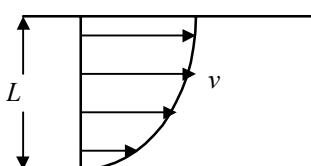


Figura 3.2P

Calcolare il fattore correttivo α definito nell'equazione (3.4.3). Si ripeta il calcolo per un condotto a sezione circolare di raggio R , in cui $v(r) = V_{max}(1 - r^2/R^2)$.

- 3.5** Si consideri un flusso stazionario d'aria in un tubo rettilineo di 10 cm di diametro interno. Il flusso è isotermo a $300K$, con pressione all'ingresso di $7 \times 10^5\text{ Pa}$ e pressione all'uscita pari alla pressione atmosferica; la velocità in uscita è di 30 m/s . Si calcolino le forze d'attrito esercitate dall'aria sulla superficie interna del tubo.

- 3.6** Si consideri un tubo ad U orizzontale con 10 cm di diametro interno, in cui scorre dell'acqua con velocità media di 20 m/s , pressione *relativa* all'ingresso e all'uscita di 2 bar e 1.6 bar , rispettivamente. Si calcoli la forza di attrito esercitata dall'acqua sul tubo.

- 3.7** Si calcoli la velocità di uscita di un fluido ideale (inviscidio e incomprimibile) da un serbatoio in funzione del battente idrostatico. Si discutano le condizioni di applicabilità ad un caso reale.

- 3.8** Si calcoli il tempo necessario per svuotare un serbatoio in cui inizialmente sia presente una quantità nota di un fluido ideale (inviscidio e incomprimibile).

- 3.9** Si calcolino le perdite per attrito per unità di lunghezza di un tubo liscio di 5 cm di diametro in cui scorra dell'olio con densità 0.98 g/cm^3 e viscosità 10 cP , con flusso volumetrico di $0.01\text{ m}^3/\text{s}$.

- 3.10** Le perdite di carico per unità di lunghezza in un tubo liscio di 5 cm di diametro in cui scorra dell'olio con densità 0.98 g/cm^3 e viscosità 10 cP sono di 0.19 atm/m . Si calcoli il flusso.

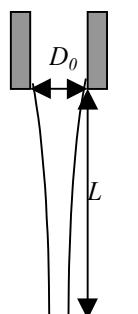


Figura 3.3P

- 3.11** Si vogliono convogliare $0.01\text{ m}^3/\text{s}$ di un olio con densità 1 g/cm^3 e viscosità 10 cP in un tubo orizzontale lungo 5 km . Assumendo una potenza massima di pompaggio di 10 kW , qual'è il diametro minimo del tubo?

- 3.12** Si determini come varia il diametro di un getto d'acqua in regime turbolento uscente da un rubinetto in funzione della distanza L (vedi **figura 3.3P**).

- 3.13** Una pompa di 150 kW ed efficienza del 70% pompa dell'acqua tra due serbatoi posti a 39 m di altezza l'uno rispetto all'altro (vedi **figura 3.4P**, dove L è la lunghezza

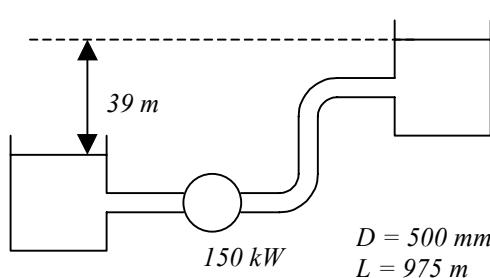


Figura 3.4P

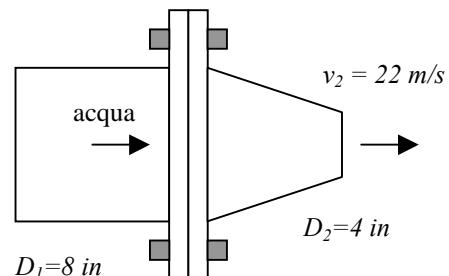


Figura 3.5P

complessiva dei tubi). Si calcoli la portata volumetrica, evidenziando il contributo di energia potenziale, cinetica e attrito alla potenza della pompa.

- 3.14** Alla fine di un tubo, del diametro interno di 8 in , si consideri una flangia di connessione ad un ugello, come in **figura 3.5P**, che riduce il diametro del tubo alla metà. Si calcoli la forza esercitata sulla flangia, trascurando gli attriti.

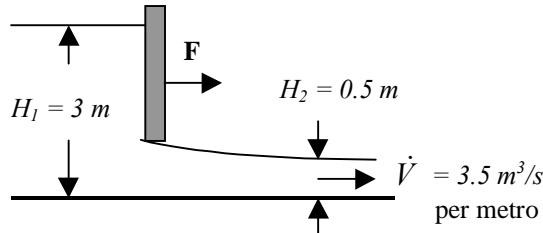


Figura 3.6P

- 3.15** a) Si calcoli la forza che una portata volumetrica di $3.5 \text{ m}^3/\text{s}$ di acqua (per metro di ampiezza) esercita sul "cancelletto" di **figura 3.6P**. b) si calcoli il momento delle forze che si esercita sul cancelletto. c) Si determini l'altezza H_2 del cancelletto in corrispondenza della quale la forza F cambia segno.

- 3.16** Un getto d'acqua in regime laminare esce orizzontalmente da un capillare di diametro D_0 . Si osserva che il jet forma un filamento del diametro $D_1 = 0.87 D_0$. Perchè?

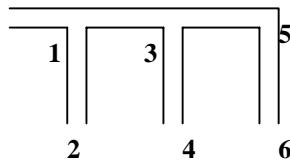


Figura 3.7P

- 3.17** Un fluido molto viscoso viene pompato nel dispositivo rappresentato in **figura 3.7P**, in cui tutti i tratti di tubo (1-2, 2-3, 3-4, 2-4 e 3-5) hanno lunghezza L e sezione circolare; tutti i tubi hanno un diametro pari a D , con l'eccezione dei tratti 1-2 e 3-4, con diametri D_1 e D_2 , rispettivamente. Le pressioni p_2 , p_4 e p_6 sono uguali alla pressione atmosferica. Si determinino i rapporti D_1/D e D_2/D in modo che le portate volumetriche nei tratti 1-2, 3-4 e 5-6 siano uguali tra loro.

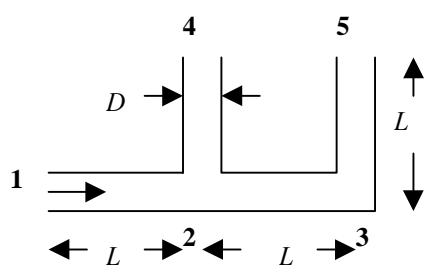


Figura 3.8P

- 3.18** Un fluido viene pompato nel dispositivo rappresentato in **figura 3.8P**, in cui tutti i tratti di tubo (1-2, 2-3, 2-4 e 3-5) hanno sezione circolare di diametro D e lunghezza L . Si noti che i tratti

1-2 e 2-3 sono orizzontali mentre quelli 2-4 e 3-5 sono verticali. Le pressioni p_4 e p_5 sono uguali alla pressione atmosferica. Supponendo che il fluido abbia viscosità $\mu = 10$ Poise e densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, con $L = 1 \text{ m}$ e $D = 1 \text{ cm}$, e che la portata volumetrica in ingresso (cioè nel tratto 1-2) sia uguale a $10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, si determini:

- a) il rapporto tra le portate volumetriche nei tratti 3-5 e 2-4.
- b) la pressione di ingresso p_1 .
- c) Ora, supponendo di usare lo stesso dispositivo (cioè stessi L e D) per pompare acqua a 20°C con la stessa portata volumetrica di $1 \text{ m}^3/\text{s}$, scrivere le equazioni che ci consentono di determinare la pressione in ingresso, evidenziando le differenze rispetto al caso precedente.

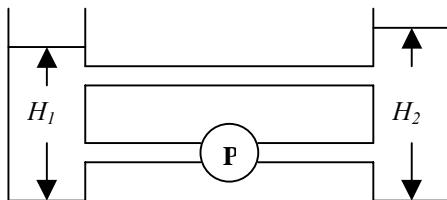


Figura 3.9P

3.19 Si vuole far circolare $1 \text{ m}^3/\text{s}$ di acqua a 20°C tra i serbatoi aperti 1 e 2 (vedi **figura 3.9P**), pompando il liquido tra il serbatoio 1 e quello 2 e usando due tubi identici lunghi $L = 10 \text{ m}$ e con diametro $D = 4 \text{ cm}$. Assumendo che il sistema sia a regime, si determini:

- a) la differenza $\Delta H = H_2 - H_1$ tra i livelli dell'acqua nei due serbatoi;
- b) potenza della pompa.

3.20 Si consideri la fuoriuscita di un liquido da un serbatoio di sezione S_1 attraverso un tubo di sezione $S_2 = \beta S_1$, supponendo di conoscere il battente idrostatico H . Si determini la velocità di uscita v_2 del liquido, supponendo che le perdite concentrate all'uscita siano uguali a $k v_2^2 / 2$, dove $k=0.45(1-\beta)$. Si confronti questo risultato con la legge di Torricelli.

3.21 Si consideri il sistema della **figura 3.10P**, in cui l'acqua di un serbatoio viene convogliata in un condotto e passa all'interno di una casa, da cui poi fuoriesce. I tubi hanno tutti lo stesso diametro interno di 12 cm e lunghezza totale 91.5 m . Sapendo che il flusso volumetrico all'uscita è di $0.11 \text{ m}^3/\text{s}$, si determini se c'è una pompa all'interno della casa.

3.22 Si consideri il sistema della **figura 3.11P**, in cui l'acqua di un serbatoio (di altezza $H_R = 10 \text{ cm}$ e diametro $D_R = 50 \text{ cm}$) viene convogliata, tramite un tubo a gomito, in un capillare, da cui fuoriesce con velocità $v_3 = 30 \text{ m/s}$. I 3 tubi hanno diametri $D_1 = D_2 = 1 \text{ cm}$, $D_3 = 3 \text{ mm}$ e lunghezze $L_1 = L_2 = 0.2 \text{ m}$, $L_3 = 6 \text{ cm}$. Si calcoli la pressione Δp che deve essere esercitata sull'acqua del serbatoio. Si tratta di una pressione assoluta o relativa e, se relativa, relativa a che cosa? Dati: le perdite di

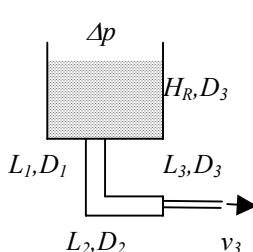


Figura 3.11P

carico localizzate si calcolano assumendo: $h_f = k v^2/2$, dove v è la velocità a valle, mentre a) nel gomito $k_g=0.16$; b) nelle contrazioni $k_c = 0.45 (1-\beta)$, dove $\beta=(\text{area piccola}) / (\text{area grande})$.

4. Il campo di velocità e pressione

4.1 Flusso di fluidi newtoniani all'interno di un condotto

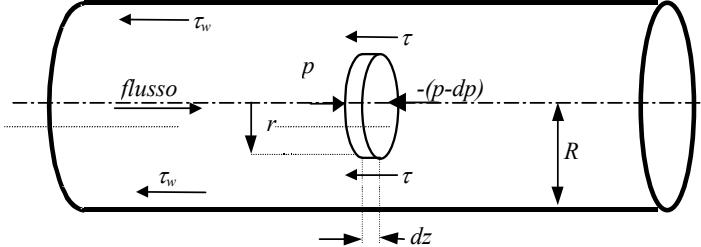


Figura 4.1.1

Si consideri un elemento fluido in un condotto circolare, come mostrato in **figura 4.1.1**, in cui si ritiene che la pressione diminuisca lungo una linea di flusso, in modo che, come nel paragrafo precedente, dp sia positivo (si confrontino **figura 4.1.1** con **figura 3.4.1**). Se a questo elemento applichiamo lo stesso bilancio di forze visto nel paragrafo 3.4, troviamo lo stesso risultato, e cioè:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{2\tau}{r} \quad (4.1.1)$$

In questa equazione, il termine a primo membro è una funzione della sola variabile z , mentre quello a secondo membro dipende soltanto da r ; dunque, i due termini devono essere uguali ad una costante. Da un punto di vista fisico, infatti, poiché il flusso è stazionario e le sezioni sono tutte equivalenti tra loro, la caduta di pressione per unità di lunghezza deve essere costante, così che $dp/dz = \Delta p/L$. Dunque, dall'equazione (4.1.1) vediamo che $\tau/r = \tau_w/R = \Delta p/2L$, cioè:

$$\tau = \frac{\tau_w}{R} r = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} r, \quad (4.1.2)$$

che dimostra che lo sforzo di taglio varia linearmente con la distanza dal centro del tubo: è uguale a 0 per $r=0$, mentre è uguale a τ_w alla parete, per $r=R$ (si veda la parte sinistra della **figura 4.1.1**).

Adesso vediamo di determinare il profilo di velocità. Poiché sappiamo che per fluidi newtoniani vale la legge costitutiva

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}, \quad (4.1.3)$$

il profilo di velocità si ottiene integrando l'espressione dello sforzo di taglio: quando τ è costante, v è lineare; quando, come in questo caso, τ è lineare, v è quadratico. Infatti, sostituendo (4.1.3) nella (4.1.2) e integrando tra $r=R$, dove la velocità è uguale a zero, $v=0$, e una distanza generica r , dove la velocità è uguale a v (da determinarsi), otteniamo:

$$\int_0^v dv = \frac{\tau_w}{\mu R} \int_R^r r dr.$$

Si noti qui che lo sforzo di taglio ha direzione opposta a quella del flusso, e dunque $\tau_w < 0$. Integrando questa espressione otteniamo il cosiddetto profilo di velocità di Poiseuille:

$$v = \frac{|\tau_w|}{2\mu R} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (4.1.4)$$

in cui abbiamo considerato che lo sforzo di taglio alle pareti è proporzionale alle perdite di carico per unità di lunghezza. Questa equazione mostra che il profilo di velocità di un fluido in flusso laminare all'interno di un condotto è parabolico, con una velocità massima v_{max} , che si raggiunge al centro del condotto (per $r=0$), uguale a

$$v_{max} = \frac{|\tau_w| R}{2\mu} = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{4\mu}. \quad (4.1.5)$$

Quindi il profilo di velocità si può scrivere in modo conveniente come:

$$\frac{v}{v_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (4.1.6)$$

Come per tutti i profili parabolici in geometria cilindrica, anche qui il valore medio è pari alla metà del valore massimo, cioè

$$\bar{v} = \frac{I}{2} v_{max} = \frac{\tau_w R}{4\mu} = \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{8\mu}. \quad (4.1.7)$$

Dunque, conoscendo la portata volumetrica $\dot{V} = \bar{v}S$, dove $S = \pi R^2$ è l'area della sezione, da questa espressione possiamo ricavare il valore degli sforzi di taglio alla parete, da cui, sostituendo l'equazione (3.4.7), risaliamo infine al fattore di attrito,

$$f = \frac{16\mu}{D\bar{v}\rho} = \frac{16}{Re}. \quad (4.1.8)$$

Questa è identica all'equazione vista nel paragrafo precedente, data allora senza una adeguata giustificazione. Da qui ovviamente si possono determinare le perdite di carico tra due sezioni a distanza L ,

$$\Delta p = \frac{32L}{D^2} \mu \bar{v}. \quad (4.1.9)$$

Si noti che la perdita di carico per unità di lunghezza è proporzionale alla velocità media (e quindi al numero di Reynolds e alla portata), e alla viscosità del fluido, mentre è inversamente proporzionale al quadrato del diametro, cioè all'area della sezione del tubo. Queste sono

caratteristiche fondamentali del flusso laminare di un fluido newtoniano in un condotto e non dipendono dalla forma della sezione considerata. Dunque, se la sezione non è circolare e in mancanza di dati più precisi, si preferisce continuare a ritenere valida la (4.1.9), in cui D è uguale al cosiddetto diametro idraulico $D_h = 4S/P_w$, dove S è la sezione del condotto e P_w il suo perimetro (detto perimetro bagnato).

Infine, talvolta è più conveniente esprimere la portata volumetrica, $\dot{V} = \pi R^2 \bar{v}$, in funzione delle perdite di carico per unità di lunghezza, $\Delta p/L$, usando l'inverso dell'equazione (4.1.9),

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (4.1.10)$$

Pressione termodinamica, idrostatica e pressione dinamica.

Si supponga che il tubo sia verticale. In questo caso, il bilancio di forze iniziale deve comprendere la forza peso, e all'equazione (4.1.1) si deve aggiungere il termine ρg . In altri termini, possiamo riscrivere le stesse equazioni sostituendo alla pressione termodinamica $-p$ la cosiddetta *pressione dinamica* $-P = -p - \rho g z$. Si noti il segno di p e P , dovuti alla convenzione indicata in **Figura 4.1.1**.

Flusso tra due lame.

Si consideri il flusso di un fluido compreso tra due cilindri concentrici, uno dei quali ruoti con velocità angolare costante. In questo caso, è facile convincersi che non ci può essere alcuna caduta di pressione (perché?). Nel caso in cui la distanza tra i due cilindri sia molto minore dei loro raggi (e dunque la geometria del problema diventi piana), da un facile bilancio di forze concludiamo che lo sforzo di taglio è costante e dunque il profilo di velocità è lineare, con $v = 0$ su una parete e $v = V$ assegnata sull'altra parete (si veda l'esercizio 4.5 e il paragrafo 6.1 per la soluzione completa del problema).

4.2 Reologia dei fluidi

I fluidi con comportamenti reologici più complessi che la semplice relazione lineare tra sforzi e velocità di deformazione, sono detti *fluidi non newtoniani*. Nella **figura 4.2.1** sono rappresentati i comportamenti reologici dei tre tipi di fluidi non newtoniani più comuni: i *fluidi di Bingham*, i *fluidi pseudoplastici* e i *fluidi dilatanti*.

I fluidi di Bingham sono dei liquidi che restano in quiete, cioè si comportano come dei solidi, finché non si raggiunge un certo valore dello sforzo di taglio τ_0 , dopo di che si comportano come dei fluidi newtoniani. Esempi classici di fluidi di Bingham sono molte suspensioni fini, paste e fanghi. L'equazione costitutiva dello sforzo di taglio per fluidi di questo tipo è la seguente:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_o + \mu' \frac{dv}{dz}, \quad se \quad \tau > \tau_o; \\ \frac{dv}{dz} &= 0 \quad se \quad \tau < \tau_o\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

dove μ' è una costante, con le dimensioni di una viscosità.

I fluidi pseudoplastici sono tali che la *viscosità efficace* (cioè il coefficiente angolare della curva di **figura 4.2.1**) diminuisce all'aumentare del gradiente di velocità. Come i fluidi di Bingham, anche i fluidi pseudoplastici sono fluidi complessi. Il caso forse più semplice è

quello di sospensioni di particelle con dimensioni da 0.1 a 100 micron, con forti forze di attrazione, immerse in fluidi newtoniani. Ora, quando la sospensione è in quiete (oppure per valori bassi del gradiente di velocità), le particelle sospese tenderanno ad agglomerarsi, formando dei grumi (*cluster*), che si opporranno fortemente allo scorrimento, e quindi la viscosità sarà elevata. Tuttavia, al crescere del gradiente di velocità, i grumi cominceranno a ridursi di dimensione e a scomparire, così che l'effetto delle forze attrattive interparticellari diminuirà,

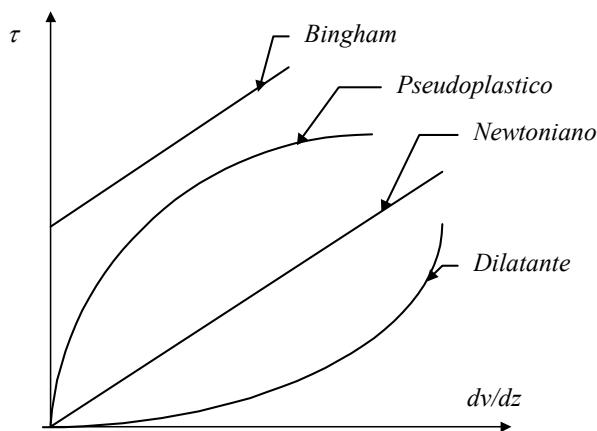


Figura 4.2.1. Comportamento reologico di fluidi newtoniani e non newtoniani.

riducendo il valore della viscosità.

I fluidi dilatanti si comportano in modo opposto di quelli pseudoplastici, cioè la viscosità efficace aumenta all'aumentare del gradiente di velocità. Procedendo come per i fluidi pseudoplastici, è facile vedere che sospensioni di particelle che si respingono mutuamente sono dei fluidi dilatanti.

I fluidi pseudoplastici e dilatanti sono spesso descritti come *shear thinning* e *shear thickening*. In genere, questi fluidi sono ben descritti da una relazione di questo tipo:

$$\tau = K \left(\frac{dv}{dz} \right)^n, \tag{4.2.2}$$

dove K ed n sono costanti caratteristiche del fluido. In particolare, $n < 1$ per fluidi pseudoplastici, $n > 1$ per fluidi dilatanti, e $n = 1$ per fluidi newtoniani¹. Infine, è opportuno sottolineare che la costante K nell'equazione (4.2.2) non è una viscosità.

¹ L'esponente nella (4.2.2) viene generalmente indicato con n , anche se non si tratta di un numero intero.

4.3 Flusso di fluidi non newtoniani all'interno di un condotto

L'analisi del campo di moto per fluidi non newtoniani è assai simile a quella fatta nel paragrafo precedente per fluidi newtoniani. Infatti, la prima parte della nostra analisi è esattamente la stessa, fino all'equazione (4.1.2) che mostra l'andamento lineare dello sforzo di taglio. A questo punto, se lo sforzo di taglio è proporzionale alla derivata prima della velocità, come nei fluidi newtoniani, la velocità sarà quadratica. Se tuttavia la legge costitutiva dello sforzo di taglio è più complessa, anche il risultato sarà diverso.

Consideriamo ad esempio un fluido che ubbidisce all'equazione (4.2.2). Integrando l'equazione del moto come nel capitolo precedente troviamo il seguente profilo di velocità:

$$v = \left(\frac{\tau_w}{RK} \right)^{1/n} \frac{R^{1+1/n} - r^{1+1/n}}{1 + 1/n}, \quad (4.3.1)$$

e le seguenti perdite di carico,

$$\frac{\Delta p}{L} = 2K \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \frac{\bar{v}^n}{R^{n+1}}. \quad (4.3.2)$$

Ovviamente, per $n=1$ e $K=\mu$, ritroviamo i risultati per fluidi newtoniani visti nel paragrafo precedente.

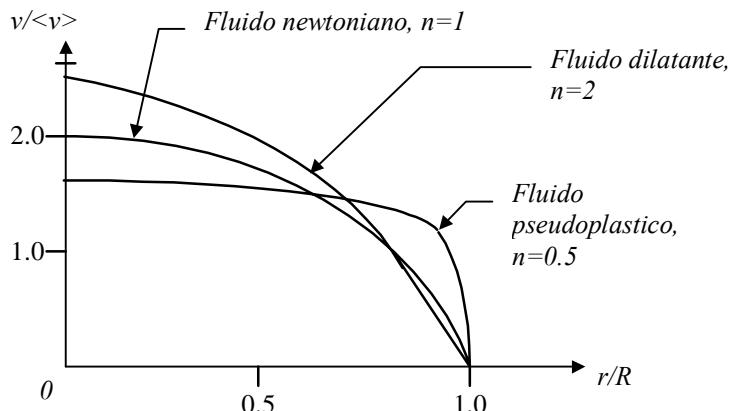


Figura 4.3.1. Profili di velocità in flusso laminare per fluidi newtoniani e non newtoniani.

quello a pistone, perché si massimizza la portata fissando la velocità massima. Dunque i fluidi pseudoplastici sono i più facili da far scorrere in un tubo. Tale risultato è confermato dalla formula (4.3.2), che mostra come le perdite di carico, a parità di portata, crescano al crescere di n , e dunque sono più piccole in un fluido pseudoplastico e più elevate in un fluido dilatante. In pratica, le perdite di carico dipendono dallo sforzo di taglio alle pareti, il quale, a sua volta, dipende dal gradiente di velocità attraverso l'equazione costitutiva. Dunque, un fluido pseudoplastico si può "permettere" di avere un gradiente di velocità alla parete più elevato, perché lo sforzo di taglio che ne deriva è comunque limitato dall'esponente $n < 1$ che compare nella relazione costitutiva.

I diversi profili di velocità sono illustrati in **figura 4.3.1**. Si vede che, a parità di portata, i fluidi dilatanti hanno un profilo più "allungato", con gradienti di velocità alla parete più piccoli di quelli dei fluidi newtoniani, mentre i fluidi pseudoplastici si comportano in maniera opposta, con profili di velocità più "quadrati".

Per interpretare questo risultato, bisogna tener conto che il profilo "ottimale" è

Per i fluidi di Bingham, la relazione costitutiva (4.2.1), caratterizzata da un valore di soglia τ_o dello sforzo di taglio, al disotto del quale il fluido si muove solo con flusso "a pistone", mentre al disopra di tale valore il fluido si comporta come un fluido newtoniano con una specie di viscosità pari a μ_o . In questo come negli altri casi, gli sforzi di taglio sono delle funzioni lineari della distanza dal centro. Dunque, come appare nella parte destra della **figura 4.3.2**, vicino al centro del tubo, per $r \leq r_c = (\tau_0/\tau_w)R$, gli sforzi di taglio sono inferiori al valore di soglia, e il fluido si muove con flusso a pistone (*plug flow*), come si vede nella parte sinistra della **figura 4.3.2**. Nella zona anulare, con $r > r_c$, il fluido si comporta come un fluido newtoniano, e quindi il profilo di velocità è parabolico.

La soluzione analitica è la seguente:

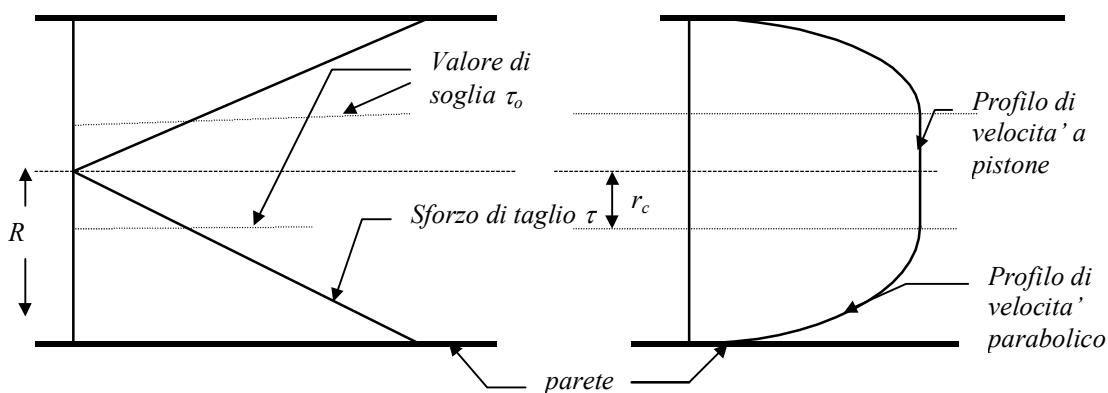


Figura 4.3.2. Profilo dello sforzo di taglio e della velocità di un fluido di Bingham in flusso laminare all'interno di un tubo circolare.

$$\begin{aligned} v &= \frac{R-r}{\mu'} \left[\frac{\tau_w}{2} \left(I + \frac{r}{R} \right) - \tau_o \right] \quad \text{se } r \geq r_c = \frac{\tau_0}{\tau_w} R \\ v &= v_c = \frac{\tau_o}{2\mu' r_c} (R-r_c)^2 \quad \text{se } r \leq r_c \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Per quanto riguarda le perdite di carico, è più conveniente esprimere nel modo seguente:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu_o} \frac{\Delta p}{L} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_o}{\tau_w} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_o}{\tau_w} \right)^4 \right], \quad (4.3.4)$$

dove τ_w è lo sforzo di taglio alla parete, il quale è proporzionale a $\Delta p/L$ tramite l'equazione (4.1.1), che stabilisce che

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{L}. \quad (4.3.5)$$

Chiaramente, quando τ_o è uguale a zero, si ritrova l'equazione per fluidi Newtoniani.

4.4 Flusso in mezzi porosi

Un mezzo poroso è composto da una fase solida, continua, in cui sono intervallate delle tasche, dette *pori*, occupate da un fluido. Esempi di mezzi porosi naturali sono il suolo, la sabbia, le spugne e il legno; esempi di mezzi porosi sintetici sono la carta, i tessuti, i filtri, i catalizzatori di reazioni chimiche e le membrane. Altri esempi particolarmente importanti di mezzi porosi sintetici sono i letti fissi, in cui lo scambio di massa e di energia è spesso accompagnato da reazioni chimiche. In questo paragrafo ci occupiamo del caso in cui i pori sono collegati tra loro, per cui anche la fase fluida sia continua (in questo caso si dice che la struttura del mezzo poroso è bicontinua) e dunque il fluido può attraversare il mezzo poroso sotto l'azione di una differenza di pressione. Ovviamente, invece, quando la fase fluida non è continua (cioè i pori non comunicano tra loro), il mezzo poroso non è permeabile.

La grandezza fisica più ovvia che caratterizza un mezzo poroso è la sua *porosità*, o *grado di vuoto*, definita come

$$\varepsilon = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V}, \quad (4.4.1)$$

dove V è il volume totale, mentre V_s è il volume occupato dalla fase solida.

Supponendo che il mezzo poroso sia uniforme e che non ci siano fenomeni di "channeling" (cioè dei canali preferenziali attraverso i quali il fluido fluisce), il modello più semplice di mezzo poroso è quello che lo assume equivalente a un solido attraversato da tantissimi tubicini, il cui raggio, detto *raggio idraulico*, è uguale a $R_h = 2(V - V_s)/S_w$, dove $(V - V_s)$ è il volume disponibile al flusso, mentre S_w è la superficie bagnata.² Ora, supponiamo che il mezzo poroso sia composto da N_p particelle di volume V_p e superficie S_p . Dunque $S_w = N_p S_p$ e $V_s = N_p V_p = (1-\varepsilon)V$, da cui otteniamo:

$$R_h = 2 \frac{V - V_s}{S_w} = \frac{2V\varepsilon}{N_p S_p} = \frac{2V_p \varepsilon}{(1-\varepsilon)S_p} = \frac{D_p \varepsilon}{3(1-\varepsilon)}, \quad (4.4.2)$$

dove $D_p = 6V_p/S_p$ è il diametro equivalente delle particelle che compongono il mezzo poroso, da non confondersi con le dimensioni dei "tubicini", cioè col diametro idraulico, che può essere molto diverso. Si noti che in caso di mezzi porosi composti da sfere, D_p coincide col diametro delle sfere. Nel caso di flusso laminare, la velocità media all'interno di questi tubicini, detta *velocità interstiziale*, è data da:

$$v_i = \frac{(\Delta p) R_h^2}{8\mu L}. \quad (4.4.3)$$

² In alcuni testi il raggio idraulico viene definito uguale a $(V - V_s)/S_w$, cioè pari a metà di quello definito in questo testo. Qui non abbiamo adottato questa definizione perché vogliamo che, quando il mezzo poroso sia composto da tanti tubicini a sezione circolare, R_h coincida con il raggio dei condotti.

A questo punto, tenendo conto che la velocità di interesse è in realtà la *velocità superficiale* v_s , pari al rapporto tra portata volumetrica e sezione, con³

$$v_s = \varepsilon v_i, \quad (4.4.4)$$

otteniamo l'equazione di *Blake-Kozeny*:

$$v_s = \frac{\Delta p}{L} \frac{D_p^2}{150\mu} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2}, \quad (4.4.5)$$

dove la costante numerica è stata cambiata (150 al posto di 72) per tener conto della tortuosità delle traiettorie percorse dal fluido e per tener conto dei risultati sperimentali. Invece dell'equazione di Blake-Kozeny, talvolta si fa uso della cosiddetta equazione di *Carman-Kozeny*, in cui il coefficiente numerico è 180 invece di 150. Come al solito, possiamo definire un coefficiente di attrito f come

$$\Delta p = 2f \frac{L}{D_p} \rho v_s^2, \quad (4.4.6)$$

ottenendo, nel caso dell'equazione di Blake-Kozeny:

$$f = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \frac{75}{Re_p}; \quad Re_p = \frac{v_s D_p}{\nu(1-\varepsilon)}, \quad (4.4.7)$$

dove Re_p è il numero di Reynolds calcolato in funzione della velocità superficiale (corretta con il fattore $1-\varepsilon$) e del diametro medio delle particelle. Più propriamente, poiché in questo caso stiamo supponendo che il flusso sia laminare e che quindi caduta di pressione e velocità superficiale siano proporzionali tra loro, si fa uso dell'equazione di *Darcy*,

$$v_s = \frac{\kappa}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \quad (4.4.8)$$

dove μ è la viscosità del fluido, mentre κ è una proprietà del mezzo poroso detta *permeabilità*, con le dimensioni di un'area, indicante quanto facilmente un fluido viscoso penetri nel mezzo poroso. In genere, la permeabilità si misura in darcy, definito come

$$1 \text{ darcy} = \frac{(cm/s)cP}{bar/cm} = 10^{-8} cm^2 = 1 \mu m^2. \quad (4.4.9)$$

Utilizzando la correlazione di Blake-Kozeny, la permeabilità è data da

³ Qui abbiamo tacitamente supposto che il rapporto tra l'area “vuota” e quella totale in una qualsiasi sezione del mezzo poroso è uguale ad ε , cioè al rapporto tra il volume “vuoto” e quello totale.

$$\kappa = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2}, \quad (4.4.10)$$

In genere, l'equazione (4.4.8) va scritta in forma vettoriale, cioè $\mathbf{v}_s = (\boldsymbol{\kappa}/\mu) \cdot \nabla p$, in cui la permeabilità di un mezzo poroso $\boldsymbol{\kappa}$ è un tensore, essendo definita come il "rapporto" tra due vettori (cioè la velocità superficiale e il gradiente di pressione). Infatti, come si vede dal problema 4.10, in un materiale stratificato la velocità superficiale cambia a seconda che la caduta di carico sia nella direzione delle stratificazioni o in quella perpendicolare ad esse. Soltanto quando il mezzo poroso è isotropo e dunque non presenta alcuna direzione preferenziale, come nel caso che abbiamo ipotizzato in questo paragrafo, κ si riduce ad uno scalare.

Nel caso di flusso turbolento, si usa la correlazione di Burke-Plummer,

$$\frac{\Delta p}{L} = 3.50 \frac{1}{D_p} \left(\frac{1}{2} \rho v_s^2 \right) \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3}, \quad \text{Re}_p > 1000(1-\varepsilon), \quad (4.4.11)$$

Sommando le due correlazioni di Blake-Kozeny e di Burke-Plummer otteniamo la correlazione di *Ergun*,

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150 \mu v_s}{D_p^2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + \frac{1.75 \rho v_s^2}{D_p} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3}, \quad (4.4.12)$$

che si può anche scrivere in forma adimensionale come:

$$\left(\frac{(\Delta p)\rho}{\dot{V}^2} \right) \left(\frac{D_p}{L} \right) \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = \frac{150(1-\varepsilon)}{\text{Re}_p} + 1.75. \quad (4.4.12')$$

Da qui si vede che quando il numero di Reynolds diviso per $(1-\varepsilon)$ supera 1000, la correlazione di Ergun si riduce a quella di Burke-Plummer, mentre viceversa per bassi numeri di Reynolds si riduce a quella di Blake-Kozeny.

4.4.1 Letti fissi e letti fluidizzati

Un letto fisso consiste in una serie di particelle solide attraversate da un flusso fluido. I letti fissi sono abitualmente utilizzati nell'industria perché presentano larghe superfici di scambio tra fasi immiscibili, consentendo di avere grossi scambi di massa e di calore. Gli esempi più comuni di letto fisso impiegano un liquido (che in genere cade per gravità) o un gas che attraversa un packing costituito di particelle di catalizzatori o di assorbenti che asportano dal fluido uno o più soluti in esso disciolti.

Al crescere della portata del fluido (gas o liquido) in ingresso, a un certo punto le particelle del letto vengono sospese, quando il drag diventa pari alla gravità. A questo punto, il letto fisso diventa letto fluidizzato, in cui le particelle solide che lo compongono sono sospese in una fase fluida continua.

Per studiare cosa il passaggio da letto fisso a letto fluidizzato, consideriamo il caso di un flusso fluido ascendente, in cui, all'aumentare della velocità superficiale del fluido, una parte sempre più consistente del peso del letto, Mg , dove M è la massa del letto, viene bilanciata dalla sua resistenza viscosa $S\Delta p$, dove S è la sezione del letto, mentre Δp , dipendente dalla velocità superficiale del fluido, è la perdita di carica del gas che attraversa il letto e valutabile con la correlazione (4.4.12) di Ergun (il resto del peso del letto viene ovviamente sorretto dalla griglia di distribuzione). Alla fine, in corrispondenza della cosiddetta *velocità di minima fluidizzazione* v_{mf} , il letto viene completamente sollevato dal flusso ascendente e si dice *fluidizzato*, perché si comporta, per molti aspetti, come un vero fluido. A questo punto possiamo scrivere:

$$Mg / S = \bar{\rho}gH = [\rho_f \varepsilon + \rho_s(1 - \varepsilon)]gH = \Delta p(v_{mf}), \quad (4.4.13)$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità media del letto, ρ_f la densità del fluido (trascurabile nel caso dell'aria), ρ_s quella del solido, mentre ε è la porosità del letto. Risolvendo questa equazione si trova:

$$v_{mf} = -\frac{43(1-\varepsilon)\nu}{D_p} + \left[\frac{1850(1-\varepsilon)^2\nu^2}{D_p^2} + 0.57g\left(\frac{\rho_s}{\bar{\rho}} - 1\right)\varepsilon^3 D_p \right]^{1/2}. \quad (4.4.14)$$

Per velocità $v > v_{mf}$, la caduta di pressione Δp resta inalterata, ovviamente, mentre il comportamento del letto dipende fortemente dal tipo di fluido impiegato. Quando questo fluido è un liquido, il letto resta omogeneo e si espande; quando è un gas, invece, diventa instabile e si formano delle bolle al livello della griglia di distribuzione; tali bolle crescono durante la risalita e, giunte alla superficie, esplodono, proprio come succede nell'ebollizione. Una spiegazione fondamentale soddisfacente di tali fenomeni è tuttora mancante.

Infine, in corrispondenza della velocità di trascinamento v_t , le particelle del letto vengono trascinate via dal flusso fluido e quindi il letto cessa di esistere.

4.4.2 Filtri

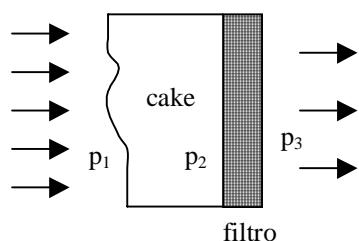


Figura 4.4.1

I filtri sono mezzi porosi usati per "catturare" particelle sospese nei fluidi di processo. Banalmente, i pori dei filtri devono essere più piccoli delle particelle che si vogliono catturare. Spesso, sul filtro si forma un *cake* composto dalle particelle filtrate, il quale da un lato serve come filtro ulteriore, ma dall'altro aumenta le perdite di carico (vedi figura 4.4.1). Esempi di filtri naturali sono il suolo, la sabbia e il legno; mentre i filtri industriali usati per ripulire i gas di scarico sono esempi di filtri sintetici. Inoltre, nelle bioseparazioni sono usati filtri a membrana.

Applicando la legge di Darcy otteniamo:

$$v_s = \frac{1}{S} \dot{V} = \frac{1}{S} \frac{dV}{dt} = \frac{\kappa_c}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{H_c} = \frac{\kappa_f}{\mu} \frac{p_2 - p_3}{H_0}. \quad (4.4.15)$$

dove V è il volume del filtrato, S la sezione del filtro, κ_c e κ_f le permeabilità del cake e del filtro, H_c e H_0 il loro spessore, mentre p_1 , p_2 e p_3 sono le pressioni indicate in figura. Si noti che $p_3=p_{atm}$ e H_0 sono costanti, mentre p_1 , p_2 e H_c crescono col tempo. Con facili passaggi si ottiene (vedi **problema 4.7**):

$$v_s = \frac{\kappa_{eff}}{\mu} [p_1(t) - p_3]; \quad \kappa_{eff} = \left[\frac{H(t)}{\kappa_c} + \frac{H_0}{\kappa_f} \right]^{-1}, \quad (4.4.16)$$

dove κ_{eff} è la permeabilità efficace del sistema (cioè la sua resistenza a filtrare). Ora si consideri che il volume del cake è pari a $V_c = SH_c = V\gamma/(1-\varepsilon)$, dove γ è il volume di solido per volume di filtrato ed ε è la porosità del cake. Infine otteniamo:

$$\frac{1}{S} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\mu} \frac{p_1(t) - p_3}{\left[\frac{V\gamma}{(1-\varepsilon)S\kappa_c} + \frac{H_0}{\kappa_f} \right]}. \quad (4.4.17)$$

da risolversi con condizioni iniziali $V(0) = 0$. I due casi più significativi sono quelli in cui uno dei due termini che determina la resistenza del sistema è trascurabile rispetto all'altro.

a) Nei processi di purificazione dell'aria o di liquidi a bassa contaminazione la resistenza del cake è generalmente trascurabile. Dunque otteniamo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{S\kappa_f}{\mu H_0} (p_1 - p_3) \Rightarrow V(t) = \frac{S\kappa_f}{\mu H_0} (p_1 - p_3) t \quad (4.4.18)$$

che comporta la rimozione di un volume $V\gamma$ di particelle (pari ad una massa $\rho_s V\gamma$).

b) Nei processi di filtrazione di liquidi con alte concentrazioni di particelle sospese, la resistenza del filtro è trascurabile e otteniamo:

$$V \frac{dV}{dt} = \frac{S^2 (1-\varepsilon) \kappa_c}{\mu \gamma} (p_1 - p_3) \Rightarrow V^2(t) = \frac{2S^2 (1-\varepsilon) \kappa_c}{\mu \gamma} (p_1 - p_3) t. \quad (4.4.19)$$

Le soluzioni presentate corrispondono al caso in cui la pressione p_1 è prescritta e vogliamo determinare la portata di filtrato. Viceversa, se fissiamo la portata volumetrica, basta invertire le ultime due equazioni per trovare le perdite di carico.

4.5 Flusso quasi stazionario

Si consideri lo svuotamento del serbatoio di **figura 4.5.1** per mezzo di un capillare di raggio R e lunghezza L . Il problema ovviamente è dipendente dal tempo, poiché il flusso nel capillare dipende dall'altezza H del pelo libero, il quale a sua volta decresce nel tempo.

Vediamo di impostare il problema. Supponiamo che il flusso sia laminare. Da un bilancio di massa otteniamo: $A_T(dH/dt) = -\dot{V}$, dove A_T è la sezione della tanica e \dot{V} il flusso volumetrico nel capillare, causato dalla caduta di pressione $\Delta p = \rho g H$ e dato, allo stazionario, dall'equazione (4.1.10). Dunque si ottiene l'equazione seguente:

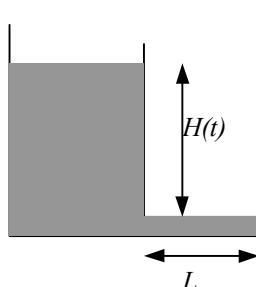


Figura 4.5.1

da cui:

$$H = H_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{8\mu L A_T}{\pi \rho g R^4}. \quad (4.5.2)$$

In questa analisi abbiamo supposto che il flusso capillare sia stazionario. Questa approssimazione è valida quando il tempo caratteristico di svuotamento della tanica τ è molto superiore al tempo necessario per raggiungere lo stato stazionario, $\tau_{ss} = R^2/v$.

Dunque l'*ipotesi di quasi-stazionarietà* (e quindi anche il risultato (4.5.2) ottenuto) è valida quando:

$$\tau_{ss} \ll \tau \Rightarrow \frac{R^6 g}{A_T L v^2} \ll 1 \quad (4.5.3)$$

Nota: il tempo caratteristico di svuotamento τ non dipende dall'altezza iniziale H_0 del pelo libero e quindi dalla quantità di fluido inizialmente presente nel serbatoio. In altre parole, a parità di tutti gli altri parametri, raddoppiando H_0 il tempo di svuotamento non cambia. Ciò è dovuto al fatto che il flusso uscente è proporzionale alla caduta di pressione, che a sua volta è proporzionale ad H . Dunque, raddoppiando H , raddoppia anche il flusso uscente e dunque il tempo necessario per vuotare il serbatoio non cambia.

4.6 Flusso capillare

Il flusso capillare è quello governato dalle forze associate con la tensione superficiale. L'esempio più istruttivo è forse quello che descrive la salita di un liquido in un capillare cilindrico di raggio R immerso in un liquido e aperto, verso l'alto, all'atmosfera. Come abbiamo visto nel paragrafo 1.4, applicando l'equazione di Young-Laplace troviamo che all'equilibrio il menisco raggiunge una quota

$$h_0 = (2\sigma \cos \theta)/(Rg\Delta\rho) = (2\cos \theta/Bo) R, \quad (4.6.1)$$

dove θ è l'angolo di raccordo, mentre $Bo = gR^2\Delta\rho/\sigma$ è il numero di Bond, definito in base al raggio del capillare. Per calcolare la velocità di salita del menisco, dh/dt , supponiamo che il profilo di velocità ad ogni istante sia quello stazionario (ipotesi di quasi stazionarietà), così che

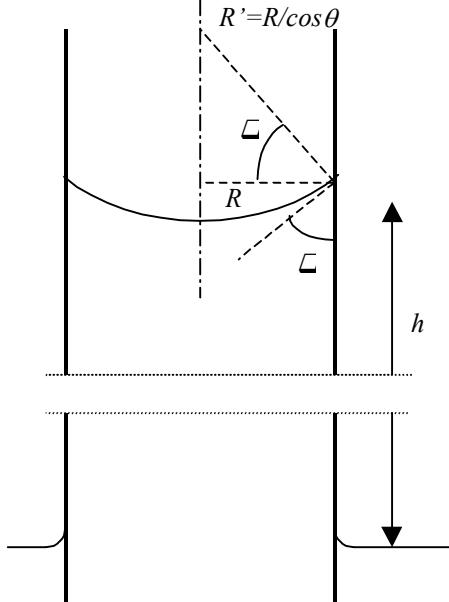
$$\frac{dh}{dt} = \bar{v} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{h}. \quad (4.6.2)$$

con $h < h_0$. La caduta di pressione nel liquido è uguale alla differenza di pressione al menisco, calcolata applicando l'equazione di Young-Laplace, e la pressione idrostatica, cioè

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos \theta}{R} - \rho gh. \quad (4.6.3)$$

Eliminando la pressione tra le due equazioni precedenti, otteniamo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sigma Bo}{8\mu} \left[\frac{2}{Bo} \left(\frac{R}{h} \right) \cos \theta - 1 \right] = V \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right), \quad (4.6.4)$$



dove $V = (\sigma Bo)/(8\mu)$ è una velocità caratteristica. Riscriviamo questa equazione come

$$dt = \tau \left(\frac{h/h_0}{1-h/h_0} \right) d(h/h_0); \quad \tau \equiv \frac{h_0}{V} = \frac{8\mu h_0}{\rho g R^2}, \quad (4.6.5)$$

dove τ è il tempo caratteristico per raggiungere l'equilibrio. La soluzione di questa equazione con $h(t=0) = 0$ è la seguente:

$$t = \tau \left(\ln \frac{I}{I-h/h_0} - \frac{h}{h_0} \right), \quad (4.6.6)$$

da cui si vede che quando h/h_0 tende a 1, cioè all'avvicinarsi all'equilibrio, si trova:

$$h = h_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (4.6.7)$$

Si noti che il tempo caratteristico τ è abbastanza rapido. Infatti, per $R = 0.1 \text{ mm}$, $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ e $\mu = 1 \text{ cP}$ (da cui $Bo \approx 10^{-3}$ e $h_0 \approx R/Bo \approx 10 \text{ cm}$), otteniamo $\tau \approx 12 \text{ s}$ (con $\theta = 0$) e dunque una velocità tipica $V = h_0/\tau \approx 1 \text{ cm/s}$.

Infine, vediamo quando è applicabile l'ipotesi di quasi stazionarietà, $\tau_{ss} \ll \tau$, in cui, come nel paragrafo precedente, $\tau_{ss} = R^2/V$.

$$\tau_{ss} \ll \tau \Rightarrow \frac{Bo R^3 g}{V^2} \ll 1. \quad (4.6.8)$$

Nel caso appena visto, questa condizione è soddisfatta.

4.7 Esercizi

4.1 Si determini il profilo di velocità e le perdite di carico di un fluido incomprimibile newtoniano pompato in un canale con una data velocità media \bar{v} (cioè' una data portata volumetrica), rappresentato nella **figura 4.1P**. Ripetendo tutti i passi del paragrafo 4.1, tenendo conto che le condizioni al contorno sono $v=0$ per $y=0$ e $dv/dy=0$ per $y=H$, provare che: a) il profilo di velocità è ancora parabolico e dato da

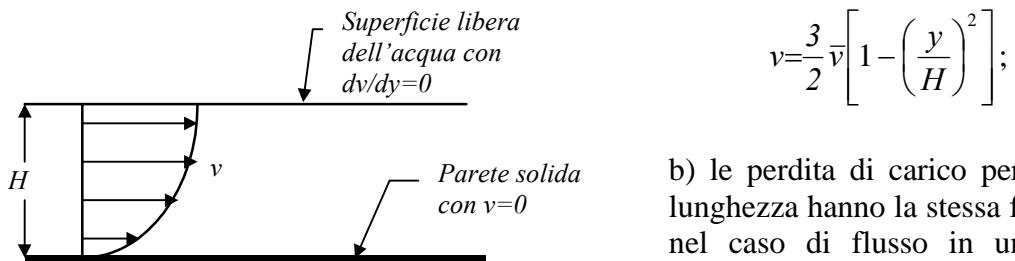


Figura 4.1P

- b) le perdite di carico per unità di lunghezza hanno la stessa forma che nel caso di flusso in un tubo a sezione circolare.

4.2 Questo problema deve essere risolto dopo il precedente. Si consideri il flusso stazionario di un fluido che scorre con portata per unità di larghezza Γ (espressa in $kg m^{-1} s^{-1}$) lungo un piano inclinato di un angolo β rispetto alla verticale. Mostrare che lo spessore H del film è

$$H = \left(\frac{3\mu\Gamma}{\rho^2 g \cos \beta} \right)^{1/3},$$

dove ρ e μ sono, rispettivamente, la densità e la viscosità del fluido, mentre g è l'accelerazione di gravità. Si noti che $\Gamma = \rho L \bar{v}$.

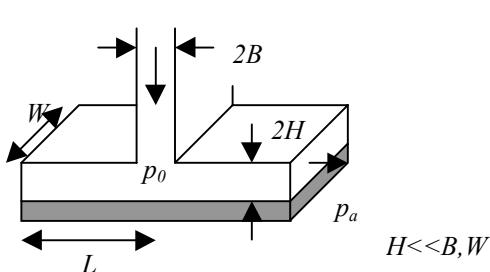


Figura 4.2P

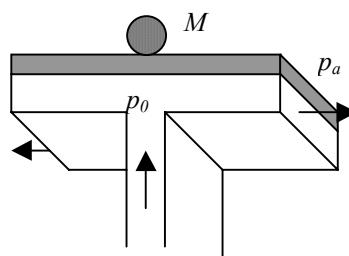


Figura 4.3P

4.3 Una soluzione polimerica ad alta viscosità μ viene pompata nel dispositivo di **figura 4.2P** imponendo una differenza di pressione nota Δp . Si determini la portata volumetrica.

4.4 Un fluido viene pompato nel dispositivo di **figura 4.3P** con una portata volumetrica data in modo da sostenere il peso Mg di una lastra. Si determini lo spessore H .

4.5 Si consideri il flusso di un fluido newtoniano in un dispositivo Couette, cioè l'intercedine tra due cilindri concentrici di cui il più esterno, di raggio R_o , è mantenuto fermo mentre quello interno, di raggio R_i , ruota con velocità angolare costante ω (vedi **figura 4.4P**). Tale flusso di dice flusso Couette. Supponendo che l'altezza di riempimento del fluido

sia uguale ad L e che il fluido abbia viscosità μ , si calcoli il momento che deve essere applicato al cilindro interno perché si mantenga in rotazione.

- 4.6** Calcolare il profilo di velocità' e le perdite di carico per unità di lunghezza per un fluido dilatante con $n=2$. Verificare che i risultati siano in accordo con le formule (4.3.1) e (4.3.2).

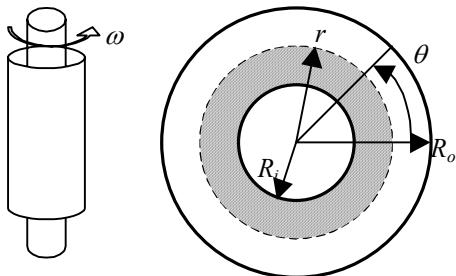


Figura 4.4P

della caduta di pressione adimensionale $\Phi=(\Delta P/L)(R^2/4\alpha\mu\nu_s)$, in funzione della frazione solida $\alpha=1-\varepsilon$.

- 4.8** Si consideri un appezzamento di terreno inclinato di un angolo $\phi=5^\circ$, ampio $W=500$ m, che viene irrigato con un flusso d'acqua di $q_0 = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ per metro d'ampiezza. Mentre l'acqua discende per gravità, evapora al ritmo di $v_e = 10^{-10} \text{ m}^3/\text{s}$ per metro quadrato di superficie (dunque v_e si esprime in m/s). Nota la permeabilità del suolo $\kappa = 10 \text{ darcy}$, si determini a) la distanza massima di irrigazione e b) la penetrazione dell'acqua nel suolo.

- 4.9** Si determini la permeabilità di un materiale composito di forma cilindrica, con raggio R e lungo L , composto da m tubicini di raggio r e lunghi L , cementati insieme.

- 4.10** Si determini la permeabilità efficace di un materiale poroso composito, in cui una fase ha permeabilità κ_1 , mentre l'altra fase, di permeabilità κ_2 , occupa una percentuale ε del volume totale ed è composta di lastre disposte a) nella direzione del flusso; b) nella direzione ortogonale.

- 4.11** Una goccia di volume V_g viene posta all'imbocco del canale di **figura 4.5P** e quindi "risucchiata" dalle forze capillari risultanti dal fatto che l'angolo di contatto θ è minore di $\pi/2$. Si valuti il tempo impiegato dalla goccia per entrare nel canale.

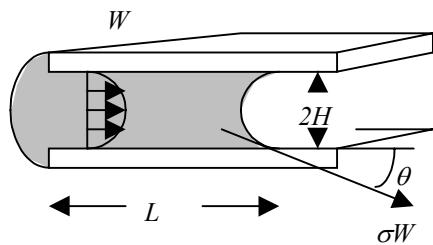


Figura 4.5P

5. Le equazioni fondamentali dei fenomeni di trasporto

5.1 Conservazione della massa; l'equazione di continuità

Si consideri un *volume di controllo* V fissato, definendo, in ogni punto della superficie (chiusa) S che lo delimita un versore (vettore di lunghezza unitaria) \mathbf{n} diretto verso l'*esterno* della superficie e normale alla piano tangente alla superficie in quel punto. Detto j_n il flusso massico *uscente* dal volume, l'equazione di conservazione della massa stabilisce che la massa accumulata nel volume V è uguale a quella entrante per la superficie S , cioè

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S j_n dS \quad (5.1.1)$$

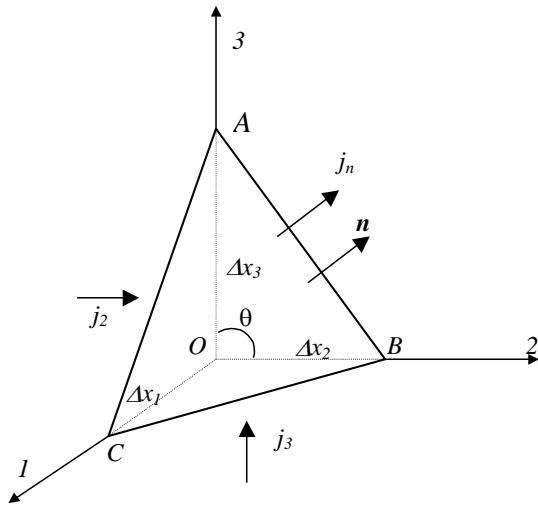


Figura 5.1.1 – Flussi massici su un elemento di fluido

dove abbiamo considerato che la massa all'interno del volume è $M = \int_V \rho dV$ e

quando ne consideriamo la derivata temporale dobbiamo tener conto del fatto che l'elemento di volume dV è fisso (cioè non dipende da t). Si noti il segno negativo al secondo membro, conseguenza del fatto che l'integrale al secondo membro indica il flusso massico uscente da V .

A questo punto dobbiamo provare (teorema di Cauchy) che il flusso massico j_n lungo la direzione \mathbf{n} si può scrivere come il prodotto tra il versore \mathbf{n} e un vettore \mathbf{j} , cioè nei termini

$$j_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \quad (5.1.2)$$

La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella vista nel paragrafo 0.3.

Consideriamo il tetraedro di **figura 5.1.1**, costruito attorno all'origine del sistema di assi cartesiani x_1, x_2, x_3 e scriviamo il bilancio di massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = j_1 dS_1 + j_2 dS_2 + j_3 dS_3 - j_n dS_n, \quad (5.1.3)$$

dove dS_1, dS_2, dS_3 e dS_n sono, rispettivamente, le aree dei triangoli OAB, OAC, OBC e ABC , j_n , come abbiamo visto, è il flusso uscente da dS_n , mentre j_1, j_2 e j_3 sono i flussi lungo le direzioni positive dei tre assi cartesiani x_1, x_2, x_3 . Ora consideriamo che

$$dS_1 = dS_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1), \quad dS_2 = dS_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2), \quad dS_3 = dS_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3), \quad (5.1.4)$$

e facciamo tendere a zero tutte le dimensioni lineari del tetraedro. Ovviamente, poiché il volume tende a zero più velocemente delle superfici, possiamo trascurare il termine a primo membro in (5.1.3) e otteniamo l'equazione (5.1.2) dove:

$$\mathbf{j} = j_1 \mathbf{e}_1 + j_2 \mathbf{e}_2 + j_3 \mathbf{e}_3. \quad (5.1.5)$$

Come abbiamo già visto nel capitolo introduttivo, ora possiamo definire la velocità \mathbf{v} come

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (5.1.6)$$

sottolineando che è il flusso massico (che coincide con la quantità di moto specifica) e non la velocità ad essere una grandezza primitiva. Dunque, l'equazione di conservazione della massa (5.1.1) si può riscrivere come

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) dS. \quad (5.1.7)$$

A questo punto, si consideri il teorema della divergenza (detto anche di Gauss-Green) applicabile ad ogni campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ definito in un volume fissato V :

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV, \quad (5.1.8)$$

dove $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial v_i / \partial x_i = \partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2 + \partial v_3 / \partial x_3$ indica la divergenza di \mathbf{v} . Applicando questo teorema all'equazione (5.1.7) otteniamo:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (5.1.9)$$

Ora, poiché questo deve essere vero per qualsiasi volume V , l'integrando deve essere identicamente nullo¹ e dunque otteniamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.1.10)$$

Adesso si consideri un secondo approccio al problema: invece di fissare un volume V , supponiamo di fissare una certa porzione di fluido e di seguirlo durante il suo moto. Il volume occupato da questo fluido, che ovviamente trasla, ruota e si deforma nel tempo, è detto *volume di controllo materiale* $V_m(t)$, dove il pedice m sta ad indicare che il volume racchiude una quantità fissata di materia. Ovviamente, la velocità del fluido deve essere parallela alla superficie S_m del volume materiale, altrimenti il fluido entrerebbe dentro V_m e ne cambierebbe

¹ Non è una precisazione ovvia: un integrale può essere zero anche se l'integrando non è zero: si pensi all'integrale di x tra -1 e 1 . Quando però l'integrale è uguale a zero per qualsiasi scelta degli estremi di integrazione, allora l'integrando deve essere identicamente nullo.

la massa, il che è contrario alle ipotesi fatte sul volume materiale. Scritto in forma matematica, ciò comporta che debba essere:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{su} \quad S_m. \quad (5.1.11)$$

Dunque, l'equazione di continuità riferita al volume di controllo materiale è molto semplice:

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{V_m(t)} \rho dV \right] = 0, \quad (5.1.12)$$

dove il simbolo D/Dt indica la *derivata materiale* rispetto al tempo. L'equazione (5.1.12) indica banalmente che la massa $M = \int \rho dV$ contenuta nel volume materiale V_m è costante. Questo risultato si può generalizzare, riferendosi a una generica proprietà locale $f(\mathbf{r})$ invece che a $\rho(\mathbf{r})$: la derivata materiale Df/Dt rappresenta la velocità di variazione di f misurata da un osservatore solidale col fluido². La relazione che intercorre tra la derivata parziale $\partial f / \partial t$ e la derivata materiale Df/Dt si deduce facilmente da considerazioni fisiche: in un elemento di fluido in movimento f cambia sia perché varia "di per sé", cioè anche in un elemento fisso di volume, con velocità $\partial f / \partial t$, sia perché l'elemento fluido si sposta in un punto in cui f ha un valore diverso. Questo secondo contributo è pari al prodotto della velocità con cui il fluido si sposta per la velocità di tale cambiamento spaziale, ∇f , e dunque:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f. \quad (5.1.13)$$

Matematicamente, questa relazione si può ottenere facilmente considerando che nella derivata parziale temporale riteniamo fissa la posizione \mathbf{r} dell'elemento fluido. Dunque:

$$\frac{Df}{Dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right]_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},$$

da cui otteniamo il risultato cercato considerando che $\partial \mathbf{r} / \partial t = \nabla f = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \partial f / \partial x_3)$.

L'equivalente integrale della relazione differenziale (5.1.13) è il cosiddetto *teorema del trasporto di Reynolds* o *formula di Leibnitz*³, che stabilisce che per ogni volume $V(t)$ soggetto ad un campo di moto, si ha:

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{V(t)} f dV \right] = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{S(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot (f \mathbf{w}) dS, \quad (5.1.14)$$

dove \mathbf{w} è la velocità con cui si muove la superficie S che delimita il volume V . La formula di Leibnitz generalizza la relazione:

² Se studiamo la variazione della concentrazione di pesci c in un fiume stando fermi su un ponte, misuriamo $\partial c / \partial t$, se la misuriamo da una barca facendoci trascinare dalla corrente, allora misuriamo Dc/Dt .

³ Vedi ad esempio Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, 2nd ed., pag. 364-365, Prentice Hall (1976).

$$\frac{d}{dt} \int_0^{a(t)} f(x, t) dx = \int_0^{a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + w f(a(t), t),$$

dove $w=da/dt$. Quando il volume $V(t)$ coincide con il volume materiale $V_m(t)$ e dunque la velocità \mathbf{w} coincide con la velocità del fluido \mathbf{v} , applicando il teorema della divergenza, otteniamo:

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{V_m(t)} f dV \right] = \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right] dV. \quad (5.1.15)$$

Ovviamente, quando f è la densità di una grandezza che si conserva, come nel caso di ρ , entrambi i membri di (5.1.15) sono uguali a zero e ritroviamo l'equazione di continuità (5.1.10). Altrimenti, (5.1.15) esprime la velocità con cui f si genera nel volume V_m .

I due approcci visti sopra sono del tutto equivalenti. Nel primo, detto euleriano, la conservazione della massa viene imposta egualando l'aumento di massa all'interno di un volumetto fissato con il flusso massico entrante, tenendo conto del fatto che la massa non si può creare né distruggere. Nel secondo approccio, detto lagrangiano, definiamo un elemento di volume materiale tale che il flusso massico che attraversa la superficie che lo racchiude è sempre zero. In questo caso, il principio di conservazione della massa stabilisce semplicemente che la massa racchiusa nel volumetto materiale è costante.

Prima di concludere questa sezione, si osservi che l'equazione di continuità si può anche scrivere come

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.1.16)$$

cioè, poiché $\rho = 1/\tilde{V}$, dove \tilde{V} è il volume specifico,

$$\frac{1}{\tilde{V}} \frac{D\tilde{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (5.1.17)$$

Questa equazione indica che la divergenza della velocità, $\nabla \cdot \mathbf{v}$, è uguale alla velocità di espansione, o dilatazione, del fluido. Ovviamente, per fluidi incomprensibili, l'equazione di continuità si semplifica in

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.1.18)$$

che indica che il campo di velocità è solenoidale, cioè ha divergenza zero.

5.2 Conservazione della quantità di moto; l'equazione di Cauchy

Come nel caso della conservazione della massa, il principio di conservazione della quantità di moto può essere formulato sia usando un volume di controllo fisso (approccio euleriano) che usando un elemento di volume materiale, cioè in moto solidale con il fluido (approccio lagrangiano). Nel seguito, consideriamo un approccio lagrangiano, perché pensiamo che vengano meglio evidenziate le connessioni tra la meccanica dei fluidi e le altre branche della meccanica classica.

Il bilancio di quantità di moto stabilisce che l'aumento temporale della quantità di moto racchiusa in un volume materiale è pari alla somma delle forze che vi sono applicate, in accordo con la seconda legge della meccanica di Newton⁴. Le forze interne constano di forze volumetriche⁵ ρg (qui consideriamo soltanto la forza di gravità. L'estensione ad altri tipi di forze volumetriche è immediata), definite per unità di volume, e forze superficiali f , definite per unità di superficie, che agiscono sulla superficie S_m e rappresentano l'azione del fluido circostante sull'elemento materiale. Dunque:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho v dV = \int_{V_m(t)} \rho g dV + \int_{S_m(t)} f dS. \quad (5.2.1)$$

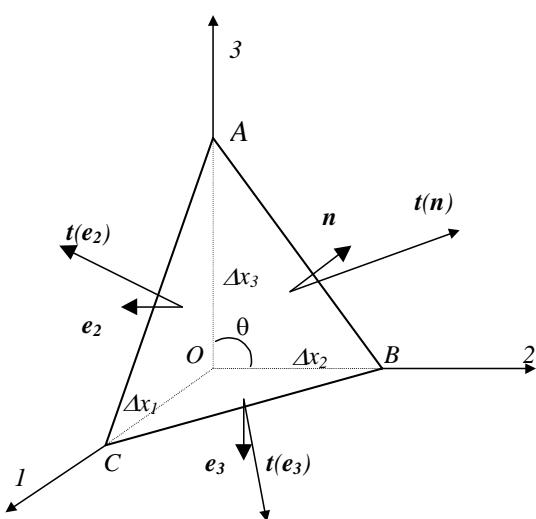


Figura 5.2.1. Forze su un elemento di fluido materiale

tramite il versore n diretto lungo la perpendicolare alla superficie e diretto verso l'esterno del volume di riferimento. Anzitutto, vogliamo dimostrare che il tensore T , definito come il termine di proporzionalità tra f e n , non dipende da n e dunque dipende soltanto dalla posizione r , cioè,

Se avessimo considerato un elemento di volume fisso, avremmo dovuto considerare un altro termine nel bilancio, cioè il flusso convettivo di quantità di moto, $\rho v v$, corrispondente alla quantità di moto trasportata dal fluido all'interno del volume di controllo. Nell'approccio lagrangiano, tuttavia, tenendo conto dell'equazione (5.1.11), si vede che questo termine non c'è, perché il fluido non entra nel volumetto materiale.

Ora dobbiamo specificare il significato di f . Chiaramente f è una funzione non soltanto della posizione r sulla superficie del volume di riferimento, ma anche della orientazione della superficie stessa. Quest'ultima, come visto precedentemente, è definita

⁴ Si noti che possiamo applicare la legge della meccanica perché il volumetto materiale, anche se si deforma continuamente in conseguenza del moto del fluido, corrisponde ad una ben determinata porzione di materia ed ha massa costante.

⁵ Dette "body force" in inglese.

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}), \text{ oppure } f_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = n_j T_{ji}(\mathbf{r}). \quad (5.2.2)$$

La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella del teorema di Cauchy vista nel paragrafo 0.3. Consideriamo il tetraedro di **figura 5.2.1**, costruito attorno al sistema di assi cartesiani x_1, x_2, x_3 e scriviamo il bilancio delle forze esercitate su di esso dal fluido circostante.

$$\mathbf{f}(\mathbf{n})S(ABC) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1)S(AOB) + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)S(AOC) + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3)S(BOC), \quad (5.2.3)$$

dove $S(ABC)$ è l'area del triangolo ABC ecc. e dove abbiamo trascurato le forze volumetriche perché tendono a zero più velocemente di quelle superficiali al diminuire delle dimensioni del tetraedro. Tenendo conto che:

$$S(AOB) = S(ABC) \cos(nx_1) = S(ABC) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1; \quad S(AOC) = S(ABC) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2; \quad S(BOC) = S(ABC) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3,$$

si ottiene infine il cosiddetto *lemma di Cauchy*:

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \quad \text{dove: } \mathbf{T} = \mathbf{e}_1 \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2 \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \mathbf{f}(\mathbf{e}_3), \quad (5.2.4)$$

è il *tensore degli sforzi* che, come si vede, non dipende da \mathbf{n} .

Sostituendo questo risultato nell'equazione di conservazione otteniamo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS. \quad (5.2.5)$$

da cui, applicando il teorema della divergenza (5.1.2) (cioè trasformando l'ultimo termine in un integrale di volume) ed applicando il teorema di Reynolds (5.1.8),

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right] dV = 0. \quad (5.2.6)$$

Infine, poiché questa equazione deve essere valida *per qualsiasi* volume materiale V_m considerato, otteniamo:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}. \quad (5.2.7)$$

Da qui, sostituendo l'equazione di continuità, otteniamo con facili passaggi la cosiddetta *equazione di Cauchy*,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}. \quad (5.2.8)$$

Si noti che dalla convenzione di segno che abbiamo scelto consegue che le componenti di \mathbf{T} abbiano i versi indicati in figura .

5.3 Conservazione del momento della quantità di moto

L'equazione di conservazione della quantità di moto deve essere accoppiata con quella di conservazione del momento della quantità di moto. Si consideri al riguardo un elemento di volume materiale (cioè in moto solidale col fluido) e se ne scriva l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{v}) dV = \int_{S_m(t)} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})] dS + \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \wedge \rho g) dV. \quad (5.3.1)$$

Anzitutto, applicando il teorema di Reynolds il primo membro si modifica nel modo seguente:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V_m(t)} \mathbf{x} \wedge \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \right) dV. \quad (5.3.2)$$

Inoltre, si consideri che il primo termine a secondo membro si modifica come:

$$\begin{aligned} \left(\int_{S_m(t)} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})] dS \right)_i &= \int_{S_m(t)} \epsilon_{ijk} x_j n_m T_{mk} dS = \int_{V_m(t)} \epsilon_{ijk} \nabla_m (x_j T_{mk}) dV = \\ &\int_{V_m(t)} \epsilon_{ijk} T_{jk} + \epsilon_{ijk} x_j (\nabla_m T_{mk}) dV = \left(\int_{V_m(t)} [\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} + \mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \mathbf{T})] dS \right)_i \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

dove $\mathbf{A}:\mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$. In questi passaggi abbiamo considerato che il prodotto vettore si può esprimere in funzione del tensore antisimmetrico del terzo ordine ϵ_{ijk} di Ricci, $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Sostituendo le equazioni (5.3.2) e (5.3.3) nella (5.3.1) otteniamo:

$$\int_{V_m(t)} \left[\mathbf{x} \wedge \left(\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right) + \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} \right] dV = 0. \quad (5.3.4)$$

A questo punto, considerando l'equazione di Cauchy e il fatto che il volume materiale V_m è arbitrario, otteniamo in ogni punto del fluido,

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (5.3.5)$$

Dunque il tensore degli sforzi deve essere simmetrico.

5.4 Le equazioni costitutive

Per procedere oltre l'equazione di Cauchy, dobbiamo esprimere il tensore degli sforzi in funzione del campo di velocità. Anzitutto notiamo che, come abbiamo visto nel Capitolo 1, in condizioni statiche, la forza superficiale \mathbf{f} che agisce su di una superficie orientata lungo il versore \mathbf{n} è data da $\mathbf{f} = -p\mathbf{n}$, dove p è la pressione. Il segno negativo è una questione di convenzione, poiché \mathbf{f} è definito positivo quando è diretto verso l'esterno della superficie che racchiude il volume di riferimento, cioè quando è una forza di tensione. Conseguentemente, dalla definizione $\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$, otteniamo:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (5.4.1)$$

e l'equazione di Cauchy dà:

$$\rho\mathbf{g} = -\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p, \quad (5.4.2)$$

che è l'equazione fondamentale della statica dei fluidi.

Il tensore $\mathbf{T} + p\mathbf{I}$ in ogni punto \mathbf{x} deve essere una funzione del campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}')$ in tutti i punti \mathbf{x}' . Ora, espandendo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (5.4.3)$$

e considerando che un campo di velocità uniforme non può generare alcuno sforzo all'interno del fluido, possiamo concludere che in genere

$$\mathbf{T} + p\mathbf{I} = f(\nabla \mathbf{v}, \nabla \nabla \mathbf{v}, \nabla \nabla \nabla \mathbf{v}, \dots). \quad (5.4.4)$$

I fluidi per i quali il tensore degli sforzi dipende linearmente dal gradiente di velocità, mentre la sua dipendenza dai gradienti di ordine superiore è trascurabile, si dicono fluidi *newtoniani*. Sorprendentemente, la maggior parte dei fluidi di interesse industriale sono newtoniani.

Resta da determinarsi il tipo di relazione che intercorre tra il tensore degli sforzi e quello del gradiente di velocità. Analizziamo il tipo di deformazione causato da un generico $\nabla \mathbf{v}$. Dall'equazione (5.4.3) vediamo che la differenza di velocità $d\mathbf{v}$ tra due punti a distanza $d\mathbf{x}$ è $d\mathbf{v} = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Ora, $\nabla \mathbf{v}$, come tutti i tensori, si può scrivere come somma di una parte simmetrica, \mathbf{S} , e di una antisimmetrica, \mathbf{A} , con

$$\nabla_i v_j = S_{ij} + A_{ij}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i); \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i). \quad (5.4.5)$$

Si osservi che $S_{ij} = S_{ji}$, $A_{ij} = -A_{ji}$ e $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$. Dunque, possiamo scrivere:

$$d\mathbf{v} = (d\mathbf{v})_s + (d\mathbf{v})_a; \quad (d\mathbf{v})_s = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}; \quad (d\mathbf{v})_a = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (5.4.6)$$

A questo punto, notando che

$$(d\mathbf{v})_a \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \equiv 0, \quad (5.4.7)$$

possiamo concludere che $(d\mathbf{v})_a$, essendo proporzionale a $|d\mathbf{x}|$ e perpendicolare a $d\mathbf{x}$, rappresenta un moto rotatorio di corpo rigido, e dunque non deve causare alcuno stato di sforzo nel fluido. Concludiamo dunque che $\mathbf{T} + p\mathbf{I}$ deve essere proporzionale ad \mathbf{S} .

Poiché a livello microscopico il fluido è isotropo, la forma più generale del tensore degli sforzi, detta relazione costitutiva del fluido considerato, è la seguente:

$$\mathbf{T} = [-p + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})]\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}, \quad (5.4.8)$$

dove λ e μ sono due costanti, caratteristiche del fluido. In genere, si preferisce scrivere:

$$\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu, \quad (5.4.9)$$

in cui μ è il coefficiente di viscosità che abbiamo già visto, mentre ζ è la seconda viscosità, che, salvo casi particolari, è uguale a zero.

Per fluidi incompressibili, la relazione costitutiva (5.4.8) si semplifica, dando

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}. \quad (5.4.10)$$

5.5 Conservazione dell'energia

Come per le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto, anche per l'energia consideriamo anzitutto un elemento materiale di volume (dunque solidale col fluido in movimento). L'energia che vi è contenuta è uguale all'energia cinetica e potenziale macroscopiche più un'energia interna, che tiene conto a) dell'energia potenziale di

interazione intermolecolare e b) delle fluttuazioni microscopiche delle velocità delle singole molecole attorno al valore medio \mathbf{v} . Per meglio comprendere quest'ultimo termine, scriviamo l'energia cinetica di un elemento di volume delle dimensioni del punto materiale definito nel paragrafo 0.2 come la somma delle energie cinetiche degli atomi che vi sono contenuti. Poiché l'energia cinetica dipende dal quadrato delle velocità e quindi le oscillazioni delle velocità degli atomi attorno al loro valore medio danno un contributo non nullo, cioè

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m (\bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}_i)^2 = \frac{1}{2} M \bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} M \langle \tilde{\mathbf{v}}^2 \rangle, \quad (5.5.1)$$

dove $\langle \tilde{\mathbf{v}}^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{v}}_i^2$, e abbiamo tenuto conto che $\langle \tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \bar{\mathbf{v}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{v}}_i \rangle \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$. Ovviamente, la

velocità $\bar{\mathbf{v}}$ del punto materiale \mathbf{x} è quella che abbiamo indicato come la velocità macroscopica $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Simili considerazioni valgono anche per l'energia potenziale, la cui dipendenza dalla posizione non è mai lineare.

Queste relazioni mostrano che l'energia totale di un sistema è pari alla somma dell'energia meccanica coerente (cioè cinetica e potenziale macroscopica) e dell'energia interna incoerente (cioè dovuta alle fluttuazioni interne). Dunque, trascurando l'energia potenziale macroscopica (che comunque si può facilmente aggiungere), la legge di conservazione dell'energia stabilisce che:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right] dV = \begin{pmatrix} \text{lavoro delle} \\ \text{forze esterne} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{flusso d'energia} \\ \text{al contorno} \end{pmatrix}. \quad (5.5.2)$$

dove u è l'energia interna specifica per unità di massa. Il flusso d'energia al contorno è di tipo esclusivamente diffusivo, poiché la velocità del fluido alla frontiera dell'elemento materiale è tangente alla sua superficie e dunque l'energia (come la massa e la quantità di moto) non può entrare né uscire dall'elemento materiale per via convettiva. A sua volta, il flusso d'energia si può scindere in due parti: un flusso d'energia coerente, cioè il lavoro per unità di tempo fatto dalle forze superficiali, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$, ed uno d'energia incoerente, o calore, $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$, dove \mathbf{n} indica il versore normale alla superficie di contorno e diretto verso l'esterno. Si noti che abbiamo usato la convenzione che il flusso di calore è positivo quando entra nell'elemento di volume materiale, in accordo con la convenzione usata in termodinamica. Dunque l'equazione di conservazione dell'energia in forma integrale si può scrivere come:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho u \right] dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS + \oint_{S_m(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS. \quad (5.5.3)$$

Infine, applicando il teorema del trasporto di Reynolds (5.1.8) al primo membro e il teorema della divergenza agli ultimi due termini del secondo membro otteniamo la forma differenziale seguente:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (5.5.4)$$

A questo punto, moltiplicando l'equazione di Cauchy scalarmente per \mathbf{v} , otteniamo un'equazione di bilancio dell'energia potenziale:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{Dv^2}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.5.5)$$

Si noti che quest'ultima equazione non ci dice niente di nuovo: è una diretta conseguenza dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Sottraendo infine (5.5.5) da (5.5.4), otteniamo l'equazione di bilancio per l'energia interna u :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} : \mathbf{S} - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (5.5.6)$$

dove \mathbf{S} è la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità (vedi Eq. (5.4.5)) e abbiamo tenuto conto del fatto che \mathbf{T} è un tensore simmetrico. Infatti abbiamo:

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = T_{ij} \nabla_i v_j = T_{ij} S_{ij} + T_{ij} A_{ij} = T_{ij} S_{ij}, \quad (5.5.7)$$

poiché il doppio prodotto interno tra un tensore simmetrico e uno antisimmetrico è identicamente uguale a zero.

Concludiamo dunque che l'energia interna contenuta nel volumetto materiale cresce per effetto delle forze viscose (il primo termine a secondo membro dell'Eq. (5.5.6)) o del flusso termico entrante (il secondo termine a secondo membro dell'Eq. (5.5.6)). In particolare, il termine $\mathbf{T} : \mathbf{S}$ rappresenta una conversione da energia cinetica a energia interna, o calore, un processo chiamato *dissipazione*.

Infine, nel caso di gas ideale, considerando che $du = c_v dT$ e $\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$, dall'equazione (5.5.6) otteniamo:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.5.8)$$

dove abbiamo considerato che il flusso diffusivo di calore \mathbf{q} è legato alla distribuzione di temperatura attraverso l'equazione costitutiva di Fourier,

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (5.5.9)$$

dove k è la conducibilità termica del fluido considerato, ritenuta costante in questo caso.

5.6 Equazioni del moto per fluidi newtoniani incomprimibili

L'equazione di continuità per fluidi incomprimibili si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.6.1)$$

Inoltre, sostituendo la relazione costitutiva (5.4.10) nell'equazione di Cauchy (5.2.8) otteniamo:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (5.6.2)$$

dove abbiamo considerato che $\nabla_j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = \nabla^2 v_i$, poiché $\nabla_j v_j = 0$. Questa è l'equazione di *Navier-Stokes*, valida per fluidi incomprimibili, newtoniani e, almeno approssimativamente, isotermi (poiché in genere la viscosità è una funzione forte della temperatura).

L'equazione di Navier-Stokes è vettoriale (dunque sono 3 equazioni), mentre quella di continuità è scalare. Le incognite, dal momento che la densità ρ e la viscosità μ si suppongono costanti e note, sono la pressione p (scalare) e la velocità \mathbf{v} (vettore). Dunque il problema è ben posto.

Il rapporto $\nu = \mu/\rho$, detto *viscosità cinematica*, è di importanza fondamentale nel determinare il moto del fluido, poiché la accelerazione $D\mathbf{v}/Dt$ dovuta agli sforzi viscosi è proporzionale a ν , non a μ .

Spesso conviene introdurre il concetto di *pressione dinamica* P , definita in modo da costituire una forza spingente soltanto quando il fluido è in movimento, mentre rimane costante quando il fluido è stazionario. Dunque, poiché in un fluido stazionario $\nabla p = \rho \mathbf{g}$, la pressione dinamica P si definisce come

$$\nabla P = \nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad (5.6.3)$$

così che l'equazione di Navier-Stokes si può riscrivere come:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (5.6.4)$$

Si noti che la pressione dinamica P definita in (5.6.3) esiste soltanto quando ρ è costante, cioè per fluidi incomprimibili ed isotermi. In questo caso⁶, si può integrare l'Eq. (5.6.3) ottenendo:

$$P = p - \rho g z, \quad (5.6.5)$$

⁶ Se la densità non è costante, l'integrazione non si può fare.

dove z è la quota. L'equazione di Navier-Stokes (5.6.4) indica chiaramente che la forza di gravità (così come ogni altra forza che ammette potenziale) non ha alcun effetto diretto sul campo di moto, cioè la velocità ottenuta sarebbe la stessa se la gravità fosse doppia, o non ci fosse affatto.

Infine, facciamo alcuni commenti sull'equazione di conservazione dell'energia. Per fluidi incomprimibili (non isotermi), sappiamo che una variazione di energia interna du è proporzionale ad una variazione di temperatura dT ,

$$du = c_v dT , \quad (5.6.6)$$

dove c_v è il calore specifico (massico) a volume costante. Dunque, considerando che il flusso diffusivo di calore \mathbf{q} è legato alla distribuzione di temperatura attraverso l'equazione costitutiva di Fourier (5.5.9), l'equazione di conservazione dell'energia (5.5.6) per fluidi newtoniani incomprimibili diventa:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right] = \nabla_i (k \nabla_i T) + s . \quad (5.6.7)$$

dove

$$s = \frac{1}{2} \mu (\nabla_i v_j) (\nabla_i v_j) \quad (5.6.7)$$

è il termine di sorgente. In questo caso, s è dovuto esclusivamente alla dissipazione viscosa (cioè energia meccanica convertita in calore); in genere, tuttavia, s comprende anche altri meccanismi di "generazione" di calore, quali ad esempio la conversione di energia chimica o nucleare in calore. L'equazione (5.6.7) non è molto comoda da usare, perché il calore specifico a volume costante è difficile da misurare. Tuttavia, considerando che

$$c_v = c_p - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial T} \right)_P , \quad (5.6.8)$$

dove \tilde{V} è il volume specifico, si vede che in un fluido (o un solido) incomprimibile $c_v=c_p$. Dunque, nel caso in cui la conducibilità termica k , la densità ρ e il calore specifico a volume costante c_v siano costanti, l'equazione di trasporto del calore si riduce a

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + s , \quad (5.6.9)$$

dove s è il termine di sorgente, cioè il calore 'generato' per unità di tempo e di volume. Si può dimostrare facilmente che questa equazione è esatta non soltanto nel caso di fluido incomprimibile, ma anche quando la densità è indipendente da T (ma dipende dalla pressione) oppure quando il fluido ha pressione costante. In questi casi, infatti, dall'equazione (5.6.8) si trova che i due calori specifici sono uguali tra loro.

6. Flussi unidirezionali

6.1 Flusso in un canale o in un tubo

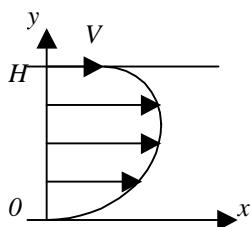


Figura 6.1.1

Si consideri il flusso stazionario di un fluido newtoniano in un canale di altezza H (vedi **figura 6.1.1**). Le forze spingenti (cioè le cause di questo flusso) sono due : da un lato c'è una differenza della pressione dinamica, ΔP , tra le estremità del canale, poste a distanza L ; dall'altro, la parete superiore del canale si muove con velocità costante V .

La velocità del fluido nel canale ha direzione x e dipende soltanto da y , cioè $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{i}_x$. Dunque, anzitutto, vediamo che l'equazione di continuità è soddisfatta identicamente. Poi, l'equazione di Navier-Stokes nella direzione y si riduce a: $\partial P/\partial y = 0$, così che $P=P(x)$. Dunque, la pressione dinamica è una funzione della sola coordinata longitudinale x ; si noti tuttavia che la pressione termodinamica p dipende anche dalla quota, poiché $P=p-\rho gy$, ma la parte idrostatica, ρgy , serve soltanto a bilanciare la forza peso e non causa alcun moto del fluido. Infine, l'equazione di Navier-Stokes nella direzione x presenta la parte inerziale identicamente nulla e si riduce a:

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 v}{dy^2}. \quad (6.1.1)$$

(Si noti che le derivate sono totali) Ora, il primo membro dell'equazione (6.1.1) è una funzione di x , mentre il secondo membro è una funzione di y ; dunque, entrambi devono essere uguali ad una costante, che quindi è uguale al gradiente medio di pressione, $-\Delta P/L$. A questo punto, risolvendo l'equazione (6.1.1) con condizioni al contorno

$$v(0) = 0; \quad v(H) = V, \quad (6.1.2)$$

otteniamo:

$$v(y) = \frac{V}{H} y + \frac{\Delta P}{2L\mu} y(H-y) = V \left\{ \frac{y}{H} + \frac{(\Delta P)H^2}{2LV\mu} \left[\left(\frac{y}{H} \right) \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right] \right\}. \quad (6.1.3)$$

Dunque il campo di velocità risultante è semplicemente la somma del campo di velocità generato dal moto della parete superiore (flusso di Couette) e da quello generato dalla caduta di pressione (flusso di Poiseuille). Questo è tipico dei sistemi lineari, in cui vige il *principio di sovrapposizione*: l'effetto di due cause simultanee è uguale alla somma degli effetti dovuti, separatamente, alle due cause. In genere, nella meccanica dei fluidi il principio di sovrapposizione non vale, perché l'equazione di Navier-Stokes contiene il termine inerziale, che è quadratico nella velocità. Tuttavia, quando, come nel caso in esame, il termine non lineare è identicamente nullo, il principio di sovrapposizione continua ad esser valido.

Si consideri ora il flusso di un fluido newtoniano in un tubo circolare di raggio R . Utilizzando coordinate cilindriche, vediamo che la velocità del fluido è diretta lungo l'asse del tubo, z , e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse, cioè $\mathbf{v}=v(r)\mathbf{1}_z$. Ripetendo le considerazioni fatte per il canale, vediamo che l'equazione di continuità è soddisfatta identicamente, mentre la pressione dipende soltanto da z . Infine, l'equazione di Navier-Stokes nella direzione z si riduce a:

$$\frac{dP}{dz} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{L}, \quad (6.1.4)$$

da risolversi con le condizioni al contorno:

$$v(R) = 0, \quad (6.1.5)$$

Integrando due volte otteniamo:

$$v(r) = -\frac{(\Delta P)r^2}{4\mu L} + C_1 \ln r + C_2, \quad (6.1.6)$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti da determinarsi. A prima vista, il problema sembrerebbe insolubile, poiché abbiamo una sola condizione al contorno e due costanti. Tuttavia, il problema presenta un'altra condizione al contorno implicita, che stabilisce che la velocità resti finita. Dunque, poiché il termine " $\ln r$ " diverge sull'asse del tubo, per $r=0$, otteniamo¹: $C_1=0$. In alternativa, possiamo anche imporre la condizione: $dv/dr=0$ per $r=0$, evidente per via della simmetria assiale del problema, ottenendo lo stesso risultato. Infine, imponendo la condizione $v(R)=0$, troviamo la (ormai consueta) espressione di Poiseuille:

$$v(r) = -\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (6.1.7)$$

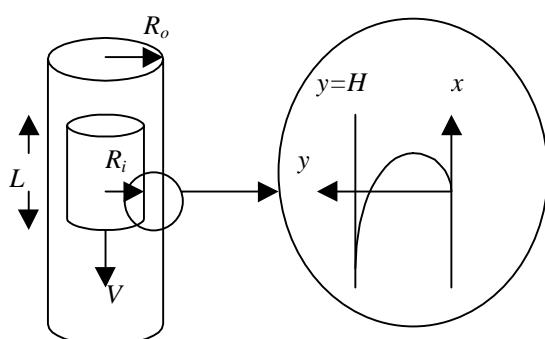


Figura 6.1.2

circolare di fluido sia piccolo rispetto ad entrambi i raggi, cioè $\varepsilon=R_o-R_i \ll L$. Dunque

6.1.1 Viscosimetro a caduta

Si consideri il moto di un cilindro di lunghezza L e raggio R_i in caduta libera in un liquido viscoso contenuto in un cilindro *chiuso* di raggio R_o . Vogliamo determinare la velocità di caduta V (cioè il suo valore asintotico), assumendo che il cilindro interno cada rimanendo al centro, lungo l'asse del cilindro esterno.

Si supponga, per semplicità il caso in cui la larghezza $H=R_o-R_i$ della corona

¹ Si ricordi che $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

all'interno della corona circolare si può trascurare l'effetto della curvatura delle superfici dei cilindri e il campo di velocità è dato dall'equazione (6.1.3), cioè

$$v(y) = V \left[-\frac{y}{H} + \Phi \left(\frac{y}{H} \right) \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right]; \quad \Phi = \frac{(\Delta P) H^2}{2 L V \mu}, \quad (6.1.8)$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che la velocità V è diretta verso il basso, cioè nel senso negativo delle x , mentre Φ si suppone sia positivo, e quindi diretto verso l'alto.

A questo punto, studiamo il problema. Non conosciamo né V né ΔP e dunque ci occorrono due condizioni per determinarle. Tali condizioni si deducono da un bilancio di massa (riconducibili, in questo caso, a un "bilancio di volume", avendosi densità costante) e da uno di forze, che stabiliscono che a) il flusso totale volumetrico è nullo e b) in condizioni di velocità costante, la forza che il fluido esercita sul cilindro deve bilanciare la forza peso. Consideriamo queste condizioni separatamente.

La prima condizione sfrutta il fatto che il contenitore cilindrico è chiuso in basso e quindi, quando il cilindro interno scende, il fluido spostato deve necessariamente risalire, passando attraverso la corona circolare. In altre parole, la portata volumetrica deve essere costante in ogni sezione e quindi, siccome in fondo al cilindro contenitore è uguale a zero, deve essere nulla ovunque. Questo significa che la portata volumetrica del fluido che sale deve controbilanciare quella del cilindro che scende, cioè:

$$(2\pi R_i) \int_0^H v(y) dy = V(\pi R_i^2), \quad (6.1.9)$$

da cui si ottiene:

$$\Phi = 3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \cong \frac{3}{\varepsilon}, \quad (6.1.10)$$

Infine, scriviamo un bilancio delle forze applicate al cilindro interno lungo la direzione assiale, imponendo che l'attrito alle pareti laterali (rivolto verso il basso) e la pressione sulle facce del cilindro equilibrino la forza peso:

$$\tau(2\pi R_i L) + (\Delta P)(\pi R_i^2) = (\Delta \rho) g \pi R_i^2 L, \quad (6.1.11)$$

dove:

$$\tau = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=H} = -\frac{\mu V}{H} (1 + \Phi) \cong -\frac{3\mu V}{\varepsilon H}. \quad (6.1.12)$$

Da qui, con facili passaggi e tenendo conto soltanto dei termini dominanti si ottiene:

$$V \mu = \frac{1}{6} \varepsilon (\Delta \rho) g R_i^2, \quad (6.1.13)$$

Naturalmente ciò comporta che il dispositivo studiato si può utilizzare come un viscosimetro: misurando la velocità V e conoscendo le caratteristiche geometriche, si determina μ .

6.2 Flusso azimutale tra due dischi paralleli

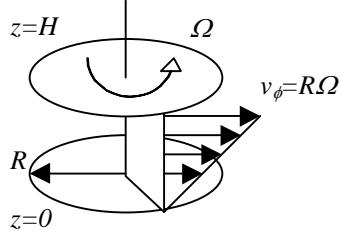


Figura 6.2.1

Si consideri modello di viscosimetro presentato in **figura 6.2.1**, composto da due piatti paralleli che ruotano l'uno rispetto all'altro. Supponendo che la velocità di rotazione sia sufficientemente bassa da rendere trascurabile il flusso centrifugo, vogliamo determinare la relazione tra il momento applicato e la velocità angolare risultante.

In base a considerazioni di simmetria, vediamo che la velocità del fluido ha direzione azimutale (la componente radiale si suppone trascurabile) e dipende dalla coordinata assiale z e da quella radiale r , cioè

$\mathbf{v} = v_\phi(r, z)\mathbf{1}_\phi$. Dunque, l'equazione di continuità viene soddisfatta identicamente, mentre quella di Navier-Stokes si riduce a

$$0 = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right\}. \quad (6.2.1)$$

Si noti che, nel caso in cui le linee di flusso siano chiuse, come in questo caso, la pressione deve essere costante e dunque l'unica forza spingente deve risultare dall'azione sul contorno (il moto del disco superiore, in questo caso). L'equazione di Navier-Stokes va risolta con le condizioni al contorno:

$$v_\phi(z=0) = 0 \quad \text{e} \quad v_\phi(z=H) = r\Omega, \quad (6.2.2)$$

dove Ω è la velocità angolare del disco superiore. Questa equazione si risolve facilmente applicando il metodo di separazione delle variabili, cioè supponendo che v_ϕ sia il prodotto di due funzioni, una dipendente da r e una da z . Alla fine otteniamo

$$v_\phi(r, z) = rz\Omega/H. \quad (6.2.3)$$

A questo punto, lo sforzo di taglio esercitato dal fluido sulla piastra superiore è il seguente:

$$T_{\phi z} = \mu \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{\mu \Omega r}{H}, \quad (6.2.4)$$

e da qui si determina la forza, $dF = T_{\phi z} dA$, esercitata dal fluido in direzione azimutale sulla superficie elementare dA della piastra superiore e quindi, integrando su tutta la superficie, il momento della forza,

$$\Gamma = \int_0^R r dF = \int_0^R r T_{\phi} 2\pi r dr = \frac{\pi \mu \Omega R^4}{2H}. \quad (6.2.5)$$

6.3 Flusso radiale tra due dischi paralleli

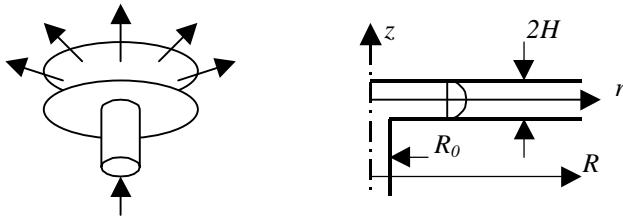


Figura 6.3.1

Un processo industriale comune è quello dello stampaggio per iniezione di materie plastiche, in cui un polimero fuso viene pompato in una forma e poi lasciato solidificare. Consideriamo la geometria di **figura 6.3** (il caso con geometria cartesiana è stato trattato nei problemi 4.3 e 4.4), in cui un fluido molto viscoso viene pompato nel tubo di raggio R_0 e poi fuoriesce tra due dischi paralleli di raggio $R >> R_0$.

La velocità del fluido ha direzione radiale, e dipende in genere da r e da z , cioè $\mathbf{v}=v(r,z)\mathbf{1}_r$. Dunque, l'equazione di continuità in coordinate cilindriche si riduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad (6.3.1)$$

da cui otteniamo:

$$v(r,z) = \frac{1}{r} C(z), \quad (6.3.2)$$

dove $C(z)$ è una funzione da determinarsi. Questo risultato si sarebbe potuto intuire, considerando che la portata volumetrica per ogni valore di r deve essere pari a quella di ingresso, cioè

$$(2\pi r)(2H)\bar{v}(r) = \dot{V} \Rightarrow \bar{C} = r\bar{v} = \frac{\dot{V}}{4\pi H}. \quad (6.3.3)$$

L'equazione di Navier-Stokes nelle direzioni z e ϕ mostra che la pressione P dipende soltanto da r , cioè $P=P(r)$, mentre nella direzione radiale la stessa equazione diventa:

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{dP}{dr} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]. \quad (6.3.4)$$

Ora notiamo che il primo termine viscoso dentro la parentesi quadra è identicamente nullo a causa dell'equazione di continuità. Inoltre, avendo a che fare con un fluido molto viscoso, il numero di Reynolds del flusso considerato è molto piccolo, e dunque possiamo trascurare il

termine inerziale (cioè il termine a primo membro). Si noti che, mentre nel caso di flusso in tubi o condotti il termine inerziale è identicamente nullo, purché il flusso sia laminare, cioè per numeri di Reynolds inferiori a 2100, in questo caso non è mai nullo, e lo possiamo trascurare soltanto quando il numero di Reynolds è molto minore di 1. Dunque, l'equazione di Navier-Stokes diventa:

$$r \frac{dP(r)}{dr} = \mu \frac{d^2 C(z)}{dz^2} = A, \quad (6.3.5)$$

dove, poiché il primo membro è una funzione di r , mentre il secondo è una funzione di z , abbiamo egualato entrambi ad una costante A . A questo punto, poiché C , come v , si annulla alle pareti, cioè $C(\pm H) = 0$, otteniamo: $C(z) = - (A/2) [1 - (z/H)^2]$. Il valore di A si può ottenere da questa espressione, considerando che $\bar{C} = -A/3$ e imponendo che l'equazione (6.3.3) venga soddisfatta,

$$A = -\frac{3\dot{V}}{4\pi H}. \quad (6.3.6)$$

Vediamo dunque che il profilo di velocità decade come $1/r$ ed è parabolico lungo z :

$$v(r, z) = \frac{3}{2} \bar{v} \left[1 - \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right]; \quad \bar{v} = \frac{\dot{V}}{4\pi H r}. \quad (6.3.7)$$

A questo punto, possiamo determinare la pressione applicando direttamente l'equazione di Navier-Stokes oppure, più semplicemente, l'equazione (6.3.5) ottenendo:

$$dP = A \frac{dr}{r} \Rightarrow P - P_a = \left(\frac{3\mu\dot{V}}{4\pi H^3} \right) \ln \left(\frac{R}{r} \right), \quad (6.3.8)$$

dove abbiamo imposto che la pressione di uscita sia pari a quella atmosferica, cioè $P(R) = P_a$. In particolare, la pressione di ingresso P_0 , cioè per $r = R_o$, è data da

$$P_0 - P_a = \left(\frac{3\mu\dot{V}}{4\pi H^3} \right) \ln \left(\frac{R}{R_0} \right), \quad (6.3.9)$$

6.4 Flusso dovuto al movimento rapido di una parete

Si consideri un fluido che occupa una regione semi-infinita, $x, y \geq 0$, di spazio. Si supponga che il fluido sia inizialmente in quiete e che all'istante $t=0$ la parete $y=0$ venga posta in movimento, con velocità V lungo la direzione x . Si vuol determinare la velocità $v(y, t)$ del fluido in funzione del tempo t e della distanza y dalla parete.

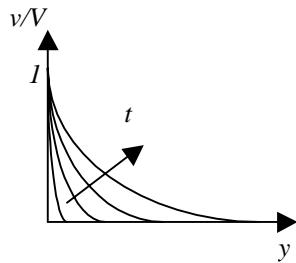


Figura 6.4.1

Naturalmente, ci aspettiamo una soluzione del tipo di quella rappresentata in **figura 6.4.1**, che mostra come il fluido si metta gradualmente in moto. Tuttavia, come vedremo dalla soluzione formale di questo problema, tutte le curve di figura 6.4 (una curva per ogni tempo t) "collassano" in un'unica curva quando l'ascissa viene riscalata, cioè quando si sceglie una opportuna coordinata che dipende sia dal tempo che dallo spazio. Soluzioni di questo tipo si dicono autosimili ("self-similar") e sono molto importanti perché offrono una interpretazione fisica del fenomeno molto chiara.

Vediamo di derivare la soluzione autosimile in questo caso. L'equazione del moto è la seguente:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (6.4.1)$$

dove ν è la viscosità cinematica. Tale equazione è da risolversi con le condizioni:

$$v(y, t=0) = 0; \quad v(y=0, t) = V; \quad v(y \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (6.4.2)$$

Supponiamo che esista una soluzione autosimile. In questo caso, è possibile esprimere v in funzione di una unica coordinata, η , dipendente sia da y che da t , in modo che:

$$v(y, t) = V \tilde{v}(\eta); \quad \eta = \frac{y}{g(t)}, \quad (6.4.3)$$

dove la funzione $g(t)$ è da determinarsi.² Considerando che

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\eta} \left(-\frac{y}{g^2} \frac{dg}{dt} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(-\frac{\eta}{g} \frac{dg}{dt} \right); \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{g} \right); \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{1}{g^2} \right),$$

l'equazione del moto diventa:

² Più in generale, avremmo dovuto assumere che $\eta=h(y, t)$, dove h è una funzione da determinarsi. Tuttavia, nel nostro caso, come nella maggioranza dei casi, si tratta di riscalare una coordinata, y nel nostro caso, con una funzione dell'altra coordinata e dunque partiamo già assumendo che η sia proporzionale a y .

$$\frac{d^2\tilde{v}(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\nu} g \frac{dg}{dt} \right) \eta \frac{d\tilde{v}(\eta)}{d\eta} = 0. \quad (6.4.4)$$

Ora, se esiste una soluzione autosimile, allora \tilde{v} è una funzione soltanto di η . Ciò significa che il termine tra parentesi, che in genere dipende da t , deve o annullarsi (nel qual caso si trova $g=0$ e dunque una assurdità) o essere uguale ad una costante. Come vedremo in seguito, il valore di questa costante non influenza il risultato e dunque la sceglieremo, per ragioni di comodo, uguale a 2:

$$g \frac{dg}{dt} = 2\nu \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2g}{dt^2} = 2\nu \Rightarrow g^2 = 4\nu t + K \Rightarrow g(t) = \sqrt{4\nu t + K} \quad (6.4.5)$$

e dunque l'equazione (6.4.4) diventa:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\tilde{v}}{d\eta} = 0. \quad (6.4.6)$$

A questo punto, guardando le condizioni iniziali e quelle al contorno, ci accorgiamo che il problema sembra impossibile a risolversi. Infatti, siamo partiti da una equazione alle derivate parziali del prim'ordine nel tempo e del second'ordine nello spazio, con una condizione iniziale e due condizioni al contorno (e dunque con un problema inizialmente ben posto) e siamo arrivati ad avere una equazione differenziale ordinaria del second'ordine, che chiaramente richiede solo due condizioni per essere risolta. Tuttavia, nel caso particolare che stiamo considerando, le tre condizioni (6.4.2) si riducono a:

$$\begin{aligned} v(y, t=0) &= 0 \Rightarrow \tilde{v}(y/\sqrt{K}) = 0; \\ v(y=0, t) &= V \Rightarrow \tilde{v}(0) = 1; \\ v(y \rightarrow \infty, t) &= 0 \Rightarrow \tilde{v}(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Da qui vediamo che, scegliendo $K=0$, la prima condizione va a coincidere con la terza e dunque le condizioni imposte alla equazione differenziale si riducono da tre a due. Dunque, se il problema iniziale fosse stato definito in un dominio finito, benché i passaggi che portano da (6.4.1) a (6.4.6) sarebbero stati ancora validi, non avremmo potuto far collassare da tre a due le condizioni al contorno, il che dimostra che in questo caso non esiste una soluzione autosimile.

Procediamo. Posto $f = d\tilde{v}/d\eta$, l'equazione del moto si riduce a $f' + 2\eta f = 0$, che si risolve ottenendo $f = b_1 \exp(-\eta^2)$, da cui:

$$\tilde{v}(\eta) = b_2 + b_1 \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi.$$

Ora, applicando le due condizioni $\tilde{v}(0)=1$ e $\tilde{v}(\infty)=0$, tenendo conto che $\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}/2$,

otteniamo la soluzione:

$$\tilde{v}(\eta) = \frac{v(y, t)}{V} = erfc(\eta) = 1 - erf(\eta); \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{4vt}}, \quad (6.4.8)$$

dove $erf(\eta)$ è la *funzione degli errori*, mentre $erfc(\eta)$ è la *funzione degli errori coniugata*,

$$erf(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi. \quad (6.4.9)$$

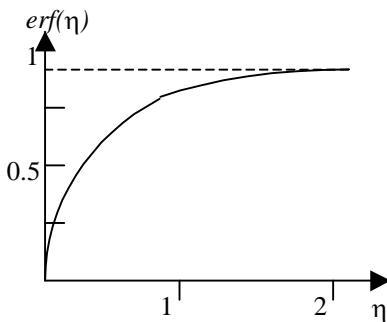


Figura 6.4.2

z	$erf(z)$	z	$erf(z)$
0.00	0.00	0.50	0.520
0.04	0.045	0.60	0.604
0.08	0.090	0.70	0.678
0.12	0.135	0.80	0.742
0.16	0.179	0.90	0.797
0.20	0.223	1.00	0.843
0.24	0.266	1.20	0.910
0.28	0.308	1.40	0.952
0.32	0.349	1.60	0.976
0.36	0.389	1.80	0.989
0.40	0.428	2.00	0.995

Si noti che la funzione degli errori è una funzione dispari, $erf(-\eta) = erf(\eta)$, con $erf(0)=0$ e $erf(\infty)=1$.

Da questa soluzione vediamo che $v/V=0.5$ per $\eta=0.5$ e quindi, se siamo a distanza L dalla parete, la velocità del fluido diverrà pari all'50% di quella di parete, V , dopo un tempo $t_L=L^2/v$. Da qui vediamo ancora una volta che il quadrato della distanza coperta dalla quantità di moto è proporzionale al tempo e inversamente proporzionale alla viscosità cinematica.

Infine, calcoliamo lo sforzo di taglio alla parete, cioè la forza per unità di area esercitata sulla parete da parte del fluido (coincidente con il flusso di quantità di moto):

$$\tau_w = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = -\mu V \left(\frac{d[erfc(\eta)]}{d\eta} \right)_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\mu V}{\sqrt{4vt}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\eta^2} \right)_{\eta=0} = -V \sqrt{\frac{\mu \rho}{\pi t}}.$$

Avremmo potuto trovare qualitativamente questo risultato considerando che il gradiente di v è uguale alla differenza di velocità, V , diviso la lunghezza tipica, $\delta \approx \sqrt{4vt}$, in cui si manifesta tale differenza, ottenendo $\tau_w \approx -\mu V/\delta = -V \sqrt{\mu \rho/(4t)}$. Appare dunque che il flusso decresce come $t^{-1/2}$ e dunque per $t=0$ troviamo uno sforzo infinito. Tuttavia tale condizione, con un profilo di velocità discontinuo alla parete, non è realizzabile in pratica e infatti per $t=0$ la soluzione autosimile non è più applicabile. In ogni caso, comunque, poiché la discontinuità

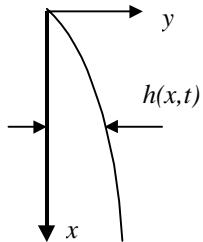
iniziale decade molto velocemente nel tempo, lo sforzo medio applicato nell'intervallo di tempo t_m rimane finito:

$$\bar{\tau}_w = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} \tau_w dt = -\frac{V}{t_m} \sqrt{\frac{\mu\rho}{\pi}} \int_0^{t_m} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2V \sqrt{\frac{\mu\rho}{\pi t_m}}. \quad (6.4.10)$$

6.5 Drenaggio di un film liquido da una parete verticale

In questa sezione vogliamo studiare il drenaggio di un film composto da un fluido viscoso che, per qualche ragione, riveste inizialmente una parete verticale (vedi Figura 6.6). A differenza del caso studiato nella sezione 4.1, qui il fluido non viene alimentato continuamente e quindi, alla fine, lascerà la parete.

Supponendo che lo spessore del film, $h(x,t)$ vari lentamente lungo x e che il fluido sia viscoso, in modo da poter trascurare le forze inerziali, possiamo ritenere che l'equazione di Navier-Stokes si riduca a:



$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g, \quad (6.5.1)$$

Figura 6.5.1

dove v è la velocità del fluido nella direzione x e abbiamo trascurato gli sforzi viscosi in direzione x (cioè $\partial^2 v / \partial x^2 \ll \partial^2 v / \partial y^2$).

Le condizioni al contorno sono che la velocità sia nulla alla parete e che lo sforzo di taglio sia nullo per $y=h(x,t)$. Si noti che in genere $v=v(x,y,t)$ e che la dipendenza da x viene da quest'ultima condizione al contorno e non è esplicita nell'equazione del moto. Matematicamente, questo problema è molto complesso e va semplificato, se vogliamo risolverlo analiticamente. Dunque, supponiamo di essere in regime quasi stazionario, cioè che il campo di moto ad ogni posizione x , corrispondente ad uno spessore del film $h(x,t)$, sia uguale al campo di moto che si avrebbe se lo spessore fosse costante, ottenendo:

$$v = \frac{g}{\nu} \left(hz - \frac{1}{2} z^2 \right). \quad (6.5.2)$$

Il flusso volumetrico per unità di ampiezza, cioè con $\Delta z=1$, si trova facilmente:

$$q(x,t) = \int_0^h v dy = \frac{gh^3(x,t)}{3\nu}. \quad (6.5.3)$$

A questo punto, scriviamo un bilancio massico (cioè volumetrico, perché il fluido è incomprimibile), imponendo che la variazione temporale del volume di fluido compreso tra x e $x+dx$ sia uguale alla differenza tra il flusso entrante e quello uscente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} dx = q_x - q_{x+dx} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{gh^2}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6.5.4)$$

Questa è una equazione omogenea e non lineare alle derivate parziali. Questo tipo di equazioni si risolvono con una soluzione di tentativo,

$$h(x, t) = Ax^\alpha t^\beta, \quad (6.5.5)$$

dove A , α e β sono delle costanti da determinarsi. Sostituendo questo nell'equazione (6.5.4) otteniamo:

$$\beta Ax^\alpha t^{\beta-1} = -\frac{g}{\nu} (Ax^\alpha t^\beta)^2 \alpha Ax^{\alpha-1} t^\beta. \quad (6.5.6)$$

A questo punto, eguagliando gli esponenti dei termini in x e in t nei due membri si trova:

$$\begin{aligned} x: \quad \alpha &= 2\alpha + \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ t: \quad \beta - 1 &= 2\beta + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Infine, eguagliando i coefficienti (non gli esponenti) dei due membri otteniamo: $A = (\nu/g)^{1/2}$, da cui:

$$h(x, t) = \left(\frac{\nu x}{gt} \right)^{1/2}. \quad (6.5.8)$$

Ovviamente, questa soluzione è valida solo per tempi non troppo brevi (infatti per $t=0$ la soluzione diverge), per poter soddisfare l'ipotesi quasi stazionaria. A queste condizioni, questa soluzione è in accordo coi dati sperimentali.

6.6 - Metodi integrali

Quando la soluzione analitica si presenta troppo complicata, un tempo (prima dell'avvento dei calcolatori) si utilizzavano dei metodi di approssimazione, tra i quali i più efficaci sono i metodi integrali. Oggi, il loro valore è soprattutto didattico, in quanto aiutano a capire il meccanismo fisico del fenomeno e a focalizzare il problema.

Consideriamo, ad esempio, il problema del paragrafo 6.4. Integrando i due membri dell'equazione (6.4.1) lungo y , otteniamo:

$$\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t} dy = \frac{d}{dt} \int_0^\infty v dy = \frac{1}{A\rho} \frac{dP}{dt} \quad (6.6.1)$$

$$\nu \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy = -\nu \frac{\partial v}{\partial y}(0) = \frac{1}{\rho} \tau_w = \frac{1}{A\rho} F_w \quad (6.6.2)$$

dove $P = A\rho \int v dy$ è la quantità di moto del fluido, A l'area della parete, ρ la densità del fluido, mentre τ_w e F_w sono, rispettivamente, lo sforzo di taglio e la forza di attrito alla parete. Dunque ritroviamo, come è ovvio, l'equazione di Newton:

$$F_w = \frac{dP}{dt}. \quad (6.6.3)$$

A questo punto, in base alle considerazioni fisiche illustrate in precedenza, sappiamo che il fluido si mette gradualmente in moto, cioè che esiste una regione di spessore $\delta(t)$, crescente col tempo, al di fuori della quale il fluido è in quiete. Dunque assumiamo che:

$$v(y, t) = \begin{cases} V[1 - f(\eta)] & \text{per } 0 < y < \delta(t) \\ 0 & \text{per } y > \delta(t) \end{cases} \quad \eta = \frac{y}{\delta(t)}, \quad (6.6.4)$$

dove $f(\eta)$ è una qualsiasi funzione che decidiamo di usare. In genere, per $f(\eta)$ si sceglie un polinomio di ordine n , cioè $f(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \dots + a_n\eta^n$, in cui le $n+1$ costanti a_0, a_1, \dots, a_n sono scelte in modo da soddisfare le condizioni seguenti:

- a) $f(0)=0$ e $f(1)=1$, per soddisfare le condizioni al contorno;
- b) $f'(1)=0$, in modo da garantire una transizione smussata tra le due regioni del campo di velocità;
- c) $n-3$ ulteriori condizioni del tipo $f''(1)=f'''(1)=\dots=0$.

Si controlli sempre che la funzione risultante sia compresa tra 0 e 1, altrimenti si rischia di trovare dei risultati assurdi. Usando questo profilo di velocità, otteniamo:

$$\frac{P}{A\rho} = \int_0^\infty v dy = \alpha_1 V \delta \quad (6.6.5)$$

e

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\nu \frac{\partial v}{\partial y}(0) = \beta \frac{\nu V}{\delta}, \quad (6.6.6)$$

dove

$$\alpha_1 = \int_0^\infty [1 - f(\eta)] d\eta \quad (6.6.7)$$

e

$$\beta = f'(0) \quad (6.6.8)$$

sono due costanti adimensionali. Dunque l'equazione (6.6.3) diventa:

$$\alpha_1 \delta \frac{d\delta}{dt} = \beta \nu, \quad (6.6.9)$$

da cui:

$$\delta = \sqrt{2(\beta/\alpha_1)\nu t}, \quad (6.6.10)$$

che mostra come lo spessore dello strato di fluido in moto cresca in proporzione del quadrato del tempo.

Adesso scegliamo la seguente funzione f^3 :

$$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \quad (6.6.11)$$

che soddisfa le condizioni $f(0)=0; f(1)=1; f'(1)=0$. Troviamo $\alpha_1=3/8$ e $\beta=3/2$ e dunque otteniamo: $\delta(t) = 2\sqrt{2\nu t}$. Concludiamo che il profilo di velocità è il seguente:

$$v = U \left[1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right], \text{ dove } \eta = \frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}, \quad (6.6.12)$$

in ottimo accordo con la soluzione esatta (6.4.8). Infatti, espandendo quest'ultima in serie di potenze di η otteniamo:

$$v = U \left[1 + K_1\eta + K_2\eta^2 + K_3\eta^3 + \dots \right], \text{ dove } \eta = \frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}, \quad (6.6.13)$$

in cui $K_1 = -1.596$, $K_2 = 0$ e $K_3 = 0.532$.

6.7 Esercizi

- 6.1** Supponendo che sulla piastra superiore di **figura 6.3.1** si applichi una forza Mg , si determini la distanza $2H$ risultante tra i due dischi.

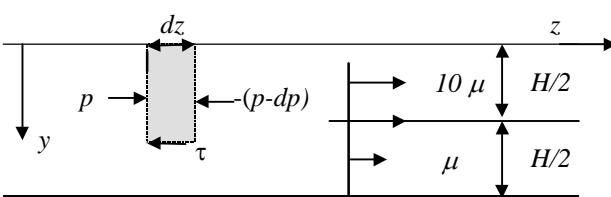


Figura 6.1P

superiore. Si tenga conto che le perdite di carico per unità di lunghezza assiale z , dp/dz , sono note e uguali a $\Delta p/L$, dove Δp è la differenza di pressione impressa da una pompa

- 6.2** Si consideri un canale di altezza H e spessore W , in cui scorrono due liquidi incomprensibili di diversa densità (vedi **figura 6.1P**), di cui il più pesante (acqua), con viscosità μ , occupa la metà inferiore del canale e il più leggero (olio), con viscosità 10μ , occupa la metà

³ In realtà, abbiamo barato un po', imponendo che $f(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3$, con $a_2=0$. Dunque, in questo caso, ci servono soltanto 3 condizioni per determinare le 3 costanti del polinomio, mentre, se non avessimo imposto $a_2=0$, avremmo dovuto aggiungere anche la condizione $f'(1)=0$ ottenendo un polinomio diverso dalla (6.6.11). Si può verificare, tuttavia, che questo secondo polinomio dà risultati peggiori di quello che abbiamo usato in questo esempio.

(o dalla gravità se il canale è inclinato verticalmente), mentre L è la lunghezza del canale.

- Si determini lo sforzo di taglio τ in funzione della coordinata trasversale y . In particolare, si determini lo sforzo alla parete, τ_w .
 - Si determini prima la velocità all'interfaccia, $v_{H/2}$ e poi la velocità al pelo libero, v_0 .
 - Si rappresenti il profilo di velocità in modo qualitativo.
- 6.3** Un fluido newtoniano con viscosità μ scorre in un canale di altezza H . Al pelo libero, per $z=0$, si trascuri la resistenza dell'aria. La parete $z=L$, invece, è composta di un mezzo poroso e la velocità del fluido alla parete, v_w , è uguale alla cosiddetta “slip velocity”, che in questo caso è proporzionale al gradiente di velocità alla parete, $v_w=a(dv/dz)_w$, dove a è la dimensione dei pori. Si determini il profilo di velocità e la velocità massima.

7. Lo strato limite

Nel paragrafo 2.3 abbiamo visto che quando un fluido con viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho$ lambisce un corpo di dimensione L , se la sua velocità caratteristica V è tale da rendere grande il numero di Reynolds, $Re \gg 1$, allora il flusso convettivo di quantità di moto è molto maggiore di quello diffusivo o, detto altrimenti, le forze inerziali sono molto maggiori di quelle viscose. Ciò è vero dovunque, con l'eccezione di una piccola regione vicino alle pareti del corpo, di spessore δ , detto strato limite. Infatti, mentre lontano dalle pareti sono le forze inerziali a prevalere, vicino alle pareti la velocità del fluido è sostanzialmente nulla e dunque lì agiscono prevalentemente le forze viscose, responsabili oltretutto della resistenza offerta dal moto del fluido (cioè della cosa che ci interessa di più). Conseguentemente, ad una certa distanza δ dalle pareti le due forze si devono bilanciare: questa distanza viene detta spessore dello strato limite. Come abbiamo visto nel paragrafo 2.3, si trova che lo spessore relativo dello strato limite diminuisce come l'inverso della radice quadrata del numero di Reynolds, cioè $\delta \approx Re^{-1/2} L$, e quindi lo spessore δ cresce come la radice quadrata di L , $\delta \approx L^{1/2} (\nu/V)^{1/2}$.

In questo capitolo si vuole anzitutto determinare l'ordine di grandezza (lo scaling) dei vari termini che contribuiscono al trasporto di quantità di moto in modo da capire perché si formi uno strato limite. Poi, studieremo la soluzione classica di Blasius di un flusso lambente una parete piana, soluzione che ci permetterà di determinare esattamente il profilo di velocità all'interno dello strato limite.

7.1 Analisi del problema

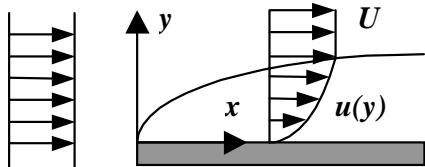


Figura 7.1.1

Si consideri il caso semplice di flusso bidimensionale con velocità $\mathbf{v} = (u, v)$ e pressione p , che lambisca una piastra piana $y=0$ (vedi figura 7.1.1). La velocità imperturbata (cioè quella a monte della piastra) è uniforme e uguale ad $(U, 0)$, con pressione P , mentre alla parete la velocità è nulla. Inoltre si supponga che il numero di Reynolds UL/ν sia molto maggiore di 1, dove L è la dimensione della piastra.

Le tre funzioni incognite, u, v e p , possono determinarsi risolvendo un sistema differenziale costituito dall'equazione di Navier-Stokes (2 equazioni scalari) e dall'equazione di continuità:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7.1.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (7.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.1.3)$$

con condizioni al contorno:

$$u = v = 0 \quad \text{per } y = 0; \quad u = U; \quad v = 0; \quad p = P \quad \text{per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0. \quad (7.1.4)$$

Ora, in base alla nostra intuizione fisica, potremmo dire che, siccome il numero di Reynolds è molto elevato e quindi le forze inerziali sono molto maggiori di quelle viscose, gli ultimi due termini delle equazioni (7.1.1) e (7.1.2) si possono trascurare. Così facendo, tuttavia, il problema si riduce da uno del second'ordine (cioè con derivate seconde in x e y) a uno del prim'ordine e dunque non è più possibile soddisfare entrambe le condizioni al contorno, cioè sia alla parete che all'infinito¹. In particolare, poiché si suppone che la condizione all'infinito sia soddisfatta, ciò significa che non possiamo imporre che la velocità si annulli alla parete. La controparte fisica di questo fatto è che, come abbiamo visto, le forze viscose diventano importanti vicino al corpo e dunque non è vero che si possono trascurare in quella regione perché, così facendo, non riusciamo neanche a capire da dove deriva la resistenza offerta da un oggetto in moto in un fluido.

Dato per scontato che le forze viscose sono rilevanti soltanto all'interno di un cosiddetto strato limite di spessore δ , con $\delta \ll L$, vediamo di determinare l'ordine di grandezza di δ (l'analisi presentata nel paragrafo 2.3 non è ovviamente rigorosa). Anzitutto, notiamo che vicino ai bordi dello strato limite, con $y=O(\delta)$, la velocità in direzione longitudinale è $u \approx U$. Dunque, l'equazione di continuità (7.1.3) stabilisce che $U/x \approx v/\delta$, ovvero $v \approx U(\delta/x)$, che significa che la velocità trasversale è molto minore di quella longitudinale (ricordiamo che $x=O(L)$, dove L è la dimensione "macroscopica" del piatto).

A questo punto, confrontando (7.1.1) con (7.1.2), notiamo che

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \rho \frac{Uv}{x} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \approx \rho \frac{U^2}{x}.$$

Questo significa che possiamo trascurare la variazione di p lungo y , cioè $p = p(x)$. Dunque la pressione in un punto (x,y) dentro lo strato limite è uguale a quella in un punto $(X > x, y)$ all'esterno, cioè alla pressione imperturbata, che nel nostro caso è costante e uguale a P .

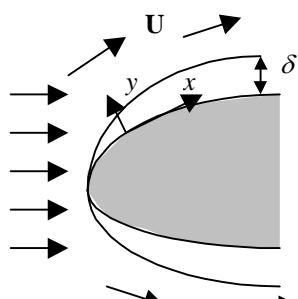


Figura 7.1.2

Nel caso più generale di flusso turbolento attorno ad un oggetto, l'analisi svolta sopra continua ad essere valida, assumendo che x rappresenti la coordinata longitudinale ed y quella trasversale, poiché, salvo casi estremi, la curvatura della parete dell'oggetto è molto maggiore dello spessore dello strato limite (vedi figura 7.1.2). All'esterno dello strato limite, tuttavia, la velocità e la pressione imperturbate, \mathbf{V} e P , in genere non sono costanti, ma si possono determinare risolvendo l'equazione di Eulero, in cui il termine viscoso è assente,

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P, \quad (7.1.5)$$

con condizioni al contorno imposte, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty$ e $P = P_\infty$ all'infinito.

Torniamo al caso della piastra piana. Abbiamo visto che il termine di pressione è assente e che $v \approx U(\delta/x)$. Con riferimento all'equazione (7.1.1), vediamo che i due termini

¹ Ricordiamo che una equazione differenziale di ordine n viene integrata introducendo n costanti di integrazione le quali, a loro volta, si possono determinare imponendo n condizioni (iniziali o al contorno). Dunque, per risolvere una equazione del prim'ordine possiamo imporre una sola condizione al contorno.

convettivi sono dello stesso ordine di grandezza. Infatti, $\rho u \partial u / \partial x \approx \rho U^2 / x$, mentre $\rho v \partial v / \partial y \approx \rho U v / \delta \approx \rho U^2 / x$. Inoltre, dei due termini viscosi, il primo è molto minore del secondo, poiché $\mu \partial^2 u / \partial x^2 \approx \mu U / x^2 < \mu \partial^2 u / \partial y^2 \approx \mu U / \delta^2$. A questo punto applichiamo la definizione di strato limite, imponendo che al bordo $y \approx \delta$ i termini convettivi e viscosi si bilancino. Dunque:

$$\rho \frac{U^2}{x} \approx \mu \frac{U}{\delta^2} \Rightarrow \delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \Leftrightarrow \frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{Re_x^{1/2}}, \quad (7.1.6)$$

dove $\nu = \mu / \rho$ e abbiamo definito il numero di Reynolds $Re_x = U x / \nu$ in funzione della coordinata x .

Alla fine, noto lo spessore dello strato limite, possiamo calcolare lo sforzo di taglio,

$$\tau_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \approx \mu \frac{U}{\delta} = \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{U x}} = \rho U^2 Re_x^{-1/2}, \quad (7.1.7)$$

dove abbiamo ritenuto il gradiente di velocità alla parete approssimativamente uguale alla differenza di velocità a cavallo dello strato limite (uguale a U) diviso per lo spessore dello strato limite. Da qui otteniamo il fattore di attrito,

$$f = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2} \rho U^2} \approx Re_x^{-1/2}. \quad (7.1.8)$$

7.2 Soluzione autosimile di Blasius

Nel 1908 H. Blasius risolse in modo esatto il problema analizzato nel paragrafo precedente². Anzitutto, ripercorrendo i passi fatti nel paragrafo precedente, si rese conto che, a meno di termini di $O(Re^{-1/2})$, la pressione è uniforme mentre il termine viscoso si riduce alla sola derivata rispetto a y . Dunque il problema ha due incognite, u e v , che soddisfano le equazioni seguenti:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.2.2)$$

soggette alle 4 condizioni seguenti:

$$u = v = 0 \text{ per } y = 0; \quad u = U \text{ per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0. \quad (7.2.3)$$

Dal momento che il problema non ammette alcuna scala di lunghezza caratteristica, ci aspettiamo di trovare una soluzione autosimile. In particolare, sfruttando il risultato dell'analisi dimensionale del paragrafo precedente, ci aspettiamo che la soluzione dipenda da un'unica variabile,

² Si trattava della sua tesi di dottorato, con L. Prandtl come relatore.

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} = y \left(\frac{U}{x v} \right)^{1/2}. \quad (7.2.4)$$

Inoltre, come in tutti i problemi a due dimensioni, è conveniente definire una funzione di flusso (stream function) ψ , in modo che

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.2.5)$$

In questo modo l'equazione di continuità diventa: $\partial^2 \psi / \partial x \partial y - \partial^2 \psi / \partial y \partial x = 0$ e dunque è soddisfatta identicamente.

A questo punto, cerchiamo di capire che forma deve avere ψ per poter trovare una soluzione autosimile del tipo $u=UG(\eta)$. Chiaramente, dalla prima delle (7.2.5), vediamo che se sceglieremo una funzione di flusso

$$\psi = \sqrt{vUx} g(\eta), \quad (7.2.6)$$

allora risulta che $G(\eta) = dg/d\eta \equiv g'(\eta)$, cioè,

$$u(\eta) = Ug'(\eta), \quad (7.2.7)$$

Verifichiamo che questa scelta dia veramente origine ad una soluzione autosimile. Anzitutto, considerando che

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\left(\frac{\eta}{2x} \right) \frac{d}{d\eta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{U}{vx} \right)^{1/2} \frac{d}{d\eta}, \quad (7.2.8)$$

troviamo che $v = \frac{1}{2} \left(\frac{vU}{x} \right)^{1/2} (\eta g' - g)$, e da qui l'equazione (7.2.1) si riduce alla seguente equazione in funzione della sola variabile η (condizione essenziale per avere una soluzione autosimile):

$$2g''' + gg'' = 0, \quad (7.2.9)$$

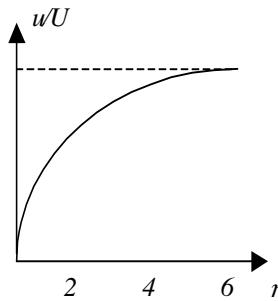


Figura 7.2.1

soggetta alle tre condizioni seguenti:

$$g(0) = g'(0) = 0; \quad g'(\infty) = 1. \quad (7.2.10)$$

Si noti che le due condizioni al contorno $u(x=0)=u(x \rightarrow \infty)=U$ si riducono all'unica condizione $g'(\infty)=1$. Questo problema è ben posto (equazione differenziale ordinaria del terz'ordine con 3 condizioni al contorno) e dunque ammette una soluzione.

Come abbiamo visto, la parte "complicata" della

soluzione di Blasius non è la matematica, ma l'intuizione di scegliere la forma più opportuna per la funzione di flusso che permetta di ottenere un problema ben posto esclusivamente in η .

La soluzione di (7.2.9)-(7.2.10) si ottiene facilmente per via numerica. La curva $g'(\eta)=u/U$ è rappresentata in figura 7.2.1, da cui appare che $u/U=0.99$ quando $\eta=5$. Dunque stabiliamo che per spessore dello strato limite δ_V si intende la distanza

$$\delta_V = 5\sqrt{\frac{vx}{U}}. \quad (7.2.11)$$

Inoltre, dalla soluzione esatta, per $\eta \ll 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} u(\eta) &= U[0.332\eta - 0.0023\eta^4 + O(\eta^7)] \\ v(\eta) &= \sqrt{\frac{vU}{x}}[0.083\eta^2 + O(\eta^5)] \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

da cui si vede che il campo di moto nelle vicinanze della parete si può considerare, con ottima approssimazione, come un campo di moto $u \propto y$, con gradiente di velocità costante.

A questo punto, lo sforzo di taglio alla parete si può calcolare facilmente:

$$\tau_{xy}(x) = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho U^2 \sqrt{\frac{v}{Ux}} g''(0) = 0.332 \rho U^2 \text{Re}_x^{-1/2}, \quad (7.2.13)$$

dove abbiamo considerato che dalla soluzione numerica si ottiene che $g''(0)=0.332$. Ovviamente, lo sforzo di taglio varia con x , cioè con lo spessore dello strato limite. Inoltre, dalla definizione del fattore di attrito otteniamo:

$$f(x) = \frac{\tau_{xy}(x)}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (7.2.14)$$

Le equazioni (7.2.13) e (7.2.14) sembrerebbero dare un risultato assurdo, a prima vista, poiché per $x=0$ lo sforzo di taglio (e quindi anche il fattore di attrito) diverge. Ciò è dovuto al fatto che all'inizio della piastra piana, per $x=0$, lo strato limite ha spessore nullo e dunque il gradiente di velocità è infinito. Dunque, in quel punto, l'ipotesi di partenza $\partial u / \partial x \ll \partial u / \partial y$ non è più valida e la soluzione ottenuta non si può applicare. Tuttavia, da un punto di vista pratico, ci importa determinare la forza di taglio F esercitata dal fluido su di una piastra di lunghezza L e ampiezza W , forza data dal prodotto dell'area della piastra per lo sforzo di taglio medio,

$$F = W \int_0^L \tau_{xy}(x) dx = WL \bar{\tau}_{xy}, \quad (7.2.14)$$

in cui

$$\overline{\tau_{xy}} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_{xy}(x) dx = 0.332 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{U}} \left[\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} \right] = 0.664 \rho U^2 \text{Re}_L^{-1/2} = 2\tau_{xy}(L),$$

dove $\text{Re}_L = UL/\nu$. Dunque, possiamo definire un fattore di attrito medio,

$$\overline{f} = \frac{\overline{\tau_{xy}}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} = 2f(L), \quad (7.2.15)$$

che mostra che l'attrito, ovviamente, non diverge.

7.3 Distacco dello strato limite

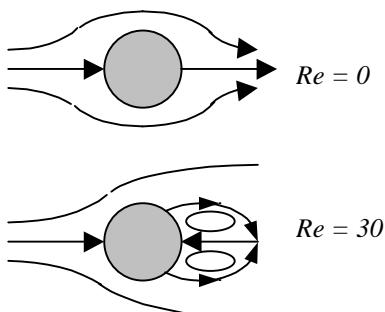


Figura 7.3.1

linee (due punti nel caso bidimensionale della figura). A valle di questi punti, detti punti di scollamento³, c'è una regione in cui il flusso è invertito, cioè va da destra a sinistra, creando

Si osserva che quando un fluido lambisce un corpo, per numeri di Reynolds non troppo piccoli, le linee di flusso che passano vicino alla parte anteriore del corpo se ne distaccano nella parte posteriore, rinchiudendo al loro interno dei vortici di fluido in moto lento e, a volte, anche variabile nel tempo. Ad esempio, nella **figura 7.3.1**, sono rappresentate qualitativamente le linee di flusso di un fluido che lambisce un cilindro per $\text{Re} \ll 1$ e per $\text{Re}=30$. Nel primo caso, il moto fluido è reversibile e dunque le linee di flusso sono simmetriche rispetto all'asse verticale. Al crescere di Re , tuttavia, si vede che il fluido si distacca dalla parte posteriore del cilindro in corrispondenza di due

dunque una coppia di vortici (detti vortici di von Karman), che in questo caso sono stazionari e ruotano in senso opposto tra loro. Quando $\text{Re} > 44$, i due vortici cessano di stare fermi e cominciano a distaccarsi, prima l'uno e poi l'altro, per poi riformarsi e crescere, periodicamente nel tempo, creando una scia a valle del



Figura 7.3.2

cilindro. Dalle simulazioni numeriche si è visto che la frequenza $1/\tau$ con cui questi vortici si distaccano dal cilindro è tale che il numero di Strouhal, $St = U\tau/L$, è circa uguale a 0.3, dove L e U indicano la lunghezza tipica dell'oggetto (il diametro del cilindro, in questo caso) e la velocità imperturbata, rispettivamente. Nella **figura 7.3.2** vediamo la forma della scia dovuta al distacco periodico dei vortici suddetti dalla parte posteriore di un cilindro circolare immerso in un flusso di olio molto viscoso per $\text{Re}=73$.

³ In inglese si dicono "separation points". Qui abbiamo preferito la dizione francese, "decolletage", scollamento, appunto, perché più chiara.

Quando il numero di Reynolds è molto elevato, la formazione di vortici comporta il distacco dello strato limite, come nella **figura 7.3.3**, in cui si vede l'acqua lambire un corpo di rivoluzione (nella parte inferiore della foto) con $Re \approx 10^5$. Questo fenomeno è di enorme importanza, perché nella regione a valle del punto di scollamento diminuiscono grandemente sia la pressione che lo sforzo di taglio, con relativa variazione delle forze di resistenza e della portanza. Ad esempio, nelle fotografie di **figura 7.3.4** (fatte da Prandtl nel 1930), vediamo il profilo dell'ala di un aereo lambito da un flusso d'aria proveniente da destra. Il profilo alare è allungato e di forma tale che, in condizioni "normali" (cioè quando l'angolo di incidenza del fluido si mantiene entro certi limiti, come nella figura di sinistra), lo strato limite non si distacca. Quando l'angolo eccede tali valori massimi, tuttavia, avviene lo scollamento dello strato limite; ad esempio, nella foto di destra della **figura 7.3.4**, lo strato limite si distacca dalla parte superiore dell'ala, causando una situazione, cosiddetta, di stallo, caratterizzata da una forte diminuzione della portanza. Simili considerazioni valgono anche per spiegare la resistenza e l'aderenza a terra delle autovetture.

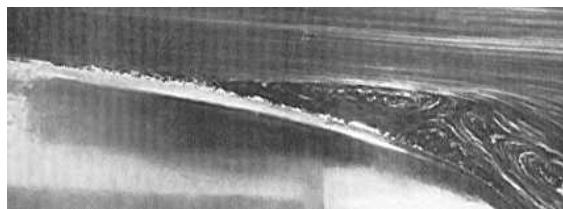


Figura 7.3.3

La formazione di vortici, in genere, è dovuta al fatto che la pressione tende ad aumentare lungo alcune linee di flusso (questo è ciò che accade nella parte posteriore di un cilindro o di una sfera). Questo gradiente di pressione invertito, insieme alle forze di attrito alla superficie del corpo, tende a decelerare il fluido finché, ad un certo punto, quando

l'energia cinetica non basta più a compensare queste forze, il flusso si inverte, con relativa formazione di vortici. Per quanto riguarda la soluzione analitica del problema, la teoria dello strato limite, mentre da un lato predice con grande precisione la posizione del punto di separazione e anche il profilo di velocità e la pressione a monte di tale punto, non si può però applicare a valle. Infatti, tale teoria parte dall'assunzione che, al di fuori dello stato limite, cioè

a distanze di $O(Re^{-1/2})$ dal corpo, il flusso è quello imperturbato, mentre invece, a valle del punto di scollamento, la zona occupata dai vortici non è piccola e, soprattutto, è fortemente instabile già per numeri di Reynolds

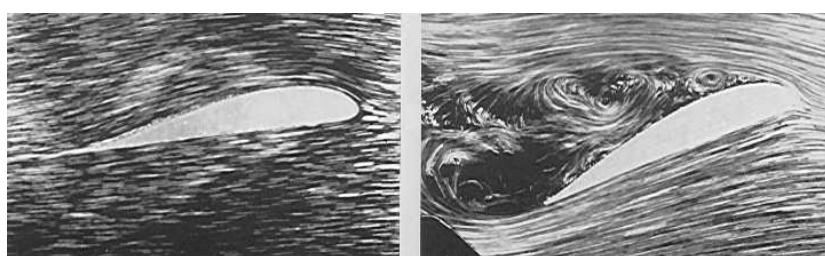


Figura 7.3.4

non grandi, indicativamente per $Re > 40$. Per questa ragione, in tutta la meccanica dei fluidi, il fenomeno della separazione ad alti numeri di Reynolds è forse il più complesso da simulare. Informazioni teoriche e sperimentali a riguardo si possono trovare nei testi "classici" di Churchill (pag. 317-357 e pag. 359-409) e di Batchelor (pag. 337-343).

7.4 - Metodi integrali

Come abbiamo visto nel paragrafo 6.6, invece dei metodi "esatti" di calcolo, talvolta è opportuno utilizzare dei metodi di calcolo approssimati. Consideriamo il caso in cui a contatto con una parete, non necessariamente piana, ci sia uno strato limite e partiamo dall'equazione (7.1.1), in cui il penultimo termine sia trascurabile poiché $\partial u / \partial x \ll \partial u / \partial y$. Dunque, integrando tutti i termini dell'equazione (7.1.1), a cominciare da sinistra, otteniamo:

$$v \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = -v \frac{\partial u}{\partial y}(0) = -\frac{1}{\rho} \tau_w, \quad (7.4.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial x} dy = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{dp}{dx} dy = - \int_0^\infty U \frac{dU}{dx} dy, \quad (7.4.2)$$

$$\int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty u \frac{\partial v}{\partial y} dy = U v_\infty + \int_0^\infty u \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad (7.4.3)$$

$$\int_0^\infty u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty u^2 dy. \quad (7.4.4)$$

Nell'equazione (7.4.2) abbiamo tenuto conto del fatto che la pressione p dipende solo da x e soddisfa l'equazione di Eulero (7.1.5), $dp/dx = -U dU/dx$, mentre in (7.4.3) abbiamo sostituito l'equazione di continuità e abbiamo definito v_∞ come la velocità trasversale lontano dalla parete. Quest'ultima velocità è ottenibile tramite l'equazione:

$$U v_\infty = U \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^\infty U \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\infty \frac{dU}{dx} u dy - \frac{d}{dx} \int_0^\infty U u dy. \quad (7.4.5)$$

Infine, riunendo tutti i risultati scritti sopra otteniamo:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u(U-u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\infty (U-u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (7.4.6)$$

Questa è la cosiddetta equazione integrale della quantità di moto. Generalmente, si preferisce riscriverla definendo lo spessore dello scostamento ("displacement thickness") e lo spessore della quantità di moto ("momentum thickness")⁴, rispettivamente nei termini:

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.4.7)$$

e

⁴ Spesso lo spessore della quantità di moto si trova indicato con θ .

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (7.4.8)$$

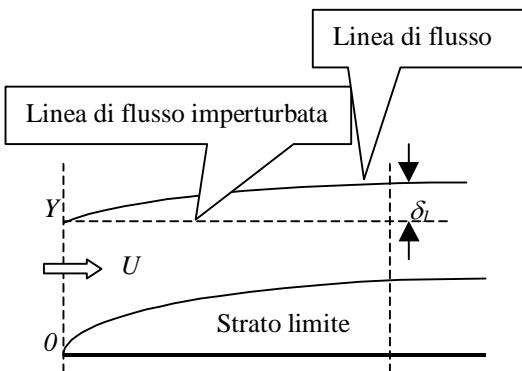


Figura 7.4.1

(cioè lontana dalla parete) la cui quantità di moto è uguale a quella persa nello strato limite. Infatti, in base a questa definizione, da un bilancio di quantità di moto tra le due sezioni indicate nella **figura 7.4.1**, otteniamo:

$$\delta_2 \rho U^2 = \rho \int_0^Y U^2 dy - \int_0^{Y+\delta_1} u^2 dy = \int_0^Y (U^2 - u^2) dy - U^2 \delta_1,$$

e da qui, usando la definizione (7.4.7) di δ_1 , otteniamo l'espressione (7.4.8).

Sostituendo le definizioni (7.4.7) e (7.4.8) nella (7.4.6) otteniamo seguente, detta di von Karman-Pohlhausen:

$$(\delta_1 + 2\delta_2)U \frac{dU}{dx} + U^2 \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (7.4.9)$$

A questo punto, in base alle considerazioni fisiche illustrate in precedenza, sappiamo che esiste una regione di spessore $\delta(t)$, crescente con x , al di fuori della quale il fluido è in quiete. Dunque assumiamo che:

$$v(y, t) = \begin{cases} Vf(\eta) & \text{per } 0 < y < \delta(t) \\ 0 & \text{per } y > \delta(t) \end{cases} \quad \eta = \frac{y}{\delta(t)}, \quad (7.4.10)$$

dove $f(\eta)$ è una qualsiasi funzione “ragionevole” che decidiamo di usare. Come visto nel paragrafo 6.6, in genere si sceglie un polinomio di ordine n , in cui le costanti vengono scelte in modo che $f(0)=0$ e $f(1)=1$, per soddisfare le condizioni al contorno, $f'(1)=0$, in modo da garantire una transizione smussata tra le due regioni del campo di velocità, più ulteriori condizioni del tipo $f''(1)=f'''(1)=\dots=0$. Si controlli sempre che la funzione risultante sia compresa tra 0 e 1, altrimenti si rischia di trovare dei risultati assurdi. Usando questo profilo di velocità, otteniamo:

$$\delta_1 = \alpha_1 \delta; \quad \delta_2 = \alpha_2 \delta \quad (7.4.11)$$

e

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\nu \frac{\partial v}{\partial y}(0) = \beta \frac{W}{\delta}, \quad (7.4.12)$$

dove

$$\alpha_1 = \int_0^1 [1 - f(\eta)] d\eta, \quad (7.4.13)$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 f(\eta) [1 - f(\eta)] d\eta, \quad (7.4.14)$$

$$\beta = f'(0). \quad (7.4.15)$$

Infine, l'equazione integrale (7.4.9) si semplifica nel modo seguente:

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2)\delta^2 \frac{dU}{dx} + \alpha_2 U \delta \frac{d\delta}{dx} = \beta \nu. \quad (7.4.16)$$

L'applicazione più semplice di questa equazione è il flusso lungo una parete piana. In questo caso, la perdita di quantità di moto per unità di tempo è tutta assorbita dalla forza di resistenza alla parete, così che

$$\rho U^2 \delta_2(x) = \int_0^x \tau_w(x) dx \Rightarrow \tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta_2}{dx}, \quad (7.4.17)$$

che coincide con la (7.4.9) con U costante. Si noti che, in base alla definizione del fattore di attrito, $f_F = \tau_w / (\frac{1}{2}\rho U^2)$ e tenendo conto del fatto che, come abbiamo visto dalla soluzione esatta di Blasius, $\tau_w \propto x^{-1/2}$, in questo caso otteniamo:

$$\delta_2(x) = x f_F(x) \quad (7.4.18)$$

Procedendo con il calcolo approssimato, integrando (7.4.16) con $U = \text{cost.}$ otteniamo:

$$\delta(x) = \sqrt{\left(\frac{2\beta}{\alpha_2}\right)} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \Rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\left(\frac{2\beta}{\alpha_2}\right)} \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (7.4.19)$$

Per determinare le costanti α_2 e β , scegliamo lo stesso profilo di velocità (6.6.11),

$$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3, \quad (7.4.20)$$

da cui otteniamo: $\alpha_1 = 3/8$; $\alpha_2 = 39/280$ e $\beta = 3/2$. Dunque $\delta(x) = 4.641(\nu x/U)^{1/2}$, da cui vediamo che vicino alla parete (cioè per $\eta \ll 1$) il profilo di velocità è il seguente:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} \cong 0.323 \frac{y}{\sqrt{vx/U}}, \quad (7.4.21)$$

da confrontarsi con il profilo di velocità esatto (7.2.12), in cui il coefficiente numerico è 0.332, invece di 0.323. Ora valutiamo lo sforzo di taglio, sostituendo in (7.4.12) i valori di β e di $\delta(x)$:

$$\tau_w = 1.5 \frac{\mu U}{\delta} = f_F \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right), \text{ dove } f_F = 0.646 \text{ Re}_x^{-1/2}$$

in ottimo accordo con il risultato esatto (7.2.14), in cui il coefficiente numerico è 0.664.

Per completezza, si noti anche come il valore approssimato $\delta_l = 3\delta/8 = 1.74(vx/U)^{1/2}$ sia in buon accordo con il suo valore esatto,

$$\delta_l(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \sqrt{\frac{vx}{U}} \int_0^\infty (1 - g') d\eta = 1.721 \sqrt{\frac{vx}{U}}, \quad (7.4.22)$$

in cui g' è la funzione di Blasius di **figura 7.2.1** e il fattore numerico è stato valutato numericamente. Infine, si noti che δ_l e f_F sono proporzionali tra loro, in accordo con la (7.4.18); infatti, $\delta_l = 39\delta/280 = 0.646(vx/U)^{1/2}$.

Sottolineiamo ancora il risultato ottenuto: la determinazione analitica approssimata dello sforzo di taglio alla parete, a partire da un ragionevole profilo di velocità all'interno dello strato limite.

7.5 Esercizi

- 7.1 Si commenti il fatto che la velocità massima e l'aderenza alla strada di un'automobile a tre volumi sono maggiori, a parità di condizioni, di quelle di un'auto a due volumi.
- 7.2 Si calcoli lo sforzo di taglio alla parete nel caso di un fluido che lambisce una parete piana, supponendo un profilo di velocità lineare.
- 7.3 Si calcoli lo sforzo di taglio alla parete nel caso di un fluido che lambisce una parete piana, supponendo un profilo di velocità sinusoidale.

8. Conduzione di calore

8.1 Introduzione

Nel trasporto di calore l'energia termica della materia che occupa una certa regione di spazio si trasferisce in uno dei seguenti tre modi alla regione che occupa un'altra regione di spazio:

- 9.1 **Diffusione o conduzione.** Attraverso le interazioni molecolari, l'energia di una molecola si trasferisce ad un'altra. In questo modo le molecole più `energetiche' cedono energia a quelle meno `energetiche' e il calore diffonde dalle regioni più calde a quelle più fredde. Questo meccanismo di trasferimento di calore non necessita di alcun movimento macroscopico e, infatti, può accadere, ad esempio, in un solido.
- 9.2 **Convezione.** Nel caso di un fluido in moto, l'energia associata ad una parte del fluido è trasportata per convezione. Dunque, la risoluzione di problemi di trasporto di calore per via convettiva richiede che si conosca il campo di moto.
- 9.3 **Radiazione.** Le vibrazioni molecolari danno origine alla radiazione elettromagnetica, la quale trasmette energia nello spazio, anche quando lo spazio è vuoto. L'energia radiante viene poi assorbita dalle molecole che sono raggiunte dalla radiazione.

In generale, se isoliamo un elemento di volume nel sistema che stiamo studiando, in regime stazionario (cioè in assenza di ogni variazione nel tempo) e nell'ipotesi che si scambi energia solo sotto forma di calore, possiamo scrivere il seguente bilancio di energia:

$$\begin{pmatrix} \text{potenza termica} \\ \text{in ingresso} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{potenza termica} \\ \text{in uscita} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{potenza termica} \\ \text{prodotta} \end{pmatrix} = 0 . \quad (8.1.1)$$

Si noti che il calore si può "produrre" solo per degradazione a partire da altre forme di energia "più nobili"; infatti, l'energia totale si conserva. Dunque possiamo avere la degradazione di energia meccanica (la dissipazione viscosa) o di energia elettrica, la conversione di energia chimica o nucleare in calore, eccetera.

L'energia può entrare o uscire dall'elemento di volume per conduzione, convezione o radiazione. In questo capitolo, studieremo soltanto la conduzione, anche se alcune considerazioni sono generali e si possono applicare anche alle altre forme di trasferimento di calore. Come abbiamo visto nel capitolo 0, il trasporto di calore per via diffusiva (cioè la conduzione) è regolata dalla legge di Fourier, che stabilisce che il flusso di calore \mathbf{J}_U (vale a dire la quantità di calore che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo) è proporzionale al gradiente di temperatura,¹

$$\mathbf{J}_U = -k\nabla T , \quad (8.1.2)$$

dove k è il coefficiente di conducibilità termica del sistema considerato. Si noti il segno negativo, che indica come il calore passi dalle zone più calde a quelle più fredde, in accordo con la seconda legge della termodinamica.

¹ Si noti che qui abbiamo usato una notazione leggermente diversa, sostituendo J_U con J_Q , per evidenziare il fatto che consideriamo dell'energia interna U soltanto la parte legata al calore.

La conducibilità termica varia tantissimo da materiale a materiale. Nei metalli è di $0.5\text{--}1 \text{ cal/s cm K}$, nel mattone pieno da costruzione è di circa $10^{-3} \text{ cal/s cm K}$, mentre nel legno è di circa $10^{-4} \text{ cal/s cm K}$ (a parità di spessore, una casa in legno è 10 volte meglio isolata che una di mattoni). Per quanto riguarda i liquidi, la conducibilità dell'acqua a temperatura ambiente è di $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ cal/s cm K}$. Dunque la diffusività termica $\alpha=k/\rho c$ è uguale a $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$, da confrontarsi con la viscosità cinematica $\nu=10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$. Infine, nei gas, come predetto dalla teoria cinetica dei gas a bassa pressione vista nei paragrafi 0.5, 0.6 e 0.7, nei gas α e ν non si discostano molto l'un dall'altro.

Quando il bilancio di energia (8.1.1) si applica ad un volume elementare che includa una delle superfici di contorno del sistema, si pone il problema delle **condizioni al contorno**. Di queste, le seguenti tre sono le più comuni:

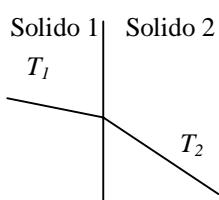


Figura 8.1.1

1. La temperatura della superficie di contorno è fissata: $T = T_0$.
2. Il flusso al contorno è fissato: $J_U = J_{U0}$ (applicando la legge di Fourier, questo significa fissare il gradiente della temperatura sulla superficie di contorno).
3. Alle interfacce solido-solido si impone che temperatura e flusso termico siano continui. Con riferimento all'figura 8.1.1, ciò significa:

$$T_1 = T_2; \quad J_1 = J_2 \Rightarrow k_1 \frac{dT_1}{dx} = k_2 \frac{dT_2}{dx}. \quad (8.1.3)$$

Si noti che all'interfaccia, a causa della diversa conducibilità termica dei due solidi, il profilo di temperatura cambia pendenza.

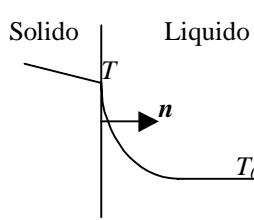


Figura 8.1.2

4. Alle interfacce solido-liquido si applica la cosiddetta **legge del raffreddamento di Newton**, in cui il flusso alla parete si suppone proporzionale alla differenza tra la temperatura della parete T e quella del fluido lontano dalla parete, T_0 ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_U = h(T - T_0) \quad (8.1.4)$$

dove \mathbf{n} è il versore perpendicolare alla superficie e diretto verso l'esterno dell'elemento di volume, cioè nella direzione del fluido, mentre h è detto **coefficiente di scambio termico**.

La legge di Newton (8.1.4) indica che, se T è maggiore di T_0 , il flusso termico avrà la direzione di \mathbf{n} (cioè $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_U > 0$, ovvero il flusso è uscente dal solido), come deve essere per non contraddirre la seconda legge della termodinamica. Inoltre, la legge di Newton indica che il flusso termico è proporzionale alla differenza di temperatura attraverso un coefficiente di proporzionalità h da determinarsi sperimentalmente.

La legge di Newton è una regola empirica e h è un coefficiente di "ignoranza". In realtà, il profilo di temperatura di un fluido in vicinanza della parete è del tipo rappresentato nella **figura 8.1.2**, cioè una linea continua che raccorda la temperatura alla parete T con quella del *bulk* del fluido, T_0 . Alla parete, poi, temperatura e flusso termico sono continui, proprio come per qualsiasi altra interfaccia. Tuttavia, spesso non si conosce esattamente il campo di

moto del fluido e dunque, non potendosi determinare l'andamento della temperatura vicino alla parete, si introduce il concetto di coefficiente di scambio termico.

Si noti che per $h=0$ la legge di Newton si riduce a $J_Q=0$, cioè a una condizione al contorno del secondo tipo, mentre per $h\rightarrow\infty$, dal momento che il flusso termico deve restare finito, la legge di Newton si riduce a $T=T_0$, cioè a una condizione al contorno del primo tipo.

8.2 Conduzione di calore unidirezionale

8.2.1 Geometria piana

Si consideri una piastra d'acciaio di conducibilità termica k , spessore L , altezza $H \gg L$ e ampiezza $W \gg L$ (vedi figura 8.3). Da una parte, per $x=0$, la piastra è lambita da un liquido, acqua, ad alta pressione e a temperatura T_I , mentre dall'altra, per $x=L$, vi è un gas, vapore, a pressione inferiore e temperatura $T_0 < T_I$.² Supponiamo che il coefficiente di scambio termico

tra la piastra e l'acqua sia molto alto, così da poter supporre che la temperatura della piastra per $x=0$ sia T_I . Inoltre, trascurando gli effetti ai bordi, possiamo supporre che il flusso termico sia unidirezionale, in direzione x .

Si scriva il bilancio termico nell'elemento elementare di volume di spessore Δx , altezza H e ampiezza W , rappresentato in

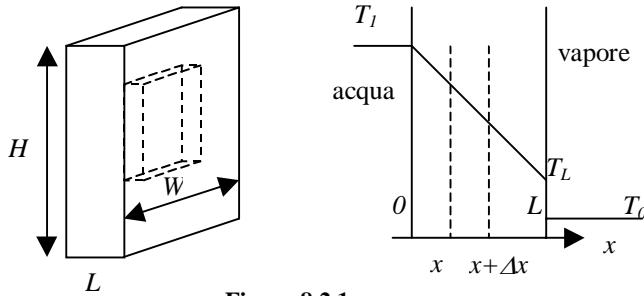


Figura 8.2.1

figura 8.2.1, considerando che non c'è alcuna generazione di calore:

$$J_U(x)(HL) - J_U(x + \Delta x)(HL) = 0$$

Dunque otteniamo che il flusso J_U è lo stesso in x e in $x + \Delta x$ e, siccome il punto x e lo spessore Δx sono arbitrari, concludiamo che

$$J_U(x) = \text{costante} = J \quad \text{per } 0 < x < L, \quad (8.2.1)$$

dove la costante J non è nota, a questo punto. Ora, applicando la legge di Fourier, in ogni punto x abbiamo: $J = -k(dT/dx)$, in cui k è una costante, per cui otteniamo che il profilo di temperatura è lineare, con $dT/dx = -J/k$ costante ovunque per $0 < x < L$. Integrando questa equazione e imponendo la prima condizione al contorno, $T(0) = T_I$, otteniamo:

$$T(x) = T_I - (J/k)x.$$

Adesso applichiamo la seconda condizione al contorno: $J(L) = h[T(L) - T_0]$, ottenendo: $J = h[T_I - T_0 - JL/k]$, ovvero:

² Questa condizione è tipica nei tubi che costituiscono un generatore di vapore.

$$J_U = \frac{h(T_1 - T_0)}{1 + Bi} = \frac{Bi}{1 + Bi} \frac{k(T_1 - T_0)}{L}; \quad Bi = \frac{hL}{k}, \quad (8.2.2)$$

dove Bi è il numero di *Biot*, che rappresenta il rapporto tra lo scambio termico alla superficie della piastra e quello all'interno della piastra (si noti che, per $T_1 > T_0$, il flusso è positivo, come deve essere).

Nella stragrande maggioranza dei problemi, ci interessa determinare soltanto il flusso termico. Talvolta però, può capitare di dover determinare anche il profilo di temperatura.³ Nel caso in esame, con facili passaggi si trova che questo è dato da:

$$\frac{T_1 - T(x)}{T_1 - T_0} = \frac{Bi}{1 + Bi} \frac{x}{L}, \quad (8.2.3)$$

Il profilo di temperatura, dunque, è lineare (vedi figura 8.2.1) tra T_1 per $x=0$ e T_L per $x=L$, dove:

$$T_L = T(L) = T_1 - \frac{Bi}{1 + Bi} (T_1 - T_0). \quad (8.2.4)$$

Si considerino ora il caso limite con numero di Biot piccolo o quello con numero di Biot grande. In questo contesto, dire che h è grande o che k è piccolo non vuol dire niente: quello che conta è come si correlano tra loro insieme alle dimensioni del sistema.

- $Bi \ll 1$. In questo caso, lo scambio termico alla parete è molto lento rispetto alla conduzione, che avviene all'interno della piastra: non appena un po' di calore entra dal (o esce nel) fluido, l'energia termica si ridistribuisce subito per conduzione all'interno della piastra. Infatti, per $Bi=0$, troviamo che $T_L=T_1$ e il flusso $J=0$, cioè il profilo di temperatura è piatto, con flusso termico nullo.
- $Bi \gg 1$. In questo caso, lo scambio termico alla parete è molto veloce rispetto alla conduzione: il calore entra o esce alla parete senza difficoltà, però poi è lento a ridistribuirsi all'interno della piastra. Infatti, per $Bi \rightarrow \infty$, troviamo che $T_L=T_0$ (cioè la temperatura alla parete è uguale a quella del vapore) e, conseguentemente, il flusso termico è massimo, $J=k(T_1-T_0)/L$.

8.2.2 Geometria cilindrica

Si consideri un tubo circolare, composto da un acciaio di conducibilità termica k , raggi interno ed esterno R_i e R_o , rispettivamente, e altezza $L \gg r_o$. All'interno del tubo scorre un liquido in pressione a temperatura T_1 , mentre le pareti esterne sono lambite da un vapore, anch'esso in moto, con cui il tubo scambia calore con coefficiente di scambio termico h . Si voglia determinare il flusso totale del calore scambiato e il profilo di temperatura.

Come nell'esempio precedente, si supponga che lo scambio termico con il liquido sia molto buono, così che la temperatura della parete interna del tubo sia uguale a T_1 , mentre il flusso termico alla parete esterna sia dato dalla legge di Newton, con coefficiente di scambio

³ Spesso, il profilo di temperatura va determinato prima per poi trovare il flusso termico. A volte però, come in questo esempio, ciò non è necessario.

termico h . Come nel caso precedente, scriviamo l'equazione di bilancio in una corona cilindrica di raggi r e $r+\Delta r$, trascurando gli effetti ai bordi e quindi supponendo che il flusso termico sia unidirezionale lungo r , ottenendo:

$$J_U(r)(2\pi rL) - J_U(r+\Delta r)(2\pi(r+\Delta r)L) = 0. \quad (8.2.5)$$

Questa relazione indica che il flusso totale di calore, $Q=J_U(r)2\pi rL$, è costante in ogni sezione e dunque vediamo che $J_U(r)r=C$ costante, a differenza del caso piano precedente, in cui il flusso J_U è costante. Da qui otteniamo, integrando tra R_i ed r e applicando la prima condizione al contorno, $T(R_i)=T_1$:

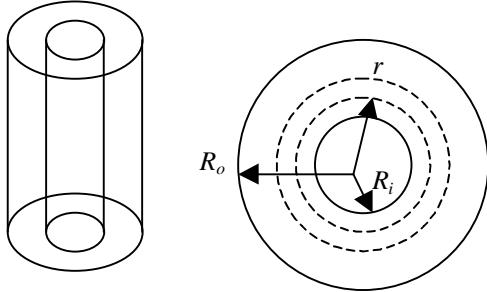


Figura 8.2.2

$$J_U = \frac{C}{r} = -k \frac{dT}{dr} \Rightarrow T = T_1 - \frac{C}{k} \ln \frac{r}{R_i}.$$

Si noti che nel caso di geometria cilindrica il profilo di temperatura è logaritmico, come ci si poteva attendere, visto che il flusso è proporzionale a $1/r$ e la differenza di temperatura si ottiene come integrale del flusso. Nel caso piano, invece, il profilo di temperatura è lineare, poiché il flusso è costante. A questo punto determiniamo C applicando la seconda condizione al contorno, $J_U(R_o)=h[T(R_o)-T_0]$ e ottenendo con facili passaggi:

$$C = \frac{Bi}{1 + Bi \ln(R_o/R_i)} k(T_1 - T_0); \quad Bi = \frac{hR_o}{k}, \quad (8.2.6)$$

dove Bi è il numero di Biot (si noti che C è positivo, come deve essere poiché il flusso J_U è diretto verso l'esterno e quindi è positivo). Da qui otteniamo il flusso J_U , uguale a C/r , e il flusso totale $\dot{Q} = 2\pi r L J_U$, che è costante e uguale a $2\pi L C$,

$$\dot{Q} = \frac{2\pi k L (T_1 - T_0) Bi}{1 + Bi \ln(R_o/R_i)}. \quad (8.2.7)$$

Sostituendo l'espressione di C nell'equazione precedente, otteniamo il profilo di temperatura:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{Bi \ln(r/R_i)}{1 + Bi \ln(R_o/R_i)}, \quad (8.2.8)$$

e in particolare, la temperatura della parete esterna, $T_{est}=T(R_o)$,

$$\frac{T_1 - T_{est}}{T_1 - T_0} = \frac{Bi \ln(R_o/R_i)}{1 + Bi \ln(R_o/R_i)}. \quad (8.2.9)$$

A questo punto, valgono le stesse considerazioni fatte per il caso piano. Quando $Bi=0$, $T_{est}=T_1$ e il flusso è nullo, mentre quando $Bi>>1$, $T_{est}=T_0$ e il flusso totale è massimo e uguale a:

$$\dot{Q}_{Bi>>1} = \frac{2\pi k L (T_1 - T_0)}{\ln(R_o/R_i)}, \quad (8.2.10)$$

Si lascia come esercizio la dimostrazione che quando $(R_o-R_i) \ll R_o$ la soluzione nel caso a geometria cilindrica si riduce a quella piana.

Si noti infine che nel caso di cilindro pieno, cioè per $R_i=0$, la soluzione del problema è $J_U=0$ e $T=T_0$, indipendentemente dal valore di h .

8.2.3 Geometria sferica

Si consideri una corona sferica, composto da un materiale di conducibilità termica k , con raggi interno ed esterno R_i e R_o , rispettivamente. L'interno della sfera sia mantenuta ad una temperatura T_1 , mentre le pareti esterne siano lambite da vapore, con cui la corona sferica scambia calore con coefficiente di scambio termico h . Si voglia determinare il flusso totale del calore scambiato e il profilo di temperatura.

Procedendo come nel caso precedente, vediamo che nello stato stazionario il flusso totale di calore che attraversa una qualsiasi sezione, $\dot{Q} = 4\pi r^2 J_U$, è costante. Dunque, integrando $J_U=C/r^2$, dove C è una costante, applicando l'equazione di Fourier, otteniamo:

$$T_1 - T = \frac{C}{k} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{r} \right), \quad (8.2.11)$$

dove abbiamo applicato la prima condizione al contorno, $T(R_i)=T_1$. Si noti che il profilo di temperatura stazionario per geometrie sferiche varia come $1/r$. A questo punto, applicando l'altra condizione al contorno, $J_U(R_o)=h[T(R_o)-T_o]$, otteniamo C , e da qui la temperatura alla parete esterna, il flusso di calore J_{Ui} alla parete interna⁴ e il flusso totale,

$$\frac{T_1 - T(R_o)}{T_1 - T_0} = \frac{Bi'}{1 + Bi'}, \quad (8.2.12)$$

$$J_{Ui} = \frac{k(T_1 - T_0)}{L} \frac{Bi'}{1 + Bi'} \frac{R_o}{R_i}; \quad \dot{Q} = 4\pi R_i^2 J_{Ui}, \quad (8.2.13)$$

dove $Bi' = (hL/k)(R_o/R_i)$, con $L = R_o - R_i$.

8.3 Il solido composto

Si consideri un solido composto da due strati di materiali diversi, di spessore L_1 e L_2 e si supponga che scambi calore con due fluidi a temperatura T_{0L} e T_{0R} , con coefficienti di

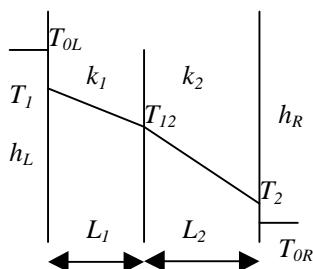
⁴ Come nel caso cilindrico, anche qui, nel caso di una sfera piena, cioè per $R_i=0$, otteniamo $J_U=0$ e $T=T_0$, indipendentemente dal valore di h .

scambio termico h_L e h_R (vedi **figura 8.3.1**). Poiché, in condizioni stazionarie, in ogni sezione il flusso termico è costante, otteniamo:

$$J_U = h_L(T_{0L} - T_1) = \frac{k_1}{L_1}(T_1 - T_{12}) = \frac{k_2}{L_2}(T_{12} - T_2) = h_R(T_2 - T_{0R}), \quad (8.3.1)$$

da cui si può determinare facilmente le temperature intermedie T_1 , T_{12} e T_2 . Tuttavia, poiché quello che ci interessa, in genere, è soltanto il flusso, conviene riscrivere le espressioni (8.3.1) nel modo seguente:

$$(T_{0L} - T_1) = \frac{\dot{Q}}{h_L A}; \quad (T_1 - T_{12}) = \frac{\dot{Q} L_1}{k_1 A}; \quad (T_{12} - T_2) = \frac{\dot{Q} L_2}{k_2 A}; \quad (T_{0R} - T_1) = \frac{\dot{Q}}{h_R A}, \quad (8.3.2)$$



dove $\dot{Q} = J_U A$ è il flusso totale e A è l'area delle sezioni attraversate dal calore. Sommando le espressioni in (8.3.2) otteniamo:

$$\Delta T_{tot} = R_{th} \dot{Q}, \quad (8.3.3)$$

dove $\Delta T_{tot} = T_{0L} - T_{0R}$ è l'escursione termica totale, mentre

Figura 8.3.1

$$R_{th} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{h_L} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{1}{h_R} \right). \quad (8.3.4)$$

è la resistenza termica, definita dunque come il rapporto tra differenza di temperatura e flusso totale. Dunque, la resistenza termica R_{th} , definita in (8.3.3) è la somma delle resistenze termiche delle singole sezioni, $R_{th,i}$,

$$R_{th} = \sum_i R_{th,i}, \quad (8.3.5)$$

dove

$$R_{th,i} = \begin{cases} \frac{L_i}{Ak_i} & \text{nel caso conduttivo(resistenza distribuita)} \\ \frac{1}{Ah_i} & \text{nel caso convettivo(resistenza concentrata)} \end{cases}, \quad (8.3.6)$$

in cui L_i e k_i sono lo spessore e la conducibilità termica della resistenza conduttriva, mentre h_i è il coefficiente di scambio termico alla parete

L'analogia tra il trasporto di calore e quello di energia elettrica in un circuito puramente resistivo è ovvia: il flusso di corrente prende il posto di quello termico, la differenza di tensione quello della differenza di temperatura e la resistenza elettrica quello della resistenza termica. Dunque quando, come nel caso appena visto, le sezioni sono in serie (cioè ogni sezione è attraversata dallo stesso flusso, mentre la differenza di temperatura totale è la somma delle differenze di temperatura delle singole sezioni), la resistenza totale è uguale

alla somma delle resistenze delle singole sezioni; al contrario, quando le sezioni sono in parallelo (cioè ogni sezione è soggetta alla stessa differenza di temperatura, mentre il flusso totale è la somma dei flussi che attraversano le singole sezioni) l'inverso della resistenza totale è uguale alla somma degli inversi delle resistenze delle singoli sezioni (vedi problema 8.9).

8.3.1 Caso a geometria cilindrica

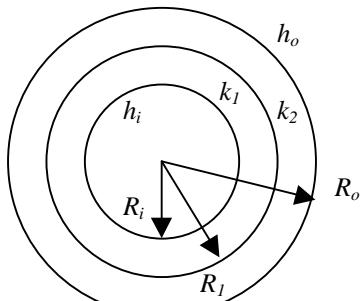


Figura 8.3.2

La resistenza conduttiva di un tubo circolare di lunghezza L , raggio interno R_i e raggio esterno R_o si ottiene utilizzando l'equazione (8.2.10). Dunque, nel caso di un tubo circolare composto di due strati concentrici, l'equazione (8.3.3) è ancora valida, in cui la resistenza termica R_{th} è la somma delle resistenze termiche delle singole sezioni, $R_{th,i}$, definite come:

$$R_{th,i} = \begin{cases} \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi k L} & \text{nel caso conduttivo} \\ \frac{1}{2\pi L h_i} & \text{nel caso convettivo} \end{cases}, \quad (8.3.7)$$

dove r_i e r_o sono il raggio interno ed esterno della sezione e abbiamo considerato che la resistenza convettiva alla parete è uguale a quella del caso piano, in cui $A=2\pi rL$ è l'area della superficie di scambio di raggio r (R_i o R_o). Ad esempio, nel caso di un tubo circolare composto di due materiali, come mostrato in **figura 8.3.2**, otteniamo:

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_i h_i} + \frac{\ln(R_1/R_i)}{k_1} + \frac{\ln(R_o/R_1)}{k_2} + \frac{1}{R_o h_o} \right). \quad (8.3.8)$$

8.4 Approssimazione di quasi stazionarietà

L'approssimazione di quasi stazionarietà consiste nel poter assumere che il tempo caratteristico τ_{ss} con cui il profilo di temperatura (e dunque il flusso termico) nel sistema considerato raggiunge la stazionarietà sia molto minore del tempo caratteristico τ con cui cambiano le condizioni al contorno.

L'esempio più semplice è quello in cui si vuole determinare il profilo di temperatura di un oggetto metallico con temperatura iniziale T_i , conducibilità termica k e dimensione lineare L , che al tempo $t=0$ viene immerso in un liquido mantenuto a temperatura T_0 e con il quale scambia calore con coefficiente di scambio termico h . In generale, la temperatura dell'oggetto dipende sia dal tempo che dalla posizione (banalmente, la temperatura alla parete è diversa da quella al centro del corpo); quindi $T=T(r,t)$ e la soluzione di questo problema, come si vede nel paragrafo 11.4, è piuttosto complessa. Tuttavia, quando $Bi=hL/k \ll 1$, il problema si semplifica notevolmente. Vediamone il perché.

Da un bilancio di energia, possiamo scrivere che la velocità con cui varia nel tempo l'energia interna del corpo, U , è uguale al flusso termico specifico entrante moltiplicato per la superficie del corpo, S . Considerando che $U = Mc\bar{T}$, in cui $M = \rho V$, V è il volume del corpo, ρ (che si suppone costante) è la sua densità e \bar{T} è la sua temperatura media, otteniamo⁵:

$$\rho c V \frac{d\bar{T}}{dt} = -SJ_U = -Sh(T_w - T_0), \quad (8.4.1)$$

dove J_U è il flusso termico medio uscente, a sua volta esprimibile in funzione del coefficiente di scambio termico h e il suffisso “*w*” sta ad indicare *wall*, cioè “alla parete”. Ora, in condizioni stazionarie, la temperatura dell’oggetto si può considerare uniforme, con $\bar{T} = T_w = T(t)$, e dipendente quindi soltanto dal tempo. In questo caso, l’equazione (8.4.1) si può riscrivere come:

$$\rho c L \frac{dT}{dt} = -h(T - T_0), \quad (8.4.2)$$

dove $L=V/S$ è la dimensione lineare caratteristica dell’oggetto. Posto $\Delta T = T - T_0$, otteniamo:

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{dt}{\tau}; \quad \tau = \frac{\rho c L}{h}, \quad (8.4.3)$$

da cui, risolvendo con condizioni iniziali $\Delta T(t=0) = \Delta T_i = T_i - T_0$, otteniamo:

$$\Delta T = \Delta T_i e^{-t/\tau}, \quad (8.4.4)$$

Da qui vediamo che τ è il tempo caratteristico necessario per raggiungere l’equilibrio termico, cioè il tempo caratteristico con cui cambia la temperatura del corpo. A questo punto, verifichiamo che l’ipotesi di quasi stazionarietà sia ragionevole, imponendo che il tempo τ sia molto maggiore di quello necessario per raggiungere lo stato stazionario (in cui la temperatura dell’oggetto è costante) all’interno dell’oggetto: $\tau_{ss}=L^2/\alpha$, dove $\alpha=k/\rho c$ è la diffusività termica. Infatti, da $\tau_{ss}<<\tau$ otteniamo $Bi=hL/k<<1$ e dunque vediamo che l’ipotesi che il numero di Biot sia piccolo garantisce che la condizione di quasi stazionarietà sia verificata.

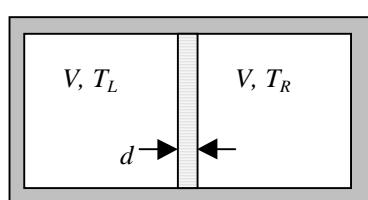


Figura 8.4.1

Vediamo adesso un caso più complesso. Un serbatoio isolato di volume $2V$ è diviso in due parti uguali (L , “left” e R , “right”) da una membrana sottile e impermeabile di spessore d (vedi **figura 8.4.1**). Supponendo che le due metà del contenitore siano riempite con lo stesso liquido che viene continuamente miscelato, inizialmente a temperature T_{L0} e T_{R0} , vogliamo determinare come varia nel tempo la temperatura nelle due parti del contenitore.

⁵ Come è ben noto, l’energia interna ha un riferimento arbitrario. Per comodità, qui assumiamo che $E(T=0) = 0$.

Anzitutto, osserviamo che l'energia interna del liquido nel serbatoio si mantiene costante nel tempo. In particolare, siccome per tempi lunghi si raggiunge l'equilibrio termico, con $T_L = T_R = T_f$, otteniamo:

$$\rho c V T_{L0} + \rho c V T_{R0} = \rho c V T_L + \rho c V T_R = 2\rho c V T_f \Rightarrow T_L + T_R = 2T_f \quad (8.4.5)$$

dove ρ e c sono la densità e il calore specifico del liquido, che supponiamo costanti. Quindi vediamo che la somma $(T_L + T_R)$ si mantiene costante nel tempo ed uguale al suo valore iniziale e finale, $2T_f$, dove

$$T_f = T_L(t \rightarrow \infty) = T_R(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}(T_{L0} + T_{R0}). \quad (8.4.6)$$

Adesso esaminiamo il problema nel transitorio. Da un bilancio energetico nelle due metà del serbatoio otteniamo:

$$\rho c V \frac{dT_L}{dt} = -AJ_L \quad \text{e} \quad \rho c V \frac{dT_R}{dt} = -AJ_R \quad (8.4.7)$$

dove A è l'area della membrana, mentre J_L e J_R sono i flussi di calore uscenti da L e da R , rispettivamente. In una condizione di quasi stazionarietà, si ha:

$$J_L = -J_R = k_s \frac{T_L - T_R}{d}, \quad (8.4.8)$$

dove k_s è la conducibilità termica della membrana. Ora, sommando le due equazioni di bilancio (8.4.7), otteniamo: $d(T_L + T_R)/dt = 0$, che esprime la condizione vista sopra che l'energia contenuta nel serbatoio è costante nel tempo. Se invece sottraiamo tra loro le due equazioni di bilancio (8.4.7) si ottiene:

$$\rho c L \frac{d\Delta T}{dt} = -2J_L = -2 \frac{k_s \Delta T}{d}, \quad (8.4.9)$$

dove $\Delta T = T_L - T_R$ e $L = V/A$. Dunque:

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{dt}{\tau}; \quad \tau = \frac{\rho c L d}{2k_s}, \quad (8.4.10)$$

da cui si ottiene, imponendo che $\Delta T(t=0) = \Delta T_0$:

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-t/\tau}, \quad (8.4.11)$$

che mostra come ΔT , e quindi anche T_L e T_R , tenda esponenzialmente (con un esponenziale negativo) al suo valore di equilibrio, che è zero. Infine, con facili passaggi, dalla (8.4.5) e (8.4.11) otteniamo:

$$T_L = \frac{1}{2} T_{L0} (1 + e^{-t/\tau}) + \frac{1}{2} T_{R0} (1 - e^{-t/\tau}); \quad T_R = \frac{1}{2} T_{R0} (1 + e^{-t/\tau}) + \frac{1}{2} T_{L0} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (8.4.12)$$

Adesso verifichiamo a posteriori che la condizione di quasi stazionarietà sia applicabile. Imponendo che $\tau \gg \tau_{ss}=d^2/\alpha_s$, dove $\alpha_s=k_s/\rho_s c_s$ è la diffusività termica della membrana, otteniamo:

$$\left(\frac{d}{L}\right) \ll \left(\frac{\rho c}{\rho_s c_s}\right). \quad (8.4.13)$$

8.5 Esercizi

- 8.1** Uno stanzino ben isolato perde calore attraverso una finestra di 1 m^2 di area, con un vetro dello spessore $L=0.5 \text{ cm}$. La temperatura esterna (media) è $T_0=10^\circ\text{C}$, quella interna (pari a quella della superficie interna del vetro) è $T_I=25^\circ\text{C}$, mentre il coefficiente di scambio termico con l'esterno è $h=10 \text{ W/m}^2\text{K}$. Si calcoli, in kWh , il consumo energetico annuo, sapendo che la conducibilità termica del vetro è $k_v=0.75 \text{ W/mK}$. Si calcoli quanto si risparmierebbe all'anno se si sostituisse la finestra con una a doppi vetri, usando vetri di $L/2=0.25 \text{ cm}$ di spessore, separati da una intercapedine di aria (si supponga che l'aria sia stagnante, con $k_a=0.024 \text{ W/mK}$) dello spessore $l=1 \text{ mm}$.
- 8.2** Si calcoli la perdita di potenza termica (in Watt) attraverso le pareti di una casa, pareti spesse $L_1=10 \text{ cm}$ e aventi una superficie $S=100 \text{ m}^2$. La temperatura interna è di 20°C , quella esterna 0°C . Il coefficiente di scambio termico (sia all'esterno che all'interno) è $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$, mentre la conducibilità termica dei mattoni che compongono la parete è $k_1 = 0.1 \text{ W/mK}$. Si determini quanto si risparmia in relativo rivestendo la parete esterna con uno strato spesso $L_2=0.6 \text{ cm}$ di un materiale isolante con conducibilità termica $k_2 = 0.002 \text{ W/mK}$.
- 8.3** Una parete è composta di una strato di mattoni ($k_2 = 0.72 \text{ W/mK}$) dello spessore di $L_2 = 10 \text{ cm}$, che scambia calore con un ambiente a $T_2=25^\circ\text{C}$ con coefficiente di scambio termico $h_2 = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$, al quale è appoggiato uno strato di materiale isolante ($k_1 = 0.06 \text{ W/mK}$) dello spessore di $L_1 = 2 \text{ cm}$, che scambia calore con un ambiente a $T_1 = 45^\circ\text{C}$ con coefficiente di scambio termico $h_1 = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$. Si determini il flusso di calore.
- 8.4** Un tubo circolare ($r_1 = 2.1 \text{ cm}; r_2 = 2.5 \text{ cm}$) di acciaio ($k_1 = 43 \text{ W/mK}$) trasporta del vapor saturo a $T_i=180^\circ\text{C}$ attraversando un ambiente a $T_0=25^\circ\text{C}$. Il tubo è ricoperto da uno strato (spessore $d = 1.5 \text{ cm}$) di materiale isolante ($k_2 = 0.04 \text{ W/mK}$). I coefficienti di scambio interno ed esterno sono, rispettivamente, $h_i = 12000 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $h_o = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$. Si calcolino le perdite per metro di cilindro.
- 8.5** Si consideri l'isolamento attorno ad un tubo, supponendo per semplicità che la temperatura interna dell'isolante, per $r=r_i$ si mantenga costante, e che l'isolante scambi calore con l'ambiente circostante a $r=r_o$ con coefficiente di scambio termico h . Si

determini il raggio $r_o=r_c$ critico, in corrispondenza del quale è minimo lo scambio termico.

- 8.6** Una sferetta di rame del diametro di 5 cm con temperatura uniforme di 800 °C viene improvvisamente posta a contatto con dell'acqua a 20 °C. Si calcoli la temperatura media della sfera dopo 45 secondi sapendo che il coefficiente di scambio termico è $h = 450 \text{ W/m}^2\text{K}$.

- 8.7** Un corpo metallico (densità ρ_1 , calore specifico c_1 e conducibilità termica k_1) di volume V_1 e superficie esterna S_1 , inizialmente a temperatura T_{10} , viene immerso in un liquido (densità ρ_2 , calore specifico c_2 e conducibilità termica k_2) di volume V_2 , inizialmente a temperatura T_{20} e contenuto in un recipiente isolato. Supponendo che il liquido venga continuamente ben miscelato e che il coefficiente di scambio termico h sia tale che il numero di Biot, Bi , sia piccolo, si determini (T_1-T_2) e T_1 in funzione del tempo.

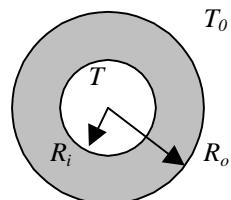
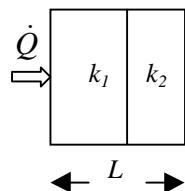
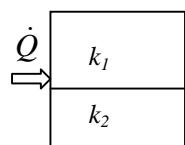


Figura 8.1P



Problema 8.2P

- 8.8** Si determini il tempo caratteristico necessario per raffreddare il liquido racchiuso in una sfera cava, di raggio interno R_i e raggio esterno R_o , posta a contatto con un vapore a temperatura T_o e con cui scambia calore con coefficiente di scambio termico h (vedi **figura 8.1P**). La temperatura della parete interna della corona sferica sia uguale a quella del liquido, T . La densità, calore specifico e conducibilità termica del liquido sono ρ , c e k , mentre quelli del solido che compone la corona sferica sono ρ_s , c_s e k_s ,

- 8.9** In un mezzo composto, la conducibilità termica efficace, k_{eff} , viene definita come il rapporto tra il flusso di calore medio, $J_Q = \dot{Q}/S$ (pari al rapporto tra il flusso totale e la superficie della sezione attraversata dal calore), e il gradiente di temperatura medio, $\Delta T/L$. Si calcoli k_{eff} in un materiale composto in cui una fase ha conducibilità k_1 e occupa una frazione ε_1 del volume totale, mentre l'altra fase ha conducibilità k_2 e occupa una frazione ε_2 del volume totale. Si supponga che le due fasi siano disposte a strati alterni nella direzione a) parallela e b) perpendicolare al flusso di calore (vedi **figura 8.2P**).

- 8.10** Si consideri un solido composto da due materiali diversi, di spessore L_1 e L_2 e si supponga che le due pareti esterne siano mantenute a temperatura T_1 e T_2 . Si determini la temperatura T_{12} all'interfaccia.

9. Conduzione con generazione di calore

La generazione di calore, cioè la conversione di energia meccanica in energia interna, può avvenire in molti modi. Qui ne elenchiamo alcuni, specificando l'energia `dissipata` per unità di volume e di tempo, \dot{q} .

1. Dissipazione di energia elettrica ohmica, $\dot{q} = I^2/k_e$, dove I è la densità di corrente, in $amps\ cm^{-2}$ e k_e è la conducibilità elettrica, in $ohm^{-1}\ cm^{-1}$.
2. Dissipazione di energia meccanica, $\dot{q} = \mu |\nabla v|^2$, dove μ è la viscosità e ∇v il gradiente di velocità.
3. Dissipazione di energia chimica o nucleare.

9.1 Generazione uniforme

9.1.1 Geometria piana

Nel caso piano, si consideri un fluido che scorra in un dispositivo a Couette (dunque con gradiente di velocità costante) di spessore $2L$, con temperatura alle pareti T_0 fissata. Da un semplice bilancio di energia in un elemento di volume avente la sezione di area S e spessore Δx otteniamo, in regime stazionario:

$$J_U(x)S - J_U(x + \Delta x)S + \dot{q}A\Delta x = 0, \quad (9.1.1)$$

dove J_U è il flusso termico e \dot{q} è l'energia "dissipata" per unità di tempo e di volume, che si suppone costante perché proporzionale al quadrato del gradiente di velocità. Dividendo per Δx , prendendo il limite per $\Delta x \rightarrow \infty$ e applicando l'equazione di Fourier otteniamo:

$$\frac{dJ_U}{dx} = -k \frac{d^2T}{dx^2} = \dot{q} \quad -L \leq x \leq L, \quad (9.1.2)$$

da risolversi con le condizioni al contorno $T(-L) = T(L) = T_0$. Questa equazione si può riscrivere in forma non dimensionale come:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} = -1; \quad \Theta(-1) = \Theta(1) = 0, \quad (9.1.3)$$

dove $\Theta = \frac{T - T_0}{\dot{q}L^2/k}$ e $\xi = x/L$. La soluzione è il seguente profilo parabolico:

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2). \quad (9.1.4)$$

Dunque la temperatura massima si raggiunge nel mezzo (com'era prevedibile), con $\Theta_{max} = 1/2$ e

$$T_{max} = T(0) = T_0 + \dot{q}L^2/2k. \quad (9.1.5)$$

Una importante verifica del nostro calcolo è che il flusso uscente totale deve essere uguale al calore generato. Infatti, si trova che sono entrambi uguali a $2\dot{q}LS$.

La temperatura media si calcola facilmente considerando che la temperatura di un corpo di volume V è data da:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (9.1.6)$$

Nel caso piano in esame $V=2LHW$ e $d^3\mathbf{r}=HWdx$, dove H e W sono l'altezza e lo spessore (costanti) della piastra. Dunque:

$$\bar{T} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L T(x) dx = T_0 + \frac{SL^2}{k} \bar{\Theta}; \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Theta(\xi) d\xi = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{T} = T_0 + \frac{\dot{q}L^2}{3k}. \quad (9.1.7)$$

9.1.2 Geometria cilindrica

In questo caso, si consideri un filo di rame cilindrico di raggio R attraverso il quale scorra una corrente elettrica che dissipì una potenza per unità di volume \dot{q} , supponendo che la temperatura della parete sia imposta e uguale a T_0 .

Se il nostro obiettivo è quello di determinare il flusso di calore J_R uscente dalla parete $r=R$, non è neppure necessario risolvere tutto il problema. Infatti, allo stazionario, tutta la potenza generata, pari a $\dot{q}(\pi LR^2)$, deve essere uguale a quella uscente, $J_R(2\pi RL)$, e dunque troviamo:

$$J_R = \dot{q}R / 2. \quad (9.1.8)$$

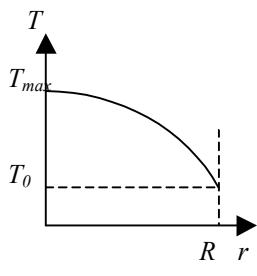


Figura 9.1.1

Se invece vogliamo determinare la temperatura massima, occorre scrivere il bilancio di calore su una corona cilindrica di spessore Δr e altezza (costante) L , che porta facilmente alla seguente equazione (per i dettagli, vedi BSL, Par. 9.2):

$$[J_r(2\pi rL)]_r - [J_r(2\pi rL)]_{r+\Delta r} + \dot{q}(2\pi rL\Delta r) = 0.$$

Dividendo per Δr e prendendo il limite per $\Delta r \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\frac{d}{dr}(J_r r) = \dot{q}r, \quad (9.1.9)$$

che ha la soluzione

$$J_r = \frac{1}{2} \dot{q}r + \frac{C_1}{r}. \quad (9.1.10)$$

Siccome per $r=0$ il flusso deve restare finito (anzi, per simmetria deve essere uguale a zero), otteniamo $C_1=0$. Ora, applicando l'equazione di Fourier, $J=-kdT/dr$ e imponendo la condizione al contorno $T(R)=T_0$, otteniamo il profilo parabolico (vedi figura):

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2). \quad (9.1.11)$$

dove $\Theta = \frac{T - T_0}{\dot{q}R^2/k}$ e $\xi = r/R$. Dunque la temperatura massima si raggiunge nel mezzo (com'era prevedibile), con $\Theta_{max}=1/4$ e

$$T_{\max} = T(0) = T_0 + \dot{q}R^2/4k. \quad (9.1.12)$$

Si noti che nel caso di un cilindro cavo nell'espressione (9.1.10) per il flusso termico il termine proporzionale a $1/r$ non è nullo e quindi la successiva integrazione condurrebbe ad un termine logaritmico per la distribuzione di temperatura.

A questo punto è facile determinare il flusso termico, verificando che alla parete $r=R$ ritroviamo il risultato (9.1.8) visto in precedenza. Infatti:

$$J_R = -k(dT/dr)_{r=R} = -\dot{q}R(d\Theta/d\xi)_{\xi=1} = \dot{q}R/2.$$

La temperatura media in questo caso si determina a partire dell'espressione generale (9.1.6), con $V=\pi R^2 L$ e $d^3\mathbf{r}=2\pi r dr d\theta d\phi$, dove L è l'altezza del cilindro, ottenendo:

$$\bar{T} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R T(r) 2\pi r dr = T_0 + \frac{\dot{q}R^2}{k} \bar{\Theta}; \quad \bar{\Theta} = 2 \int_0^1 \Theta(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{8} \Rightarrow \bar{T} = T_0 + \frac{\dot{q}R^2}{8k}. \quad (9.1.13)$$

9.1.3 Geometria sferica

Si consideri un elemento di combustibile nucleare avente forma sferica, di raggio r_i e circondato da una camicia di alluminio la cui superficie esterna, con raggio esterno r_o , è mantenuta ad una temperatura T_0 . Conoscendo il calore generato per unità di tempo e di volume, \dot{q} , si calcoli la temperatura massima raggiunta all'interno dell'elemento.

Scriviamo un bilancio di energia su una corona sferica di spessore Δr :

$$[J_r(\pi r^2)]_r - [J_r(\pi r^2)]_{r+\Delta r} + \dot{q}(4\pi r^2 \Delta r) = 0.$$

Dividendo per Δr e prendendo il limite per $\Delta r \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\frac{d}{dr}(J_r r^2) = \dot{q}r^2, \quad (9.1.14)$$

che ha soluzione

$$J_r = \frac{1}{3}\dot{q}r + \frac{C}{r^2}. \quad (9.1.15)$$

Nella regione I, per $0 < r < r_i$, occupata dal combustibile, siccome per $r=0$ il flusso deve restare finito (anzi, per simmetria deve essere uguale a zero), otteniamo $C=0$ e dunque $J^I = \dot{q}r/3$. Invece, nella zona II, per $r_i < r < r_o$, occupata dalla camicia di alluminio, $\dot{q}=0$ e dunque $J^{II} = C/r^2$. Imponendo la continuità del flusso all'interfaccia $r=r_i$, otteniamo: $C = \dot{q}r_i^3/3$ e dunque concludiamo che:

$$J^I = \frac{\dot{q}}{3}r \quad 0 < r < r_i; \quad J^{II} = \frac{\dot{q}r_i^3}{3} \frac{1}{r^2}. \quad (9.1.16)$$

Per verificare l'esattezza dei calcoli, si può determinare il flusso totale uscente da $r=r_i$ e da $r=r_o$, $Q = (\dot{q}r_i/3)(4\pi r_i^2)$ e controllare che è davvero uguale al calore generato $\dot{q}(4\pi r_i^3/3)$. Ora, applicando l'equazione di Fourier, $J = -kdT/dr$ e imponendo la condizione al contorno $T(r_o)=T_0$, otteniamo dall'integrazione di J^{II} :

$$T^{II}(r) = T_0 + \frac{\dot{q}r_i^2}{3k^{II}} \left(\frac{r_i}{r} - \frac{r_i}{r_o} \right). \quad (9.1.17)$$

Infine, integrando J^I e imponendo che $T^I(r_i) = T^{II}(r_i)$, otteniamo:

$$T^I(r) = T_0 + \frac{\dot{q}r_i^2}{3k^{II}} \left(1 - \frac{r_i}{r_o} \right) + \frac{\dot{q}r_i^2}{6k^I} \left(1 - \frac{r^2}{r_i^2} \right). \quad (9.1.18)$$

La temperatura massima è naturalmente $T^I(0)$.

Si noti che per $r_i=r_o$, cioè in assenza del rivestimento, la soluzione si può scrivere come:

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{6} (1 - \xi^2). \quad (9.1.19)$$

dove $\Theta = \frac{T - T_0}{\dot{q}R^2/k}$ e $\xi = r/R$. Dunque la temperatura massima si raggiunge nel centro (com'era prevedibile), con $\Theta_{max}=1/6$ e

$$T_{max} = T(0) = T_0 + \dot{q}R^2/6k. \quad (9.1.20)$$

Inoltre la temperatura media in questo caso si determina a partire dell'espressione generale (9.1.6), con $V=4\pi R^3/3$ e $d^3\mathbf{r}=4\pi r^2 dr$, ottenendo:

$$\bar{T} = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R T(r) 4\pi r^2 dr = T_0 + \frac{\dot{q}R^2}{k} \bar{\Theta}; \quad \bar{\Theta} = 3 \int_0^1 \Theta(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{1}{15} \Rightarrow \bar{T} = T_0 + \frac{\dot{q}R^2}{15k}. \quad (9.1.18)$$

Confrontando le equazioni (9.1.5), (9.1.12) e (9.1.20) vediamo che la temperatura più elevata, Θ_{max} , è minima nel caso sferico e massima nel caso piano, poiché il raffreddamento riferito alla generazione avviene proporzionalmente su una superficie maggiore per una sfera che per una piastra. Stessa conclusione si può raggiungere calcolando le temperature medie (vedi esercizio 9.4).

9.2 Conduzione con reazione chimica

Si consideri una lastra di spessore L composta da una miscela monomero - polimero in cui la reazione di polimerizzazione sia una funzione della temperatura. Alla temperatura T_0 il polimero è in equilibrio col monomero, per temperature $T > T_0$ si abbia ulteriore polimerizzazione, con una reazione endotermica (assorbe calore), mentre per temperature $T < T_0$ avviene la reazione, esotermica, di depolimerizzazione. Per semplicità, supponiamo che la potenza termica generata per unità di volume sia $\dot{q} = -r(T-T_0)$, dove r è una costante positiva. Si supponga inoltre che al superficie $x=L$ venga mantenuta alla temperatura T_0 , mentre l'altra faccia, per $x=0$, abbia una temperatura costante $T_1 > T_0$. Si determini il flusso termico entrante per $x=0$.

Da un bilancio energetico troviamo l'equazione (9.1.2), che nel nostro caso si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - Da\Theta = 0, \quad \text{con condizioni al contorno } \Theta(0) = 1 \text{ e } \Theta(1) = 0, \quad (9.2.1)$$

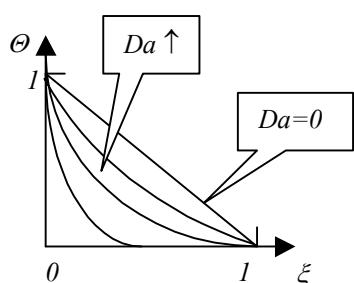
dove:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad Da = \frac{rL^2}{k}. \quad (9.2.2)$$

Da è un numero adimensionale detto di *Damkohler* e rappresenta il rapporto tra consumo di calore e conduzione. Anche il flusso,

$$J(0) = -k \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}, \quad (9.2.3)$$

si può esprimere in forma adimensionale, definendo il numero di Nusselt come:



$$Nu = \left| \frac{J}{J_{cond}} \right| = \left| \frac{d\Theta}{d\xi} \right|_{\xi=0}. \quad (9.2.4)$$

Figura 9.2.1

Il numero di Nusselt è il rapporto¹ tra il flusso alla parete e il flusso che si avrebbe soltanto per conduzione, cioè quando tutti gli altri fenomeni (generazione di calore, convezione ecc.) fossero assenti.

La soluzione di questo problema è del tipo $\Theta(\xi) = C_1 Sh(Da^{1/2}\xi) + C_2 Ch(Da^{1/2}\xi)$, dove C_1 e C_2 sono costanti da determinarsi con le condizioni al contorno. Alla fine si ottiene:

$$\Theta(\xi) = \text{Cosh}(\sqrt{Da}\xi) - \frac{\text{Cosh}\sqrt{Da}}{\text{Sinh}\sqrt{Da}} \text{Sinh}(\sqrt{Da}\xi). \quad (9.2.5)$$

e

$$Nu = \frac{\text{Cosh}\sqrt{Da}}{\text{Sinh}\sqrt{Da}} \sqrt{Da}. \quad (9.2.6)$$

Consideriamo nel seguito i due casi limite, $Da \ll 1$ e $Da \gg 1$.

9.2.1 Calcolo asintotico per $Da \ll 1$

In questo caso, il termine di generazione (o consumo) di calore è piccolo rispetto alla conduzione. Infatti, per $Da=0$ ritroviamo la soluzione lineare $\Theta = 1 - \xi$ e di conseguenza $Nu = 1$. Per trovare la correzione a questa soluzione `elementare' basta considerare che, per $\varepsilon \ll 1$, $\text{Cosh}\varepsilon = 1 + \varepsilon^2/2 + \dots$ e $\text{Sinh}\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon^3/6 + \dots$. Sostituendo tali sviluppi nella (9.2.6) si ottiene:

$$Nu \approx \frac{1 + Da/2 + \dots}{1 + Da/6 + \dots} \approx \left(1 + \frac{1}{2}Da + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{6}Da + \dots\right) \approx 1 + \frac{1}{3}Da + O(Da^2). \quad (9.2.7)$$

Ora, supponiamo di voler trovare questo risultato senza dover risolvere l'intero problema: il caso in esame è di facile soluzione, ma spesso la soluzione completa non si può determinare e allora può essere conveniente esprimere come una serie di potenze di un termine piccolo ε (in questo caso, il numero di Damkohler).

Detto $\varepsilon = Da \ll 1$, supponiamo che la soluzione del nostro problema si possa esprimere nel modo seguente:

$$\Theta(\xi) = \Theta_0(\xi) + \varepsilon\Theta_1(\xi) + \varepsilon^2\Theta_2(\xi) + \dots \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (9.2.8)$$

in modo tale che ciascun termine risulti inferiore al precedente in tutto l'intervallo convenuto. Detto in soldoni, Θ_l deve risultare molto minore di $1/\varepsilon$ in tutto il dominio $0 \leq \xi \leq 1$, in modo che il primo termine dell'espansione, Θ_0 , risulti molto maggiore di $\varepsilon\Theta_l$. Lo stesso vale per tutti i termini successivi. Quando questo è vero, l'espansione vista si chiama *espansione perturbativa regolare (regular perturbation expansion)*.

Adesso sostituiamo l'espansione (9.2.8) nell'equazione (9.2.1), ottenendo:

¹ In molti testi, il numero di Nusselt è definito come uguale al doppio di quello definito in questo testo. Si faccia attenzione alla definizione: nel nostro caso, quando c'è soltanto conduzione, si ha $Nu=1$.

$$\Theta_0''(\xi) + \varepsilon[\Theta_1''(\xi) - \Theta_0(\xi)] + \varepsilon^2[\Theta_2''(\xi) - \Theta_1(\xi)] + \dots = 0 \quad (9.2.9)$$

con condizioni al contorno:

$$\Theta_0(0) + \varepsilon\Theta_1(0) + \varepsilon^2\Theta_2(0) + \dots = 1; \quad \Theta_0(1) + \varepsilon\Theta_1(1) + \varepsilon^2\Theta_2(1) + \dots = 0 \quad (9.2.10)$$

e numero di Nusselt:

$$Nu = Nu_0 + \varepsilon Nu_1 + \dots = |\Theta'(0)| + \varepsilon |\Theta'(1)| + \dots \quad (9.2.11)$$

A questo punto, raccogliamo i termini di $O(1)$:

$$\Theta_0''(\xi) = 0; \quad \Theta_0(0) = 1; \quad \Theta_0(1) = 0, \quad (9.2.12)$$

da cui:

$$\Theta_0(\xi) = 1 - \xi, \quad (9.2.13)$$

e dunque,

$$Nu_0 = 1. \quad (9.2.14)$$

Così abbiamo ritrovato la soluzione in cui c'è soltanto conduzione, con $Da = 0$.

Raccogliendo i termini di $O(\varepsilon)$ otteniamo:

$$\Theta_1''(\xi) = \Theta_0(\xi) = 1 - \xi; \quad \Theta_1(0) = \Theta_1(1) = 0, \quad (9.2.15)$$

in cui abbiamo sostituito la (9.2.13). Integrando otteniamo:

$$\Theta_1(\xi) = -\frac{1}{3}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{6}\xi^3, \quad (9.2.16)$$

e dunque,

$$Nu_1 = \frac{1}{3}. \quad (9.2.17)$$

Da qui vediamo che abbiamo ritrovato l'espressione (9.2.7) proveniente dalla soluzione esatta. Naturalmente, procedendo oltre, possiamo trovare anche tutti i termini successivi dell'espansione.

9.2.2 Calcolo asintotico per $Da >> 1$

Questo caso è più complesso. Qui il flusso dovuto al termine di generazione o consumo di calore è molto maggiore di quello conduttivo. Allora, il sistema tende a riportarsi alla temperatura di equilibrio T_0 , cioè $\Theta=0$, in tutto il campo. Tuttavia, nelle vicinanze della parete $\xi = 0$, la temperatura deve `saltare' da 0 a 1: questo è il segno dell'esistenza di uno strato

limite. Infatti, dalla soluzione esatta e considerando che per $Da \gg 1$ si ha $\exp(-\sqrt{Da}) \approx 0$ otteniamo:

$$\Theta(\xi) \approx \exp(-\sqrt{Da}\xi), \quad Nu \approx \sqrt{Da}. \quad (9.2.18)$$

Anche in questo caso, vediamo di trovare questa soluzione senza dover risolvere l'intero problema. Detto $\varepsilon = 1/Da \ll 1$, l'equazione assume la forma:

$$\varepsilon \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - \Theta = 0 \quad ; \quad \Theta(0) = 1; \quad \Theta(1) = 0 \quad (9.2.19)$$

Per $\varepsilon = 0$, otteniamo $\Theta = 0$, una soluzione che (casualmente, in questo caso) soddisfa la seconda condizione al contorno ma non la prima. Questa circostanza è tipica di situazioni in cui si trova uno strato limite: esiste un parametro piccolo (ε , in questo caso) e quando lo si pone uguale a zero l'equazione di base diventa di ordine inferiore (passa dal secondo ordine al primo, nel caso del flusso di un fluido su una superficie piana; passa dal secondo ordine all'ordine zero, nel caso in esame), in modo che non si possono più soddisfare tutte le condizioni al contorno. Nel caso in esame, troviamo che $\Theta = 0$ quasi ovunque (vedi la **figura 9.2.1**), ad eccezione di una regione molto piccola vicino alla parete $\xi = 0$, detta *strato limite termico*, dove il profilo si impenna per soddisfare la condizione al contorno $\Theta(0) = 1$. In questa regione, il gradiente di temperatura diventa così elevato che il termine diffusivo [cioè il primo termine nell'equazione (9.2.19)] "bilancia" il termine di sorgente, a differenza di quanto succede altrove, dove il termine di sorgente è dominante. È un po' come se ai confini dello strato limite, per $\xi = \delta$, diventasse di $O(1)$ il numero di Damkohler Da_δ calcolato usando come dimensione caratteristica lo spessore δ dello strato limite. Così facendo, infatti, otteniamo:

$$Da_\delta = \frac{r\delta^2}{k} = 1 \Rightarrow \delta = L/\sqrt{Da}. \quad (9.2.20)$$

In modo più rigoroso, lo stesso problema può risolversi definendo un'altra coordinata, $\zeta = \xi/\varepsilon^\alpha$, dove α è una costante positiva, da determinarsi imponendo che nella regione di spazio descritta da ζ conduzione e consumo di calore si bilancino. L'equazione (9.2.19) nella nuova coordinata diventa:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} - \Theta = 0 \quad ; \quad \Theta(0) = 1; \quad \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha} \rightarrow \infty\right) = 0. \quad (9.2.21)$$

Dunque, i due termini dell'equazione si bilanciano solo quando $\alpha = \frac{1}{2}$ e quindi $\zeta = \xi/\sqrt{\varepsilon}$. La coordinata ζ è molto grande in tutto lo spazio, con l'eccezione della regione all'interno dello strato limite, in cui diventa di $O(1)$ (si chiama infatti *stretched coordinate*). In questo caso, la soluzione dell'equazione è la seguente:

$$\Theta(\zeta) = e^{-\zeta} \Rightarrow \Theta(\xi) = \exp\left(-\xi/\sqrt{\varepsilon}\right) = \exp\left(-\sqrt{Da}\xi\right) \quad (9.2.22)$$

e dunque troviamo $Nu = \sqrt{Da}$, in accordo con la soluzione esatta.

Questa tecnica è stata generalizzata negli anni 1950-60, fino allo sviluppo del cosiddetto metodo di *espansione perturbativa singolare* (*singular perturbation expansion*), di cui il caso visto sopra è forse l'esempio più semplice. Questo metodo, detto anche *matched asymptotic expansion*, si applica ogni volta che non esista una espansione della soluzione (scritta cioè come una serie di potenze di un parametro piccolo ε) che sia valida in tutto lo spazio. Nel caso in esame, lo spazio viene diviso in due parti, descritte da due diverse coordinate, ξ e ζ , definite come sopra. In ognuna di queste regioni si scrive la soluzione come una espansione perturbativa regolare, definendo le cosiddette soluzioni interna ed esterna (inner and outer solutions),

$$\Theta^{(o)}(\xi) = \Theta^{(o)}_0(\xi) + \varepsilon \Theta^{(o)}_1(\xi) + \varepsilon^2 \Theta^{(o)}_2(\xi) + \dots \quad 0 < \xi \leq 1, \quad (9.2.23)$$

$$\Theta^{(i)}(\zeta) = \Theta^{(i)}_0(\zeta) + \varepsilon \Theta^{(i)}_1(\zeta) + \varepsilon^2 \Theta^{(i)}_2(\zeta) + \dots \quad \zeta \geq 0, \quad (9.2.24)$$

Ognuna delle espansioni potrà soddisfare soltanto una delle due condizioni al contorno, poiché ognuna delle regioni comprende solo uno dei due contorni e quindi le espansioni si possono determinare solo in funzione di uno o più costanti di integrazione. Infine, si determinano tali costanti imponendo che, al confine tra le due regioni, le due soluzioni siano uguali, cioè

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta^{(o)}_0(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Theta^{(i)}_0(\zeta); \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta^{(o)}_1(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Theta^{(i)}_1(\zeta); \quad \text{ecc.} \quad (9.2.25)$$

Nel nostro caso, questa ultima fase, detta del *matching*, non si è rivelata necessaria perché la soluzione esterna è banalmente $\Theta^{(o)} = 0$, mentre quella interna tende naturalmente a zero per $\zeta \rightarrow \infty$.

9.3 Esercizi

- 9.1** Si calcoli il profilo di temperatura e il flusso termico in una piastra di spessore L e conducibilità k le cui superfici siano mantenute a temperature T_0 e T_L e in cui ci sia una generazione di calore costante per unità di volume, S .
- 9.2** In un reattore nucleare moderato con grafite, il calore viene generato uniformemente in barre cilindriche del raggio $R = 2.5 \text{ cm}$ in quantità $S = 8 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$. Le barre vengono raffreddate con acqua avente temperatura (media) $T_0 = 120^\circ\text{C}$ e lo scambio termico alla parete avviene con coefficiente di scambio termico $h=30'000 \text{ W/m}^2\text{K}$. La conducibilità termica dell'uranio è $k = 30 \text{ W/mK}$. Si determini la temperatura al centro e alla superficie esterna delle barre di uranio.
- 9.3** Stiamo progettando un nuovo tipo di reattore nucleare moderato con grafite, composto da barrette cilindriche di uranio arricchito (La conducibilità termica dell'uranio è $k = 30 \text{ W/mK}$) del raggio di $2mm$. Queste barrette sono raffreddate con acqua a temperatura $T_0=100^\circ\text{C}$ con coefficiente di scambio termico $h=30'000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Dal momento che per motivi di sicurezza la temperatura massima nelle barrette non deve eccedere $T_{max} =$

500°C , si determini la potenza generata massima consentita S_e , da cui si determina poi il grado di arricchimento massimo consentito dell'uranio.

- 9.4** Nei tre casi, piano, cilindrico e sferico, considerati nel capitolo 9.1 si calcoli la temperatura media.
- 9.5** Si consideri un filo di metallo circolare di raggio R e conducibilità termica k_1 , in cui passi della corrente elettrica, producendo una quantità di calore per unità di tempo e di volume S . Il filo sia rivestito di un materiale isolante, di spessore d e conducibilità termica k_2 , mantenuto all'esterno ad una temperatura costante T_0 . Si determini la temperatura massima nel filo.
- 9.6** Si consideri un elemento di combustibile nucleare di forma sferica con raggio R , con una densità di potenza termica S . La sfera è raffreddata da un fluido mantenuto a temperatura T_0 , con cui scambia calore con coefficiente di scambio termico h . Si determini il flusso di calore uscente dalla sfera (perché non dipende da k ?) e la temperatura massima raggiunta all'interno della sfera.
- 9.7** Un fluido con viscosità μ scorre con moto laminare tra due piatti posti a distanza $2L$ e mantenuti a temperatura costante T_0 . Si determini il profilo di velocità e il flusso termico uscente, tenendo conto della dissipazione viscosa.
- 9.8** Si consideri un filo cavo, con raggio interno R , raggio esterno $2R$ e conducibilità termica k . All'esterno, per $r=2R$, il filo è isolato, mentre all'interno scambia calore con un fluido refrigerante a temperatura T_0 , con coefficiente di scambio termico h . Sapendo che la corrente che passa nei fili vi genera una quantità di calore S per unità di volume,
- si scrivano l'equazione del calore e le condizioni al contorno allo stazionario in forma adimensionale, con $\Theta = (T-T_0)/(SR^2/k)$.
 - Supponendo che lo scambio di calore con il fluido refrigerante sia molto efficiente (cosa comporta questo, in termini di numeri adimensionali?) si trovi $T(2R)$.
- 9.9** Si consideri uno scaldabagno sferico di raggio R . L'acqua dello scaldabagno viene riscaldata con una resistenza elettrica di potenza S (energia/tempo), mentre perde calore con l'aria circostante, avente temperatura T_0 . Supponendo di conoscere il coefficiente di scambio termico h , 1) si scriva l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale della temperatura T dell'acqua; 2) si determini la temperatura finale raggiunta alla stazionario.

10. Bilancio macroscopico di energia

10.1 Introduzione

Come abbiamo visto nel capitolo 3, la conservazione dell'energia (cioè il primo principio della termodinamica) stabilisce che l'energia accumulata è uguale all'energia entrante meno quella uscente, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = (\rho v e S)_{in} - (\rho v e S)_{out} + \dot{W} + \dot{Q}, \quad (10.1.1)$$

dove $\rho v e$ è un flusso d'energia connesso con un flusso di materia, S è l'area di una sezione, mentre \dot{W} e \dot{Q} sono, rispettivamente, il lavoro e il calore trasmessi al sistema per unità di tempo attraverso il suo contorno (cioè la potenza meccanica e la potenza termica scambiate). L'energia e associata a una massa elementare fissata è la somma di energia interna, cinetica e potenziale:

$$e = \frac{\text{energia}}{\text{massa di fluido}} = u + \frac{1}{2} v^2 + gz, \quad (10.1.2)$$

dove l'energia interna specifica è stata indicata con u . A sua volta, il lavoro si può considerare come la somma del lavoro fatto dalle forze di pressione al contorno del sistema, PvS , e di quello esercitato da una pompa sulla corrente fluida (il cosiddetto “shaft work”), che indichiamo con \dot{W}_p . Dunque otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = -\Delta \left(\frac{1}{2} \rho v^3 S \right) - g \Delta (\rho v z S) - \Delta (pvS) - \Delta (\dot{m} u) + \dot{m} w_p + \dot{m} q, \quad (10.1.3)$$

dove $\Delta f = f_{out} - f_{in}$. A questo punto, si consideri per semplicità il caso *stazionario*, in cui la portata \dot{m} è costante. Dunque, ricordando che $pvS = \dot{m}p / \rho$ e indicando per comodità $\dot{W}_p = \dot{m}w_p$ e $\dot{Q} = \dot{m}q$, otteniamo, dividendo per \dot{m} :

$$0 = \Delta \left(\frac{1}{2} v^2 + gz + u + \frac{p}{\rho} \right) - q - w_p, \quad (10.1.4)$$

da cui, procedendo come nel paragrafo 3.2, si ottiene l'equazione di Bernoulli. A questo punto, si tenga presente che $h = u + p/\rho$ è l'entalpia (definita per unità di massa). In particolare, per gas ideali, h dipende solo dalla temperatura,

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \quad \text{per gas ideali ,}$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante, mentre per fluidi incomprimibili, con ρ costante (cioè indipendente sia dalla pressione che dalla temperatura) e $c_v \equiv c_p = c$, si ha:

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} cdT + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \quad \text{per liquidi incomprimibili.}$$

Nella grande maggioranza dei casi, in presenza di scambi di calore, il termine di variazione entalpica risulta molto più grande della variazione di energia cinetica e potenziale, mentre la potenza termica scambiata è molto maggiore della potenza impiegata da pompe e compressori. Dunque l'equazione di bilancio si semplifica, ottenendo:

$$\Delta h = q \Leftrightarrow \dot{m}\Delta a = \dot{Q}. \quad (10.1.5)$$

In questa equazione, l'entalpia è una funzione della temperatura del sistema¹, mentre il flusso di calore viene determinato caso per caso, in genere in base al coefficiente di scambio termico alle pareti del sistema.

10.2 Il coefficiente di scambio termico

Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, il calore scambiato dal sistema col mondo circostante viene scritto come il prodotto tra il coefficiente di scambio termico h , l'area di scambio A e la differenza tra la temperatura della parete, T_w e quella del fluido circostante (in genere, acqua o aria), T_a ,

$$\dot{Q} = -hA(T_w - T_a). \quad (10.2.1)$$

Si noti il segno: \dot{Q} è positivo quando il calore è entrante nel sistema, proveniente da una sorgente di calore più calda. La temperatura T_a è la temperatura del fluido circostante, presa ad una distanza dalla parete sufficientemente grande da poter essere ritenuta costante. Consideriamo il caso più semplice possibile: una sfera di raggio R , mantenuta ad una temperatura uniforme T_w , venga immersa in un fluido infinito, di temperatura T_a , così viscoso da potersi trascurare qualsiasi contributo convettivo (cioè il fluido sia in quiete). In questo caso, si trova facilmente che la temperatura del fluido decade come $1/r$ da T_w a T_a :

$$(T - T_a)/(T_w - T_a) = R/r \quad (10.2.2)$$

e dunque il flusso alla parete (positivo quando uscente) è dato da

¹ Questo è rigorosamente vero per fluidi incomprimibili, come i liquidi, mentre nel caso di gas è vero soltanto quando possiamo trascurare l'effetto della variazione di pressione.

$$J_Q = -\frac{\dot{Q}}{A} = -k \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R} = \frac{k\Delta T}{R}, \quad (10.2.3)$$

dove $\Delta T = T_w - T_a$. Confrontando l'Eq. (10.2.3) con la (10.2.1) vediamo che

$$h = k / R, \quad (10.2.4)$$

che indica come, nel caso di scambio termico conduttivo, il coefficiente di scambio sia, in generale, uguale al rapporto tra la conducibilità termica e una dimensione lineare del corpo. Viene dunque naturale definire una quantità adimensionale, detta *numero di Nusselt*, proporzionale al rapporto tra il flusso termico alla parete (di tipo sia convettivo che conduttivo) e il flusso conduttivo:

$$Nu = hL / k, \quad (10.2.5)$$

dove L è una dimensione lineare del sistema. In questo testo, a seconda dei casi, si indica con L il raggio idraulico $R_H = 2A/P$, dove A è l'area della sezione e P il perimetro bagnato, oppure il diametro idraulico, $D_H=2R_H$. Nella maggior parte dei testi, si preferisce usare quest'ultima convenzione, anche se, nel caso di flusso termico attorno ad una sfera, sarebbe più logico adottare la prima. Infatti, dalle Eq. (10.2.4) e (10.2.5), vediamo che, nel caso di flusso puramente conduttivo, $Nu = hR/k = 1$, che mostra come, scegliendo $L=R$, il numero di Nusselt si possa interpretare come l'esatto rapporto tra il flusso termico totale e quello diffusivo. Per geometrie diverse, tuttavia, il calcolo del flusso termico è più complesso e il numero di Nusselt (10.2.5), in assenza di convezione, tende ad una costante diversa da 1, anche quando $L=R_H$.

Convezione forzata all'interno di tubi o canali

In questo caso, il flusso termico è in direzione perpendicolare alla velocità media del fluido. Dunque, nel caso di moto laminare, il flusso termico è di tipo conduttivo, mentre nel caso turbolento, diventa determinante la componente convettiva.

- a) Flusso laminare: in questo caso, il numero di Nusselt, $Nu=hD_H/k$, è uguale ad una costante. Quando la temperatura di parete è costante, $Nu = 3.66$ nel caso di tubi circolari (con $D_H=D$), mentre $Nu = 7.54$ nel caso di canali (con $D_H=2H$, dove H è l'altezza del canale). Quando invece il flusso alle pareti è costante, $Nu = 4.36$ per tubi circolari e $Nu = 8.23$ nel caso di canali. Questi valori sono *esatti*, cioè si possono calcolare analiticamente in base all'analisi di Graetz (1885).
- b) Flusso turbolento: in mancanza di una teoria definitiva sulla turbolenza, bisogna ricorrere alle correlazioni sperimentali, che mettono in relazione il numero di Nusselt, $Nu=hD/k$, con il numero di Reynolds, $Re=VD/\nu$ e con il numero di Prandtl, $Pr=\nu/\alpha$, dove V è la velocità media, ν la viscosità cinematica e α la diffusività termica. Una delle correlazioni più usata è quella di Dittus-Boelter:

$$Nu = \frac{hD}{k} = 0.023 Re^{4/5} Pr^n, \quad (10.2.6)$$

dove $n=0.4$ quando il fluido nei tubi si scalda (cioè la temperatura alla parete è maggiore di quella al centro del tubo), mentre $n=0.3$ quando il fluido si raffredda. Questa correlazione è valida per $Re>10^4$ e per $0.7<Pr<160$. Correlazioni più complesse considerano anche la rugosità del tubo, e si possono determinare anche grazie alle curve di Moody sul coefficiente di resistenza.

Convezione laminare all'esterno di oggetti sommersi.

- a) Flusso attorno ad una sfera. In assenza di flusso, abbiamo visto sopra che il numero di Nusselt (definito in base al diametro) è uguale a 2. Sperimentalmente, per $Pr>0.5$ si ottiene:

$$Nu = \frac{hD}{k} = 2 + 0.60 Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (10.2.7)$$

- b) Flusso attorno ad un tubo cilindrico. Si usa la correlazione:

$$Nu = \frac{hD}{k} = [0.35 + 0.56 Re^{0.52}] Pr^{0.3}. \quad (10.2.8)$$

Convezione laminare lungo una parete piana.

- a) Per $Pr>0.5$, si ottiene:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{2}{3} Re_L^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (10.2.9)$$

dove $Re_L=UL/\nu$ e \bar{h} è il coefficiente di scambio termico medio,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx.$$

- b) Nel caso di metalli liquidi, per $10^{-3}<Pr<10^{-1}$, si trova:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 1.13 Re_L^{1/2} Pr^{1/2}. \quad (10.2.10)$$

10.3 Scambiatori di calore

10.3.1 Geometrie semplici

Nella **figura 10.3.1** si rappresenta lo scambiatore di calore più semplice, quello a doppio tubo (cioè composto da due tubi concentrici). Anche se qui consideriamo il caso di flussi a correnti parallele (“co-current flow”), nello scambiatore a doppio tubo possono anche scorrere flussi a correnti opposte (“counter-current flow”).

Nel seguito, indichiamo con il suffisso “*t*” il flusso all’interno dei tubi (“*t*” sta per “tube-side”) e “*s*” il flusso all’esterno dei tubi (“*s*” sta per “shell-side”). Inoltre, i suffissi “*I*” e “*2*” indicano la sezione dello scambiatore; nel caso in esame, con correnti parallele, la sezione *I* è all’ingresso, mentre la sezione *2* è all’uscita di entrambi i flussi. Nel caso di correnti

opposte, invece, la sezione 1 è, ad esempio, all'ingresso del flusso lato tubi e all'uscita di quello lato shell, mentre la sezione 2 è all'uscita del flusso lato tubi e all'ingresso di quello lato shell. Per comodità di esposizione, supponiamo che all'interno stia il fluido più freddo (e che quindi si riscalda), mentre all'esterno stia quello più caldo (che quindi si raffredda). Comunque, il risultato finale non dipende da questa ipotesi.

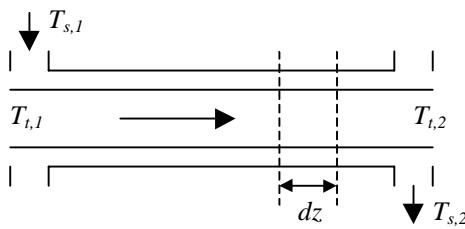
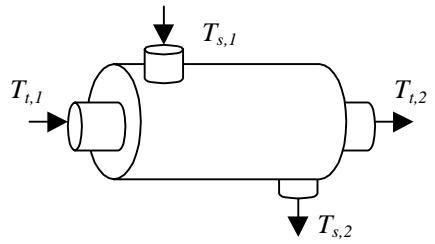


Figura 10.3.1

Inoltre, il calore scambiato tra i due fluidi si può determinare a partire dall'area di scambio e dal coefficiente di scambio termico globale h_{tot} :

$$d\dot{Q}_t = h_{tot} \Delta T dA, \quad (10.3.3)$$

dove dA è la superficie di scambio tra i due fluidi compresa tra z e $z+dz$, mentre abbiamo definito $\Delta T = T_s - T_t$ come il salto di temperatura tra i due fluidi nel punto considerato. Ovviamente, nella definizione di h_{tot} è già inclusa la scelta di definire l'area di scambio in relazione al raggio interno o a quello esterno. Dall'equazione (10.3.2), ricavando dT_t e dT_s e sottraendo, otteniamo:

$$d(\Delta T) = -d\dot{Q}_t \left(\frac{1}{\dot{m}_t c_t} + \frac{1}{\dot{m}_s c_s} \right) = -h_{tot} \Delta T \left(\frac{1}{\dot{m}_t c_t} + \frac{1}{\dot{m}_s c_s} \right) dA, \quad (10.3.4)$$

dove abbiamo sostituito l'Eq. (10.3.3). A questo punto possiamo integrare:

$$\ln \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right) = h_{tot} A \left(\frac{1}{\dot{m}_t c_t} + \frac{1}{\dot{m}_s c_s} \right), \quad (10.3.5)$$

dove $\Delta T_1 = T_{s,1} - T_{t,1}$ è la differenza di temperatura tra i due fluidi all'ingresso dello scambiatore, mentre $\Delta T_2 = T_{s,2} - T_{t,2}$ è quella all'uscita. Questa equazione lega tra loro le quattro temperature di entrata ed uscita dei due fluidi, le loro portate e l'area di scambio. In

in generale, tuttavia, si preferisce far uso della seguente equazione, ottenuta ricavando $1/\dot{m}_t c_t$ e $1/\dot{m}_s c_s$ dalla (10.3.1) e sostituendo il risultato nella (10.3.5):

$$\dot{Q}_t = h_{tot} A (\Delta T)_{lm}, \quad (10.3.6)$$

dove

$$(\Delta T)_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)} = \frac{(T_{s,1} - T_{t,1}) - (T_{s,2} - T_{t,2})}{\ln[(T_{s,1} - T_{t,1})/(T_{s,2} - T_{t,2})]}, \quad (10.3.7)$$

è la differenza di temperatura media logaritmica tra i due flussi.

Ovviamente, se il fluido freddo fosse all'esterno, tutti i segni sarebbero cambiati, ma l'analisi sarebbe identica.

Nel caso di uno scambiatore a doppio tubo con flussi controcorrente ("counter-current flow"), l'analisi fatta resta valida, e il risultato finale (10.3.6)-(10.3.7) resta invariato, con le temperature alle sezioni 1 e 2 che assumono il significato appropriato. In conclusione, indicando con i suffissi "in" e "out" le temperature di ingresso e di uscita, rispettivamente, possiamo concludere che in uno scambiatore a doppio tubo il calore scambiato è dato dall'equazione (10.3.6) –(10.3.7), dove, nel caso a correnti parallele,

$$\Delta T_1 = T_{s,in} - T_{t,in}; \quad \Delta T_2 = T_{s,out} - T_{t,out} \quad (10.3.8)$$

mentre nel caso a correnti opposte:

$$\Delta T_1 = T_{s,in} - T_{t,out}; \quad \Delta T_2 = T_{s,out} - T_{t,in} \quad (10.3.9)$$

Nelle figure 10.3.2 sono rappresentate le temperature dei fluidi lato shell e lato tubi in due casi tipici di scambiatore a doppio tubo con correnti parallele ed opposte. Nel primo caso, la

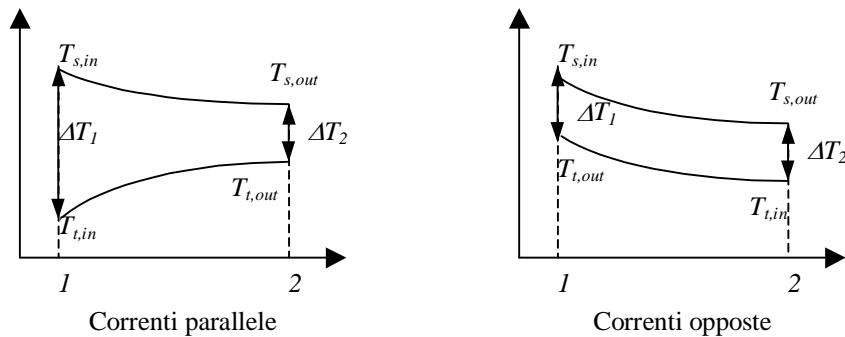


Figura 10.3.2

differenza di temperatura tra i due fluidi decresce verso l'uscita dello scambiatore, mentre nel secondo caso resta quasi inalterata. Ciò significa che, a parità di condizioni, lo scambio termico è maggiore nel caso a correnti opposte che in quello a correnti parallele (vedi problema 10.4). Da un altro punto di vista, se vogliamo scaldare il fluido lato tubi, si vede che la temperatura massima raggiungibile nel caso a correnti parallele è una temperatura

intermedia tra le due temperature d'ingresso, mentre nel caso a correnti opposte la temperatura massima raggiungibile è quella di ingresso del fluido lato shell.

Si notino le condizioni speciali:

- a) Quando $\dot{m}_t c_t \gg \dot{m}_s c_s$, possiamo assumere che T_t sia costante, mentre quando $\dot{m}_t c_t \ll \dot{m}_s c_s$, possiamo assumere che T_s sia costante.
- b) Nel caso di condensatori o evaporatori, il bilancio termico si scrive in base alle entalpie specifiche h di entrata e di uscita, cioè $\dot{Q} = \dot{m} \Delta h$.

10.3.2 Geometrie più complesse

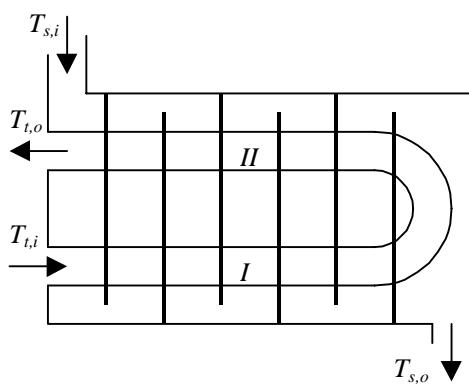
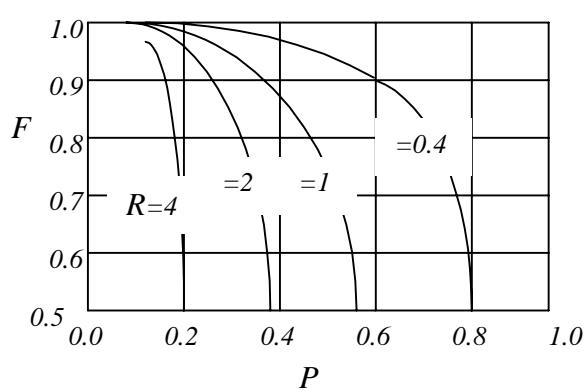


Figura 10.3.3. Scambiatore di calore `shell and tube'

Molti scambiatori di calore sono geometricamente più complessi di quelli a doppio tubo. Ad esempio, si pensi agli scambiatori di tipo `shell and tube', in cui i tubi, raccolti in un fascio tubiero, passano all'interno di un contenitore più grande (la `shell'). Ad esempio, in **figura 10.3.3** si schematizza una configurazione con un passaggio lato shell e due passaggi lato tubo ('1 shell pass/2 tube pass'), utilizzando tubi ad U. Il lato shell viene diviso assialmente con dei distanziatori ('baffles') in modo che il fluido sia costretto a muoversi in direzione ortogonale ai tubi².



$$F = \frac{\frac{\sqrt{R^2 + 1}}{R - 1} \ln\left(\frac{1 - P}{1 - PR}\right)}{\ln\left(\frac{2/P - 1 - R + \sqrt{R^2 + 1}}{2/P - 1 - R - \sqrt{R^2 + 1}}\right)}$$

$$R = \frac{T_{s,in} - T_{s,out}}{T_{t,out} - T_{t,in}} = \frac{\Delta T_{shell}}{\Delta T_{tube}} ;$$

$$P = \frac{T_{t,out} - T_{t,in}}{T_{s,in} - T_{t,in}} = \frac{\text{calore scambiato}}{\text{massimo calore scambiabile}} .$$

Figura 10.3.4. Il fattore correttivo F , valido per tutte le geometrie con 1 passaggio lato shell e $2n$ passaggi lato tubi.

² In assenza di baffles il fluido lato shell sceglierrebbe la via con perdite di carico minime, costeggiando il mantello esterno e dunque interagendo pochissimo col fascio tubiero.

Supponendo che la temperatura sia una funzione della sola coordinata assiale³ z e procedendo come nel caso degli scambiatori a doppio tubo, troviamo:

$$\dot{Q} = h_{tot} A (\Delta T)_{ln} F \quad (10.3.8)$$

dove ΔT_{ln} è dato dalla (10.3.7) nel caso a correnti opposte, mentre F è un fattore correttivo, di natura esclusivamente geometrica (e dunque calcolabile esattamente) indicato in **figura 10.3.4**.

10.4 Alettature di raffreddamento

In molti casi, vogliamo promuovere lo scambio termico tra un corpo caldo e il fluido circostante; si pensi, ad esempio, al radiatore di una automobile o ad un termosifone. In questi casi, si estende la superficie di scambio aggiungendo al corpo delle alettature, composte di un materiale altamente conduttivo. L'esempio più semplice è quello rappresentato in **figura 10.4.1**, in cui si suppone che il corpo caldo sia una piastra e l'alettatura sia rettangolare, con spessore $2B$ molto minore dell'ampiezza W .

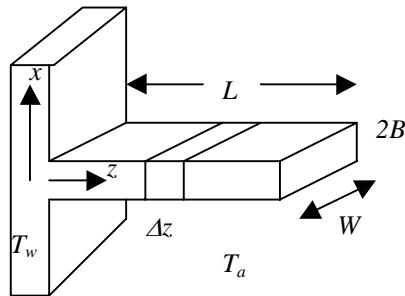


Figura 10.4.1

Si consideri un semplice bilancio termico nell'elemento di volume $2BW\Delta z$, supponendo che la temperatura T sia funzione della sola coordinata z e dunque sia uniforme in ogni sezione z . Ciò è giustificato soltanto quando il numero di Biot trasversale hB/k (cioè il rapporto tra flusso conduttivo interno e flusso alla parete in direzione trasversale) è molto piccolo, dove k è la conducibilità termica ed h il coefficiente di scambio termico. In base a queste ipotesi, il calore si propaga per conduzione lungo l'asse z (cioè si trascura la conduzione lungo x) attraverso le sezioni $W\Delta z$, con flusso $J_U = -kdT/dz$, mentre viene dissipato per scambio termico alle superfici $W\Delta z$ (sopra e sotto), con flusso $h(T - T_a)$, mentre il calore alle superfici $2B\Delta z$ si può trascurare, poiché $B \ll W$. Alla fine otteniamo, allo stazionario:

$$[J_U(z) - J_U(z + \Delta z)]2BW - h[T(z) - T_a]2W\Delta z = 0. \quad (10.4.1)$$

Dividendo per Δz e prendendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$, con $J_U = -k dT/dz$, otteniamo:

$$\frac{d}{dz} \left(k \frac{dT}{dz} \right) = \frac{h}{B} [T(z) - T_a]. \quad (10.4.2)$$

Questa è una equazione del second'ordine e dunque abbiamo bisogno di due condizioni al contorno per risolverla. Esse sono:

³ Questa ipotesi equivale a supporre che il fluido lato shell tra due distanziatori sia ben miscelato, così che la temperatura del fluido lato shell attorno ai tubi I e II sia la stessa. A questo punto, se i distanziatori sono numerosissimi, possiamo dire che la temperatura è una funzione continua di z .

$$T = T_w \quad \text{per } z = 0 \quad (10.4.3)$$

$$-k\left(\frac{dT}{dz}\right) = h(T - T_a) \quad \text{per } z = L \quad (10.4.4)$$

Definendo le variabili adimensionali:

$$\Theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}; \quad \zeta = \frac{L - z}{L}; \quad N^2 = \frac{hL^2}{kB} = Bi\left(\frac{L}{B}\right); \quad Bi = \frac{hL}{k}, \quad (10.4.5)$$

in cui Bi è il numero di Biot longitudinale (cioè il rapporto tra flusso conduttivo interno e flusso alla parete in direzione longitudinale) mentre N^2 è un numero di Biot modificato, otteniamo:

$$\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} - N^2\Theta = 0; \quad \Theta(1) = 1; \quad \frac{d\Theta}{d\zeta}(0) = -Bi\Theta(0) \quad (10.4.6)$$

Adesso supponiamo che $Bi \ll 1$. In questo caso la seconda condizione al contorno si riduce a

$$\frac{d\Theta}{d\zeta}(0) = 0. \quad (10.4.7)$$

Fisicamente, questa ipotesi significa che si possono trascurare le dissipazioni che avvengono all'estremità della alettatura e questo avviene quando l'area della estremità (cioè quella della sezione dell'alettatura, $2BW$) è molto minore dell'area di scambio laterale, $2LW$, cioè quando $L \gg B$. Vedremo alla fine come cambia il risultato nei casi (rari) in cui questa approssimazione non sia valida.

La soluzione generale delle equazioni (10.4.6)-(10.4.7) è la seguente:

$$\Theta(\zeta) = ACosh(N\zeta) + BSinh(N\zeta).$$

Dalla prima condizione al contorno si vede che $B=0$, mentre dalla seconda otteniamo infine la soluzione completa:

$$\Theta(\zeta) = \frac{Cosh(N\zeta)}{CoshN}. \quad (10.4.8)$$

Il flusso totale di calore dissipato è uguale a

$$\dot{Q} = 2Wh \int_0^L (T - T_a) dz = 2WLh\Delta T \int_0^1 \Theta(\zeta) d\zeta = 2WLh\Delta T \frac{TanhN}{N}, \quad (10.4.9)$$

dove $\Delta T = T_w - T_a$. Poiché allo stazionario il flusso dissipato è uguale al flusso entrante, per $z=0$, è facile verificare che

$$\dot{Q} = 2BW \left[-k \left(\frac{dT}{dz} \right)_{z=0} \right]. \quad (10.4.10)$$

Vediamo i limiti, superiore ed inferiore, del flusso termico. Il limite inferiore corrisponde al caso in cui non vi sia alettatura e dunque il calore viene dissipato su un'area $2BW$ con flusso $h\Delta T$,

$$\dot{Q}_{\min} = 2WBh\Delta T. \quad (10.4.11)$$

Il limite superiore corrisponde al caso in cui la temperatura dell'alettatura sia uniforme ed uguale a T_w e dunque il calore viene dissipato su un'area $2LW$ con flusso $h\Delta T$,

$$\dot{Q}_{\max} = 2WLh\Delta T. \quad (10.4.12)$$

Definiamo un coefficiente di efficienza η ,

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\text{Tanh}N}{N}. \quad (10.4.13)$$

Si noti che poiché $\text{Tanh}N \approx 1$ per $N \gg 1$, otteniamo che $\eta \approx 1/N$ per $N \gg 1$.

Se ripetessimo tutta l'analisi vista sopra mantenendo la "corretta" condizione al contorno (10.4.6), otterremmo approssimativamente la stessa soluzione, dove però la lunghezza modificata L_c prende il posto della lunghezza geometrica L , con

$$L_c = L + B. \quad (10.4.14)$$

Da qui si vede che la soluzione ottenuta è valida quando $L \gg B$. Per geometrie più complesse, otteniamo lo stesso tipo di comportamento, con il coefficiente di efficienza che si trova tabulato nei manuali (vedi Perry, per esempio).

10.5 Esercizi

- 10.1** Si calcoli quanto calore viene dissipato da una alettatura in alluminio ($k = 200 \text{ W/mK}$) con spessore $B = 1 \text{ cm}$, larghezza $W = 1 \text{ m}$ e profondità $L = 1 \text{ m}$, supponendo che la superficie da raffreddare ha una temperatura di 100°C , l'ambiente è a 25°C e il coefficiente di scambio termico è di $50 \text{ W/m}^2\text{K}$.
- 10.2** Una lunga barra d'acciaio, del diametro di 4.8 cm e inizialmente a una temperatura di 400°C , viene esposta ad aria a 20°C con coefficiente di scambio termico $h = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$. Dopo quanto tempo la temperatura della barra sarà di 60°C ?

- 10.3** Una piastra d'acciaio di spessore $2L=2.66\text{mm}$ viene prima scaldata in un forno a $T_i=575\text{ }^\circ\text{C}$, poi raffreddata in aria con $T_a=22\text{ }^\circ\text{C}$ con coefficiente di scambio termico $h=14\text{W/m}^2\text{K}$. Dopo quanto tempo la temperatura al centro della piastra scende al disotto di $T=55\text{ }^\circ\text{C}$?
- 10.4** Si consideri uno scambiatore a doppio tubo. All'interno dei tubi scorre una portata di $m_t=0.1\text{ Kg/s}$ di un olio per motori, con $c_p=2091\text{ J/KgK}$ e temperature di ingresso e di uscita di $T_{t,in}=127\text{ }^\circ\text{C}$ e $T_{t,out}=67\text{ }^\circ\text{C}$, rispettivamente. All'esterno dei tubi scorre dell'acqua ($c_p=4179\text{ J/KgK}$) con portata $m_s=0.15\text{ Kg/s}$ e temperature di ingresso $T_{s,in}=30\text{ }^\circ\text{C}$. Si determini l'area di scambio necessaria nei due casi, equi- e contro-corrente, sapendo che il coefficiente di scambio termico globale è $h_{tot}=445\text{ W/m}^2\text{K}$.
- 10.5** Si vuole scaldare 40kg/s di glicerina da 20 a $34\text{ }^\circ\text{C}$, raffreddando dell'acqua da 80 a $48\text{ }^\circ\text{C}$. Le velocità dell'acqua è tale che il coefficiente di scambio termico lato shell, h_o , riferito al diametro interno dei tubi, sia di $300\text{W/m}^2\text{K}$. Lo scambiatore è del tipo shell&tube, composto da 75 tubi ad U del diametro di $\frac{3}{4}\text{ inch}$, con 8 passaggi. Si determini: a) Il calore scambiato; b) la portata dell'acqua; c) la lunghezza dei tubi. Dati: diametro interno dei tubi $D = 1.66\text{ cm}$; calori specifici della glicerina e dell'acqua: $c_t = 2385\text{ J/kgK}$ e $c_s = 4187\text{ J/kgK}$.

11. Conduzione di calore variabile nel tempo

11.1 Equazione del trasporto di calore

L'equazione che descrive il trasporto di calore è l'equazione (5.6.11),

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \dot{q}, \quad (11.1.1)$$

dove \dot{q} è il calore generato per unità di tempo e di volume e abbiamo considerato il caso in cui la conducibilità termica k , la densità ρ e il calore specifico a pressione costante c_p sono costanti. Questa equazione si può anche ricavare direttamente da un bilancio dell'energia interna contenuta in un elemento di volume V , considerando che tale energia è $\int_V \rho c_v (T - T_o) dV$, dove T_o è una temperatura di riferimento. Dunque otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho c_v (T - T_o) dV = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_Q dS + \int_V \dot{q} dV, \quad (11.1.2)$$

dove \mathbf{J}_Q è il flusso di calore, mentre $\hat{\mathbf{n}}$ è il vettore unitario perpendicolare alla superficie di contorno S e diretto verso l'esterno di tale superficie. Applicando il teorema della divergenza di Gauss otteniamo:

$$\int_V \left[\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_Q - \dot{q} \right] dV = 0. \quad (11.1.3)$$

Considerando che il flusso di calore è uguale alla somma di una parte convettiva e di una conduttiva,

$$\mathbf{J}_Q = \rho c_v (T - T_o) \mathbf{v} - k \nabla T, \quad (11.1.4)$$

otteniamo l'equazione differenziale:

$$\rho c_v \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} T) \right] = k \nabla^2 T + s \quad (11.1.5)$$

A questo punto, nel caso di fluidi incomprimibili, per cui $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e $c_v = c_p$, ritroviamo l'equazione (11.1.1).

11.2 Trasporto di calore in un mezzo semi-infinito

Consideriamo il caso di un solido, inizialmente a temperatura T_0 costante, che venga posto a contatto con un fluido a temperatura T_w e supponiamo di voler determinare il profilo di temperatura $T(y,t)$ in funzione della posizione e del tempo. Con riferimento alla **figura 11.2.1**, in cui $y=0$ è la superficie di separazione tra il solido e il fluido, si considerino dei tempi di contatto sufficientemente brevi in modo da poter supporre che il corpo sia `grande', nel senso che possiamo ignorare l'esistenza di un'altra parete, opposta a $y=0$. Questo significa che il solido si può considerare semi-infinito, con $0 < y < \infty$.

Scriviamo l'equazione del calore in transitorio e in assenza di convezione:

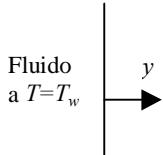


Figura 11.2.1

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (11.2.1)$$

da risolversi con condizione iniziale $T(y,t=0) = T_0$ e condizioni al contorno $T(y=0,t) = T_w$ e $T(y \rightarrow \infty, t) = T_0$, dove abbiamo supposto che la temperatura della parete è uguale a quella del fluido raffreddante.

Riscriviamo il problema in funzione della variabile adimensionale $\Theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}; \quad \Theta(y,0) = \Theta(\infty, t) = 1; \quad \Theta(0, t) = 0. \quad (11.2.2)$$

Come abbiamo visto nel paragrafo 6.4, la soluzione di questo problema è la seguente:

$$\Theta(y, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right), \quad (11.2.3)$$

dove erf è la funzione degli errori, uguale all'integrale della funzione gaussiana,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (11.2.4)$$

con $\operatorname{erf}(0) = 0$ e $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Definendo una *profondità di penetrazione del calore* come la distanza δ_T in corrispondenza della quale la temperatura del solido sia uguale al 99% del suo valore asintotico, cioè

$$0.99 = \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_T}{\sqrt{4\alpha t}}\right), \quad (11.2.5)$$

considerando che $\text{erf}(2) \approx 0.99$, otteniamo: $\delta_T = 4\sqrt{\alpha t}$. Dunque vediamo che per tempi t sufficientemente brevi da dare origine a profondità di penetrazione molto minori delle dimensioni L del solido, cioè per $t < L^2/\alpha$, l'approssimazione di solido semi-infinito è valida.

Infine, dalla soluzione vista possiamo determinare il flusso di calore alla superficie,

$$J_Q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -k(T_0 - T_w) \left(\frac{d\Theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} \frac{d\eta}{dy} = -\frac{k(T_0 - T_w)}{\sqrt{\pi\alpha t}}, \quad (11.2.6)$$

da cui vediamo che il flusso decresce come $1/\sqrt{t}$. Sembra che per $t=0$ il flusso sia infinito. Ciò è dovuto al fatto che inizialmente il gradiente della temperatura alla parete è infinito, una condizione che di fatto non si verifica, ovviamente, anche se è vero che il flusso è inizialmente molto alto. Comunque, se calcoliamo la quantità di calore trasmessa per unità di area durante un tempo t otteniamo:

$$E = \left| \int_0^t J_Q dt \right| = \frac{k(T_0 - T_w)}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2k(T_0 - T_w)}{\sqrt{\pi\alpha}} \sqrt{t}, \quad (11.2.7)$$

da cui vediamo che l'energia trasmessa cresce come \sqrt{t} .

In modo qualitativo, avremmo potuto ottenere questo risultato fin dall'inizio. Infatti, considerando che la profondità di penetrazione è $\delta_T \approx \sqrt{\alpha t}$ e il flusso è dato da $J_Q \approx -k\Delta T/\delta_T$, con $\Delta T = T_0 - T_w$, otteniamo $J_Q \approx -k\Delta T/\sqrt{\alpha t}$, che coincide, a meno di una costante di $O(1)$, con il risultato esatto.

11.2.1 Due solidi a contatto

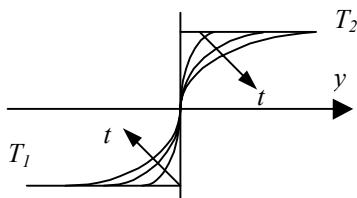


Figura 11.2.2

Si considerino due solidi, aventi la stessa diffusività termica e inizialmente a temperatura posti T_1 e T_2 . Si voglia determinare il profilo di temperatura nei due solidi dopo che ad un certo istante $t=0$ essi vengano posti a contatto (vedi **figura 11.2.2**).

L'equazione del calore e le condizioni iniziali e di contorno scritte in funzione della variabile adimensionale $\Theta = \frac{2T - T_1 - T_2}{T_2 - T_1}$ è la seguente:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}; \quad \Theta(y < 0, 0) = \Theta(-\infty, t) = -1; \quad \Theta(y > 0, 0) = \Theta(+\infty, t) = 1. \quad (11.2.8)$$

Anche qui, la soluzione è: $\Theta(y, t) = \text{erf}(\eta)$, con $\eta = y/\sqrt{4\alpha t}$, dove si è considerato che erf è una funzione dispari, cioè $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$. Da qui vediamo che all'interfaccia $y=0$ si ha $\Theta=0$ e dunque la temperatura rimane costante nel tempo, ad un valore che sta a metà tra T_1 e

T_2 . A questo risultato avremmo potuto arrivare fin dall'inizio, in base alla simmetria del problema.

11.2.2 Raffreddamento di un film in caduta libera

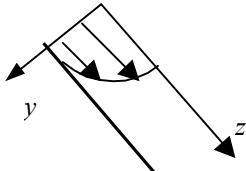


Figura 11.2.3

Un film liquido di spessore h e inizialmente a temperatura T_0 scorre lungo un piano inclinato di lunghezza L (vedi **figura 11.2.3**). La parete è isolata, mentre il liquido viene raffreddato da un fluido a temperatura T_a . Si vuole calcolare il profilo di temperatura nel film per piccoli tempi di contatto.

Nelle coordinate indicate in figura, il profilo di velocità ha la forma: $v(y) = V [1 - (y/h)^2]$. Dunque l'equazione del calore, in stazionario e in presenza del termine convettivo, è la seguente:

$$V \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (11.2.9)$$

Per tempi di contatto brevi, avremo che la profondità di penetrazione del calore δ_T è molto più piccolo sia dello spessore del film che della lunghezza del piano inclinato. Dunque, nell'equazione sopra avremo che $y \ll h$ e $\partial^2 T / \partial z^2 \ll \partial^2 T / \partial y^2$. In modo rigoroso, poiché $y = O(\delta_T)$ mentre $z = O(L)$, con $\delta_T/L = \varepsilon \ll 1$, definendo $\tilde{y} = y / \delta_T$ e $\tilde{z} = z / L$, scriviamo:

$$\frac{V \delta_T^2}{\alpha L} \left[1 - \tilde{y}^2 \left(\frac{\delta_T^2}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2},$$

da cui vediamo che i termini dominanti dell'equazione sono quelli visti sopra e cioè:

$$V \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (11.2.10)$$

Dunque, nella approssimazione di tempi di contatto brevi, il calore penetra poco nel film, così che il fluido viene percepito come se avesse velocità V uniforme e inoltre il gradiente di temperatura in direzione trasversale al moto è molto maggiore di quello in direzione longitudinale. L'equazione (11.2.10) va risolta con condizioni al contorno: $T(y, z=0) = T_0$ e $T(y=0, z) = T_a$. A queste due condizioni va aggiunta la terza: $\partial T / \partial y (y=h, z) = 0$; tuttavia, considerando l'ipotesi di tempi di contatto brevi, questa condizione al contorno si può sostituire con: $T(y \gg \delta_T, z) = T_0$, cioè $T(y \rightarrow \infty, z) = T_0$.

Ora, definendo $t = z/V$ come il tempo impiegato dal fluido per percorrere una lunghezza z , l'equazione (11.2.10) si riduce alla (11.2.2), con le stesse condizioni al contorno. Dunque troviamo la soluzione (11.2.3), che ritrasformata nelle variabili originali diventa:

$$\Theta(y, z) = \frac{T(y, z) - T_a}{T_0 - T_a} = \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \right) = \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha z/V}} \right). \quad (11.2.11)$$

Considerando che alla fine del piano inclinato, per $z=L$, si ha $\delta_T = 4\sqrt{\alpha L/V}$, si vede che nell'approssimazione considerata, $\delta_T \ll h$, la lunghezza L del piano inclinato deve essere tale che $L/h \ll Vh/\alpha = Pe$.

11.3 Campo di temperatura generato da un impulso di calore

La superficie di una regione semi-infinita $y>0$, inizialmente a temperatura T_0 , viene riscaldata con un impulso laser brevissimo (supponiamo che sia istantaneo) che trasmette un'energia E per unità di area. L'equazione del calore è la solita,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \Phi = T - T_0 \quad (11.3.1)$$

da risolversi con la condizione iniziale $\Phi(y,t=0) = 0$. Inoltre, supponendo che il calore si disperda soltanto per conduzione nella regione $y>0$ (cioè che non si disperda nella regione $y<0$), dobbiamo aggiungervi una condizione che imponga la conservazione dell'energia interna,

$$\rho c_p \int_0^\infty \Phi dy = U \quad (11.3.2)$$

Consideriamo la derivata spaziale $\Theta'(y,t)$ della temperatura Θ del paragrafo precedente. Ovviamente, Θ' soddisfa la stessa equazione (10.2.2), con le stesse condizioni al contorno. Nell'origine, per $t=0$ la temperatura Θ è discontinua (è una funzione a gradino) e dunque Θ' non è definita. Diciamo, per comodità (i matematici non se la prendano a male) che inizialmente Θ' è infinita per $y=0$ e uguale a zero altrove, ma in modo tale che il suo integrale si mantenga finito¹. Poiché Θ' soddisfa la stessa equazione e le stesse condizioni di Φ , deve essere uguale a Φ , cioè $\Theta' = \partial\Theta/\partial y \equiv \Phi$, a meno di una costante moltiplicativa C che permetta di soddisfare la condizione (11.3.2). Otteniamo in definitiva:

$$\Phi(y,t) = C \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^{y/\sqrt{4\alpha t}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{C}{\sqrt{\pi\alpha t}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}}$$

A questo punto, imponendo la condizione (11.3.2), si determina $C=E/\rho c_p$ e dunque concludiamo:

$$\Phi(y,t) = \frac{E}{\rho c_p \sqrt{\pi\alpha t}} e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}} \quad (11.3.3)$$

¹ Tale 'cosa' in realtà non è una funzione, ma una distribuzione, cioè il limite di una serie di funzioni. Ciononostante, si indica col nome di funzione di Dirac (o di Heavyside), $\delta(x)$, caratterizzata dal fatto che $\delta(x)=0$ per $x \neq 0$ e che $\int \delta(x) dx = 1$.

Questa è la funzione gaussiana, con ampiezza a mezza altezza uguale a $\sqrt{2\alpha t}$. Naturalmente, per $t=0$, la gaussiana tende ad una ‘cosa’ uguale a zero per $y \neq 0$, fortemente discontinua nell’origine, ma tale che il suo integrale rimane finito e uguale a $C=E/\rho c_p$.

11.4 Trasporto di calore in un solido finito

Consideriamo una lastra di spessore $2L$, inizialmente a temperatura T_0 , e supponiamo che all’istante $t=0$ le due pareti $x=-L$ e $x=L$ vengano portate a temperatura T_1 . Si determini il profilo di temperatura $T(x,t)$.

Definendo la variabile adimensionale $\Theta(\tilde{x}, \tilde{t})$, con $\Theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$, $\tilde{x} = x/L$ e $\tilde{t} = t/(L^2/\alpha)$, otteniamo:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{x}^2}; \quad \Theta(-1, \tilde{t}) = \Theta(1, \tilde{t}) = 0; \quad \Theta(\tilde{x}, 0) = 1. \quad (11.4.1)$$

Spesso il tempo adimensionale si indica con il numero di *Fourier*, $Fo \equiv \tilde{t} = \alpha t / L^2$.

Si noti che la soluzione deve soddisfare l’eguaglianza $T(-x, t) = T(x, t)$, indicante il profilo di temperatura tra $-L$ e 0 è uguale all’immagine speculare di quello tra 0 e L . In particolare, ciò significa che nell’origine il profilo di temperatura è piatto, con $\partial T / \partial x = 0$. Dunque, possiamo risolvere il problema tra con $0 < x < L$, riscrivendo (11.4.1) nel modo seguente.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{x}^2}; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{x}}(0, \tilde{t}) = \Theta(1, \tilde{t}) = 0; \quad \Theta(\tilde{x}, 0) = 1. \quad (11.4.2)$$

Adesso applichiamo un metodo detto della *separazione delle variabili*. Supponiamo che la temperatura Θ si possa scrivere come il prodotto di due funzioni, di cui una dipendente solo da \tilde{x} e l’altra solo da \tilde{t} , cioè $\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x})T(\tilde{t})$. Sostituendo questa espressione nell’equazione del calore e dividendo per XT , otteniamo:

$$\frac{dT/d\tilde{t}}{T} = \frac{d^2X/d\tilde{x}^2}{X}.$$

Ora, poiché il primo membro è una funzione solo di \tilde{t} , mentre il secondo lo è solo di \tilde{x} , questa uguaglianza può accadere soltanto quando i due membri sono uguali ad una costante, che indichiamo con $-\lambda^2$ (il perché assumiamo che tale costante debba essere negativa diverrà evidente tra poco). Dunque, l’eguaglianza precedente si scinde in due equazioni. La prima è

$$\frac{dT}{d\tilde{t}} = -\lambda^2 T,$$

che si risolve, ottenendo: $T(\tilde{t}) = Ae^{-\lambda^2 \tilde{t}}$; dunque, ecco perché ci serve il meno: la funzione T deve essere monotonica decrescente, tendendo al valore stazionario che raggiunge per tempi lunghi. Se avessimo messo una costante positiva, ne sarebbe risultata una funzione T crescente esponenzialmente.

La seconda equazione è la seguente:

$$\frac{d^2 X}{d\tilde{x}^2} + \lambda^2 X = 0,$$

da risolversi con condizioni al contorno: $dX(0)/d\tilde{x} = X(1) = 0$. Questo problema ammette un numero infinito di soluzioni, del tipo $\cos(\lambda\tilde{x})$, che già soddisfano la prima delle due condizioni. Imponendo che anche la seconda venga soddisfatta, otteniamo: $\cos\lambda=0$, da cui: $\lambda=n\pi/2$, con n dispari e dunque concludiamo che $X(\tilde{x})=\cos(n\pi\tilde{x}/2)$. Ne deduciamo che una qualsiasi funzione $XT = \cos(n\pi\tilde{x}/2)\exp(-n^2\pi^2 t/4)$, con $n=2m+1$ (cioè con n dispari), è una soluzione del problema.

Ora, poiché il problema è lineare con condizioni al contorno omogenee² (possiamo applicare il principio di sovrapposizione, che dice che se Θ_1 e Θ_2 sono due soluzioni, lo è anche una qualsiasi loro combinazione lineare $c_1\Theta_1+c_2\Theta_2$, dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. Dunque, la soluzione generale di questo problema è la seguente:

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos[(m + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] e^{-(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \tilde{t}}$$

A questo punto, dobbiamo determinare le costanti c_m . Lo facciamo imponendo che la condizione iniziale venga soddisfatta, cioè che:

$$\Theta(\tilde{x}, 0) = 1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos[(m + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] \quad (11.4.3)$$

Ora, teniamo presente che

$$\int_0^1 \cos[(m + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] \cos[(n + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] d\tilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1/2 & \text{per } m = n \end{cases}$$

Dunque, moltiplicando l'equazione (11.4.3) per $\cos[(n + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}]$ e integrando tra 0 e 1, otteniamo:

$$\int_0^1 \Theta(\tilde{x}, 0) \cos[(n + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] d\tilde{x} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_0^1 \cos[(m + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] \cos[(n + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] d\tilde{x},$$

da cui:

² Ciò significa che non cambiano se la temperatura viene moltiplicata per una costante.

$$c_n = \frac{2}{(n + \frac{1}{2})\pi} \sin(n + \frac{1}{2})\pi = \begin{cases} \frac{2}{(n + \frac{1}{2})\pi} & \text{per } n \text{ pari} \\ -\frac{2}{(n + \frac{1}{2})\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} = \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi}$$

Concludiamo:

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi} \cos[(n + \frac{1}{2})\pi\tilde{x}] e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \tilde{t}}, \quad (11.4.4)$$

cioè

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{4}{\pi} \cos(\pi\tilde{x}/2) e^{-\pi^2 \tilde{t}/4} - \frac{4}{3\pi} \cos(3\pi\tilde{x}/2) e^{-9\pi^2 \tilde{t}/4} + \dots, \quad (11.4.5)$$

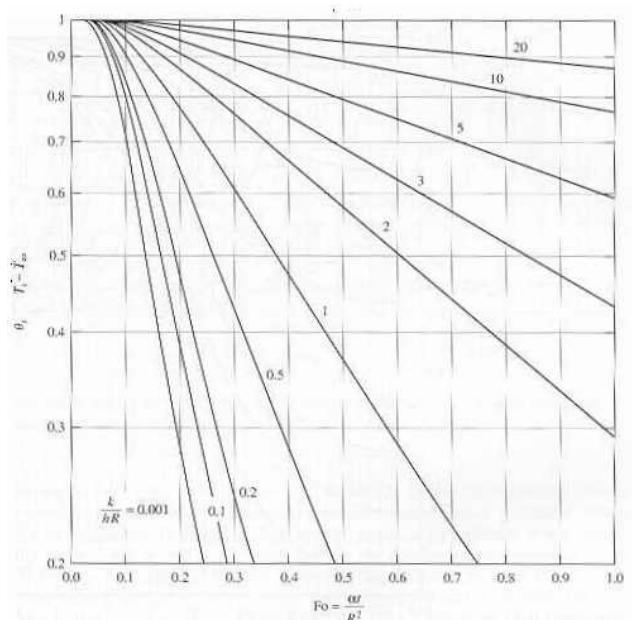
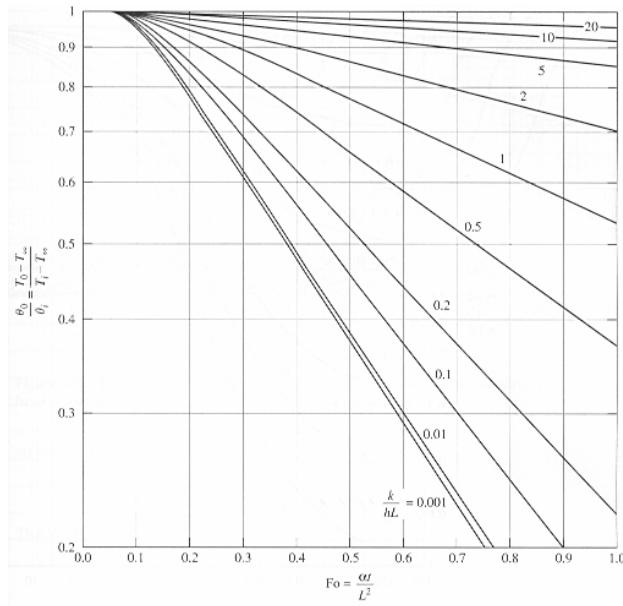


Figura 11.4.1 – Temperatura al centro di una piastra per $Fo = \alpha t / L^2 < 1$ (a sinistra) e al centro di una sfera per $Fo = \alpha t / R^2 < 1$ (a destra).

Ovviamente, per tempi lunghi, $\tilde{t} \gg 1/\pi^2$ il termine dominante della serie è il primo e la serie converge velocemente. Da qui vediamo che il tempo (adimensionale) caratteristico per raggiungere lo stato stazionario $\Theta = 0$ è $\tilde{t} \approx 4/\pi^2$, corrispondente a $\tau \approx 4L^2/\alpha\pi^2$.

Si noti che per tempi brevi, $\tilde{t} \ll 1/\pi^2$, la serie (11.4.4) converge molto lentamente. Tuttavia, in questo caso, la sola regione ad aver subito variazioni di temperatura è quella vicina all'una o all'altra parete, dove il flusso di calore proveniente dalla parete più lontana non è ancora arrivato. Dunque, per tempi brevi, si può usare la soluzione ottenuta per regioni semi-infinte:

$$\Theta(\tilde{x}, t) = \operatorname{erf}(\eta'); \quad \eta' = \frac{1 - \tilde{x}}{\sqrt{4t}}; \quad 0 < \tilde{x} < 1, \quad (11.4.6)$$

Soluzioni simili si ottengono quando la piastra scambia calore con un fluido a temperatura costante con un coefficiente di scambio termico h costante. In questo caso, naturalmente, la soluzione dipende dal valore del numero di Biot $Bi=hL/k$. Nella **figura 11.4.1**, a sinistra, si riportano i valori della temperatura al centro della piastra in funzione del tempo e dell'inverso del numero di Biot. Per tempi più lunghi, le curve continuano a decrescere esponenzialmente in modo prevedibile (cioè, nella curva semi-logaritmica, mantenendo la stessa pendenza).

Del tutto analoghi sono i casi con geometrie diverse, in particolare sferiche e cilindriche. Nella **figura 10.4.1**, a destra, si riportano i valori della temperatura al centro di una sfera in funzione del tempo e dell'inverso del numero di Biot.

11.5 Scambio di calore in un tubo.

Si consideri un tubo circolare di raggio R in cui le pareti sono mantenute a temperatura costante T_R , dentro il quale scorre un fluido con velocità $v(r)$ ("fully developed") nella direzione assiale z . Supponendo che la temperatura di ingresso sia uniforme e uguale a T_i , vogliamo determinare la temperatura media a distanza z in funzione della portata e del diametro del tubo.

Cominciamo con lo scrivere l'equazione di trasporto del calore, in funzione della temperatura $T(r,z)$:

$$\rho cv(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right].$$

Supponendo che $Pe \gg 1$, la conduzione nella direzione longitudinale risulta molto minore di quella nella direzione trasversale e dunque l'ultimo termine dell'equazione scritta sopra si può trascurare:

$$\rho cv(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (11.5.1)$$

Questa equazione deve essere risolta con le seguenti condizioni al contorno:

$$T(z=0) = T_i; \quad T(r=R) = T_R; \quad \frac{dT}{dr}(r=0) = 0. \quad (11.5.2)$$

Ora, invece di risolvere l'intero problema (questo è quello che ha fatto Graetz nel 1890), qui ci interessa soltanto il comportamento della temperatura media definita come:

$$\langle T \rangle(z) = \frac{\int_0^R T(r, z) v(r) 2\pi r dr}{\int_0^R v(r) 2\pi r dr} = \frac{\int_0^R T(r, z) v(r) 2\pi r dr}{\dot{V}}, \quad (11.5.3)$$

dove \dot{V} è la portata volumetrica. Si noti che $\langle T \rangle$ non è la media aritmetica di T nella sezione. Si tratta invece di una media pesata dal flusso, detta “cup-mixing temperature” e uguale alla temperatura del fluido uscente da quella sezione, raccolto in un contenitore (“cup”) e miscelato. Moltiplicando (11.5.1) per r e integrando in dr otteniamo:

$$\rho c \dot{V} \frac{d\langle T \rangle}{dz} = 2\pi \kappa \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = 2\pi \kappa R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (11.5.4)$$

A questo punto definiamo il coefficiente di scambio termico h come il rapporto tra il flusso termico alla parete e la differenza tra la temperatura di parete, T_R , e la temperatura media $\langle T \rangle$,

$$-\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h [\langle T \rangle - T_R]. \quad (11.5.5)$$

Dunque l’equazione (11.5.4) diventa:

$$\dot{m}c \frac{d\langle T \rangle}{dz} = -\pi D h [\langle T \rangle - T_R], \quad (11.5.6)$$

dove $\dot{m} = \rho \dot{V}$ e $D = 2R$. In questa equazione, supponiamo di conoscere h e di voler determinare la temperatura di uscita, nota quella d’entrata. Con facili passaggi, otteniamo:

$$\frac{\langle T \rangle - T_R}{T_i - T_R} = \exp \left(-\frac{\pi h D z}{\dot{m} c} \right). \quad (11.5.7)$$

Questa equazione si può riscrivere in funzione delle temperature di ingresso, T_i , di quella di uscita, $T_2 = \langle T \rangle(z = L)$ e del numero di Stanton, St , con

$$St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{h}{\rho c U}; \quad \text{dove} \quad Nu = \frac{hD}{\kappa} \quad \text{e} \quad Pe = \frac{\rho c U D}{\kappa}, \quad (11.5.8)$$

ottenendo:

$$\frac{T_o - T_R}{T_i - T_R} = \exp \left(-\frac{\pi h D L}{\dot{m} c} \right) = \exp \left(-4 St \frac{L}{D} \right), \quad (11.5.8)$$

dove U è la velocità media e abbiamo considerato che $\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho U (\pi D^2 / 4)$.

Spesso è più conveniente esprimere questo risultato in un altro modo, in funzione di una differenza di temperatura efficace ΔT tra la temperatura del fluido e quella della parete, definita come

$$\dot{Q} = hA\Delta T , \quad (11.5.9)$$

dove $A = \pi DL$ è l'area di scambio, mentre \dot{Q} è il flusso termico totale,

$$\dot{Q} = \dot{m}c(T_1 - T_2) , \quad (11.5.10)$$

che supponiamo in questo caso positivo quando il calore esce dal sistema. Ora, dalle due ultime equazioni si ricava:

$$\Delta T = [\dot{m}c(T_1 - T_2)] / [\pi DLh] ,$$

mentre dalla (11.5.8) si ottiene:

$$[\pi DLh] / [\dot{m}c] = \ln[(T_i - T_R) / (T_o - T_R)] .$$

Dunque concludiamo che

$$\Delta T = \frac{T_i - T_o}{\ln\left(\frac{T_i - T_R}{T_o - T_R}\right)} = \frac{T_o - T_i}{\ln\left(\frac{T_o - T_R}{T_i - T_R}\right)} = \frac{(T_i - T_R) - (T_o - T_R)}{\ln\left(\frac{T_i - T_R}{T_o - T_R}\right)} = \Delta T_{\ln} , \quad (11.5.11)$$

che mostra come ΔT , definito in (11.5.9), sia uguale alla differenza di temperatura logaritmica media tra la temperatura del fluido e quella della parete.

11.6 Esercizi

- 11.1** La superficie esterna di una spessa lastra di ferro, con temperatura iniziale di 0°C , viene portata (supponiamo istantaneamente) a 60°C . Quale sarà la temperatura a 3 cm di profondità dopo 1 minuto?
- 11.2** La superficie esterna di una spessa lastra di nickel con temperatura iniziale di 20°C viene esposta ad un impulso di energia istantaneo di 12 MJ/m^2 . Quale sarà la temperatura della parete dopo 5 secondi?
- 11.3** Una patata, inizialmente a temperatura $T_i=20^\circ\text{C}$, viene messa in un forno con $T_a=160^\circ\text{C}$, dove si scalda con coefficiente di scambio termico $h=13\text{ W/m}^2\text{K}$. Quanto ci mette a cuocere, sapendo che una patata è cotta quando la sua temperatura al centro raggiunge $T_o=100^\circ\text{C}$? Si supponga che la patata sia una sfera (meraviglie dell'ingegneria genetica!) con raggio $R=4\text{ cm}$.

- 11.4** Si risolva il problema del paragrafo 11.4, supponendo che le pareti della piastra siano a $x=0$ e $x=L$ e si verifichi che la temperatura al centro della piastra risulta uguale alla serie (11.4.4).
- 11.5** Una piastra di spessore L è isolata su una parete $x=0$, mentre l'altra parete viene posta a contatto con un fluido a temperatura T_a . Supponendo che la temperatura iniziale della piastra sia uniforme e uguale a T_i e che la temperatura della parete $x=L$ sia uguale a quella del fluido, si calcoli l'andamento nel tempo della temperatura della parete $x=0$.

12. Lo strato limite termico

Nel paragrafo 2.3 abbiamo visto che quando un fluido caldo (o freddo) con diffusività termica α lambisce un corpo freddo (o caldo) di dimensione L , se la sua velocità caratteristica V è grande, in modo che il numero di Peclet $N_{Pe} \gg 1$, allora il flusso convettivo di calore è molto maggiore di quello conduttivo. Ciò è vero dovunque, con l'eccezione di una piccola regione vicino alle pareti del corpo, di spessore δ_T , detto strato limite termico. Banalmente, mentre lontano dalle pareti sono i flussi convettivi a prevalere (cioè il calore si trasmette per via convettiva), alle pareti la velocità del fluido è nulla e dunque lì ci sono soltanto flussi di conduzione, responsabili oltretutto del scambio di calore tra corpo e fluido (cioè della cosa che ci interessa di più); dunque, ad una certa distanza δ_T dalle pareti i due flussi si devono bilanciare: questa distanza determina lo spessore dello strato limite termico.

In questo capitolo si vuole anzitutto determinare l'ordine di grandezza (lo scaling) dei vari termini che contribuiscono al trasporto di calore, in modo da capire perché si formi uno strato limite termico. Poi studieremo l'analogia di Colburn-Chilton tra scambio di calore e di quantità di moto, che ci permette di determinare l'una conoscendo l'altra. Infine, analizzeremo la soluzione classica che studia un flusso lambente una parete piana, che ci permetterà di determinare esattamente il profilo di temperatura all'interno dello strato limite termico.

12.1 Analisi adimensionale del problema

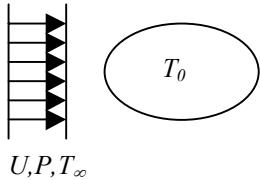


Figura 12.1.1

Si consideri un corpo fermo e con temperatura T_0 , lambito da un fluido con velocità \mathbf{U} , pressione P (vedi figura 12.1.1) e temperatura T_∞ e si supponga che il numero di Peclet $Pe = UL/\alpha$ sia molto maggiore di 1, dove L è la dimensione del corpo. Le incognite del problema, cioè velocità \mathbf{v} , pressione p e temperatura T del fluido, si possono ottenere (in linea di principio) risolvendo le equazioni di Navier-Stokes, continuità e calore:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (12.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (12.1.2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T, \quad (12.1.3)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}; T = T_0 \text{ alla parete; } \mathbf{v} = \mathbf{U}; T = T_\infty \text{ lontano dalla parete.} \quad (12.1.4)$$

Alla fine, come al solito, noi siamo interessati a determinare un flusso, termico in questo caso:

$$J_U = -\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla T \text{ alla parete,} \quad (12.1.5)$$

dove \mathbf{n} è il versore perpendicolare alla superficie del corpo¹. Si noti che, come al solito, poiché alla superficie del corpo la velocità del fluido è nulla, il flusso di calore (come anche il flusso di quantità di moto e, come vedremo, quello massico) risulta essere soltanto di tipo diffusivo.

Esaminiamo il problema dal punto di vista dell'analisi dimensionale. Definendo le seguenti variabili adimensionali,

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}; \quad \tilde{t} = \frac{t}{(L/U)}; \quad \tilde{p} = \frac{p - P}{(\mu U / L)}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{U}; \quad \tilde{T} = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, \quad (12.1.6)$$

le equazioni (12.1.1)-(12.1.4) diventano:

$$Re \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{Dt} = Re\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}, \quad (12.1.7)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (12.1.8)$$

$$Pe \frac{D\tilde{T}}{Dt} = Pe\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{T} = \tilde{\nabla}^2\tilde{T}, \quad (12.1.9)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{T} = 0 \text{ alla parete; } \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{T} = 1 \text{ lontano dalla parete,} \quad (12.1.10)$$

Da questa semplice analisi emergono in modo naturale due numeri adimensionali, il numero di Reynolds $Re=UL/\nu$ e il numero di Peclet $Pe=UL/\alpha$, uguali al rapporto tra i flussi convettivi e i flussi diffusivi nel trasporto di quantità di moto e di energia, rispettivamente. A sua volta, il numero di Peclet si può scrivere come il prodotto del numero di Reynolds e di quello di Prandtl, $Pr=\nu/\alpha$. Quest'ultimo rappresenta il rapporto tra l'efficienza del trasporto diffusivo di quantità di moto e di quello di energia. In sintesi:

$$Re = \frac{UL}{\nu}; \quad Pe = \frac{UL}{\alpha}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (12.1.11)$$

Anche il flusso si può scrivere in modo adimensionale, definendo il numero di Nusselt come il rapporto tra il flusso termico totale e il flusso termico conduttivo,

$$Nu = \frac{J_U}{\kappa \Delta T / L} = -\mathbf{n} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{T} \text{ alla parete,} \quad (12.1.12)$$

dove $\Delta T = |T_o - T_\infty|$.

In questo capitolo noi studiamo i casi in cui il numero di Peclet sia molto elevato. Ora, il nostro istinto, a prima vista, ci direbbe che in questo caso, siccome i flussi convettivi sono molto maggiori di quelli conduttori, il secondo membro dell'equazione (12.1.8) si può trascurare. Così facendo, tuttavia, il problema si ridurrebbe da uno del second'ordine (cioè con derivate seconde) a uno del prim'ordine e dunque non sarebbe più possibile soddisfare

¹ In realtà, siamo interessati, più precisamente, al flusso totale di calore, uguale all'integrale di (12.1.5) su tutta la superficie del corpo.

entrambe le condizioni al contorno relative alla temperatura alla parete e all'infinito². Supponendo che la condizione all'infinito sia soddisfatta³, ciò significa che non possiamo imporre anche che la temperatura alla parete sia uguale a T_0 e dunque la soluzione dell'equazione (12.1.4) senza il termine conduttivo risulterebbe banalmente $T = T_\infty$. Dunque, trascurando ovunque il termine conduttivo, otterremmo un campo di temperatura uniforme e un flusso di calore nullo e dovremmo concludere che non sussiste alcuno scambio termico tra fluido e corpo, una conclusione ovviamente inaccettabile. La spiegazione fisica di questo fatto è che alla parete non restano che i flussi di tipo diffusivo, perché lì la velocità del fluido è nulla e tutti i flussi convettivi si annullano. Perciò, se trascuriamo i flussi conduttori ovunque e supponiamo che esistano soltanto flussi convettivi, è ovvio che risulterebbe nullo lo scambio termico tra il fluido e il corpo, che avviene alla parete, ovviamente, dove i flussi convettivi sono nulli.

La soluzione di questo problema sta nell'introdurre il concetto di strato limite termico, consistente in una sottile regione di spazio, di spessore δ_T (non necessariamente uniforme) a contatto con il corpo al di fuori della quale i flussi diffusivi si possono effettivamente trascurare (e dunque il profilo di temperatura è uniforme, con $T=T_\infty$), mentre al suo interno essi acquistano un'importanza crescente man mano che ci avviciniamo alla parete. L'idea di fondo è che i gradienti termici nello strato limite sono dell'ordine di $\Delta T/\delta_T$, dove $\Delta T=T_\infty-T_0$ e dunque, se δ_T è sufficientemente piccolo, i flussi diffusivi (che sono proporzionali a tale gradiente) bilanciano quelli convettivi.

12.2 Lo strato limite termico

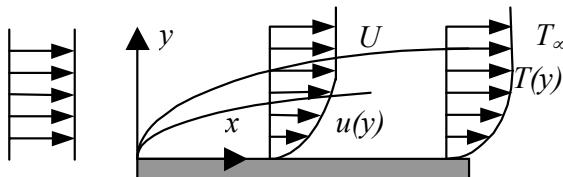


Figura 12.2.1

Poiché $\delta_T \ll L$, se consideriamo lunghezze dell'ordine di δ_T possiamo trascurare la curvatura del corpo e supporre che il problema sia piano. Dunque, si consideri il caso semplice di flusso bidimensionale con velocità $\mathbf{v}=(u,v)$, pressione p e temperatura T , che lambisca un piatto $y=0$ (vedi figura 12.2.1). La velocità imperturbata (cioè prima di "vedere" il piatto) è uniforme e uguale ad

$\mathbf{U}=(U,0)$, con pressione P e temperatura T_∞ , mentre alla parete la velocità è nulla, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ e la temperatura è uguale a T_0 . Inoltre si supponga che il numero di Peclet $Pe=UL/\alpha$ sia molto maggiore di 1, dove L è la dimensione del piatto.

Le tre funzioni incognite, u, v e p , sono determinate dalla equazione di Navier-Stokes (2 equazioni), da quella di continuità e dalla equazione del calore:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (12.2.1)$$

² Ricordiamo che una equazione differenziale di ordine n viene integrata introducendo n costanti di integrazione le quali, a loro volta, si possono determinare imponendo n condizioni (iniziali o al contorno). Dunque, per risolvere una equazione del prim'ordine possiamo imporre una sola condizione al contorno.

³ Supponendo invece che l'altra condizione al contorno sia soddisfatta, si otterrebbe comunque un profilo di temperatura uniforme, $T=T_0$.

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (12.2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.2.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (12.2.4)$$

soggette alle seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} u = v = 0; \quad T = T_0 &\quad \text{per } y = 0; \\ u = U; \quad v = 0; \quad p = P; \quad T = T_\infty &\quad \text{per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0. \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

Infine, il flusso di calore (12.1.5) viene espresso come:

$$J_U = -\kappa \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0}. \quad (12.2.6)$$

Da qui si può già stimare l'ordine di grandezza di J_U come $\approx \kappa \Delta T / \delta_T$. I risultati di questa analisi si possono esprimere in funzione del numero di Nusselt,

$$Nu = \frac{J_U}{\kappa \Delta T / L} = \frac{L}{\delta_T},$$

dove $L \approx x$ è una distanza macroscopica, oppure in funzione del coefficiente di scambio termico h , definito nella (8.1.4),

$$h = \frac{J_U}{\Delta T} = \frac{\kappa}{L} Nu.$$

A questo punto, consideriamo i due casi, in presenza ed in assenza di strato limite di quantità di moto. In altre parole, fermo restando che $Pe \gg 1$, vediamo separatamente cosa succede quando $Re \gg 1$ e quando $Re \ll 1$.

12.2.1 $Re \gg 1$

In questo caso, ci sono due strati limite, uno termico e uno della quantità di moto. Quest'ultimo, come abbiamo visto nel capitolo 7, si può determinare in modo indipendente dal campo di temperatura e ha uno spessore $\delta \approx L Re^{-1/2}$, dove L è una dimensione lineare macroscopica (nel caso di flusso su una parete piana, L è uguale alla distanza x dal bordo del piatto). A questo punto, si tratta di vedere se lo strato limite termico si trovi all'interno o all'esterno dello strato limite di quantità di moto. Come vedremo (e come del resto ci si può attendere anche in base ad una prima analisi), $\delta_T > \delta$ quando $Pe < Re$, cioè quando $Pr < 1$, mentre $\delta_T < \delta$ quando $Pe > Re$, cioè quando $Pr > 1$. In particolare, consideriamo i casi limite con $Pr \ll 1$ e $Pr \gg 1$.

$Pr \ll 1$

Soggetto a verifica a posteriori, supponiamo che in questo caso $\delta_T \gg \delta$, come in **figura 12.2.1**. Consideriamo i punti al confine dello strato limite termico, con $y \approx \delta_T$. Poiché ci troviamo ben al di fuori dello strato limite della quantità di moto, la velocità u in quei punti è uguale alla velocità imperturbata U . Conseguentemente, dall'equazione di continuità (12.2.3), con $x \approx L$, otteniamo: $v \approx U(\delta_T/L)$. Adesso consideriamo l'equazione (12.2.4): i due termini convettivi sono dello stesso ordine di grandezza,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx v \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{U \Delta T}{L},$$

mentre dei due termini diffusivi il primo è molto più piccolo del secondo, il quale a sua volta si può facilmente stimare nel modo seguente:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}.$$

Per definizione, sappiamo che al confine dello strato limite termico il contributo convettivo deve bilanciare quello conduttivo. Dunque, eguagliando le due espressioni scritte sopra otteniamo $\delta_T^2 \approx \alpha L/U$, da cui:

$$\delta_T / L \approx Pe^{-1/2} = Re^{-1/2} Pr^{-1/2}, \quad (12.2.7)$$

dove $Pe = UL/\alpha$, $Re = UL/v$ e $Pr = v/\alpha$. Da qui vediamo che

$$Nu \approx L / \delta_T \approx Pe^{1/2} = Re^{1/2} Pr^{1/2}, \quad (12.2.8)$$

A questo punto, si verifica facilmente che il risultato finale è in accordo con l'ipotesi iniziale, poiché dall'equazione (12.2.7) si vede che per $Pr < 1$ otteniamo che $\delta_T > \delta$.

Questo tipo di relazione è in ottimo accordo con i risultati sperimentali di Eq. (10.2.10), ottenuti con metalli liquidi.

$Pr \gg 1$

Questo è il caso opposto al precedente e dunque risulta che $\delta_T \ll \delta$. Ciò significa che, come appare dalla **figura 12.2.2**, la velocità u per $y=\delta_T$ è di molto inferiore alla velocità imperturbata U . Poiché ci troviamo molto all'interno dello strato limite della quantità di moto, possiamo supporre⁴ che in quella regione il profilo di velocità sia lineare e dunque otteniamo: $u \approx U(\delta_T/\delta)$. A questo punto, ripetendo l'analisi vista sopra per $Pr \ll 1$ e stimando v in base all'equazione di continuità, vediamo che i due termini convettivi risultano essere, come prima, dello stesso ordine di grandezza,

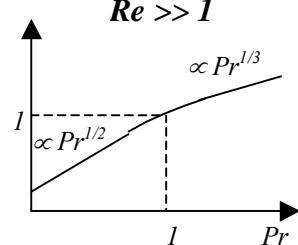
$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx v \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{U \delta_T \Delta T}{L \delta},$$

mentre l'analisi dei termini diffusivi non cambia:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}$$

Infine, eguagliando le due espressioni scritte sopra otteniamo $\delta_T^3/\delta \approx \alpha L/U$, da cui:

$$\delta_T/L \approx Re^{-1/6} Pe^{-1/3} = Re^{-1/2} Pr^{-1/3}. \quad (12.2.9)$$



Da qui vediamo che

$$Nu \approx L/\delta_T \approx Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (12.2.10)$$

Questo tipo di relazione è in ottimo accordo con i risultati sperimentali di Eq. (10.2.7)-(10.2.9).

Figura 12.2.3

Concludiamo che i risultati del caso con $Re \gg 1$ si possono riassumere in un grafico log-log di $Nu/Re^{1/2}$ in funzione di Pr , come si vede in **figura 12.2.3**.

12.2.2 $Re \ll 1$

In questo caso, non c'è alcun strato limite della quantità di moto. Dunque, se anche il numero di Peclet è molto piccolo, $Pe \ll 1$, la convezione può essere trascurata e il numero di Nusselt è di ordine 1 (ciò significa che può anche essere uguale a 2 o a $\frac{1}{2}$, naturalmente, ma non a 100, per intendersi). Diverso, e più interessante, è invece il caso in cui $Pe \gg 1$. L'analisi dimensionale è simile a quelle viste precedentemente e consiste nell'eguagliare gli ordini di grandezza dei termini convettivi e diffusivi nell'equazione del calore (12.2.4) quando $y \approx \delta_T$.

⁴ Applicando la (12.2.1) all'interno dello strato limite termico, vediamo che i termini convettivi sono trascurabili e l'equazione si riduce a $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$, da cui appare che u è lineare in y .

Ora, considerando che la velocità del fluido è uguale a quella imperturbata a distanze macroscopiche dal corpo, cioè per $y \approx L$ (mentre per $Re \gg 1$ ciò accade quando $y \approx \delta$), possiamo stimare la velocità u al confine dello strato limite termico come $u \approx U\delta_T/L$. A questo punto, ripetendo l'analisi vista sopra per $Re \gg 1$ e stimando v in base all'equazione di continuità, vediamo che i due termini convettivi nell'equazione (12.2.4) risultano essere, come prima, dello stesso ordine di grandezza,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx v \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{U\delta_T \Delta T}{L^2},$$

mentre l'analisi dei termini diffusivi non cambia:

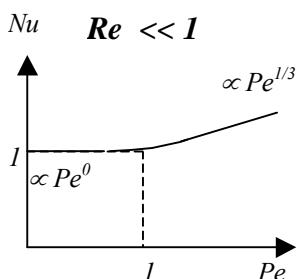


Figura 12.2.4

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{\alpha \Delta T}{\delta_T^2}$$

Infine, eguagliando le due espressioni scritte sopra otteniamo $\delta_T^3 \approx UL^2/\alpha$, da cui:

$$\delta_T/L \approx Pe^{-1/3} = Re^{-1/3} Pr^{-1/3}. \quad (12.2.11)$$

Da qui vediamo che

$$Nu \approx L/\delta_T \approx Pe^{1/3} \approx Re^{1/3} Pr^{1/3}, \quad (12.2.12)$$

Concludiamo che i risultati del caso con $Re \ll 1$ si possono riassumere in un grafico log-log di Nu in funzione di Pe , come si vede in **figura 12.2.4**.

12.3 L'analogia di Colburn-Chilton

Si tratta di una analogia tra lo scambio termico e quello di quantità di moto in base alla quale, una volta noto l'uno, si può determinare l'altro. Come vedremo, è uno strumento potente e il cui range di applicazione è molto più ampio di quello che sarebbe ragionevole aspettarsi.

Nella sua versione più semplice, questa analogia è detta *teoria del film* (“film theory”) e fa riferimento agli strati limite di quantità di moto e di energia che si formano a contatto di una parete da parte di un fluido che la lambisca con numeri di Reynolds e di Peclet molto elevati. Ricordiamo a questo proposito la definizione di fattore di attrito f vista nel capitolo 3:

$$f = \frac{(\text{flusso diffusivo di q.m. alla parete})}{\frac{1}{2}(\text{flusso convettivo di q.m. lontano dalla parete})} = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2}. \quad (12.3.1)$$

Ora, sappiamo che alla parete il flusso di quantità di moto, cioè lo sforzo di taglio, è di tipo diffusivo (perché la velocità è nulla) e uguale a $|J_Q| = \tau = \mu du/dy$, dove u è la velocità longitudinale (cioè parallela alla parete, in direzione x) e y la coordinata trasversale. Siccome nello strato limite, di spessore δ , la velocità u varia da 0 al suo valore asintotico U , possiamo anche scrivere: $\tau = \mu U/\delta$. Sostituendo questa espressione nella definizione di f otteniamo: $\delta = (2v)/(fU)$, da cui:

$$\frac{\delta}{R} = \frac{2}{f Re}, \quad \text{dove} \quad Re = \frac{UR}{v}, \quad (12.3.2)$$

dove R è una grandezza macroscopica (ad esempio, il raggio del condotto).

Nello stesso modo, supponendo che lo strato limite termico abbia uno spessore δ_T , il flusso di calore alla parete (anch'esso di natura esclusivamente diffusiva) è dato da $|J_U| = \kappa dT/dy = \kappa \Delta T / \delta_T$, dove $\Delta T = T_w - T_\infty$ è il salto di temperatura (T_w è la temperatura della parete e T_∞ la temperatura asintotica del fluido) nello strato limite. Invece di un coefficiente di "attrito termico", come si dovrebbe fare per mantenere l'analogia tra i due tipi di trasporto, il flusso termico viene descritto in base ad un coefficiente di scambio termico h , $|J_U| = h \Delta T$, da cui appare che $h = k/\delta_T$. Inoltre, si preferisce esprimere in flusso termico in modo adimensionale definendo il numero di Nusselt, $Nu = J_U / J_{U,diff}$, dove il flusso termico diffusivo (o conduttivo) è dato da $J_{U,diff} = \kappa \Delta T / R$. Mettendo tutto assieme otteniamo:

$$Nu = \frac{hR}{\kappa} = \frac{R}{\delta_T}. \quad (12.3.3)$$

Infine, poiché $(R/\delta_T) = (R/\delta) (\delta/\delta_T)$, sostituendo (12.3.2) otteniamo:

$$Nu = \frac{1}{2} f Re \frac{\delta}{\delta_T}. \quad (12.3.4)$$

Ora, a questo punto Colburn impose $\delta = \delta_T$ e con questo conclude la sua analisi. Nel capitolo precedente, però, abbiamo visto che questo rapporto dipende dal valore del numero di Prandtl Pr . In particolare, utilizzando la relazione $\delta/\delta_T = Pr^{1/3}$, valida quando $Pr \gg 1$, otteniamo l'espressione seguente, detta di Colburn-Chilton:

$$Nu = \frac{1}{2} f Re Pr^{1/3} \Rightarrow h = \frac{\kappa}{2R} f Re Pr^{1/3}. \quad (12.3.5)$$

Sperimentalmente si vede che la relazione $\delta/\delta_T = Pr^{1/3}$ è valida anche quando Pr non è molto grande e infatti si trova che la relazione di Colburn-Chilton si può applicare per $Pr > 0.5$. Per capire perché funzioni così bene, occorre compiere un'analisi un po' più accurata di quella dei due suoi "inventori", che viene esposta nel paragrafo seguente.

Vediamo alcune applicazioni semplici dell'analogia di Colburn-Chilton.

Flusso su una lastra piana.

Dalla soluzione di Blasius (7.2.14), $f = (2/3) Re_x^{-1/2}$, dove $Re_x = Ux/v$, otteniamo:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\kappa} = \frac{1}{3} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (12.3.6)$$

dove h_x è il coefficiente di scambio termico locale. Questa relazione (a parte il coefficiente $1/3$) è stata ottenuta nel paragrafo 12.1, supponendo che $Pr \gg 1$. Qui abbiamo visto che essa vale anche per numeri di Prandtl di $O(1)$.

Si noti che dalla (12.3.6) possiamo determinare il coefficiente di scambio termico locale h ,

$$h_x = \frac{1}{3} \kappa \left(\frac{U}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} x^{-1/2},$$

il quale diverge per $x=0$. La spiegazione è la stessa che per la divergenza di τ vista nel paragrafo 7.2: per $x=0$ il salto di temperatura avviene in corrispondenza di uno stato limite a spessore dello zero. Tuttavia, considerando il coefficiente di scambio termico medio,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx,$$

otteniamo con facili calcoli:

$$\bar{h} = 2h_L \quad \text{e} \quad \overline{Nu} = \frac{\bar{h}x}{\kappa} = \frac{2}{3} Re_L^{1/2} Pr^{1/3}.$$

Questa relazione è in eccellente accordo con i dati sperimentali di Eq. (12.2.9), validi per $Pr > 0.5$ e $Re < 5 \cdot 10^5$. Si noti che anche le espressioni (10.2.7) e (10.2.8) sul flusso termico alla superficie di una sfera o di un cilindro rientrano in questa categoria.

Flusso turbolento in un tubo

Dalla correlazione di Blasius, $f = 0.0791 Re^{-1/4}$ (qui Re è calcolato in funzione del diametro del tubo), otteniamo $Nu = 0.04 Re^{3/4} Pr^{1/3}$, che è parecchio simile alla correlazione di Dittus-Boelter e altre.

12.3.1 La relazione tra δ e δ_T

Il punto di partenza sono le equazioni (12.2.1)-(12.2.5) all'interno dello strato limite, in cui i termini diffusivi in direzione longitudinale (cioè $\partial^2 u / \partial x^2$ e $\partial^2 T / \partial x^2$) si possono trascurare, insieme ai termini di pressione (p è costante) e all'equazione riguardante la velocità trasversale⁵. Riscriviamole in funzione di $\tilde{u} = u/U$ e $\tilde{T} = (T - T_0)/(T_\infty - T_0)$,

$$u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}, \quad (12.3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (12.3.7)$$

$$u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2}, \quad (12.3.8)$$

soggette alle seguenti condizioni al contorno:

⁵ Queste sono tutte ipotesi intuitive; i dettagli si possono trovare nelle discussioni della soluzione di Blasius (vedi paragrafo 7.2).

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{T} = 0 \quad \text{per } y = 0; \\ \tilde{u} &= \tilde{T} = 1 \quad \text{per } y \rightarrow \infty \text{ e per } x = 0.\end{aligned}\tag{12.3.9}$$

Ovviamente, quando $\nu = \alpha$, le equazioni della quantità di moto e del calore sono identiche e dunque i profili di temperatura \tilde{T} e di velocità \tilde{u} sono identici tra loro, con $\delta = \delta_T$. Quando ciò non accade, in accordo con la soluzione di Blasius, sappiamo che $u = 0.332\eta + O(\eta^4)$, dove $\eta = y/(4\nu x/U)^{1/2}$. Dunque, con ottima approssimazione, possiamo imporre che nello strato limite il profilo di u sia lineare in y . Conseguentemente, dall'equazione di continuità (e dalla soluzione di Blasius, naturalmente) vediamo che il profilo di v , con buona approssimazione, è quadratico in z . In sintesi, possiamo scrivere:

$$u(x, y) = a(x)y; \quad v(x, y) = b(x)y^2, \tag{12.3.10}$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono delle funzioni che si suppongono note. Adesso definendo la seguente coordinata (una specie di “stretched coordinate”):

$$\zeta = yPr^{1/3}, \tag{12.3.11}$$

troviamo che l'equazione del calore si può riscrivere come:

$$a(x)\zeta \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + b(x)\zeta^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \zeta^2}, \tag{12.3.12}$$

che è identica all'equazione di u ,

$$a(x)y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + b(x)y^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}, \tag{12.3.13}$$

quando la variabile y prende il posto di ζ . Dunque otteniamo:

$$\tilde{T}(x, \zeta) = \tilde{u}(x, y). \tag{12.3.14}$$

Questo significa che i profili (e di conseguenza anche gli strati limite) di velocità e temperatura coincidono quando la coordinata trasversale della temperatura viene “stirata” di un fattore $Pr^{1/3}$ e di conseguenza otteniamo:

$$\delta_T = \sqrt[3]{Pr}. \tag{12.3.15}$$

Questa analisi è valida se possiamo supporre che il profilo di velocità sia lineare all'interno dello strato limite. Ora, poiché dalla soluzione di Blasius sappiamo che tale ipotesi è in realtà molto buona, non è sorprendente che l'equazione (12.3.15) si riveli valida anche quando Pr non è molto grande.

12.4 Esercizi

- 12.1** Una lastra piana lunga $1m$ e larga $2.5m$ è lambita da un flusso di aria con velocità $V = 6 m/s$ e pressione atmosferica. Sapendo che la temperatura della piastra è di $T_0=120^\circ C$, mentre quella dell'aria è di $0^\circ C$, si calcoli il calore scambiato.

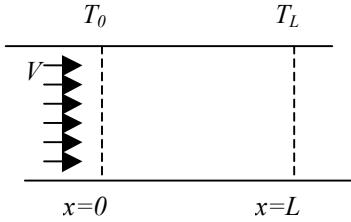


Figura 12.1P

metodi perturbativi.

- 12.2** Un letto fisso è attraversato da un fluido con velocità V costante (flusso a pistone) lungo la direzione x (vedi **figura 12.1P**). Il letto è mantenuto a temperatura a T_0 per $x < 0$ e a temperatura T_L per $x > L$. a) Si calcoli il profilo di temperatura $T(x)$ e il flusso termico J_U per $x=L$, analizzando i due casi limite $Pe \ll 1$ e $Pe \gg 1$. b) Si derivino i risultati dei due casi limite usando

- 12.3** Si consideri uno scambiatore di calore di tipo shell and tube in cui il fluido caldo, che qui scorre all'esterno dei tubi (di raggio R), sia sodio liquido, con numero di Prandtl $Pr \ll 1$. Supponendo che il numero di Reynolds e il numero di Peclet (termico) siano molto elevati, $Re \gg 1$ e $Pe \gg 1$, si determini la dipendenza del flusso termico (cioè del numero di Nusselt) da Re e Pr . Si definiscano chiaramente tutte le ipotesi necessarie.

13. Equazioni costitutive del trasporto di massa

13.1 Flussi e velocità

Come abbiamo visto nei capitoli introduttivi e nel capitolo 5, nel caso di un fluido mono-componente, il flusso massico \mathbf{j} è semplicemente il prodotto della densità ρ per la velocità del fluido \mathbf{v} . In termini microscopici, possiamo scrivere che \mathbf{j} è uguale alla somma delle quantità di moto associate con le N molecole, ognuna di massa m , contenute in un volume unitario, $V=1$:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i . \quad (13.1.1)$$

Considerando che la densità è definita come

$$\rho = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m = \frac{Nm}{V}, \quad (13.1.2)$$

cioè significa definire la velocità \mathbf{v} come la velocità massica media (cioè calcolata in base ad una media massica),

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i . \quad (13.1.3)$$

Ovviamente, come appare da (13.1.3), in questo caso (in cui tutte le molecole hanno la stessa massa) la media massica coincide con la media aritmetica (dunque con la media molare) e dunque \mathbf{v} verrà indicata come la velocità media.

Ora, se il fluido è composto da molte specie, potremo definire nello stesso modo tanti flussi massici, uno per ogni componente. Ad esempio, nel caso di due componenti, A e B , composti da molecole di massa m_A e m_B , definiamo i seguenti flussi massici:

$$\mathbf{n}_A = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_A} m_A \mathbf{v}_{A,i}; \quad \mathbf{n}_B = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_B} m_B \mathbf{v}_{B,i}, \quad (13.1.4)$$

dove $\mathbf{v}_{A,i}$ è la velocità della molecola i -esima di tipo A e lo stesso per $\mathbf{v}_{B,i}$, mentre N_A e N_B , con $N=N_A+N_B$, sono, rispettivamente, il numero delle molecole di tipo A e B contenute nel volume V . Naturalmente, la somma dei flussi di tutti i componenti è uguale al flusso totale \mathbf{j} ,

$$\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B = \mathbf{j}. \quad (13.1.5)$$

Inoltre, definendo le densità massiche

$$\rho_A = \frac{I}{V} \sum_{i=1}^{N_A} m_A = \frac{N_A m_A}{V}; \quad \rho_B = \frac{I}{V} \sum_{i=1}^{N_B} m_B = \frac{N_B m_B}{V}, \quad (13.1.6)$$

vediamo che possiamo scrivere:

$$\mathbf{n}_A = \rho_A \mathbf{v}_A; \quad \mathbf{n}_B = \rho_B \mathbf{v}_B, \quad (13.1.7)$$

dove \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B sono le velocità medie,

$$\mathbf{v}_A = \frac{\sum_{i=1}^{N_A} m_A \mathbf{v}_{A,i}}{\sum_{i=1}^{N_A} m_A} = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} \mathbf{v}_{A,i}; \quad \mathbf{v}_B = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} m_B \mathbf{v}_{B,i}}{\sum_{i=1}^{N_B} m_B} = \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \mathbf{v}_{B,i}. \quad (13.1.8)$$

Anche in questo caso, la media massica coincide con quella aritmetica, o molare. Partendo da \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B , possiamo definire una velocità massica media \mathbf{v} della miscela,

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^N m \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m} = \frac{\rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B}{\rho_A + \rho_B} = \omega_A \mathbf{v}_A + \omega_B \mathbf{v}_B, \quad (13.1.9)$$

dove abbiamo sostituito le definizioni (13.1.4) e (13.1.6) e abbiamo definito le frazioni massiche:

$$\omega_A = \rho_A / \rho; \quad \omega_B = \rho_B / \rho. \quad (13.1.10)$$

con $\rho = \rho_A + \rho_B$ che indica la massa totale, di tutte le specie, per unità di volume. Relazioni simili possono essere scritte in termini di composizioni molari c_A e c_B , definite come il numero di moli di A e B per unità di volume, che si possono ottenere facilmente dividendo le densità massiche per il rispettivo peso molecolare, $M_{W,A}$ e $M_{W,B}$,

$$c_A = \rho_A / M_{W,A}; \quad c_B = \rho_B / M_{W,B}. \quad (13.1.11)$$

Analogamente, definiamo i flussi molari \mathbf{N}_A e \mathbf{N}_B come il numero di moli che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo. Ora, poiché $\mathbf{N}_A = \mathbf{n}_A / M_{W,A}$ e $\mathbf{N}_B = \mathbf{n}_B / M_{W,B}$, vediamo che le velocità medie molari $\mathbf{v}_A = \mathbf{N}_A / c_A$ e $\mathbf{v}_B = \mathbf{N}_B / c_B$ coincidono con quelle $\mathbf{v}_A = \mathbf{n}_A / \rho_A$ e $\mathbf{v}_B = \mathbf{n}_B / \rho_B$ massiche, [vedi (13.1.8)]. Diverso è invece il caso della velocità media: partendo da \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B , possiamo definire una velocità molare media \mathbf{v}^* della miscela,

$$\mathbf{v}^* = \frac{c_A \mathbf{v}_A + c_B \mathbf{v}_B}{c_A + c_B} = x_A \mathbf{v}_A + x_B \mathbf{v}_B, \quad (13.1.12)$$

dove abbiamo definito le frazioni molari:

$$x_A = c_A/c; \quad x_B = c_B/c, \quad (13.1.13)$$

dove $c = c_A + c_B$ rappresenta il numero di moli (di tutte le specie) per unità di volume.

13.2 Le equazioni di bilancio

Il principio di conservazione della massa in un sistema multi-componente si formula nello stesso modo che per un sistema mono-componente. Ripercorrendo l'analisi vista nel paragrafo 5.1, si consideri un *volume di controllo* V fissato, definendo in ogni punto della superficie (chiusa) S che lo delimita un versore (vettore di lunghezza unitaria) \mathbf{n} diretto verso l'*esterno* del volume. Detto n_{An} il flusso massico di A uscente dal volume, l'equazione di conservazione della massa del componente A stabilisce che la massa di A accumulata nel volume V è uguale a quella entrante per la superficie S più quella generata, cioè

$$\int_V \frac{\partial \rho_A}{\partial t} dV = - \int_S n_{An} dS + \int_V r_A dV, \quad (13.2.1)$$

dove r_A è la massa di A generata per unità di volume e di tempo, ad esempio, come risultato di una reazione chimica. Qui abbiamo considerato che $M_A = \int_V \rho_A dV$ è la massa di A all'interno

del volume e quando ne consideriamo la derivata temporale dobbiamo tener conto del fatto che il volume V è fisso (cioè non dipende dal tempo t). Si noti il segno negativo al secondo membro, conseguenza del fatto che l'integrale al secondo membro indica il flusso massico uscente da V . A questo punto, considerando che n_{An} è la componente lungo la direzione \mathbf{n} del flusso massico¹ $\mathbf{n}_A = \rho_A \mathbf{v}_A$, otteniamo:

$$\int_S n_{An} dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) dS = \int_V \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) dV, \quad (13.2.2)$$

dove abbiamo applicato il teorema della divergenza. Finalmente otteniamo:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) - r_A \right] dV = 0. \quad (13.2.3)$$

Poiché questa relazione deve essere valida per qualsiasi volume V , l'integrando deve essere nullo:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_A \mathbf{v}_A) = r_A. \quad (13.2.4)$$

¹ La prova formale di questa affermazione consiste nel teorema di Cauchy, dimostrato nel paragrafo 5.1.

Un'identica equazione si può scrivere per il componente B ,

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_B \mathbf{v}_B) = r_B. \quad (13.2.5)$$

Sommando queste ultime due equazioni, otteniamo l'equazione (5.1.10):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.2.6)$$

dove abbiamo usato le definizioni (13.1.6) e (13.1.9), considerando che, poiché la massa totale si conserva, $r_A + r_B = 0$.

Questa analisi si può ripetere scrivendo un bilancio molare, invece che massico, ottenendo:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \nabla \cdot (c_A \mathbf{v}_A) = R_A, \quad (13.2.7)$$

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} + \nabla \cdot (c_B \mathbf{v}_B) = R_B, \quad (13.2.8)$$

dove R_A e R_B sono il numero di moli di A e B generate per unità di volume e di tempo. Sommando queste ultime due equazioni otteniamo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}^*) = R, \quad (13.2.9)$$

dove abbiamo usato le definizioni (13.1.11) e (13.1.12) e abbiamo definito $R = R_A + R_B$, considerando che il numero di moli totale non si conserva (si pensi ad una reazione chimica $A \rightarrow 2B$, in cui $R_B = -2R_A$).

13.3 Le equazioni costitutive

Abbiamo visto che per un fluido avente N componenti, possiamo scrivere N equazioni di conservazione delle moli (o della massa), in funzione delle concentrazioni c_i e delle velocità \mathbf{v}_i . A loro volta, la velocità di ciascuna specie si può determinare, in linea di principio, risolvendo le equazioni di conservazione della quantità di moto, con una equazione di Navier-Stokes: una equazione per ogni specie presente nella miscela. Questo approccio, usato tradizionalmente nella descrizione dei flussi multifase, presenta tuttavia un problema insormontabile: nelle equazioni di Navier-Stokes per la specie A dobbiamo anche includere la forza \mathbf{F}_A che tutte le altre specie esercitano sulla specie A , uguale alla somma delle attrazioni e repulsioni esercitate sulle molecole di tipo A dalle altre molecole. Il problema qui non sta soltanto nel fatto che queste forze sono in larga misura ignote, ma che risulta anche difficile, se non impossibile, misurarle sperimentalmente.

L'approccio tipico dell'ingegneria chimica, invece, scorpora il flusso (lo stesso accade con quello massico) molare del componente A in due parti, di cui la prima viene riferita alla velocità molare media \mathbf{v}^* , mentre la seconda esprime il flusso di A relativo a \mathbf{v}^* ,

$$\underbrace{\mathbf{N}_A = c_A \mathbf{v}_A}_{\substack{\text{Flusso di } A \text{ relativo} \\ \text{ad un riferimento fisso.}}} = \underbrace{c_A \mathbf{v}^*}_{\substack{\text{Flusso di } A \text{ con} \\ \text{velocità } \mathbf{v}^*.}} + \underbrace{\mathbf{J}_A}_{\substack{\text{Flusso di } A \\ \text{relativo a } \mathbf{v}^*.}}, \quad (13.3.1)$$

Da questa equazione otteniamo:

$$\mathbf{J}_A = c_A (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}^*), \quad (13.3.2)$$

che indica come il flusso relativo \mathbf{J}_A derivi dal fatto che le molecole di tipo A , in genere, possono avere una velocità media, \mathbf{v}_A , diversa dalla velocità media della miscela. Ovviamente, le stesse relazioni (13.3.1) e (13.3.2) si possono scrivere anche per le altre specie. Nel caso di miscela binaria, otterremo:

$$\mathbf{N}_B = c_B \mathbf{v}^* + \mathbf{J}_B. \quad (13.3.3)$$

Sommando (13.3.1) e (13.3.3) membro a membro e considerando che $\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = c \mathbf{v}^*$ [vedi le definizioni (13.1.12) e (13.1.13)], otteniamo:

$$\mathbf{J}_A = -\mathbf{J}_B, \quad (13.3.4)$$

che indica che, come deve essere, la somma dei flussi relativi deve essere nulla.

I flussi relativi possono essere causati da due tipi di fenomeno:

- a) **Forze esterne.** Ad esempio, la specie A può essere più pesante di B , oppure carica elettricamente e dunque, in presenza di campi gravitazionali o elettrici, assistiamo a *sedimentazione* o a *elettroforesi*. Fenomeni analoghi avvengono in presenza di gradienti di temperatura o di pressione.
- b) **Diffusione.** Se la proporzione (cioè la concentrazione) di molecole A (nere in **figura 13.3.1**) in una regione è maggiore di quella in un'altra regione, le fluttuazioni termiche molecolari provocano un flusso netto di molecole A che tende a riequilibrare il sistema, cioè a rendere uniforme il campo di concentrazione.

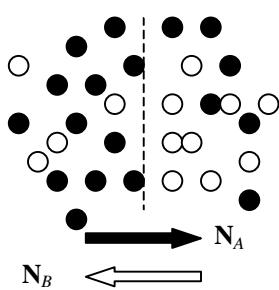


Figura 13.3.1

Nel seguito, trascureremo l'influenza delle forze esterne e supporremo che il flusso relativo \mathbf{J}_A sia dovuto esclusivamente alla diffusione.

A questo punto, dobbiamo ipotizzare una equazione costitutiva che ci permetta di determinare il flusso diffusivo \mathbf{J}_A in funzione del campo di concentrazione. Questa è l'equazione di Fick, che abbiamo giustificato a livello microscopico in base alla teoria cinetica dei gas nel capitolo 0,

$$\mathbf{J}_A = -c D_{AB} \nabla x_A, \quad (13.3.5)$$

dove D_{AB} è il coefficiente di diffusione binaria di A in B , espresso in unità m^2/s . Si noti il segno meno, che indica che il flusso è diretto dalle regioni a concentrazione maggiore a quelle a concentrazione minore. Ora, poiché [vedi (13.3.4)] $\mathbf{J}_A = -\mathbf{J}_B$, dove $\mathbf{J}_B = -cD_{BA}\nabla x_B$, con $x_A = 1 - x_B$, otteniamo:

$$D_{AB} = D_{BA}. \quad (13.3.6)$$

Nel seguito, questo coefficiente di diffusione binaria verrà indicato più semplicemente come D . L'eguaglianza (13.3.6) sta ad indicare che quando A diffonde in B , allora, nello stesso modo, B diffonde in A e dunque è naturale che i due processi (la diffusione di A in B e quella di B in A) siano descritti dallo stesso coefficiente².

Riassumendo, sostituendo (13.3.5) in (13.3.1) e (13.3.3), vediamo che i flussi di A e di B in una miscela binaria $A-B$ si possono esprimere come la somma di un termine convettivo (dipendente dalla velocità media) e da uno diffusivo, nel modo seguente:

$$\mathbf{N}_A = c_A \mathbf{v}^* - cD\nabla x_A, \quad (13.3.7)$$

$$\mathbf{N}_B = c_B \mathbf{v}^* - cD\nabla x_B. \quad (13.3.8)$$

Spesso, i termini convettivi nelle equazioni (13.3.4) e (13.3.5) vengono riscritte usando le definizioni (13.1.12) e (13.1.13) nel modo seguente:

$$\mathbf{N}_A = x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - cD\nabla x_A, \quad (13.3.9)$$

$$\mathbf{N}_B = x_B (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - cD\nabla x_B. \quad (13.3.10)$$

Infine, tutte le relazioni viste sopra si possono riscrivere in base massica, invece che molare, nel modo seguente:

$$\mathbf{n}_A = \rho_A \mathbf{v} - \rho D \nabla \omega_A = \omega_A (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) - \rho D \nabla \omega_A, \quad (13.3.11)$$

$$\mathbf{n}_B = \rho_B \mathbf{v} - \rho D \nabla \omega_B = \omega_B (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) - \rho D \nabla \omega_B, \quad (13.3.12)$$

in cui i flussi massici sono espressi come la somma di un termine convettivo, dipendente dalla velocità media massica, e da un termine diffusivo. Chiaramente, poiché i flussi massici sono proporzionali a quelli molari, si vede che il coefficiente di diffusione binaria D è lo stesso nei due casi.

13.4 Condizioni al contorno

Qui possiamo ripetere le considerazioni fatte nel paragrafo 8.1. Indicando con c la concentrazione c_A del componente A , le condizioni al contorno più comuni sono le seguenti:

1. La concentrazione della superficie di contorno è fissata: $c = c_0$.

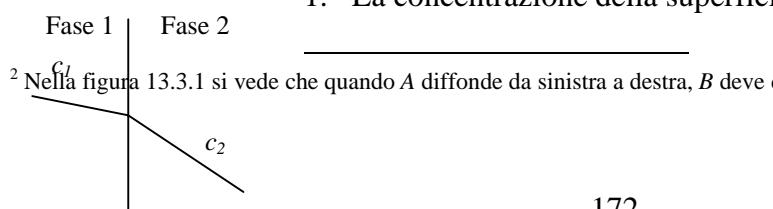


Figura 13.4.1

2. Il flusso al contorno è fissato: $N_A = N_{A0}$ (se la velocità è zero, applicando la legge di Fick questo significa fissare il gradiente della concentrazione sulla superficie di contorno).
3. In genere, all'interfaccia tra due fasi si impone che concentrazione e flusso siano continui. Con riferimento all'**figura 13.4.1**, ciò significa che, in assenza di convezione:

$$c_1 = c_2; \quad N_{A,1} = N_{A,2} \Rightarrow D_1 \frac{dc_1}{dx} = D_2 \frac{dc_2}{dx}. \quad (13.4.1)$$

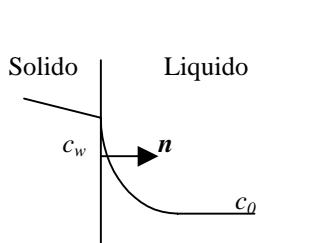


Figura 13.4.2

Si noti che all'interfaccia, a causa della diversa diffusività nelle due fasi, il profilo di concentrazione cambia pendenza.

4. Alle interfacce solido-liquido si applica la **legge di Newton**, in cui il flusso alla parete si suppone proporzionale alla differenza tra la concentrazione alla parete, c_w , e quella nel fluido lontano dalla parete, c_0 ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_A = k_M (c_w - c_0) \quad (13.4.2)$$

dove \mathbf{n} è il versore perpendicolare alla superficie e diretto verso l'esterno dell'elemento di volume, cioè nella direzione del fluido, mentre k_M è detto **coefficiente di scambio molare** (ovviamente lo stesso accade nel caso massico), espresso in m/s .

La legge di Newton indica che, se c_w è maggiore di c_0 , il flusso termico avrà la direzione di \mathbf{n} (cioè $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_A > 0$, ovvero il flusso è uscente dal solido), come deve essere per non contraddirre la seconda legge della termodinamica. La legge di Newton indica inoltre che il flusso è proporzionale alla differenza di concentrazione attraverso un coefficiente di proporzionalità k_M da determinarsi sperimentalmente.

La legge di Newton è una regola empirica e k_M è un coefficiente di ignoranza. In realtà, il profilo di concentrazione di un fluido in vicinanza della parete è del tipo rappresentato nella **figura 13.4.2**, cioè una linea continua che raccorda la concentrazione alla parete, c_w , con quella del *bulk* del fluido, c_0 . Alla parete, poi, concentrazione e flusso molare sono continui, proprio come per qualsiasi altra interfaccia. Tuttavia, spesso non si conosce esattamente il campo di moto del fluido e dunque, non potendosi determinare l'andamento della concentrazione vicino alla parete, si introduce il concetto di coefficiente di scambio molare.

Si noti che per $k_M=0$ la legge di Newton si riduce a $N_A=0$, cioè a una condizione al contorno del secondo tipo, mentre per $k_M \rightarrow \infty$, dal momento che il flusso molare deve restare finito, la legge di Newton si riduce a $c=c_0$, cioè a una condizione al contorno del primo tipo.

13.5 Risposte ad alcune domande

Qual è la differenza tra convezione e diffusione nel trasporto di massa?

Risposta: la convezione è un processo reversibile, mentre la diffusione no. Vediamone il perché.

In base alla definizione (13.3.1), si direbbe che, a differenza del trasporto di quantità di moto e di quello di energia, nel trasporto di massa la separazione tra flusso convettivo e flusso diffusivo non sia “oggettiva” (che riflette cioè l'esistenza di due diverse modalità di trasporto), ma sia semplicemente il risultato di una definizione. Ciò non è vero. Si pensi

all'insieme di particelle rappresentato in **figura 13.5.1**. Possiamo trasferire energia o quantità di moto da un punto P_1 ad un punto P_2 in modo convettivo o in modo diffusivo. Nel primo caso, si spinge una particella da P_1 a P_2 . Nel secondo caso, supponendo che tra P_1 e P_2 ci sia un treno di particelle in contatto l'una con l'altra, è sufficiente spingere la prima per far muovere l'ultima. Per trasportare la massa, tuttavia, bisogna che fisicamente una particella si sposti da P_1 a P_2 . Dunque, sembrerebbe che il trasporto di massa sia, per sua stessa natura, di natura convettivo e infatti, per un fluido monofase, mentre la

diffusione di quantità di moto e quella di energia sono già presenti con le forze viscose e la conduzione del calore, il flusso massico è soltanto convettivo³. L'aspetto diffusivo, tuttavia, viene evidenziato quando consideriamo una miscela. In questo caso, anche in assenza di alcun moto macroscopico, possiamo avere un processo dissipativo, che risulta cioè in un aumento di entropia. Si pensi, al riguardo, alla miscela rappresentata in **figura 13.3.1**, composta da particelle bianche e nere le quali a) hanno, supponiamo, la stessa massa e le stesse dimensioni; b) sono presenti ovunque con la stessa concentrazione (cioè $c_1 + c_2 = c = \text{costante}$) e c) si muovono di moto caotico, dovuto alle fluttuazioni termiche. Se all'inizio le due specie sono completamente separate, con l'andar del tempo esse si misceleranno, con conseguente aumento di entropia, e questo avviene nonostante il sistema rimanga macroscopicamente fermo (cioè la velocità media è nulla), perché il flusso (diffusivo) di particelle nere da sinistra a destra è uguale a quello di particelle bianche da destra a sinistra. Questo processo, dissipativo per sua natura, è forse l'esempio più semplice di diffusione massica.

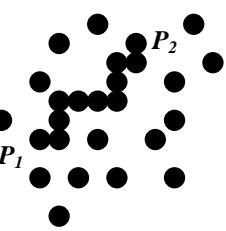


Figura 13.5.1

Quando si usano grandezze molari e quando grandezze massiche?

Risposta: Per miscele liquide si usano grandezze massiche; per miscele gassose si usano grandezze molari. Vediamone il perché.

Nel caso di miscele liquide, possiamo supporre con buona approssimazione che le densità dei singoli componenti siano uguali tra loro e uguali alla densità della miscela, ρ , che quindi è costante (cioè indipendente dalla composizione),

$$\rho = \text{costante} \quad (13.5.1)$$

³ Si noti tuttavia che il fenomeno della diffusione è presente anche in un fluido monofase e lo si può studiare, come visto nel capitolo 0, seguendo il moto caotico di una molecola nel tempo.

Ciò comporta, tra l'altro, che la frazione massica coincide con quella volumetrica. Infatti:

$$\phi_A = \frac{\text{volume di } A}{\text{volume totale}} = \frac{\text{volume di } A}{\text{moli di } A} \frac{\text{moli di } A}{\text{massa di } A} \frac{\text{massa di } A}{\text{volume totale}} = \frac{\tilde{V}_A}{M_{WA}} \rho_A = \frac{\rho_A}{\rho} = \omega_A,$$

dove abbiamo considerato che la densità di A , $\rho = M_{WA} / \tilde{V}_A$, è uguale al rapporto tra il peso molecolare e il volume molare. Considerando che $\rho_A = \rho \omega_A$ e che $\mathbf{n}_A = \rho [\omega_A \mathbf{v} - D \nabla \omega_A]$, si vede che quando ρ è costante conviene usare le quantità massiche. In particolare, l'equazione del trasporto (13.2.4) si semplifica nel modo seguente:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega_A \mathbf{v} - D \nabla \omega_A) = r_A' = \rho^{-1} r_A. \quad (13.5.2)$$

Questa equazione si può ulteriormente semplificare applicando la condizione di incomprimibilità (ρ è costante) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_A = D \cdot \nabla^2 \omega_A + r_A'. \quad (13.5.3)$$

Nel caso di miscele gassose, possiamo supporre che si tratti di gas ideali. In questo caso, i volumi molari di tutti i componenti della miscela sono uguali tra loro ed egualano il volume molare della miscela, \tilde{V} , dove:

$$c = \frac{1}{\tilde{V}} = \frac{P}{RT} = \text{costante}, \quad (13.5.4)$$

in cui abbiamo ipotizzato che le variazioni di pressione e di temperatura si possono trascurare. A questo punto, il caso è del tutto analogo al precedente. Anzitutto, notiamo che la frazione molare coincide con quella volumetrica. Infatti:

$$\phi_A = \frac{\text{volume di } A}{\text{volume totale}} = \frac{\text{volume di } A}{\text{moli di } A} \frac{\text{moli di } A}{\text{volume totale}} = \tilde{V}_A c_A = \frac{c_A}{c} = x_A.$$

Considerando che $c_A = cx_A$ e che $\mathbf{N}_A = c [x_A \mathbf{v}^* - D \nabla x_A]$, si vede che quando c è costante conviene usare le quantità molari. In particolare, l'equazione del trasporto (13.2.7) si semplifica nel modo seguente:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} + \nabla \cdot (x_A \mathbf{v} - D \nabla x_A) = R_A' = c^{-1} R_A. \quad (13.5.5)$$

Perché conviene introdurre il coefficiente di diffusione?

Risposta: perché è più semplice. Vediamone il perché.

L'approccio al trasporto massico che abbiamo visto è quello tipico dell'ingegneria chimica. In esso, il flusso massico del componente A si scorpora (lo stesso accade con quello molare) in due parti, di cui la prima viene riferita alla velocità molare media \mathbf{v} , mentre la seconda esprime il flusso di A relativo a \mathbf{v} . Poi, a sua volta, il flusso relativo si esprime in funzione del campo di concentrazione tramite l'equazione costitutiva di Fick, definendo un coefficiente di diffusione D . Conseguentemente, per un fluido avente N componenti, possiamo scrivere N equazioni di conservazione delle massa (o della moli), in funzione delle concentrazioni ω_i e della velocità media \mathbf{v} [vedi (13.4.3)]; a sua volta, \mathbf{v} deve soddisfare un'equazione di Navier-Stokes.

In alternativa, avremmo potuto mantenere la definizione $\mathbf{n}_A = \rho_A \mathbf{v}_A$ del flusso e scrivere N equazioni di conservazione della massa in funzione delle concentrazioni ρ_A e delle velocità \mathbf{v}_A . A loro volta, la velocità di ciascuna specie si può determinare, in linea di principio, risolvendo le equazioni di conservazione della quantità di moto, con una equazione di Navier-Stokes: una equazione per ogni specie presente nella miscela. Questo approccio, usato tradizionalmente nella descrizione dei flussi multifase, presenta tuttavia un problema insormontabile: nelle equazioni di Navier-Stokes per la specie A dobbiamo anche includere la forza \mathbf{F}_A che tutte le altre specie esercitano sulla specie A, uguale alla somma delle attrazioni e repulsioni esercitate sulle molecole di tipo A dalle altre molecole. Il problema qui non sta soltanto nel fatto che queste forze sono in larga misura ignote, ma che risulta anche difficile, se non impossibile, misurarle sperimentalmente. Al contrario, nel nostro approccio, invece di tante velocità quanti sono i componenti della miscela, abbiamo *una sola velocità*, che a sua volta è la soluzione di una equazione di Navier-Stokes in cui non compaiono le forze \mathbf{F}_A (banalmente, la somma di tutte queste forze interne è nulla). Ovviamente, questo approccio presenta lo svantaggio che i flussi diffusivi di quantità di moto e di materia sono ignoti. In particolare, a priori non conosciamo né la diffusività D né la viscosità efficace ν della miscela. Infatti, anche nel caso più semplice in cui la miscela si comporti come un fluido newtoniano, la sua viscosità efficace sarà una combinazione, a priori ignota, delle viscosità dei suoi componenti. Dunque da un lato abbiamo ridotto il numero delle equazioni eliminando l'incognita delle forze inter-specie \mathbf{F}_A , ma dall'altro abbiamo introdotto due nuove incognite, cioè la viscosità e la diffusività della miscela legate alle equazioni costitutive del tensore degli sforzi e del flusso di massa diffusivo. Il fatto decisivo che fa pendere il piatto della bilancia verso il nostro approccio non è tanto la riduzione del numero di equazioni (che pure è importante), quanto il fatto che sia la viscosità che la diffusività si possono misurare abbastanza facilmente, a differenza delle forze intermolecolari che sono e restano ignote.

Cosa succede nel caso diluito?

Risposta: la presenza del soluto non altera apprezzabilmente il campo di moto del solvente e la velocità media coincide con quella del solvente. Vediamone il perché.

Consideriamo il caso di miscela gassosa, con c costante, in cui $x_A \ll 1$. Si ottiene:

$$\mathbf{v}^* = x_A \mathbf{v}_A + (1 - x_A) \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B [1 + O(x_A)]$$

da cui:

$$\mathbf{N}_A = c[x_A \mathbf{v}_B - D\nabla x_A + O(x_A^2)]. \quad (13.5.6)$$

Nello stesso modo, nel caso di miscela liquida, con ρ costante, in cui $\omega_A \ll 1$. Si ottiene:

$$\mathbf{v} = \omega_A \mathbf{v}_A + (1 - \omega_A) \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_B [1 + O(\omega_A)]$$

da cui:

$$n_A = \rho[\omega_A \mathbf{v}_B - D\nabla \omega_A + O(\omega_A^2)]. \quad (13.5.7)$$

La legge di Fick esprime la tendenza a restaurare l'equilibrio chimico?

Risposta: Sì. Vediamone il perché continuando il filo di pensiero del paragrafo 0.4.2. In termodinamica ci sono tre tipi di equilibri: meccanico, termico e chimico. Un sistema è in equilibrio meccanico quando la sua pressione è uniforme e conseguentemente non c'è movimento al suo interno. Se l'equilibrio meccanico viene perturbato e il sistema viene messo in movimento, il sistema risponde a questa perturbazione generando un flusso di quantità di moto al suo interno che si opponga a questo movimento e tenda a restaurare la condizione di equilibrio. Dunque è naturale che il flusso di quantità di moto, come descritto dall'equazione costitutiva di Newton, sia proporzionale al gradiente della quantità di moto specifica, e quindi della velocità. Nello stesso modo, un sistema è in equilibrio termico quando la sua temperatura è uniforme e risponde ad una perturbazione di temperatura generando un flusso di calore (cioè di energia interna) che si oppone alle disomogeneità termiche, tendendo a restaurare la condizione di equilibrio. Il flusso di energia interna, come descritto dall'equazione costitutiva di Fourier, è dunque proporzionale al gradiente dell'energia interna specifica e quindi della temperatura. Infine, un sistema è in equilibrio chimico quando il potenziale chimico al suo interno è uniforme. Dunque, se spostiamo un sistema dalla sua condizione di equilibrio chimico, esso tenderà a restaurare la sua condizione iniziale generando un flusso molare proporzionale al potenziale chimico. Ora, poiché a temperatura e pressione costanti il potenziale chimico è una funzione della composizione del sistema, ne risulta che il flusso molare è proporzionale ai gradienti delle frazioni molari dei componenti del sistema, come indicato dalla legge di Fick.⁴

⁴ In realtà, la legge di Fick vale per miscele che non si discostano troppo dall'idealità, mentre, in generale, l'equazione costitutiva del trasporto molare stabilisce che il flusso molare sia proporzionale al gradiente del potenziale chimico. Come verrà illustrato nel Capitolo 20, questa legge costitutiva spiega l'esistenza dell'antidiffusione, per cui in certe circostanze il flusso molare può anche andare da regioni a bassa concentrazione a regioni ad alta concentrazione.

14. Trasporto di massa stazionario

14.1 Diffusione attraverso un film stagnante

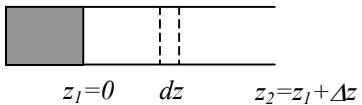


Figura 14.1.1

Si consideri un tubo con una sezione di area S , in cui all'estremità libera sia presente dell'azoto, mentre all'altra estremità ci sia del naftalene (vedi **figura 14.1.1**). Il naftalene è un solido con una pressione di vapore significativa, così che evapora lentamente in una atmosfera di azoto. Si calcoli il profilo di concentrazione e il flusso di naftalene, sapendo che l'azoto non è solubile nel naftalene solido.

Tra z_1 e z_2 c'è un film stagnante gassoso, composto da una miscela di naftalene (specie A) e azoto (specie B). Il naftalene diffonde, a causa di una differenza di concentrazione $c_1 - c_2$, dove c_1 è la concentrazione del vapore di naftalene a contatto del solido (c_1 è costante e determinato dalla condizione di equilibrio termodinamico), mentre c_2 è la concentrazione di naftalene all'estremità libera (che qui è uguale a zero, ma che per generalità manteniamo indicato). Nel seguito, supponiamo che i flussi molari sono in direzione z (cioè si trascurino gli effetti dovuti alle pareti).

Supponiamo che la miscela sia ideale, così che

$$c = c_A + c_B = \frac{P}{RT} = \text{costante} \Rightarrow \frac{dc_A}{dz} = -\frac{dc_B}{dz} \quad (14.1.1)$$

Da qui vediamo che, poiché il gradiente di c_A è diverso da zero, ci deve essere anche una diffusione di B , nonostante che B sia stagnante.

Scriviamo un bilancio molare nell'elementino di volume indicato in **figura 14.1.1**:

$$N_A(z)S = N_A(z + dz)S \Rightarrow N_A = \text{costante} = K_1, \quad (14.1.2)$$

(dove K_1 è una costante da determinarsi) e analogamente troviamo: $N_B = \text{costante}$. Ora, siccome l'azoto è insolubile nel naftalene, $N_B(z_1) = 0$, cioè il flusso di azoto deve essere nullo all'interfaccia con il naftalene. Conseguentemente, deve essere nullo ovunque, cioè

$$N_B = 0, \quad (14.1.3)$$

che conferma che B è stagnante, poiché $N_B = c_B v_B$ e dunque $v_B = 0$. Da qui possiamo già vedere che, poiché B è stagnante mentre A diffonde con una velocità $v_A = N_A/c_A$, la velocità media (cioè la parte convettiva del trasporto) non è nulla ed è uguale a:

$$v^* = \frac{1}{c} (N_A + N_B) = \frac{N_A}{c}. \quad (14.1.4)$$

A questo punto il flusso di A è:

$$N_A = c_A v^* - cD \frac{dx_A}{dz} = x_A N_A - cD \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow N_A = -\frac{cD}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} = K_1 \quad (14.1.5)$$

Integrando questa equazione tra z_1 e z_2 e applicando le condizioni al contorno:

$$x_A(z_1) = x_{A1}; \quad x_A(z_2) = x_{A2}, \quad (14.1.6)$$

otteniamo:

$$K_1 = N_A = \frac{cD \ln[(1-x_{A2})/(1-x_{A1})]}{z_2 - z_1} = \frac{cD \ln(x_{B2}/x_{B1})}{z_2 - z_1} = \frac{cD(x_{A1} - x_{A2})}{(z_2 - z_1)(x_B)_{\ln}}. \quad (14.1.7)$$

dove $(x_B)_{\ln}$ è la media logaritmica di x_B ,

$$(x_B)_{\ln} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})}. \quad (14.1.8)$$

Esprimendo questo risultato nei termini della legge di Newton,

$$N_A = k(c_{A1} - c_{A2}), \quad (14.1.9)$$

dove k è il coefficiente di scambio molare, otteniamo:

$$k = \frac{D}{\Delta z (x_B)_{\ln}}, \quad (14.1.10)$$

dove $\Delta z = z_2 - z_1$. Questo risultato si può anche esprimere in funzione del numero di Sherwood (l'analogo del numero di Nusselt dello scambio massico),

$$Sh_L = \frac{kL}{D}. \quad (14.1.11)$$

dove L è una dimensione caratteristica del problema. Il numero di Sherwood esprime il rapporto tra il flusso molare (o massico) totale e quello di tipo diffusivo. Nel nostro caso, $L = \Delta z$ e otteniamo:

$$Sh_{\Delta z} = \frac{1}{(x_B)_{\ln}}. \quad (14.1.12)$$

Ora possiamo integrare l'equazione (14.1.5) tra z_1 e la generica distanza z , ottenendo:

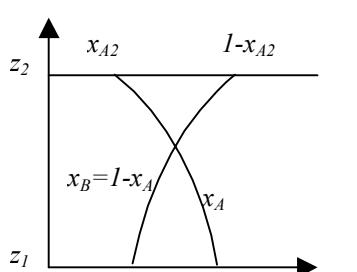


Figura 14.1.2

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A1}} \right) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}} \right)^{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}. \quad (14.1.13)$$

Come si vede dalla **figura 14.1.2**, i profili di concentrazione non sono lineari.

Nel caso limite di miscela diluita, con $x_A \ll x_B$, abbiamo visto che in prima approssimazione possiamo supporre che, nel determinare c_A , la velocità media coincida con quella del solvente e dunque $v^* = 0$ in questo caso. Ciò significa risolvere il problema:

$$N_A = -cD \frac{dx_A}{dz} = K_1 \quad \text{con} \quad x_A(z_1) = x_{A1} \quad \text{e} \quad x_A(z_2) = x_{A2}. \quad (14.1.14)$$

Dunque la derivata di x_A è costante e otteniamo un profilo lineare,

$$(x_A - x_{A1}) = \frac{z - z_1}{\Delta z} (x_{A2} - x_{A1}); \quad N_A = \frac{D}{\Delta z} (c_{A1} - c_{A2}). \quad (14.1.15)$$

da cui:

$$N_A = \frac{D}{\Delta z} (c_{A1} - c_{A2}) = K (c_{A1} - c_{A2}); \quad K = \frac{D}{\Delta z}; \quad Sh_{\Delta z} = I. \quad (14.1.16)$$

Questo risultato si può ottenere da (14.1.13) e (14.1.7) imponendo che $x_A \ll x_B$, ottenendo ancora la legge di Newton, (14.1.8), (14.1.9) e (14.1.11), con $x_B = I$.

Confrontando (14.1.16) con (14.1.12), vediamo che la presenza della convezione aumenta il flusso di un fattore:

$$\frac{N_A}{(N_A)_{diff}} = \frac{1}{(x_B)_n} = Sh, \quad (14.1.17)$$

uguale, come deve essere, al numero di Sherwood. Si noti che, in ogni posizione z , c'è un gradiente di c_B che genera un flusso diffusivo di azoto (B) da destra a sinistra, il quale compensa esattamente il flusso convettivo da sinistra verso destra, in modo che il flusso totale di B sia nullo,

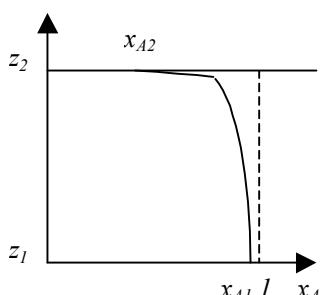


Figura 14.1.3

$$N_B = c_B v^* - D \frac{dc_B}{dz} = 0. \quad (14.1.18)$$

Nel caso diluito, il flusso diffusivo di B (uguale ed opposto a quello di A) è di $O(x_A)$ e dunque è dello stesso ordine di grandezza del flusso convettivo, che è il prodotto di c_B (che non è piccolo) per v^* , che è $O(x_A)$. Dunque, nel caso diluito, la parte convettiva del flusso molare del solvente (B) non si può trascurare, a differenza di quanto accade per il flusso del soluto (A), in cui la

parte convettiva $c_A v^*$ risulta di $O(x_A^2)$ e dunque si può trascurare.

Si noti che dalla equazione (14.1.7) vediamo che quando $x_{A1} = 1$ o $x_{A2} = 1$ otteniamo $N_A = +\infty$ o $N_A = -\infty$, rispettivamente. La spiegazione di questo risultato è evidente dalla **figura 14.1.3**, in cui $x_{A1} \approx 1$, che evidenzia come il profilo di concentrazione, in questo caso, si mantenga quasi piatto ovunque, con $x_A = 1$, ad eccezione di una regione nelle vicinanze di z_2 , dove il profilo si impenna, subendo un cambiamento molto rapido. Ciò dà origine ad un flusso infinito, perché $N_A \rightarrow \infty$ sia quando $x_A \approx 1$ [vedi (14.1.5)], sia quando $dx_A/dz \rightarrow \infty$. Di fatto, però, dal momento che N_A diverge in modo logaritmico, anche una presenza minima di B (che nella realtà è sempre presente, anche se in quantità piccolissime) comporta che il valore del flusso N_A rimanga finito¹.

14.2 Diffusione con reazione chimica eterogenea

14.2.1 Geometria piana

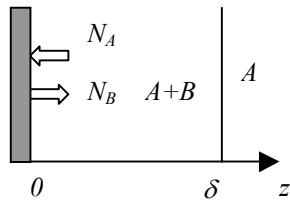


Figura 14.2.1

Alla superficie $z = 0$ di particelle catalitiche ha luogo una reazione di polimerizzazione $nA \rightarrow A_n$ (vedi **figura 14.2.1**). Supponiamo che sia A che $B = A_n$ siano dei gas e che attorno alla particella vi sia un film di gas stagnante di spessore δ , al di fuori della quale il monomero A sia mantenuto con una frazione molare x_{A0} costante. Vogliamo calcolare il flusso di A , supponendo che la velocità di reazione sia molto elevata, così da poter assumere che A reagisce non appena arriva alla parete; inoltre, δ sia molto minore delle dimensioni lineari della particella, così che la geometria del problema si possa considerare come piana.

Il problema è simile al precedente. Anche in questo caso un bilancio molare dà $N_A = \text{costante}$ e $N_B = \text{costante}$. A differenza del caso precedente, tuttavia, N_B alla parete (e dunque ovunque, perché N_B è costante) non è zero: per ogni n moli di A che arrivano, ce ne è una di B che se ne va. Dunque:

$$N_B = -\frac{1}{n} N_A. \quad (14.2.1)$$

Di conseguenza otteniamo:

$$v^* = \frac{1}{c} (N_A + N_B) = \beta \frac{N_A}{c}, \quad \text{con } \beta = 1 - \frac{1}{n}. \quad (14.2.2)$$

A questo punto il flusso di A è il seguente:

$$N_A = c_A v^* - cD \frac{dx_A}{dz} = \beta x_A N_A - cD \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow N_A = -\frac{cD}{1 - \beta x_A} \frac{dx_A}{dz} = K_1 \quad (14.2.3)$$

¹ Ad esempio, tenendo fisso $x_{A2}=0.5$, quando $x_{A1}=0.8$ otteniamo $N_A=0.92cD/\Delta z$, mentre quando $x_{A1}=0.99$, $N_A=3.9cD/\Delta z$.

Integrando tra 0 e δ con le condizioni al contorno seguenti:

$$x_A(z=0)=0 \quad \text{e} \quad x_A(z=\delta)=x_{A0}, \quad (14.2.4)$$

otteniamo:

$$N_A = \frac{cD \ln(1 - \beta x_{A0})}{\beta \delta}. \quad (14.2.5)$$

Si noti che quando $\delta \rightarrow \infty$ il flusso molare tende a zero.

Esprimendo questo risultato in funzione del coefficiente di scambio molare k definito in modo che $N_A = -kcx_{A0}$, otteniamo:

$$Sh_\delta = \frac{k\delta}{D} = -\frac{\ln(1 - \beta x_{A0})}{\beta x_{A0}}, \quad (14.2.6)$$

dove Sh è il numero di Sherwood. Infine, integrando l'equazione (14.2.3) tra 0 e la generica distanza z , otteniamo:

$$(1 - \beta x_A) = (1 - \beta x_{A0})^{\frac{z}{\delta}}. \quad (14.2.7)$$

Si noti il segno negativo del flusso: A fluisce da destra a sinistra in **figura 14.2.1**. Inoltre, quando $n \rightarrow \infty$, per cui $\beta=1$, questo problema si riduce a quello esaminato nel paragrafo 14.1. In questo caso, quando $x_{A0}=1$, si ottiene un flusso $N_A \rightarrow \infty$. La spiegazione di questo risultato, che è solo apparentemente sbagliato, è stata data alla fine del paragrafo 14.1.

Flusso controcorrente equimolare e limite diluito

È interessante considerare anche il caso in cui $n=1$, per cui $\beta=0$ e i flussi di A e di B sono equimolari e controcorrente, cioè l'uno opposto all'altro. Ciò significa che per ogni mole di A che arriva sulla particella ce ne è una di B che la lascia. In questo caso, dunque, non c'è convezione e il flusso di A , come quello di B è soltanto diffusivo, cioè $v^* = 0$. Lo stesso risultato si ottiene nel caso diluito, in cui $v^* \approx v_B = 0$ e dunque possiamo trascurare la convezione di A . In questi casi, il campo di concentrazione risulta lineare [vedi (14.1.14)-(14.1.16)], ottenendo:

$$x_A = x_{A0}z/\delta, \quad N_A = -cDx_{A0}/\delta, \quad Sh = 1 \quad (14.2.8)$$

Questo risultato si può anche ottenere come limite di (14.2.5) e (14.2.7) per $\beta \rightarrow 0$, oppure per $x_{A0} \rightarrow 0$, considerando che:

$$\log(1-\varepsilon) = -\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad (1-\varepsilon)^\alpha = 1 - \alpha\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{per} \quad \varepsilon \ll 1.$$

Dunque vediamo che, come nel caso studiato nel paragrafo precedente, l'incremento del flusso dovuto alla convezione dipende dalla concentrazione, cioè

$$\frac{N_A}{(N_A)_{diff}} = -\frac{\ln(1-\beta x_{A0})}{\beta x_{A0}}. \quad (14.2.9)$$

14.2.2 Geometria sferica

In questo caso, imponendo che il flusso totale che attraversi una qualunque corona circolare di raggio r sia costante (vedi **figura 14.2.2**), otteniamo:

$$N_A(4\pi r^2) = \text{costante} \Rightarrow N_A = \frac{K_1}{r^2}, \quad (14.2.10)$$

dove K_1 è una costante (da determinarsi) e abbiamo supposto che il problema abbia simmetria sferica, cioè che il campo di concentrazione dipenda soltanto da r . A questo punto, procedendo come nel caso piano, otteniamo:

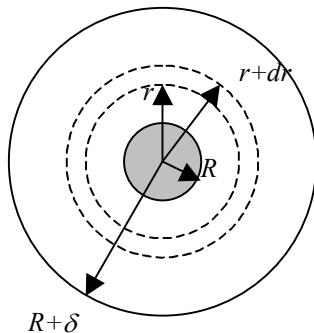


Figura 14.2.2

$$N_A = -\frac{cD}{1-\beta x_A} \frac{dx_A}{dr} = \frac{K_1}{r^2}, \quad (14.2.11)$$

e integrando tra R e $R+\delta$ con le condizioni al contorno seguenti:

$$x_A(r=R)=0 \quad \text{e} \quad x_A(r=R+\delta)=x_{A0}, \quad (14.2.12)$$

otteniamo:

$$K_1 = \frac{cD \ln(1-\beta x_{A0})}{\beta \delta} R(R+\delta). \quad (14.2.13)$$

Il flusso di A alla superficie della particella, per $r=R$, è

$$N_A(R) = \frac{cD \ln(1-\beta x_{A0})}{\beta \delta} \left(1 + \frac{\delta}{R}\right), \quad (14.2.14)$$

da cui troviamo il coefficiente di scambio molare $k = -N_A/(cx_{A0})$. Si noti che, a differenza del caso piano, quando $\delta \rightarrow \infty$ il flusso molare non tende a zero.

A questo punto, definendo il numero di Sherwood in funzione del raggio della sfera,² otteniamo:

$$Sh_{2R} = \frac{kR}{D} = -\frac{\ln(1-\beta x_{A0})}{\beta x_{A0}} \left(1 + \frac{R}{\delta}\right). \quad (14.2.15)$$

Ovviamente, questi risultati tendono a quelli del caso piano quando $\delta \ll R$.

² In base a questa definizione, si trova che, in assenza di convezione, $Sh = 1$. Tuttavia, nella maggior parte dei testi, si preferisce definire Sh in funzione del diametro della sfera, ottenendo, in questo caso, $Sh = 2$.

Flusso controcorrente equimolare e limite diluito

In questo caso, $v^* = 0$ e dunque risolviamo il problema:

$$N_A = -cD \frac{dx_A}{dr} = \frac{K_1}{r^2}; \quad \text{da cui: } x_A(r) = A_1 + \frac{A_2}{r}, \quad (14.2.16)$$

dove le costanti A_1 e A_2 si possono determinare facilmente imponendo le condizioni al contorno (14.2.12) e ottenendo:

$$x_A(r) = x_{A0} \frac{R + \delta}{\delta} \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad (14.2.17)$$

da cui:

$$N_A = -\frac{cDx_{A0}}{\delta} \left(1 + \frac{\delta}{R} \right); \quad Sh = 2 \left(1 + \frac{R}{\delta} \right). \quad (14.2.18)$$

Dunque vediamo che l'incremento del flusso massico dovuto alla convezione risulta ancora dato da (14.2.9) ed è dunque lo stesso che nel caso piano.

Si noti che quando $\delta \ll R$ ritroviamo i risultati del caso piano, mentre quando $\delta \gg R$ la soluzione diventa:

$$x_A(r) = x_{A0} \left(1 - \frac{R}{r} \right); \quad N_A(R) = -\frac{cDx_{A0}}{R}; \quad Sh = 1. \quad (14.2.19)$$

Da qui vediamo che, avendo definito Sh in funzione del raggio della sfera, in assenza di convezione troviamo $Sh = 1$.

14.3 Diffusione con Reazione Chimica Omogenea del Primo Ordine

Si consideri una particella sferica di raggio R , composta di due specie, A e B , di cui A sia diluita con $x_A \ll 1$. Le due specie reagiscono tra loro, con $B \rightarrow A$, con velocità di reazione k , cioè in modo che $R_A = -kc_A c_B$ sia il numero di moli di A prodotto per unità di tempo per unità di volume. Vogliamo determinare il flusso di A entrante, supponendo che la concentrazione di A per $r=R$ sia mantenuta costante, uguale a c_A .

Da un semplice bilancio molare nell'elementino di volume di **figura 14.3.1** otteniamo:

$$N_A(r)(4\pi r^2) - N_A(r+dr)(4\pi(r+dr)^2) - kc_A c_B (4\pi r^2 dr) = 0$$

cioè, dividendo per dr :

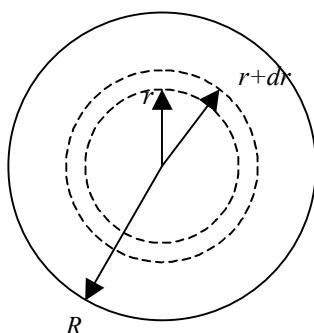


Figura 14.3.1

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (N_A r^2) - \frac{k}{D} c_A c_B = 0, \quad (14.3.2)$$

da risolversi con la condizione al contorno: $c_A(R) = c_{A0}$. Poiché A è diluito, $c_B \approx c$ e $v^* \approx 0$, dunque $N_A = -Ddc_A/dr$. Dunque, definendo le variabili non-dimensionaliali:

$$\tilde{c} = c / c_{A0}; \quad \xi = r / R; \quad Da = kcR^2 / D, \quad (14.3.2)$$

otteniamo:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\tilde{c}}{d\xi} \right) - Da\tilde{c} = 0, \quad \text{con } \tilde{c}(1) = 1. \quad (14.3.3)$$

Da è il numero di Damkohler, che abbiamo già incontrato nel paragrafo 9.2 e che rappresenta il rapporto tra generazione e diffusione. Anche il flusso,

$$N_A(R) = -D \left(\frac{dc_A}{dr} \right)_{r=R} \quad (14.3.4)$$

si può esprimere in forma adimensionale, definendo il numero di Sherwood come³:

$$Sh = \left| \frac{N_A(R)}{Dc_{A0} / R} \right| = \left| \frac{d\tilde{c}}{d\xi} \right|_{\xi=1}. \quad (14.3.5)$$

Questo problema si risolve definendo la nuova variabile dipendente $y = \xi\tilde{c}$, per cui il problema (14.3.3) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - Day = 0, \quad \text{con } y(1) = 1 \text{ e } y(0) = 0, \quad (14.3.6)$$

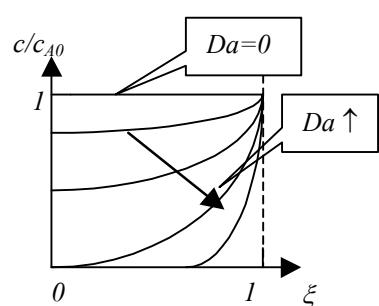


Figura 14.3.2

dove la seconda condizione al contorno deriva dal fatto che nell'origine, $r=0$, in genere $\tilde{c} \neq 0$ e dunque deve essere: $y=0$. Il numero di Sherwood si può riscrivere come:

$$Sh = \left| \frac{dy}{d\xi} - y \right|_{\xi=1} = \left| \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=1} - 1. \quad (14.3.7)$$

L'equazione (14.3.6) coincide con (9.2.1), sostituendo $\Theta(\xi)$ con $y(1-\xi)$ (infatti le condizioni al contorno dei due problemi sono "invertite") e ammette la soluzione:

³ Come il numero di Nusselt, anche quello di Sherwood spesso è definito come uguale al doppio di quello qui riportato.

$$y(\xi) = \frac{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da}\xi)}{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da})}, \text{ cioe' } \tilde{c}(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da}\xi)}{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da})}, \quad (14.3.7)$$

da cui:

$$c_A(r) = c_{A0} \frac{R}{r} \frac{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da} r/R)}{\operatorname{Sinh}(\sqrt{Da})}. \quad (14.3.8)$$

Questa soluzione è rappresentata in **figura 14.3.2** e comporta un flusso:

$$Sh = \left| \sqrt{Da} \operatorname{Coth}(\sqrt{Da}) - 1 \right|. \quad (14.3.9)$$

Come vediamo, analogamente al caso del paragrafo 9.2, ad alti numeri di Damkohler si presenta uno strato limite e il numero di Sherwood tende all'infinito, $Sh \approx Da^{1/2}$. Invece, per bassi numeri di Damkohler, il numero di Sherwood tende a zero, poiché in assenza di reazione chimica la concentrazione all'equilibrio si mantiene uniforme e il flusso è nullo. In particolare, per piccoli Da , otteniamo: $Sh \approx 1/3 Da$. Si noti che, al contrario, nel caso piano studiato nel paragrafo 9.2, anche in assenza del termine di generazione, si mantiene un flusso diffusivo non nullo. Ora esaminiamo i due casi limite suddetti usando i metodi perturbativi illustrati nel paragrafo 9.2.

14.3.1 Calcolo asintotico per $Da \ll 1$

Poiché il problema (14.3.6) continua ad essere ben posto (equazione del secondo ordine con due condizioni al contorno) anche quando $Da=0$, sappiamo che la soluzione del nostro problema si può esprimere con una *espansione regolare* con $\varepsilon = Da \ll 1$,

$$y(\xi) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \varepsilon^2 y_2(\xi) + \dots \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

in modo tale che ciascun termine resti inferiore al precedente in tutto il dominio $0-1$ di definizione di ξ . Adesso sostituendo questa espansione nell'equazione (14.3.6) e nelle condizioni al contorno e raccogliendo i termini dello stesso ordine (i dettagli matematici sono identici a quelli del paragrafo 9.2), ad $O(1)$ otteniamo:

$$y_0''(\xi) = 0; \quad y_0(0) = 0; \quad y_0(1) = 1,$$

da cui:

$$y_0(\xi) = \xi,$$

e dunque,

$$Sh_0 = \frac{dy_0}{d\xi}(1) - 1 = 0.$$

Così abbiamo ritrovato la soluzione $\tilde{c}(\xi) = 1$ che avremmo ottenuto imponendo che ci fosse soltanto diffusione, con $Da = 0$. Ora, raccogliendo i termini di $O(\varepsilon)$, otteniamo:

$$y_I''(\xi) = y_0(\xi) = \xi; \quad y_I(0) = y_I(1) = 0,$$

in cui abbiamo sostituito $y(\xi) = \xi$. Integrando otteniamo:

$$y_I(\xi) = -\frac{1}{6}(\xi - \xi^3), \text{ da cui: } Sh_I = \frac{dy_I}{d\xi}(1) - 1 = \frac{I}{3}$$

Dunque:

$$Sh = Sh_0 + Da Sh_I + O(Da^2) = Da/3 + O(Da^2),$$

che coincide con il limite dalla soluzione esatta. Naturalmente, procedendo oltre, possiamo trovare anche tutti i termini successivi dell'espansione.

14.3.2 Calcolo asintotico per $Da \gg 1$

Qui, nelle vicinanze della parete $\xi = 1$, la concentrazione deve `saltare' da 0 a 1: questo è il segno dell'esistenza di uno strato limite. Poiché lo spessore dello strato limite è molto piccolo, al suo interno possiamo trascurare tutti gli effetti di curvatura e dunque il problema si riduce al caso piano, ottenendo dunque lo stesso risultato. Vediamone i dettagli.

Detto $\varepsilon = I/Da \ll 1$, vediamo che l'equazione (14.3.6) assume la forma:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\xi^2} - y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

Per $\varepsilon = 0$ l'equazione passa dal secondo all'ordine zero e dunque diventa impossibile soddisfare due condizioni al contorno. Infatti, in questo caso, otteniamo $y=0$, una soluzione che soddisfa la prima condizione al contorno ma non la seconda. Questa circostanza è tipica di situazioni in cui si trova uno strato limite.

Nel caso in esame, troviamo che $y=0$ quasi ovunque (vedi la **figura 13.3.2**), ad eccezione di uno strato limite vicino alla parete $\xi=1$, dove il profilo si impenna per soddisfare la condizione al contorno $y(1)=1$. In questa regione, il gradiente di temperatura diventa così elevato che il termine diffusivo “bilancia” il termine di sorgente, a differenza di quanto succede altrove, dove il termine di sorgente risulta dominante. In analogia con quanto visto nel paragrafo 9.2, riscrivendo la nostra equazione in funzione di una “stretched coordinate” $\zeta = (1-\xi)/\varepsilon^{1/2}$, otteniamo⁴:

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} - y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1; \quad y\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \rightarrow \infty\right) = 0.$$

Dunque, la soluzione dell'equazione è la seguente:

$$y(\zeta) = e^{-\zeta} \Rightarrow y(\xi) = \exp(-(1-\xi)/\sqrt{\varepsilon}) = \exp(-\sqrt{Da}(1-\xi))$$

⁴ La regione che vogliamo ingrandire (o “stirare”) è vicino a $\xi=1$ e dunque è del tipo $\zeta = (1-\xi)/\varepsilon^\alpha$, dove α si può determinare imponendo che in questa regione i due meccanismi di trasporto (cioè diffusione e generazione) si bilancino, ottenendo $\alpha=1/2$.

e dunque troviamo $Sh = \sqrt{Da}$, in accordo con la soluzione esatta. Come previsto, otteniamo lo stesso risultato del caso piano.

14.4 Diffusione con Reazione Chimica Omogenea del Secondo Ordine

Si abbia un film liquido stagnante in cui siano presenti tre specie, A , B e C , con $x_A \ll 1$ e $x_B \ll 1$. Alla superficie $z=0$ si mantenga la concentrazione c_{A0} di A e su $z=L$ quella di B , c_{BL} . Oltre che diffondere in un'atmosfera composta prevalentemente di C , A e B reagiscono tra loro, $A+B \rightarrow C$, con una velocità di reazione $R_A = R_B = -kc_A c_B$. Supponendo che il flusso sia monodimensionale lungo z e stazionario, da un semplice bilancio massico in un elementino di volume Sdz , dove S è l'area della sezione del film otteniamo:

$$N_A(z)S - N_A(z+dz)S - kc_A c_B(Sdz) = 0. \quad (14.4.1)$$

Un'equazione analoga si ottiene per B . Da qui, dividendo per dz , e considerando che i flussi di A e di B sono soltanto diffusivi, con $N_A = -D_A dc_A/dz$ e $N_B = -D_B dc_B/dz$ otteniamo le seguenti equazioni di diffusione-reazione per c_A e c_B :

$$D_A \frac{d^2 c_A}{dz^2} - kc_A c_B = 0, \quad (14.4.2)$$

$$D_B \frac{d^2 c_B}{dz^2} - kc_A c_B = 0. \quad (14.4.3)$$

Si noti che A diffonde in C con un coefficiente di diffusione D_A diverso da quello che regola la diffusione di B . Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$c_A(0) = c_{A0}; \quad \frac{dc_B}{dz}(0) = 0; \quad c_B(L) = c_{BL}; \quad \frac{dc_A}{dz}(L) = 0, \quad (14.4.4)$$

dove abbiamo considerato che i flussi di B in $z=0$ e di A in $z=L$ sono nulli. La soluzione generale di questo problema si può determinare in modo numerico. Tuttavia, una semplice soluzione analitica si può determinare nel caso in cui la velocità di reazione sia molto maggiore di quella di diffusione, cioè per alti numeri di Damkohler, $Da = kc_{A0}L^2/D \gg 1$. In questo caso, infatti, non appena una molecola di A incontra una di B , entrambe reagiscono e scompaiono. Dunque, A e B non possono esistere insieme: o c'è A o c'è B e di conseguenza dalla parte di $z=0$ ci deve essere soltanto A , mentre dalla parte di $z=L$ ci deve essere soltanto B . Dunque, nel mezzo, deve esistere un punto L_R , detto *fronte di reazione* (“reaction front”), in corrispondenza del quale $c_A = c_B = 0$ (se così non fosse, le concentrazioni avrebbero un profilo discontinuo, il che è impossibile). Riassumendo, per $0 < z < L_R$ c'è soltanto la specie A , che dunque diffonde senza reazione ($c_B=0$ e quindi $R_A=0$), con condizioni al contorno note, cioè

$$\frac{d^2 c_A}{dz^2} = 0; \quad c_A(0) = c_{A0}; \quad c_A(L_R) = 0, \quad (14.4.5)$$

e dunque il profilo di c_A è lineare,

$$c_A(z) = c_{A0} \left(1 - \frac{z}{L_R} \right), \quad (14.4.6)$$

Nello stesso modo otteniamo:

$$c_B(z) = \frac{c_{BL} L_R}{L - L_R} \left(\frac{z}{L_R} - 1 \right). \quad (14.4.7)$$

A questo punto, dobbiamo determinare L_R , che è ignoto. Per far ciò, ci occorre un'altra condizione, basata su considerazioni fisiche. Questo è quello che si ottiene considerando che per ogni mole di A che arriva a L_R da sinistra, ce ne deve essere una di B che vi arriva da destra. Ciò significa che:

$$N_A(L_R) = -N_B(L_R). \quad (14.4.8)$$

(in questo caso i flussi sono comunque costanti) Da qui si ottiene:

$$L_R = \frac{L}{1 + \frac{c_{BL} D_B}{c_{A0} D_A}}, \quad (14.4.9)$$

e dunque possiamo ottenere il flusso:

$$N_A = -N_B = \frac{c_{A0} D_A}{L} \left(1 + \frac{c_{BL} D_B}{c_{A0} D_A} \right). \quad (14.4.10)$$

Negli esempi degli ultimi due paragrafi, abbiamo visto che il flusso massico che entra in un film è favorito dalla presenza di una reazione chimica. Ciò è molto importante nella progettazione di assorbitori di gas, in cui si vuole massimizzare il flusso di gas assorbito da un film liquido.

14.5 Esercizi

- 14.1** Si calcolino le velocità medie molari e massiche del sistema naftalene-azoto descritto nel paragrafo 14.1, con una lunghezza di diffusione $\Delta z = 10\text{cm}$. Dati: $p = 1\text{atm}$, $T = 25^\circ\text{C}$, $M_{WA} = 128$, $M_{WB} = 28$, $p_{vap} = 9.6\text{Pa}$, $D = 8 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$.

- 14.2** Una gocciolina d'acqua di forma sferica con raggio R viene spruzzata in una atmosfera di aria secca, dove evapora. Supponendo che attorno alla gocciolina si formi uno strato di aria stagnante di spessore δ , si calcoli il flusso di vapor d'acqua. Cosa accade nel caso diluito e quando $\delta \ll R$ e $\delta \rightarrow \infty$?

- 14.3** Si ripeta il problema del paragrafo 14.2 in geometria cilindrica.

- 14.4** Si consideri una particella di catalizzatore di forma cilindrica, con raggio R e lunghezza $L \gg R$. Un gas A , presente all'esterno della particella con frazione molare $x_0 \ll 1$, all'interno della particella diffonde, con diffusività efficace D e reagisce chimicamente con una reazione omogenea del prim'ordine, $A \rightarrow 2B$, con costante di reazione k . Senza risolvere il caso generale, si determini:

- Il flusso entrante di A nel caso limite di reazione 'debole' usando un espansione perturbativa regolare.
- Il flusso entrante di A nel caso limite di reazione 'forte' usando il concetto di strato limite.

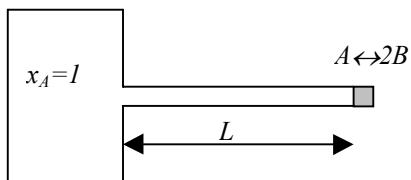


Figura 14.1P

- 14.5** Si consideri l'esperimento seguente, volto a misurare la diffusività D di A in B , dove A e B sono entrambi dei gas che possiamo assumere ideali. In un tubo capillare di lunghezza L , l'estremità $z=0$ viene posta a contatto con un grosso serbatoio contenente A puro, mentre l'altra estremità, $z=L$, viene chiusa con un catalizzatore, sul quale ha luogo la reazione irreversibile (cioè molto rapida) $A \rightarrow 2B$. A questo punto, si determini la dipendenza di D dal flusso N_A (che si suppone misurabile), pressione P e temperatura T .

- 14.6** Si ripeta il problema precedente, supponendo però che sul catalizzatore avvenga la reazione $A \leftrightarrow 2B$, con costante di equilibrio $K = c_B^2/c_A$ (vedi **figura 14.1P**).

- 14.7** La forma di vita dominante sul pianeta γ -Valentinianus è il basilides, un verme telepatico della lunghezza di 100 re [la rei (re) è l'unità di misura spaziale su γ -Valentinianus]. L'energia necessaria alla vita del basilides viene prodotta attraverso un processo metabolico di combustione del metano che avviene nel dorn, un organo del raggio $R_i = 0.5 \text{ re}$ che corre lungo l'asse del basilides. A sua volta, il dorn è circondato da un tessuto molliccio e uniforme. Il metano è presente nell'atmosfera con una concentrazione $c_{A,atm} = 0.4 \text{ mol/re}^3$ e ha una solubilità molare $\alpha = 0.1$ con la carne del basilides. Sapendo che la diffusività del metano nella carne del basilides è $D = 0.3 \text{ re}^2/p$ [il panta (p) è l'unità di misura temporale su γ -Valentinianus] e che per sopravvivere il basilides ha bisogno di consumare una quantità $S = 1.35 \cdot 10^{-4} \text{ mol/p}$ di metano per unità di volume (re^3) (più grosso è il verme e più consuma), si calcoli il raggio massimo R_{max} che un basilides può raggiungere su γ -Valentinianus.

15. Trasporto di massa non stazionario

Nei primi tre paragrafi di questo capitolo risolviamo tre problemi in cui si può assumere che il flusso molare sia quasi stazionario. Ciò significa che si può supporre che il tempo caratteristico necessario per raggiungere lo stato stazionario sia molto minore di quello con cui cambiano le condizioni al contorno. Negli ultimi due paragrafi, invece, vediamo due esempi in cui questa ipotesi non è applicabile.

15.1 Trasporto attraverso una membrana

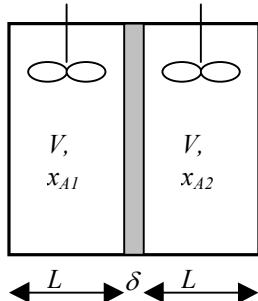


Figura 15.1.1

Si abbiano due serbatoi di uguale volume V , separati da una membrana porosa di sezione $S=V/L$, porosità ε e spessore δ (vedi **figura 15.1.1**). I due serbatoi sono perfettamente miscelati e contengono una miscela $A-B$; la frazione molare di A , inizialmente, sia x_{A10} e $x_{A20} < x_{A10}$, rispettivamente. Vogliamo determinare come la differenza tra le frazioni molari x_{A1} e x_{A2} vari nel tempo, in modo da poter determinare il coefficiente di diffusione D .

Anzitutto, poiché la porosità è definita come il rapporto tra il volume in cui A e B possono diffondere e il volume totale, la sezione utile per il flusso di A e di B è uguale a $S\varepsilon$. Dunque, da un bilancio molare nei due serbatoi

otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(cx_{A1}V) = -N_{A1}S\varepsilon, \quad (15.1.1)$$

$$\frac{d}{dt}(cx_{A2}V) = -N_{A2}S\varepsilon, \quad (15.1.2)$$

dove N_{A1} N_{A2} sono i flussi di A uscenti dal serbatoio 1 e 2, rispettivamente.

Ora supponiamo di poter applicare l'ipotesi di quasi stazionarietà. Ciò significa che i flussi N_{A1} e N_{A2} sono quelli stazionari, corrispondenti a delle concentrazioni costanti di A nei due serbatoi. Dunque, allo stazionario, il flusso uscente da 1 è uguale a quello entrante in 2, cioè

$$N_{A1} = -N_{A2}. \quad (15.1.3)$$

Inoltre, l'espressione generale del flusso molare,

$$N_A = x_A(N_A + N_B) - cD \frac{dx_A}{dz}. \quad (15.1.4)$$

si può semplificare considerando che, poiché la parete esterna ai due serbatoi è chiusa, per ogni mole di A che si sposta da sinistra a destra ce ne è una di B che si muove nella direzione opposta, cioè il flusso è equimolare:

$$N_A = -N_B. \quad (15.1.4)$$

Dunque, il flusso N_A (e anche N_B , ovviamente) è di tipo diffusivo, che significa che, nell'ipotesi quasi stazionaria, il profilo di concentrazione è lineare tra x_{A1} e x_{A2} , cioè

$$N_A = \frac{cD}{\delta} (x_{A1} - x_{A2}). \quad (15.1.5)$$

Analizziamo adesso l'ipotesi di quasi-stazionarietà. Come abbiamo visto, tale ipotesi è applicabile quando il tempo caratteristico τ_{eq} di variazione di x_{A1} e x_{A2} è molto maggiore di quello τ_{ss} con cui il flusso N_A raggiunge il suo valore stazionario (15.1.5). Dalla (15.1.1) otteniamo la stima:

$$\tau_{eq} \approx \frac{cV}{N_A S \varepsilon} \approx \frac{L \delta}{D \varepsilon}, \quad (15.1.6)$$

dove $L=V/S$, in cui abbiamo supposto che $x_A=O(1)$ e abbiamo sostituito l'espressione (15.1.5) del flusso molare stazionario. Inoltre, come in tutti i processi diffusivi, il tempo caratteristico per raggiungere lo stato stazionario è $\tau_{ss} \approx \delta^2/D$. Dunque concludiamo che l'ipotesi di quasi-stazionarietà è applicabile quando:

$$\tau_{ss} \ll \tau_{eq} \Rightarrow \frac{\delta \varepsilon}{L} \ll 1, \quad (15.1.7)$$

cioè quando lo spessore della membrana δ è molto minore di L , oppure quando la porosità ε è molto piccola.

Sostituendo (15.1.5) nelle (15.1.1) e (15.1.2) otteniamo:

$$L \frac{dx_{A1}}{dt} = -\frac{\varepsilon D}{\delta} (x_{A1} - x_{A2}), \quad (15.1.8)$$

$$L \frac{dx_{A2}}{dt} = \frac{\varepsilon D}{\delta} (x_{A1} - x_{A2}), \quad (15.1.8)$$

da risolversi con le condizioni iniziali: $x_{A1}(0) = x_{A10}$ e $x_{A2}(0) = x_{A20}$. Sottraendo queste due equazioni membro a membro e integrando tra $t=0$ e t , otteniamo:

$$\ln \frac{\Delta x_0}{\Delta x} = \frac{2D\varepsilon}{\delta L} t = 2 \frac{t}{\tau_{eq}} \Leftrightarrow \Delta x = \Delta x_0 e^{-2t/\tau_{eq}}, \quad (15.1.9)$$

dove $\Delta x = x_{A1} - x_{A2}$, mentre τ_{eq} è definito in (15.1.6). Questo mostra che τ_{eq} è veramente il tempo caratteristico con cui varia la composizione dei due serbatoi e dunque la stima (15.1.7) della condizione di validità dell'ipotesi quasi stazionaria è valida. Infine, sostituendo (15.1.9) in (15.1.8) e integrando, otteniamo:

$$x_{A1} = x_{A10} - \frac{\varepsilon D \tau_{eq} \Delta x_0}{2 \delta L} \left(1 - e^{-2t/\tau_{eq}} \right). \quad (15.1.10)$$

A partire dall'equazione (15.1.9) vediamo che possiamo stimare D da due misure di concentrazione fatte in due tempi diversi:

$$D = \frac{\delta L}{2\varepsilon t} \ln \frac{\Delta x_0}{\Delta x}, \quad (15.1.11)$$

15.2 Evaporazione di un liquido da un serbatoio

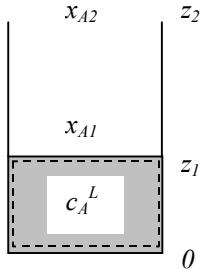
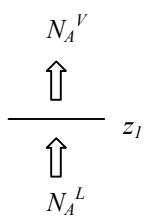


Figura 15.2.1

Il problema è simile a quello del paragrafo 14.1, in cui un liquido A , occupante la parte inferiore, $0 < z < z_1$, di un serbatoio, evapora in una atmosfera stagnante, $z_1 < z < z_2$, di B . La frazione molare del vapore di A all'interfaccia $z=z_1$ è fissata, $x_A = x_{A1}$, dalle condizioni di equilibrio termodinamico liquido-vapore, mentre per $z=z_2$ è mantenuta costante, con $x_A = x_{A2}$, dalle condizioni esterne. A differenza del caso studiato nel paragrafo 14.1, qui supponiamo che il livello z_1 del liquido non sia costante e vogliamo determinare il tempo di svuotamento del serbatoio. Per cominciare, scriviamo il bilancio di massa nel volume indicato in **figura 15.2.1**,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} c_A dV = - \oint_{S(t)} N_{Ar} dS, \quad (15.2.1)$$

dove N_{Ar} è il flusso di A uscente dal volume del liquido, V , relativo alla velocità $w=dz_1/dt$ con cui si muove l'interfaccia, $z=z_1$,



Dunque:

$$N_{Ar} = c_A (v_A - w) = N_A - c_A \frac{dz_1}{dt}. \quad (15.2.2)$$

Figura 15.2.2

$$c_A^L \frac{dV}{dt} = -N_{Ar}^L(z_1)S = -N_{Ar}^V(z_1)S, \quad (15.2.3)$$

dove S è la superficie dell'interfaccia, mentre $N_{Ar}^L(z_1)$ e $N_{Ar}^V(z_1)$ sono, rispettivamente, il flusso di A dalla parte liquida, $z=z_1^-$ e quello dalla parte gassosa, $z=z_1^+$, dell'interfaccia, i quali sono uguali tra loro per continuità (vedi **figura 15.2.2**). Considerando che $V=Sz_1$, otteniamo infine:

$$c_A^L \frac{dz_1}{dt} = -N_{A1} + c_{A1} \frac{dz_1}{dt}, \quad (15.2.4)$$

dove c_A^L è la concentrazione di A nella fase liquida, mentre c_{A1} e N_{A1} sono, rispettivamente, la concentrazione e il flusso di A nella fase gassosa all'interfaccia $z = z_I$.

A questo punto, supponiamo (ipotesi, questa, soggetta a verifica a posteriori) di poter applicare l'ipotesi di quasi stazionarietà. Ciò significa che il tempo caratteristico $\tau_{ss} \approx (\Delta z)^2/D$ con cui il campo di concentrazione raggiunge lo stato stazionario si suppone che sia molto inferiore a quello con cui cambia il livello dell'interfaccia, cioè al tempo di svuotamento τ . In altre parole, poiché Δz diviso per il tempo dà una velocità, la velocità tipica di diffusione, $D/\Delta z$, si suppone che sia molto maggiore della velocità tipica con cui si muove l'interfaccia, dz_I/dt . Dunque, 1) il secondo termine a secondo membro di (15.2.4) si può trascurare rispetto al primo e 2) il flusso N_{A1} è uguale all'espressione (14.1.7),

$$N_{A1} = \frac{cD(x_{A1} - x_{A2})}{(z_2 - z_1)(x_B)_{ln}}. \quad (15.2.5)$$

L'equazione (15.2.4) diventa:

$$\frac{dz_I(t)}{dt} = -\frac{W}{z_2 - z_I(t)}; \quad W = \frac{cD(x_{A1} - x_{A2})}{c_A^L(x_B)_{ln}} \quad (15.2.6)$$

e integrando tra $t=0$ e t , con $z_I(t=0) = z_{I0}$, otteniamo:

$$(z_2 - z_1)^2 - (z_2 - z_{I0})^2 = 2Wt. \quad (15.2.7)$$

In particolare, il tempo di svuotamento τ , tale che $z_I(\tau) = 0$, risulta essere il seguente:

$$\tau = \frac{z_2^2 - (z_2 - z_{I0})^2}{2W}. \quad (15.2.8)$$

Ora vediamo quando l'ipotesi di quasi stazionarietà è valida:

$$\tau_{ss} \ll \tau \Rightarrow \frac{(\Delta z)^2}{D} \ll \frac{(\Delta z)^2}{W} \approx \frac{(\Delta z)^2 c_A^L}{D c_A} \Rightarrow c_A \ll c_A^L, \quad (15.2.9)$$

dove $c_A = cx_A$ è una concentrazione tipica di A nella fase vapore. Lo stesso risultato si può ottenere imponendo che, come abbiamo visto, la velocità tipica di diffusione, $D/\Delta z$, sia molto maggiore di $dz_I/dt \approx W/\Delta z$ (vedi (15.2.6)).

La condizione $c_A \ll c_A^L$ è generalmente verificata. Ad esempio, nel caso di acqua, $c_A^L = 55 \text{ moli/l}$, mentre, supponendo che il vapore si comporti come un gas ideale, in condizioni ambiente $c = 1/22 \text{ moli/l}$ e dunque $c_A/c_A^L \approx 10^{-3}$.

Infine, si noti che nel caso diluito, $x_A \ll 1$, si ottiene lo stesso risultato (15.2.7), in cui $x_B = 1$.

15.3 Combustione di una particella di carbone

Si abbia una particella sferica di carbone di raggio R , con concentrazione c_C^S di carbonio, immersa in una atmosfera contenente ossigeno (specie A). L'ossigeno diffonde verso la superficie della particella, dove reagisce con il carbonio producendo anidride carbonica (specie B) secondo la reazione



caratterizzata da una velocità di reazione k_s .¹ Sapendo che lontano dalla particella la frazione molare di ossigeno è uguale a x_A^∞ , si vuole determinare il tempo necessario per la completa combustione della particella di carbone.

Anzitutto, da un bilancio molare del carbonio contenuto nel volume della particella, otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left(c_C^S \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = -N_{Cr} (4\pi R^2) = N_{Ar} (4\pi R^2), \quad (15.3.2)$$

dove N_{Cr} e N_{Ar} sono, rispettivamente, i flussi di carbonio e di ossigeno all'interfaccia gas-solido, relativi alla velocità dR/dt con cui l'interfaccia si sposta.² Inoltre, nella (15.3.2) abbiamo tenuto conto del fatto che per ogni mole di C consumato (cioè uscente dal volume) c'è una mole di O_2 entrante.

A questo punto, supponiamo di poter applicare l'ipotesi di quasi stazionarietà. Dunque, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la velocità dell'interfaccia dR/dt è trascurabile rispetto alla velocità tipica di diffusione molecolare e dunque il flusso relativo si può approssimare con quello assoluto, N_A , ottenendo infine:

$$c_C^S \frac{dR}{dt} = N_A (r = R), \quad (15.3.3)$$

Il flusso N_A si può calcolare facilmente risolvendo il problema stazionario in cui il flusso totale $N_A(4\pi r^2)$ di ossigeno che attraversa una qualsiasi sfera di raggio $r > R$ è costante. Ora, quando l'atmosfera è composta esclusivamente da ossigeno e anidride carbonica, abbiamo:

$$N_A = x_A (N_A + N_B) - cD \frac{dx_A}{dr} \quad (15.3.4)$$

e poiché per ogni mole di ossigeno consumato ce ne è una di anidride carbonica generata, abbiamo che $N_A = -N_B$ (flusso equimolare). Dunque il flusso è esclusivamente di tipo diffusivo, cioè

¹ Più esattamente, alla superficie della particella si ha: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_A = -k_s c_A$, dove \mathbf{n} è il vettore unitario perpendicolare alla superficie e diretto verso l'esterno (dunque opposto alla direzione del flusso di ossigeno).

² Come nel caso studiato nel paragrafo precedente, i flussi misurati da un lato dell'interfaccia, per $r=R^-$, sono uguali a quelli misurati dall'altro lato, per $r=R^+$.

$$N_A = -cD \frac{dx_A}{dr}. \quad (15.3.5)$$

In presenza di una atmosfera contenente anche azoto e altri gas inerti, poiché il flusso di questi gas è nullo, mentre quello di O_2 è ancora opposto a quello di CO_2 , il risultato (15.3.5) non cambia, ma il coefficiente di diffusione D è un parametro efficace che tiene conto del fatto che l'ossigeno diffonde in una atmosfera multicomponente. Questa approssimazione, che in generale va verificata volta per volta, è sempre valida nel caso diluito, quando $x_A \ll 1$ e allora D è la diffusività dell'ossigeno nell'azoto.

A questo punto, imponendo che $N_A r^2$ sia uguale ad una costante, otteniamo³

$$-\frac{dx_A}{dr} r^2 = B \Rightarrow x_A(r) = A + \frac{B}{r}, \quad (15.3.6)$$

dove A e B sono delle costanti, da determinarsi in base alle condizioni al contorno

$$x_A = x_A^\infty \quad \text{per } r \rightarrow \infty, \quad (15.3.7)$$

$$N_A = -cD \frac{dx_A}{dr} = -k_s c_A \quad \text{per } r = R. \quad (15.3.8)$$

Con facili passaggi, otteniamo:

$$x_A(r) = x_A^\infty \left(1 - \frac{Da_R}{1 + Da_R} \frac{R}{r} \right) \quad (15.3.9)$$

dove $Da = k_s R / D$ è il numero di Damkohler, che esprime il rapporto tra il flusso molare dovuto alla reazione chimica e quello dovuto alla diffusione. Da qui, calcoliamo il flusso molare (15.3.5), esplicitandone la dipendenza da R :

$$N_A(r = R) = -\frac{cD x_A^\infty Da_R}{(1 + Da_R)R} = -\frac{cD k_s x_A^\infty}{D + k_s R}. \quad (15.3.10)$$

Sostituendo questa espressione in (15.3.3), otteniamo:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{N_A(r = R)}{c_C^S} = -\frac{D k_s (c_A^\infty / c_C^S)}{D + k_s R}, \quad (15.3.11)$$

dove $c_A^\infty = cx_A^\infty$. Ovviamente, otteniamo lo stesso risultato sostituendo in (15.3.3) la condizione al contorno $N_A(r=R) = -k_s c_A(r=R)$, ottenendo $dR/dt = -k_s c_A(r=R)/c_C^S$, e poi utilizzando la soluzione (15.3.9) per $r=R$.

³ In generale, abbiamo già visto che la soluzione dell'equazione di diffusione $\nabla^2 f(r) = 0$, in cui f dipende soltanto dalla distanza r dall'origine, è $f(r) = A + B/r$.

Integrando l'equazione (15.3.11) con la condizione iniziale $R(t=0)=R_0$, otteniamo:

$$\left(1 - \frac{R}{R_0}\right) + \frac{1}{2} Da_0 \left[1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right] = \frac{k_s t}{R_0} \frac{c_A^\infty}{c_C^S}, \quad (15.3.12)$$

dove $Da_0 = k_s R_0 / D$.

L'ipotesi di quasi stazionarietà è verificata quando la velocità con cui si sposta l'interfaccia, dR/dt , è molto minore di quella di diffusione, D/R_0 , ottenendo:

$$\left(\frac{Da_0}{1+Da_0}\right) \left(\frac{c_A^\infty}{c_C^S}\right) \ll 1, \quad (15.3.13)$$

che è sempre soddisfatta quando $c_A^\infty \ll c_C^S$, una condizione, questa, che si incontra comunemente, come abbiamo visto nel paragrafo precedente.

A questo punto, è istruttivo studiare i due casi limite $Da_0 \gg 1$ e $Da_0 \ll 1$.

a) $Da_0 \gg 1$

In questo caso, la reazione domina la diffusione. Ciò significa che non appena l'ossigeno (A) arriva alla superficie, reagisce e scompare. Dunque, la condizione al contorno per $r=R$ si può sostituire con $x_A(r=R) = 0$ e si trova la soluzione:

$$x_A(r) = x_A^\infty \left(1 - \frac{R}{r}\right); \quad N_A(r=R) = -\frac{D c_A^\infty}{R}, \quad (15.3.14)$$

da cui:

$$R_0^2 - R^2 = 2 \frac{c_A^\infty}{c_C^S} D t. \quad (15.3.15)$$

Dunque, il tempo necessario per bruciare la particella è $\tau = (R_0^2/2D)(c_C^S/c_A^\infty)$ e l'ipotesi di quasi stazionarietà $\tau_{ss} \approx R_0^2/2D \ll \tau$ è valida quando $c_A^\infty \ll c_C^S$.

Gli stessi risultati (15.3.14) e (15.3.15) si ottengono da (15.3.9) e (15.3.12) quando $k_s R_0 \gg D$.

Si noti che in questo caso il processo cinematicamente controllante è quello diffusivo e infatti vediamo che il tempo τ dipende da D e non da k_s ed è proporzionale a R_0^2 .

b) $Da_0 \ll 1$

In questo caso, la diffusione domina la reazione. Ciò significa che l'ossigeno diffonde velocemente verso la superficie della particella, dove reagisce lentamente. Dunque, la condizione al contorno per $r=R$ si può sostituire con $N_A(r=R)=0$ (cioè $dx_A/dr(r=R) = 0$) e si trova la soluzione

$$x_A(r) = x_A^\infty. \quad (15.3.16)$$

Infine, sostituendo questo risultato in $dR/dt = -k_s c_A(r=R)/c_C^S$, otteniamo: $dR/dt = -k_s c_A^\infty / c_C^S$, da cui:

$$R_0 - R = \frac{c_A^\infty}{c_C^S} k_s t. \quad (15.3.17)$$

Dunque, il tempo necessario per bruciare la particella è $\tau = (R_0/k_s)(c_C^S/c_A^\infty)$ e l'ipotesi di quasi stazionarietà $\tau_{ss} \approx R_0^2/2D \ll \tau$ è valida quando $Da_0 c_A^\infty \ll c_C^S$. Questa condizione, considerando che $Da_0 \ll 1$, viene soddisfatta ancora più facilmente che nel caso precedente, quando $Da_0 \gg 1$. Verificabile che una condizione che, come nell'esempio del paragrafo precedente, è solitamente verificata. Gli stessi risultati (15.3.16) e (15.3.17) si ottengono da (15.3.9) e (15.3.12) quando $k_s R_0 \ll D$.

Si noti che in questo caso il processo cinematicamente controllante è quello reattivo e infatti vediamo che il tempo τ dipende da k_s e non da D ed è proporzionale a R_0 .

15.4 Evaporazione non stazionaria

Si consideri una specie B che inizialmente riempie un mezzo semi-infinito, $z=0$. A partire dal tempo $t=0$ sulla superficie $z=0$ viene imposta una concentrazione x_{A0} di un'altra specie A , che comincia a diffondere nel mezzo, con diffusività D , spingendo B verso $z > 0$. Le concentrazioni c_A e c_B soddisfano le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \frac{\partial N_A}{\partial z} = 0, \quad (15.4.1)$$

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} + \frac{\partial N_B}{\partial z} = 0, \quad (15.4.2)$$

dove N_A e N_B sono i flussi di A e B , rispettivamente, che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e al contorno:

$$x_A(z, t=0) = 0; \quad x_A(z=0, t) = x_{A0}; \quad x_A(z \rightarrow \infty, t) = 0, \quad (15.4.3)$$

Sommendo le due equazioni (15.4.1) e (15.4.2) membro a membro e considerando che $c = c_A + c_B = cost.$, vediamo che la somma $N_A + N_B$ è indipendente da z ed è una funzione soltanto del tempo. Dunque, siccome $N_B(z=0, t) = 0$, vediamo che

$$N_A(z, t) + N_B(z, t) = N_A(0, t) + N_B(0, t) = N_A(0, t) = N_{A0}(t). \quad (15.4.4)$$

Ovviamente, N_{A0} è massima per tempi brevi (è infinita per $t=0$) per poi diminuire nel tempo. Inoltre, si noti anche che, siccome N_A è nulla all'infinito, $N_{A0}(t) = N_B(z \rightarrow \infty, t)$, che sta ad indicare che A spinge B verso l'infinito.

Il flusso N_A è la somma di una parte convettiva e di una diffusiva,

$$N_A(z, t) = x_A(N_A + N_B) - cD \frac{\partial x_A}{\partial z} = x_A(z, t)N_{A0}(t) - cD \frac{\partial x_A(z, t)}{\partial z}. \quad (15.4.5)$$

Questa relazione, per $z=0$, dà il seguente risultato:

$$N_{A0}(t) = -\frac{cD}{1-x_{A0}} \left(\frac{\partial x_A}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (15.4.6)$$

Ora, nel caso diluito, in cui $x_{A0} \ll 1$, possiamo trascurare il contributo convettivo del trasporto molare e, come abbiamo visto nel paragrafo 6.4, otteniamo la tipica soluzione autosimile:

$$\frac{x_A(z, t)}{x_{A0}} = f(\eta) = erfc(\eta) = [1 - erf(\eta)], \quad \text{con} \quad \eta = \frac{z}{\sqrt{4Dt}}, \quad (15.4.7)$$

dove erf è la funzione errore descritta in **figura 6.4.2**. Sostituendo questa soluzione in (15.4.6), troviamo che il flusso di A all'interfaccia è $N_{A0} = cx_{A0}(D/\pi t)^{1/2}$ o, scritta meglio:

$$N_{A0} = cD \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\delta_{diff}}, \quad \text{dove} \quad \delta_{diff} = \sqrt{\pi Dt}, \quad (15.4.8)$$

in cui $x_{A\infty} = 0$, mentre δ_{diff} è la lunghezza di diffusione, cioè la lunghezza tipica percorsa da A nel tempo t .

Nel caso generale non diluito, supponiamo che esista ancora una soluzione autosimile, definita in funzione della stessa variabile η definita qui sopra. Allora, sostituendo (15.4.6) in (15.4.5) si ottiene, dopo qualche passaggio, la seguente equazione:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2(\eta - \phi) \frac{df}{d\eta} = 0, \quad (15.4.9)$$

dove $f(\eta)$ è definito in (15.4.7), mentre ϕ è un termine aggiuntivo costante (anche se ignoto, al momento), dovuto al contributo della convezione e dato da

$$\phi = -\frac{1}{2} \frac{x_{A0}}{1-x_{A0}} \frac{df}{d\eta}(0). \quad (15.4.10)$$

Riguardo alle condizioni imposte al problema, valgono le stesse considerazioni fatte nel paragrafo 6.4, per cui vediamo che esse si riducono dalle tre (15.4.3) originali alle due seguenti :

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\infty) = 0. \quad (15.4.11)$$

L'equazione (15.4.9) con condizioni iniziali (15.4.11) ha la soluzione seguente:

$$f(\eta) = \frac{1 - \operatorname{erf}(\eta - \phi)}{1 + \operatorname{erf}(\phi)}. \quad (15.4.12)$$

A questo punto, sostituendo (15.4.12) in (15.4.10), possiamo determinare ϕ come segue:

$$x_{A0} = \frac{2\phi}{2\phi - f'(0)} = \frac{1}{1 - \frac{f'(0)}{2\phi}} = \left\{ 1 + [\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf}(\phi))\phi \exp(\phi^2)]^{-1} \right\}^{-1}, \quad (15.4.13)$$

dove abbiamo sostituito $f'(0) = -2\exp(-\phi^2) / [\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf}(\phi))]$. Dato x_{A0} , l'equazione (15.4.13) ci permette di determinare ϕ e quindi la distribuzione di concentrazione (15.4.2). Adesso calcoliamo il flusso (15.4.6) di A all'interfaccia:

$$N_{A0} = -\frac{cDx_{A0}}{1 - x_{A0}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{cDx_{A0}}{1 - x_{A0}} \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{df}{d\eta}(0) = c\phi \sqrt{\frac{D}{t}}. \quad (15.4.14)$$

Dunque, il rapporto tra il flusso N_{A0} e la sua parte diffusiva è dato da:

$$\lambda = \frac{N_{A0}}{(N_{A0})_{diff}} = \frac{\sqrt{\pi}\phi}{x_{A0}}. \quad (15.4.15)$$

x_{A0}	ϕ	λ
0	0	1
0.25	0.156	1.11
0.50	0.358	1.27
0.75	0.662	1.56
1	∞	∞

Come si vede dalla tabella a lato, il contributo convettivo comincia ad essere rilevante soltanto quando la concentrazione di A alla parete si avvicina a 1. Inoltre, le ragioni per cui quando la concentrazione alla parete diventa =1 il risultato diverge sono già state discusse.

Un altro modo di scrivere questo risultato è simile a (15.4.8), cioè:

$$N_{A0} = cD \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\delta_{diff}}, \text{ dove } \delta_{diff} = \frac{\sqrt{\pi Dt}}{\phi}, \quad (15.4.8)$$

da cui si vede che la convezione riduce la lunghezza di diffusione, dal momento che il profilo di concentrazione alla parete risulta più ripido.

15.5 Esercizi

- 15.1** Si ricavi l'espressione (15.1.12) a partire dal teorema del trasporto di Reynolds, equazione (5.1.14).
- 15.2** Una gocciolina d'acqua di raggio R_i viene immessa all'istante $t = 0$ in una atmosfera stagnante di aria secca (cioè con frazione molare di vapor d'acqua $x_\infty = 0$) e comincia ad evaporare. All'interfaccia acqua-aria la condizione di equilibrio termodinamico determina la frazione molare di vapore x_0 . Usando l'approssimazione quasi stazionaria,

si determini il tempo necessario all'evaporazione di tutta la goccia. Alla fine, si determini la condizione di applicabilità dell'ipotesi quasi stazionaria. Dati: in coordinate sferiche $\nabla^2 f(r) = (1/r^2) (\partial/\partial r)(r^2 \partial f/\partial r)$.

- 15.3** Si studi la combustione di una goccia di metano (*A*) immersa in una atmosfera composta di azoto ed ossigeno (*B*), secondo la reazione $2O_2 + CH_4 \rightarrow CO_2 + 2H_2$, supponendo che la reazione sia molto rapida e ipotizzando che *A* e *B* siano gas molto diluiti in una atmosfera di gas inerti, *S*. Supponendo che il problema sia piano e che per $z < 0$ ci sia soltanto *A*, mentre inizialmente, per $z > 0$ ci sia soltanto *B*, si determini il flusso di metano.
- 15.4** In una atmosfera in cui è presente un gas con concentrazione c_A viene immesso un catalizzatore sferico di raggio *R* su cui *A* reagisce istantaneamente. Si determini il flusso di *A* alla superficie del catalizzatore.

16. Trasporto di massa convettivo

In questo capitolo, studiamo il trasporto massico di un soluto diluito disciolto in un solvente in movimento. Come abbiamo visto precedentemente, in questo caso la frazione molare (o molare, se si tratta di una miscela liquida) soddisfa la stessa equazione di convezione-diffusione che abbiamo già incontrato nel trasporto di calore. Dunque, possiamo fare lo stesso tipo di considerazioni.

16.1 Esempio di trasporto molare per conduzione

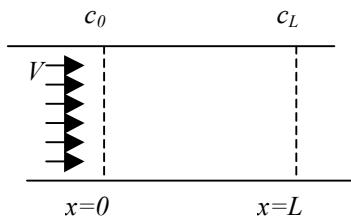


Figura 16.1.1

Un letto fisso è attraversato da un fluido con velocità V costante (flusso a pistone) lungo la direzione x in cui è disciolto un soluto con concentrazione c (vedi **figura 16.1.1**). Il soluto è mantenuto a concentrazione $c_0=0$ per $x<0$ e a concentrazione c_L per $x>L$. a) Si calcoli il profilo di concentrazione $c(x)$ e il flusso molare J_M in $x=L$, analizzando i due casi limite $Pe \ll 1$ e $Pe \gg 1$, dove $Pe = VL/D$ è il numero di Peclet massico e D la diffusività molecolare del soluto nel fluido. b) Si derivino i risultati dei due casi limite usando metodi perturbativi.

La concentrazione è una funzione della sola coordinata x , con $0 < x < L$ e soddisfa la seguente equazione e condizioni al contorno:

$$V \frac{dc}{dx} = D \frac{d^2c}{dx^2}; \quad c(0) = 0; \quad c(L) = c_L, \quad (16.1.1)$$

mentre il flusso molare $J_M(L)$ che ci interessa trovare è il seguente:

$$J_M(L) = Vc(L) - D \frac{dc}{dx}(L). \quad (16.1.2)$$

Si noti che, oltre che da una componente diffusiva, il flusso molare per $x = L$ è composto anche da una componente convettiva, che nel flusso alle pareti è in genere assente, perché la velocità lì è uguale a zero.

In termini adimensionali, definendo $\Theta = c/c_L$, $\xi = x/L$ e $Pe = VL/D$, otteniamo:

$$Pe \frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}; \quad \Theta(0) = 0; \quad \Theta(1) = 1. \quad (16.1.3)$$

Inoltre, si conviene esprimere il flusso molare in funzione del numero di Sherwood, definito come $Sh = J_M / J_{M,diff}$, dove $J_{M,diff}$ è il flusso molare dovuto alla sola diffusione. Nel nostro caso, $J_{M,diff} = -Dc_L/L$ e dunque si ottiene con facili passaggi:

$$Sh_L = \frac{J_U(L)}{J_{U,diff}} = \frac{d\Theta}{d\xi}(I) - Pe . \quad (16.1.4)$$

L'equazione (16.1.3) ammette l'integrale generale $\Theta(\xi) = C_1 e^{Pe\xi} + C_2$ e determinando le costanti C_1 e C_2 in base alle condizioni al contorno, otteniamo la soluzione:

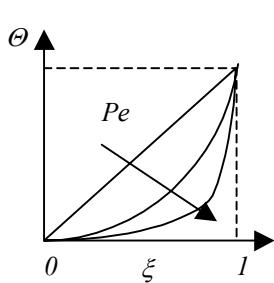


Figura 16.1.2

Il profilo di concentrazione è rappresentato in **figura 16.1.2**. Come si vede, è lineare per $Pe=0$, mentre diventa sempre più appiattito verso $\xi=1$ all'aumentare di Pe , fino a creare uno strato limite. Come ci si aspettava, $Sh_L = 1$ per $Pe = 0$, ma, stranamente a prima vista, Sh_L tende a zero per $Pe \rightarrow \infty$. Ciò è dovuto al fatto che nello strato limite si ha un flusso convettivo, diretto lungo $+x$, che tende a bilanciare esattamente il flusso diffusivo, diretto lungo $-x$. Queste considerazioni sono approfondite nei paragrafi seguenti, in cui esaminiamo i due casi limite suddetti.

$$Pe = \varepsilon \ll 1$$

Poiché $e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$ e $(1+\varepsilon)^{-1} = 1 - \varepsilon + \dots$, otteniamo:

$$\Theta(\xi) = \frac{\xi(1 + \frac{1}{2}Pe\xi + \dots)}{1 + \frac{1}{2}Pe} \cong \xi \left(1 + \frac{1}{2}Pe\xi + O(Pe^2) \right) \left(1 - \frac{1}{2}Pe + O(Pe^2) \right)$$

da cui:

$$\Theta(\xi) = \xi - \frac{1}{2}Pe\xi(1 - \xi) + O(Pe^2) \quad (16.1.7)$$

e

$$Sh_L = 1 - \frac{1}{2}Pe + O(Pe^2). \quad (16.1.8)$$

Dunque vediamo che, come ci aspettavamo, per $Pe = 0$ il profilo di concentrazione è lineare e il numero di Sherwood è $Sh_L = 1$.

Adesso passiamo all'analisi perturbativa. Prima di tutto notiamo che, se imponiamo $Pe = 0$ nell'equazione (16.1.3), il problema rimane ben posto (equazione del second'ordine con due condizioni al contorno) e ammette una soluzione, $\Theta(\xi) = \xi$, che corrisponde a $Sh_L = 1$. Dunque, ci aspettiamo che il problema ammetta una perturbazione regolare (cioè valida in tutto il campo di definizione di ξ) del tipo:

$$\Theta(\xi) = \Theta_0(\xi) + \varepsilon \Theta_1(\xi) + O(\varepsilon^2), \quad (16.1.9)$$

dove, ricordiamo, $\varepsilon = Pe$ e abbiamo ipotizzato che $\Theta_0(\xi) \gg \varepsilon \Theta_1(\xi)$ ovunque (se questa diseguaglianza non fosse verificata ovunque, dovremmo concludere che il problema ammette una perturbazione singolare, come avviene in presenza di uno strato limite). Ora, sostituendo l'equazione (16.1.7) in (16.1.3) otteniamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Theta_0' + \varepsilon^2 \Theta_1' - \Theta_0'' - \varepsilon \Theta_1'' - \varepsilon^2 \Theta_2'' + \dots &= 0 \\ \Theta_0(0) + \varepsilon \Theta_1(0) + \dots &= 0; \quad \Theta_0(1) + \varepsilon \Theta_1(1) + \dots = 1 \end{aligned} \quad (16.1.10)$$

e

$$Sh_L = \Theta_0'(1) + \varepsilon [\Theta_1'(1) - 1] + O(\varepsilon^2). \quad (16.1.11)$$

Raggruppando i termini dello stesso ordine di grandezza, troviamo che, per $O(1)$ si ha:

$$\Theta_0'' = 0; \quad \Theta_0(0) = 0; \quad \Theta_0(1) = 1; \quad \text{con} \quad Sh_L^{(0)} = \Theta_0'(1), \quad (16.1.12)$$

da cui otteniamo:

$$\Theta_0(\xi) = \xi; \quad Sh_L^{(0)} = 1. \quad (16.1.13)$$

Questa è la soluzione già vista, valida per $Pe = 0$. Adesso troviamo la correzione di $O(Pe)$ a questa soluzione. Raggruppando i termini di $O(\varepsilon)$ troviamo:

$$\Theta_1'' = \Theta_0' = 1; \quad \Theta_1(0) = 0; \quad \Theta_1(1) = 0; \quad \text{con} \quad Sh_L^{(1)} = \Theta_1'(1) - 1, \quad (16.1.14)$$

da cui otteniamo:

$$\Theta_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi; \quad Sh_L^{(1)} = -\frac{1}{2}. \quad (16.1.15)$$

Dunque concludiamo che:

$$\Theta(\xi) = \xi - \frac{1}{2}\varepsilon\xi(1-\xi) + O(\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad Sh_L = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (16.1.16)$$

che coincide con (16.1.7) e (16.1.8).

$$Pe = 1/\varepsilon \gg 1$$

In questo caso la soluzione esatta diventa:

$$\Theta(\xi) \approx e^{-Pe(1-\xi)} \quad \text{e} \quad Sh_L = Pe - Pe = 0. \quad (16.1.17)$$

Per analizzare questo caso, dobbiamo usare una perturbazione singolare. Infatti, imponendo che $Pe^{-1} = 0$ nell'equazione (16.1.3), otteniamo: $\Theta'(\xi)=0$, con $\Theta(0)=0$ e $\Theta(1)=1$, cioè un problema mal posto (equazione del prim'ordine con due condizioni al contorno). Allora concludiamo che, se non siamo troppo vicini a $\xi=1$ (e dunque ignorando la condizione al contorno $\Theta(1)=1$), il problema (ben posto, questa volta) è $\Theta'(\xi)=0$, con $\Theta(0)=0$, il quale ammette la soluzione $\Theta(\xi)=0$. Invece, nelle vicinanze di $\xi=1$, il profilo di velocità passa da 0 a 1 bruscamente, creando uno strato limite. Ora, poiché in quella regione il flusso diffusivo deve bilanciare il flusso convettivo, il quale è proporzionale a Pe , allora lo spessore dello strato limite (che è inversamente proporzionale al flusso diffusivo) deve essere proporzionale a Pe^{-1} . Ripetendo questa analisi in modo rigoroso, vediamo di determinare lo spessore dello strato limite introducendo la “stretched coordinate” $\zeta = (1-\xi)/\varepsilon^\alpha$, appiccicata a $\xi=1$, dove la costante α viene determinata imponendo che i termini convettivi e diffusivi si bilancino. Introducendo la coordinata ζ in (12.3.3) otteniamo:

$$-\frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta}\varepsilon^{-\alpha} = \varepsilon \frac{d^2\Theta(\zeta)}{d\zeta^2}\varepsilon^{-2\alpha}. \quad (16.1.18)$$

Dunque, se i due termini devono bilanciarsi, otteniamo $\alpha = 1$, da cui: $\zeta = (1-\xi)/\varepsilon = Pe(1-\xi)$. A questo punto, il problema da risolversi all'interno dello strato limite (in cui le distanze si misurano usando la coordinata ζ) è il seguente:

$$\frac{d\Theta(\zeta)}{d\zeta} + \frac{d^2\Theta(\zeta)}{d\zeta^2} = 0; \quad \Theta(\zeta = 0) = 1; \quad \Theta(\zeta \rightarrow \infty) = 0, \quad (16.1.19)$$

dove abbiamo considerato che, quando $\zeta \rightarrow \infty$, la soluzione valida all'interno dello strato limite deve collegarsi con quella valida al di fuori, la quale, come abbiamo visto, è $\Theta = 0$. Dunque otteniamo:

$$\Theta(\zeta) = e^{-\zeta} \Rightarrow \Theta(\xi) = e^{-Pe(1-\xi)} \Rightarrow Sh_L = 0, \quad (16.1.20)$$

che coincide col risultato “esatto” (16.1.17).

Si noti che, se avessimo usato un'analisi dimensionale, avremmo correttamente predetto per $Pe \gg 1$ l'esistenza di uno strato limite con spessore di $O(Pe^{-1})$. Tuttavia, non avremmo potuto prevedere che il flusso diffusivo di $O(Pe)$ nello strato limite si cancella identicamente con il flusso convettivo, anch'esso di $O(Pe)$. Questo esempio indica che, dopo aver effettuato un'analisi dimensionale, bisogna anche fare i conti, per controllare che non accadano eventi imprevedibili (come quello appena accennato), oltre che per determinare i fattori numerici.

16.2 Strato limite massico

Si consideri un corpo fermo e con concentrazione del soluto alla parete c_0 , lambito da un fluido (solvente) con velocità \mathbf{U} , pressione P (vedi **figura 16.2.1**) e concentrazione del

soluto c_∞ e si supponga che il numero di Peclet molare $Pe=UL/D$ sia molto maggiore di 1, dove L è la dimensione del corpo. Inoltre, come sempre in questo capitolo, supponiamo che la frazione molare del soluto sia molto piccola, in modo che la velocità media del trasporto convettivo sia uguale alla velocità del solvente. Le incognite del problema, cioè concentrazione c del soluto, velocità \mathbf{v} e pressione p del fluido, si possono ottenere (in linea di principio) risolvendo le equazioni di Navier-Stokes e di continuità del solvente, insieme alla equazione di convezione-diffusione del soluto:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (16.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (16.2.2)$$

$$\frac{Dc}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c, \quad (16.2.3)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}; c = c_0 \text{ alla parete; } \mathbf{v} = \mathbf{U}; c = c_\infty \text{ lontano dalla parete.} \quad (16.2.4)$$

Alla fine, come al solito, noi siamo interessati a determinare il flusso molare:

$$J_M = -D \mathbf{n} \cdot \nabla c \text{ alla parete,} \quad (16.2.5)$$

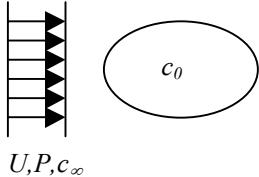


Figura 16.2.1

dove \mathbf{n} è il versore perpendicolare alla superficie del corpo¹. Si noti che, come al solito, il flusso molare del soluto alla parete risulta essere soltanto di tipo diffusivo.

Il problema è identico a quello relativo al trasporto di calore. Dal punto di vista dell'analisi dimensionale, definiamo le seguenti variabili adimensionali,

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}; \quad \tilde{t} = \frac{t}{(L/U)}; \quad \tilde{p} = \frac{p - P}{(\mu U / L)}; \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{U}; \quad \tilde{c} = \frac{c - c_0}{c_\infty - c_0}. \quad (16.2.6)$$

Le equazioni (16.2.1)-(16.2.4) diventano:

$$Re \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{Dt} = Re \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (16.2.7)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (16.2.8)$$

$$Pe_M \frac{D\tilde{c}}{Dt} = Pe_M \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{c} = \tilde{\nabla}^2 \tilde{c}, \quad (16.2.9)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{c} = 0 \text{ alla parete; } \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{c} = 1 \text{ lontano dalla parete,} \quad (16.2.10)$$

¹ In realtà, siamo interessati, più precisamente, al flusso totale di calore, uguale all'integrale di (12.1.5) su tutta la superficie del corpo.

Da questa semplice analisi emergono in modo naturale due numeri adimensionali, il numero di Reynolds $Re = UL/v$ e il numero di Peclet massico $Pe_M = UL/D$, uguali al rapporto tra i flussi convettivi e i flussi diffusivi nel trasporto di quantità di moto e di massa, rispettivamente. A sua volta, il numero di Peclet si può scrivere come il prodotto del numero di Reynolds e di quello di Schmidt, $Sc = v/D$. Quest'ultimo rappresenta il rapporto tra l'efficienza del trasporto diffusivo di quantità di moto e di quello di massa. In sintesi:

$$Re = \frac{UL}{v}; \quad Pe_M = \frac{UL}{D}; \quad Sc = \frac{v}{D} \quad (16.2.11)$$

Anche il flusso si può scrivere in modo adimensionale, definendo il numero di Sherwood come il rapporto tra il flusso molare e la sua componente diffusiva,

$$Sh = \frac{J_M}{D\Delta c/L} = -\mathbf{n} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{c} \text{ alla parete ,} \quad (16.2.12)$$

dove $\Delta c = |c_o - c_\infty|$.

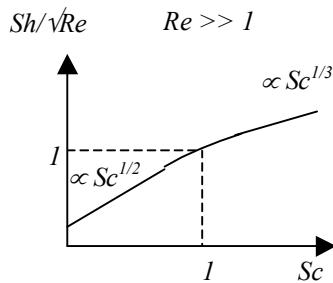


Figura 16.2.2

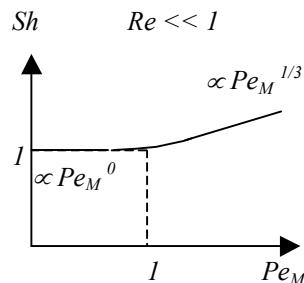


Figura 16.2.3

A questo punto, possiamo ripetere esattamente l'analisi del capitolo 12., introducendo lo strato limite massico. Alla fine, otteniamo gli stessi risultati, riassunti nelle **figure 16.2.2** e **16.2.3**, in cui vediamo che

$$\begin{aligned} Re \gg 1: \quad Sh &\propto Pe_M^{1/2} = Re^{1/2} Sc^{1/2} \quad \text{per } Sh \ll 1 \\ &\quad Sh \propto Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad \text{per } Sh \gg 1 \end{aligned} \quad (16.2.13)$$

e

$$\begin{aligned} Re \ll 1: \quad Sh &\propto 1 \quad \text{per } Pe_M \ll 1 \\ &\quad Sh \propto Pe_M^{1/3} = Re^{1/3} Sc^{1/3} \quad \text{per } Pe_M \gg 1 \end{aligned} \quad (16.2.14)$$

Questi risultati si possono anche riscrivere in funzione del coefficiente di scambio molare k_M , definito nella (13.5.2),

$$k_M = \frac{J_M}{\Delta c} = \frac{D}{L} Sh . \quad (12.2.15)$$

Ora, il caso per $Re \gg 1$ si può analizzare utilizzando l'analogia di Colburn-Chilton, che abbiamo già illustrato nel paragrafo 12.3. Invece, nel paragrafo seguente, analizziamo il caso per $Re \ll 1$.

16.3 Strato limite massico per $Re \ll 1$.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, quando $Re \ll 1$ si deve distinguere il caso con $Pe_M \ll 1$ da quello con $Pe_M \gg 1$. Consideriamo prima il caso con $Pe_M \ll 1$. Trascurando la convezione, l'equazione (16.2.9) diventa: $\tilde{\nabla}^2 \tilde{c} = 0$, con condizioni al contorno (16.2.10). Nel caso di una sfera otteniamo $\tilde{c} = 1 - 1/\tilde{r}$ e dunque il numero di Sherwood (16.2.12), definito con $L=R$, è $Sh=1$.

Quando Pe_M è piccolo ma non zero, si ottiene una correzione di questo risultato usando un metodo di perturbazione singolare, come mostrato da Acrivos e Taylor nel 1962 e ottenendo, nel caso di una sfera:

$$Sh = 1 + \frac{1}{2} Pe + O(Pe^2 \ln Pe) \quad (16.3.1)$$

dove $Pe_M = UR/D$. Una chiara esposizione di questo problema si può trovare in Leal (pag. 456-477).

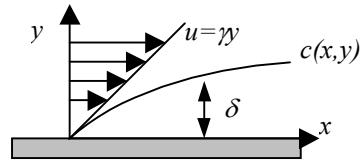


Figura 16.3.1

Adesso consideriamo il caso con $Pe_M \gg 1$. Anzitutto, poiché sappiamo che il trasporto massico ha luogo all'interno di un sottile limite, possiamo limitarci a studiare una regione molto vicina alla superficie del corpo, che quindi si può approssimare come piana. Dunque, le principali caratteristiche del problema si possono cogliere considerando la cosiddetta approssimazione di Leveque, in cui un fluido lambisce una lastra piana xy ($y>0$), con profilo di velocità lineare $u=\gamma y$ diretto lungo l'asse x , con γ costante² (vedi **figura 16.3.1**). Formuliamo dunque il problema nel modo seguente:

$$\gamma \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (16.3.2)$$

da risolversi con le seguenti condizioni al contorno:

$$c(x > 0, y = 0) = c_0; \quad c(x < 0, y) = c(x, y \rightarrow \infty) = c_\infty. \quad (16.3.3)$$

² L'approssimazione di Leveque corrisponde allo scambio molare (o termico) di un fluido in moto laminare nella regione di entrata di un tubo, in cui si specificano le concentrazioni del soluto (o le temperature) alla parete e all'ingresso (vedi problema 16.1). Il caso di un fluido che lambisce un oggetto è più complesso, perché γ dipende da x e, conseguentemente, per la continuità, la componente trasversale dalla velocità non è nulla. Ciononostante, il risultato risulta qualitativamente simile a quello dell'approssimazione di Leveque.

Cerchiamo una soluzione autosimile, con $c = c(\eta)$, dove $\eta = y/g(x)$ e $g(x)$ è una funzione da determinarsi. Considerando che $\partial c / \partial x = -\eta g' c' / g$ e che $\partial^2 c / \partial y^2 = c'' / g^2$, l'equazione (16.3.2) diventa:

$$\frac{d^2 \tilde{c}}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{a^2} g^2 \frac{dg}{dx} \right) \eta^2 \frac{d\tilde{c}}{d\eta} = 0, \quad (16.3.4)$$

dove $\tilde{c} = \frac{c - c_0}{c_\infty - c_0}$, mentre $a = \sqrt{D/\gamma}$ è una distanza caratteristica. Ora, poiché il termine tra parentesi nella (16.3.4) deve essere uguale ad una costante arbitraria (si veda la discussione relativa alla soluzione di Blasius, nel paragrafo 7.2), otteniamo:

$$\left(\frac{1}{3a^2} \frac{dg^3}{dx} \right) = 3 \Rightarrow g^3 = 9a^2 x + C \Rightarrow g = \sqrt[3]{9a^2 x}, \quad (16.3.5)$$

dove abbiamo imposto che la costante di integrazione C sia uguale a zero, in modo che le tre condizioni al contorno originarie si riducano alle seguenti due:³

$$\tilde{c}(0) = 0; \quad \tilde{c}(\infty) = 1. \quad (16.3.6)$$

Dall'equazione risultante,

$$\frac{d^2 \tilde{c}}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{d\tilde{c}}{d\eta} = 0,$$

si ha: $\tilde{c}(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-\xi^3} d\xi + C_2$, e imponendo che le condizioni al contorno siano soddisfatte otteniamo la soluzione autosimile di Leveque:

$$\tilde{c}(\eta) = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\eta e^{-\xi^3} d\xi, \quad (16.3.7)$$

dove $\Gamma(4/3)$ è la funzione gamma:

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \int_0^\infty e^{-\xi^3} d\xi = 0.893. \quad (16.3.8)$$

A questo punto, calcoliamo il flusso molare alla parete:

³ Come nel caso della soluzione di Blasius, se non imponessimo $C=0$ non esisterebbe la soluzione autosimile. Questi ragionamenti si fondano sul presupposto che la soluzione del problema esiste ed è unica; dunque, se ne troviamo una, non dobbiamo cercarne altre.

$$J_{M0} = -D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{D \Delta c}{g(x)} \left(\frac{d \tilde{c}}{d \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{\Delta c}{\Gamma(4/3)} \left(\frac{\gamma D^2}{9x} \right)^{1/3} = 0.538 \Delta c (\gamma D^2)^{1/3} x^{-1/3}. \quad (16.3.9)$$

Il flusso totale, cioè la portata \dot{m} si ottiene integrando da $x=0$ a $x=L$:

$$\dot{m} = W \int_0^L J_{M0} dx = \frac{3^{1/3} \Delta c}{2\Gamma(4/3)} (\gamma D^2)^{1/3} WL^{2/3} = 0.808 \Delta c (\gamma D^2)^{1/3} WL^{2/3} \quad (16.3.10)$$

dove W è l'ampiezza della lastra. In termini adimensionali, definendo il numero di Sherwood come $Sh = \dot{m} / \dot{m}_{diff}$, dove $\dot{m}_{diff} = (D \Delta c / L)(LW)$, otteniamo:

$$Sh = \frac{F}{DW\Delta c} = \frac{3^{1/3}}{2\Gamma(4/3)} \left(\frac{\gamma L^2}{D} \right)^{1/3} = 0.808 Pe_M^{1/3} \quad (16.3.11)$$

dove $Pe_M = UL/D = \gamma L^2/D$ è il numero di Peclet, in cui $U = \gamma L$ è una velocità caratteristica. Da qui vediamo che troviamo la dipendenza $Sh \propto Pe_M^{1/3}$ già vista.⁴

16.4 Approssimazione quasi stazionaria.

Si consideri una particella sferica di carbone, inizialmente di raggio R_0 , lambita da un flusso uniforme di aria. L'ossigeno reagisce alla superficie della particella secondo la reazione irreversibile $C + O_2 \rightarrow CO_2$. Detta U la velocità del flusso d'aria, ν la sua viscosità cinematica e D la diffusività (efficace) dell'ossigeno, vogliamo determinare il tempo necessario alla combustione della particella, supponendo che $Re = UR_0/\nu \ll 1$ e $Pe = UR_0/D \gg 1$.

Cominciamo scrivendo un bilancio molare sulla particella di carbone e otteniamo: $c_C^S d(\frac{4}{3}\pi R^3)/dt = -N_C (4\pi R^2)$, dove c_C^S è la concentrazione di carbonio nella sferetta, mentre N_C è il flusso uscente di carbonio. Considerando che, nella reazione di combustione, ad ogni mole di carbonio (consumato) corrisponde una mole di ossigeno (consumato) ed una di anidride carbonica (generata), N_C è uguale al flusso entrante di ossigeno, N_A . Ora, poiché $Pe \gg 1$, attorno alla particella c'è uno strato limite massico e dunque N_A è uguale al prodotto del coefficiente di scambio massico, k_M [a sua volta uguale a $D/R Sh$, dove Sh è il numero di Sherwood (vedi Eq. (12.2.15)) per la differenza di concentrazione dell'ossigeno a cavallo dello strato limite massico]. Considerando che c_A alla superficie della particella è nulla (perché la reazione è molto rapida e dunque l'ossigeno si consuma appena arriva alla superficie), otteniamo: $c_C^S dR/dt = N_A = -k_M c_A^\infty$, dove c_A^∞ è la concentrazione di ossigeno al di fuori dello strato limite massico. Inoltre, poiché $Re \ll 1$ e $Pe \gg 1$ si ha:

⁴ Nel caso di un fluido che lambisce una sfera, si ottiene il risultato: $Sh = 1.249 Pe^{1/3}$, dove Sh e Pe sono definiti in funzione del raggio R della sfera [si veda, ad esempio Leal (pag. 513-525)].

$$k_M = \frac{D}{R} Sh = a \frac{D}{R} \left(\frac{UR}{D} \right)^{1/3} = a \frac{D^{2/3} U^{1/3}}{R^{2/3}},$$

dove $a=1.249$ è una costante adimensionale [di $O(1)$]. Infine, integrando l'equazione

$$R^{2/3} dR = a D^{2/3} U^{1/3} \frac{c_A^\infty}{c_A^S} dt,$$

tra $t=0$, quando $R=R_0$, e $t=\tau$, quando $R=0$, otteniamo:

$$\tau = \frac{3}{5a} \frac{R_0^{5/3}}{D^{2/3} U^{1/3}} \frac{c_A^S}{c_A^\infty}.$$

In quanto visto sopra, abbiamo supposta valida l'ipotesi di quasi stazionarietà, cioè abbiamo assunto che il tempo di combustione τ è molto maggiore del tempo necessario per raggiungere lo stato stazionario all'interno dello strato limite, $\tau_{ss} \approx \delta_M^2/D \approx \delta_M/k_M$ dove δ_M è lo spessore dello strato limite massico, $\delta_M \approx R_0/Sh$. Dunque:

$$\tau \approx \frac{R_0}{k_M} \frac{c_A^S}{c_A^\infty} \gg \tau_{ss} \approx \frac{\delta_M}{k_M} \Rightarrow \frac{1}{Sh} \frac{c_A^S}{c_A^\infty} \ll 1.$$

16.4 Esercizi

- 16.1** Si consideri un fluido in moto laminare all'interno di un tubo circolare di raggio R e contenente un soluto diluito con frazione molare $c_{A\infty}$. A partire dalla coordinata assiale $z=0$, il tubo è rivestito di un catalizzatore che assorbe il soluto irreversibilmente, in modo che $c_A=0$ alla parete. Si calcoli il flusso totale (*moli/s*) di soluto assorbito dal tubo nella regione $0 < z < L$ in funzione della portata volumetrica, per valori piccoli di L (cosa vuol dire “piccolo”?).
- 16.2** Una gocciolina d'acqua cade con velocità $U \propto (gR)^{1/2}$ (g è l'accelerazione di gravità) in una atmosfera di aria secca. Facendo tutte le ipotesi necessarie, si valuti il tempo necessario all'evaporazione di una gocciolina con raggio iniziale R_0 .
- 16.3** Una particella di carbone brucia su una graticola, investita da un flusso d'aria con velocità U . Facendo tutte le ipotesi necessarie, si valuti il tempo necessario alla combustione di una sferetta di raggio iniziale R_0 .
- 16.4** Una pasticca si consuma mentre discende, lentamente, nell'intestino. Facendo tutte le ipotesi necessarie, si valuti il tempo necessario alla digestione di una sferetta di raggio iniziale R_0 .
- 16.5** Si ripeta l'esercizio svolto nel paragrafo 16.1 supponendo che $c_0 > 0$ e $c_L = 0$.

17. Fenomeni di trasporto in un flusso turbolento.

In questo capitolo intendiamo dare una breve introduzione allo studio dei fenomeni di trasporto in presenza di un flusso turbolento. Il campo di studio è sterminato e noi qui vogliamo soltanto dare alcune linee guida, soprattutto nel contesto di un flusso in un condotto, rimandando a testi specialistici i lettori interessati all'argomento¹.

La maggior parte delle discussioni sui fenomeni di trasporto di tipo convettivo svolte nei capitoli precedenti si riferiscono al caso in cui la convezione è di tipo laminare, mentre il caso di flusso turbolento è stato affrontato finora soltanto in termini di correlazioni empiriche. Infatti, nei fenomeni di trasporto in presenza di flussi laminari si possono spesso introdurre delle ipotesi semplificative, come il fatto che il processo sia stazionario o mono-dimensionale, in modo che al problema si possa dare una trattazione sistematica. Al contrario, i fenomeni turbolenti sono sempre irregolari, transitori e in tre dimensioni e dunque il loro studio è molto complesso. Ecco perché lo studio dei fenomeni turbolenti si fonda spesso sull'uso di correlazioni empiriche, che sono ovviamente valide soltanto entro certe condizioni di utilizzo. Ancor oggi non esiste una trattazione sistematica dei fenomeni turbolenti, anche se essi si possono talvolta simulare numericamente e nonostante l'elevatissimo numero di correlazioni empiriche disponibili.

17.1 Caratteristiche fondamentali della turbolenza

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.5, un flusso turbolento è irregolare, transitorio e tri-dimensionale. In genere, dunque, la velocità locale \mathbf{v} ad ogni istante si può esprimere come la somma tra una velocità media $\langle \mathbf{v} \rangle$ e una fluttuazione $\tilde{\mathbf{v}}$, cioè

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t). \quad (17.1.1)$$

Per valore medio della velocità (o temperatura o concentrazione) in un punto \mathbf{r} e al tempo t si possono intendere due cose. La prima è una media di insieme: supponendo di ripetere l'esperimento tante volte (ad esempio, si faccia scorrere il fluido nel condotto tante volte, con le stesse condizioni iniziali, la stessa pompa, ecc.), la media d'insieme è la media aritmetica della velocità misurata nel punto e all'istante voluti. L'altro significato di velocità media è quello di media temporale o spaziale; nel seguito consideriamo soltanto il caso di media temporale, anche se quello di media spaziale è del tutto analogo. L'esistenza di una media temporale significativa presuppone che il tempo caratteristico delle fluttuazioni sia molto minore del tempo di variazione dei parametri macroscopici, cioè che esista un tempo τ durante il quale la velocità media non cambi, ma durante il quale la velocità istantanea oscilli attorno al suo valore medio moltissime volte. In questo caso, la velocità media temporale si definisce come:

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (17.1.2)$$

¹ Si veda, ad esempio, *Turbulent Flows* di S.B. Pope, Cambridge University Press.

e quindi:

$$\int_{t-\tau}^{t+\tau} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t') dt' = \mathbf{0}. \quad (17.1.3)$$

Ovviamente, quando si può definire la media temporale, cioè quando la velocità media definita in (17.1.2) cambia molto più lentamente della velocità istantanea, la media temporale coincide con la media di insieme². In particolare, quando il campo di moto è macroscopicamente stazionario e mono-dimensionale, come nel caso del flusso in un condotto lungo la direzione z , la velocità media si semplifica:

$$\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t) = \langle v \rangle(\mathbf{r}) \mathbf{1}_z, \quad (17.1.4)$$

mentre la fluttuazione \tilde{v} rimane transiente e tri-dimensionale. L'intensità della turbolenza viene misurata come il valore quadratico medio delle fluttuazioni di velocità, $u = \langle \sqrt{\tilde{v}^2} \rangle$; anche se, in generale, u dipende dalla direzione della fluttuazione di velocità, in realtà non vi dipende troppo, perché nella scala delle lunghezze tipiche delle fluttuazioni il processo è quasi isotropo. Come valore indicativo per la fluttuazione di velocità in direzione assiale, se non siamo troppo vicini alle pareti, abbiamo:

$$u/U \approx 0.1, \quad (17.1.5)$$

dove U è un valore tipico della velocità media (cioè il rapporto tra la portata volumetrica e la sezione del tubo). Nel paragrafo 17.4.2 vedremo che in realtà, invece di 0.1, sarebbe più opportuno scrivere \sqrt{f} , dove f è il fattore di attrito.

L'effetto principale delle fluttuazioni di velocità sta nell'aumento della miscelazione in direzione normale alle linee di flusso che, mentre nel caso laminare avviene soltanto per via diffusiva, nel caso turbolento avviene anche (anzi, generalmente, soprattutto) per via convettiva, fermo restando che la velocità media trasversale è nulla. Questo si traduce in un aumento degli scambi termici, massici e di quantità di moto. Si noti che, mentre l'aumento dello scambio termico e di quello massico sono in genere degli effetti desiderabili, l'aumento dello scambio di quantità di moto determina l'effetto, in genere indesiderato, di un aumento delle perdite di carico. Infatti, nel caso di moto in un condotto a sezione circolare, sappiamo che il flusso di quantità di moto, che (a parte il segno) coincide lo sforzo di taglio alla parete, τ_w , è proporzionale alle con le perdite di carico, Δp , cioè $\tau_w = (R/2) \Delta p/L$, dove R e L sono il raggio e la lunghezza del condotto [vedi Eq. (3.4.5)].

Praticamente, sappiamo che, nel caso di moto turbolento, i flussi di quantità di moto, calore e massa vengono descritti in termini di correlazioni sperimentali. Ad esempio, il flusso di quantità di moto si descrive in funzione del fattore di attrito di Fanning, definito come [vedi Eq. (3.4.7)]:

² Questa affermazione, che del resto è intuitiva, si può comunque dimostrare rigorosamente. I processi aleatori in cui le medie temporali coincidono con le medie d'insieme si dicono *ergodici*.

$$f = \frac{\tau_w}{\rho U^2 / 2} = \frac{\Delta p}{\rho U^2} \frac{R}{L}, \quad (17.1.5)$$

dove ρ è la densità e U la velocità media del fluido. In caso di moto laminare, il fattore di Fanning si può calcolare esattamente come $f = 16/Re$, dove Re è il numero di Reynolds, mentre per moto turbolento, si usano delle correlazioni sperimentali, tra le quali la più semplice è quella di Blasius, $f = 0.0791 Re^{-1/4}$. Da qui è facile vedere che, per $Re=10^5$, cioè in regime turbolento, $f = 4.45 \cdot 10^{-3}$, mentre se per quello stesso valore di Re il flusso si fosse mantenuto laminare avremmo trovato $f = 1.6 \cdot 10^{-4}$, cioè un valore 28 volte più piccolo. In generale, possiamo concludere che il flusso turbolento richiede una quantità di energia maggiore di quella richiesta da un flusso laminare nelle stesse condizioni e dunque la turbolenza comporta una energia dissipata addizionale rispetto al caso laminare.

Lo stesso tipo di analisi si applica anche al flusso di calore (o a quello massico). Questo viene descritto dal coefficiente di scambio termico h , definito come il rapporto tra il flusso termico totale J_T e il salto di temperatura ΔT . Utilizzando l'analogia di Colburn-Chilton [vedi Eq. (12.4.5)], $h = (\kappa/R) (f/2) Re Pr^{1/3}$, dove Pr è il numero di Prandtl, vediamo che, a parità di Re , il flusso termico in regime turbolento è maggiore di quello in regime laminare dello stesso fattore delle perdite di carico.

17.2 Scale dei tempi e delle distanze per il flusso turbolento

Un concetto base nella teoria della turbolenza è che il passaggio da flusso laminare a quello turbolento equivale ad un processo critico, come il cambio di fase: per ragioni non ancora del tutto chiare, il flusso a livello macroscopico si destabilizza e cominciano a formarsi dei vortici (*eddies* in inglese). Sembra quasi che il sistema si ritrovi con un surplus di energia, che non riesce a dissipare in regime di moto laminare e così comincia a girare su sé stesso, per dissipare di più (vedi la discussione qualitativa del paragrafo 2.5). Dunque, questo surplus di energia fornisce inizialmente l'energia cinetica a dei vortici macroscopici. Poiché il numero di Reynolds associato alle dimensioni e velocità di questi vortici è molto alto, gli effetti viscosi sono molto piccoli e la dissipazione di energia a questo livello è trascurabile. Invece di convertirsi in calore, dunque, il surplus di energia meccanica viene trasferita dai vortici (*eddies*) più grandi a quelli più piccoli, in una specie di cascata, finché alla fine si generano dei vortici sufficientemente piccoli che il numero di Reynolds loro associato è intorno all'unità. In corrispondenza di questa scala di lunghezze, l'energia meccanica viene finalmente dissipata.

La potenza (energia per unità di tempo) *addizionale* rispetto al flusso laminare nelle stesse condizioni che viene dissipata dal flusso turbolento per unità di massa si indica in genere con ε , espresso in $m^2 s^{-3}$. Dette L e u la scala di lunghezza macroscopica e la fluttuazione di velocità turbolenta associata, è ragionevole assumere, e lo si verifica anche sperimentalmente, che nei vortici più grandi il surplus di energia ε viene trasferito ai vortici più piccoli in un tempo caratteristico $\tau_L \approx L/u$, in modo che possiamo stimare ε nel modo seguente:

$$\varepsilon \approx \frac{u^2}{\tau_L} = \frac{u^3}{L}. \quad (17.2.1)$$

Per quanto riguarda i vortici più piccoli, l'assunzione chiave è che essi dipendano esclusivamente dalle proprietà locali e cioè soltanto dalla potenza dissipata ε e dalla viscosità cinematica ν (e non da L). Imponendo che la dimensione tipica δ di questi vortici sia del tipo $\delta \approx \nu^\alpha \varepsilon^\beta$, una analisi dimensionale mostra che $\alpha = 3/4$ e $\beta = -1/4$.³ Facendo lo stesso per la velocità caratteristica u_δ e il tempo caratteristico τ_δ , alla fine otteniamo:

$$\delta \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}; \quad u_\delta \approx (\nu \varepsilon)^{1/4}; \quad \tau_\delta \approx \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad (17.2.2)$$

da cui appare che, come previsto, $\tau_\delta \approx \delta/u_\delta$. Queste sono dette le scale microscopiche della turbolenza, oppure scale di Kolmogorov, dal nome dello scienziato russo che le scoprì. Si noti che il numero di Reynolds dei vortici più piccoli, calcolato in base a dimensioni e velocità della microscala, è circa uguale all'unità,

$$Re_\delta = \frac{u_\delta \delta}{\nu} \approx 1, \quad (17.2.3)$$

come deve essere, in base all'ipotesi che alle scale più piccole il sistema deve dissipare il surplus di energia meccanica.

I rapporti tra microscale e macroscale sono:

$$\frac{\delta}{L} \approx Re_L^{-3/4}; \quad \frac{u_\delta}{u} \approx Re_L^{-1/4}; \quad \frac{\tau_\delta}{\tau_L} \approx Re_L^{-1/2}, \quad (17.2.4)$$

dove $Re_L = uL/\nu$ è il numero di Reynolds basato sulla turbolenza macroscopica. La conclusione più importante che possiamo trarre dalla (17.2.4) è che al crescere di Re_L le micro- e macro-scale divergono sempre di più e la turbolenza sviluppa una microstruttura sempre più fine (e dunque difficile sia da determinare sperimentalmente che da simulare numericamente).

Si consideri ad esempio il flusso in un condotto con $Re = 10^5$, dove Re è il numero di Reynolds "normale", cioè calcolato in base alla velocità media U e al diametro del tubo d . I vortici più grandi avranno dimensioni $L \approx d$, mentre u , cioè la dimensione della velocità turbolenta alla macroscale, è data da $u \approx 0.1 U$ [vedi (17.1.5)]. Dunque $Re_L = 0.1 Re = 10^4$ e, applicando (17.2.4), otteniamo: $\delta \approx 10^{-3} d$ e $\tau_\delta \approx 0.1 d/U$, da cui si vede che, se il diametro del condotto è di 10 cm, la dimensione dei vortici microscopici risulta di circa 100 μm . Ora, anche se 100 μm è una dimensione piccola, è pur sempre molto maggiore del libero cammino medio di una molecola di un gas in condizioni ambiente, che è di circa 0.1 μm e dunque per

³ Questo risultato si ottiene sostituendo le unità di ν (m^2/s) e di ε (m^2/s^3) e risolvendo le due equazioni algebriche per le incognite α e β ottenute eguagliando gli esponenti di m (metri) e di s (secondi). Si noti che avremmo trovato lo stesso risultato se avessimo supposto che δ dipende, oltre che da ε , dalla viscosità dinamica μ e dalla densità ρ separatamente.

descrivere i vortici microscopici possiamo continuare ad utilizzare gli strumenti della meccanica dei continui che abbiamo utilizzato finora, come ad esempio l'equazione di Navier-Stokes con la condizione al contorno di non slittamento. Infine, si noti che per $U = 10 \text{ m/s}$ (corrispondente ad aria, con viscosità $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, che fluisce in un condotto del diametro di 10 cm con numero di Reynolds $Re = 10^5$) troviamo $u = 1 \text{ m/s}$ e $\tau_\delta \approx 1 \text{ ms}$. Dunque appare che in genere il tempo caratteristico delle fluttuazioni, τ_δ , è molto minore del tempo tipico di variazione del flusso macroscopico⁴ e risulta perciò valida la definizione (17.1.2) di valore medio inteso come media temporale. Da questa semplice analisi dimensionale, vediamo che per simulare completamente un tale flusso turbolento, (la cosiddetta DNS, *Direct Numerical Simulation*) dobbiamo usare una griglia spaziale con una risoluzione di $100 \mu\text{m}$ e un passo temporale di 1 ms , compito assai arduo.

17.2.1 Le equazioni mediate nel tempo

17.3.1 Le grandezze medie

Come abbiamo visto nel paragrafo 17.1, in un flusso turbolento tutte le variabili si possono considerare come la somma di un valore medio e di uno fluttuante, dove per valore medio si intende una media temporale presa in un intervallo di tempo τ molto maggiore della scala dei tempi delle fluttuazioni, ma molto minore del tempo caratteristico di variazione dei parametri macroscopici. Dunque per velocità, pressione, temperatura e concentrazione possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \tilde{\mathbf{v}}; \quad p = \langle p \rangle + \tilde{p}; \quad T = \langle T \rangle + \tilde{T}; \quad c = \langle c \rangle + \tilde{c}, \quad (17.3.1)$$

dove la parentesi denota il valore medio definito nella (17.1.2),

$$\langle f \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(\mathbf{r}, t') dt'; \quad \langle \tilde{f} \rangle = 0; \quad (17.1.2)$$

dunque,

$$\langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \mathbf{0}; \quad \langle \tilde{p} \rangle = 0; \quad \langle \tilde{T} \rangle = 0; \quad \langle \tilde{c} \rangle = 0. \quad (17.3.3)$$

L'operazione di media soddisfa alle due proprietà seguenti.

a) Mediare due volte equivale a mediare una volta sola, cioè

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle. \quad (17.3.4)$$

⁴ Infatti, il tempo caratteristico di variazione del flusso macroscopico, in genere, è uguale a $d/U = 1 \text{ s}$. In presenza di fronti d'urto o di altre discontinuità, tuttavia, il tempo caratteristico può diventare molto più piccolo finché, quando diventa paragonabile con τ_δ , la definizione di media temporale (17.1.2) non è più valida.

Infatti: $\langle f \rangle = \langle \langle f \rangle + \tilde{f} \rangle = \langle \langle f \rangle \rangle + \langle \tilde{f} \rangle = \langle \langle f \rangle \rangle$.

- b) La media delle derivate spaziali e temporali di una grandezza f sono uguali alle derivate della media, cioè

$$\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle f \rangle. \quad (17.3.5)$$

Infatti: $\langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\tau} \int_{t-\tau}^{t+\tau} \nabla f(\mathbf{r}, t') dt' = \frac{1}{2\tau} \nabla \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(\mathbf{r}, t') dt' = \nabla \langle f \rangle$, e analogamente per la derivata temporale.

17.3.2 Conservazione della massa

Partendo dall'equazione di continuità per fluidi incomprimibili (5.1.18),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (17.3.6)$$

e prendendo la media, applicando (17.3.1) e (17.3.5) otteniamo:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (17.3.7)$$

Sottraendo (17.3.7) dalla (17.3.6) vediamo che anche il campo delle fluttuazioni di velocità è solenoidale:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (17.3.8)$$

17.3.3 Conservazione della quantità di moto

Partiamo dall'equazione di Cauchy (5.2.8) per fluidi incomprimibili:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) \right] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}, \quad (17.3.9)$$

dove \mathbf{T} è il tensore degli sforzi,

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^+) \quad (17.3.10)$$

μ è la viscosità e P è la pressione dinamica (5.6.5), $P = p - \rho g z$. Prendendo la media di (17.3.9), considerando che $\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \rangle$ e che $\langle \mathbf{v} \rangle$ ha divergenza nulla, otteniamo:

$$\rho \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle \right] = \nabla \cdot (\langle \mathbf{T} \rangle + \mathbf{T}^*), \quad (17.3.11)$$

dove

$$\langle \mathbf{T} \rangle = -\langle P \rangle \mathbf{I} + \mu (\nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^+) \quad (17.3.12)$$

è il tensore medio degli sforzi di taglio, mentre

$$\mathbf{T}^* = -\rho \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \quad (17.3.13)$$

è il tensore degli *sforzi turbolenti* o degli *sforzi di Reynolds*.

L'equazione (17.3.11) mostra che l'effetto netto della turbolenza è quello di aumentare gli sforzi di taglio, sommando al valore medio degli sforzi un termine aggiuntivo, gli sforzi di Reynolds, che dipende dalle fluttuazioni di velocità. Va sottolineato che entrambi questi sforzi di taglio descrivono il trasporto della quantità di moto nelle direzioni perpendicolari alla direzione media del moto in virtù di fluttuazioni caotiche delle particelle fluide rispetto alle loro traiettorie medie. Tuttavia, la natura fisica dei due sforzi di taglio sono molto diversi tra loro: lo sforzo di taglio medio si riferisce ad un trasporto di quantità di moto di natura *viscosa*, cioè *diffusiva*, mentre il secondo è fondamentalmente *convettivo*. Nel caso di trasporto diffusivo, infatti, le fluttuazioni di velocità sono dovute all'agitazione termica (cioè il moto browniano), con spostamenti *molecolari* di $O(10^3 \mu\text{m})$, mentre le fluttuazioni turbolente interessano spostamenti macroscopici caratterizzati dalla scala di Kolmogorov di $O(100 \mu\text{m})$.

Sostituendo (17.3.12) e (17.3.13) nella (17.3.11) e considerando (17.3.7), (17.3.8) e (17.3.10), vediamo che l'equazione mediata di conservazione della quantità di moto si può anche scrivere nel modo seguente:

$$\rho \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle \right] = -\langle p \rangle \mathbf{I} + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle - \rho \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle. \quad (17.3.14)$$

17.3.4 Conservazione dell'energia e delle specie chimiche

L'equazione che descrive il trasporto di calore in un fluido incomprimibile è la (5.6.11),

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} T) \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + s, \quad (17.3.15)$$

dove s è il termine di sorgente, mentre

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (17.3.16)$$

è il flusso di calore conduttivo e k la conducibilità termica. Prendendo la media di (17.3.15), considerando che $\langle \mathbf{v} T \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle T \rangle + \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{T} \rangle$ e che $\langle \mathbf{v} \rangle$ ha divergenza nulla, otteniamo:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle \right] = -\nabla \cdot (\langle \mathbf{q} \rangle + \mathbf{q}^*) + \langle s \rangle, \quad (17.3.17)$$

dove

$$\langle \mathbf{q} \rangle = -k \nabla \langle T \rangle \quad (17.3.18)$$

è il flusso di calore conduttivo medio, mentre

$$\mathbf{q}^* = \rho c_p \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{T} \rangle \quad (17.3.19)$$

è il *flusso termico turbolento*. A questo riguardo valgono le stesse considerazioni fatte a proposito del trasporto turbolento di quantità di moto. L'equazione (17.3.17) si può riscrivere come:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle \right] = k \nabla^2 \langle T \rangle - \rho c_p \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle + \langle s \rangle. \quad (17.3.20)$$

Il trasporto di una specie chimica (ad esempio, la specie i -esima) nel caso diluito è assolutamente identico al trasporto di calore e conduce alla seguente equazione media:

$$\frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle c_i \rangle = -\nabla \cdot (\langle \mathbf{J}_i \rangle + \mathbf{J}_i^*) + \langle R_i \rangle, \quad (17.3.21)$$

dove R_i è il termine di sorgente, legato in genere ad una o più reazioni chimiche,

$$\langle \mathbf{J}_i \rangle = -D \nabla \langle c_i \rangle \quad (17.3.22)$$

è il flusso molare diffusivo medio, mentre

$$\mathbf{J}_i^* = \langle \tilde{\mathbf{v}} \tilde{c} \rangle \quad (17.3.23)$$

è il *flusso molare turbolento*. L'equazione (17.3.21) si può riscrivere come:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle c \rangle = D \nabla^2 \langle c \rangle - \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{c} \rangle. \quad (17.3.24)$$

17.3.5 I flussi turbolenti

I valori medi di velocità, temperatura e concentrazione si possono dunque determinare risolvendo le equazioni mediate (17.3.11), (17.3.17) e (17.3.21), a condizione di conoscere \mathbf{T}^* , \mathbf{q}^* e \mathbf{J}_i^* . Questi ultimi, detti *flussi turbolenti*, dipendono dalle fluttuazioni di velocità,

temperatura e concentrazione e indicano i contributi ai flussi di quantità di moto (col segno meno), calore e numero di moli dovuti alla turbolenza. Supponendo che il flusso medio avvenga lungo la direzione z e che la velocità media dipenda da y , le relazioni (17.3.13), (17.3.19) e (17.3.23) si possono riscrivere come:

$$T_{yz}^* = -J_Q = -\rho \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_z \rangle, \quad (17.3.25)$$

$$q_y^* = J_U = \rho c_p \langle \tilde{v}_y \tilde{T} \rangle, \quad (17.3.26)$$

$$J_{iy}^* = \langle \tilde{v}_y \tilde{c}_i \rangle. \quad (17.3.27)$$

Al riguardo, possiamo ripetere quanto abbiamo già osservato commentando la (17.3.13), cioè che l'esistenza dei flussi turbolenti dimostra come l'effetto netto della turbolenza sia quello di aumentare i flussi di quantità di moto, calore e numero di moli, in particolare quelli nelle direzioni perpendicolari alla direzione media del moto. Nonostante i flussi medi e quelli turbolenti descrivano entrambi il trasporto di quantità fisiche dovuto alle fluttuazioni caotiche delle particelle fluide rispetto alle loro traiettorie medie, la natura fisica di questo trasporto è molto diversa nei due casi: il flusso medio si riferisce ad un trasporto di natura molecolare, cioè *diffusiva*, con spostamenti di $O(10^{-3} \mu\text{m})$, mentre il flusso turbolento è fondamentalmente *convettivo*, con spostamenti macroscopici caratterizzati dalla scala di Kolmogorov di $O(100 \mu\text{m})$.

Un aspetto importante dei flussi turbolenti è che essi si annullano alla parete, dove $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Questo significa che i flussi alla parete sono esclusivamente di natura diffusiva e sono determinati in base alle equazioni costitutive (17.3.12), (17.3.18) e (17.3.22). Lontano dalla parete, tuttavia, i flussi turbolenti sono in genere parecchi ordini di grandezza più grandi dei rispettivi flussi medi e dunque $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle T \rangle$ e $\langle c_i \rangle$ ne dipendono fortemente.

A questo punto, vediamo che per calcolare i valori medi delle quantità fisiche di interesse, cioè $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle T \rangle$ e $\langle c_i \rangle$, dobbiamo conoscere il valore dei termini fluttuanti, o più propriamente i loro valori medi dei loro prodotti. Come è facile convincersi, comunque giriamo il problema finiamo sempre per avere più variabili che equazioni⁵. Dobbiamo quindi ricorrere a delle relazioni aggiuntive tra i termini fluttuanti, spesso di natura arbitraria, tenuto conto del fatto che l'origine ultima della instabilità che dà origine alla turbolenza non ci è nota. La cosa più facile da fare è quella di postulare delle *relazioni costitutive turbolente*, tra i termini fluttuanti e le corrispondenti variabili medie. Tra queste relazioni, la più nota è quella della *diffusività turbolenta*, illustrata nel capitolo seguente.

⁵ Questo è quello che in inglese si indica come il problema della *closure*.

17.4 Diffusività turbolente

In questo capitolo, i valori medi di una variabile f sono indicati indifferentemente come $\langle f \rangle$ o \bar{f} .

17.4.1 Il concetto di diffusività turbolente

Abbiamo visto che la turbolenza aumenta il trasporto nelle direzioni perpendicolari al flusso grazie ad un moto caotico delle particelle fluide. La sola differenza con il trasporto diffusivo sono le scale delle lunghezze e dei tempi, che nella turbolenza sono quelle dei vortici più piccoli, mentre nella diffusione sono quelle molecolari. Dunque, sembra naturale correlare i flussi turbolenti con i gradienti delle quantità medie corrispondenti, esattamente come si fa con i flussi molecolari. Supponendo che il flusso medio avvenga lungo la direzione z e che la velocità media dipenda y , ciò significa assumere per le (17.3.25)-(17.3.27):

$$T_{yz}^* = -\rho \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_z \rangle = \rho \varepsilon_Q \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y}, \quad (17.4.1)$$

$$q_y^* = \rho c_p \langle \tilde{v}_y \tilde{T} \rangle = -\rho c_p \varepsilon_U \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (17.4.2)$$

$$J_{iy}^* = \langle \tilde{v}_y \tilde{c}_i \rangle = -\varepsilon_M \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial y}, \quad (17.4.3)$$

dove ε_Q , ε_U e ε_M sono le *diffusività turbolente* di quantità di moto, calore e moli della specie i , rispettivamente. ε_Q , ε_U e ε_M hanno le stesse unità di misura, m^2/s .

Poiché l'origine fisica delle tre diffusività è la stessa, cioè le fluttuazioni caotiche del fluido, è ragionevole aspettarsi che

$$\varepsilon_Q = \varepsilon_U = \varepsilon_M. \quad (17.4.4)$$

L'uguaglianza (17.4.4) tra le diffusività turbolente costituisce la cosiddetta *analogia di Reynolds* ed è del tutto analoga alla egualanza vista nel Capitolo 0 tra le diffusività molecolari di un gas ideale, in cui i processi di diffusione di quantità di moto, energia e massa hanno la stessa natura fisica (cioè le fluttuazioni termiche a livello molecolare). Dunque, a differenza della diffusività molecolare, che è una proprietà del fluido, la diffusività turbolenta è una proprietà del campo di moto. Ovviamente, nota la diffusività turbolenta, possiamo definire la viscosità turbolenta, $\mu_t = \rho \varepsilon_Q$ e la conducibilità termica turbolenta, $\kappa_t = \rho c_p \varepsilon_U$.

Come visto nel paragrafo precedente, la diffusività turbolenta dipende fortemente dalla posizione (a differenza da quella molecolare, che è essenzialmente costante) poiché si annulla alla parete, mentre lontano da essa è molto maggiore di quella molecolare. Ovviamente, trovare una espressione per ε_M che possa indicarne la fortissima dipendenza dalla posizione non è facile e infatti, nonostante i moltissimi tentativi fatti al riguardo, i risultati non sono del tutto soddisfacenti.

17.4.2 Variabili adimensionali di parete

In tutte le applicazioni, ci interessa sapere il comportamento del fluido vicino alla parete, perché in quella regione avviene lo scambio di quantità di moto (che si traduce in forze di resistenza e di portanza), di calore e di massa. Anzitutto, dunque, determiniamo i valori caratteristici della velocità, V_t , e della distanza, δ_t , vicino alle pareti in base a considerazioni dimensionali, partendo dall'ipotesi che esse debbano dipendere dallo sforzo alla parete τ_w , dalla densità ρ e dalla viscosità. Dunque troviamo:

$$V_t = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \quad \delta_t = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \quad (17.4.5)$$

da cui appare che il numero di Reynolds basato su V_t , e δ_t , è uguale a 1, cioè $V_t \delta_t / \nu = 1$. Per cercare di capire meglio il significato di queste scale della velocità e delle distanza consideriamo il flusso in un tubo di raggio R . In questo caso sappiamo dalla (3.4.5) che lo sforzo alla parete è noto, in quanto proporzionale alle perdite di carico, $\tau_w = (R/2)(\Delta p/L)$. Dunque, sostituendo nelle (17.4.5) la definizione del fattore di attrito, $\tau_w = \frac{1}{2} f \rho V^2$, dove V è la velocità media, otteniamo:

$$V_t/V = \sqrt{f/2} \quad \text{e} \quad \frac{\delta_t}{R} = \frac{1}{Re \sqrt{f/2}}, \quad (17.4.6)$$

dove $Re = VR/\nu$, che mostra come l'intensità della turbolenza sia proporzionale a \sqrt{f} , in accordo col commento fatto in coda all'equazione (17.1.5). Ad esempio, per $Re = 10^5$, troviamo $f = 0.00450$, da cui $V_t/V = 4.7 \times 10^{-2}$ e $\delta_t/R = 4.2 \times 10^{-4}$. Al variare di Re , poi, considerando che $f \propto Re^{-1/4}$, vediamo che $V_t/V \propto Re^{-1/8}$ e $\delta_t/R \propto Re^{-7/8}$.

A partire dalle (17.4.5) possiamo definire le seguenti variabili adimensionali di parete (*wall variables*):

$$v^+ = \frac{v}{V_t} = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w/\rho}}; \quad y^+ = \frac{y}{\delta_t} = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} y, \quad (17.4.7)$$

dove y è la distanza dalla parete, che ci saranno utili nel seguito e che si trovano ovunque nella letteratura sui flussi turbolenti.

17.4.3 Calcolo della diffusività turbolenta

Tra tutte le analisi volte a valutare la diffusività turbolenta, la più importante, non foss'altro che per motivi storici, è quella della distanza di miscelamento (*mixing length*) di Prandtl. In essa, si assume la seguente equazione costitutiva:

$$\varepsilon_M = \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right|, \quad (17.4.8)$$

dove ℓ è la mixing length, che deve annullarsi alla parete e crescere allontanandosi. Riscrivendo queste relazioni usando le variabili adimensionali otteniamo:

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \ell^+ \left| \frac{\partial \bar{v}_z^+}{\partial y^+} \right|, \quad (17.4.9)$$

dove $\ell^+ = \ell / \delta_t$. Prandtl ipotizzò che la mixing length cresca linearmente con la distanza dalla parete, cioè $\ell = \kappa y$, dove κ è una costante da determinarsi sperimentalmente. Più tardi, tuttavia, ci si rese conto che l'espressione di ℓ proposta da Prandtl non funziona bene per $y^+ < 30$. Infatti, nella regione molto vicina alla parete, detta substrato viscoso (*viscous sublayer*), non c'è turbolenza e $\varepsilon_M = 0$, cioè $\ell = 0$. Dunque, si preferisce usare correlazioni come quella di van Driest, in cui la mixing length decresce rapidamente molto vicino alla parete,

$$\ell = \kappa y \left(1 - e^{-y/A\delta_t} \right) \Rightarrow \ell^+ = \kappa y^+ \left(1 - e^{-y^+/A} \right), \quad (17.4.10)$$

dove A è una costante da determinarsi sperimentalmente.⁶ Ovviamente, questa correlazione (come le altre) non è valida molto lontano dalla parete; sperimentalmente si vede che la relazione lineare di Prandtl $\ell = \kappa y$ cessa di essere valida per $y/R > 0.1$. Tuttavia, va sottolineato che ciò corrisponde ad un valore elevatissimo di y^+ . Infatti, nel caso di flusso in un condotto con $Re = 10^5$, si vede che $y^+ = 100$ corrisponde ad una distanza $y/R = 0.04$.

17.5 Profilo di velocità alla parete

Si consideri il flusso di un fluido newtoniano in un tubo circolare. Procedendo come nel paragrafo 4.1, riscriviamo l'equazione (4.1.2), tenendo conto che lo sforzo di taglio è adesso la somma di una componente viscosa e di una turbolenta:

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R} = \mu \left(1 + \frac{\varepsilon_M}{\nu} \right) \frac{d\bar{v}_z}{dr}. \quad (17.5.1)$$

Definendo la coordinata $y = R - r$ e considerando che vicino alla parete si ha $y/R \ll 1$, con facili passaggi otteniamo:

$$\frac{dv_z^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + (\varepsilon_M / \nu)} = \frac{1}{1 + \ell^{+2} (dv_z^+ / dy^+)}. \quad (17.5.2)$$

⁶ Si trova $A = 25$.

A questo punto, risolviamo questo problema asintoticamente nei due casi limite $y^+ \rightarrow 0$ e $y^+ \rightarrow \infty$. Nel primo caso, $\varepsilon_M = 0$ e dunque è facile risolvere $dv^+/dy^+ = 1$ con la condizione di non slittamento $v_z^+ = 0$ per $y^+ = 0$, ottenendo:

$$v_z^+ = y^+, \quad y^+ \rightarrow 0. \quad (17.5.3)$$

Nel secondo caso, per $y^+ >> 1$, sappiamo che gli sforzi turbolenti sono molto maggiori di quelli viscosi, cioè $\varepsilon_M >> \nu$; inoltre, vale per la mixing length l'approssimazione lineare di Prandtl, ottenendo:

$$\frac{dv_z^+}{dy^+} = \frac{1}{\varepsilon_M / \nu} = \frac{1}{\ell^{+2} (dv_z^+ / dy^+)} \Rightarrow \frac{dv_z^+}{dy^+} = \frac{1}{\ell^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \Rightarrow v_z^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + c, \quad (17.5.4)$$

dove c è una costante che si determina sperimentalmente. Quest'ultimo è il *profilo logaritmico di velocità*, derivato da von Karman. I valori delle costanti κ e c furono determinati per la prima volta da Nikuradse, che compì un'imponente serie di prove sperimentali (usate in seguito da Moody per tracciare i suoi famosi diagrammi) trovando $\kappa = 0.4$ e $c = 5.5$. Oggi, tuttavia, si preferisce usare i valori $\kappa = 0.41$ e $c = 5.2$, ottenendo:

$$v_z^+ = 2.44 \ln y^+ + 5.2 \quad y^+ \rightarrow \infty. \quad (17.5.5)$$

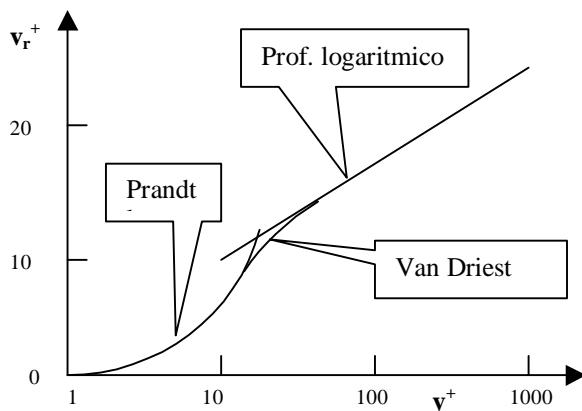


Figura 17.5.1

Usando la correlazione di van Driest (17.4.10) per la mixing length e risolvendo numericamente la (17.5.2), si trova (vedi **figura 17.5.1**) che la soluzione lineare (17.5.3) è valida per $y^+ < 5$ (questo è il cosiddetto *viscous sublayer*), mentre il profilo logaritmico (17.5.5) è applicabile per $y^+ > 30$ (questo è la cosiddetta *log-law region*); ovviamente, per valori intermedi di y^+ (cioè nel cosiddetto *buffer layer*) si ottiene una curva che unisce le due soluzioni asintotiche.

L'aspetto più importante della curva di velocità rappresentata nella **figura 17.5.1** è il suo carattere universale, cioè il fatto che il profilo di velocità, espresso in variabili adimensionali, non dipenda dal numero di Reynolds né da altre caratteristiche del flusso o del fluido.⁷

La analisi precedente, in teoria, non può essere estesa al calcolo del profilo di velocità in tutta la sezione del tubo, poiché l'ipotesi $\ell = \kappa y$ non è valida lontano dalla parete, cioè per $y/R > 0.1$. Tuttavia, per una serie fortunata di cancellazione degli errori, si trova che

⁷ Naturalmente, ritornando alle variabili dimensionali v e y , troveremmo dei profili di velocità che dipendono fortemente da Re .

l'equazione (17.5.5) dà ottimi risultati fino a $y/R=0.3$ e rappresenta con buona approssimazione il profilo di velocità turbolento in tutta la sezione, in ottimo accordo con i risultati sperimentali. Tale profilo è molto ben approssimato dalla seguente equazione:

$$v^+ = 8.56 y^{+1/7}. \quad (17.5.5)$$

Da qui, considerando che al centro del condotto, per $y=R$, la velocità raggiunge il suo valore massimo V_{max} , otteniamo:

$$V_{max} = 8.56 V_t (R / \delta_t)^{1/7}, \quad (17.5.6)$$

da cui vediamo che l'equazione (17.5.5) si può riscrivere come:

$$v = V_{max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/7} = 1.22 V \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7}, \quad (17.5.7)$$

dove abbiamo considerato che $V_{max} = 1.224 V$, dove V è la velocità media. Questo profilo di velocità è rappresentato nella **figura 17.5.2**, dove appare evidente che il profilo di velocità turbolento (linea continua) è molto più schiacciato di quello laminare (infatti la velocità al centro è 1.22 volte maggiore di quella media, invece del doppio). Vicino alla parete, il profilo di velocità turbolento precipita a zero molto rapidamente, al punto che la (17.5.7) (e anche il profilo logaritmico) danno una derivata $dv/dy \rightarrow \infty$ per $r = R$. In realtà, alla parete, il profilo di velocità è lineare, $v^+ = y^+$, cioè banalmente $dv/dy = \tau_w/\mu$. Ciò accade però per $y^+ < 5$, che per $Re = 10^5$ significa $y < 10^{-3} R$ e dunque una tale distanza non è rappresentabile nella **figura 17.5.2**.

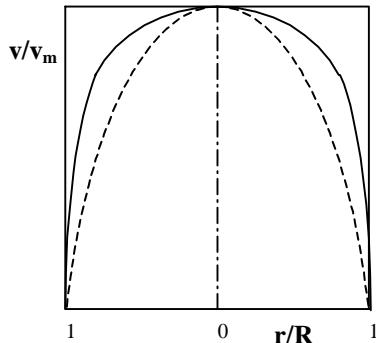


Figura 17.5.2

A questo punto, è facile derivare le perdite di carico, o equivalentemente il fattore di attrito, in funzione della portata, cioè del numero di Reynolds. Infatti, dalla (17.5.6) si ottiene:

$$\frac{V}{V_t} = \frac{8.56}{1.224 \times 2^{1/7}} \left(\frac{VD}{\nu} \right)^{1/7} \left(\frac{v}{V_t \delta_t} \right)^{1/7} \left(\frac{V_t}{V} \right)^{1/7} = 6.33 Re^{1/7} \left(\frac{V_t}{V} \right)^{1/7} \Rightarrow \frac{V}{V_t} = 5.03 Re^{1/8},$$

dove $D=2R$ è il diametro del tubo, $Re=VD/\nu$ è il numero di Reynolds e abbiamo considerato che $V_t \delta_t / \nu = 1$. Da qui, considerando che $f = 2 (V_t/V)^2$, troviamo la formula di Blasius (3.4.10):

$$f = 0.791 Re^{1/4}. \quad (17.5.8)$$

Utilizzando il profilo universale di velocità (17.5.4), invece, otteniamo l'equazione di von Karman-Nikuradse:

$$1/\sqrt{f} = 4 \log(\sqrt{f} \operatorname{Re}) - 0.4, \quad (17.5.8a)$$

molto accurata per tubi lisci. Naturalmente, noto il fattore di attrito f , applicando l'analogia di Colburn-Chilton,

$$Nu = \frac{L}{D} f Re Pr, \quad (17.5.9)$$

possiamo determinare anche i flussi di calore e di massa alle pareti.

17.6 Modelli più complessi

In casi più complessi del semplice flusso in un canale,⁸ il modello della mixing length non fornisce risultati soddisfacenti. Occorre dunque ricorrere a dei modelli più complessi, la maggioranza dei quali si fonda sull'equazione di conservazione dell'energia cinetica turbolenta, definita come

$$K = \frac{1}{2} \langle \tilde{v}^2 \rangle. \quad (17.6.1)$$

Moltiplicando l'equazione di Navier-Stokes (17.3.9) per v , prendendone il valore medio e manipolando il risultato, si vede che K soddisfa la seguente equazione in 2 dimensioni⁹:

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} J_K - \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \varepsilon, \quad (17.6.2)$$

dove J_K è il flusso di K , il secondo termine a secondo membro è un termine di sorgente (cioè che "pompa" energia cinetica nel sistema), mentre ε è il termine di dissipazione turbolenta,

$$\varepsilon = \nu \langle (\nabla \tilde{v}) : (\nabla \tilde{v}) \rangle = \nu \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right)^2 \quad (17.6.3)$$

Queste equazioni sono valide vicino ad una parete, assumendo che le variazioni nella direzione y perpendicolare alla parete siano molto maggiori di quelle nella direzione x del flusso. A questo punto, ipotizzando la seguente equazione costitutiva per J_K ,

$$J_K = -(\nu + \varepsilon_K) \frac{\partial K}{\partial y} \quad (17.6.4)$$

dove ε_K è la diffusività di energia cinetica turbolenta e utilizzando la (17.4.1) per gli sforzi di Reynolds, otteniamo:

⁸ Ad esempio, flusso con gradiente di pressione contrario oppure con forti accelerazioni.

⁹ Si veda W.M. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press, pag. 541-544.

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \varepsilon_K) \frac{\partial K}{\partial y} \right] + \varepsilon_M \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon. \quad (17.6.5)$$

Questa equazione si può usare come base di un modello di turbolenza a una equazione, postulando anzitutto che $\varepsilon_K = \varepsilon_M$, cioè che, in analogia con la (17.4.4), anche la quantità di moto turbolenta diffonda nello stesso modo delle altre quantità fisiche e, soprattutto, stabilendo *a priori* una relazione tra ε , K e ε_M . In base a considerazioni dimensionali, si conclude che:

$$\varepsilon_M = aK^{1/2}\ell_t; \quad \varepsilon = b \frac{K^{3/2}}{\ell_t}, \quad (17.6.6)$$

dove a e b sono costanti da determinarsi sperimentalmente, mentre ℓ_t è una scala di lunghezza turbolenta, che dipende dalla posizione e che di cui dobbiamo dare in qualche modo una espressione matematica. Tuttavia, queste ipotesi intorno a ℓ_t non sono di per sé meno arbitrarie di quelle fatte sulla mixing length e dunque, come è facile convincersi, se usiamo l'equazione (17.6.5) incontriamo gli stessi problemi che con la mixing length.

Ecco perché si è sviluppato il cosiddetto *modello K-ε*. Questo schema è fondato sull'uso di due equazioni, di cui una è la (17.6.5) e l'altra è un'equazione di trasporto di ε . Questa ultima si ricava dalle equazioni di conservazione già viste e dopo lunghe manipolazioni si trova¹⁰:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} J_\varepsilon + G - S, \quad (17.6.7)$$

dove J_ε è il flusso di ε , con la relativa equazione costitutiva

$$J_\varepsilon = -(\nu + \varepsilon_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \quad (17.6.8)$$

mentre G e S sono i termini di generazione e di consumo (sink), che si suppongono correlati nel modo seguente:

$$G = C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left[\varepsilon_M \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad S = -C_2 \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad (17.6.9)$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti da determinarsi sperimentalmente. Combinando le due equazioni (17.6.5) e (17.6.7) e supponendo valide le (17.6.6), otteniamo:

$$\varepsilon_M = C_0 \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad (17.6.10)$$

¹⁰ Per una trattazione accurata del problema si veda C.G. Speziale, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 107-157 (1991).

dove C_0 è una costante da determinarsi sperimentalmente. Dunque, adesso, la diffusività turbolenta può variare liberamente, seguendo le variazioni dell'energia cinetica e della dissipazione turbolente. A questo punto, basta (si fa per dire) risolvere le equazioni di conservazione (17.3.11), (17.3.17) e (17.3.21), con le equazioni costitutive (17.4.1)-(17.4.4). Qui la diffusività turbolenta si suppone espressa dalla (17.6.10) dove K e ε sono delle funzioni della posizione che risolvono le equazioni (17.6.5) e (17.6.7). Il vantaggio di questo metodo è che non occorre specificare a priori nessuna mixing length né scala di lunghezza turbolenta, però occorre determinare sperimentalmente le costanti C_0 , C_1 e C_2 , oltre che specificare i rapporti $\varepsilon_K/\varepsilon_M$ e $\varepsilon_\varepsilon/\varepsilon_M$. A questo riguardo, come abbiamo già visto, è logico supporre che

$$\varepsilon_K = \varepsilon_\varepsilon = \varepsilon_M, \quad (17.6.11)$$

mentre confrontando i risultati delle simulazioni con quelli sperimentali si conclude che

$$C_0 = 0.09; \quad C_1 = 1.44; \quad C_2 = 1.92. \quad (17.6.11)$$

I risultati che si ottengono usando il modello $K-\varepsilon$ sono molto buoni e vanno anche al di là delle più ragionevoli aspettative.

18. La convezione naturale.

Nei capitoli precedenti ci siamo limitati a considerare casi di *convezione forzata*, in cui il movimento di un fluido viene indotto applicando una differenza di pressione tra due regioni o mettendo in moto una delle pareti di contenimento del fluido. Ancora non abbiamo considerato la *convezione libera*, o *convezione naturale*, causata dalle differenze di densità legate ad escursioni termiche o a cambiamenti di composizione del fluido. La convezione libera si incontra molto comunemente in natura. Ad esempio, quando entra in contatto con una superficie verticale calda (ad esempio, le pendici di una montagna riscaldate dal sole), l'aria si riscalda, con conseguente riduzione della sua densità; dunque l'aria risale lungo le falde della montagna, creando quelle correnti ascensionali che sono ben note agli uccelli e in genere a tutti coloro che si dilettano di volo a vela.

L'aspetto cruciale della convezione libera è che velocità e temperatura (o concentrazione) sono strettamente accoppiati tra loro. Ciò significa che, mentre nel caso della convezione forzata il campo di velocità può essere determinato indipendentemente da quello di temperatura (o concentrazione), nella convezione forzata le due variabili devono essere determinate contemporaneamente, rendendo il problema molto più difficile.

Questo capitolo vuole solo dare una prima infarinatura del problema, determinando le equazioni che sono alla base della convezione libera, risolvendole in uno dei pochissimi casi in cui esiste una soluzione esatta e studiandone lo scaling nei casi più generali.

18.1 La approssimazione di Boussinesq

Cominciamo con il riscrivere l'equazione di Navier-Stokes in un modo conveniente. Supponiamo di avere un fluido in cui sia disiolto un soluto con concentrazione c , in modo che la densità sia funzione di c , oltre che della temperatura T . In questo caso, partendo da (5.2.8),

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (18.1.1)$$

dove $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} - p\mathbf{I}$ è il tensore degli sforzi, possiamo definire una specie di pressione dinamica media P tale che

$$\nabla P = \nabla p - \rho_0 \mathbf{g}, \quad (18.1.2)$$

dove ρ_0 è densità (costante) del fluido in un dato stato di riferimento, con temperatura T_0 e concentrazione del soluto c_0 . Sostituendo la (18.1.2) nella (18.1.1) otteniamo:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + (\rho - \rho_0) \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (18.1.3)$$

da cui appare che convezione libera è dovuta alla forza per unità di volume $(\rho - \rho_0)\mathbf{g}$.

In genere, la densità ρ è una funzione della temperatura T e della concentrazione del soluto c , i quali, a loro volta, si possono determinare risolvendo le rispettive equazioni di conservazione dell'energia e della massa¹. Il problema dunque si preannuncia estremamente complesso.

A questo punto, introduciamo la approssimazione di Boussinesq², fondata sull'ipotesi che la variazione massima di densità $\Delta\rho$ sia comunque molto inferiore alla densità media, cioè che

¹ Lo sforzo di taglio e i flussi di calore e di massa vengono espressi in funzione di viscosità, conducibilità termica e diffusività massica, i quali sono anch'essi funzione di T e di c . Tuttavia, tali dipendenze sono molto meno marcate che quella della densità ρ .

$\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$. L'approssimazione di Boussinesq consiste nelle due parti seguenti: a) La densità ρ si può sostituire ovunque con ρ_0 , ad eccezione che nel termine gravitazione $(\rho-\rho_0)\mathbf{g}$ della Navier-Stokes; b) nel campo di variazione di T e c considerati, la densità varia linearmente con T e c , in modo che

$$\rho = \rho_0 - \rho\beta_T(T - T_0) - \rho\beta_c(c - c_0), \quad (18.1.4)$$

dove il coefficiente di espansione termica e il coefficiente di espansione solutale, definiti come

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0; c=c_0}; \quad \beta_c = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{T=T_0; c=c_0}, \quad (18.1.5)$$

si possono considerare costanti. Normalmente $\beta_T > 0$, in modo che ρ decresce al crescere di T , mentre β_c può essere sia positivo che negativo (grossomodo, $\beta_c < 0$ quando la densità del soluto è maggiore di quella del fluido solvente, altrimenti $\beta_c > 0$). Ovviamente, l'ipotesi di Boussinesq non è sempre verificata. Ad esempio, nel caso delle correnti ascensionali dell'aria descritte prima, considerando l'aria come un gas ideale, con $\beta_T = 1/T_0$ ($= 3.4 \times 10^{-3} K^{-1}$ a $20^\circ C$), per una escursione termica $\Delta T = 10^\circ C$ vediamo che β_T varia del 3% e dunque l'approssimazione di Boussinesq darà risultati validi entro pochi percentili. Se invece consideriamo l'acqua liquida vicino al punto di congelamento, β_T cambia molto rapidamente con la temperatura² e dunque la linearizzazione (18.1.4) non è valida.

Nel seguito, consideriamo soltanto il caso di un fluido puro (cioè senza soluto), in cui ρ dipende soltanto dalla temperatura. Riscrivendo l'espansione lineare (18.1.4) come

$$\rho_0/\rho = 1 + \beta_T(T - T_0), \quad (18.1.6)$$

e sostituendola nella (18.1.3) otteniamo la seguente equazione di Navier-Stokes:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - (T - T_0) \beta_T \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (18.1.7)$$

dove $\nu = \mu/\rho_0$. Questa equazione va accoppiata con le altre equazioni di continuità e di conservazione dell'energia:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T, \quad (18.1.8)$$

in cui abbiamo trascurato i termini legati alla compressibilità del fluido e alla dissipazione viscosa. È opportuno sottolineare ancora che, in accordo con l'approssimazione di Boussinesq, in queste equazioni di conservazione abbiamo supposto che l'unico termine in cui si consideri l'influenza della temperatura sulle proprietà fisiche del fluido è il termine gravitazionale che appare nell'equazione di Navier-Stokes. Questo, a prima vista, può apparire assurdo, perché molto spesso la viscosità varia con la temperatura più rapidamente della densità. Tuttavia, basta considerare la natura del problema in esame per convincersi della ragionevolezza dell'ipotesi di Boussinesq: la forza spingente del flusso è dovuta al termine gravitazionale (detto "buoyancy", o galleggiamento, in inglese), che sarebbe assente se la densità fosse costante, anche tenendo conto della variazione

² J.V. Boussinesq (1842-1929) era un fisico francese.

³ Si vede infatti che $\beta_T < 0$ per $0 < T < 4^\circ C$, mentre $\beta_T > 0$ per $T > 4^\circ C$.

della viscosità con la temperatura. Oltretutto, come vedremo in seguito, nella maggioranza dei casi il termine viscoso è piccolo rispetto a quello gravitazionale e dunque supporre costante la viscosità risulta doppiamente ragionevole.

18.2 Flusso in un canale verticale

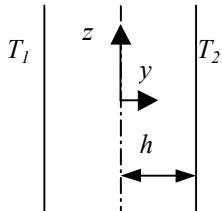


Figura 18.2.1

Questo è uno dei pochissimi casi in cui un problema di convezione naturale ammette una soluzione esatta. Si consideri un canale verticale di ampiezza $2h$ e altezza indefinita, le cui siano mantenute a due temperature diverse, T_1 e $T_2 = T_1 + \Delta T$, con $\Delta T > 0$ (vedi **figura 18.2.1**). Ovviamente, il fluido che sta a contatto con la parete fredda tende a scendere, mentre quello che sta dall'altra parte è più caldo e tende a salire. Dunque, avendo supposto infinito il condotto, la velocità v è monodirezionale lungo l'asse z e dipende soltanto da y , cioè $v=v(y)$. Analogamente, anche la temperatura del fluido dipende soltanto da y , cioè $T=T(y)$; dunque, poiché lungo la direzione y non c'è convezione, la distribuzione di temperatura in quella direzione si mantiene lineare. Infatti, risolvendo la (18.1.8) otteniamo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad T(-h) = T_1; \quad T(h) = T_2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(\eta) = \frac{T - T_m}{\Delta T} = \frac{1}{2}\eta, \quad (18.2.1)$$

dove $T_m = (T_1 + T_2)/2$ è la temperatura media, mentre $\eta = y/h$ è la variabile adimensionale. Passiamo ora alla equazione di conservazione della quantità di moto (18.1.7). Anzitutto, considerando che \mathbf{g} e \mathbf{v} sono diretti nella direzione z , vediamo che la pressione p è costante lungo y e dunque dipende soltanto da z . Dunque, prendendo come temperatura riferimento la temperatura media T_m , la (18.1.7) diventa:

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{d\eta^2} = -\frac{1}{2} Gr \eta + \frac{h^3}{\nu^2 \rho} \frac{dP}{dz}, \quad (18.2.2)$$

dove $\tilde{v} = v/(\nu/h)$ è la velocità che è stata resa adimensionale utilizzando la velocità (ν/h) dovuta alle forze viscose, mentre Gr è il cosiddetto numero di Grashof,

$$Gr = \frac{h^3 g \beta_T \Delta T}{\nu^2} = \frac{h^3 g (\Delta \rho / \rho)}{\nu^2}, \quad (18.2.3)$$

che esprime il rapporto tra le forze gravitazionali e le forze viscose. Risolvendo la (18.2.2) con le condizioni al contorno $\tilde{v}(\pm 1) = 0$ e considerando che il gradiente di pressione dP/dz è costante, otteniamo il seguente profilo di velocità (vedi **figura 18.2.2**):

$$\tilde{v}(\eta) = \frac{1}{12} Gr (\eta - \eta^3) - \frac{h^3}{2\nu^2 \rho} \frac{dP}{dz} (1 - \eta^2). \quad (18.2.4)$$

Come era prevedibile, data la linearità del problema, la velocità è la somma delle velocità indotte dalle due forze spingenti, cioè la forza di galleggiamento (buoyancy) e quella di pressione. La prima componente è costituita da un profilo cubico a media zero, mentre la seconda, ovviamente, è il profilo parabolico di Poiseuille in un canale. Dunque, considerando che

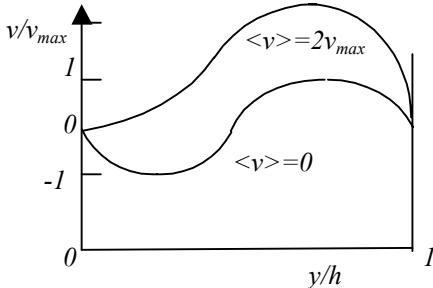


Figura 18.2.2

otteniamo:

$$\langle \tilde{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{v}(\eta) d\eta = -\frac{h^3}{3\nu^2 \rho} \frac{dP}{dz}, \quad (18.2.5)$$

vediamo che possiamo determinare dP/dz conoscendo il flusso netto di fluido, cioè il flusso diretto verso l'alto meno quello verso il basso. In particolare, supponendo che non ci sia alcun flusso netto, cioè che $\langle \tilde{v} \rangle = 0$, vediamo che il gradiente di pressione deve essere nullo, cioè $dP/dz = 0$. Questo è ragionevole, perché nella pressione P c'è già compreso un termine gravitazionale *medio* [vedi la (18.1.2)]. In questo caso

$$\tilde{v}(\eta) = \frac{1}{12} Gr (\eta - \eta^3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{\max} (\eta - \eta^3), \quad (18.2.6)$$

dove $\tilde{v}_{\max} = h v_{\max} / \nu = Gr / 18\sqrt{3}$ è la velocità massima (o minima), raggiunta per $\eta = \pm 1/\sqrt{3}$.

Quando invece c'è un flusso netto $\langle v \rangle$, considerando la (18.2.5) otteniamo con facili passaggi (vedi **figura 18.2.2**):

$$v(\eta) = \frac{3}{2} [\sqrt{3} \tilde{v}_{\max} (\eta - \eta^3) + \langle v \rangle (1 - \eta^2)]. \quad (18.2.7)$$

18.3 Analisi dimensionale

Consideriamo la convezione naturale di un fluido con temperatura T_∞ attorno ad un corpo macroscopico di dimensioni L e mantenuto a temperatura $T_0 = T_\infty + \Delta T$. Osservando l'equazione di Navier-Stokes (18.1.7), vediamo che la forza spingente gravitazionale può essere bilanciata dalla forza viscosa o da quella inerziale, a seconda che il numero di Reynolds sia piccolo o grande. Nel primo caso, detta U_{cv} la velocità caratteristica, otteniamo:

$$\nu U_{cv} / L^2 = g \beta_T \Delta T \Rightarrow U_{cv} = \frac{L^2 g \beta_T \Delta T}{\nu}. \quad (18.3.1)$$

Questo è lo scaling ottenuto nel problema del paragrafo 18.2, in cui infatti le forze inerziali sono identicamente nulle. Si noti che in questo caso la pressione caratteristica è $P_c = \mu U_{cv} / L$, in modo da bilanciare le forze viscose. In questo caso, definendo le seguenti variabili adimensionali

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / U_{cv}; \quad \tilde{T} = (T - T_\infty) / \Delta T; \quad \tilde{P} = P / (\mu U_{cv} / L); \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / L, \quad (18.3.2)$$

l'equazione di Navier-Stokes in condizioni stazionarie diventa, in forma adimensionale:

$$Gr \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{T} \mathbf{1}_g + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (18.3.3)$$

dove $\tilde{\nabla} = L\nabla$, $\mathbf{1}_g$ è un vettore unitario nella direzione della forza di gravità, mentre Gr è il numero di Grashof (18.2.3),

$$Gr = \frac{L^3 g \beta_T \Delta T}{\nu^2} = \frac{L^3 g \Delta \rho}{\nu^2}, \quad (18.3.4)$$

Questo scaling viene utilizzato in due casi, quando il termine inerziale è identicamente nullo, come nell'esempio del paragrafo 18.2, oppure quando $Gr \ll 1$. In un caso generico, tuttavia, in cui il moto non sia unidirezionale, il termine inerziale non si annulla e il numero di Grashof è quasi sempre elevato. Infatti, come si vede nel problema 18.2, possiamo scrivere:

$$Gr = \gamma L^3 \Delta T, \text{ dove } \gamma = \beta_T g / \nu^2$$

è una proprietà del fluido alla temperatura di riferimento T_0 . Ad esempio, per $T_0=50^\circ\text{C}$ troviamo che $\gamma = 1.2 \times 10^{10} \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ per l'acqua, mentre $\gamma = 1.0 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ per l'aria. Dunque vediamo che anche per corpi "piccoli" di 1 cm e con $\Delta T=10^\circ\text{C}$ il numero di Grashof è molto alto.

Passiamo dunque al secondo scaling, ottenuto bilanciando la forza gravitazionale con quella inerziale:

$$U_c^2 / L = g \beta_T \Delta T \Rightarrow U_c = \sqrt{L g \beta_T \Delta T}. \quad (18.3.5)$$

Da qui vediamo che il numero di Grashof si può interpretare come il quadrato del numero di Reynolds basato su U_c :

$$Gr = \frac{L^3 g \beta_T \Delta T}{\nu^2} = \left(\frac{U_c L}{\nu} \right)^2. \quad (18.3.6)$$

Il caso di $Gr \gg 1$ nella convezione naturale dunque corrisponde al caso $Re \gg 1$ nella convezione forzata. In questo caso, definendo le seguenti variabili adimensionali, in cui la pressione caratteristica è $P_c = \rho U_c^2$, in modo da bilanciare le forze inerziali,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / U_c; \quad \tilde{T} = (T - T_\infty) / \Delta T; \quad \tilde{P} = P / (\rho U_c^2); \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / L, \quad (18.3.7)$$

l'equazione di Navier-Stokes in condizioni stazionarie diventa, in forma adimensionale:

$$\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{T} \mathbf{1}_g + \frac{1}{Gr^{1/2}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (18.3.8)$$

Nello stesso modo, otteniamo le altre equazioni di conservazione (18.1.8) in forma adimensionale:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0; \quad \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{1}{Pr Gr^{1/2}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}, \quad (18.3.9)$$

dove $Pr = \nu/\alpha$ è il numero di Prandtl. Si noti che il gruppo

$$Gr^{1/2} Pr = \left(\frac{U_c L}{\nu} \right) \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) = \left(\frac{U_c L}{\alpha} \right) \quad (18.3.10)$$

ha lo stesso ruolo del numero di Peclet nella convezione forzata.

18.4 Lo strato limite nella convezione naturale

Come abbiamo visto, nella convezione naturale il numero di Grashof ha lo stesso ruolo del numero di Reynolds nella convezione forzata. Dunque, ci aspettiamo che quando $Gr \gg 1$ si formi uno strato limite alla superficie del corpo. Infatti, dalla (18.3.8) vediamo che avvicinandosi alla superficie del corpo il termine inerziale diminuisce progressivamente, mentre il termine viscoso aumenta, finché alla frontiera dello strato limite diventano dello stesso ordine di grandezza. Qui, i quattro termini che compaiono nella (18.3.8) sono dello stesso ordine della forza spingente gravitazionale e del gradiente di pressione e dunque di $O(1)$. Dunque otteniamo la seguente espressione per lo spessore δ dello strato limite,

$$\frac{1}{Gr^{1/2}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} \approx \frac{1}{Gr^{1/2}} \frac{1}{\tilde{\delta}^2} \approx 1 \Rightarrow \tilde{\delta} = \frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{Gr^{1/4}}, \quad (18.4.1)$$

del tutto analoga alla relazione $\delta/L \approx Re^{-1/2}$, valida nella convezione forzata. Si noti tuttavia che, mentre nel caso della convezione forzata all'interno dello strato limite il profilo di velocità risulta approssimativamente lineare, nella convezione forzata il profilo è più complesso, dovuto alla presenza di un termine aggiuntivo, cioè della forza spingente gravitazionale.

Passiamo ora a studiare il caso dello scambio termico. Dalla (18.3.9) vediamo che quando si ha $Pr Gr^{1/2} \gg 1$ (l'equivalente di avere un numero di Peclet elevato), siamo in presenza di uno strato limite termico di spessore, diciamo, δ_T . Come per la convezione forzata, consideriamo separatamente i due casi, per $Pr \ll 1$ e per $Pr \gg 1$.

Quando $Pr \ll 1$, sappiamo che $\delta_T \gg \delta$. In questo caso, a distanza δ_T dalla parete ci troviamo al di fuori dello strato limite e la velocità del fluido in direzione longitudinale è di $O(U_c)$; dunque $\tilde{v} \approx 1$ e $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \approx 1^4$. Perciò, bilanciando i due termini della (18.3.9) otteniamo:

$$\frac{1}{Pr Gr^{1/2}} \frac{1}{\tilde{\delta}_T^2} \approx 1 \Rightarrow \tilde{\delta}_T = \frac{\delta_T}{L} \approx Gr^{-1/4} Pr^{-1/2}. \quad (18.4.2)$$

Anche questo caso è del tutto analogo a quello con convezione forzata, in cui si ottiene la relazione $\delta_T/L \approx Pe^{-1/2} = Re^{-1/2} Pr^{-1/2}$.

Quando $Pr \gg 1$, sappiamo che $\delta_T \ll \delta$. In questo caso, a distanza δ_T dalla parete ci troviamo all'interno dello strato limite, dove non conosciamo la velocità del fluido. Infatti, mentre nella convezione forzata sappiamo che il profilo di velocità nello strato limite è lineare e dunque $v \approx U \delta_T / \delta$, qui possiamo solo ipotizzare che, ragionevolmente, fissato Gr (e dunque fissata l'ampiezza dello strato limite), al crescere di Pr , δ_T diventi più piccolo e la velocità longitudinale del fluido alla frontiera dello strato limite termico decresca⁴. Perciò scriviamo:

$$\delta_T / \delta = Pr^{-a}; \quad \tilde{v} \approx Pr^{-b}, \quad (18.4.3)$$

dove a e b sono due costanti positive, da determinarsi bilanciando i termini appropriati nella (18.3.8) e (18.3.9). Nella (18.3.8), dobbiamo considerare che, alla frontiera dello strato limite

⁴ Si ricordi che il gradiente è preso nella direzione longitudinale e dunque è di $O(1)$.

⁵ Nella convezione forzata, poiché $v \approx U \delta_T / \delta$, vediamo che $a=b$. Inoltre, da $\delta/L \approx Re^{-1/2}$ e $\delta_T/L \approx Re^{-1/2} Pr^{-1/3}$, otteniamo: $a=b=1/3$.

termico, il termine viscoso prevale su quello convettivo e deve bilanciare la forza spingente, che è di $O(l)$. Dunque otteniamo:

$$\frac{1}{Gr^{1/2}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} \approx 1 \Rightarrow \frac{1}{Gr^{1/2}} \frac{\tilde{v}}{\tilde{\delta}_T^2} \approx Pr^{2a-b} \approx 1 \Rightarrow 2a - b = 0. \quad (18.4.4)$$

Si noti che nel caso della convezione forzata la forza viscosa all'interno dello strato limite termico non è bilanciata da niente e dunque ne consegue che $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$, per cui u è lineare in y e $a=b$.

Una analisi analoga fatta sulla (18.3.9) conduce al seguente risultato:

$$\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \approx \tilde{v} \approx Pr^{-b} = \frac{1}{Pr Gr^{1/2}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \approx \frac{1}{Pr Gr^{1/2}} \frac{1}{\tilde{\delta}_T^2} \approx Pr^{-1+2a} \Rightarrow 2a + b = 1. \quad (18.4.5)$$

Dunque, da $2a-b=0$ e $2a+b=1$ otteniamo:

$$a = \frac{1}{4}; \quad b = \frac{1}{2}. \quad (18.4.6)$$

Si noti che nel caso di convezione forzata è valida la (18.4.5) e dunque, da $a=b$, si ottiene $a=b=1/3$.

Infine, possiamo concludere che per $Gr \gg l$, quando $Pr \gg 1$ si ha:

$$\frac{\delta_T}{L} \approx \frac{\delta}{L} Pr^{-1/4} \approx Gr^{-1/4} Pr^{-1/4} = Ra^{-1/4}, \quad (18.4.7)$$

dove abbiamo definito il cosiddetto numero di *Rayleigh*,

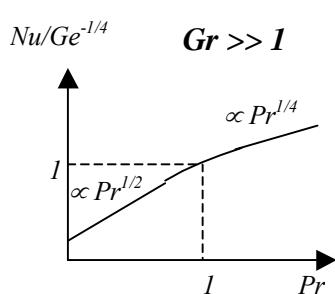
$$Ra = Gr Pr = \left(\frac{L^3 g \beta \Delta T}{\nu^2} \right) \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) = \frac{L^3 g \beta \Delta T}{\nu \alpha}. \quad (18.4.8)$$

Si noti inoltre che dalla (18.4.6) è facile vedere che $v/U_c \approx (\delta_T/\delta)^2$, che mostra come il profilo di velocità alla parete sia quadratico, invece che lineare, come per la convezione forzata.

Adesso calcoliamo il flusso termico alla parete, $J_U = -k (\partial T / \partial y)_w$, dove y è la coordinata perpendicolare alla parete. Otteniamo facilmente: $J_U \approx h \Delta T$, dove $h = k / \delta_T$ e dunque, definendo il numero di Nusselt, $Nu = hL/k$, otteniamo: $Nu = L / \delta_T = 1 / \tilde{\delta}_T$.

Possiamo dunque riassumere i risultati visti come segue (vedi **figura 18.4.1**):

$$\begin{aligned} Nu &= C_1 Gr^{1/4} Pr^{1/2} \quad \text{per } Gr \gg l \text{ e } Pr \ll 1, \\ Nu &= C_2 Gr^{1/4} Pr^{1/4} \quad \text{per } Gr \gg l \text{ e } Pr \gg 1, \end{aligned} \quad (18.4.9)$$



dove C_1 e C_2 sono due costanti che si possono calcolare soltanto conoscendo il profilo di temperatura nello strato limite e che dunque dipendono dalla particolare geometria del corpo lambito dal flusso di convezione naturale. Ad esempio, nel caso di un piatto verticale, il calcolo è stato effettuato da Le Fevre (1956), ottenendo $C_1 = 0.8005$ e $C_2 = 0.6703$, in cui la distanza caratteristica L è uguale alla coordinata z longitudinale (come nella soluzione di Blasius).

Figura 18.4.1

Si noti che, mentre la soluzione per $Pr \ll 1$ è valida soltanto quando veramente Pr è molto piccolo, la soluzione per $Pr \gg 1$ continua ad essere valida anche per valori di Pr moderati (quando Pr è all'incirca uguale a 1 la dipendenza da Pr non è più cruciale, ovviamente). La ragione di questa inaspettata fortuna è la stessa che nel caso di convezione forzata e il lettore è rimandato alla discussione di paragrafo 12.3.

18.5 Correlazioni sperimentali

Nel caso del flusso di un fluido a temperatura T_∞ attorno ad un corpo a temperatura T_0 i risultati sperimentali sono in buon accordo con la semplice correlazione:

$$Nu = C(Gr Pr)^n, \quad (18.5.1)$$

dove le costanti C e n e la distanza caratteristica L in base alla quale si determina Gr variano a seconda del caso.

Forma	Ra	L	C	n
Piatto verticale	$10^4 - 10^9$	altezza verticale	0.58	0.25
Cilindro verticale	$10^9 - 10^{13}$	lunghezza assiale	0.02	0.4
Cilindro orizzontale	$10^4 - 10^9$	diametro	0.53	0.25
Sfera	$10^4 - 10^9$	raggio	0.53	0.25
Parallelepipedo	$10^4 - 10^9$	$L = I/(I/L_{orizz} + I/L_{vert})$	0.53	0.25
Piatto orizzontale A×B				
Superficie superiore più calda	$10^4 - 10^7$	$L = (A+B)/2$	0.54	0.25
Superficie superiore più fredda	$10^7 - 10^{11}$		0.15	0.33
	$10^5 - 10^{11}$		0.58	0.20
Disco orizzontale: caso identico al piatto orizzontale		$L = 0.9 D$		

Nel caso invece della convezione naturale in uno spazio chiuso, le correlazioni a disposizioni sono poche. Quando un fluido è confinato in una regione compresa tra due piatti paralleli tenuti a temperature diverse, si instaura una circolazione come indicato nella **figura 18.5.1**. Definendo i numeri di Grashof e di Nusselt in funzione della distanza tra i piatti, $Gr = d^3 g \beta \Delta T / \nu^2$ e $Nu = h d / k$, si trovano sperimentalmente le due correlazioni seguenti, a seconda che il fluido sia un liquido o un gas:

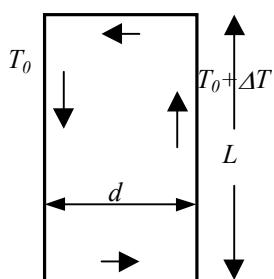


Figura 18.5.1

- Liquido: $Nu = 0.42 (Gr Pr)^{0.25} Pr^{0.012} (L/d)^{-0.3}$, valido per $10^4 < Ra < 10^7$ e per $10 < (L/d) < 40$.
- Gas: $Nu = 0.2 (Gr Pr)^{0.25} (L/d)^{-0.11}$, valido per $10^3 < Ra < 10^5$ e per $10 < (L/d) < 40$.

Si noti che, nel caso di gas, il coefficiente di scambio termico h per convezione naturale risulta tipicamente uguale a $3-20 \text{ W/m}^2\text{K}$ e dunque è generalmente più piccolo di quello per convezione forzata, che risulta di $10-100 \text{ W/m}^2\text{K}$. Invece, nel caso di liquidi, h risulta di $100-500 \text{ W/m}^2\text{K}$ sia per convezione naturale che per convezione forzata.

18.6 Esercizi

- 18.1** Cosa avremmo ottenuto se nel paragrafo 18.2 avessimo scelto una temperatura di riferimento diversa da quella media?
- 18.2** Si calcoli la velocità massima dell'aria o dell'acqua compresa tra due piastre verticali e infinitamente estese, distanti 2 cm e tenute a 25°C e 75°C .
- 18.3** Dell'aria a pressione atmosferica è intrappolata tra due lastre di vetro verticali alte $L=0.5\text{ m}$ e distanti $d=15\text{ mm}$, tenute a temperature di 40°C e 100°C . Si calcoli il flusso di calore uscente.

19. L'irraggiamento

19.1 La legge di Stefan-Boltzmann

La radiazione è l'energia emessa da un qualsiasi oggetto materiale come conseguenza della sua temperatura. A differenza delle altre modalità del trasporto di energia, cioè conduzione e convezione, la radiazione non necessita della presenza di un mezzo materiale e può aver luogo anche nel vuoto (si pensi all'energia del sole). Consiste infatti di onde elettromagnetiche che si muovono nello spazio alla velocità della luce.

Lo studio dell'irraggiamento (per lo più da un punto di vista ingegneristico) è più semplice di quello della convezione, perché i dettagli del campo elettromagnetico e di quello termico non sono importanti; ai fini pratici, ci interessa solo conoscere la temperatura delle superfici irradianti, applicando l'equazione di Stefan-Boltzmann. Data la sua importanza questa legge viene ora studiata in dettaglio.

Si consideri una scatola chiusa di volume V , con delle pareti perfettamente elastiche e supponiamo che al suo interno siano contenute N particelle. La pressione p esercitata da queste particelle sulle pareti è uguale alla forza per unità di superficie, cioè alla quantità di moto trasmessa alle pareti per unità di tempo e di superficie. Ora si consideri che 1) il flusso di quantità di moto dovuto ad una singola particella è uguale a qv , dove v è la velocità e q la quantità di moto della particella; 2) per ogni urto la particella trasmette alla parete una quantità di moto doppia, cioè $2qv$; 3) soltanto $1/6$ delle particelle si muovono con velocità ortogonale alla parete e nella direzione diretta verso la parete. Concludiamo che:

$$p = \frac{1}{3} n q v . \quad (19.1.1)$$

Quando le particelle sono fotoni, la velocità è quella della luce, cioè $v=c$, mentre la quantità di moto è legata all'energia u_1 del singolo fotone¹ tramite la relazione $u_1=qc$. Dunque:

$$p = \frac{1}{3} n \frac{u_1}{c} c = \frac{1}{3} n u , \quad (19.1.2)$$

dove $u=n u_1$ è la densità volumetrica di energia interna, $u=U/V$.

Si noti che nel caso di gas ideale la (19.1.1) si può riscrivere come: $p=(1/3)nmv^2$, dove v^2 è la velocità quadratica media. Dunque, considerando che $mv^2=3kT$, dove k è la costante di Boltzmann, otteniamo la nota equazione di stato $p = nkT$, cioè $p\tilde{V} = RT$, dove \tilde{V} è il volume specifico molare, $R=N_A k$ e N_A è la costante di Avogadro. Ovviamente, poiché l'energia specifica del gas ideale è data da $u=(3/2)nkT$, vediamo che $p = (2/3)u$. Dunque, a parità di densità di energia interna, la pressione di un gas di fotoni (cioè dovuta alla radiazione) è uguale alla metà di quella di un gas ideale.

A questo punto, si applichi l'equazione dell'energia:

¹ Questa relazione si può interpretare classicamente associando ad un fotone di frequenza ν una massa m , dovuta esclusivamente alla sua velocità, cioè $mc^2=h\nu$, dove h è la costante di Planck. Dunque, considerando che $q=mc$, dalla (19.1.1) si ottiene la (19.1.2).

$$dU = TdS - pdV \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \quad (19.1.3)$$

dove abbiamo applicato l'equazione di Maxwell, $(\partial S/\partial V)_T = (\partial p/\partial T)_V$. Poiché $U=uV$ e $p=u/3$, dove si suppone che u dipenda solo da T , otteniamo:

$$u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3},$$

da cui:

$$u = bT^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (19.1.4)$$

dove b è una costante di integrazione. Per comodità, in base a quanto vedremo in seguito, abbiamo indicato $b=4\sigma/c$, dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann.²

Noto u , possiamo determinare tutto quello che ci occorre. Ad esempio, per determinare l'energia libera di Helmholtz, $a = u - Ts$, si consideri che $da = -sdT - pdV$ e, poiché $a=a(T)$, otteniamo: $s = -(\partial a/\partial T)_V = da/dT$. Dunque:

$$a - T \frac{da}{dT} = u \Rightarrow a = -\frac{1}{3}bT^4 = -\frac{1}{3}u = -p. \quad (19.1.5)$$

Si noti che, nel caso di gas ideale, è l'energia interna specifica molare (o massica) a dipendere soltanto da T , non l'energia specifica volumetrica, come nel caso della radiazione. Infatti, interpretando la (19.1.3) come una relazione molare, $(\partial U/\partial V)_T = 0$, ritroviamo la relazione $U \propto T$, cioè $U = Nc_v T$, dove c_v è il calore specifico costante.

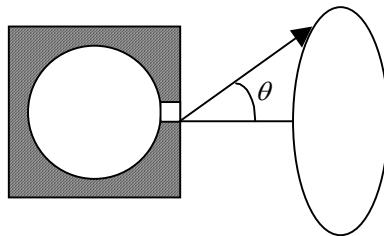


Figura 19.1.1

A questo punto, possiamo determinare il flusso di energia uscente da una cavità a temperatura T (vedi **figura 19.1.1**). Anzitutto, si consideri che data la totale isotropia dell'irraggiamento uscente dalla cavità, ogni elemento del suo volume emette uniformemente un flusso di energia in tutte le direzioni. Dunque, poiché il flusso totale di energia è uguale a cu , il flusso riferito all'angolo solido $d\Omega$ è $uc d\Omega / 4\pi$. Pertanto, l'energia d'irraggiamento che cade nell'unità di tempo sull'unità di superficie formando un angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$ con la sua normale, è $cu \cos\theta d\Omega / 4\pi$, dove $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Dunque, integrando si ottiene:

$$J_U = \int_0^{\pi/2} \frac{uc}{4\pi} \cos(\theta) 2\pi \sin(\theta) d\theta = \frac{uc}{4}. \quad (19.1.6)$$

² Un modo semplice per spiegare che $u \propto T^4$ consiste nel tener presente che in ogni direzione spaziale il numero di gradi di libertà è proporzionale a T . Ad esempio, se nella cavità i fotoni hanno tutti la stessa frequenza ν , avremo $kT/h\nu$ gradi di libertà nella direzione x . Ad ognuno di essi si associano $kT/h\nu$ gradi di libertà nella direzione y e ad ognuno di essi si associano $kT/h\nu$ gradi di libertà nella direzione z . Dunque, in 3 direzioni, ci sono $\propto T^3$ gradi di libertà e ad ognuno di essi è associata un'energia $kT/2$.

In conclusione, otteniamo:

$$J_U = \sigma T^4. \quad (19.1.7)$$

Una teoria completa della radiazione di corpo nero fu determinata da Planck, in termini dell'energia di irraggiamento $du(\omega)$ con energie (ovvero frequenze) comprese tra ω e $\omega+d\omega$,

$$du(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (19.1.8)$$

dove $\hbar = h/2\pi$, h è la costante di Planck, $\omega = 2\pi\nu$ e ν è la frequenza. Questa è la celebre *distribuzione di Planck*, che presenta un massimo in corrispondenza della frequenza ω_m , con

$$\hbar\omega_m = 2.822 kT \quad \text{da cui : } \lambda_m T = 2898 \mu m^\circ K, \quad (19.1.9)$$

dove $\lambda = 2\pi c/\omega = c/\nu$ è la lunghezza d'onda. Questa è la *legge dello spostamento di Wien*, da cui si vede che, al crescere della temperatura, un corpo irradia a frequenze sempre più alte. Integrando la distribuzione di Planck su tutte le frequenze e considerando che

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

si ottiene la (19.1.4):

$$u = \int_0^\infty du(\omega) = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4.$$

Da qui, possiamo calcolare esattamente il valore numerico della costante di Stefan-Boltzmann,

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \frac{g}{s^3 K^4} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (19.1.10)$$

In base al teorema dell'equipartizione della fisica statistica classica, ad ogni grado di libertà corrisponde un'energia $kT/2$. Da ciò si ottiene la distribuzione di Rayleigh-Jeans, che corrisponde al limite della distribuzione di Planck per piccole frequenze, oppure per $\hbar \rightarrow 0$:

$$du(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega.$$

(Si noti che questa funzione, ovviamente, non contiene la costante di Planck). L'integrale della distribuzione di Rayleigh-Jeans su tutte le frequenze diverge: questo ha costituito la base della

cosiddetta "catastrofe ultravioletta", un paradosso reso ancora più strano dal fatto che si conosceva il risultato, finito, di tale integrazione poiché l'equazione (19.1.4) era già nota.

19.2 Emissione e assorbimento della radiazione

19.2.1 La legge di Kirchhoff

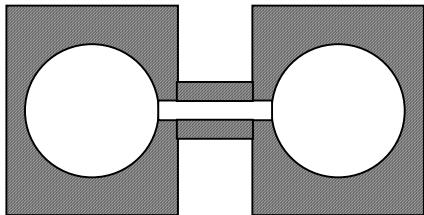


Figura 19.2.1

Nel capitolo precedente abbiamo considerato delle cavità contenenti la radiazione, cioè il comportamento di un gas di foton in equilibrio termodinamico ad una data temperatura. Le proprietà che abbiamo visto, in particolare la distribuzione di Planck, non dipendono dal materiale di cui sono fatte le pareti. Infatti, se consideriamo due cavità in contatto tra loro come in Figura 19.2.1, all'equilibrio il flusso della radiazione entrante deve essere sempre uguale a quello uscente, indipendentemente dalla natura delle pareti delle cavità.

Ora consideriamo un corpo materiale, detto corpo nero, che assorba tutta la radiazione incidente, a tutte le frequenze. Se inseriamo un tale oggetto all'interno di una cavità alla stessa temperatura, il flusso emesso dalla cavità deve essere uguale a quello assorbito dal corpo nero, e viceversa il flusso emesso dal corpo nero deve essere uguale a quello assorbito dalla cavità. Dunque, un corpo nero è caratterizzato da un flusso di radiazione, sia emessa che assorbita, uguale al flusso (19.1.7) irradiato dalla cavità.

In generale, salvo eccezioni, gli oggetti materiali non si comportano come dei corpi neri. Infatti, la radiazione che raggiunge un corpo materiale può essere assorbita, riflessa e/o trasmessa. Considerando soltanto dei corpi *opachi*, che non trasmettono radiazione, la somma della frazione di radiazione assorbita e di quella riflessa è uguale a 1. Definiamo *assorbanza* a il rapporto tra il flusso incidente J_{Ui} e quello assorbito, J_{Ua} , cioè

$$a(\nu) = J_{Ua}(\nu)/J_{Ui}(\nu).$$

Ricordando che un corpo nero assorbe tutta la radiazione incidente, a tutte le frequenze, cioè è caratterizzato da $a = 1$, vediamo che l'assorbanza si può anche definire come il rapporto tra la radiazione assorbita dal corpo materiale in oggetto e quella assorbita, nelle stesse condizioni di temperatura, da un corpo nero, J_{Ucn} . Nello stesso modo, possiamo considerare l'emissione di radiazione da parte di un corpo materiale, definendo *emittività* e il rapporto tra la radiazione emessa dal corpo in oggetto e quella emessa, nelle stesse condizioni di temperatura, da un corpo nero. In sintesi,

$$a(\nu) = \frac{J_{Ua}(\nu)}{J_{Ucn}(\nu)}; \quad e(\nu) = \frac{J_{Ue}(\nu)}{J_{Ucn}(\nu)}, \quad (19.2.1)$$

dove $a(\nu)$ ed $e(\nu)$, in generale, dipendono dalla frequenza della radiazione.

Adesso supponiamo di inserire in una cavità un corpo materiale alla stessa temperatura. Ovviamente, all'equilibrio, il flusso emesso dal corpo materiale ad una data

frequenza deve essere uguale a quello assorbito (ed entrambi devono essere uguali al flusso emesso e assorbito dalla cavità), cioè $J_{Ua}(\nu) = J_{Ue}(\nu)$, da cui si ottiene la *legge di Kirchhoff*:

$$e(\nu) = a(\nu). \quad (19.2.2)$$

Si definisce *grigio* un corpo in cui l'assorbanza (e dunque anche la emittività) non dipende dalla frequenza, cioè tale che $a(\nu) = a \leq 1$. Un *corpo nero* ne è un caso particolare, con $a = 1$.

19.2.2 Il fattore angolare

Ora si considerino due corpi neri aventi temperature T_1 e T_2 e aree A_1 e A_2 . Il flusso emesso dal corpo 1 che raggiunge (ed è assorbito da) 2 è uguale a $\dot{Q}_{12} = A_1 F_{12} J_{U1}$, dove F_{12} , detto *fattore angolare* (più comunemente, si indica come *view factor*), indica la frazione dell'area del corpo 1 vista da 2, cioè la frazione della radiazione che lascia 1 ed è intercettata da 2. Dunque, $A_1 F_{12}$ rappresenta l'area utile di 1 da cui proviene la radiazione che raggiunge 2. Nello stesso modo, il flusso radiativo che lascia 2 e raggiunge 1 è $\dot{Q}_{21} = A_2 F_{21} J_{U2}$, dove $A_2 F_{21}$ rappresenta l'area di 2 da cui si vede 1. All'equilibrio, quando i due corpi neri hanno la stessa temperatura, i due flussi devono essere uguali, cioè $\dot{Q}_{21} = \dot{Q}_{12}$ e $J_{U1} = J_{U2}$ e dunque si ottiene $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$, ovvero, in generale, la seguente *legge di reciprocità*:

$$A_i F_{ik} = A_k F_{ki}. \quad (19.2.3)$$

In genere, lo scambio netto di energia radiante tra i due corpi neri è il seguente:

$$\dot{Q}_{net} = (J_{U1} - J_{U2}) A_1 F_{12} = (J_{U1} - J_{U2}) A_2 F_{21}. \quad (19.2.5)$$

Il fattore angolare è una grandezza esclusivamente geometrica e si può dimostrare che³

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos(\theta_1) \cos(\theta_2)}{r_{12}^2} dA_1 dA_2, \quad (19.2.4)$$

dove r_{12} è la distanza tra le aree elementari dA_1 e dA_2 . Si noti che questa relazione soddisfa identicamente l'eguaglianza (19.2.3). Inoltre, in base alla sua definizione, la somma di tutti i fattori angolari di un dato corpo materiale i circondato da n aree è uguale a 1, cioè,

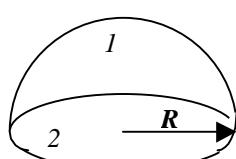


Figura 19.2.2

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1. \quad (19.2.5)$$

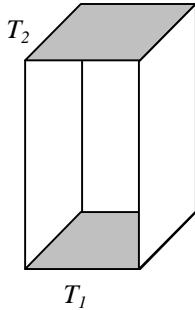
Si noti che, in genere, bisogna anche considerare i fattori angolari

³ Sul Perry, *Handbook of Chemical Engineering*, sono tabulate le espressioni del fattore angolare per le geometrie più comunemente incontrate nella pratica industriale.

F_{ii} , che indicano la frazione di radiazione che lascia il corpo i e viene poi intercettata ancora da i , come accade nel caso di geometrie concave.

Esempio: Si consideri la radiazione tra l'emisfero (corpo 1) e il piano (corpo 2) indicati in **figura 19.2.2**. Qui tutta la radiazione che lascia 2 viene intercettata da 1 e dunque $F_{21}=1$, mentre $F_{22}=0$, che indica che nessuna parte della radiazione che lascia 2 viene intercettata da 2. Ovviamente, è verificata l'egualanza $F_{22} + F_{21} = 1$. Ora si consideri che $A_1F_{12}=A_2F_{21}$, dove $A_1=2\pi R^2$ e $A_2=\pi R^2$, da cui si evince che $F_{21} = F_{21}/2 = 1/2$. Dunque, poiché la radiazione che lascia 1 viene intercettata o da 2 o ancora da 1, cioè $F_{11} + F_{12} = 1$, concludiamo che $F_{11} = 1/2$.

19.2.3 Esempio: radiazione tra corpi neri in ambiente adiabatico



Siamo spesso interessati al flusso radiativo tra due superfici collegate tra loro da altre superfici. Si pensi ad una fornace: da una lato, ad esempio in basso, c'è la fiamma, a temperatura T_1 ; dall'altra, in alto, lo scambiatore di calore a temperatura T_2 , mentre alle pareti laterali c'è del materiale refrattario. In questo caso, le pareti si possono considerare adiabatiche, poiché il loro assorbimento di calore è trascurabile e dunque si trovano in equilibrio termico. Se tutte le superfici si comportano come corpi neri, il calore netto uscente da una qualsiasi superficie i (con $i = 1, 2, \dots, 6$) e diretto verso tutte le altre è dato dalla somma seguente:

Figura 19.2.3

$$\dot{Q}_i = \sigma A_i \sum_{j=1}^6 F_{ij} (T_i^4 - T_j^4). \quad (19.2.6)$$

Queste sono 6 equazioni, in cui $\dot{Q}_3 = \dot{Q}_4 = \dot{Q}_5 = \dot{Q}_6 = 0$ e supponiamo di conoscere T_1 e T_2 . Dunque, conoscendo tutti i fattori angolari, abbiamo 6 incognite (T_3 , T_4 , T_5 e T_6 , più i due flussi di calore) e possiamo determinare \dot{Q}_1 e \dot{Q}_2 .

Con riferimento alla **figura 19.2.3**, vediamo che le quattro facce laterali 3, 4, 5 e 6 sono tra loro equivalenti e dunque hanno la stessa temperatura T_L . Infatti, possiamo considerare le 4 facce laterali come un'unica superficie adiabatica, con area $A_L = 4A_3$ e fattori angolari $F_{1L} = 4F_{13}$ e $F_{2L} = 4F_{23}$. Dunque, le sei equazioni (19.2.6) si riducono alle seguenti tre:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \sigma A_1 [F_{12}(T_1^4 - T_2^4) + F_{1L}(T_1^4 - T_L^4)] \\ \dot{Q}_2 &= \sigma A_2 [F_{21}(T_2^4 - T_1^4) + F_{2L}(T_2^4 - T_L^4)] \\ 0 &= \sigma A_L [F_{L1}(T_L^4 - T_1^4) + F_{L2}(T_L^4 - T_2^4)]\end{aligned}$$

A questo punto, considerando che $F_{L1} = F_{L2}$, dall'ultima equazione determiniamo T_L come:

$$T_L^4 = \frac{1}{2} (T_1^4 + T_2^4). \quad (19.2.7)$$

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere sommando le prime due equazioni, considerando che tutto il calore emesso dalla faccia 1 deve essere assorbito dalla faccia 2, cioè $\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$, con $A_1 = A_2 = A$ e $F_{1L} = F_{2L}$. Infine otteniamo:

$$\dot{Q}_1 = \sigma A (F_{12} + \frac{1}{2} F_{1L}) (T_1^4 - T_2^4) \quad (19.2.8)$$

19.2.4 Scambio di radiazione tra corpi grigi

Il flusso radiante uscente da un corpo grigio, $J_{U,out}$, è uguale alla somma del flusso radiante emesso dal corpo, $e\sigma T^4$ e il flusso radiante riflesso, $(1-a)J_{U,in}$, dove e è la emittività, a la assorbanza e $J_{U,in}$ è il flusso radiante incidente. In accordo con la legge di Kirchhoff, $e = a$ e dunque vediamo che il flusso radiante emesso dal corpo grigio è

$$J_{U,out} = e\sigma T^4 + (1-e)J_{U,in}. \quad (19.2.9)$$

Ovviamente, per un corpo nero $e = 1$ e si ritrova la (19.1.7). Da qui vediamo che il flusso radiante netto uscente dal corpo grigio, $J_{U,net} = J_{U,out} - J_{U,in}$, è dato da:

$$J_{U,net} = e(\sigma T^4 - J_{U,in}). \quad (19.2.10)$$

Talvolta, si preferisce riscrivere la (19.2.10), sostituendovi l'espressione di $J_{U,in}$ ricavata dalla (19.2.9) nel modo seguente:

$$J_{U,net} = \frac{e}{1-e} (\sigma T^4 - J_{U,out}). \quad (19.2.11)$$

Questa espressione si utilizza nel modo seguente: si consideri la radiazione scambiata tra due superfici, 1 e 2. Il calore radiante netto scambiato tra le due superfici si può scrivere in uno dei modi seguenti:

$$\dot{Q}_{net,1-2} = \frac{e_1 A_1}{1-e_1} (\sigma T_1^4 - J_{U,out,1}) = \frac{e_2 A_2}{1-e_2} (J_{U,out,2} - \sigma T_2^4) = A_1 F_{12} (J_{U,out,1} - J_{U,out,2}). \quad (19.2.12)$$

Da qui, eliminando $J_{U,out,1}$ e $J_{U,out,2}$, otteniamo:

$$\dot{Q}_{net,1-2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-e_1}{e_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-e_2}{e_2 A_2}}. \quad (19.2.13)$$

Il denominatore della (19.2.13) è una resistenza termica, uguale alla somma di tre resistenze termiche in serie, di cui la prima e la terza sono le resistenze offerte all'assorbimento e all'emissione di calore dovute al fatto che i corpi in esame non sono neri (infatti questi termini si annullano identicamente quando $e = 1$), mentre la seconda resistenza termica dipende dal

fattore angolare che a sua volta, come visto precedentemente, dipende dal fatto che non tutta la radiazione che lascia 1 è assorbita da 2 (e, viceversa, non tutta la radiazione che lascia 2 è assorbita da 1).

Esempio: Si consideri un forno, a forma di cubo di 80 cm di lato, in cui 5 pareti si trovano alla temperatura di 1000 °C, mentre la sesta parete (cioè la porta del forno) è aperta sull'ambiente circostante, che si trova alla temperatura di 300 K. Supponendo che l'emittività delle pareti sia di 0.95, si calcoli il calore che esce dalla porta del forno.

Il calore viene scambiato tra un corpo grigio (le pareti del forno, con superficie $A_1=3.2m^2$) e un corpo nero (l'ambiente circostante, a cui si accede attraverso la porta del forno, con superficie $A_2=0.64m^2$). Il calore scambiato si ottiene dalla (19.2.13), in cui $e_1=0.95$ e $e_2=1$, mentre il termine A_1F_{12} si può facilmente calcolare ricordando la relazione di reciprocità $A_1F_{12} = A_2F_{21}$, in cui $F_{21} = 1$. Alla fine otteniamo:

$$\dot{Q}_{net,12} = \frac{5.67 \times 10^{-8} (W / m^2 K^4) \times (1273^4 - 300^4) K^4}{\frac{1 - 0.95}{0.95 \times 3.2m^2} + \frac{1}{1 \times 0.64m^2}} = 94 KW .$$

19.3 Radiazione e conduzione

Quando un corpo solido è scaldato per via radiante, la sua temperatura soddisfa l'equazione del calore,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T , \quad (19.3.1)$$

mentre alla parete (indicata con il suffisso w) il flusso di calore è uguale al flusso radiante. Ad esempio, per un corpo avente emittività e , vale la seguente condizione al contorno:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_w = J_{Uw} = e \sigma F_{12} (T_w^4 - T_e^4) , \quad (19.3.2)$$

dove T_w e T_e sono le temperature della parete e quella del corpo emittente, rispettivamente. Ovviamente, l'equilibrio termico si raggiunge quando la temperatura del corpo è uniforme (e dunque cessa la conduzione) e uguale alla temperatura del corpo emittente (e dunque cessa anche il flusso radiante). Durante il transitorio, in genere, la temperatura del corpo non è uniforme e dunque il problema è di difficile soluzione. In questo caso, tuttavia, si è visto nel paragrafo 8.4 che il problema si semplifica notevolmente quando è valida l'ipotesi di quasi stazionarietà e che ciò accade per bassi numeri di Biot. Riscrivendo la (19.3.1) in funzione di un coefficiente di scambio termico,

$$J_{Uw} = h(T_w - T_e) , \text{ con } h = e \sigma F_{12} \frac{(T_w^4 - T_e^4)}{(T_w - T_e)} = e \sigma F_{12} (T_w + T_e)(T_w^2 + T_e^2) , \quad (19.3.3)$$

questa condizione si può scrivere nel modo seguente:

$$Bi = \frac{hL}{k} \approx \frac{e\sigma F_{12} T_e^3 L}{k} \ll 1, \quad (19.3.4)$$

dove L è una dimensione caratteristica del corpo. In questo caso, da un bilancio di energia interna otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(\rho c V T) = A F_{12} e \sigma (T_e^4 - T^4), \quad (19.3.5)$$

dove T è la temperatura del corpo, V il suo volume, A la sua superficie esterna, mentre ρ e c sono la sua densità e il suo calore specifico. A questo punto, si definiscano le variabili adimensionali $\Theta = T/T_e$ e $\tau = t\alpha/L^2$, dove $\alpha = k/\rho c$ è la diffusività termica, mentre $L = V/A$ è una lunghezza caratteristica. L'equazione (19.3.5) diventa:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = Bi(1 - \Theta^4), \quad (19.3.6)$$

da risolversi con condizioni iniziali $\Theta(t=0) = \Theta_0 = T_0/T_e$. La soluzione di questa equazione è la seguente:

$$Bi \tau = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \Theta}{1 - \Theta} \Big|_{\Theta_0}^\Theta + \frac{1}{2} \tan^{-1} \Theta \Big|_{\Theta_0}^\Theta. \quad (19.3.7)$$

In particolare, quando $\Theta_0 \ll 1$, la soluzione si semplifica:

$$Bi \tau = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \Theta}{1 - \Theta} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \Theta. \quad (19.3.8)$$

Nella prima fase del riscaldamento, quando anche $\Theta \ll 1$, la soluzione si semplifica ulteriormente:

$$\Theta = Bi \tau. \quad (19.3.9)$$

19.4 Esempio: progetto di un pannello solare

In una giornata serena, la radiazione solare raggiunge la superficie terrestre con un flusso di circa $J_{U,sol} = 1140 \text{ W/m}^2$. Anzitutto, calcoliamo la temperatura massima raggiungibile da una piastra esposta alla radiazione solare, supponendo che a) la piastra si comporta come un corpo nero, b) non dissipà calore per convezione e c) irraggia verso il cielo, il quale si comporta come un corpo nero a $0K$. Dunque, considerando che l'irraggiamento riguarda

entrambe le facce della piastra, la temperatura della parete T_s si ottiene dal semplice bilancio seguente:

$$J_{U,sol} - 2\sigma T_s^4 = 0 \quad T_s = \left(\frac{1.14 \times 10^3 \text{ W/m}^2}{2 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4} \right)^{1/4} = 316K = 43^\circ C.$$

Se ora supponiamo che la piastra sia disposta orizzontalmente e che la faccia inferiore sia isolata, otteniamo:

$$J_{U,sol} - \sigma T_s^4 = 0 \Rightarrow T_s = 376K = 103^\circ C.$$

A questa temperatura, considerando che la temperatura dell'aria è $T_a = 20^\circ C$, non possiamo trascurare l'effetto della convezione libera dell'aria, che tende ad assorbire calore dalla piastra. Usiamo la correlazione (18.5.1),

$$Nu = C Ra^n, \quad \text{con } C = 0.15 \text{ e } n = 0.33.$$

In questa correlazione, $Nu = h_{conv}L/k$ è il numero di Nusselt (h_{conv} il coefficiente di scambio termico convettivo, k la conducibilità termica dell'aria e L le dimensioni della piastra), mentre $Ra = Gr Pr$ è il numero di Rayleigh, con $Gr = \gamma L^3 \Delta T$ il numero di Grashof e $Pr = \nu/\alpha$ quello di Prandtl ($\gamma = \beta g / \nu^2$, β il coefficiente di espansione termica, ν la viscosità cinematica e α la diffusività termica dell'aria, mentre $\Delta T = T_s - T_a$ è la differenza tra la temperatura della parete e quella l'aria). In genere, la soluzione si ottiene per via iterativa. Supponendo che la temperatura della parete sia di $80^\circ C$ e che l'aria a contatto con la parete sia a $50^\circ C$ (il valore medio tra $80^\circ C$ e $20^\circ C$), vediamo che a $50^\circ C$ l'aria ha i seguenti valori: $\gamma = 10^8 \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ e $Pr = 0.7$. Dunque, con una piastra delle dimensioni di $L = 1 \text{ m}$, otteniamo:

$$Ra = 0.42 \cdot 10^{10} \quad \text{e dunque } Nu = 242, \text{ cioè } h_{conv} = 7.3 \text{ W/m}^2 \text{K},$$

dove abbiamo considerato che $k = 0.03 \text{ W/mK}$. Si noti che h_{conv} non dipende dalle dimensioni della piastra.

Trascurando le perdite di calore verso il fluido refrigerante, possiamo infine scrivere il seguente bilancio termico:

$$J_{U,sol} - h_{conv}(T_s - T_a) - \sigma T_s^4 = 0 \Rightarrow T_s \approx 70^\circ C.$$

A questo punto dovremmo iterare, ma è facile vedere che la correzione che otterremmo è comunque piccola e dunque la ignoriamo.

Ora vediamo di diminuire le perdite per convezione, coprendo la piastra con una lastra di vetro. Supponendo che la lastra di vetro sia molto vicina alla piastra, l'aria imprigionata si può considerare all'equilibrio, trascurandone i moti convettivi. Resta, è vero, la convezione libera tra il vetro e l'aria che sta all'esterno, ma questa è comunque inferiore a quella tra piastra e aria vista in precedenza, perché il vetro ha una temperatura di circa $30^\circ C$ (questo risultato si ottiene alla fine di un calcolo sostanzialmente identico a quello compiuto nel caso

precedente) e dunque il ΔT che compare nel numero di Rayleigh è di $10\text{ }^\circ\text{C}$ invece dei $60\text{ }^\circ\text{C}$ che avevamo in precedenza. Alla fine si ottiene $h_{conv} = 4.1 \text{ W/m}^2\text{K}$, da cui $T_s = 87\text{ }^\circ\text{C}$.

19.5 Esercizi

- 19.1** Un sottile strato di silicio del diametro di $150mm$ e di $1mm$ di spessore, inizialmente alla temperatura $T_0 = 800K$ viene immessa in una camera sottovuoto. Le pareti della camera sono mantenute a $300K$ e hanno emittività $e_1 = 0.9$. Quanto impiegherà il silicio a portarsi a $350K$, supponendo che abbia le seguenti proprietà: $e_2 = 0.6$; $k = 0.15 \text{ W/cmK}$; $c=0.7 \text{ J/gK}$; $\rho = 2.3 \text{ g/cm}^3$.
- 19.2** Si determini la variazione dell'entropia di un corpo nero in funzione delle variazioni di temperatura e volume
- 19.3** In base al risultato del problema precedente, si determini a) il calore che si deve fornire alla radiazione contenuta in una cavità per aumentarne il volume; b) come varia il volume di una cavità in funzione della sua temperatura durante una trasformazione adiabatica.

20. L'antidiffusione

Come abbiamo visto nel capitolo 13, l'equazione costitutiva del flusso molare dovrebbe essere espressa in funzione del potenziale chimico e dunque a partire dall'energia libera di Gibbs della miscela. Vediamo le conseguenze di questo fatto, partendo da alcune considerazioni elementari di termodinamica.

20.1 Il potenziale chimico

I potenziali chimici dei componenti di una miscela omogenea si definiscono a partire dalla energia libera $G(T,P,N)$ del sistema, ritenuta nota sperimentalmente o predittivamente, nel modo seguente:

$$\mu_i(T,P,\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P,N_{j \neq i}} = \left(\frac{\partial (Ng)}{\partial N_i} \right)_{T,P,N_{j \neq i}}, \quad (20.1.1)$$

dove T e P sono la temperatura e la pressione del sistema, $\mathbf{N}=(N_1, N_2, \dots, N_n)$ in cui N_i è il numero di moli del componente i , $N=\sum N_i$ è il numero di moli totali e g è l'energia libera molare. Da questa definizione, si ottiene la seguente espressione per la variazione di energia libera a T e P costanti:

$$dG = \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i. \quad (20.1.2)$$

Si noti che, poiché sia G che N_i sono variabili estensive (cioè proporzionali al volume, o alla massa e numero di moli, del sistema omogeneo), μ_i è una variabile intensiva e dunque funzione delle frazioni molari $x_i = N_i/N$.

20.1.1 L'equazione di Gibbs-Duhem

Per tutte le quantità estensive, come G , è valida la relazione¹

$$G = \sum_{i=1}^n N_i \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right) = \sum_{i=1}^n N_i \mu_i. \quad (20.1.3)$$

Questa relazione, facilmente dimostrabile matematicamente, si può spiegare in modo più istruttivo con il seguente esempio fisico. Supponiamo di estrarre, a T e P costanti, da una miscela omogenea una parte k del suo volume. In base alla (20.1.2), la variazione di energia libera che ciò comporta è: $\Delta G = \sum \mu_i \Delta N_i$, dove $\Delta G = kG$ e $\Delta N_i = kN_i$, da cui si ottiene la (20.1.3).

¹ Questa è una delle tante *equazioni di Eulero*.

La relazione (20.1.3) indica che il potenziale chimico μ_i è uguale all'energia libera del componente i nella miscela; in generale, in termodinamica, tali grandezze si dicono *proprietà parziali molari*, come il *volumen parziale molare*, l'*entropia parziale molare*, eccetera.

Differenziando la (20.1.3) otteniamo: $dG = \sum \mu_i dN_i + \sum N_i d\mu_i$ e dunque, sostituendovi la (20.1.2), otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n N_i d\mu_i = 0. \quad (20.1.4)$$

Questa è l'equazione di Gibbs-Duhem, che stabilisce che i potenziali chimici non si possono scegliere arbitrariamente l'uno dall'altro.

20.1.2 Caso di miscele binarie

Nel caso di miscele binarie, le relazioni (20.1.1)-(20.1.4) assumono una forma particolarmente semplice. Infatti, considerando che

$$\mu_1(T, P, x_1) = \left(\frac{\partial[(N_1 + N_2)g(T, P, x_1)]}{\partial N_1} \right)_{T, P, N_2} = g + N \frac{dg}{dx_1} \frac{dx_1}{dN_1}$$

e che

$$Nx_1 = N_1 \Rightarrow N dx_1 = (1 - x_1) dN_1,$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \mu_1(T, P, x_1) &= g(T, P, x_1) + \left(\frac{dg}{dx_1} \right) (1 - x_1), \\ \mu_2(T, P, x_1) &= g(T, P, x_1) - \left(\frac{dg}{dx_1} \right) x_1, \end{aligned} \quad (20.1.5)$$

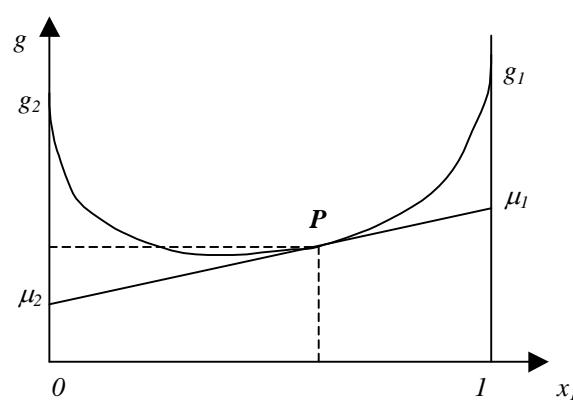


Figura 20.1.1 – Ottenimento grafico dei potenziali chimici dell'energia libera g di una miscela binaria.

dove la seconda equazione si ottiene dalla prima invertendo x_1 con x_2 . Da queste equazioni si verifica facilmente che l'equazione di Gibbs-Duhem è verificata identicamente:

$$x_1 \frac{d\mu_1}{dx_1} + x_2 \frac{d\mu_2}{dx_1} = 0. \quad (20.1.6)$$

Inoltre, sommando e sottraendo le (20.1.5) otteniamo:

$$g = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \quad (20.1.7)$$

e

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 = \frac{dg}{dx_1}. \quad (20.1.8)$$

La (20.1.7) coincide con la (20.1.3), mentre la (20.1.8) è valida soltanto nel caso di miscele binarie. Le equazioni (20.1.5) hanno l'immediata interpretazione geometrica riportata in **figura 20.1.1**, in cui i valori di $\mu_1(T,P,x_1)$ e $\mu_2(T,P,x_1)$ sono rappresentati dalle intercette, rispettivamente sugli assi $x_1=1$ e $x_1 = 0$ ($x_2=1$), della tangente alla $g(T,P, x_1)$ nel punto $P=(x_1, g(x_1))$. Si noti che $\mu_1(T,P,x_1=1)$ coincide con l'energia libera molare $g_1(T,P)$ del componente 1 puro, e analogamente, $\mu_2(T,P,x_2=1)=g_2(T,P)$.

20.2 Stabilità chimica

Si consideri un sistema isolato, composto dalla miscela di nostro interesse, da una riserva termica alla stessa temperatura della miscela, T , da una riserva meccanica alla stessa pressione, P , e da una riserva di materia. La seconda legge della termodinamica stabilisce che una qualsiasi trasformazione virtuale può avvenire solo con un aumento della entropia del sistema isolato composto dalla miscela e dalle riserve con cui la miscela scambia calore, lavoro meccanico e materia. A questo punto, considerando che gli scambi di lavoro e di materia non comportano variazioni di entropia, otteniamo:

$$\delta\sigma = \delta S - \frac{\delta Q}{T} = \delta S - \frac{1}{T}(\delta U + P\delta V - \sum \mu_k \delta N_k) > 0, \quad (20.2.1)$$

dove $\delta\sigma$ è la variazione totale di entropia, δS è la variazione di entropia della miscela, δQ è il calore entrante nella miscela, δU e δV sono le variazioni di energia interna e volume della miscela, $\mu_k = \partial G / \partial N_k$ è il potenziale chimico del componente k , mentre δN_k è la variazione del numero di moli del componente k nella miscela. Dunque concludiamo che, in condizioni isoterme isobare, una trasformazione possibile di un sistema aperto deve soddisfare la seguente diseguaglianza:

$$\delta G - \sum \mu_k \delta N_k < 0, \quad (20.2.2)$$

dove $G=U-TS+PV$ è l'energia libera di Gibbs. Conseguentemente, in condizioni isoterme e isobare, la funzione $\delta G - \sum \mu_k \delta N_k$ deve essere minima all'equilibrio.

Come sappiamo, applicando questa diseguaglianza a sistemi chiusi (cioè con $\delta N_k = 0$), si dimostra che il calore specifico c_v e la comprimibilità isoterma κ_T devono essere quantità positive. Nello stesso modo, espandendo δG in termini di δN_i e considerando nulli, per semplicità, le variazioni δT , δP e δN_k con $k \neq i$, otteniamo²:

² Per una dimostrazione più completa si rimanda a testi più avanzati, come *Landau, Lifshitz e Pitaevskij, Fisica Statistica, Editori Riuniti (1978)*.

$$\delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P,N} \delta N_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial N_i^2} \right)_{T,P,N} (\delta N_i)^2 + \dots,$$

da cui, sostituendo la definizione $\mu_i = (\partial U / \partial N_i)_{S,V,N}$, otteniamo: $(\partial \mu_i / \partial N_i)_{T,P} > 0$. Infine, poiché il numero di moli delle altre specie $k \neq i$ si è supposto invariato, si può concludere che

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_i} \right)_{T,P} > 0, \quad (20.2.3)$$

Dunque, nelle miscele, oltre alle due diseguaglianze $c_v > 0$ e $\kappa_T > 0$, deve valere anche la condizione che il potenziale chimico di un componente generico i della miscela sia una funzione monotona crescente della concentrazione di i . Questa condizione può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right)_{T,P} > 0. \quad (20.2.4)$$

Ciò indica che l'energia libera molare deve essere una funzione concava della concentrazione di uno qualsiasi dei suoi componenti. Questa condizione di stabilità termodinamica può essere facilmente interpretata graficamente. Si consideri una miscela binaria in cui la quantità $\Delta g = g - (x_1 g_1 + x_2 g_2)$

abbia una parte convessa (vedi **figura 20.2.1**), compresa tra i due punti di flesso C e D . Ora, se ad una concentrazione x^* compresa fra questi due punti la miscela rimanesse omogenea, la sua energia libera sarebbe quella del punto F . Tuttavia, è facile vedere che, quando la miscela si separa in due fasi con concentrazioni x_1^α ed x_1^β (rappresentate dai punti α e β di tangenza comune sulla curva dell'energia libera di **figura 20.2.1**) e in proporzioni determinabili con un bilancio di massa, l'energia libera della miscela diventa quella del punto G . Questo punto rappresenta il valore

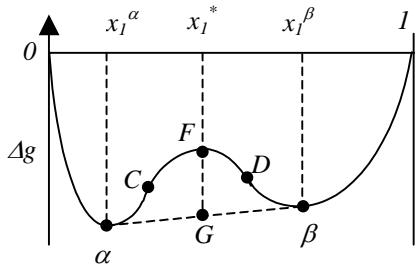


Figura 20.2.1

minimo di energia raggiungibile dal sistema, compatibilmente con la sua composizione. Dunque, poiché l'energia libera del sistema, in condizioni isotermi e isobare, tende ad un minimo, concludiamo che il punto F è termodinamicamente instabile e che in tali condizioni il sistema si separa nelle due fasi di equilibrio, aventi concentrazioni x_1^α ed x_1^β .

La dimostrazione formale di queste affermazioni comporta il dimostrare che

$$\mu_1^\alpha = \mu_1^\beta \quad \text{e} \quad \mu_2^\alpha = \mu_2^\beta,$$

dove i pedici 1 e 2 identificano i due componenti della miscela, mentre gli apici si riferiscono ai punti di **figura 20.2.1**. Considerando le relazioni (20.1.5),

$$\begin{aligned}\mu_1^\alpha &= g^\alpha + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\alpha \left(1 - x_1^\alpha \right) = \mu_1^\beta = g^\beta + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\beta \left(1 - x_1^\beta \right), \\ \mu_2^\alpha &= g^\alpha - \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\alpha x_1^\alpha = \mu_2^\beta = g^\beta - \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\beta x_1^\beta,\end{aligned}$$

e sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo: $(\partial g / \partial x_1)^\alpha = (\partial g / \partial x_1)^\beta$. Questo risultato mostra che le tangenti alla curva dell'energia libera prese in due punti in equilibrio fra loro devono coincidere. Sostituendo questo risultato nella prima delle equazioni scritte sopra si ha:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^\beta = \frac{g^\alpha - g^\beta}{x_1^\alpha - x_1^\beta}, \quad (20.2.5)$$

che è l'equazione della tangente di **figura 20.2.1**. Dunque concludiamo che una miscela le cui condizioni di temperatura, pressione e composizione siano tali che $(\partial^2 g / \partial x_1^2)_{T,P} < 0$ è termodinamicamente instabile. Ciò significa che essa non può restare omogenea e si separa invece in due fasi, le cui composizioni sono uguali alle ascisse dei punti di tangenza comune nella curva dell'energia libera.

Ora mostriamo che le quantità relative delle due fasi si possono determinare applicando un bilancio di materia che dà luogo alla cosiddetta *regola della leva*. Infatti, supponendo di avere n^* moli di una miscela di composizione x^* , si trova banalmente che

$$\begin{aligned}x_1^* n^* &= x_1^\alpha n^\alpha + x_1^\beta n^\beta \\ x_2^* n^* &= x_2^\alpha n^\alpha + x_2^\beta n^\beta\end{aligned} \quad (20.2.6)$$

Sommando queste equazioni si trova che $n^* = n^\alpha + n^\beta$ (conservazione della massa) da cui, eliminando n^* troviamo

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \frac{x_1^\beta - x_1^*}{x_1^* - x_1^\alpha}, \quad (20.2.7)$$

che è la cosiddetta regola della leva.

20.3 – Esempio: condizioni di equilibrio in miscele binarie regolari

Si considerino due fluidi, 1 e 2. L'energia libera di Gibbs molare, g , di una miscela 1-2 è la somma di una componente ideale, g^{id} , che è presente in tutte le miscele (dipende dal "disordine" causato dal miscelamento), e di una componente, cosiddetta, di eccesso, g^{ex} , che può variare tantissimo da miscela a miscela, dove:

$$g^{id} = g_1 \phi + g_2 (1 - \phi) + RT [\phi \ln(\phi) + (1 - \phi) \ln(1 - \phi)], \quad (20.3.1)$$

e

$$g^{ex} = RT\Psi\phi(1-\phi), \quad (20.3.2)$$

in cui g_1 e g_2 sono le energie libere molari dei componenti puri, $\phi \equiv x_1$ è la frazione molare della specie 1, mentre l'energia libera di eccesso è stata descritta, per semplicità, usando l'espressione di Margules ad un parametro (si confrontino le figure 20.2.1 e 20.3.1). Le miscele la cui energia libera di eccesso si può rappresentare in questo modo si dicono *regolari*. Dunque, la variazione di energia libera dovuta alla miscelazione (e dunque a temperatura e pressione costanti) è la seguente:

$$\Delta g = g - [g_1\phi + g_2(1-\phi)] = RT[\phi \ln(\phi) + (1-\phi)\ln(1-\phi) + \Psi\phi(1-\phi)]. \quad (20.3.3)$$

La parte ideale di Δg (cioè la parte logaritmica) è anche detta *entropica* ed è sempre negativa (cioè diminuisce l'energia libera), con derivata seconda positiva e dunque favorisce sempre la miscelazione. Invece, la parte non ideale si dice *entalpica*, perché tiene conto della variazione di entalpia dovuta alla miscelazione e può essere sia positiva che negativa, per cui

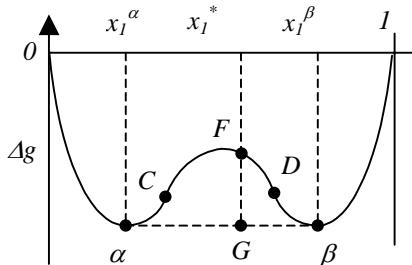


Figura 20.3.1

può sia favorire che ostacolare la miscelazione. Infatti, basta ricordare che $\Delta g = \Delta h - T\Delta s$, dove h è l'entalpia molare, T la temperatura e s l'entropia molare e considerare che l'entropia aumenta quando i due componenti si miscelano (infatti, anche per un gas ideale, $\Delta s = R[\phi \ln \phi + (1-\phi) \ln(1-\phi)]$), mentre si può dimostrare che $\Delta h \propto \Psi \propto (F_{11} + F_{22} - 2F_{12})$, dove F_{ij} sono le forze di attrazione tra i componenti i e j . Ciò significa che Δh , e quindi Ψ , è positiva quando le forze di attrazione tra molecole della stessa specie sono maggiori di quelle tra molecole di specie differenti.

Dalla condizione (20.1.4) di stabilità termodinamica della miscela, otteniamo con facili passaggi:

$$x_1^2 - x_1 + \frac{1}{2\Psi} \geq 0. \quad (20.3.4)$$

Questa diseguaglianza è sempre verificata quando il discriminante dell'equazione di secondo grado associata è negativo, cioè per

$$\Psi < 2. \quad (20.3.5)$$

Ciò comporta che, per $\Psi > 2$, l'energia libera ha la forma mostrata in figura 20.3.1, da cui si vede che quando la miscela ha una concentrazione compresa tra x_1^α e x_1^β , essa tende a separarsi in due fasi. Data la simmetria della curva rispetto all'asse $x_1=1/2$, le concentrazioni delle due fasi, x_1^α e x_1^β sono facilmente determinabili nei termini [vedi Eq. (20.2.5)]:

$$\mu = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)_{T,P} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\phi} [\phi \ln(\phi) + (1-\phi) \ln(1-\phi) + \Psi \phi (1-\phi)] = 0,$$

da cui:

$$\ln \frac{x_1}{1-x_1} + \Psi (1-2x_1) = 0. \quad (20.3.6)$$

Per $\Psi = 2$, le due fasi coincidono e hanno concentrazione $x_1 = 1/2$; quindi, $\Psi = 2$ rappresenta il punto critico della miscela. Per $\Psi > 2$, otteniamo due fasi in mutuo equilibrio, con concentrazioni x_1^α e x_1^β , con $x_1^\alpha = 1 - x_1^\beta$, come si verifica facilmente e come deve essere, in base alla simmetria della curva dell'energia libera rispetto all'asse $x_1 = 1/2$. Dunque l'equazione (20.3.6) rappresenta la *curva di equilibrio* o *curva di miscibilità* della miscela liquida parzialmente miscibile nel piano $\Psi-x_1$, cioè per ogni valore di Ψ ci permette di determinare le composizioni x_1^α e x_1^β delle due fasi in cui la miscela si separa.

Nella rappresentazione di questi risultati, invece di Ψ , siamo ovviamente più interessati ad usare la temperatura T . Per far ciò, dobbiamo conoscere la dipendenza di Ψ da T . In base a calcoli di meccanica statistica, sappiamo che

$$\frac{\Psi - 2}{2} = \alpha \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{0.62}, \quad (20.3.7)$$

dove α è una costante e T_c è la temperatura critica (quando $T=T_c$, allora $\Psi=2$). In questo caso, la curva di equilibrio della miscela nel piano $T-x_1$ si può rappresentare come in **figura 20.3.2**, da cui appare che se si raffredda la miscela a partire da un punto E della regione monofase (all'esterno della curva di equilibrio) ad un punto F della regione bifase, la miscela si separa in due fasi, corrispondenti ai punti A e B della curva di equilibrio.

Nella **figura 20.3.2** è anche rappresentato con una linea tratteggiata l'insieme dei punti critici, in cui $\partial^2 g / \partial x^2 = 0$ (i punti C e D di flesso in **figura 20.3.1**), che delimitano la regione di stabilità termodinamica. Questa curva è detta *curva spinodale* e separa la regione di instabilità (regione ombreggiata in figura) dalla regione di equilibrio metastabile (zona tratteggiata), compresa fra la curva spinodale e la curva di equilibrio.

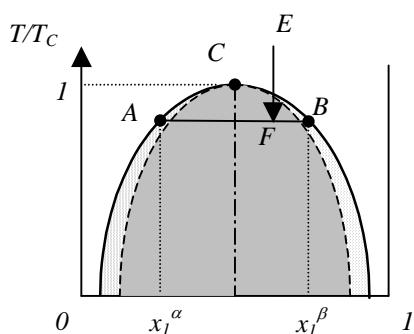


Figura 20.3.2

Anche qui, come per i sistemi a un componente, i punti che giacciono all'interno della "campana" delimitata dalla curva spinodale non possono rappresentare dei sistemi omogenei, cioè i sistemi rappresentati da punti siffatti si separano in due fasi le cui caratteristiche³ sono determinate dalla curva di equilibrio. Per quanto riguarda la regione metastabile, si possono fare le stesse osservazioni che per l'equilibrio liquido-vapore di sistemi ad un componente, in cui un liquido si può sottoraffreddare e il vapore surriscaldare, purché si rimanga all'esterno della curva spinodale, che delimita la regione di

³ Volume specifico nel caso di sistemi ad un componente, concentrazione nel caso di miscele bifasi.

instabilità termodinamica assoluta. Analogamente, nel caso di miscele, in certe circostanze si può sciogliere in un solvente una quantità di soluto maggiore di quanto si crede possibile in base ai dati di equilibrio. Lo stato del sistema che ne deriva, però, è metastabile, e cioè basta una piccola perturbazione per far separare velocemente il sistema in due fasi.

20.4 Trasporto molare in miscele binarie regolari

Come si è visto, il flusso molare è proporzionale al gradiente del potenziale chimico. Dunque, definendo il potenziali chimico della due specie 1 , μ_1 , in accordo con la (20.1.5) e utilizzando l'espressione semplificata (20.3.1)-(20.3.2) per l'energia libera, otteniamo:

$$\mu_1 = g_1 + RT \left[\ln x_1 + \Psi x_2^2 \right]. \quad (20.4.1)$$

Ora imponiamo che il flusso massico di 1 sia proporzionale al gradiente di μ_1 e otteniamo:

$$J_1 = -\frac{D\phi}{RT} \nabla \mu_1, \quad (20.4.2)$$

con $\phi \equiv x_1$, dove il termine di proporzionalità ($D\phi/RT$) è stato scritto in modo che D sia indipendente da ϕ e coincida (vedi sotto), nel caso ideale, con il coefficiente di diffusione molecolare. Si noti che tale termine di proporzionalità è sempre positivo. Con facili passaggi otteniamo:

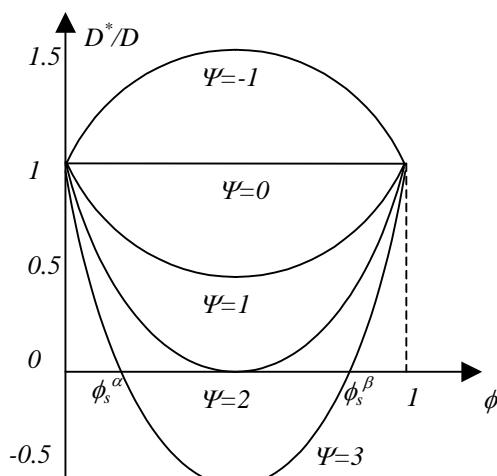


Figura 20.4.1

$$J_1 = -\frac{D\phi}{RT} \frac{d\mu_1}{d\phi} \nabla \phi \Rightarrow J_1 = -D^* \nabla \phi, \quad (20.4.3)$$

dove

$$D^* = D [1 - 2\Psi\phi(1-\phi)] \quad (20.4.4)$$

è il coefficiente di diffusione. Invertendo i pedici 1 e 2 nelle (20.4.1)-(20.4.4), è facile verificare che il flusso della specie 2 risulta opposto a quello della 1 , cioè $J_2 = -J_1$ e che dunque si tratta di un flusso diffusivo, visto che non c'è alcun moto convettivo.⁴ Da qui vediamo che per miscele ideali,⁵ cioè per $\Psi = 0$, otteniamo $D^* = D$ e dunque l'equazione costitutiva si riduce alla legge di Fick. Per valori negativi di Ψ , cioè quando la forza di attrazione tra molecole dello stesso tipo è

inferiore a quella tra molecole di specie diverse, il coefficiente di diffusione è maggiore di quello di miscele ideali. Invece, quando $\Psi > 0$, cioè quando la forza di attrazione tra molecole dello stesso tipo è maggiore di quella tra molecole di specie diverse, il coefficiente di

⁴ Infatti, è facile dimostrare che avremmo ottenuto lo stesso risultato se, al posto della (20.4.2), avessimo ipotizzato l'equazione costitutiva seguente: $J_1 = -(D/RT) \phi(1-\phi) \nabla \mu_1$.

⁵ Miscele ideali sono miscele di gas ideali, oppure miscele di fluidi 1 e 2 in cui le forze di attrazione F_{11} e F_{22} sono uguali a F_{12} , oppure ancora sono miscele in cui uno dei due componenti sia diluito.

diffusione risulta minore di quello di miscele ideali. Dunque, in genere, c'è un valore di soglia di Ψ in corrispondenza del quale la diffusività D^* risulta negativa, dando luogo al fenomeno detto *antidiffusione*, in cui il flusso molare tende a far diffondere un soluto dalle zone a bassa concentrazione a quelle ad alta concentrazione. Come si vede dalla **figura 20.4.1**, tale valore di soglia è $\Psi = 2$, che corrisponde alla temperatura critica della miscela. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, al di sopra di tale temperatura (cioè per $\Psi < 2$) la miscela è miscibile per qualsiasi composizione ϕ , mentre al disotto di tale temperatura critica (cioè per $\Psi > 2$) esiste una lacuna di miscibilità, dentro la quale la miscela tende a separarsi in due fasi distinte, con composizioni ϕ^α e ϕ^β . Si noti che i punti in cui $D^* = 0$ corrispondono ai punti spinodali, cioè ai punti di flesso della curva dell'energia libera molare (i punti *C* e *D* delle **figure 20.2.1** e **20.3.1**).

Dunque questo è il significato fisico di un valore negativo di D^* , per cui il flusso di una specie *A* va da regioni a bassa concentrazione verso regioni ad alta concentrazione di *A*: siccome *A* preferisce legarsi ad *A* piuttosto che a *B*, questo effetto (talvolta indicato come antidiffusione) di natura entalpica (cioè legato alle forze intermolecolari) prevale sulla tendenza entropica che vorrebbe le due specie perfettamente miscelate. Il processo di separazione di fase che ne consegue non viola, come si potrebbe pensare, la seconda legge della termodinamica, poiché, come abbiamo visto, il flusso molare è sempre rivolto da regioni in cui il potenziale chimico è maggiore a regioni in cui è minore: l'antidiffusione ha luogo perché nella lacuna di miscibilità il potenziale chimico può diminuire all'aumentare della concentrazione.

20.5 Generalizzazione per miscele qualsiasi

Più in generale, le miscele non ideali si possono descrivere definendo i coefficienti di attività γ_1 e γ_2 in modo che:

$$RT \ln \gamma_i = \left(\frac{\partial G^{ex}}{\partial N_i} \right)_{T, P, N_j \neq i}. \quad (20.5.1)$$

Dunque, confrontando questa relazione con la definizione (20.1.1) di μ_i , appare evidente che $RT \ln \gamma_i$ è uguale alla parte non ideale del potenziale chimico μ_i , proprio come $RT \ln x_i$ ne rappresenta invece la parte ideale. Dunque, procedendo come nel paragrafo 1, si ottiene:

$$g^{ex} = RT(x_1 \ln \gamma_1 + x_2 \ln \gamma_2), \quad (20.5.2)$$

che costituisce l'esatta omologa della (20.1.3) e della (20.1.7). Ora, sommando la (20.5.2) all'espressione (20.3.1) della g^{id} e applicando la (20.1.5), otteniamo la seguente espressione per il potenziale chimico:

$$\mu_1 = g_1 + RT \ln(x_1) + RT \ln(\gamma_1) = g_1 + RT \ln(x_1 \gamma_1). \quad (20.5.3)$$

Si noti infine che $\ln \gamma_i$, come μ_{li} , soddisfa l'equazione di Gibbs-Duhem (20.1.6):

$$x_1 \frac{d \ln \gamma_1}{dx_1} + x_2 \frac{d \ln \gamma_2}{dx_1} = 0 \Rightarrow x_1 \frac{d \ln \gamma_1}{dx_1} = x_2 \frac{d \ln \gamma_2}{dx_2}. \quad (20.5.4)$$

Ad esempio, nel caso di soluzioni regolari, $\ln \gamma_1 = \Psi x_2^2$ e $\ln \gamma_2 = \Psi x_1^2$ e dunque l'equazione di Gibbs-Duhem è identicamente soddisfatta.

A questo punto, dalla equazione costitutiva (20.4.2) si ottiene:

$$J_1 = -\frac{Dx_1}{RT} \frac{d\mu_1}{dx_1} \nabla x_1 \Rightarrow J_1 = -D^* \nabla x_1, \quad (20.5.5)$$

dove

$$D^* = D \left[1 + x_1 \frac{d \ln \gamma_1}{dx_1} \right] = D \left[1 + \frac{d \ln \gamma_1}{d \ln x_1} \right]. \quad (20.5.6)$$

Anche in questo caso, scambiando gli indici 1 e 2, troviamo che

$$J_2 = -D^* \nabla x_2, \quad (20.5.7)$$

dove, applicando la (20.5.4),

$$D^* = D \left[1 + x_2 \frac{d \ln \gamma_2}{dx_2} \right] = D \left[1 + x_1 \frac{d \ln \gamma_1}{dx_1} \right], \quad (20.5.8)$$

che rivela che, come deve essere, il coefficiente di diffusione della specie 1 in 2 è uguale al coefficiente di diffusione di 2 in 1.

20.6 La pressione osmotica

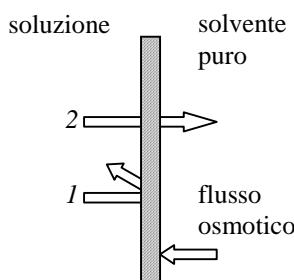


Figura 20.6.1

Il flusso osmotico è forse il più comune flusso antidiiffusivo e accade ogni volta che una membrana separa una soluzione dal suo solvente. Si consideri ad esempio il caso in cui la membrana sia permeabile al solvente, ma completamente impermeabile al soluto (vedi **figura 20.6.1**). In questo caso, il solvente in soluzione ha un potenziale chimico più basso e dunque tende a fluire dal solvente puro alla soluzione, cioè, con da sinistra a destra della membrana, con riferimento alla **figura 20.6.1**. In pratica, in accordo con la regola di Le Chatelier, il solvente tende a portare le concentrazioni di soluto allo stesso valore nei due lati della membrana, ma per farlo fa fluire il solvente verso regioni in cui la sua concentrazione è più alta. Questo flusso fa aumentare la pressione della soluzione, finché questo effetto bilancia il flusso osmotico e si raggiunge l'equilibrio termodinamico. A questo punto, la differenza di pressione tra i due lati della membrana si dice *pressione osmotica*, $\Delta\pi$.

cui la sua concentrazione è più alta. Questo flusso fa aumentare la pressione della soluzione, finché questo effetto bilancia il flusso osmotico e si raggiunge l'equilibrio termodinamico. A questo punto, la differenza di pressione tra i due lati della membrana si dice *pressione osmotica*, $\Delta\pi$.

Per determinare la relazione tra pressione osmotica e concentrazione del soluto (specie 1), si consideri che all'equilibrio il potenziale chimico del solvente (specie 2) deve essere lo stesso ai due lati della membrana.⁶ Dunque:

$$\mu_2^{solv}(T, P) = \mu_2^{soluz}(T, P + \Delta\Pi, x_1), \quad (20.6.1)$$

dove $\mu_2^{solv} = g_2$ è l'energia libera del solvente puro. Inoltre, nel caso di soluzioni ideali (ad esempio, quando la soluzione è diluita), otteniamo:

$$\mu_2^{soluz}(T, P + \Delta\Pi, x_1) = g_2(T, P + \Delta\Pi) + RT \ln x_2, \quad (20.6.2)$$

e

$$g_2(T, P + \Delta\Pi) = g_2(T, P) + \tilde{V}_2 \Delta\Pi, \quad (20.6.3)$$

dove $\tilde{V}_2 = (\partial g_2 / \partial P)_T$ è il volume molare del solvente. Nel caso diluito, con $\ln(1-x_1) \approx -x_1$, otteniamo l'equazione di *van't Hoff*:

$$\Delta\Pi = \frac{RT}{\tilde{V}_2} x_1 = RT c_1. \quad (20.6.4)$$

Spesso, si usa la pressione osmotica per descrivere il flusso diffusivo di un soluto attraverso una membrana, dunque anche quando la membrana è permeabile al soluto. Infatti, detti D il coefficiente di diffusione del soluto nella membrana, α il coefficiente di partizione tra la membrana e la soluzione e d lo spessore della membrana, si ottiene il seguente flusso molare diffusivo di soluto, J_1 ,

$$J_1 = \frac{\alpha D}{d} (c_1 - 0) = \omega \Delta\Pi; \quad \omega = \frac{\alpha D}{dRT}, \quad (20.6.5)$$

dove abbiamo supposto che, mentre da un lato della membrana la concentrazione di soluto sia c_1 , dall'altro lato sia 0. Nella letteratura biofisica, il coefficiente ω è detto *permeabilità*, anche se dal punto di vista ingegneristico non lo è affatto (le unità di misura non sono m^2) e si tratta invece di un coefficiente di scambio molare.

In generale, se tra i due lati della membrana viene applicata una differenza di pressione ΔP , la velocità media del solvente soddisfa l'equazione di Darcy e dunque è proporzionale alla differenza di pressione totale, cioè al ΔP a cui si è sottratta, quando occorre, la pressione osmotica:

$$v = \frac{\kappa}{\mu d} (\Delta P - \sigma \Delta\Pi), \quad (20.6.6)$$

dove κ è la permeabilità della membrana (quella vera!). σ è il *coefficiente di riflessione*, con $\sigma=1$ quando la membrana è permeabile al solvente, ma impermeabile al soluto, mentre $\sigma=0$ quando la membrana è ugualmente permeabile a soluto e solvente.

⁶ Si noti che è solo il solvente ad essere all'equilibrio ai due lati della membrana, essendo il soluto confinato da una parte sola.

Quando, come in questo caso, il flusso molare di soluto attraverso la membrana ha anche una componente convettiva, oltre che una diffusiva, la (20.6.5) si generalizza nel modo seguente:

$$J_1 = (1 - \sigma') \bar{c}_1 v + \omega \Delta \Pi, \quad (20.6.7)$$

dove anche σ' è un *coefficiente di riflessione*, in genere uguale a σ , mentre \bar{c}_1 è una concentrazione media del soluto nella membrana.

Appendice 1 - Alcune proprietà di composti puri a 1 atm.

Fluido	ρ (kg/m ³)	μ (10 ⁻² g/cm*s)	v (10 ⁻² cm ² /s)	σ^* (dyn/cm)	k (W/m*K)	c_p (J/Kg*K)	α (10 ⁻² cm ² /s)
Gas a 300K							
Aria	1.16	0.0185	15.9	0 (misc.)	0.0263	1010	22.5
NH ₃	0.692	0.0103	14.8	0 (misc.)	0.0246	2298	15.5
CO ₂	1.789	0.0149	8.40	0 (misc.)	0.0166	852	10.9
CH ₄	0.644	0.0111	17.3	0 (misc.)	0.0342	2240	23.7
N ₂	1.12	0.0178	15.10	0 (misc.)	0.0259	1040	22.1
H ₂	0.0819	0.00896	109	0 (misc.)	0.182	14320	155
O ₂	1.31	0.0200	11.6	0 (misc.)	0.027	911	22.6
Liquidi a 300K							
Acetone	782	0.331	0.423	24	0.169	2180	0.0991
Acqua	988	1.002	1.014	73	0.600	4180	0.143
Acqua, 100°C	958	0.279	0.0291	59	0.670	4220	0.168
Alcol etilico	802	1.05	1.31	22.5	0.168	2460	0.0853
Alcol metilico	785	0.53	0.675	23	0.200	2480	0.103
Benzene	881	0.58	0.658	29	0.144	1730	0.0945
Glicerina	1260	1490	1200	63	0.287	2380	0.95
Mercurio	1350	1.51	0.114	435	0.00858	139	4.56
Olio d'oliva	916	84	91.7	35			
Olio SAE-5W-30	860	96.3	112	36.5	0.138	1850	0.0867
Olio SAE-10W-30	872	108	124	35	0.136	1840	0.0855
Olio Castor	970	986	1016	35	0.145	2161	0.069
Propanolo	803	1.72	2.14	24	0.154	2477	0.0774
Solidi a 300K							
Alluminio	2702				236	902	97
Cromo	7160				95	451	29
Rame	8933				401	385	116
Acciaio inox	7900				14	477	4.0
Ferro	7870				83	440	23
Uranio	19070				27	116	12
Mattone	1600				0.7	840	0.52
Carbone	1370				0.24	1260	0.14
Argilla	1500				1.4	880	1.1
Sabbia	1500				0.3	800	0.25
Vetro da finestra	2700				0.84	800	0.39
Vetro Pyroceram	2600				4.1	810	1.9
Ghiaccio	920				2.2	2000	1.2
Polistirene	50				0.025		
Sughero	160				0.043	1900	0.14
Granito	2640				3.0	800	1.4
Pelle umana					0.37		
Legno di quercia	600				0.17	2400	0.12
Legno compensato	550				0.12	1200	0.18
Lana	200				0.038		

* All'interfaccia con l'aria.

Appendice 2 - Viscosità e tensione superficiale di alcuni fluidi

Fluidi a 27°C	Viscosità		Tensione sup. *(dyn/cm)
	Shear rate (s ⁻¹)	Viscosità (cP)	
Liquidi newtoniani			
Acqua	225-450	1.0	73
Olio vegetale	22-45	42	33.5
Olio d'oliva	22-45	39	33.5
Salsa di soia La Choy	225-450	3.11	53
Aceto bianco Heinz	225-450	0.82	56
Sciropello antitosse	90-450	17.5	47
Spic & span	90-450	7.2	31
Coca Cola (classic)	90-450	1.4	50
Latte intero	225-450	2	48
Latte scremato	225-450	1.3	50
Liquidi pseudoplastici			
Antiacido "Mylanta"	22 45	50 43	29
Detergente per piatti "Dawn"	2 11	185 158	24
Baby Shampoo "J.&J."	1 2.3	364 321	32
Lozione solare "Coppertone"	4.5 11 22	75 72 67	33

* All'interfaccia con l'aria.

Appendice 3 - Le equazioni del moto

A3.1 Coordinate cartesiane x,y,z.

Il tensore degli sforzi ha componenti:

$$\left. \begin{array}{l} T_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ T_{xy} = T_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ T_{yz} = T_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ T_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} T_{xz} = T_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ T_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right|$$

L'equazione di continuità e quella di Navier-Stokes si scrivono:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

L'equazione del calore è la seguente:

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{S}{\rho c_p}$$

Nel seguito, riportiamo queste equazioni in coordinate cilindriche, r, ϕ, z e sferiche, r, θ, ϕ , dove:

$$x = r \cos \phi; \quad y = r \sin \phi; \quad z = z$$

e

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta.$$

A3.2 Coordinate cilindriche r, ϕ, z .

Il tensore degli sforzi ha componenti:

$$\left. \begin{array}{l} T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ T_{\phi\phi} = T_{zz} = \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \\ T_{rz} = T_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ T_{rr} = T_{\phi\phi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r} v_\phi \right) \\ T_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right|$$

L'equazione di continuità e quella di Navier-Stokes si scrivono:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ & \frac{Dv_r}{Dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right], \\ & \frac{Dv_\phi}{Dt} = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right], \\ & \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

L'equazione del calore è la seguente:

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{S}{\rho c_p}$$

A3.3 Coordinate sferiche r, θ, ϕ .

Il tensore degli sforzi ha componenti:

$$\left| \begin{array}{l} T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial x} \\ T_{r\phi} = T_{\phi r} = \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ T_{\theta\phi} = T_{\phi\theta} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \\ T_{r\theta} = T_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\theta \right) \\ T_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r \right) \\ T_{\phi\phi} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \end{array} \right|$$

L'equazione di continuità e quella di Navier-Stokes si scrivono:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \\ & \frac{Dv_r}{Dt} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ & + \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(r^2 v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right], \\ & \frac{Dv_\theta}{Dt} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ & + \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right], \\ & \frac{Dv_\phi}{Dt} = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \\ & + \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]. \end{aligned}$$

L'equazione del calore è la seguente:

$$\begin{aligned} & \frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} = \\ & \alpha \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{S}{\rho c_p} \end{aligned}$$

Appendice 4 - Fattori di conversione

Costanti

R costante universale dei gas = $8.31 \text{ J/(g} \times \text{mol} \times \text{K})$ = $1544 \text{ ft} \times \text{lbf}/(\text{lb} \times \text{mol} \times {}^\circ\text{F})$

N Numero di Avogadro = $6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Lunghezza $1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 0.3048 \text{ m}$ $1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$ $1 \text{ mi (mile)} = 1.609 \text{ Km}$ $1 \text{ yd (yard)} = 3 \text{ ft} = 0.9144 \text{ m}$	Volume $1 \text{ L (litro)} = 10^3 \text{ cm}^3$ $1 \text{ gal (U.S. gallon)} = 3.785 \text{ L} = 3785 \text{ cm}^3$ $= 231 \text{ in}^3 = 0.1337 \text{ ft}^3$
Massa $1 \text{ lbm (pound-mass)} = 16 \text{ oz} = 0.45359 \text{ kg}$ $= 7000 \text{ grains}$ $1 \text{ oz (ounces)} = 1/16 \text{ lbm} = 28.35 \text{ g}$ $1 \text{ ton} = 2000 \text{ lb} = 907 \text{ kg}$	Densità $1 \text{ lb/ft}^3 = 16.02 \text{ kg/m}^3$ $1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$
Forza $1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ N}$ $1 \text{ lbf (pound-force)} = 4.448 \text{ N}$ $1 \text{ poundal} = 0.138 \text{ N}$	Pressione $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 100 \text{ kPa}$ $1 \text{ atm (atmosfere)} = 101.325 \text{ kPa}$ $1 \text{ psi} = 6.895 \text{ kPa}$ $1 \text{ mm Hg (Torr)} = 133.3224 \text{ Pa}$
Energia $1 \text{ erg} = 1 \text{ dyne} \times \text{cm} = 10^{-7} \text{ J}$ $1 \text{ Btu (British Thermal Units)} = 1054 \text{ J}$ $1 \text{ cal (calorie)} = 4.1868 \text{ J}$ $1 \text{ kWh (kilowattore)} = 1 \text{ kW} \times \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$	Potenza $1 \text{ hp (horsepower)} = 0.746 \text{ kW}$ $1 \text{ Btu/s} = 1.054 \text{ hp} = 1.054 \text{ kW}$ $1 \text{ ft} \times \text{lbf/s} = 1.356 \text{ W}$
Conducibilità termica $1 \text{ Btu/(h} \times \text{ft} \times {}^\circ\text{F)} = 1.731 \text{ W/(m} \times \text{K)}$ $1 \text{ cal/(s} \times \text{cm} \times \text{K)} = 418.4 \text{ W/(m} \times \text{K)}$	Calore specifico $1 \text{ Btu/(lb} \times {}^\circ\text{F)} = 4190 \text{ J/(Kg} \times \text{K)}$ $1 \text{ cal/(g} \times \text{K)} = 4190 \text{ J/(Kg} \times \text{K)}$
Diffusività e viscosità cinematica $1 \text{ ft}^2/\text{s} = 0.0929 \text{ m}^2/\text{s}$ $1 \text{ ft}^2/\text{h} = 2.58 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	viscosità dinamica $1 \text{ cP (centipoise)} = 10^{-3} \text{ kg/(m} \times \text{s)}$ $1 \text{ poise} = 1 \text{ g/(cm} \times \text{s)} = 0.1 \text{ kg/(m} \times \text{s)}$ $1 \text{ lb/(ft} \times \text{s)} = 1.49 \text{ kg/(m} \times \text{s)}$
Tensione superficiale $1 \text{ lbf/ft} = 14.59 \text{ N/m}$	Coefficiente di scambio termico $1 \text{ Btu/(ft}^2 \times \text{h} \times {}^\circ\text{F)} = 5.68 \text{ W/(m}^2 \times \text{K)}$ $1 \text{ cal/(cm}^2 \times \text{s} \times \text{K)} = 4.184 \times 10^4 \text{ W/(m}^2 \times \text{K)}$

B Alcune applicazioni in ingegneria biomedica

In questo capitolo, studiamo alcune applicazioni dello studio dei fenomeni di trasporto nel campo dell'ingegneria biomedica.

B.1 Progettazione di un rene artificiale

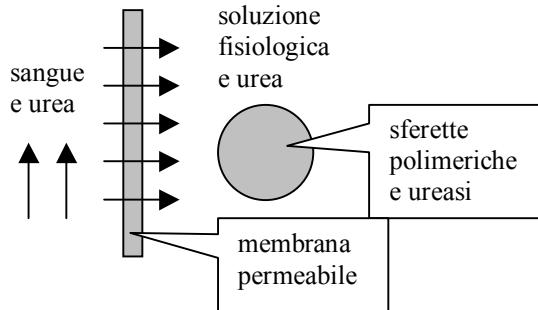


Figura B.1.1

Una delle funzioni fondamentali dei reni è quella della rimozione dell'urea dal sangue¹. L'obiettivo di questo paragrafo è quello di progettare un dispositivo (che chiamiamo rene artificiale) che permetta di ridurre la concentrazione di urea nel sangue della metà durante un'ora di trattamento. Per far ciò, si utilizzano delle sferette polimeriche in cui si incapsula l'enzima *ureasi*, che reagisce con l'urea e la distrugge. Queste sferette vengono immerse in una soluzione fisiologica, la quale è separata dai tubicini capillari in cui scorre il sangue da una membrana permeabile.

Tale membrana protegge il sangue dalle contaminazioni virali che potrebbero prodursi a causa del suo contatto diretto con le sferette polimeriche. Nel concreto, vogliamo determinare le dimensioni ottimali e il numero delle sferette necessarie, insieme al numero e alla lunghezza dei tubicini capillari in cui scorre il sangue.

19.1.1 Le sferette polimeriche

Supponiamo di avere delle sferette polimeriche, in cui è stato incapsulato l'enzima *ureasi*, a contatto con una soluzione acquosa contenente urea con concentrazione c_o . L'urea diffonde all'interno delle sferette, dove reagisce con l'*ureasi*. Il nostro obiettivo è quello di massimizzare l'utilizzazione dell'enzima, in modo che, a parità della quantità di enzima impiegato, la conversione dell'urea sia massima.

Supponiamo anzitutto che la reazione all'interno delle sferette ubbidisca ad una cinetica del prim'ordine, in modo che il numero di moli che reagisce per unità di tempo e di volume sia $-kc$, dove c è la concentrazione dell'urea e k è una costante, che si può supporre proporzionale alla concentrazione di *ureasi*. La diffusione di un soluto in una sfera con reazione chimica omogenea del primo ordine è stata studiata nel paragrafo 14.3, dove si è visto che a regime il flusso di soluto entrante è:

$$N(R) = -D \left(\frac{dc}{dr} \right)_{r=R} = \frac{Dc_o}{R} \left[\sqrt{Da} \coth \sqrt{Da} - 1 \right], \quad (\text{B.1.1})$$

¹ In realtà, in una persona normale, il rene rimuove anche molte altre sostanze, quali 1500 g/giorno d'acqua, 5 g/giorno di Na^+ , 10 g/giorno di Cl^- , 8.2 g/giorno di HSO_4^- , 3.7 g/giorno di PO_4^{3-} , 2.2 g/giorno di K^+ . Gran parte di queste sostanze vengono rimosse durante la dialisi controllando la composizione della soluzione dializzante.

dove $Da = kR^2/D$ è il numero di Damkohler, che esprime il rapporto tra flusso dovuto alla reazione e quello dovuto alla diffusione. Dunque, il consumo totale di urea è dato da:

$$F_{tot} = 4\pi R^2 n N(R) = 4\pi R n D c_o \left[\sqrt{Da} \operatorname{Coth} \sqrt{Da} - 1 \right], \quad (\text{B.1.2})$$

dove n è il numero di sferette impiegate. Adesso vogliamo massimizzare F_{tot} per una data quantità di enzima impiegato, cioè fissando il prodotto del volume delle sferette, V_{tot} , per la costante di reazione k (che supponiamo proporzionale alla concentrazione di enzima). Ciò significa massimizzare il rapporto adimensionale seguente:

$$\Phi = \frac{F_{tot}}{V_{tot} k c_o} = \frac{4\pi R n D c_o \left[\sqrt{Da} \operatorname{Coth} \sqrt{Da} - 1 \right]}{\frac{4}{3} \pi R^3 n k c_o} = 3 \frac{\sqrt{Da} \operatorname{Coth} \sqrt{Da} - 1}{Da}. \quad (\text{B.1.3})$$

Si noti che il denominatore di Φ è uguale alla quantità totale di urea consumata quando la concentrazione di urea all'interno delle sferette è costante e uguale a c_o . In queste condizioni, l'enzima all'interno delle sferette viene utilizzato al massimo: per valori non piccoli di Da , infatti, la concentrazione di urea dentro le sferette diminuirebbe (per valori elevati di Da , addirittura, la concentrazione si annulla da una certa profondità in poi). Naturalmente, il profilo di concentrazione è piatto quando la diffusione prevale sulla reazione, cioè quando Da è piccolo. Infatti, plottando Φ in funzione di Da (vedi **figura B.1.2**), vediamo che $\Phi=1$ per $Da \ll 1$, mentre $\Phi=3/\sqrt{Da}$ quando $Da \gg 1$. Dunque il massimo di Φ è $\Phi=1$, che viene raggiunto per $Da=1$ (circa), cioè per

$$R_{mx} = \sqrt{D/k}. \quad (\text{B.1.4})$$

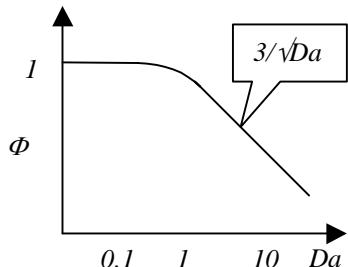


Figura B.1.2

Non c'è alcun bisogno di ridurre ulteriormente il raggio delle sferette, perché Φ rimane uguale ad 1 e il flusso totale di urea è uguale al suo valore massimo,

$$F_{tot} = \frac{4}{3} \pi R^3 n k c_o. \quad (\text{B.1.5})$$

Si noti che dalla (B.1.5) appare come la quantità di soluto consumato dipenda solo dalla reazione chimica e non dalla diffusione, cioè il processo sia controllato dalla reazione.

Questo è vero in generale: quando prevalgono i flussi diffusivi (cioè per $Da \ll 1$) il processo viene controllato dalla reazione, mentre quando a prevalere sono i flussi reattivi (cioè per $Da \gg 1$) il processo è controllato dalla diffusione. In quest'ultimo caso, infatti, il flusso alla parete è uguale a Dc_o/δ , dove $\delta=R/\sqrt{Da}$ è lo spessore dello strato limite molare; da qui, con facili passaggi, otteniamo ancora $\Phi=3/\sqrt{Da}$.

A questo punto, possiamo controllare se l'ipotesi di reazione omogenea del primo ordine sia corretta. Infatti, dalla (B.1.5) vediamo che, quando utilizziamo sferette con $R < R_{max}$, il consumo di urea risulta proporzionale a c_o , cioè $y = (F_{tot}/V_{tot}) = kc_o$. Dunque, se misuriamo y per due diversi valori di c_o , è facile verificare se la retta che congiunge i due punti del diagramma $y-c_o$ passa dall'origine. Se questo è il caso, abbiamo verificato che la

reazione urea-ureasi è veramente del primo ordine, e il coefficiente angolare della retta è uguale a k .

Una volta misurato k , possiamo misurare anche D . Infatti, usando delle sferette con $R >> R_{max}$ (da cui $\Phi = 3/\sqrt{Da}$), da una misura del consumo di urea e dunque di Φ otteniamo $D = kR^2\Phi^2/9$.

Tipici valori numerici sono $k = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $D = 0.9 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$. Da qui otteniamo: $R_{max} = 0.095 \text{ cm} \approx 1 \text{ mm}$.

B.1.2 L'impianto per la dialisi

Ora passiamo a progettare un impianto che ci permetta di far diminuire la concentrazione di urea nel sangue. Un tipico impianto da dialisi si può schematizzare come in **figura B.1.3**, in cui il sangue viene pompato con flusso volumetrico Q dal corpo del paziente (dove è presente con volume V_b) allo scambiatore a membrana, in cui il sangue viene depurato e poi pompato indietro al corpo del paziente. Nello scambiatore a membrana l'urea passa dal sangue alla soluzione fisiologica di volume V_o , dove viene assorbita dall'ureasi contenuta nelle sferette polimeriche progettate nel paragrafo precedente. La concentrazione di urea è c_b

quando lascia il corpo, c_m quando lascia lo scambiatore e c_o nella soluzione fisiologica. Affinché l'urea passi dal sangue alla soluzione fisiologica dobbiamo fare in modo che $c_m >> c_o$. Adesso facciamo alcune ipotesi. Anzitutto, supponiamo che il sangue nel corpo e nella soluzione fisiologica sia ben miscelato, in modo che le concentrazioni di urea c_b e c_o siano uniformi nei volumi V_b e V_o . Poi, per poter determinare c_m , dobbiamo fissare la geometria

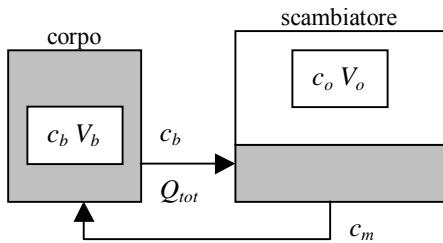


Figura B.1.3

dello scambiatore. Al riguardo, supponiamo che lo scambiatore sia determinato da una serie di N fibre cave a sezione circolare di lunghezza L , raggio interno R_i e raggio esterno $R_o = R_i + d$, dove d è lo spessore della membrana (che, talvolta, è sottile, con $d \ll R_i$). Da un lato della membrana abbiamo il sangue, contenente urea con una concentrazione c che varia con la distanza z dall'imbocco (vedi **figura B.1.4**), mentre dall'altro lato, la concentrazione c_o è molto minore e si può trascurare. Il flusso molare di urea che attraversa la membrana è stato calcolato nel paragrafo 8.2.2:

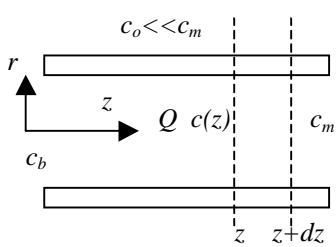


Figura B.1.4

$$N(z) = \frac{\alpha_m D_m c(z)}{R_i \ln(R_o/R_i)} \xrightarrow{d \ll R_i} \frac{\alpha_m D_m c(z)}{d}, \quad (\text{B.1.6})$$

dove α_m e D_m sono la solubilità e la diffusività dell'urea nella membrana. La relazione (B.1.6) si può anche scrivere come

$$N(z) = P c; \quad P = \frac{\alpha_m D_m}{R_i \ln(R_o/R_i)}, \quad (\text{B.1.7})$$

dove P è un coefficiente di scambio molare.²

Ora si consideri il trasporto di urea in un condotto (vedi **figura B.1.4**) in cui il sangue fluisce con flusso volumetrico $Q = Q_{tot}/N = \pi R_i^2 U$, dove U è la velocità media del sangue. In genere, a regime, la concentrazione di urea c è una funzione di z e di r . Tuttavia, quando nel trasporto di urea in direzione radiale il flusso diffusivo è molto maggiore di quello dovuto alla permeabilità della parete, la concentrazione si può ritenere indipendente da r . In analogia con il caso termico (si veda il paragrafo 8.2, in cui h e k sono sostituiti da P e D), ciò accade quando il numero di Biot molare è piccolo, cioè:

$$Bi_m = \frac{PR_i}{D} \ll 1. \quad (\text{B.1.8})$$

A questo punto, supponendo che $c=c(z)$, scriviamo il bilancio molare di urea nel tratto di condotto compreso tra z e $z+dz$:

$$Q[c(z) - c(z + dz)] = P c(z) 2\pi R_i dz. \quad (\text{B.1.9})$$

Quando la relazione (B.1.8) non è soddisfatta, c va interpretata come una concentrazione media $\langle c \rangle$, esattamente come per il caso termico [vedi Eq. (11.5.3)]. La (B.1.9) si può riscrivere come:

$$\frac{dc(z)/dz}{L} = -c(z)/\delta; \quad \frac{\delta}{L} = \frac{Q}{2\pi R_i L P} = \frac{Q_{tot}}{A_i P} = \frac{U R_i}{2 L P}, \quad (\text{B.1.10})$$

dove L è la lunghezza dei condotti, mentre $A_i = 2\pi R_i L N$ è la superficie totale di scambio, riferita al raggio interno. Da qui, imponendo $c(z=0) = c_b$ e $c(z=L) = c_m$, otteniamo:

$$c(z) = c_b e^{-z/\delta} \Rightarrow c_m = c(L) = c_b e^{-L/\delta} \Rightarrow \lambda = \frac{c_b - c_m}{c_b} = 1 - e^{-L/\delta}. \quad (\text{B.1.11})$$

Dunque, la concentrazione di urea ad ogni passaggio diminuisce di un fattore $\lambda = 1 - e^{-L/\delta}$.

Adesso consideriamo un bilancio molare di urea nel corpo del paziente:

$$V_b \frac{dc_b}{dt} = -Q_{tot}(c_b - c_m). \quad (\text{B.1.12})$$

sostituendo la (B.1.11) nella (B.1.12) e risolvendo con condizione iniziale $c_b(t=0) = c_{b0}$ otteniamo:

$$c_b = c_{b0} \exp(-\lambda t/\tau); \quad \tau = V_b / Q_{tot}, \quad (\text{B.1.13})$$

² Si è usato il simbolo P , invece del più usuale k , perché, impropriamente, nella letteratura biomedica P viene detto spesso chiamato "permeabilità".

dove τ è il tempo di svuotamento del sangue (o di svenamento). Da qui vediamo che, imponendo che la dialisi duri un tempo ragionevole, otteniamo una condizione che λ e τ devono rispettare. Ad esempio, supponendo che la concentrazione di urea si riduca della metà dopo un tempo di trattamento t_s , si ha la condizione seguente:

$$c_b(t_s)/c_{b0} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_s \lambda / \tau = \ln 2 = 0.693, \quad (\text{B.1.14})$$

Verifichiamo ora se e quando l'ipotesi $c_o \ll c_m$ sia verificata. Scriviamo un bilancio molare di urea sullo scambiatore a membrana, imponendo che l'urea che attraversa la membrana, a regime, sia uguale a quella assorbita dalle sferette polimeriche.

$$k\alpha_b c_o \phi_b V_o = Q_{tot}(c_b - c_o), \quad (\text{B.1.15})$$

dove abbiamo supposto che $c \equiv c_b$ nei condotti, α_b è la solubilità dell'urea nelle sferette (che nel paragrafo precedente si è supposta uguale ad 1) e ϕ_b è la frazione volumetrica di sferette nella soluzione fisiologica, in modo che il volume totale delle sferette sia $V_{tot} = \phi_b V_o$. A questo punto, sostituendo la (B.1.11) nella (B.1.15) e imponendo (arbitrariamente) che $c_o/c_b = 0.05$, otteniamo un'altra condizione da rispettare:

$$\frac{c_o}{c_b} = \frac{Q_{tot} \lambda}{k \alpha_b \phi_b V_o} = 0.05. \quad (\text{B.1.16})$$

B.1.3 Esempio numerico

Supponiamo di disporre di fibre cilindriche con $R_i = 1mm$ e $P = 4 \times 10^3 cm/s$. Imponiamo le condizioni seguenti: 1) ad ogni passaggio attraverso lo scambiatore il sangue perda il 95% dell'urea (cioè $\lambda = 0.95$); 2) La velocità media del sangue nei condotti sia $U = 0.2 cm/s$; 3) la concentrazione di urea nel corpo si riduca della metà dopo al massimo 2 ore di trattamento ($t_s = 7200s$).

Anzitutto, determiniamo la lunghezza dei canali L .

Dalla (B.1.11), con $c_m/c_b = 0.05$, otteniamo: $L/\delta = \ln(c_b/c_m) = \ln 20 \cong 3$. Da qui, dalla (B.1.10), otteniamo: $\delta = UR_i/2P = 2.5 cm$, da cui $L = 7.5 cm$.

Incidentalmente, la concentrazione di urea nel canale non è uniforme in direzione assiale, perché il numero di Biot molare (B.1.8), con $D = 2 \times 10^{-5} cm^2/s$, risulta uguale a 20 e dunque c è la concentrazione media. Questa lunghezza L va bene. Se non fosse stata adeguata, avremmo potuto cambiare, ma di poco, la velocità U oppure decidere che imporre $c_m/c_b = 0.05$ non è realistico e procedere al contrario: stabilire una lunghezza L , determinare δ dalla (B.1.10) e infine c_m/c_b dalla (B.1.11).

Adesso determiniamo il numero di canali N .

Dalla (B.1.13), imponendo $c_b(t_s)/c_{b0} = \frac{1}{2}$, otteniamo: $t_s \lambda / \tau = \ln 2 = 0.693$, dove $\lambda = 0.95$, mentre $\tau = V_b/Q_{tot}$, dove $Q_{tot} = NQ$. Considerando che il volume di sangue in una persona è di circa 5 litri, otteniamo: $Q_{tot} = 0.51 cm^3/s$ e dunque $N = 81$. (Nella realtà, il raggio R_i è più piccolo e il numero di condotti è maggiore). Il valore di Q_{tot} è molto piccolo, perché corrisponde a circa lo 0.5% del flusso sanguigno, che in condizioni normali è di circa 5.5

$L/min \approx 92 \text{ cm}^3/\text{s}$. Allora, possiamo imporre invece $Q_{tot} = 0.3 L/min \approx 5 \text{ cm}^3/\text{s}$, corrispondente a circa il 5% del flusso sanguigno, ottenendo: $t_s = 730\text{s}$.

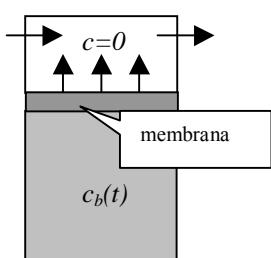
Alla fine, verifichiamo che la condizione $c_o < c_b$ sia rispettata. La condizione (B.1.16), con i valori numerici $k = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $\alpha_b = 1$, si traduce in $\phi_b V_o = 95 \text{ L}$ quando $Q_{tot}=5 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $\phi_b V_o = 9.5$ quando $Q_{tot}=0.5 \text{ cm}^3/\text{s}$. Siccome però ϕ_b non può essere troppo grande (altrimenti non riesce ad agitare la sospensione), imponiamo $\phi_b = 0.2$, da cui: V_o varia da 50 a 500 litri. Questo è un valore alto, e da qui si vede che realizzare un apparecchio da dialisi portatile non è facile.

Invece di tubicini, avremmo potuto anche servirci di canali di altezza $2H = 100 \mu\text{m}$ e profondità $W = 8 \text{ cm}$. In questo caso, per motivi strutturali, la membrana deve essere più spessa che nell'esempio precedente, con $P = 2 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$. Supponendo U e λ inalterati, si ottiene ancora $\delta = UH/2P = 2.5 \text{ cm}$, da cui $L = 7.5 \text{ cm}$. Si noti che in questo caso il numero di Biot molare PH/D è piccolo e uguale a 0.05; dunque, il profilo di concentrazione dell'urea è omogeneo in direzione assiale.

Il calcolo di Q_{tot} è identico al caso precedente. Da lì, poi, si determina il numero dei canali.

Infine, vediamo come si misura P .

Dalla **figura B.1.5**, considerando la membrana di area A_m spessore H_m in cui l'urea diffonde con diffusività D_m e solubilità α_m , da un bilancio molare otteniamo:



$$V \frac{dc_b}{dt} = - \frac{\alpha_m D_m c_b A_m}{H_m} = -PA_m c_b .$$

dove $P = \alpha_m D_m / H_m$ è il coefficiente di scambio molare (altrimenti detto permeabilità nella letteratura biomedica). Dunque si ottiene:

$$c_b = c_{b0} \exp(-Pt/H),$$

dove c_{b0} è la concentrazione iniziale di urea nel sangue, mentre $H=V/A_m$.

Ad esempio, supponendo che in un dispositivo con $V = 1000 \text{ cm}^3$ e $A_m = 200 \text{ cm}^2$ (dunque con $H = 5 \text{ cm}$) la concentrazione di urea diminuisce del 10% in 22 minuti, otteniamo: $\ln(c_b/c_{b0}) = \ln(0.9) = - (P/H) t = - 264 P$, da cui: $P = 4 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$.

B.2 Modello di membrana per il rilascio controllato dei farmaci

Nell'industria biomedica si sono sviluppati vari sistemi che forniscono un rilascio controllato dei farmaci, in particolare un cosiddetto rilascio di ordine zero, cioè costante nel tempo. Chiaramente, per effetto della diffusione, il flusso massico del farmaco tenderebbe a diminuire, dal momento che, quando il farmaco diffonde, la sua concentrazione decresce nel tempo, e con essa la forza spingente. Per controbilanciare l'effetto della legge di Fick sono state proposte numerose alternative, tra le quali la più comune, oggi, è quella di un rilascio doppio, in cui il farmaco inizialmente si trova, molto concentrato, all'interno di particelle che a loro volta vengono inserite in una matrice più grande (ad esempio un cerotto) che fa da volano. Dunque il farmaco prima diffonde nella matrice, dove la concentrazione del farmaco varia più lentamente che nelle particelle, per poi diffondere da lì nel luogo desiderato. Questo sistema, tuttavia, non è sempre attuabile e, inoltre, il rilascio non è costante, poiché anche nel rilascio doppio la forza spingente diffusiva continua a diminuire, anche se ciò avviene più lentamente rispetto al sistema a rilascio semplice. Dunque, sono stati proposti altri metodi per garantire un rilascio costante del farmaco, in cui alla diffusione si accoppia un altro meccanismo di trasporto che in qualche modo ne possa bilanciare l'effetto.

In questo capitolo, vogliamo illustrare brevemente un sistema a controllo enzimatico, in cui la diminuzione del flusso del farmaco di tipo diffusivo è compensata dall'aumento della porosità della matrice, dovuto ad una erosione enzimatica. Dunque, con il procedere del processo di rilascio del farmaco, la forza spingente diffusiva diminuisce, ma il coefficiente di diffusione aumenta. Ad esempio, si può utilizzare una matrice polimerica bioartificiale, composta cioè da una miscela di materiale polimerico sintetico e di un polimero naturale, dove il primo fornisce alla membrana le proprietà meccaniche necessarie (in particolare, la rigidità), mentre il secondo assicura la biocompatibilità richiesta. In questo caso, ad esempio, si può utilizzare un copolimero di etilene e alcol vinilico come polimero sintetico e l'amido come polimero naturale. Inoltre, l'amido si degrada nel corpo umano in presenza di acqua per l'azione di alcuni enzimi, tra cui l' α -amilasi, producendo maltosio, insieme ad altri composti. Dunque, intrappolando questo enzima nell'amido della matrice polimerica, la porosità del sistema aumenta nel tempo e, scegliendo una concentrazione adeguata di amido, si può fare in modo l'aumento nella diffusività efficace che ne deriva compensi la diminuzione di forza spingente diffusiva.

B.2.1 Permeabilità idraulica e diffusività efficace

Le proprietà fisiche più importanti della membrana sono la permeabilità idraulica e la diffusività efficace. La permeabilità κ misura la facilità con cui un fluido attraversa un mezzo poroso omogeneo e si misura, nel nostro caso, considerando che la velocità media del fluido, V , è proporzionale alla differenza di pressione esercitata a cavallo della membrana, ΔP . Questa è la legge di Darcy [vedi Eq. (4.4.80)],

$$V = \frac{k}{\mu L} \Delta P, \quad (\text{B.2.1})$$

dove μ è la viscosità del fluido ed L lo spessore della membrana. Utilizzando la correlazione semi-empirica di Blake-Kozeny, la permeabilità è data da [vedi Eq. (4.4.10)]

$$\kappa = \frac{\delta^2 \varepsilon^3}{150(1-\varepsilon)^2}, \quad (\text{B.2.2})$$

dove ε è la porosità della matrice e δ è la dimensione dei pori. Questo mostra che la permeabilità κ cresce all'aumentare sia della porosità che della dimensione dei pori.

La seconda quantità fisica di interesse è la diffusività efficace, che misura quanto facilmente un soluto diffonda in un materiale composto. Supponiamo che da una parte della membrana ci sia un fluido in cui sia disiolto un soluto, a bassa concentrazione c_s , mentre dall'altra parte della membrana il fluido si possa considerare puro, cioè il soluto sia continuamente rimosso. In assenza di differenza di pressione (e dunque di convezione), il flusso massico di soluto, J_s , è determinato tramite la legge di Fick,

$$J_s = \frac{D}{L} c_s. \quad (\text{B.2.3})$$

dove D è la diffusività efficace, uguale, in questo caso, al prodotto della diffusività molecolare, D_m e di una costante che dipende solo dalla microstruttura della matrice.³

In un caso più complesso, il flusso massico di soluto J_s è indotto sia dalla differenza di pressione che da quella di concentrazione mantenute a cavallo della membrana. Infatti, in presenza di convezione, J_s è determinato nel modo seguente:

$$J_s = cV - D \frac{dc}{dz}, \quad (\text{B.2.4})$$

dove z è la distanza dalla superficie della membrana (cioè la coordinata in direzione longitudinale), $c = c(z)$ è la concentrazione locale di soluto, D la diffusività efficace, mentre V è la velocità media del fluido solvente, a sua volta proporzionale alla differenza di pressione secondo la Eq. (B.2.1). Si noti che la diffusività efficace, in genere, è una funzione del campo di moto convettivo e dunque D in (B.2.4) non è affatto uguale a D in (B.2.3). In particolare, quando a livello microscopico la convezione domina la diffusione, cioè quando il numero di Peclet microscopico è molto grande, $N_{Pe} = V\delta/D_m \gg 1$, la diffusività efficace risulta proporzionale al numero di Peclet, cioè⁴

$$D = \alpha^{-1} D_m N_{Pe} = \alpha^{-1} V \delta \quad \text{quando} \quad N_{Pe} = V\delta / D_m \gg 1, \quad (\text{B.2.5})$$

dove il coefficiente $\alpha (>1)$ è una specie di coefficiente di tortuosità, che dipende dalla microstruttura. Da qui si vede che la diffusività efficace può essere anche diversi ordini di grandezza più grande della diffusività molecolare.

³ In genere, la presenza di inclusioni solide crea un impedimento al moto delle particelle di soluto e dunque la diffusività efficace è minore di quella molecolare.

⁴ Questo risultato si può ottenere facilmente in base all'analisi dimensionale. Una prova più formale si può trovare su pubblicazioni specialistiche ed esula dagli scopi di questo testo.

Allo stazionario, risolvendo l'equazione $dJ_s/dz = 0$ con condizioni al contorno $c(0) = c_s$ e $c(L) = 0$, si ottiene (vedi capitolo 16.1):

$$N_{Sh} = \frac{N}{1 - e^{-N}}, \text{ with } N_{Sh} = \frac{J_s}{Dc_s / L} \text{ and } N = \frac{VL}{D} = \frac{L}{\alpha\delta}. \quad (\text{B.2.6})$$

Qui N_{Sh} indica il numero di Sherwood, cioè il rapporto tra il flusso massico di soluto e la sua componente diffusiva a livello macroscopico, mentre N rappresenta il rapporto tra la scala di lunghezza macroscopica e quella microscopica. Si noti che N si può anche interpretare come un numero di Peclet macroscopico, cioè il rapporto tra il flusso massico macroscopico convettivo e quello diffusivo. Poiché nel nostro caso $N \gg 1$, si ottiene:

$$\lim_{N \gg 1} N_{Sh} = N, \text{ cioè } \lim_{N \gg 1} J_s = \frac{k c_s}{\mu L} \Delta P. \quad (\text{B.2.7})$$

Utilizzando questi risultati, si vede che la permeabilità si può misurare anche determinando il flusso massico di soluto in presenza di una differenza di pressione e una di concentrazione note.

B.2.2 Erosione e attività enzimatica

L'idrolisi, cioè il processo di erosione enzimatica, ha luogo in due stadi. Prima, l'amido deve penetrare nella membrana (trasportato dall'acqua) e raggiungere le pareti dei pori; poi, la reazione enzimatica può aver luogo e l'amido reagisce con l'enzima che si trova intrappolato nella matrice, producendo maltosio. In generale, il tempo caratteristico del processo sarà la somma di un tempo di penetrazione, τ_p , e un tempo di reazione, τ_r . Dunque, poiché possiamo assumere che la velocità di razione, R_s , è proporzionale alla concentrazione c_s dell'amido, otteniamo:

$$R_s = r_s c_s, \text{ dove } r_s = \frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{\tau_p + \tau_r}. \quad (\text{B.2.8})$$

Ovviamente, la cinetica dell'idrolisi è dominata dal più lento dei due processi. Nel nostro caso, poiché $\tau_p \ll \tau_p$, otteniamo:

$$R_s = r_s c_s = \frac{c_s}{\tau_p}. \quad (\text{B.2.9})$$

Ora, inizialmente, la membrana è secca e dunque l'acqua, contenente l'amido, penetra nella membrana per flusso capillare. Supponendo che le pareti dei pori siano bagnabili dall'acqua (cioè che l'angolo di contatto sia di 0 °), la velocità con cui il menisco si sposta in direzione longitudinale (cioè perpendicolare alla superficie della membrana) nella matrice è il seguente (vedi Capitolo 4.6 e problema 4.11):

$$\frac{dz}{dt} = V_\sigma = \frac{\sigma\delta}{4\mu\alpha^2 z}, \quad (\text{B.2.10})$$

dove σ è la tensione superficiale, z la profondità di penetrazione e α un coefficiente di tortuosità. Quest'ultimo tiene conto del fatto che nel nostro modello i pori sono assimilabili a dei tubicini di raggio δ , che vanno da una parte all'altra della membrana (cioè sono passanti) in modo non rettilineo e dunque, detta l la lunghezza media del poro, si ha: $\alpha=l/L$. Da qui possiamo determinare prima la profondità di penetrazione dopo un tempo t e dopo la velocità media:

$$z = \sqrt{\frac{\sigma\delta t}{2\alpha^2\mu}} \Rightarrow V_\sigma = \sqrt{\frac{\sigma\delta}{8\alpha^2\mu t}}. \quad (\text{B.2.11})$$

Questo stadio durerà finché la profondità di penetrazione sarà uguale a metà dello spessore della membrana, cioè per tempi,

$$t < \bar{t} = \frac{\alpha^2 L^2 \mu}{2\sigma\delta}. \quad (\text{B.2.12})$$

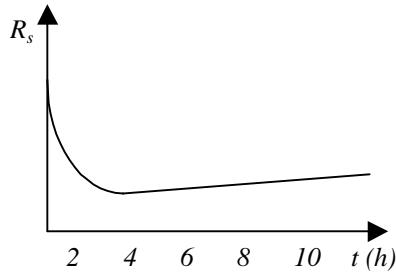


Figura B.2.1

Ora, considerando che il processo è dominato dalla convezione⁵, la quantità di amido che reagisce per unità di tempo, J_{tot} , è uguale a quello che entra nella membrana, il quale, a sua volta, è uguale al prodotto del flusso massico dell'amido entrante, $J_c = c_s V_\sigma$ e l'area della superficie bagnabile della membrana, εS , dove ε è la porosità e S la superficie totale della membrana. Dunque, considerando che il volume della membrana è uguale a LS , concludiamo che la velocità di reazione idrolitica, R_s (cioè la quantità di amido che reagisce per unità di tempo e di volume della membrana) è dato da:

$$R_s = \frac{J_c(\varepsilon S)}{SL} = \frac{\varepsilon c_s}{\alpha L} \sqrt{\frac{\sigma\delta}{8\mu t}}. \quad (\text{B.2.13})$$

A parte costanti di $O(1)$, questo risultato si può ottenere anche dalla (B.2.9), dove $\tau_p \approx L/V_\sigma$ e $V_\sigma \approx \sigma\delta/(\mu L \alpha^2)$ [ovviamente, nello stesso modo, si ottiene anche la (B.2.12)]. Dunque, supponendo che la porosità ε e la dimensione dei pori, δ , non cambi in modo significativo, ci aspettiamo che in questo stadio iniziale la velocità di reazione decresca nel tempo come $t^{-1/2}$.

⁵ Cioè il numero di Peclet è molto alto; vedi la discussione dopo Eq. (19.2.4).

Per tempi successivi, cioè per $t > \bar{t}$, non c'è più convezione e dunque l'amido penetra nella membrana per via diffusiva. Dunque, il tempo caratteristico di penetrazione è quello diffusivo, $\tau_d = \alpha^2 L^2 / D_m$. Dunque otteniamo:

$$R_s = r_s c_s, \text{ dove } r_s = \frac{1}{\tau_d} = \frac{D_m}{\alpha^2 L^2}. \quad (\text{B.2.14})$$

Da qui vediamo che in questo stadio, poiché con il progredire della reazione enzimatica la costante di tortuosità α diminuisce, la velocità di reazione idrolitica aumenta col tempo. I risultati sperimentali, ottenuti con una membrana di alcol etilenvinilico, amido e α -amylasi e illustrati nella **figura 19.2.1**, sono in buon accordo con questo modello.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI – PARTE 1

Capitolo 0

Esercizio 0.1

Indichiamo con $M=\rho L^3$ la massa del tacchino, dove L è una sua dimensione lineare. Poichè $L^2 \approx 2\alpha T$, dove T è il tempo che il calore impiega per penetrare e α è la diffusività termica, otteniamo che $T/M^{2/3} \approx l/(2\rho^{2/3}\alpha) = C$. Calcoliamo C per i tre casi indicati in tabella.

$M[Kg]$	$T[s]$	C
2.5Kg	$55min/Kg \times 60s/min \times 2.5Kg = 8250s$	4480
4.5Kg	$45min/Kg \times 60s/min \times 4.5Kg = 12150s$	4460
7.5Kg	$40min/Kg \times 60s/min \times 7.5Kg = 18000s$	4690
11.5Kg	$35min/Kg \times 60s/min \times 11.5Kg = 24150s$	4740

Dalla tabella appare che C non cambia di molto. Possiamo anche stimare la diffusività termica del tacchino, pari ad $\alpha = 1/(2\rho^{2/3} \times C) \approx 10^{-6} m^2/s = 10^{-2} cm^2/s$. Dunque la diffusività termica del tacchino è circa la stessa di quella dell'acqua.

Capitolo 1

Esercizio 1.1

La pressione dipende solo dalla quota, $p=p_o+\rho g z$, dove abbiamo assunto che $z=0$ al pelo dell'acqua e $z=2L$ sul fondo. Dunque, a metà altezza, per $z=L=20\text{cm}$, troviamo che pressione è la stessa nei tre casi e uguale a:

$$\Delta p = \rho g L = (10^3 \text{ Kg m}^{-3}) (9.8 \text{ m s}^{-2}) (0.2 \text{ m}) = 1960 \text{ Pa}; \quad p \approx 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

La forza che agisce sulla superficie laterale è dovuta soltanto all'eccesso di pressione dovuta alla presenza dell'acqua, poiché la pressione atmosferica agisce anche sulla superficie esterna dei contenitori, producendo una forza diretta verso l'interno. Dunque F è uguale all'integrale superficiale dell'eccesso di pressione Δp , così che nel caso con contenitore cilindrico (primo a sinistra), considerando che l'area infinitesima della superficie laterale è uguale a $\pi L dz$, si ottiene:

$$F = \left| L \int_0^{2L} \Delta p dz \right| = L \left(\rho g \frac{4L^2}{2} \right) = 2L^2 (\rho g L) = 156.8 \text{ N}.$$

Considerando che $2L^2$ è uguale all'area della superficie laterale, troviamo così che F è pari alla forza che si otterrebbe assumendo Δp costante e uguale al suo valore a metà altezza. Ovviamente, ciò si poteva facilmente prevedere ricordando che p varia linearmente con la profondità. Nello stesso modo, si vede che il momento calcolato rispetto al centro di massa è il seguente:

$$\Gamma = \left| L \int_0^{2L} \Delta p (L - z) dz \right| = \frac{2}{3} \rho g L^4 = 10.45 \text{ Nm}.$$

Negli altri due casi, con contenitori "conici", la pressione è la stessa che nel caso precedente, ma la superficie laterale è più estesa e dunque anche forza e momento sono maggiori.

Esercizio 1.2

La forza che agisce sull'elemento di volume infinitesimo è $dF = 2\pi\rho L \omega^2 r^2 dr$. Questa forza è bilanciata dal cambio di pressione, cioè $dp = dF / (2\pi r L) = \omega^2 r \rho dr$. Si noti che questa relazione è identica all'Eq. (1.2), con l'accelerazione di gravità ($-g$) sostituita dalla accelerazione centrifuga ($\omega^2 r$). Integrando si trova:

$$p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} \omega^2 \rho r dr = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (r_1^2 - r_2^2).$$

Esercizio 1.3

Sul pelo libero la pressione è costante e uguale alla pressione atmosferica. Poiché in un dato punto a distanza r dall'asse e quota z la pressione è uguale a $p = -\rho g z + \rho \omega^2 r^2 / 2 + C$, (nota: p diminuisce all'aumentare di z e al diminuire di r) imponendo $p=p_a$ e scegliendo la quota di riferimento in modo che $C=0$, si determina l'equazione cercata,

$$z = z(r) = \omega^2 r^2 / 2g - p_a / \rho g.$$

Esercizio 1.4

Sostituendo (1.1.3) nella (1.1.1) troviamo: $dp/p = -(M_w g / RT)dz$. A questo punto, se supponiamo che T sia costante, troviamo l'equazione barometrica (1.1.4). Se invece, come in questo caso, $T=T_o - \alpha z$, cioè la temperatura è una funzione lineare decrescente della quota, otteniamo:

$$\frac{dp}{p} = -\left(\frac{M_w g}{RT_o}\right) \frac{dz}{1 - \alpha z / T_o}.$$

Integrando questa equazione tra $z=0$, dove $p=p_o$, e z , troviamo:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \ln\left(\frac{p}{p_o}\right) = -\left(\frac{M_w g}{RT_o}\right) \int_0^z \frac{dz}{1 - \alpha z / T_o} = \left(\frac{M_w g}{R\alpha}\right) \ln\left(1 - \frac{\alpha}{T_o} z\right),$$

da cui si ottiene:

$$p = p_o \left(1 - \frac{\alpha}{T_o} z\right)^{\frac{M_w g}{R\alpha}}.$$

Da qui troviamo:

$$z = \frac{T_o}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{R\alpha}{M_w g}} \right].$$

Nel caso in esame, $T_o=288K$; $\alpha=0.005K/m$; $M_w=29Kmol/Kg$; $g=9.8m/s^2$; $R=8314J/Kmol K$; $p_o/p=2$. Dunque si trova: $z=5553m$.

Esercizio 1.5

La densità media dell'aria si calcola usando la (1.1.3), trovando:

$$\rho = \frac{M_w p}{RT} = \frac{29 \frac{Kg}{Kmol} \times 570mmHg \times \frac{10^5 N / m^2}{760mmHg}}{8314 \frac{J}{KmolK} \times 273K} = 0.96 \frac{Kg}{m^3}.$$

A questo punto, usando la (1.1.2) otteniamo:

$$z = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{380mmHg \times \frac{10^5 N / m^2}{760mmHg}}{0.96 \frac{Kg}{m^3} \times 9.8 \frac{m}{s^2}} = 5324m.$$

Si noti che il risultato è simile a quello precedente.

Esercizio 1.6

Applicando l'equazione (1.7) si ottiene:

$$\Delta p = (\rho_A - \rho_B)g\Delta z = (13.6 - 1.6)10^3 Kg / m^3 \times 9.8m / s^2 \times 0.2m = 23.52 kPa$$

Esercizio 1.7

Facili calcoli consentono di calcolare che il diametro delle goccioline è di $D_d=0.35\text{ cm}$. A questo punto troviamo:

$$\sigma = 0.244 \rho g D_d^3 / D_c = 76.4 \text{ dyn/cm} = 0.076 \text{ N/m}$$

Chiaramente, il valore è troppo alto. Comunque, considerando che il coefficiente 1.6 è un dato sperimentale, c'è da attendersi un errore del 10%, e così il conto torna.

Esercizio 1.8

Considerando che $\dot{V} = V_d f$, dove $V_d = \pi D_d^3 / 6$ è il diametro di una goccia di diametro D_d , applicando la (1.3.5) otteniamo: $V_d = 0.68 (\pi \sigma D_c) / (\rho g)$, da cui: $X/\dot{V} = 1.46$, in buon accordo con i dati sperimentali.

Esercizio 1.9

Il numero di Weber esprime il flusso di quantità di moto in forma adimensionale: $We = (\rho v^2) / (\sigma/D)$, dove $v = \dot{V} / (\pi D^2 / 4)$ è la velocità del liquido nel capillare. Da $We = 1$ otteniamo: $\dot{V} = (\pi^2 D^3 \sigma / 16 \rho)^{1/2}$. Dunque, poiché $\dot{V} = V_d f$, dove $V_d = \pi D_d^3 / 6$ è il diametro di una goccia di diametro D_d , applicando la (1.3.4) otteniamo:

$$f(D/g)^{1/2} = 0.366 Bo^{1/2}$$

Nel caso in esame troviamo: $f = 13 \text{ gocce/s}$

Capitolo 2

Esercizio 2.1

Supponiamo che $N = L^a \mu^b \rho^c V^d$, dove N è un numero (ovviamente adimensionale), mentre a, b, c , e d sono costanti da determinare. Adesso consideriamo le dimensioni delle varie grandezze, indicando con L la lunghezza, M la massa e T il tempo:

$$[L] = L; \quad [\mu] = M L^{-1} T^{-1}; \quad [\rho] = M L^{-3}; \quad [V] = L T^{-1}.$$

Dunque otteniamo:

$$[N] = L^{a-b-3c+d} M^{b+c} T^{-b-d},$$

da cui, considerando che N è adimensionale, cioè $[N] = L^0 M^0 T^0$, otteniamo:

$$a-b-3c+d = 0; \quad b+c = 0; \quad b+d = 0, \quad \text{cioè } a = -b = c = d,$$

cioè:

$$N = (\rho V L / \mu)^a.$$

Da qui si vede che dalle quattro grandezze indicate si può "costruire" un solo gruppo adimensionale, cioè il numero di Reynolds $Re = \rho V L / \mu$. Ovviamente, una qualsiasi potenza di Re è ancora un gruppo adimensionale, ma non è indipendente da Re .

Esercizio 2.2

Lo spessore dello strato limite dipende dalla distanza L dall'imbocco del tubo. Dall'equazione (2.11) otteniamo: che $\delta \approx \sqrt{(L \nu / V)}$, e imponendo che $\delta = R$ possiamo concludere:

$$R = \sqrt{\frac{L \nu}{V}}, \quad \text{da cui:} \quad L = R \left(\frac{VR}{\nu} \right), \quad \text{cioè} \quad \frac{L}{R} = Re.$$

Questo calcolo sovrastima la lunghezza L necessaria per arrivare a regime, poichè in esso si assume che il fluido si muove con velocità V anche all'interno dello strato limite, il che non è vero. In realtà si ottiene approssimativamente:

$$\frac{L}{R} = 0.1 Re.$$

Esercizio 2.3

Anche qui troviamo: $L \approx Vt = VR^2 / \nu = R Re$. Come nel problema precedente, abbiamo assunto che durante il tempo t il fluido si muove con velocità V , cosa che non è vera nello strato limite, e dunque il risultato finale risulta sovrastimato.

Esercizio 2.4

Si noti che qui, come d'uso, il numero di Reynolds è definito in funzione del diametro del tubo $D=2R$, cioè $Re=VD/\nu=VD\rho/\mu$.

- a) L'acqua a $10^\circ C$ ha una densità di 1000 Kg/m^3 e una viscosità di 1 cP , cioè 0.001 Kg/ms . Perciò si ottiene:

$$\text{Re} = \frac{2m/s \times 0.1m \times 10^3 \text{Kg/m}^3}{10^{-3} \text{Kg/ms}} = 2.10^5. \text{ Moto turbolento.}$$

b) L'aria a 60°C ha una viscosità di 0.02cP , cioè $2 \cdot 10^{-5}\text{Kg/ms}$, e ad una pressione di 2atm ha una densità data dall'equazione (1.4), pari a

$$\rho = \frac{18\text{Kg/Kmol} \times 2.10^5 \text{N/m}^2}{8314\text{Nm/KmolK} \times 333\text{K}} = 1.3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}.$$

Dunque si ottiene:

$$\text{Re} = \frac{15m/s \times 0.3m \times 1.3\text{Kg/m}^3}{2.10^{-5} \text{Kg/ms}} = 3.10^5. \text{ Moto turbolento.}$$

c) $\text{Re} = \frac{0.2m/s \times 0.015m \times 1200\text{Kg/m}^3}{1\text{Kg/ms}} = 3.6. \text{ Moto laminare.}$

Capitolo 3

Esercizio 3.1

Il flusso di energia cinetica, J_E , è uguale all'energia cinetica E_C contenuta nel cilindro di volume $Sv\Delta t$, pari al prodotto di $\rho v^2/2$ per il volume, divisa per S e per Δt , cioè

$$J_{cE} = \frac{E_C}{S\Delta t} = \frac{1}{2} \rho v^3.$$

Esercizio 3.2

Dalla figura 3.7 appare che, poichè la forza totale esercitata dal fluido sul contenitore è nulla, l'eccesso di forza $p\Delta S$ esercitata sulle pareti verticali (cioè le sezioni del tubo) deve essere compensata da una forza uguale e contraria esercitata sulle aree laterali.

Esercizio 3.3

In questo caso la forza esercitata sulle pareti laterali è pari a $\Delta S(p + \Delta p/2)$, e dunque uguale ancora a $p\Delta S$, trascurando il termine $\Delta S\Delta p$, che è un infinitesimo di ordine superiore.

Esercizio 3.4

Il fattore correttivo è definito come $\alpha = \langle v^3 \rangle / \langle v \rangle^3$. Nel nostro caso $v = V_{\max} (1 - \xi^2)$, dove $\xi = y/L$, con $0 < \xi < 1$. Dunque

$$\langle v \rangle = V_{\max} \int_0^1 (1 - \xi^2) d\xi = V_{\max} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} V_{\max}.$$

$$\langle v^3 \rangle = V_{\max}^3 \int_0^1 (1 - \xi^2)^3 d\xi = V_{\max}^3 \int_0^1 (1 - 3\xi^2 + 3\xi^4 - \xi^6) d\xi = V_{\max}^3 \left(1 - \frac{3}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{35} V_{\max}^3.$$

Quindi : $\alpha = \frac{16 \times 3^3}{35 \times 2^3} = \frac{54}{35} = 1.54$. Questo risultato è lo stesso per qualsiasi profilo piano parabolico (ad esempio, lo stesso profilo definito per $-1 < \xi < 1$).

Nel caso di profilo parabolico in una sezione circolare otteniamo:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\pi R^2} V_{\max} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = 2V_{\max} \int_0^1 (1 - \xi^2) \xi d\xi = 2V_{\max} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} V_{\max}.$$

$$\langle v^3 \rangle = 2V_{\max}^3 \int_0^1 (1 - \xi^2)^3 \xi d\xi = 2V_{\max}^3 \int_0^1 (\xi - 3\xi^3 + 3\xi^5 - \xi^7) d\xi = 2V_{\max}^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{4} V_{\max}^3.$$

$$\text{Quindi : } \alpha = \frac{2^3}{4} = 2.$$

Esercizio 3.5

$$\rho_1 = \frac{p_1 M_w}{RT} = \frac{7 \times 10^5 \times 29}{8314 \times 300} = \frac{54}{35} = 8.14 \text{ kg/m}^3; \quad \rho_2 = \rho_1 / 7 = 1.16 \text{ kg/m}^3.$$

Bilancio di massa: $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$, da cui

$$v_1 = (\rho_2 / \rho_1) v_2 = (1.16 / 8.14) \times 30 = 4.3 \text{ m/s}.$$

Bilancio di quantità di moto:

$$\mathbf{F} = (\rho v^2 + \tilde{p})_1 \mathbf{S}_1 - (\rho v^2 + \tilde{p})_2 \mathbf{S}_2,$$

da cui:

$$F = \left(\frac{\pi}{4} 0.1^2 \right) [8.14 \times 4.3^2 + (7 \times 10^5 - 10^5) - 1.16 \times 30^2 - (10^5 - 10^5)] = 1.18 + 4715 - 8.2 - 0 = 4708 \text{ N}$$

dove abbiamo tenuto conto che la pressione è quella relativa e che \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 sono entrambi diretti nella stessa direzione positiva.

Esercizio 3.6

Qui il bilancio di massa dà banalmente: $v_1 = v_2$, mentre quello di quantità di moto è identico al caso precedente, con la differenza che $\mathbf{S}_2 = -\mathbf{S}_1$ e dunque i due termini che compongono \mathbf{F} si sommano anziché sottrarsi. Otteniamo:

$$F = \left(\frac{\pi}{4} 0.1^2 \right) [2 \times 1000 \times 20^2 + 2 \times 10^5 + 1.6 \times 10^5] = 6283 + 1571 + 1257 = 9110 \text{ N}$$

Esercizio 3.7

L'equazione di Bernoulli dà:

$$\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) + gH = 0$$

dove H è l'altezza del livello di liquido nel serbatoio. Assumendo che la sezione del serbatoio sia molto maggiore di quella dell'orifizio di uscita, $v_1 \ll v_2$, e dunque otteniamo:

$$v_2 = \sqrt{2gH}.$$

Questa è l'equazione di Torricelli, valida quando le perdite per attrito siano trascurabili. Si noti che v_2 è la velocità di un corpo in caduta libera da un'altezza H .

Esercizio 3.8

Da un bilancio di massa (variabile nel tempo) all'interno del serbatoio otteniamo:

$$dM/dt = -\rho v_2 S_2$$

dove v_2 è la velocità di uscita del liquido, S_2 è la sezione dell'orifizio, mentre $M = \rho H S_1$ è la massa di liquido nel serbatoio (H = altezza del battente liquido, S_1 = sezione del serbatoio). Considerando la legge di Torricelli (vedi esercizio precedente), otteniamo:

$$dH/dt = -(S_2/S_1) \sqrt{2gH} H^{1/2}$$

da risolversi con condizione iniziale: $H(t=0) = H_0$. Integrando tra tempo 0, quando $H=H_0$ e tempo τ , quando $H=0$, otteniamo:

$$\tau = \sqrt{2H_0/g} (S_1/S_2).$$

Si noti che abbiamo sostituito la legge di Torricelli, valida in condizioni stazionarie, in un bilancio (di massa, in questo caso) variabile nel tempo. Questa approssimazione si dice *pseudo-stazionario*, ed è valida quando i tempi caratteristici con cui si raggiunge lo stato stazionario (per cui l'espressione usata è valida) sono molto minori dei tempi di rilassamento caratteristici del problema. Nel nostro caso, la velocità di Torricelli viene raggiunta (fissato H) in un tempo dell'ordine di $\sqrt{S_2/v_2}$, mentre il tempo caratteristico del problema è τ , dunque l'ipotesi di quasi-stazionarietà è valida quando:

$$\sqrt{\frac{S_2}{gH_0}} \ll \left(\frac{H_0}{g}\right)^{1/2} \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \frac{S_2^{3/2}}{S_1 H_0} \ll 1.$$

Considerando valori tipici $H_0 = 1\text{ m}$, $S_1 = 1\text{ m}^2$ e $S_2 = 1\text{ cm}^2$, vediamo che la relazione, in genere, è soddisfatta.

Esercizio 3.9

Applicando Bernoulli sappiamo che $\Delta p/L = \rho h_f/L$, in cui

$$\frac{h_f}{L} = \frac{2fv^2}{D} = \frac{32f\dot{V}}{\pi D^5}, \text{ dove } f = f(Re) \text{ con } Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{4\dot{V}}{v\pi D}.$$

Troviamo: $Re = 2.5 \cdot 10^4$, per cui $f = 0.006$.

Dunque $h_f/L = 1956\text{ (m}^2/\text{s}^2\text{)}/\text{m} = 1956\text{ (J/m)}/\text{kg(m}^2\text{)}$.

Ciò significa che per ogni chilo di olio che fluisce c'è una perdita di 1956 J ogni metro di tubo. Le perdite per attrito sono: $\Delta p/L = 1956 \times 980 = 1.9\text{ MPa/m} = 19\text{ atm/m}$. L'energia "dissipata" per attrito è $\dot{Q}/L = \dot{m}h_f/L = \rho\dot{V}h_f/L = \dot{V}\Delta p/L = 19\text{ kW/m}$. Sono perdite energetiche, ma si tratta di un olio viscoso che fluisce a una velocità molto elevata!!

Esercizio 3.10

$h_f/L = (\Delta p/L)/\rho = 0.19 \times 1.013 \times 10^5 / 980 = 19.63\text{ (m}^2/\text{s}^2\text{)}/\text{m}$. Da $h_f/L = (2/D)f v^2$, deriviamo la formula di iterazione seguente: $v^{(n+1)} = [(h_f/L)D/2f]^{1/2}$, con $f = 0.079/Re^{1/4}$.

Supponiamo (iterazione 0) che la velocità sia $v^{(0)} \approx 0.2\text{ m/s}$, da cui $Re^{(0)} = 10^5$, così che $f^{(0)} = 0.0045$. Da qui troviamo la velocità, $v^{(1)} = [(h_f/L)(D/2f)]^{1/2} = 10.44\text{ m/s}$. Da qui troviamo (iterazione 1) $Re^{(1)} = 51 \cdot 10^5$, cui corrisponde $f^{(1)} = 0.00525$ e dunque $v^{(1)} = 9.66\text{ m/s}$. Si noti che anche se il numero di Reynolds è cresciuto di un fattore 50, la velocità cambiata soltanto del 10%. Continuando si vede che l'iterazione converge dopo due iterazioni in $v = 9.4\text{ m/s}$, per cui la portata volumetrica è uguale a $0.018\text{ m}^3/\text{s}$.

Esercizio 3.11

La potenza massima dissipata è data da

$$h_f = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 2f \frac{L}{D} \frac{\dot{V}^2}{(\pi D^2/4)^2} = 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

da cui

$$D^5 = \frac{32L\dot{V}^2}{\pi^2 h_f} f = 1.62 \cdot 10^{-3} f \Rightarrow D = 0.277 f^{0.2}$$

dove f dipende da $\text{Re} = \frac{\nu D}{\nu} = \frac{1274}{D}$. Si assuma inizialmente $f^{(0)} = 0.006$, da cui in base alle equazioni scritte sopra troviamo $D^{(0)} = 0.099m$ e $\text{Re}^{(0)} = 12795$. Da qui troviamo il nuovo $f^{(1)} = 0.00725$, cui corrisponde $D^{(1)} = 0.103 m$ eccetera. L'iterazione converge a $D = 10.4 \text{ cm}$.

Oppure, da $f = 0.0791/\text{Re}^{1/4} = 0.01322 D^{1/4}$, otteniamo:
 $D^{4.75} = 2.14 \cdot 10^{-5}$, da cui: $D = 0.104 m$.

Esercizio 3.12

Dai bilanci di massa e di energia tra la sezione di uscita dal tubo (0) e quella a distanza L otteniamo:

$$v_0 D_0^2 = v_L D_L^2;$$

$$(v_L^2 - v_0^2)/2 - gL = 0.$$

Dunque otteniamo: $v_0^2 [(D_0/D_L)^4 - 1] = 2gL$, e quindi:
 $(D_L/D_0) = (1 + 2gL/v_0^2)^{-1/4}$.

Esercizio 3.13

Prendendo come sezioni di riferimento i pelli liberi dei due serbatoi e applicando l'equazione di Bernoulli otteniamo:

$$(v_1^2 - v_2^2)/2 + g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho + \eta w_p = h_f.$$

Qui $v_1 = v_2$, $p_1 = p_2$, per cui $\eta w_p = g\Delta z + h_f$.

In questa espressione, $g\Delta z = 382 \text{ m}^2/\text{s}^2$, mentre

$$\eta w_p = \eta \dot{W}_p / \dot{m} = (0.7 \times 150 \cdot 10^3) / (10^3 \dot{V}) = 105 / \dot{V} \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Inoltre, $h_f = 2f(L/D) v^2$, dove $f = 0.0791 / \text{Re}^{1/4}$. Esprimendo v e Re in funzione della portata volumetrica come $v = 4\dot{V}/(\pi D^2) = 5.1 \dot{V}$ e $\text{Re} = 4\dot{V}/(\pi D v) = 2.5 \cdot 10^6 \dot{V}$, otteniamo $h_f = 202 \dot{V}^{1.75}$, e dunque:

$$\frac{105}{\dot{V}} = \underbrace{382}_{\text{en. pot.}} + \underbrace{202 \dot{V}^{1.75}}_{\text{attrito}}.$$

Si noti che abbiamo trascurato le perdite per attrito concentrate (contrazione, espansione, curva, ecc.). Infatti, esse danno ad h_f un contributo dell'ordine di v^2 , mentre le perdite distribuite sono dell'ordine di $100 v^2$ (per vederlo, basta assumere un valore "ragionevole" di $f = 0.004$).

Risolvendo per iterazioni, assumendo inizialmente attrito nullo, otteniamo: $\dot{V}^{(0)} = 0.27 \text{ m}^3/\text{s}$ e poi subito il risultato converge a $\dot{V} = 0.26 \text{ m}^3/\text{s}$. Per questi valori della portata, corrispondenti a $v = 1.4 \text{ m/s}$, si vede che le perdite per attrito contribuiscono solo al 5% delle perdite totali (pari alla potenza della pompa); il restante 95% delle perdite sono dovute al termine gravitazionale.

Esercizio 3.14

Convertendo le sezioni in unità SI otteniamo: $S_1 = 0.0032 \text{ m}^2$ e $S_2 = 0.0008 \text{ m}^2$. Da un bilancio di forze otteniamo:

$$F = (\rho v_1^2 + \tilde{p}_1)S_1 - (\rho v_2^2 + \tilde{p}_2)S_2$$

Si noti che le pressioni sono riferite alla pressione esterna p_2 , e dunque $\tilde{p}_2 = 0$. Dunque dobbiamo ricavare v_1 e \tilde{p}_1 . Il primo si deriva dall'equazione di conservazione della massa, $v_1 = v_2 S_2 / S_1 = 22/4 = 5.5 \text{ m/s}$ Il secondo si può determinare dall'equazione di Bernoulli, trascurando gli attriti,

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = \frac{1}{\rho}\tilde{p}_1 = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 226 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Infine troviamo:

$$F = \underbrace{968 - 3872}_{rinculo} + \underbrace{7232 - 0}_{pressione} = 4328 \text{ N}$$

Esercizio 3.15

a) Da un bilancio di forze tra due sezioni verticali 1 e 2 (di altezza H_1 e H_2 e ampiezza L_w), situate a cavallo della barriera, otteniamo:

$$F = (\rho v_1^2 + \tilde{p}_1)S_1 - (\rho v_2^2 + \tilde{p}_2)S_2,$$

dove $v_2 = \dot{V}/(H_2 L_w) = 7 \text{ m/s}$ e $v_1 = \dot{V}/(H_1 L_w) = 1.17 \text{ m/s}$ sono le velocità dell'acqua in direzione orizzontale. Le pressioni relative \tilde{p}_1 e \tilde{p}_2 sono riferite alla pressione atmosferica e sono le pressioni idrostatiche medie che agiscono sulle sezioni, cioè

$$\tilde{p}_1 S_1 = \rho g \frac{H_1}{2} (H_1 L_w); \quad \tilde{p}_2 S_2 = \rho g \frac{H_2}{2} (H_2 L_w).$$

Infine otteniamo:

$$\frac{F}{L_w} = 4083 + 44100 - 24500 - 1225 = 22.5 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

Il segno positivo indica che \mathbf{F} ha la stessa direzione del flusso, cioè quella indicata in figura, come del resto si evince dal fatto che il termine dominante è il secondo, corrispondente alla pressione idrostatica p_1 .

b) Supponendo che il flusso sia turbolento e che quindi il profilo di velocità sia piatto, la non uniformità della sollecitazione agente sul cancelletto è dovuta esclusivamente al fatto che la pressione idrostatica varia linearmente con la profondità. Dunque, detta $L = H_1 - H_2 = 2.5 \text{ m}$ l'altezza del cancelletto e procedendo come nell'esercizio 1.1, otteniamo che sul cancelletto si esercita una forza di pressione $P = \rho g L_w L^2/2$ e un momento delle forze (rispetto al centro di massa del cancelletto) $\Gamma = \rho g L_w L^3/12$.

c) Imponendo $F=0$, otteniamo:

$$0 = 48183 - 12500/H_2 - 4900/H_2^2, \text{ da cui } H_2 = 0.26 \text{ m}.$$

Per annullare F bisogna che il termine cinetico v_2^2 bilanci quello idrostatico p_1 e dunque è necessario decrescere la sezione S_2 .

Esercizio 3.16

Da un bilancio di massa otteniamo: $\bar{v}_0 D_0^2 = \bar{v}_1 D_1^2$. A questo punto, se applicassimo l'equazione di Bernoulli, considerando che pressione e quota sono costanti, otterremmo: $\bar{v}_0^2 = \bar{v}_1^2$, e quindi concluderemmo che $D_1 = D_0$. Tuttavia, dobbiamo ricordarci che l'equazione di Bernoulli proviene dall'equazione di conservazione dell'energia, in cui i termini non nulli sono i flussi, entranti ed uscenti, di energia cinetica:

$$\frac{1}{2} \rho \langle v^3 S \rangle_0 - \frac{1}{2} \rho \langle v^3 S \rangle_1 = 0,$$

dove la parentesi indica una media fatta sulla sezione. A questo punto, si consideri che $\langle v^3 \rangle = \alpha \bar{v}^3$, dove $\alpha_0 = 2$, poiché il profilo all'uscita del capillare è parabolico, mentre $\alpha_1=1$, perché poi il jet assume profilo uniforme (la resistenza dell'aria è trascurabile). Dunque otteniamo:

$$2\bar{v}_0^3 D_0^2 = \bar{v}_1^3 D_1^2 \Rightarrow \frac{D_1}{D_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} = 0.84.$$

La discrepanza rispetto al risultato sperimentale è dovuta al fatto che il profilo parabolico comporta delle dissipazioni "interne" (cioè non alle pareti) che non sono considerate nell'equazione di Bernoulli.

Il risultato corretto si ottiene invece con un bilancio di quantità di moto, che non soffre di questo difetto. Tenendo conto del fatto che non ci sono forze esterne applicate e che la pressione nelle due sezioni è uguale a quella atmosferica, otteniamo:

$$\rho \langle v^2 S \rangle_0 - \rho \langle v^2 S \rangle_1 = 0,$$

dove la parentesi indica una media fatta sulla sezione. A questo punto, si consideri che $\langle v^2 \rangle = \alpha \bar{v}^2$, dove $\alpha_0 = 4/3$, poiché il profilo all'uscita del capillare è parabolico, mentre $\alpha_1=1$, perché poi il jet assume profilo uniforme (la resistenza dell'aria è trascurabile). Dunque otteniamo:

$$\frac{4}{3} \bar{v}_0^2 D_0^2 = \bar{v}_1^2 D_1^2 \Rightarrow \frac{D_1}{D_0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} = 0.866,$$

in accordo coi risultati sperimentali.

Esercizio 3.17

Considerando che $V_{12} = V_{34} = V_{35} = V/3$, e $V_{13}=2V/3$, dove V è la portata volumetrica in ingresso, otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= C/D_1^4 \\ p_1 - p_3 &= 2C/D^4 \\ p_3 - p_4 &= C/D_2^4 \\ p_3 - p_6 &= 2C/D^4 \end{aligned}$$

dove $C = (128\mu LV) / (3\pi)$. Noto V , ci sono 4 incognite: p_1, p_3, D_1 e D_2 . Dunque, il problema è ben posto. Ponendo $p_2 = p_4 = p_6 = 0$, dalla seconda e quarta equazione otteniamo: $p_3 = 2C/D^4$ e $p_1 = 4C/D^4$. Dunque, dalla prima e terza equazione otteniamo:

$$D_1/D = (1/4)^{1/4} = 0.71; \quad D_2/D = (1/2)^{1/4} = 0.84$$

Esercizio 3.18

Anzitutto notiamo che, poichè $Re \approx 10$, siamo ampiamente in regime laminare. Inoltre, le perdite di carico idrostatiche, $\rho g L \approx 10^4 Pa$, sono molto minori di quelle per attrito. Queste, sono pari, indicativamente, a $2(L/D)f\rho v^2$, dove $f=16/Re$, in cui $Re=v_{12}D/\nu$ e $v_{12}=(4V)/(\pi D^2)$, dunque uguali a circa $3 \cdot 10^5 Pa$.

Applicando Bernoulli tra 1 e 2, 2 e 4 e 2 e 5, otteniamo:

$$p_1 - p_2 = Cv_{12}; \quad C = 32 L \mu / D^2$$

$$p_2 - p_4 = Cv_{24} + \rho g L$$

$$p_2 - p_5 = 2Cv_{25} + \rho g L$$

$$v_{12} = v_{24} + v_{25}$$

(l'ultima equazione esprime la conservazione della massa al nodo 2). Considerando che $p_4 = p_5 = p_{atm}$ e che v_{12} è noto, abbiamo 4 incognite (p_1 , p_2 , v_{24} e v_{25}) e 4 equazioni; dunque il problema è ben posto.

a) Dalle ultime tre equazioni otteniamo:

$$v_{24} = 2 v_{25} = (2/3) v_{12}, \text{ dove } v_{12} = (4V)/(\pi D^2) = 1.27 m/s.$$

b) Dalle prime due equazioni otteniamo, trascurando la pressione idrostatica:

$$p_1 = (5/3) C v_{12} = (160 L \mu v_{12} / 3 D^2) = 6.8 \cdot 10^5 Pa.$$

c) Adesso il numero di Reynolds è circa 1000 volte maggiore, e dunque siamo in regime turbolento. Inoltre, le perdite per attrito sono dello stesso ordine di quelle idrostatiche, poichè, rispetto al caso precedente, f è 100 volte più piccolo. Le equazioni si modificano nel modo seguente:

$$p_1 - p_2 = Cv_{12}^{7/4}; \quad C = 0.158 \rho v^{1/4} L / D^{5/4}$$

$$p_2 - p_4 = Cv_{24}^{7/4} + \rho g L$$

$$p_2 - p_5 = 2Cv_{25}^{7/4} + \rho g L$$

$$v_{12} = v_{24} + v_{25}$$

Dalle ultime tre equazioni otteniamo:

$$v_{24}^{7/4} = 2 v_{25}^{7/4}, \text{ cioè } v_{24} = 1.48 v_{25}.$$

Esercizio 3.19

Le equazioni di Bernoulli applicate ai due condotti sono le seguenti:

$$w_p - g\Delta H = h_f,$$

$$g\Delta H = h_f$$

dove $h_f = 2(L/D)f v^2$, con $f = 0.0791 / Re^{1/4}$; $Re = vD/\nu$ e $v = (4V)/(\pi D^2)$.

Otteniamo: $v = 8 m/s$, $Re = 3.2 \cdot 10^5$, $h_f = 26.6 m^2/s^2$.

a) Dalla seconda equazione otteniamo: $\Delta H = h_f/g = 2.7 m$.

b) Dalla prima equazione otteniamo: $w_p = 2g\Delta H = 53 m^2/s^2$, e dunque la potenza della pompa è $W_p = \rho V w_p = 0.53 kW$.

Esercizio 3.20

$\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) + gH = h_f = \frac{1}{2} v_2^2 \cdot 0.45 (1 - \beta)$. Dall'equazione di continuità troviamo: $v_1 = \beta v_2$ e dunque: $v_2^2 [1 - \beta^2 + 0.45(1-\beta)] = 2gH$. Anche quando $\beta=0$, l'equazione di Torricelli risulta modificata: $v_2 = \sqrt[4]{1.38gH}$.

Esercizio 3.21

Dall'equazione di Bernoulli:

$$-\eta w_p = (v_1^2 - v_2^2) / 2 + g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) / \rho - h_f.$$

Qui $v_1 = 0$, $p_1 = p_2$, per cui

$$\eta w_p = v_2^2 / 2 - g(z_1 - z_2) + h_f.$$

In questa espressione, $h_f = 2f(L/D) v^2$, dove $f = 0.0791 / Re^{1/4}$.

Esprimendo v_2 e Re in funzione della portata volumetrica come

$$v_2 = 4\dot{V} / (\pi D^2) = 9.7 \text{ m/s} \text{ e } Re = 4\dot{V} / (\pi D v) = 10^6,$$

otteniamo: $f = 0.003$, e dunque:

$$\begin{aligned} \eta w_p &= (9.7)^2 / 2 - 9.8 (160 - 151) + 2 \times 0.003 \times (9.7)^2 (91.5 / 0.12) \\ &= 47.3 - 89.6 + 431 = 389 \text{ m}^2/\text{s}^2. \end{aligned}$$

Dunque $w_p > 0$, che significa che ci deve essere una pompa per generare una portata volumetrica simile. Si noti che le perdite di carico sono dovute principalmente all'attrito.

Esercizio 3.22

Equazione di Bernoulli:

$$(v_1^2 - v_2^2) / 2 + g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) / \rho = h_f.$$

Scegliamo le due superfici di controllo 1 e 2 come il pelo dell'acqua e l'uscita del capillare. Qui $p_1 - p_2 = \Delta p$, pari alla pressione relativa dell'aria nel serbatoio, rispetto alla pressione atmosferica. Inoltre, $z_1 - z_2 = 0.3 \text{ m}$, $v_1 = 0$ e $v_2 = v_3 = 30 \text{ m/s}$, mentre $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Il termine h_f è uguale alla somma di tre termini con le perdite di carico distribuite, più il termine concentrato nel gomito, più le due contrazioni. Queste ultime sono la contrazione serbatoio- D_1 , con $\beta \approx 0$ e quella D_2-D_3 , con $\beta = D_3^2/D_2^2 = 0.09$. Inoltre $v_i = v_2 = v_3 D_3^2/D_2^2 = 2.7 \text{ m/s}$, da cui $Re_1 = Re_2 = 2.7 \cdot 10^4$ e $f_1 = f_2 = 0.006$, mentre $Re_3 = 9 \cdot 10^4$ e $f_3 = 0.0045$. In totale:

$$\begin{aligned} h_f &= (2L_1/D_1)v_1^2 + (2L_2/D_2)v_2^2 + (2L_3/D_3)v_3^2 + k_g v_1^2 / 2 + 0.45 v_1^2 / 2 + 0.45(1 - 0.09) v_3^2 / 2 = \\ &= 1.74 + 1.74 + 163 + 0.6 + 1.6 + 180 = 349 \end{aligned}$$

Dunque i due termini di gran lunga più importanti si riferiscono al capillare: le perdite distribuite e la perdita all'ingresso. L'equazione di Bernoulli ci dà:

$$(\Delta p / \rho) = \frac{1}{2} (30)^2 - (9.8)(0.3) + 349 = 796 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Dunque: $\Delta p = (1000) (796) = 8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Capitolo 4

Esercizio 4.1

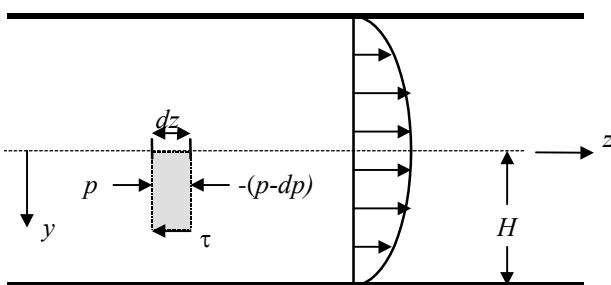


Figura 4.1P

cioè $dp/dz = \tau/y$. In particolare, quando $y=H$ si ha $\tau=\tau_w$, e quindi $\tau=\tau_w y/H$. Questa equazione è identica a quella vista nella sezione 4.1. Infatti, procedendo come nella Sezione 4.1, troviamo ancora:

$$v = \frac{\tau_w}{2\mu H} (H^2 - y^2) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right],$$

dove $v_{\max} = \tau_w H / 2\mu$. Adesso, poiché la velocità media è pari a $2/3$ la velocità massima (vedi esercizio 3.4), cioè $\bar{v} = 2v_{\max} / 3$, troviamo il profilo di velocità cercato. Da qui determiniamo le perdite di carico in funzione della portata (cioè della velocità media).

Infatti, da $\bar{v} = \frac{2v_{\max}}{3} = \frac{H}{3\mu} \tau_w$, sostituendo: $\tau_w = H \frac{dp}{dz}$, troviamo:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{3\mu \bar{v}}{H^2}.$$

Questo risultato è analogo a quello visto nella sezione 4.1.

Esercizio 4.2

Il problema è lo stesso dell'esercizio precedente. Qui la portata massica è data da $\dot{m} = \rho \bar{v} (Hb)$, e si definisce la portata per unità di larghezza $\Gamma = \dot{m} / b = \rho \bar{v} H$. Inoltre le perdite di carico per unità di lunghezza dp/dz sono pari a $\rho g \cos \beta$. Dunque l'ultima equazione scritta nella soluzione dell'esercizio precedente si può riscrivere come: $\rho g \cos \beta = 3\mu(\Gamma/\rho H)/H^2$. Da qui otteniamo il risultato cercato.

Esercizio 4.3

Il flusso è a basso numero di Reynolds e dunque possiamo trascurare le perdite di carico associate con la curva a gomito e assumere che il flusso nei canali di spessore $2H$ sia laminare. Dunque, il profilo di velocità in quei tratti è quello visto nell'esempio 4.1, cioè

$$v = \frac{3}{2} \bar{v} \left[1 - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right]; \quad \bar{v} = \frac{\dot{V}}{4HW},$$

Anzitutto notiamo che la geometria del problema è metà di quella che descrive il flusso in un canale (vedi figura 4.1P).

Da un bilancio di forze sull'elementino in figura (di spessore b), ricordando che lungo l'asse lo sforzo di taglio è nullo, si ottiene:

$$(by)p - (by)(p-dp) - (bdz)\tau = 0,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che in ognuno dei canali fluisce soltanto la metà della portata volumetrica complessiva. Inoltre, come visto nel problema 4.1, da un bilancio di forze troviamo: $dp/dz = \tau_w/H$, e considerando che $\tau = \mu dv/dy$, otteniamo:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{3\mu\bar{v}}{H^2} = \frac{3\mu\dot{V}}{4H^3W}; \quad p(z) = p_0 - \frac{3\mu\dot{V}}{4H^3W}z,$$

dove p_0 la pressione all'imbocco del canale. Si noti il segno negativo, dovuto alla convenzione di segno usata per dp nel problema 4.1. Dunque $\Delta p = (3\mu L \dot{V})/(4WH^3)$.

Esercizio 4.4

In generale, la forza verso l'alto esercitata dal fluido su un elementino di area Wdz della piastra è uguale a $pWdz$. Questa forza deve bilanciare il peso della piastra più l'effetto della pressione atmosferica e dunque

$$Mg = 2W \int_0^L \tilde{p}(z) dz.$$

Supponiamo (soggetto a verifica a posteriori) che il flusso nel condotto sia laminare, così che profilo di velocità perdite di carico siano uguali a quelle del problema precedente. Otteniamo:

$$Mg = \frac{3\mu\dot{V}L^2}{4H^3} \Rightarrow H = \left[\frac{3\mu\dot{V}L^2}{4Mg} \right]^{1/3}.$$

Esercizio 4.5

Anzitutto, da considerazioni di simmetria vediamo che $v = v_\theta(r)$, cioè il campo di velocità è uni-direzionale lungo la direzione azimutale e dipende solo da r . Inoltre, dal momento che alla fine di una rotazione completa il fluido ritorna allo stesso punto (non ci sono pompe), non ci possono essere differenze di pressione (si parla di pressione dinamica, ovviamente). Da un bilancio di forze nell'elementino di volume indicato in figura (lo si immagini di altezza L), otteniamo:

$$\tau_w R_i \theta L = \tau r \theta L; \Rightarrow \tau = \tau_w R_i / r,$$

dove τ_w è lo sforzo di taglio alla parete interna (che non conosciamo). A questo punto, poichè $\tau = -\mu dv/dr$, integrando otteniamo: $v(r) = -(\tau_w/\mu)R_i \ln r + C$. Infine, imponendo che $v(R_i) = \omega R_i$ e che $v(R_o) = 0$, otteniamo con facili passaggi:

$$\tau_w = \mu\omega \frac{1}{\ln(R_o/R_i)}; \quad v(r) = \omega R_i \frac{\ln(R_o/r)}{\ln(R_o/R_i)}.$$

Una volta noto τ_w , la forza esercitata è uguale a $F = 2\pi R_i L \tau_w$, e il momento è uguale a $I = 2\pi R_i^2 L \tau_w$.

Nel caso limite in cui il gap tra i cilindri sia molto più piccolo dei loro raggi, cioè quando $(R_i/R_o) = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \ll 1$, con facili passaggi si vede che la soluzione vista si riduce a [si tenga presente che $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2)$]:

$$\tau_w = \mu \frac{\omega R_i}{\delta}; \quad v(\tilde{y}) = \omega R_i \tilde{y},$$

dove $\delta = R_o - R_i \approx \varepsilon R_i$, mentre $\tilde{y} = (R_o - r)/(R_o - R_i)$ rappresenta la distanza non-dimensionalizzata dal cilindro esterno.

Esercizio 4.6

Procedendo come nella sezione 4.2 troviamo: $\tau = -K \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 = \frac{\tau_w}{R} r$; prendendo la radice quadrata e integrando si trova: $\int_0^v dv = \sqrt{\frac{\tau_w}{RK}} \int_R^r \sqrt{r} dr$, da cui otteniamo:

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\tau_w}{RK}} (R^{3/2} - r^{3/2}) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \right]; \quad v_{\max} = \frac{2R}{3} \sqrt{\frac{\tau_w}{K}}.$$

Questo risultato coincide con quello enunciato nella sezione 4.2 quando $n=2$. Adesso vogliamo determinare le perdite di carico in funzione della portata. Per far ciò dobbiamo calcolare il valore medio della velocità (proporzionale alla portata), e troviamo:

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v (2\pi r) dr = 2v_{\max} \int_0^1 (1 - y^{3/2}) y dy = \frac{3}{7} v_{\max} = \frac{2R}{7} \sqrt{\frac{\tau_w}{K}}.$$

A questo punto, poichè le perdite di carico sono proporzionali agli sforzi di taglio alla parete [equazione (3.16)], otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{2\tau_w}{R} = \frac{2}{R} \left(\frac{49K\bar{v}^2}{4R^2} \right) = \frac{49}{2} K \frac{\bar{v}^2}{R^3}.$$

Questo risultato coincide con quello visto nella sezione 4.2 per $n=2$.

Esercizio 4.7

Nel caso di particelle con la forma di lunghi cilindri di raggio R , troviamo che il loro diametro equivalente è $D_p = 6V_p/S_p = 3R$. Dunque riscrivendo l'equazione di Blake-Kozeny in funzione di Φ e α , otteniamo:

$$\Phi = \frac{25\alpha}{6(1-\alpha)^3}.$$

Confrontando questa relazione coi risultati sperimentali, si vede che l'accordo è molto buono per $\alpha > 0.1$. A priori, ci saremmo aspettati un accordo con i risultati sperimentali nei casi in cui le forze viscose siano dominanti, cioè per elevati gradi di pieno. Dunque, la sorpresa non è che l'accordo tra l'equazione di Blake-Kozeny e i dati sperimentali diminuisca al diminuire di α , cosa del tutto prevedibile, ma il fatto che tale accordo si estenda anche per valori di α relativamente bassi e che l'equazione cessi di "funzionare" soltanto quando $\alpha < 0.1$ (cioè per filtri relativamente vuoti, che non ci interessano). In realtà, non è del tutto chiaro perché l'equazione di Blake-Kozeny funzioni così bene.

Esercizio 4.8

a) Da un bilancio di massa in un elementino di superficie di ampiezza W e lunghezza dx otteniamo, con $\dot{m} = \dot{m}/\rho W$,

$$\dot{m}(x) - \dot{m}(x+dx) = \rho W [q(x) - q(x+dx)] = \frac{dM}{dt} = \rho v_e W dx + \rho v W dx,$$

dove v è la velocità di penetrazione nel terreno, data dalla legge di Darcy,

$$v = \frac{\kappa}{\mu} \frac{d}{dy} (\rho g z) = \frac{\kappa}{\mu} \rho g \cos \phi.$$

Qui y indica la coordinata perpendicolare a x , mentre z indica quella verticale. Nel limite $dx \rightarrow 0$ otteniamo,

$$\frac{dq}{dx} = - \left(v_e + \frac{\kappa}{\mu} \rho g \cos \phi \right) \Rightarrow q(x) = q_0 - \left(v_e + \frac{\kappa}{\mu} \rho g \cos \phi \right) x.$$

a) Alla distanza L il flusso si annulla. Dunque,

$$L = \frac{q_0}{v_e + \frac{\kappa}{\mu} g \cos \phi} = \frac{10^{-2} m^2/s}{10^{-10} m/s + 10^{-11} m^2 \times 9.8 m/s^2 \times 0.98 / 10^{-6} m^2/s} = 100 m.$$

Si noti che l'evaporazione non gioca alcun ruolo.

b) Poichè $v = dy/dt$, approssimando per comodità $\cos \phi \approx 1$ otteniamo:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{dz}{dt} = \frac{\kappa}{\nu} g \Rightarrow z(t) = \frac{\kappa}{\nu} gt = (9.8 \cdot 10^{-3} t) cm$$

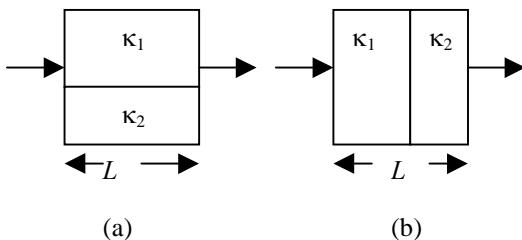
dove t è espresso in secondi. Dunque, dopo un'ora, la profondità di penetrazione è di 35 cm, adeguata per raggiungere le radici delle coltivazioni stagionali.

Esercizio 4.9

La porosità del mezzo, sia volumetrica che superficiale, è uguale a $\varepsilon = mr^2/R^2$. Poichè la velocità interstiziale è uguale alla velocità media del fluido nei tubi, otteniamo

$$v_i = \frac{r^2}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow v_s = \varepsilon v_i = \frac{1}{8\mu} \frac{mr^4}{R^2} \frac{\Delta p}{L}.$$

A questo punto, applicando la legge di Darcy, troviamo la permeabilità; $\kappa = \varepsilon r^2/8$.



Esercizio 4.10

Nel caso (a) otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{\kappa_1} v_1 = \frac{\mu}{\kappa_2} v_2 = \frac{\mu}{\bar{\kappa}} v_s,$$

dove v_s è la velocità superficiale, mentre abbiamo definito la permeabilità efficace $\bar{\kappa}$. La portata volumetrica totale è la somma di quelle pertinenti ai due componenti, cioè,

$S v_s = S_1 v_1 + S_2 v_2$, dove S è la sezione totale, S_1 ed S_2 quelle occupate dal

componente 1 e 2, rispettivamente. Dunque, definendo $\varepsilon_1=S_1/S$ e $\varepsilon_2=S_2/S$ le frazioni volumetriche dei due componenti, otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{\bar{\kappa}} v_s = \frac{\mu}{\bar{\kappa}} (\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2) = \frac{\mu}{\bar{\kappa}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 \kappa_2}{\kappa_1} \right) v_1 = \frac{\mu}{\kappa_1} v_1,$$

da cui:

$$\bar{\kappa} = \varepsilon_1 \kappa_1 + \varepsilon_2 \kappa_2.$$

Questo caso corrisponde a quello con due resistenze in parallelo, per cui sommiamo le conduttanze.

Nel caso (b) invece otteniamo:

$$\mu v = \kappa_1 \frac{\Delta p_1}{L_1} = \kappa_2 \frac{\Delta p_2}{L_2} = \bar{\kappa} \frac{\Delta p}{L},$$

dove $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$ e $L = L_1 + L_2$, e abbiamo definito la permeabilità efficace $\bar{\kappa}$. Procedendo come nel caso precedente otteniamo:

$$\bar{\kappa} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \right)^{-1},$$

dove $\varepsilon_1 = L_1/L$ e $\varepsilon_2 = L_2/L$. Questo caso corrisponde a quello con due resistenze in serie.

Esercizio 4.11

Assumendo (ipotesi di quasi stazionarietà) che il flusso nel condotto sia laminare, otteniamo (vedi problema 4.1)

$$\dot{V} = 2HW\bar{v} = \frac{2WH^3\Delta p}{3\mu L},$$

dove L è la profondità di penetrazione della goccia. La differenza di pressione è data dalla formula di Young Laplace, in cui un raggio di curvatura è uguale ad $H/\cos\theta$, mentre l'altro è infinito e dunque $\Delta p = \sigma \cos\theta / H$. Questo risultato si può anche ottenere considerando che la forza spingente è uguale a $F = 2W \sigma \cos\theta$ (il fattore 2 tiene conto del fatto che ci sono due pareti, sopra e sotto) e dunque la pressione è data dal rapporto tra F e l'area della sezione, $S = 2WH$. Infine, considerando che

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = 2HW \frac{dL}{dt},$$

otteniamo: $L(dL/dt) = (H\sigma \cos\theta)/(3\mu)$, da cui:

$$L = \sqrt{\frac{2 \cos\theta}{3} \frac{H\sigma}{\mu} t}.$$

Viceversa, il tempo t_g necessario perché la goccia entri completamente nel condotto, con $L_g = V_g/(2WH)$, è

$$t_g = \frac{3\mu V_g^2}{8H^3 W^2 \sigma \cos\theta}.$$

Capitolo 6

Esercizio 6.1

Considerando che su una corona circolare di spessore dr e a distanza r dall'asse, la forza verso l'alto applicata dal fluido è pari a $P(r)2\pi r dr$, mentre quella verso il basso è la somma di Mg e dell'effetto della pressione atmosferica, $p_a 2\pi r dr$, otteniamo il seguente bilancio di forze:

$$Mg = 2\pi \int_{R_0}^R \tilde{P}(r) r dr,$$

dove $\tilde{P} = P - p_a$. Da qui, con facili passaggi e usando l'espressione per P determinata nel paragrafo 6.2, otteniamo:

$$Mg = \left(\frac{3\mu \dot{V} R^2}{2H^3} \right) I; \text{ dove } I = - \int_{R_0/R}^1 \xi \log \xi d\xi \cong - \left[\frac{1}{2} \xi^2 \log \xi d\xi \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} \xi d\xi = \frac{1}{4},$$

dove abbiamo ipotizzato che $R_0/R \ll 1$. Dunque:

$$H = \left(\frac{8Mg}{3\mu \dot{V} R^2} \right)^{1/3},$$

Esercizio 6.2

Dal bilancio microscopico compiuto sul volumetto in figura troviamo: $\tau = (\Delta p/L)y$, cioè lo stesso risultato ottenuto con fluido monofase. In particolare, $\tau_w = (\Delta p/L)H$;

dunque: $\int_0^{v_{H/2}} dv = - \left(\frac{\Delta p}{\mu L} \right) \int_H^{H/2} y dy$, da cui: $v_{H/2} = \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta p H^2}{L \mu} \right)$.

Infine: $\int_{v_H}^{v_{H/2}} dv = - \left(\frac{\Delta p}{10\mu L} \right) \int_{H/2}^0 y dy$, da cui: $v_H = v_{H/2} + \frac{1}{80} \left(\frac{\Delta p H^2}{L \mu} \right) = \frac{31}{80} \left(\frac{\Delta p H^2}{L \mu} \right)$.

Il profilo di velocità è composto di due pezzi parabolici.

Avremmo anche potuto partire dall'equazione di Navier-Stokes,

$$dp/dx = 10\mu d^2v/dz^2, \text{ per } 0 < z < H/2;$$

$$dp/dx = \mu d^2v/dz^2, \text{ per } H/2 < z < H,$$

dove $dp/dz = -\Delta p/L = \text{cost.}$ da risolversi con le seguenti condizioni al contorno:

$dv/dz(0) = 0$; $10\mu dv/dz(H/2^-) = \mu dv/dz(H/2^+)$; $v(H/2^-) = v(H/2^+)$; $v(H) = 0$, in cui abbiamo considerato che all'interfaccia $y = H/2$ velocità e sforzo di taglio sono continui.

Esercizio 6.3

Partiamo dall'equazione di Navier-Stokes,

$$dp/dx = \mu d^2v/dz^2, \text{ per } 0 < z < H$$

dove $dp/dz = -\Delta p/L = \text{cost.}$, da risolversi con le seguenti condizioni al contorno:

$$dv/dz(0) = 0; dv/dz(H) = av(H).$$

Integriamo una prima volta l'equazione di N.S.: $-(\Delta p/L)z = \mu dv/dz + C_1$, dove $C_1 = 0$ poiché $dv/dz(0) = 0$. Integriamo ancora: $-(\Delta p/L)(z^2/2) = \mu v + C_2$, dove, applicando la seconda condizione al contorno:

$$C_2 = -(\Delta p/L)(H^2/2) - \mu v_w = -(\Delta p/L)(H^2/2) - \mu a(dv/dz)_w = -(\Delta p/L)(H^2/2) - a(\Delta p H/L).$$

Dunque otteniamo:

$$v(z) = (\Delta p H^2 / 2 \mu L) [1 + 2(a/H) - (z/H)^2]$$

Ovviamente, quando $a=0$, otteniamo il solito profilo.

Capitolo 7

Esercizio 7.1

Consideriamo, ad esempio, l'alfa 146, che ha "la coda" e l'Alfa 145, che non ce l'ha. Per il resto, le due vetture sono identiche. L'assenza di coda comporta il distacco dello strato limite e la formazione di vortici; dunque, sulla superficie in cui c'è uno strato limite la pressione è maggiore che nella regione in cui lo strato limite si è distaccato. Di conseguenza, nell'Alfa 145 la pressione dietro è in media minore e quindi la forza di resistenza è maggiore che nell'Alfa 145. Inoltre, considerando che sotto la vettura la pressione è bassa (dall'equazione di Bernoulli, se la velocità aumenta la pressione diminuisce), l'Alfa 146 ha una maggiore superficie (quella con strato limite) su cui si esercita una pressione verso il basso, che ne aumenta l'aderenza.

Esercizio 7.2

Posto $f(\eta)=\eta$, otteniamo:

$$\alpha_1=1/2, \alpha_2=1/6 \text{ e } \beta=1, \text{ da cui: } \delta(x) = 2\sqrt{3}(\nu x/U)^{1/2}.$$

Dunque:

$$\tau_w = \mu U / \delta = f_F (\frac{1}{2} \rho U^2) \text{ con } f_F = (1/\sqrt{3}) Re_x^{-1/2} = 0.58 Re_x^{-1/2}.$$

Avremmo potuto ottenere quest'ultimo risultato anche applicando la (7.4.18), con $f_F=\delta_2/x=\alpha_2\delta/x$. Notiamo anche che molto vicino alla parete otteniamo:

$$u/U = y/\delta = 0.29 y/(\nu x/U)^{1/2}.$$

Infine:

$$\delta_l = \delta/2 = \sqrt{3}(\nu x/U)^{1/2} = 1.73(\nu x/U)^{1/2}.$$

Dal confronto con la soluzione esatta, vediamo che questa soluzione "molto" approssimata non ne è poi troppo distante.

Esercizio 7.3

Il profilo di velocità $f(\eta)=\sin(\pi\eta/2)$ soddisfa le condizioni: $f(0)=0$, $f(1)=1$ e $f'(1)=0$. Con facili passaggi otteniamo:

$$\alpha_1 = 1 - 2/\pi = 0.363, \alpha_2 = 1/2(4/\pi - 1) = 0.137 \text{ e } \beta = \pi/2 = 1.571,$$

da cui:

$$\delta(x) = 4.79 (\nu x/U)^{1/2}.$$

Quindi

$$\delta_l = \alpha_1 \delta = 1.74 (\nu x/U)^{1/2},$$

mentre dalla (7.4.18)

$$f_F = \delta_2/x = \alpha_2 \delta/x = 0.656 Re_x^{-1/2},$$

in ottimo accordo con la soluzione esatta.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI – PARTE 2

Capitolo 8

Esercizio 8.1

Anzitutto, sappiamo che la potenza uscente è $Q = \Delta T / \Sigma R_{th}$. Le varie resistenze termiche sono:

$$R_1 = L/(Ak_v) = 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}; \quad R_2 = L/(2Ak_v) = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ K/W} = R_1/2;$$

$$R_3 = l/(Ak_a) = 4.17 \cdot 10^{-2} \text{ K/W}; \quad R_4 = l/(Ah) = 0.1 \text{ K/W}.$$

Da qui vediamo che: 1) le resistenze termiche dei vetri sono molto piccole; 2) la resistenza maggiore è quella convettiva esterna, che è soggetta a variazioni (in una giornata ventosa, h cresce poiché dipende dal numero di Reynolds dell'aria). Le resistenze termiche nei due casi (vetro singolo e doppio) sono:

$$R_I = R_1 + R_3 = 0.107 \text{ K/W}; \quad R_{II} = R_1 + R_3 + R_4 = 0.148 \text{ K/W}.$$

Dunque mettendo i doppi vetri si risparmia circa il 40%.

Nel primo caso, troviamo $Q = 140W$ e dunque in un anno (8760 ore) consumeremo 1230 kWh. Nel secondo caso, $Q = 102W$ con un consumo di 894 kWh.

In questo problema, è istruttivo anche calcolare la temperatura T_L della superficie esterna del vetro. Per far ciò, teniamo conto del fatto che i profili di temperatura sono lineari e dunque il flusso termico nel vetro è facilmente calcolabile.

Nel caso di vetro singolo, imponendo $J = Q/A = k_v(T_I - T_L)/L = h(T_I - T_0)$, troviamo che $T_L = 24^\circ\text{C}$. Dunque vediamo che il profilo di temperatura nel vetro è quasi piatto, e l'escursione termica è quasi tutta concentrata alla parete esterna. Dunque, come già detto, basta che il coefficiente di scambio termico esterno aumenti per far aumentare lo scambio termico).

Nel caso di vetro doppio, invece, troviamo: $J = Q/A = k_v(T_I - T_{I2})/L = k_a(T_{I2} - T_{I3})/l = k_v(T_{I3} - T_L)/l = h(T_I - T_0)$, dove T_{I2} e T_{I3} sono le temperature a cavallo dell'intercapedine. Otteniamo: $T_{I2} = 24.67^\circ\text{C}$, $T_{I3} = 20.53^\circ\text{C}$ e $T_L = 20.21^\circ\text{C}$. Da qui vediamo che in questo caso, una parte dell'escursione termica viene assorbita dall'intercapedine d'aria, mentre il salto termico alla parete esterna (il più soggetto a variazioni) è minore.

Esercizio 8.2

La resistenza termica complessiva è uguale alla somma delle resistenze termiche in serie, cioè $AR_{th} = (1/h) + (L_1/k_1) + (L_2/k_2) + (1/h)$.

Nel primo caso, in assenza di rivestimento (cioè con $L_2=0$), otteniamo: $AR_{th} = (2/100) + (0.1/0.1) \cong 1 \text{ m}^2 \text{K/W}$. Dunque, il flusso totale di calore uscente è:

$$Q = \Delta T/R_{th} = 2 \text{ KW}.$$

Nel secondo caso, invece, troviamo $R_{th} = 4 \text{ m}^2 \text{K/W}$ e dunque $Q = \Delta T/R_{th} = 0.5 \text{ KW}$.

Esercizio 8.3

Non essendo specificata l'area, supponiamo che $A = 1 \text{ m}^2$.

$$R_{th} = \frac{(I/A) [(1/h_1) + (L_1/k_1) + (L_2/k_2) + (1/h_2)]}{(0.040 + 0.333 + 0.139 + 0.125)K/W} = 0.637 K/W.$$

$$J_Q = Q/A = (T_I - T_0) / (AR_{th}) = 20/0.637 = 31.4 W/m^2.$$

Può essere istruttivo calcolare le temperature alle pareti, T_{lw} e T_{2w} , e quella all'interfaccia mattone-isolante, T_i , considerando che
 $J_Q = h_1(T_I - T_{lw}) = h_2(T_{2w} - T_2) = k_1(T_{lw} - T_i)/L_1$, da cui: $T_{lw} = 43.7^\circ C$ e $T_{2w} = 28.9^\circ C$ e $T_i = 33.2^\circ C$. Dunque il grosso dell'escursione termica si trova a cavallo dell'isolante.

Esercizio 8.4

Facciamo il conto prendendo come base una lunghezza $L = 1 m$ di tubo.

La resistenza totale è data da:

$$R_{th} = (1/2\pi L) [1/(h_i r_1) + \ln(r_2/r_1)/k_1 + \ln((r_2+d)/r_2)/k_2 + 1/(h_o(r_2+d))]$$

Dunque: $Q/L = (T_i - T_o) / (R_{th} A) = \dots 61.2 W/m$

Esercizio 8.5

Al crescere del raggio esterno, cresce la resistenza conduttriva, perché aumenta lo spessore attraverso il quale passa il calore, ma diminuisce la resistenza convettiva alla parete, perché aumenta la superficie di scambio. Sta a vedere quale dei due effetti prevale. Si ha:

$$Q = 2\pi L(\Delta T) / [\ln(r_o/r_i)/k + 1/(r_o h)]$$

$$dQ/dr_o = 0 \Rightarrow \dots r_o = r_c = k/h$$

Inoltre, si vede facilmente che questo è un punto di massima.

Dunque, se $r_o < r_c$, lo scambio termico *aumenta* al crescere del raggio, cioè aggiungendo più materiale isolante. Invece, quando $r_o > r_c$, aggiungendo materiale isolante si *diminuisce* lo scambio termico.

Naturalmente, questa discussione ha senso soltanto quando $r_i < r_c$. In caso contrario, è sempre vero che $r_o > r_c$ e dunque l'aggiunta di materiale isolante ha come effetto quello di isolare (come è ovvio) il tubo.

Esercizio 8.6

Calcoliamo il numero di Biot. A $300K$ la conducibilità termica del rame è $k=401 W/mK$ e dunque $Bi=hR/k=0.03<0.1$. Dunque possiamo assumere che la temperatura sia costante.

Applicando l'equazione (9.8) troviamo dunque T_f . Dati che ci servono:

$$\rho = 8,933 \text{ kg/m}^3; c_p = 385 \text{ J/kgK};$$

Dunque, con $T_0 = 800^\circ C$, $T_a = 20^\circ C$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 6.545 \text{ m}^3$ e $A = 4\pi R^2 = 7.854$, otteniamo: $\tau = \rho c_p V / hA = 63.7 \text{ s}$.

Dunque, con $t = 45 \text{ s}$, si ha: $\Theta = (T - T_a) / (T_0 - T_a) = 0.49$ e $T = 405^\circ C$.

Esercizio 8.7

Supponiamo che $Bi=hL/k<<1$ (L sia una lunghezza caratteristica del corpo metallico). $Bi<<1$ implica che la temperatura T_I del corpo è uniforme. Dunque, da un bilancio globale di energia allo stazionario, $V_1 \rho_1 c_1 (T_{10} - T_f) = V_2 \rho_2 c_2 (T_f - T_{20})$, si determina la

temperatura finale del corpo e del liquido, T_f . Inoltre, da un bilancio di energia sul corpo e sul liquido otteniamo:

$$\begin{aligned} V_1 \rho_1 c_1 dT_1/dt &= -hS(T_1-T_2) \Rightarrow dT_1/dt = -A_1(T_1-T_2), \\ V_2 \rho_2 c_2 dT_2/dt &= hS(T_1-T_2) \Rightarrow dT_2/dt = A_2(T_1-T_2), \end{aligned}$$

dove $A_1 = hS_1/(V_1 \rho_1 c_1)$ e $A_2 = hS_2/(V_2 \rho_2 c_2)$ sono gli inversi di due tempi caratteristici. Sottraendo queste due equazioni membro a membro otteniamo:

$$dT/dt = -(A_1 + A_2) \Delta T, \text{ dove } \Delta T = (T_1 - T_2).$$

Ora integriamo con $\Delta T(t=0) = \Delta T_0$ e otteniamo: $\Delta T(t) = \Delta T_0 \exp[-(A_1 + A_2)t]$.

Infine, dalla equazione vista sopra, $dT_1/dt = -A_1 \Delta T$, otteniamo:

$$dT_1/dt = \Delta T_0 \exp[-(A_1 + A_2)t].$$

Integrando otteniamo:

$$T_1 - T_{10} = -[A_1/(A_1 + A_2)] \Delta T_0 \{1 - \exp[-(A_1 + A_2)t]\}.$$

Esercizio 8.8

Poiché il problema è complesso (la condizione al contorno per $r=R_i$ varia nel tempo), supponiamo di poter applicare l'approssimazione di quasi stazionarietà, assumendo che il tempo caratteristico τ con cui cambia tale condizione al contorno (cioè il tempo caratteristico di variazione della temperatura del fluido racchiuso nella sfera) sia molto inferiore al tempo caratteristico τ_{ss} con cui il profilo di temperatura nella corona sferica raggiunge la stazionarietà. Da un bilancio di energia del fluido racchiuso nella sfera otteniamo:

$$\left(\frac{4}{3}\pi R_i^3\right)\rho c \frac{dT}{dt} = -\dot{Q} = -(4\pi R_i^2)J_i,$$

dove J_i è il flusso uscente dal liquido e dunque entrante nella corona sferica dalla parete interna, mentre ρ e c sono la densità e il calore specifico del fluido. A questo punto, se è valida la condizione di quasi stazionarietà, J_i è dato dall'equazione (8.2.13) e, detto $\Delta T = T - T_0$, otteniamo con facili passaggi:

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{dt}{\tau}; \quad \tau = \frac{\rho c L R_i^2}{3k_s R_o} \frac{1 + Bi'}{Bi'}; \quad Bi' = \frac{hL}{k_s} \frac{R_o}{R_i}.$$

Da qui, risolvendo con condizioni iniziali $\Delta T(t=0) = \Delta T_i = T_i - T_0$, otteniamo: $\Delta T = \Delta T_i e^{-t/\tau}$, che mostra come τ sia il tempo caratteristico con cui varia la temperatura del fluido racchiuso nella corona sferica. Ora vediamo quando la condizione di quasi stazionarietà è verificata. Imponendo che $\tau \gg \tau_{ss} = L^2/\alpha_s$, dove $\alpha_s = k_s/\rho_s c_s$ è la diffusività termica del solido, otteniamo:

$$\frac{L}{R_i} \ll \left(\frac{\rho c}{\rho_s c_s}\right) \left(\frac{R_i}{R_o}\right) \left(\frac{1 + Bi'}{Bi'}\right),$$

che è sostanzialmente identica all (8.4.12).

Esercizio 8.9

Nel caso a) otteniamo:

$$\dot{Q} = J_1 S_1 + J_2 S_2 = (k_1 S_1 + k_2 S_2) \Delta T / L,$$

dove J_1 e J_2 sono i flussi termici nelle due regioni, di sezione S_1 e S_2 . Dunque, poiché $\varepsilon_1 = S_1/S = V_1/V$ e $\varepsilon_2 = S_2/S = V_2/V$ sono le frazioni volumetriche delle due fasi, otteniamo:

$$k_{eff} = \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2.$$

Questo caso corrisponde a quello di due resistenze in parallelo, per cui sommiamo le conduttanze.

Nel caso b) invece otteniamo:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = J \left(\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} \right), \text{ poiche' } J = k_1 \frac{\Delta T_1}{L_1} = k_2 \frac{\Delta T_2}{L_2}, \text{ dove } L = L_1 + L_2.$$

Infine, procedendo come nel caso precedente, otteniamo:

$$\frac{1}{k_{eff}} = \frac{\varepsilon_1}{k_1} + \frac{\varepsilon_2}{k_2},$$

dove $\varepsilon_1 = L_1/L$ e $\varepsilon_2 = L_2/L$. Questo caso corrisponde a quello con due resistenze in serie.

Esercizio 8.10

Poiché, in condizioni stazionarie, in ogni sezione il flusso termico è costante,

$$\text{otteniamo: } J_U = \frac{k_1}{L_1} (T_1 - T_{12}) = \frac{k_2}{L_2} (T_{12} - T_2), \text{ da cui si ottiene } T_{12} = \frac{\frac{k_1 T_1}{L_1} + \frac{k_2 T_2}{L_2}}{\frac{k_1}{L_1} + \frac{k_2}{L_2}}.$$

Capitolo 9

Esercizio 9.1

Siccome il problema è lineare, si può applicare il principio di sovrapposizione. Prima risolviamo il problema senza sorgente, $S=0$, e con le condizioni al contorno date, cioè $T(0)=T_0$ e $T(L)=T_L$, ottenendo il solito profilo lineare, $T(x) = T_0 + (T_L-T_0)x/L$. Poi risolviamo il problema con sorgente S , e condizioni al contorno $T(0)=T(L)=0$, ottenendo $T(x)=Sx(L-x)/2k$. Nel problema dato, la sorgente e le temperature alle pareti sono uguali alle somme delle sorgenti e delle temperature di parete che compaiono nei singoli problemi. Dunque, in accordo col principio di sovrapposizione, la soluzione del problema ‘completo’ è uguale alla somma delle soluzioni dei problemi singoli: $T(x) = T_0 + (T_L-T_0)x/L + Sx(L-x)/2k$.

Esercizio 9.2

Procedendo come nel paragrafo 9.1.2, arriviamo all’equazione (9.1.10), con $C_I=0$, $J=Sr/2$, la quale si può facilmente integrare applicando l’equazione di Fourier ottenendo: $T = -Sr^2/(4k) + C$, dove C è una costante di integrazione. Adesso applichiamo la condizione al contorno: $J(R)=h[T(R)-T_0]$, calcoliamo C e finalmente otteniamo:

$$T = T_0 + (S/4k)(R^2 - r^2) + SR/(2h)$$

Coi valori dati, otteniamo: $T_{max} = T(0) = 570 \text{ } ^\circ\text{C}$; $T(R) = 153 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Esercizio 9.3

Il problema è sostanzialmente identico al precedente. Usando coordinate adimensionali otteniamo ancora il profilo di temperatura seguente:

$$\Theta(\xi) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{Bi} - \xi^2 \right), \quad \text{dove } \xi = r/R, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{SR^2/k}, \quad Bi = \frac{hR}{k}.$$

Da qui troviamo la stessa relazione vista sopra tra S e $T_{max} = T(0)$, cioè

$$S = \frac{4k(T_{max} - T_0)}{R^2(1 + 2k/hR)}$$

Dato che T_{max} non può eccedere i $500 \text{ } ^\circ\text{C}$, deve essere $S < S_{max} = 6000 \text{ MW/m}^3$.

Esercizio 9.4

Nel caso piano: $\bar{\Theta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Theta(\xi) d\xi = \dots = \frac{1}{3}$.

Nel caso cilindrico: $\bar{\Theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \Theta(\xi) 2\pi \xi d\xi = \dots = \frac{1}{8}$.

Nel caso sferico: $\bar{\Theta} = \frac{1}{(4\pi/3)} \int_0^1 \Theta(\xi) 4\pi \xi^2 d\xi = \dots = \frac{1}{15}$.

Esercizio 9.5

Procedendo come in 8.3.1 troviamo nelle due regioni I ($0 < r < R$) e II ($R, r < R+d$):

$$J^I = Sr/2; \quad J^{II} = C/r$$

Siccome per $r=R$ i due flussi sono uguali, troviamo $C = SR^2 / 2$. A questo punto, applicando la legge di Fourier, integrando J^{II} e imponendo la condizione al contorno $T(R+d)=T_0$, otteniamo:

$$T^{II}(r) - T_0 = (SR^2)/(2k) \ln[(R+d)/r].$$

Poi, integrando J^I imponendo che $T^I(R) = T^{II}(R)$, otteniamo:

$$T^I(r) - T_0 = (SR^2)/(2k) \{ \frac{1}{2} [1 - ((r/R)^2)] + \ln[(R+d)/R] \}.$$

Esercizio 9.6

Procedendo come nel paragrafo 9.1.3, troviamo il flusso $J = Sr/3$ e la distribuzione di temperatura $\Theta(\xi) = -\xi^2/6 + C$, dove Θ e ξ sono definiti in 8.3.2 e C è una costante. Dalla condizione al contorno $J(R)=h[T(R)-T_0]$, otteniamo: $\Theta(\xi) = (1/6) [1 - \xi^2 + 2/Bi]$, dove $Bi=hR/k$ è il numero di Biot. Dunque la temperatura massima è:

$$T_{max} = T(0) = T_0 + (SR^2)/(6k) [1 + 2/Bi].$$

Si noti che per $Bi \gg 1$, $T_{max}-T_0 = (SR^2)/(6k)$ e dunque è indipendente da h , mentre dipende da R^2 . Invece, per $Bi \ll 1$, $T_{max}-T_0 = (SR)/(3h)$ e dunque è indipendente da k e dipende da R . Il flusso si calcola facilmente come $J_Q = -k(dT/dr)_R = SR/3$.

Ovviamente, allo stazionario, il prodotto del flusso J_Q per l'area $4\pi R^2$ deve essere uguale al calore prodotto, $S(4\pi R^3/3)$, e dunque J_Q risulta indipendente da h , cioè da quanto efficacemente il calore viene disperso.

Esercizio 9.7

Sappiamo che il profilo di velocità sia il seguente: $v(x) = v_{max}[1 - (x/L)^2]$, dove v_{max} è legato alla portata e alle perdite di carico, $v_{max} = (\Delta p/L)(B^2/2\mu)$. Inoltre il termine di dissipazione viscosa è il seguente: $S_v = \mu (dv/dx)^2 = (4\mu v_{max}^2/L^4)x^2$. Dunque l'equazione del calore è la seguente:

$$-\kappa \frac{d^2T}{dx^2} = S_v = \frac{4\mu v_{max}^2}{L^4} x^2$$

Integrando tra 0 e L , con $dT/dx(x=0)=0$ e $T(x=L) = T_0$, otteniamo:

$$T - T_0 = \frac{\mu v_{max}^2}{3\kappa} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right]$$

Il flusso termico è:

$$J_Q = -\kappa \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=\pm L} = \pm \frac{4\mu v_{max}^2}{3L}.$$

Il flusso è uscente; dunque è di segno più per $x=L$ e di segno meno per $x=-L$. Si noti che il flusso termico non dipende dalla conducibilità termica κ . Infatti da un bilancio globale vediamo che l'integrale di S_v deve essere uguale a J_Q :

$$J_Q = \int_0^L S_v dx = \frac{4\mu v_{max}^2}{3L}.$$

Esercizio 9.8

Equazione del trasporto di calore:

$$-\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = S ; \text{ con B.C.: } k \frac{dT}{dr}(R) = h[T(R) - T_0] \text{ e } \frac{dT}{dr}(2R) = 0$$

a) In termini adimensionali:

$$-\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -1 \text{ con B.C. } \frac{d\Theta}{d\xi}(1) = Bi\Theta(1) \text{ e } \frac{d\Theta}{d\xi}(2) = 0,$$

dove $\Theta = (T-T_0)/(SR^2/k)$, $\xi = r/R$ e $Bi = hR/k$.

b) Quando $Bi \gg 1$, la prima condizione al contorno diventa: $T(R) = T_0$, cioè $\Theta(1) = 0$.

Soluzione: $d\Theta/dr = -\xi/2 + A/\xi$ e $\Theta = -\xi^2/4 + A \log \xi + B$. Dalle B.C.: $A = 2$ e $B = 1/4$. Dunque: $T(2R) = T_0 + (SR^2/k) [-1 + 2 \log 2 + 1/4]$.

Esercizio 9.9

Bilancio di energia: $(dT/dt)\rho c(4/3)\pi R^3 = S - h(T-T_0)4\pi R^2$.

Dunque: $d\theta/dt = -\theta/\tau + \beta$, dove $\theta = T-T_0$; $\tau = (\rho c R)/(3h)$; $\beta = (3S)/(\rho c 4\pi R^3)$.

Soluzione: $\theta(t) = \chi(t) e^{-t/\tau}$; $(d\chi/dt) = \beta e^{t/\tau}$, da risolversi con condizione iniziale $\chi(0)=0$.

Dunque: $\chi(t) = \beta\tau(e^{t/\tau} - 1)$, da cui: $T(t) = T_0 + \beta\tau(1-e^{-t/\tau})$.

La soluzione allo stazionario si può ottenere da qui, per $t \rightarrow \infty$, e dunque: $T = T_0 + S/(4\pi R^2 h)$.

Ovviamente, questo risultato si può ottenere direttamente da un bilancio termico allo stazionario:

$$S = h(T-T_0)4\pi R^2.$$

Capitolo 10

Esercizio 10.1

Troviamo facilmente che $N=5$ (si noti che N è una specie di radice quadrata del numero di Biot) e dunque l'efficienza dell'aletta è $\eta = \text{Tanh}N/N=0.2$ (per $N>2$, $\text{Tanh}N$ è circa uguale a 1). Dunque: $Q = \eta hA(T_w-T_a) = 1.5 \text{ kW}$, poiché $A=2m^2$ è la superficie dell'aletta (sopra e sotto), mentre il salto termico è di 75°C .

Esercizio 10.2

Come sempre in questi casi, prima di tutto controlliamo se il numero di Biot è piccolo. Considerando che $k=43 \text{ W/mK}$, troviamo: $Bi = hR/k = 0.008 < 0.1$.

Dati: $\rho = 7,840 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 460 \text{ J/kgK}$.

Dunque, considerando che $V = \pi R^2 L$ e $A = 2\pi RL$, dove L è la lunghezza della barra, otteniamo: $\tau = \rho c_p V / hA = 2885 \text{ s}$. Il tempo cercato è:

$$t = -\tau \ln[(T-T_a)/(T_0-T_a)] = 6494 \text{ s} \cong 1 \text{ h e } 48 \text{ min.}$$

Esercizio 10.3

Dati: $\rho = 7,840 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 460 \text{ J/kgK}$; $k=52 \text{ W/mK}$.

Dunque $Bi = hL/k = 3.6 \cdot 10^{-4} << 0.1$ e la temperatura della piastra si può considerare costante. Otteniamo: $\tau = \rho c_p L / h = 343 \text{ s}$. Il tempo cercato è: $t = -\tau \ln[(T_0-T_a)/(T_i-T_a)] = 16.1 \text{ min.}$

Esercizio 10.4

Poiché $Q = m_T c_T (T_{tin}-T_{tout}) = 1.25 \cdot 10^4 \text{ W} = m_S c_S (T_{Sout}-T_{Sin})$, troviamo: $T_{Sout} = 49.9^\circ\text{C}$.

Nel caso equicorrente, $\Delta T_{ln}=46.0^\circ\text{C}$ e dunque $A = Q/(h_{tot}\Delta T_{ln}) = 0.61 \text{ m}^2$.

Nel caso controcorrente, invece, $\Delta T_{ln}=54.6^\circ\text{C}$ e dunque $A = Q/(h_{tot}\Delta T_{ln}) = 0.51 \text{ m}^2$.

In genere, a parità di condizioni (cioè le portate e le temperature di entrata e di uscita, e dunque la potenza scambiata) gli scambiatori controcorrente sono i più efficienti, cioè richiedono una minore superficie di scambio.

Esercizio 10.5

Abbiamo: $T_{s,in} = 80^\circ\text{C}$; $T_{s,out} = 48^\circ\text{C}$; $T_{t,in} = 20^\circ\text{C}$; $T_{t,out} = 34^\circ\text{C}$; $\dot{m}_t = 40 \text{ kg/s}$.

a) $\dot{Q} = \dot{m}_t c_t (T_{t,out} - T_{t,in}) = 1.34 \cdot 10^6 \text{ W}$.

b) $\dot{m}_s = \dot{Q} / [c_s (T_{s,in} - T_{s,out})] = 10.0 \text{ kg/s}$.

c) Detto $N=75$ il numero di tubi e L la loro lunghezza, la superficie di scambio (riferita al diametro interno) è $S = N\pi DL$. Sappiamo che $\dot{Q} = Sh_{tot}F\Delta T_{ln}$. Qui

$$(\Delta T)_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)} = \frac{(T_{s,in} - T_{t,out}) - (T_{s,out} - T_{t,in})}{\ln[(T_{s,in} - T_{t,out})/(T_{s,out} - T_{t,in})]} = 36.3 \text{ K.}$$

Inoltre, $R = (T_{s,in} - T_{s,out})/(T_{t,out} - T_{t,in}) = 2.29$; $P = (T_{t,out} - T_{t,in})/(T_{s,in} - T_{t,out}) = 0.23$ e dunque dal grafico vediamo che $F = 0.94$.

Adesso dobbiamo calcolare h_{tot} , considerando che, trascurando gli effetti di curvatura e la resistenza del metallo nei tubi:

$$h_{tot} = I / (I/h_i + I/h_o).$$

Sappiamo che $h_o = 300 W/m^2 K$. Per calcolare h_i , ci serve il Re del flusso di glicerina.

Considerando che la portata in ogni tubo è \dot{m}/N , otteniamo: $Re = \frac{4\dot{m}_t}{\pi D \mu} = 47.8$.

Dunque il flusso è laminare e, poiché il flusso termico è circa costante (negli scambiatori a correnti opposte la differenza di temperatura tra i due fluidi si mantiene all'incirca uniforme), otteniamo: $Nu = 4.36$, da cui: $h_i = Nu k/D = 73.5 W/m^2 K$.

Infine: $h_{tot} = 59 W/m^2 K$ e da ciò otteniamo: $L = \dot{Q} / (N\pi D h_{tot} F \Delta T_{in}) = 171 m$. Dunque, poiché ogni tubo compie 8 passaggi, la lunghezza dello scambiatore è di circa $L/8 = 21.4 m$.

Capitolo 11

Esercizio 11.1

Dati del ferro a 0 °C.: $\rho = 7,870 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 447 \text{ J/kgK}$; $k=80.3 \text{ W/mK}$.

Calcoliamo: $\alpha = k/\rho c_p = 2.28 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. $y/\sqrt{4\alpha t} = 0.4056$; $\text{erf}(0.4056) = 0.4337$.

Dunque: $(T-T_w)/(T_0-T_w) = 0.4337$ e $T = 34 \text{ °C}$.

Esercizio 11.2

Dati del nickel a 20 °C.: $\rho = 8,900 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 444 \text{ J/kgK}$; $\alpha=2.30 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Per $y=0$ si ha: $T-T_0 = E / [\rho c_p \sqrt{\pi \alpha t}] = 160 \text{ °C}$ e dunque $T = 180 \text{ °C}$.

Esercizio 11.3

Dati: $k=0.52 \text{ W/mK}$; $\alpha = 1.33 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

$\Theta=(T_0-T_a)/(T_i-T_a) = 0.4$. $Bi = hR/k = 1$.

Dal grafico si trova $Fo=\alpha t/R^2 = 0.46$ e dunque $t = 1.4 \text{ h}$

L'ordine di grandezza di questo risultato si può trovare da $t \approx R^2/2\alpha \approx 1.7 \text{ h}$.

Esercizio 11.4

Definendo la variabile adimensionale $\Theta(\tilde{x}, \tilde{t})$, con $\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$, $\tilde{x} = x/L$ e

$\tilde{t} = t/(L^2/\alpha)$, otteniamo: $\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tilde{x}^2}$; $\Theta(0, \tilde{t}) = \Theta(1, \tilde{t}) = 0$; $\Theta(\tilde{x}, 0) = 1$.

Adesso applichiamo un metodo della *separazione delle variabili*, supponendo che $\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x})T(\tilde{t})$. Procedendo come nel paragrafo 9.5, otteniamo due equazioni per T e X . La prima si risolve, ottenendo: $T(\tilde{t}) = Ae^{-\lambda^2 \tilde{t}}$; la seconda equazione è la seguente:

$$\frac{d^2 X}{d\tilde{x}^2} + \lambda^2 X = 0,$$

da risolversi con condizioni al contorno: $X(0) = X(1) = 0$. Questo problema ammette un numero infinito di soluzioni, del tipo $\sin(\lambda \tilde{x})$, che già soddisfano la prima delle due condizioni. Imponendo che anche la seconda venga soddisfatta, otteniamo: $\sin \lambda = 0$, da cui: $\lambda = n\pi$, con n intero e dunque concludiamo che $X(\tilde{x}) = \sin(n\pi \tilde{x})$. Ne deduciamo che una qualsiasi funzione $XT = \sin(n\pi \tilde{x}) \exp(-n^2 \pi^2 \tilde{t})$ è una soluzione del problema e dunque, applicando il principio di sovrapposizione, concludiamo che la soluzione generale di questo problema è la seguente:

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin[m\pi \tilde{x}] e^{-m^2 \pi^2 \tilde{t}} \quad (\text{E9.1})$$

A questo punto, dobbiamo determinare le costanti c_m . Lo facciamo imponendo che la condizione iniziale venga soddisfatta, cioè che:

$$\Theta(\tilde{x}, 0) = 1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin[m\pi\tilde{x}]$$

Ora, teniamo presente che

$$\int_0^1 \sin[m\pi\tilde{x}] \sin[n\pi\tilde{x}] d\tilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1/2 & \text{per } m = n \end{cases}$$

Dunque, moltiplicando l'equazione (E9.1) per $\sin[n\pi\tilde{x}]$ e integrando tra 0 e 1, otteniamo:

$$\int_0^1 \Theta(\tilde{x}, 0) \sin[n\pi\tilde{x}] d\tilde{x} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_0^1 \sin[m\pi\tilde{x}] \sin[n\pi\tilde{x}] d\tilde{x},$$

da cui:

$$c_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Concludiamo:

$$\Theta(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi\tilde{x}) e^{-n^2\pi^2\tilde{t}}.$$

In particolare, per $\tilde{x} = \frac{1}{2}$, otteniamo:

$$\Theta\left(\frac{1}{2}, \tilde{t}\right) = \frac{4}{\pi} e^{-\pi^2\tilde{t}/4} - \frac{4}{3\pi} e^{-9\pi^2\tilde{t}/4} + \dots,$$

che coincide con la soluzione (9.13a), per $\tilde{x} = 0$.

Esercizio 11.5

Posto: $\Theta = \frac{T - T_a}{T_i - T_a}$, il problema è identico alla (11.4.2) (si pensi alla fisica del problema per convincersene) e dunque ammette la stessa soluzione. Dunque alla parete $x=0$ troviamo ancora:

$$\Theta(0, \tilde{t}) = \frac{4}{\pi} e^{-\pi^2\tilde{t}/4} - \frac{4}{3\pi} e^{-9\pi^2\tilde{t}/4} + \dots.$$

Capitolo 12

Esercizio 12.1

Prima di tutto, bisogna cercare i valori di α , κ e ν per l'aria. Scegliamo una temperatura media, $T = 60^\circ\text{C}$ e troviamo (Perry, Table 2-368): $Pr=0.7$; $\kappa=0.03\text{W/mK}$ e $\nu=19 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$. Dunque, $Re = UL/\nu \approx 3 \cdot 10^5$, che indica che il flusso è turbolento. In queste condizioni, il coefficiente di scambio termico medio è dato da:

$$h = (2/3) (\kappa/L) Re^{1/2} Pr^{1/3} \approx 10 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

Dunque, il calore scambiato (sopra e sotto la lastra) è $Q = 2hA\Delta T \approx 6 \text{ KW}$.

Esercizio 12.2

La temperatura è una funzione della sola coordinata x , con $0 < x < L$ e soddisfa la seguente equazione e condizioni al contorno:

$$V \frac{dT}{dx} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}; \quad T(0) = T_0; \quad T(L) = T_L,$$

mentre il flusso termico $J_U(L)$ che ci interessa trovare è il seguente:

$$J_U(L) = \rho c V [T(L) - T_0] - \kappa \frac{dT}{dx}(L).$$

Si noti che, oltre che da una componente diffusiva, il flusso termico per $x = L$ è composto anche da una componente convettiva, che nel flusso alle pareti è in genere assente, perché la velocità lì è uguale a zero. In termini adimensionali, definendo

$$\Theta = (T - T_0)/(T_L - T_0), \quad \xi = x/L \quad \text{e} \quad Pe = VL/\alpha,$$

otteniamo:

$$Pe \frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}; \quad \Theta(0) = \Theta_0; \quad \Theta(1) = 1.$$

Inoltre, si conviene esprimere il flusso termico in funzione del numero di Nusselt, definito come $Nu = J_U / J_{U,cond}$, dove $J_{U,cond}$ è il flusso termico dovuto alla sola conduzione. Nel nostro caso, $J_{U,cond} = -\kappa(T_L - T_0)/L$ e dunque si ottiene con facili passaggi:

$$Nu_L = \frac{J_U(L)}{J_{U,cond}} = \frac{d\Theta}{d\xi}(1) - Pe.$$

Da questo punto in poi il problema è identico a quello risolto nel paragrafo 16.1,

Esercizio 12.3

Poiché $Pe \gg 1$ e $Re > Pe$, c'è uno strato limite termico esterno a quello di velocità. Al confine, $y = \delta_T$, eguagliando i flussi convettivi e diffusivi (si scrivi l'equazione del trasporto di calore), otteniamo:

$$(U/R) \approx (\alpha/\delta_T^2), \quad \text{da cui: } \delta_T/R \approx Pe^{-1/2}.$$

Ora, poiché il flusso termico è $J = -k(dT/dr)_{r=R}$, definendo $Nu = J / (k\Delta T/R)$, otteniamo :

$$Nu = R/\delta_T \approx Pe^{1/2} \approx Re^{1/2} Pr^{1/2}.$$

Capitolo 14

Esercizio 14.1

Per un gas ideale:

$$c = p/(RT) = 1 \text{ atm}/(82 \text{ cm}^3 \text{ atm mole}^{-1} \text{ K}^{-1})(298 \text{ K}) = 4 \times 10^{-5} \text{ gmole/cm}^3.$$

Alla superficie del naftalene solido, $x_{A1} = p_{\text{vap}}/p = 9.6 \times 10^{-5} \ll 1$.

Nell'approssimazione diluita, il profilo di concentrazione è lineare, con $N_A = cDdx_A/dz = cD x_{A1}/\Delta z$.

Dunque la velocità molare media è $v^* = x_A v_A = N_A / c = D x_{A1}/\Delta z = \dots 7.7 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ ed è costante lungo il tubo. Lo stesso vale per la velocità massica, considerando che $v_B=0$ e dunque

$$v = \frac{\rho_A}{\rho_A + \rho_B} v_A = \frac{x_A M_{WA}}{x_A M_{WA} + x_B M_{WB}} v_A \cong \frac{M_{WA}}{M_{WB}} x_A v_A = \frac{M_{WA}}{M_{WB}} v^* = 3.5 \times 10^{-6} \text{ cm/s}$$

Si noti che, se la miscela non fosse diluita, la velocità media molare resterebbe costante, mentre quella massica varierebbe lungo il tubo. Invece, la velocità v_A varia in ogni caso, poiché $v_A = N_A / c_A = v^* / x_A$ e x_A decresce con z . Dunque v_A aumenta al crescere di z . Ad esempio, per $z=5 \text{ cm}$, $x_A = 1/2 x_{A1} = 4.8 \times 10^{-5} \text{ gmole/cm}^3$ e otteniamo: $v_A = v^* / x_A = 7.7 \times 10^{-7} \text{ cm/s} / 4.8 \times 10^{-5} \text{ gmole/cm}^3 = 1.6 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$. Da qui vediamo che la velocità del naftalene è molto maggiore della velocità media, come è ovvio, data la sua piccola frazione molare.

Esercizio 14.2

Da un bilancio molare in una coroncina sferica di spessore dr otteniamo:

$$N_A(r)(4\pi r^2) = N_A(r+dr)(4\pi(r+dr)^2) \Rightarrow N_A(r)r^2 = \text{costante} = K_1.$$

$$N_B(r)(4\pi r^2) = N_B(r+dr)(4\pi(r+dr)^2) \Rightarrow N_B(r)r^2 = \text{costante} = N_B(R)R^2 = 0,$$

dove abbiamo considerato il fatto che l'aria si suppone insolubile nell'acqua. A questo punto, procedendo come nel paragrafo 14.1, otteniamo:

$$N_A = -\frac{cD}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr} = \frac{K_1}{r^2}$$

Da qui, integrando tra $r_1=R$ e $r_2=R+\delta$, otteniamo:

$$N_{A1} = \frac{K_1}{R^2} = cD \frac{\ln(x_{B2}/x_{B1})}{\delta} \left(1 + \frac{\delta}{R}\right),$$

che si può riscrivere in funzione del coefficiente di scambio molare:

$$N_{A1} = k(c_{A1} - c_{A2}), \quad \text{con} \quad k = \frac{D}{\delta(x_B)_{\ln}} \left(1 + \frac{\delta}{R}\right).$$

Ripetendo l'integrazione tra R ed r otteniamo:

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A1}}\right) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{\frac{r-r_1}{r_2-r_1}}$$

Quando $\delta \ll R$, è facile verificare che ritroviamo il caso piano risolto nel paragrafo 14.1, con $k = D / [\delta(x_B)_{\ln}]$. Nel caso diluito, $x_B \approx 1$ e dunque otteniamo:

$N_{A1} = \frac{K_1}{R^2} = \frac{cD}{\delta} \left(1 + \frac{\delta}{R}\right)$, cioè $K = \frac{K_1}{R^2} = \frac{D}{\delta} \left(1 + \frac{\delta}{R}\right)$. In particolare, quando $\delta \rightarrow \infty$,
 $N_{A1} = \frac{K_1}{R^2} = \frac{D}{R}$, ovvero $k = D/R$.

Esercizio 14.3

Imponendo che il flusso totale di A che attraversa una qualsiasi superficie cilindrica di raggio r sia costante, vediamo che $N_A = K_1/r$, e procedendo come nel paragrafo 14.2 otteniamo: $N_A = -\frac{cD}{1 - \beta x_A} \frac{dx_A}{dr} = \frac{K_1}{r}$. Integrando tra R e $R + \delta$ con $x_A(R) = 0$ e $x_A(R + \delta) = x_{A0}$, otteniamo alla fine che il flusso di A alla superficie della particella è:

$$N_A = \frac{cD \ln(1 - \beta x_{A0})}{\beta R \ln(1 + \delta/R)}, \quad \text{da cui: } Sh = -\frac{\delta \ln(1 - \beta x_{A0})}{\beta x_{A0} R \ln(1 + \delta/R)}$$

Questo risultato si riduce al caso piano per $\delta \ll R$.

Nel caso diluito, $v^* = v_B = 0$ e dunque risolviamo il problema:

$$N_A = -cD \frac{dx_A}{dr} = \frac{K_1}{r}; \quad \text{da cui: } x_A(r) = A_1 + A_2 \log r,$$

dove le costanti A_1 e A_2 si possono determinare facilmente imponendo le condizioni al contorno (14.2.12) e ottenendo:

$$x_A(r) = x_{A0} \frac{\log(r/R)}{\log(1 + \delta/R)},$$

da cui:

$$N_A(r = R) = -\frac{cD x_{A0}}{R \ln(1 + \delta/R)} \quad \text{e} \quad Sh_{2R} = \frac{2}{\ln(1 + \delta/R)}.$$

Dunque, l'incremento del flusso molare dovuto alla convezione, $N_A/(N_A)_{diff}$, risulta essere uguale al caso piano e a quello sferico, Eq. (14.2.9). Si noti che, quando $\delta \rightarrow \infty$ la soluzione si annulla.

Esercizio 14.4

Si risolva il seguente problema:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dy}{d\xi} \right) - Da y = 0; \quad y(1) = 1; \quad \frac{dy}{d\xi}(0) = 0$$

con $y = x/x_0$, $\xi = r/R$ e $Da = kR^2/D$. Dobbiamo determinare $Sh = \left| \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=1}$. Si

noti che il flusso è negativo perché entrante nella particella. Tuttavia alla fine si prende il valore assoluto, perché Sh è un numero adimensionale definito positivo

a) Ordine 0:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dy_0}{d\xi} \right) = 0; \quad y_0(1) = 1; \quad \frac{dy_0}{d\xi}(0) = 0. \quad \text{Dunque } y_0(\xi) = 1 \text{ e } Sh_0 = 0.$$

Ordine Da :

$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dy_1}{d\xi} \right) - y_0 = 0; \quad y_1(1) = 0; \quad \frac{dy_1}{d\xi}(0) = 0$. Si trova: $y_1 = (\xi^2 - 1)/4$ e dunque $Sh_1 = 1/2$.

Concludendo: $Sh = Da/2 + O(Da^2)$

- b) Lo strato limite è identico a quello del caso piano svolto in classe, perché all'interno dello strato limite si possono trascurare gli effetti di curvatura. Dunque

- i) definiamo la stretching coordinate, $\zeta = (1 - \xi)\sqrt{Da}$;
- ii) l'equazione di diffusione-reazione diventa $d^2 y/d\zeta^2 = y$;
- iii) otteniamo: $y = e^{-\zeta} = \exp(-(1 - \xi)\sqrt{Da})$;
- iv) da cui: $Nu = \sqrt{Da}$

Esercizio 14.5

Allo stazionario, N_A e N_B sono costanti; inoltre, per ogni mole di A che arriva sul catalizzatore ce ne è una di B che se ne distacca e dunque $N_A = -N_B$. Di conseguenza, il flusso N_A (e N_B) è di tipo diffusivo, con $N_A = -cD dx_A/dz = cost.$ e condizioni al contorno $x_A(z=0) = 1$ e $x_A(z=L) = 0$ (si noti che se la reazione sul catalizzatore è molto rapida, non appena A vi arriva, reagisce e sparisce). Dunque x_A è lineare e troviamo: $N_A = cD/L$. Infine, poiché $c = P/RT$, concludiamo che $D = LN_A RT/P$.

Esercizio 14.6

In questo caso, $N_B = -2N_A$ e dunque otteniamo (vedi equazione (14.2.3) con $\beta=-I$): $N_A = -[cD/(1+x_A)] dx_A/dz = cost.$, con: $x_A(z=0) = 1$ e $x_A(z=L) = x_{AL}$, dove x_{AL} si determina conoscendo la costante di equilibrio, come vediamo in seguito.

Integrando l'equazione appena scritta tra $z=0$ e $z=L$, otteniamo:

$$\int_0^L \frac{N_A}{cD} dz = \int_1^{x_{AL}} \frac{1}{1+x_A} dx_A \Rightarrow N_A = \frac{cD}{L} \ln \frac{2}{1+x_{AL}}$$

A questo punto, non resta che determinare x_{AL} . Da:

$$K = c_B^2(L) / c_A(L) = c(1-x_{AL})^2/x_{AL},$$

vediamo che x_{AL} soddisfa la seguente equazione algebrica di secondo grado:

$$x_{AL}^2 - 2kx_{AL} + 1 = 0, \text{ dove } k = 1+K/2c > 1 \text{ è una costante nota.}$$

Dunque si ottiene:

$$x_{AL} = k - \sqrt{k^2-1}$$

(si noti che abbiamo scartato l'altra soluzione perché risulta maggiore di 1).

Esercizio 14.7

A regime, il flusso di metano che arriva alla superficie del dorn (per $r=rR_i$) è uguale a quello consumato, cioè $F = D(dc_A/dr)_{di}(2\pi R_i L) = S(\pi R_{max}^2 L)$. La concentrazione di metano, c_A , è uguale a 0 per $r=R_i$ e uguale ad $\alpha c_{A,atm} = 0.031 \text{ mol/pa}^3$ per $r=R_{max}$. Il problema della diffusione in geometria cilindrica stato risolto nel paragrafo 8.2.2,

ottenendo che il flusso totale è $F = 2\pi LD\alpha c_{A,atm}/\ln(R_{max}/R_i)$. Dunque otteniamo l'equazione: $R_{max}^2 \ln \frac{R_{max}}{R_i} = \frac{2D}{S} \alpha c_{A,atm} = 177.8 \text{ re}^2$, da cui: $R_{max} = 8 \text{ re}$.

Capitolo 15

Esercizio 15.2

Il problema stazionario in termini adimensionali è il seguente:

$$-\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = 0, \text{ con B.C. } \Theta(1) = 1 \text{ e } \Theta(\infty) = 0,$$

dove $\Theta = x/x_0$, $\xi = r/R$. La soluzione è $\Theta = 1/\xi$, da cui vediamo che il flusso è

$$N = -Dc(dx/dr)_R = Dcx_0/R \text{ (positivo perché uscente).}$$

Bilancio di massa sulla gocciolina: $c_L dV/dt = -NS$, dove $V = 4/3 \pi R^3$, $S = 4\pi R^2$ e c_L è la concentrazione molare (moli/volume) di acqua nella gocciolina. Si noti che N dovrebbe essere il flusso relativo di acqua, ma lo poniamo uguale a quello assoluto in accordo con l'ipotesi di processo quasi stazionario. Dunque: $c_L dR/dt = -N = -Dcx_0/R$, da cui:

$$RdR = dR^2/2 = -(Dcx_0/c_L)dt \text{ e } R_i^2 - R^2 = 2Dt(cx_0/c_L).$$

Il tempo di evaporazione è dunque: $\tau = 1/2 (R_i^2/D) (c_L/cx_0)$.

L'ipotesi di processo quasi stazionario è valida quando il tempo di evaporazione, $\tau \approx (R_i^2/D)(c_L/cx_0)$, è molto maggiore di quello necessario per raggiungere lo stato stazionario (supposte costanti le condizioni al contorno), $\tau_{ss} \approx (R_i^2/D)$, dunque per $c_L \gg cx_0$, ovviamente soddisfatta nel nostro caso.

Esercizio 15.3

Data la reazione $nA + B \rightarrow P$, le concentrazioni di A e B durante la diffusione e reazione soddisfano le equazioni seguenti:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} - D_{AS} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} = -nkc_A c_B \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_B}{\partial t} - D_{BS} \frac{\partial^2 c_B}{\partial z^2} = -kc_A c_B,$$

valide ovunque per $0 < z < \infty$. Si noti che, nell'ipotesi diluita, sia A che B diffondono in una atmosfera composta di inerte S , con coefficienti di diffusione D_{AS} e D_{BS} che in generale sono diversi tra loro.

Ora, se la reazione è molto rapida (vedi la discussione nel paragrafo 14.4), ci sarà un fronte di reazione $z = z_f(t)$, su cui entrambe le concentrazioni si annullano. Si noti che, in questo caso, il fronte è mobile e avanza man mano che il metano brucia l'ossigeno. A questo punto, le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_A}{\partial t} - D_{AS} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} &= 0 \text{ per } 0 < z < z_f; \text{ con } c_A(z=0) = c_{A0} \text{ e } c_A(z=z_f) = 0 \\ \frac{\partial c_B}{\partial t} - D_{BS} \frac{\partial^2 c_B}{\partial z^2} &= 0 \text{ per } z_f < z < \infty; \text{ con } c_B(z=\infty) = c_{B0} \text{ e } c_B(z=z_f) = 0 \end{aligned}$$

da risolversi con condizioni iniziali: $c_A(t=0)=0$ e $c_B(t=0)=c_{B0}$. I due problemi adesso sono disaccoppiati e si possono risolvere separatamente, ottenendo due funzioni errore:

$$\frac{c_A(z,t)}{c_{A0}} = f_A(\eta) = 1 - \frac{\operatorname{erf}(\eta)}{\operatorname{erf}(\eta_f)}$$

$$\frac{c_B(z,t)}{c_{A0}} = f_B(\eta) = 1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}\eta)}{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}\eta_f)}$$

dove $\eta = z/(4D_{AS})^{1/2}$, mentre $\lambda = D_{AS}/D_{BS}$. Adesso bisogna determinare la posizione η_f del fronte di reazione. Per far ciò, si fa uso della condizione:

$$nN_A(z_f) = -N_B(z_f) \Rightarrow nD_{AS} \frac{\partial c_A}{\partial z} - D_{BS} \frac{\partial c_B}{\partial z},$$

ottenendo l'equazione implicita seguente:

$$\frac{c_{A0}}{c_{B0}} \sqrt{\lambda} = \frac{\operatorname{erf}(\eta_f)}{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda}\eta_f)} e^{(1-\lambda)\eta_f^2}.$$

Si noti che, quando $n=\lambda=1$ e $c_{A0}=c_{B0}$, si trova $\operatorname{erf}(\eta_f) = 1/2$.

Infine, troviamo il flusso di A :

$$N_{A0} = -D_{AS} \left(\frac{\partial c_A}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{c_{A0}}{\operatorname{erf}(\eta_f)} \sqrt{\frac{D_{AS}}{\pi}},$$

che corrisponde ad una lunghezza di diffusione

$$N_{A0} = -\frac{D_{AS}(c_{A0}-0)}{\delta_{diff}}; \quad \delta_{diff} = \operatorname{erf}(\eta_f) \sqrt{\pi D_{AS} t}.$$

Esercizio 15.4

La concentrazione c_A dipende da r e da t e soddisfa il problema seguente:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \quad c_A(r=R) = 0; \quad c_A(t=0) = c_A(r=\infty) = c_{A0}$$

Definiamo: $y(r',t) = r[c_{A0} - c_A(r,t)]/Rc_{A0}$, con $r' = r - R$. Con semplici passaggi otteniamo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y}{\partial r'^2} \quad y(r'=0) = 1; \quad c_A(t=0) = c_A(r'=\infty) = 0$$

da cui: $y(r',t) = \operatorname{erfc}(\eta)$ dove $\eta = \frac{r'}{\sqrt{4Dt}} = \frac{r-R}{\sqrt{4Dt}}$.

Dunque otteniamo la soluzione:

$$c_A(r,t) = c_{A0} \left[1 - \frac{R}{r} \operatorname{erfc}(\eta) \right].$$

Capitolo 16

Esercizio 16.1

Sappiamo che (vedi paragrafo 4.1) il profilo di velocità è $v = v_{mx}(1-r^2/R^2)$, dove v_{mx} è la velocità massima, $v_{mx} = 2\bar{v} = (2\dot{V})/\pi R^2$ e \dot{V} è la portata volumetrica. Dunque otteniamo: $\frac{dv}{dr}\Big|_w = \gamma = \frac{4}{\pi R^3} \dot{V}$. A questo punto, la portata massica totale alla parete è data da (16.3.10):

$$\dot{m} = 0.808 c_\infty (\gamma D^2)^{1/3} WL^{2/3} = 5.50 c_\infty (\dot{V} D^2)^{1/3} L^{2/3},$$

dove $W=2\pi R$ è il perimetro del tubo. Questa analisi è valida quando all'interno dello strato limite massico il profilo di velocità è lineare. Dunque la lunghezza L deve essere tale che lo spessore δ_M dello strato limite massico per $z=L$ sia molto minore di R , cioè:

$$\delta_M(L) \approx g(L) \approx \sqrt[3]{DL/\gamma} \ll R \Rightarrow L \ll \dot{V}/D.$$

Esercizio 16.2

Da un bilancio molare sulla gocciolina otteniamo: $c_A^L dR/dt = -N_A = -k_M c_A^V$, dove c_A^L e c_A^V sono, rispettivamente, la concentrazione dell'acqua nella gocciolina e quella di saturazione nell'atmosfera, a contatto con il liquido. Per valutare il coefficiente di scambio massico k_M supponiamo di essere in condizioni quasi-stazionarie. In questo caso, è ragionevole supporre che $Re >> 1$ e $Sc >> 1$ e dunque:

$$k_M = \frac{D}{R} Sh = a \frac{D}{R} \left(\frac{UR}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{D} \right)^{1/3} = a \frac{D^{2/3} g^{1/4}}{\nu^{1/6}} \frac{1}{R^{1/4}},$$

dove a è una costante adimensionale di $O(1)$. Infine, integrando

$$R^{1/4} dR = a \frac{D^{2/3} g^{1/4}}{\nu^{1/6}} \frac{c_A^V}{c_A^L} dt$$

tra $t=0$, quando $R=R_0$ e $t=\tau$, quando $R=0$, otteniamo:

$$\tau = \frac{4}{5a} \frac{R_0^{5/4} \nu^{1/6}}{D^{2/3} g^{1/4}} \frac{c_A^L}{c_A^V}.$$

La condizione di quasi stazionarietà è soddisfatta quando τ è molto maggiore del tempo necessario per raggiungere lo stato stazionario, $\tau_{ss} \approx \delta_M^2/D \approx \delta_M/Sh$ dove δ_M è lo spessore dello strato limite massico, $\delta_M \approx R/Sh$. Dunque:

$$\tau \approx \frac{R_0}{k_M} \frac{c_A^L}{c_A^V} \gg \tau_{ss} \approx \frac{\delta_M}{k_M} \Rightarrow \frac{1}{Sh} \frac{c_A^V}{c_A^L} \ll 1.$$

Esercizio 16.3

Il problema è simile a quello svolto nel paragrafo 15.3, con la differenza che il trasporto di ossigeno è di tipo convettivo. Otteniamo: $c_C^S dR/dt = N_A = -k_M c_A^\infty$, dove c_C^S e c_A^∞ sono, rispettivamente, la concentrazione di carbonio nella sferetta e quella di ossigeno al di fuori dello strato limite massico. Come nel problema precedente, è ragionevole supporre che $Re \gg 1$ e $Sc \gg 1$ e dunque:

$$k_M = \frac{D}{R} Sh = a \frac{D}{R} \left(\frac{UR}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{D} \right)^{1/3} = a \frac{D^{2/3} U^{1/2}}{\nu^{1/6}} \frac{1}{R^{1/2}},$$

dove a è una costante adimensionale di $O(1)$. Infine, integrando

$$R^{1/2} dR = a \frac{D^{2/3} U^{1/2}}{\nu^{1/6}} \frac{c_A^\infty}{c_C^S} dt,$$

tra $t=0$, quando $R=R_0$ e $t=\tau$, quando $R=0$, otteniamo:

$$\tau = \frac{2}{3a} \frac{R_0^{3/2} \nu^{1/6}}{D^{2/3} U^{1/2}} \frac{c_C^S}{c_A^\infty}.$$

La condizione di quasi stazionarietà è soddisfatta quando τ è molto maggiore del tempo necessario per raggiungere lo stato stazionario, $\tau_{ss} \approx \delta_M^2/D \approx \delta_M/Sh$ dove δ_M è lo spessore dello strato limite massico, $\delta_M \approx R_0/k_M$. Dunque:

$$\tau \approx \frac{R_0}{k_M} \frac{c_C^S}{c_A^\infty} \gg \tau_{ss} \approx \frac{\delta_M}{k_M} \Rightarrow \frac{1}{Sh} \frac{c_C^S}{c_A^\infty} \ll 1.$$

Esercizio 16.4

Come nei problemi precedenti, otteniamo: $c_P^S dR/dt = N_A = -k_M \Delta c$, dove c_P^S è la concentrazione nella pasticca della sostanza A e Δc è la differenza di concentrazione di A a cavallo dello strato limite massico. Dunque $\Delta c = c_P^L - c_{P\infty}$, dove c_P^L è la concentrazione di A alla parete, a contatto con la pasticca (in genere, il rapporto di partizione c_P^L/c_P^S dipende dalla solubilità di A), mentre $c_{P\infty}$ è la concentrazione di A nel corpo e dunque $c_{P\infty}=0$. Sappiamo che $Re < 1$ e $Pe \gg 1$ e dunque:

$$k_M = \frac{D}{R} Sh = a \frac{D}{R} \left(\frac{UR}{\nu} \right)^{1/3} = a \frac{D^{2/3} U^{1/3}}{R^{2/3}},$$

dove a è una costante adimensionale di $O(1)$. Infine, integrando

$$R^{2/3} dR = a D^{2/3} U^{1/3} \frac{c_A^\infty}{c_C^S} dt, \text{ tra } t=0, \text{ quando } R=R_0 \text{ e } t=\tau, \text{ quando } R=0, \text{ otteniamo:}$$

$$\tau = \frac{3}{5a} \frac{R_0^{5/3}}{D^{2/3} U^{1/3}} \frac{c_A^\infty}{c_C^S}.$$

La condizione di quasi stazionarietà è soddisfatta quando τ è molto maggiore del tempo necessario per raggiungere lo stato stazionario, $\tau_{ss} \approx \delta_M^2/D \approx \delta_M/k_M$ dove δ_M è lo spessore dello strato limite massico, $\delta_M \approx R_0/Sh$. Dunque:

$$\tau \approx \frac{R_0}{k_M} \frac{c_A^\infty}{c_C^S} \gg \tau_{ss} \approx \frac{\delta_M}{k_M} \Rightarrow \frac{1}{Sh} \frac{c_A^\infty}{c_C^S} \ll 1.$$

Esercizio 16.5

Il calcolo è del tutto analogo, però l'effetto convettivo in questo caso si somma a quello diffusivo. Alla fine, definendo $\Theta = c / c_0$, otteniamo:

$$\Theta(\xi) = \frac{e^{Pe} (1 - e^{-Pe(1-\xi)})}{e^{Pe} - 1} \quad \text{e} \quad Sh = 2Pe \frac{e^{Pe} - \frac{1}{2}}{e^{Pe} - 1};$$

Dunque, mentre per $Pe \ll 1$ ritroviamo, come ovvio, $Sh=1$, per $Pe \gg 1$ troviamo $Sh=2Pe$.

Capitolo 18

Esercizio 18.1

Ripetendo i calcoli del paragrafo 18.2 per un T_0 generico otteniamo:

$$\tilde{v}(\eta) = \frac{1}{12} Gr (\eta - \eta^3) - \frac{h^3}{\nu^2 \rho} \left(\frac{dP}{dz} - \rho g \beta (T_m - T_0) \right) (1 - \eta^2),$$

da cui,

$$\langle \tilde{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{v}(\eta) d\eta = - \frac{h^3}{3\nu^2 \rho} \left(\frac{dP}{dz} - \rho g \beta (T_m - T_0) \right). \quad (18.2.5)$$

In assenza di flusso netto, cioè per $\langle v \rangle = 0$, otteniamo: $dP/dz = \rho g \beta (T_m - T_0)$ e dunque è ragionevole assumere $T_m = T_0$.

Esercizio 18.2

Abbiamo visto che $v_{max} = 0.032 (\nu/h) Gr$.

Nel caso di acqua a 50 °C, si trova che $\nu = 0.55 \times 10^{-6} m^2/s$ e $\beta = 3.7 \times 10^{-4} K^{-1}$; dunque $\gamma = g\beta/\nu^2 = 1.2 \times 10^{10} m^{-3} K^{-1}$ e $Gr = \gamma h^3 \Delta T = 6 \times 10^5$. Infine $v_{max} = 1.06 m/s$.

Nel caso dell'aria troviamo $\nu = 1.8 \times 10^{-5} m^2/s$, $\gamma = 1.0 \times 10^8 m^{-3} K^{-1}$ e $Gr = 5 \times 10^3$. Dunque: $v_{max} = 0.29 m/s$.

Si noti che, anche se l'acqua è molto più viscosa dell'aria, la velocità della circolazione naturale è maggiore nell'acqua che nell'aria, perché il parametro che la regola è γ .

Esercizio 18.3

Alla temperatura media di $T_m = 70^\circ C = 373K$, usando l'equazione di stato per un gas ideale troviamo:

$$\rho = PM_w/RT = (10^5 N m^{-2} \times 29 kg kmol^{-1}) / (8314 J kmol^{-1} K^{-1} \times 343 K) = 1 kg/m^3.$$

$$\beta = 1/T_m = 1/(343 K) = 2.9 \times 10^{-3} K^{-1}.$$

Inoltre: $\mu = 2 \times 10^{-5} kg m^{-1} s^{-1}$; $k = 0.03 W m^{-1} K^{-1}$. Dunque: $Pr = 0.7$.

$$Gr = d^3 g \beta \Delta T / \nu^2 = (0.015^3 \times 9.8 \times 2.9 \times 10^{-3} 60) / (2 \times 10^{-5} / 1)^2 = 1.44 \times 10^4;$$

$$Ra = Gr Pr = 10^4.$$

A questo punto, applichiamo la correlazione vista nel paragrafo 18.5, notando che le condizioni per l'applicazione sono tutte soddisfatte:

$$Nu = hd/k = 0.2 Ra^{0.25} (L/d)^{-0.11} = 1.35, \text{ da cui } J_U = h \Delta T = k Nu \Delta T / d = 162 W/m^2.$$

Come sappiamo, il numero di Nusselt esprime di quanto la convezione aumenti la conduzione. In questo caso, dunque, la convezione naturale aumenta la conduzione del 35%.

Capitolo 19

Esercizio 19.1

Il flusso uscente si può calcolare dalla (19.2.13) con $F_{12} = I$ e $A_1/A_2 = 0$, ottenendo:
 $Q_{net,1-2} = A_1\sigma e_1(T_1^4 - T_2^4)$, dove T_1 è la temperatura del silicio, mentre $T_2 = T_e = 300K$ è quella delle pareti della camera. Dunque il bilancio termico coincide con la (19.3.5), da cui otteniamo la soluzione (19.3.7), in cui $Bi = e_1\sigma T_e^3 L/k = 0.61$ e $\Theta_0 = 2.67$. Alla fine otteniamo: $t = 240 s = 4 min$.

Esercizio 19.2

In genere abbiamo:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV = \frac{1}{T} C_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV,$$

dove abbiamo considerato che $C_V = (\partial U / \partial T)_V = T(\partial S / \partial T)_V$ e abbiamo applicato una delle relazioni di Maxwell. Ora, siccome per un corpo nero $p = u/3$ e $u = bT^4$, vediamo che $p = (b/3) T^4$ e dunque $(\partial p / \partial T)_V = dp/dT = (4/3)bT^3$. Inoltre, poiché $U = Vu = VbT^4$, otteniamo: $C_V = (\partial U / \partial T)_V = 4VbT^3$. Concludendo:

$$dS = 4VbT^2 dT + \frac{4}{3}bT^4 dV.$$

Esercizio 19.3

- a) Si consideri una radiazione in equilibrio con le pareti di una cavità. Se il volume della cavità si espande, mantenendo costante la temperatura delle pareti, bisogna fornire alla cavità l'energia della radiazione che riempie il volume che è stato aggiunto. Nel caso di una variazione reversibile e isoterma, la relazione ottenuta nell'esercizio precedente diventa: $Q = T \Delta S = (4/3) bT^4 (V_{fin} - V_{iniz})$.
Nel caso invece di una trasformazione adiabatica, imponendo $dS = 0$ nella relazione dell'esercizio precedente, otteniamo: $dV/V = -3 dT/T$ e dunque: $VT^3 = cost$.