Fisica 01/03

~ Dinamica dei sistemi dei punti materiali

Si parla di punti materiali P_i, che interagiscono tra loro e con lo spazio.
Le forze si dividono tra interne e esterne

$$F_i(TOT) = F_i(\underbrace{Esterne}_{\text{Dipende dal S.R. scelto}}) + F_i(\underbrace{Interne}_{})$$

Dipende dal S.R. scelto

- **Forze interne**

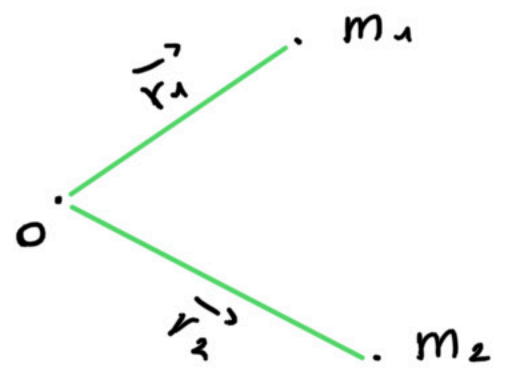
Vale il principio di azione e reazione, percio per un corpo rigido e` nulla la risultante.

$$\vec{R}_{(Int)} = \sum_i F_i = 0$$

- **Sistema totale**

Quantita' di moto : $\vec{P} = \sum_i \vec{p_i}$
Energia cinetica : $K_i = \sum_i K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

- **Centro di massa**



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum m_i}}$$

si comporta come una media ponderata

La pos. del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento
Le coordinate dipendono dal S.R.

- Equazioni sul moto del c.M.

Considero pti mat. con velocità $\vec{v}_i$, la velocità del cM

$$\to \quad d\left(\frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}\right)\cdot\frac{1}{dt}$$

Porto fuori le masse

$$\sum_i m_i \cdot \frac{d\, r_i}{dt}\cdot\frac{1}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

Ma questo è $\frac{P}{M}$, quindi la quantità di moto del sistema è uguale alla quantità di moto del c.M. assunto come punto materiale

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M}}$$

- Accelerazione del c.M.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\,\vec{V}_{CM}}{dt}$$

ma $\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$

quindi:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\; m_i \vec{v}_i}{M\cdot dt} = \frac{\overbrace{\sum m_i \vec{a}_i}^{\text{Somma delle Fint ed FEst}}}{M}$$

Riscrivo

$$\sum m_i \vec{a}_i = \overbrace{\sum \vec{F}_i^{(INT)}}^{0} + \sum \vec{F}_i^{(EST)}$$

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum F_i^{(EST)}$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_i^{(E)}}$$

- Teorema del moto del CM

Il CM si muove $\overbrace{\text{come}}^{\text{NON E'}}$ un punto materiale in cui ci si pone concentrata la massa del sistema e al quale e' applicata la risultante delle forze esterne.

Osservazione:

$$\vec{R}^{(E)} = M \vec{a}_{CM} = M \frac{d \vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d \vec{P}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{R}^{(E)} = \frac{d \vec{P}}{dt}}$$

! Il moto del CM dipende esclusivamente dalle forze esterne

~ Principio di conservazione della quantita' di moto

In un sistema non soggetto a forze esterne, si ha che:

$$\vec{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{COSTANTE}$$
$$\vec{v}_{CM} = \text{COSTANTE}$$

Quando la risultante delle $\vec{F}^{(E)}$ si annulla, la quant. di moto tot e' costante e il C.M. si muove di moto rett. unif. (ovviamente in senso anche vettoriale)

Quindi se P = COSTANTE, sui tre assi non è detto che si conservino i tre assi: P_x, P_y, P_z (es: se ne conserva solo 1)

- S. R. del centro di massa

In genere assi paralleli

1 Origine
2 Dir. degli assi costante rispetto al S.R. Inerziale
3 Di solito non sono inerziali

$$\vec{r_i} = \vec{r_{CM}} + \vec{r_i}'$$

$$\vec{v_i} = \vec{v_{CM}} + \vec{v_i}'$$

Rispetto al centro di massa

- Teorema di König

Ecinetica $\longrightarrow K = \frac{1}{2} m v^2$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v_{CM}} + \vec{v_i}')^2$$

$$= \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v_{CM}}^2}_{\text{Ecin C.M.}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{\text{Ecin rispetto al C.M.}} + \underbrace{\sum \overbrace{m_i \vec{v_{CM}} \cdot \vec{v_i}'}^{\overbrace{P'}^{0} \cdot v_{CM}}}_{\text{Posso eliminarlo perche'}}$$

$$K = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v_{CM}}^2}_{\frac{1}{2} M \sum \vec{v_{CM}}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{K'}$$

∇ $M = \sum m_i$

$$K = \frac{1}{2} M \sum \vec{v_{CM}}^2 + K'$$

$$\boxed{K = K_{CM} + K'}$$

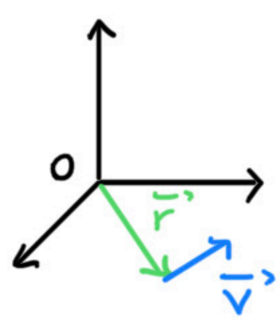
L'en. cin. di un sistema di punti in un S.R. inerziale e' data dalla somma dell'energia cinetica del c.M. e dell'en. cin. rispetto al c.M.

- Momento Angolare

"E' il momento del vettore quantita' di moto"

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

O = polo, punto rispetto a cui e' definito il prodotto vettoriale



! Se il polo cambia:

Es: $O \longrightarrow O'$

$\vec{L}_{O'} \leftarrow \vec{L}_O$ si fa aggiungendo a $\vec{L}_O$ un fattore

$\vec{OO'} \wedge m\vec{v}$

- Momento di una forza

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

Ossia e' il prodotto vettoriale tra il raggio e la Forza.

Cambio di polo:

$$\tau_{O'} = \tau_O + \overline{OO'} \wedge \vec{F}$$

Se sono presenti piu' forze:

$$\tau = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_i$$

$$\tau = \vec{r} \wedge \underbrace{\vec{R}}_{\text{risultante}}$$

Non vale per forze applicate in punti diversi:

- Th Momento Angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge m\vec{v})}{dt} = \text{(derivata del prodotto)}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Considero un polo o (fermo)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \text{velocità del punto materiale}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{\text{zero}} + \vec{r} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$= \vec{r} \wedge m\frac{d(\vec{v})}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{a}$$

$$= \vec{r} \wedge m\vec{a}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}} \longleftrightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

La derivata rispetto al tempo di Lo e' uguale al momento delle forze se entrambi i momenti sono rispetto allo stesso polo fisso in un sistema inerziale

• Conservazione di $\vec{L}$ se il momento delle forze e' nullo

Se non si conserva:

$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt}$$

$$\vec{\tau} \cdot dt = dL$$

$$\boxed{\Delta L = \int_{t_0}^{t_f} \vec{\tau}\, dt}$$

→ Quindi ho bisogno di sapere l'azione del momento della forza per un certo intervallo di tempo (va reintrodotto l'impulso)

Considero una $\vec{F}$ applicata per un tempo breve

$$\int_0^t (\vec{r} \wedge \vec{F})\, dt$$

$$\Delta L = \vec{r} \wedge \underbrace{\int_0^t \vec{F}\, dt}_{\text{impulso}}$$

$$\boxed{\Delta \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{J}}$$

Teorema del momento dell'impulso (e' uguale alla variazione del momento angolare)

Esempio: Moto circolare e lavoro (sulle sue slide)

Unità di misura del momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = [N \cdot m \cdot s]$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = r \cdot m \cdot a = m \cdot Kg / m^2$$

- Dovrebbe essere Joule ma
- viene mantenuto il $[N \cdot m]$

Momento angolare di sistemi di punti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(E)} - \vec{v}_o \wedge M\vec{v}_{CM}$$

Quando $-\vec{v}_o \wedge M\vec{v}_{CM} = 0$ si ha $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(E)}$?

1 $\vec{v}_o$ (velocita' del polo) $= 0$, polo fisso nel sistema di riferimento

2 $\vec{v}_o \parallel \vec{v}_{CM}$

3 polo o coincidente con centro di massa, $v_o = \vec{v}_{CM}$, $\vec{v}_o \wedge \vec{v}_{CM} = 0$

4 $v_{CM} = 0$, ossia il C.M. e' in quiete rispetto al polo O

~ Teorema del Momento Angolare (completo)

Se il polo O e' fisso nel S.R.I. o coincide con il C.M., anche se questo non e' fisso, l'evoluzione del momento angolare e' determinato dal momento delle forze esterne (rispetto al polo) e non e' influenzato da quelle interne

~ Conservazione del Momento Angolare

$$\vec{\tau}^{(E)} = 0 \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} \text{ COSTANTE}$$

- Se e' nullo il momento delle forze esterne, il momento angolare e' conservato

$\vec{\tau}^{(E)} = 0$ quando:

- La risultante delle $F^{(E)}$ e' nulla, (si conserva $\vec{L}$, qualunque sia il polo, inoltre e' conservata anche la quantita' di moto $\vec{P}$

! $\vec{R}^{(E)} = 0 \not\Rightarrow \vec{\tau}^{(E)} = 0$

- Momento delle forze esterne e' nullo rispetto a un determinato polo, ma non rispetto a qualunque polo.
Il $\vec{L}$ e' conservato solo rispetto a quel polo (percio' e' importante scegliere il polo)

~ Sistema del c.M.

Il Th mom. ang. vale anche per grandezze calcolate nel S.R. del centro di massa, purche' il polo coincida con il c.M..

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}^{(E)'}$$

~ Teorema di König per il momento angolare (o primo teorema di König)

Si puo' scomporre $\vec{L} = \underbrace{\vec{L}'}_{\text{Rispetto al S.R. del Centro di massa}} + \overbrace{\vec{r}_{CM}}^{\text{Posizione del C.M.}} \wedge M\underbrace{\vec{V}_{CM}}_{\text{Vel. del C.M.}}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}}$$

$$= \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{V}_{CM}$$

~ Quantita' di moto

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM} & 1° \text{ Th. Kö} \\ K = K' + K_{CM} & 2° \end{cases}$$

Scomponiamo in moto del c.M. (moto medio) e moto rispetto al c.M. (moto interno)
Le precedenti espressioni non valgono per $\vec{p}$, infatti:

$$\vec{P} = \vec{P}_{CM} = M\vec{V}_{CM} \quad \text{perche'} \; P' = 0$$

⚠ Momento Angolare

- Per un punto materiale:

$$L = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad e \quad \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{L} = 0$$

- Per sistemi:

$$\vec{L} = \vec{L'} + \vec{r}_{CM} \wedge \vec{P}, \quad ma \quad \underbrace{\vec{P} = 0 \not\Rightarrow \vec{L} = 0}_{\text{Ciò solo se } L_{CM} = -L'}$$

⚠ Energia Cinetica

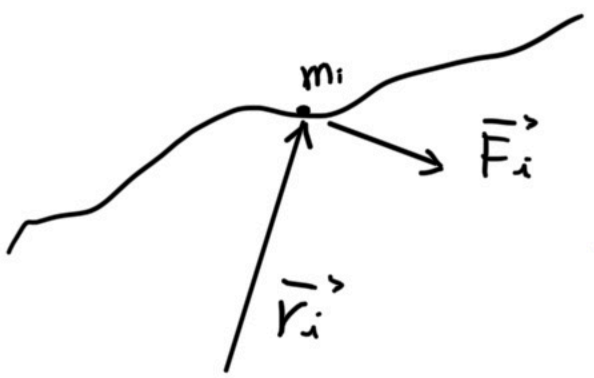
- In un punto mat. $\vec{v} = 0 \Rightarrow K = 0$

ma in un sistema

$\vec{v}_{CM} = 0 \not\Rightarrow K = 0$, $K' \neq 0$ in generale, quindi se $K = 0$ vorrebbe dire che $K = 0 \Rightarrow K' = 0, K_{CM} = 0$

Osserviamo il lavoro

$$W = \int \vec{F} dr$$



← Situazione generica

$$\vec{F_i} = \vec{F}^{(E)} + \vec{F}^{(I)} \Rightarrow W = W^{(I)} + W^{(E)}$$

quindi $dW_i^{(I)} \neq 0$ in generale (ossia sono costanti),
perciò rienuncio il Th delle forze vive per un sist. di punti materiali

~ Teorema dell'Energia cinetica per un sis. punti mat.

Il lavoro complessivo delle forze esterne che agiscono su un sis. di punti mat. e' uguale alla variazione di energia ...

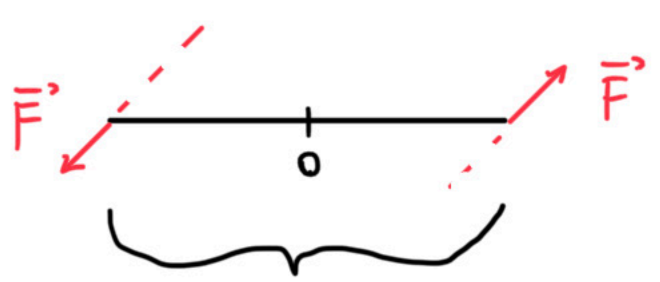
Abbiamo perciò Tre leggi indipendenti tra loro

$\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ conservata

$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ conservata

Solo forze conservative $\Rightarrow$ Emec conservata

~ Sis. di forze applicate a punti diversi



Braccio della coppia (Distanza tra le rette di azione)

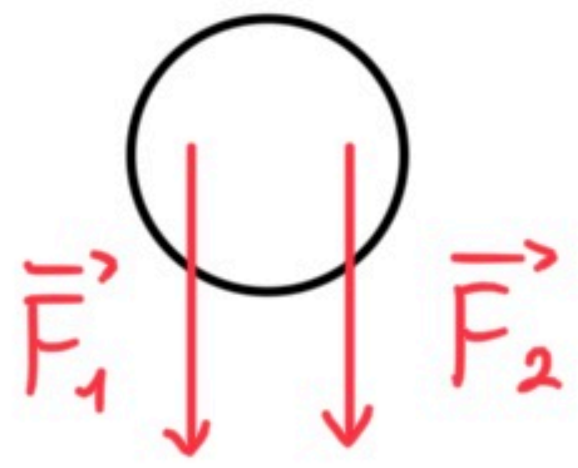
Si ha una coppia di forze (ossia uguali e opposte con diverso punto di app.)

! Il momento non dipende dalla scelta del polo, ortog. alle forze.
Quindi in un. s. di f. appl. in punti diversi non e' rappresentato solo dalla $\vec{R}$

~ Algoritmo per sistemi con forze

Dato un s. di forze app. in punti $\neq$, fissato un polo (noti $\vec{R}^{(E)}$ e $\vec{\tau}^{(E)}$), il sistema può essere ricondotto a una forza $\vec{R}$, con una retta d'azione passante dal polo (momento nullo) e ad una coppia di forze di momento $\vec{\tau}$ (risultante nulla) esempio: Le forze interne sono insieme di coppie a braccio nullo, momento risultante rispetto a qualunque polo

esempio: Sistema di forze //



Scrivo $\vec{F_i} = F_i \cdot \hat{u}$
quindi:
$\vec{R} = (\sum F_i)\,\hat{u}$

$$\underbrace{\vec{\tau}}_{\text{momento risultante}} = \sum r_i \wedge F_i \hat{u} = (\sum F_i \wedge r_i)\,\hat{u}$$

! $\vec{\tau} \perp \vec{R}$

Scelgo un punto c: $\vec{\tau} = \overline{OC} \wedge \vec{R} = \underbrace{\vec{r_c}}_{\text{Da determinare}} \wedge \vec{R}$

$$(\sum F_i \vec{r_i}) \wedge \hat{u} = \vec{r_c} \wedge \vec{R} = \vec{r_c} \wedge (\sum F_i \hat{u})$$

$$= (\sum F_i)\, \vec{r_c} \wedge \hat{u}$$

$$\boxed{\vec{r_c} = \frac{\sum F_i r_i}{\sum F_i}}$$ Pos. del centro delle forze //

esempio: Forza peso

$$\vec{F_i} = m_i g \Rightarrow \vec{R} = M \vec{g}$$

$$\vec{r_c} = \frac{\sum F_i r_i}{\sum F_i} = \frac{\sum m_i \cancel{g} r_i}{\sum m_i \cancel{g}} = \overbrace{\frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}}^{\text{Centro di massa}}$$

! Il centro di gravità (baricentro) coincide con il centro di massa e:

$$\vec{\tau} = \vec{r_c} \wedge m\vec{g} = \vec{r_{CM}} \wedge m\vec{g}$$

~ Dinamica di un corpo rigido

Corpo rigido: e' un sistema di punti materiali sottoposti ad una mutua interazione che li mantiene in posizione fissa uno rispetto all'altro.

In un c.r. le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare

esempio: Trottola (Inception)

~ Moto di spostamento globale (ossia del c.M.)

I vari punti di un corpo rigido possono descrivere traiettorie diverse tra loro $\longrightarrow$ il moto del c.M. non e' sufficiente per descrivere

- Sistema di riferimento inerziale
- Sistema di R. del centro di massa (in genere non inerz.)

Il moto di ogni punto e' determinato dalla distanza costante dei singoli punti fra loro distanti dal c.M.
$\Rightarrow$ un punto e' fermo o ruota lungo una circonferenza

! Il moto e' determinato dalle forze esterne (applicate in punti diversi del corpo rigido), per cui e' importante $\vec{R}^{(E)}$ e $\vec{\tau}^{(E)}$

- Lavoro delle forze interne in un corpo rigido e' 0, per cui:

$$\begin{cases} W^{(E)} = \Delta K \\ \vec{R} = M\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

! Da ora in poi omettiamo (E)

- Come reinterpreto l'espressione del C.M.?

Consideriamo un volume infinitesimo dV, che contiene una massa dm (rappresenta il pto mat.) e utilizzo sommatorie con integrali.

Densità:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad [Kg \cdot m^{-3}]$$

$$M = \int dm = \int \rho \, dV$$ quindi $\rho = \rho(V)$ non necess. costante.

Densità superficiale:

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \longrightarrow M = \int \sigma \, ds \quad [Kg/m^2]$$

Densità lineare

$$\lambda = \frac{dm}{dr} \longrightarrow M = \int \lambda \, dr \quad [Kg/m]$$

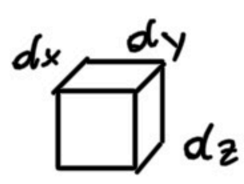
- Posizione del C.M. la scrivo come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho \, dV}{\underbrace{\int \rho \, dV}_{\text{massa totale}}}$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \rho \, dV}{M}}$$

C.M. per un corpo rigido

- Come interpreto dV? Come un parall. pip. in assi cartesiani



~ Corpi omogenei di ρ costante (caso + semplice)

Posso portare fuori ρ dall' integrale e considero un asse di simmetria.

esempio: cilindro (il centro di massa sta sull'asse)

esempio: Centro di m. di un'asta omog. di densità ρ e lunghezza L.

▽ So di già che il c.m. e' al centro dell'asta ma voglio dimostrarlo

▽ e' una sezione di massa dm a distanza x da O

m = massa dell'asta

$$\lambda = \frac{m}{L} \Rightarrow dm = \lambda\, dx$$

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^l x \lambda\, dm}{\int dm} = \frac{\lambda \int_0^l x\, dx}{m}$$

$$= \left[\frac{\lambda}{m} \frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{\lambda}{m} \frac{x^2}{2} = \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l}{2}$$

eserc.: Cen. mas. di una sbarretta di lunghezza l, ma λ variabile secondo:

$$\lambda(x) = a - bx$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^l x \lambda(x)\, dx}{dm} = \frac{\int_0^l x(a - bx)\, dx}{m}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \cdot \left(\int xa\, dx - \int bx^2\, dx\right)$$

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \cdot \left[\frac{ax^2}{2} - b\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

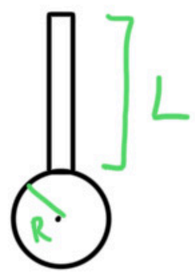
$$= \frac{1}{m}\left(\frac{al^2}{2} - \frac{bl^3}{3}\right) =$$

$$= \int_0^{l} dm = \int_0^{l} \lambda(x)\,dx = \dots$$

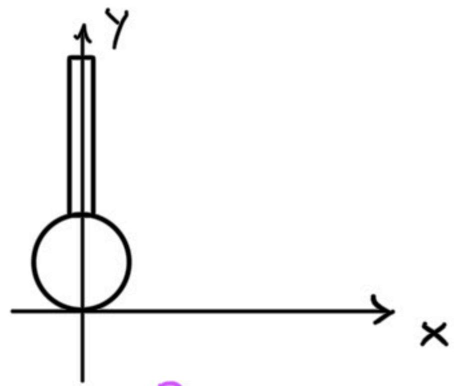
$$= a\int_0^{l} dx - b\int_0^{l} x\,dx$$

$$X_{CM} = a\,l - b\frac{l^2}{2} = a l - \frac{b l^2}{2}$$

esercizio: Asta omogenea di L e massa M_a con un disco di raggio R e massa M_D



∇ Per simmetria il c.M. si trova sull'asse, ossia lungo L



Centro di massa asta $= (0, 2R + \frac{L}{2})$
Centro di massa disco $= (0, R)$

xcasa: Provare a intuire la posizione del c.M. se:

1. ASTA + PESANTE
2. DISCO + PESANTE

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$, ma posso interpretarlo come centro di massa come insieme di sottosistemi semplici interpretandoli come pti materiali.

Quindi interpreto: due sistemi come:

S_1 : ASTA

S_2 : DISCO

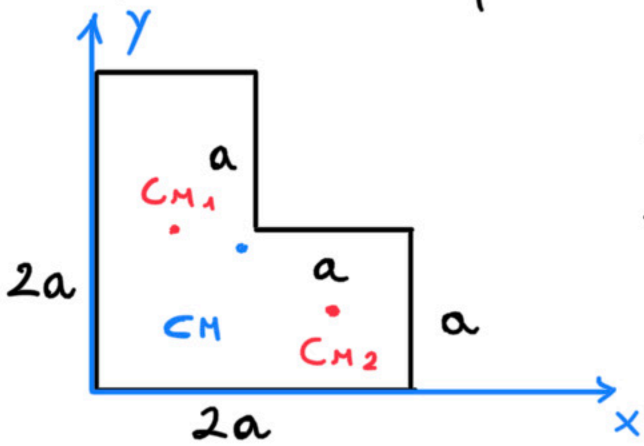
$x_{CM} = 0$ (e' sull'asse y)

$$y_{CM} = \frac{y_a \cdot m_a + y_d \cdot m_d}{m_a + m_d} = \frac{(2R + \frac{l}{2})m_a + R\,m_d}{m_a + m_d}$$

$CM = (0, \dots)$

Esercizio

Considero il quadrato di lato 2a, deformato del tipo



S_1 : Rettangolo di $b = a$ e $h = 2a$
S_2 : Quad di lato a

$$CM_1 = \left(a/2,\ a\right)$$
$$CM_2 = \left(\tfrac{3}{2}a,\ a/2\right)$$

Supponiamo che venga fornita la densità sup. σ, quindi le masse:

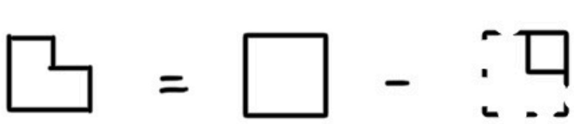
$$m_1 = \sigma\,(2a^2)$$
$$m_2 = \sigma\,(a^2)$$

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{\sigma}\left(a/2 \cdot (2a^2) + 3/2\, a^3\right)}{\cancel{\sigma}\,(2a^2 + a^2)}$$
$$= \frac{a^3 + 3/2\, a^3}{3a^2} = \frac{5/2\, a^{\cancel{3}}}{3\cancel{a^2}} = \frac{5}{6}a$$

$$y_{CM} = \frac{2a^3 + \frac{1}{2}a^3}{3a^2} = \frac{5/2\, a^{\cancel{3}}}{3\cancel{a^2}} = \frac{5}{6}a$$

$$CM = \left(\frac{5}{6}a,\ \frac{5}{6}a\right)$$

! Un altro modo era vedere l'oggetto come



! In questo caso non conveniva

~ Forza peso (Integrale)

$$dm\vec{g}$$

$$\int \vec{g}\, dm = \vec{g}\int dm = \underbrace{M}_{\text{Massa totale}}\vec{g}$$

~ Momento (rispetto al polo fisso)

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \wedge \vec{g}\, dm = \int \vec{r}\, dm \wedge \vec{g} =$$

$$= M \vec{r}_{CM} \wedge \vec{g} = \underbrace{\vec{r}_{CM}}_{\text{Posizione del centro di massa}} \wedge \underbrace{M\vec{g}}_{\text{Forza peso}}$$

~ Energia potenziale

$$U = \int |\vec{g}|\, z\, dm = g \int z\, dm$$

$$U = M g \underbrace{z_{CM}}_{\text{coordinata del centro di massa (in altezza)}} \quad (\approx mgh \text{ per p. materiale})$$

~ Moto del corpo rigido

E' la combinazione di moti elementari:

- Traslazione
- Rotazione

} vale sempre questa scomposizione

Moto di Traslazione

Tutti i punti del corpo rigido descrivono traiettorie uguali con la stessa $\vec{v}$ (in modulo, dir, verso)

$\vec{v} = \vec{v}_{CM}$ (perche' e' uguale in tutti i punti)

▽ Riprendo la dinamica del pto materiale, nei teoremi di König:

$K' = 0 \quad \vec{L}' = 0 \quad \vec{P}' = M \vec{v}'_{CM}$, quindi

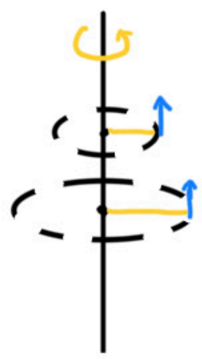
$$K = K_{CM} = \frac{1}{2} M (v_{CM})^2$$

L'eq. del moto: $\vec{R} = M \vec{a}_{CM}$ (dimostriamolo)

Momento angolare $\vec{L} = \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM} M$

~ Moto di Rotazione

Tutti i punti del corpo rigido descrivono un moto circolare, su degli archi di circonferenza che si trovano su piani // e centro sullo stesso asse => hanno tutti stessa ω (// all'asse di rotazione)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$$ (la direzione è ⊥ al piano dell'orbita)

Quindi $\vec{\omega}$ individua:

- asse di rotazione
- piano dell'orbita
- verso di percorrenza

Rototraslazione (Moto del corpo rigido in generale)

Ogni spostamento infinitesimo può essere considerato come una somma di una rotazione e una traslazione infinitesime

Ogni punto descrive una traiettoria diversa, quindi vanno usati:

Teorema del moto del centro di massa

Teorema del momento angolare

Fisica 11/03

Il corpo rigido si può comporre come un moto traslatorio e uno rotazionale.

Moto Rototraslatorio:

Devo ricavare la velocità e quella angolare (che in molti casi sono indipendenti

Rotazioni Rigide attorno ad un asse fisso (in un S.R. IN.)

⚠ Sono molto comuni

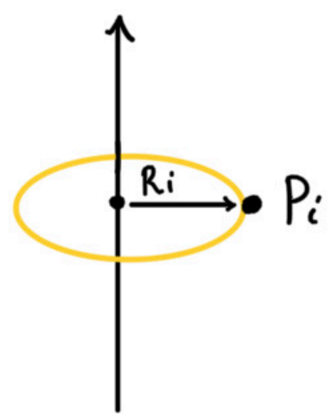
Se l'asse è fisso => i punti sull'asse sono fissi, per cui possono essere scelti come poli (per evitare poli mobili)

⚠ L'asse di rotazione non è necessariamente all'interno del corpo rigido (come il centro di massa non giace per forza sull'asse di rotazione)

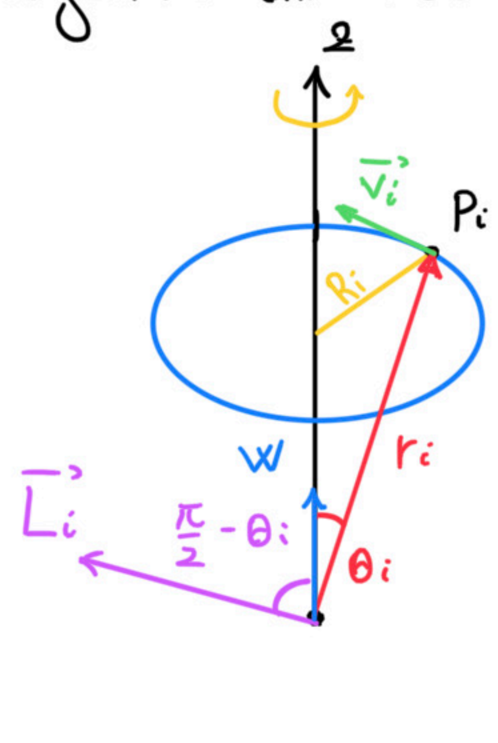
$\vec{\omega}$ ha direzione fissa (quella dell'asse di rotazione), ma ovviamente $|\vec{\omega}|$ può variare ($\vec{\alpha} \neq 0$)

→ accelerazione angolare (sempre // $\vec{\omega}$)

Un punto P_i si muoverà su:
Orbita circolare su un piano ortogonale all'asse di rotaz. con centro sull'asse e raggio R_i



$$|\vec{v}_i| = \omega R_i$$



- $\vec{r_i}$ = Dal polo O al punto P_i
- θ_i = Angolo tra r_i con l'asse z
- Raggio traiettoria

$$R_i = r_i \sin\theta_i$$

- Momento angolare di P_i rispetto a O

$$\vec{L_i} = \vec{r_i} \wedge m\vec{v_i}$$
$$\boxed{\begin{matrix}\vec{L_i} \perp \vec{r_i} \\ \vec{L_i} \perp \vec{v_i}\end{matrix}}$$

- Forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta$ con asse z

Il modulo di L_i sarà:

$$|L_i| = m_i v_i r_i = m r_i \omega R_i$$

⚠ L_i quindi ha sia una componente lungo l'asse di rot. sia una $\perp$ all'asse di rotaz.

Momento angolare assiale (mi concentro su questa componente)

Proiez. del momento angolare sull'asse di rotazione z

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin\theta_i$$

$$= m_i r_i \omega R_i \sin\theta_i \Rightarrow \boxed{L_{i,z} = m_i \omega R_i^2}$$

R_i

⚠ Quindi il momento angolare totale sarà $\vec{L} = \sum \vec{L_i}$, ma sorge il problema che L non è proporzionale a $\vec{\omega}$, quindi non è // all'asse di rotazione (perché abbiamo preso un corpo casuale)

Proiezione su asse z

$$L_z = \sum L_{i,z} = \sum m_i \omega_i R_i^2 = \left(\sum m_i R_i^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = I_z \omega}$$

Chiamo $\left(\sum m_i R_i^2\right)$ come I_z (momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z)

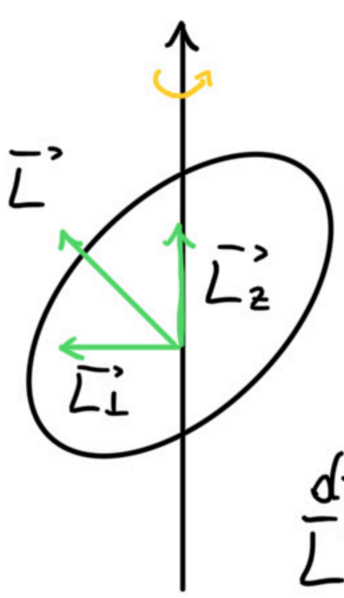
$I_z = \sum m_i R_i^2$ (Descrive la morfologia del corpo)

Il momento d'inerzia dipende dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione (R_i).

! Non è una proprietà intrinseca del corpo rigido

Per cui sono arrivato a dire che la componente z di $\vec{L}$, si può scrivere come $I_z \omega$, ossia è proporzionale a ω, e dipende attraverso la quantità I_z dalla forma e dalla distribuzione di massa del corpo.

Caso generale (Nessun asse di simmetria coincide con l'asse di rotazione)



Ossia il $\vec{L}$ descrive una traiettoria circolare intorno all'asse z (ossia disegna un cono)

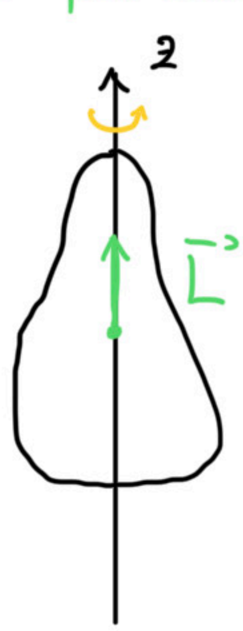
$\vec{L}_z$ può variare in modulo

$\vec{L}_\perp$ varia in direzione

Quindi:

$|\vec{L}_z|$ è proporzionale $|\vec{\omega}|$

Caso particolare ($\vec{L}$ // asse di rotazione)



Asse di rotazione
=
Asse di simmetria

$$\begin{cases} L = L_z \\ L_\perp = 0 \end{cases}$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

Per cui L e' variabile in modulo e verso, ma la dir. e' costante, quindi:

$$\text{Se } \vec{L} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}^{(E)} \parallel \vec{\omega}}$$

Proviamo ora a descrivere l' equazione del moto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt}$$

Assumo I_z costante $\Rightarrow I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} \to \vec{\alpha}$

$$\boxed{\vec{\tau} = I_z \cdot \vec{\alpha}}$$

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\tau}$$

Casi partic.: Note le condizioni iniziali

$$\alpha = \frac{\tau}{I_z} = \alpha(t)$$

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(t)\, dt$$

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt$$

- Se $|\vec{\tau}^{(E)}| = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = 0$, $\omega = \omega_0$, $\theta = \theta_0 + \omega t$

Corpo rigido resta in quiete oppure si muove con velocita' cost.

- Se τ costante: α costante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Energia e lavoro per il corpo rigido:

Per il moto di rotazione si considera un insieme di pti mat

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i \overset{(\omega R_i)^2}{v_i^2} = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum m_i R_i^2 \right)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$$

K dipende dal momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione

CASO PARTICOLARE:

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, $\Rightarrow$ $L = L_z$, $L_\perp = 0$

$$K = \frac{L_z^2}{2 I_z}$$

Con questa scriviamo il Th en. cin.:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

Se varia ω vuol dire che è stato applicato un momento, (è stato compiuto lavoro)

$$dW = dK = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \frac{1}{2} \overbrace{I_z}^{\text{è costante}} d(\omega^2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} I_z \boxed{\cancel{2}\omega \, d\omega}$$ ho svolto la derivata

$$= I_z \, \omega \, d\omega$$

Pongo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e $d\omega = \alpha \, dt$

$$= I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha \, dt = \overbrace{I_z \alpha}^{\tau = I_z \alpha} d\theta = \tau \, d\theta$$

$$dW = \tau \, d\theta$$

$$\boxed{W = \int_0^\theta \tau \, d\theta}$$

Definizione di Lavoro

Lavoro quando ruota di θ

Scriviamo anche la potenza istantanea

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

$$\boxed{P = \tau \omega}$$ Potenza

~ Momento di Inerzia

Analogia

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{\tau} = I_z \vec{\alpha}$

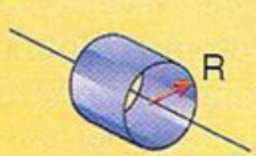
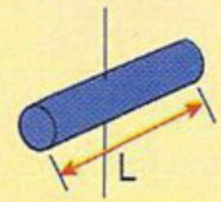
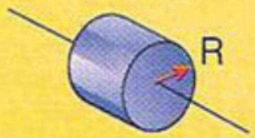
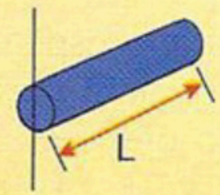
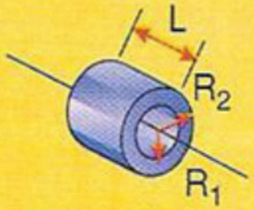
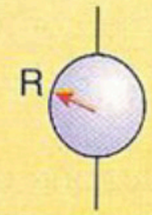
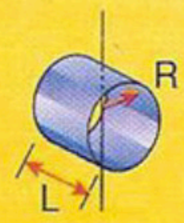
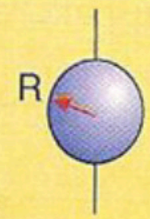
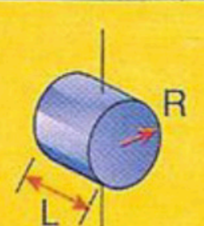
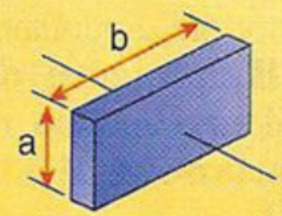
Gioca un ruolo analogo alla massa, ma non e' la stessa cosa (non e' una proprieta' intrinseca alla materia, perche' dipende dall'asse di rotazione)

$$dI = R^2 dm$$

$$I = \int R^2 dm \quad \text{ma} \quad dm = \rho dV$$

$$I = \int \rho R^2 dV$$

! Momento d'inerzia e' additivo → quello totale e' la somma di quelli parziali (vanno calcolati tutti rispetto allo stesso asse)

Guscio cilindrico, rispetto all'asse  $I = mR^2$ $I = mR^2$	Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro  $I = \frac{1}{12}mL^2$ $I = \frac{mL^2}{12}$
Cilindro pieno, rispetto all'asse  $I = \frac{1}{2}mR^2$ $I = \frac{1}{2}mR^2$	Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per una estremità  $I = \frac{mL^2}{3}$ $I = \frac{1}{3}mL^2$
Cilindro cavo, rispetto all'asse  $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$	Guscio sferico sottile, rispetto a un diametro  $I = \frac{2}{3}mR^2$
Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro  $I = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	Sfera piena, rispetto a un diametro  $I = \frac{2}{5}mR^2$ $I = \frac{2}{5}mR^2$
Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro  $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	Parallelepipedo rettangolo pieno, rispetto a un asse passante per il centro, perpendicolare a una faccia  $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

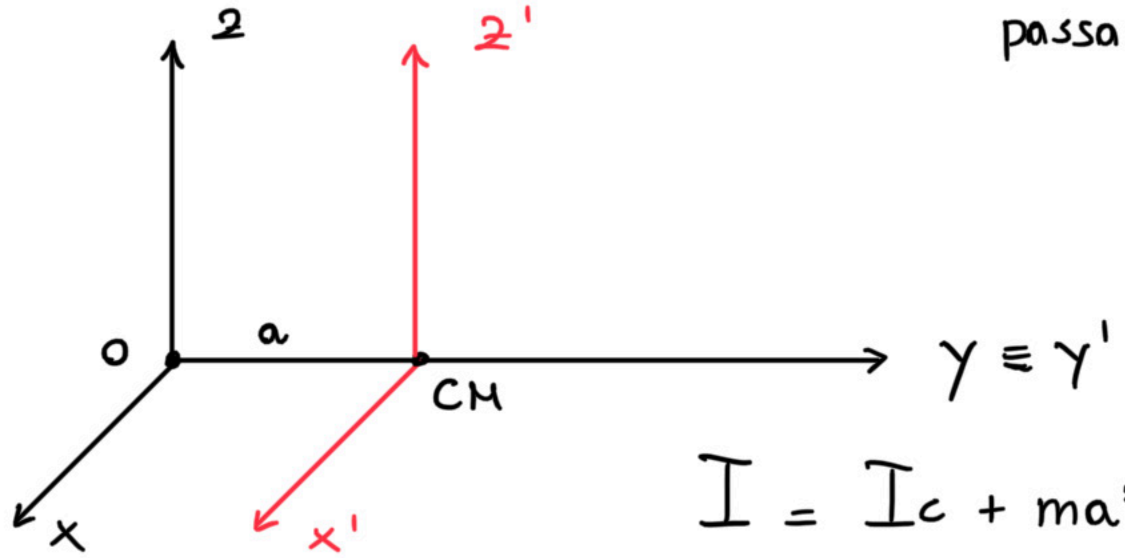
Teorema di Heysens - Steiner

Calcolo del momento d'inerzia rispetto ad un asse

- Il momento d'inerzia di un corpo rigido di massa m rispetto ad un asse situato ad una distanza a dal centro di massa del corpo e':

$$\boxed{I = I_c + ma^2}$$

⚠ I_c = m. d'Inerzia rispetto ad un asse // al primo e passante nel centro di massa



$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + a \end{cases}$$

$$I = I_c + ma^2$$

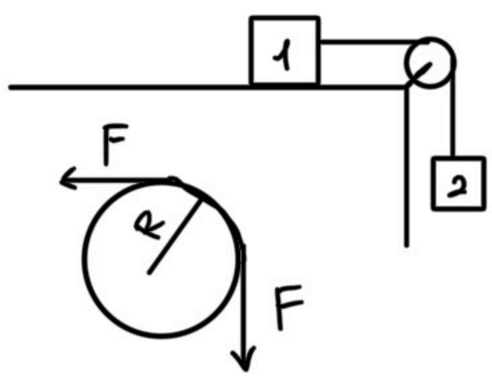
$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) =$$

$$= \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + a^2 + 2a y_i')$$

$$= \sum m_i x_i'^2 + \sum m_i y_i'^2 + \underbrace{\sum m a^2}_{m = M} + 2a \overbrace{\sum m_i y_i'}^{M \cdot \boxed{y_{CM}} = 0}$$

$$= \underbrace{\sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I_{z'} = I_c} + \underbrace{\sum m_i a^2}_{m = M} = I_c + ma^2$$

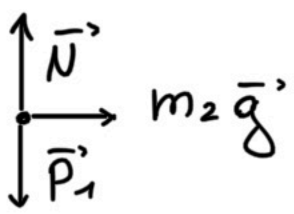
Eserc:210: Carrucola con I, M, R



$$\vec{L} = \vec{L}(m_1) + \vec{L}(m_2) + \vec{L}(car)$$

$$L = m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R}$$

E' la forza che fa ruotare la carrucola



$$\boxed{\vec{T}} = m_1 \vec{g}$$

! La fune non slitta

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m_1 g R$$

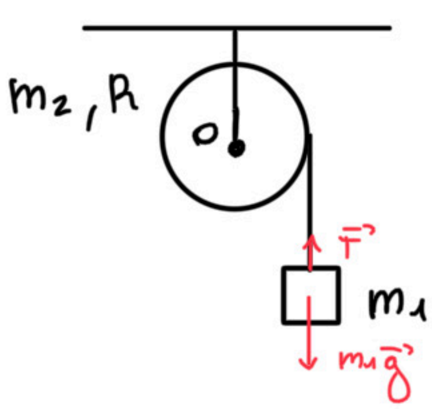
$$= d \left(m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R} \right)$$

$$= m_1 R \frac{dv}{dt} + m_2 R \frac{dv}{dt} + \frac{I}{R} \frac{dv}{dt}$$

$$m_1 g R = m_1 R a + m_2 R a + I a / R$$

$$a = \frac{m_1 g R}{m_1 R + m_2 R + \frac{1}{R}}$$

eserc:210:



Scrivi il moto del sistema

Fisso il polo nel punto o

$\Downarrow$

I momenti di $m\vec{g}$ e di Rv sono nulli, quindi conto solo $\vec{T}$

① Carrucola

$$m_2\vec{g} + \vec{T} + \underbrace{\vec{R}_v}_{\text{Reaz. vincolare}} = 0$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \vec{r} \wedge \vec{T}$$

② Massa

$$m_1\vec{g} + T = m_1\vec{a}$$
$$a = \alpha \cdot R$$

! Il filo non slitta

- $I\vec{\alpha} = r \wedge \vec{T}$
- $m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a}$

$$\begin{cases} I\dfrac{a}{R} = RT \\ m_1 g - T = m_1 a \end{cases}$$

$$T = m_1 g - m_1 a$$

$$I\frac{a}{R} = R m_1 g - R m_1 a$$

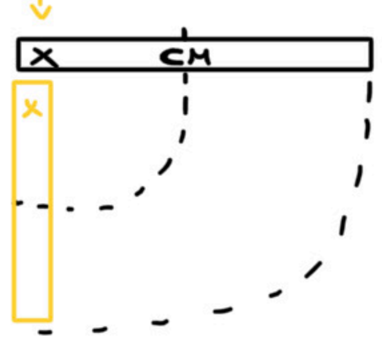
$$Ia = R^2 m_1 g - R^2 m_1 a$$

$$a(I + m_1 R^2) = R^2 m_1 g$$

$$a = \frac{R^2 m_1 g}{I + m_1 R^2}$$

esercizio:

Qui e' vincolata



La lascio cadere e voglio sapere ω quando e' in verticale.
Non c'e' attrito $\Rightarrow$ cons. en.

$$mgl = mg\underbrace{l/2}_{CM} + \frac{1}{2}\underbrace{I}_{I = \frac{ml^2}{3}}\omega^2$$

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

$$\omega^2 = 3g/\ell$$

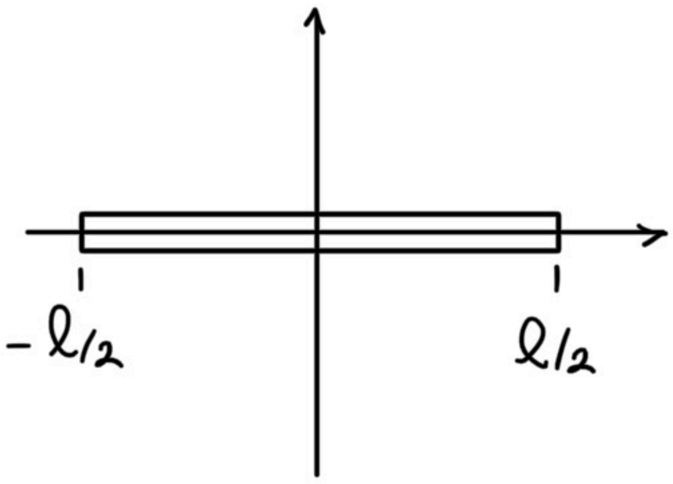
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

$$v_{CM} = ? \implies v_{CM} = \omega \cdot \overset{\ell/2}{r} = \omega\, \ell/2 = \sqrt{3g/\ell} \cdot \ell/2$$

Come impostare il calcolo del mom. Inerzia?

esempio:

Calcola I di una asta di lunghezza L e massa m, rispetto ad un asse che passa nel centro di massa ($\perp$ all'asta)



$\lambda = m/l$

$\rho = \dfrac{m}{s \cdot l} \Rightarrow \lambda = \rho \cdot s$

$I = \int x^2 dm = \int x^2 d(\rho \cdot s \cdot l)$

$\rho \cdot s \cdot l$

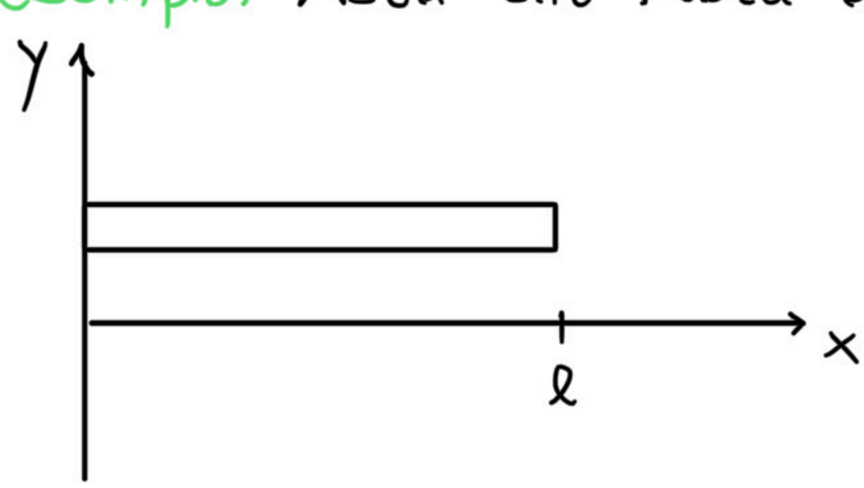
$= \int x^2 \cdot \rho \cdot s \, dx = \left[\dfrac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{l/2}$

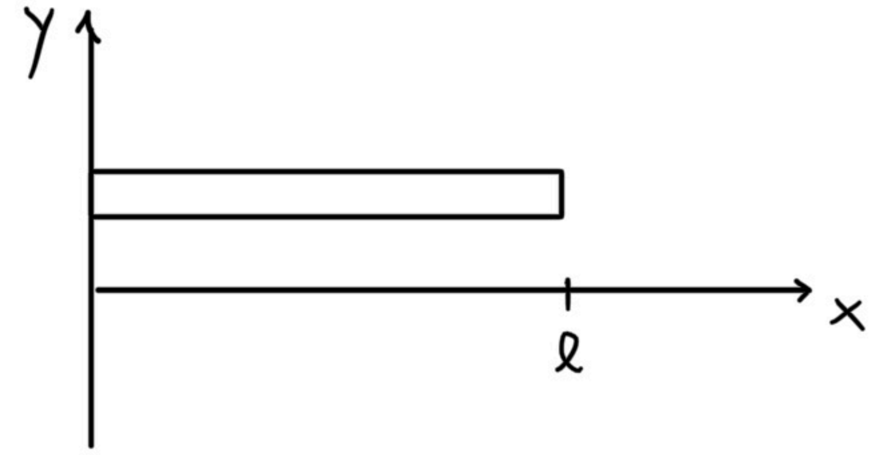
$= \dfrac{\rho \cdot s}{3} \left(\dfrac{l^3}{8} + \dfrac{l^3}{8} \right) = \dfrac{\rho s}{3} \cdot \dfrac{2 l^3}{8}$

$= \dfrac{\rho \cdot s}{3} \cdot \dfrac{l^3}{4} = \dfrac{\rho \cdot s}{12} \cdot l^3$ ma $(\rho \cdot s \cdot l = m)$

$I = \dfrac{l^2 \cdot m}{12}$

esempio: Asta che ruota attorno a un asse che:





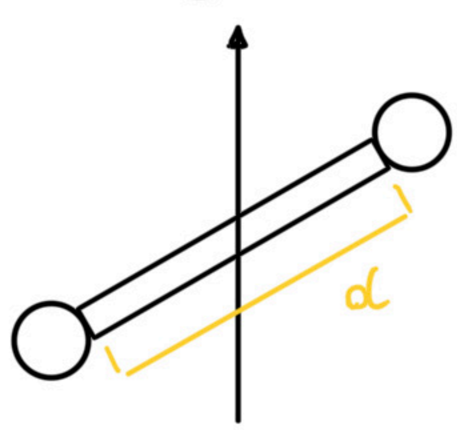
Qui cambiano solo gli estremi:

$$= \rho \frac{\cdot s}{3} \left(l^3 \right) = \rho \frac{\cdot s \, l^3}{3} =$$

$$I = \frac{m l^2}{3}$$

esempio:

Mom. di In. di due sfere collegate da un'asta (di lunghezza d e massa m), le sfere (raggio R e m_s), la lunghezza d esclude le sfere.



Ogni sfera ha centro $(d/2 + R)$;

① I_{asta}

$$I_a = \frac{m d^2}{12}$$

② I_{sfera}

$$I_s = \frac{2}{5} m_s R^2$$

③ Applico Hoisen - Steiner

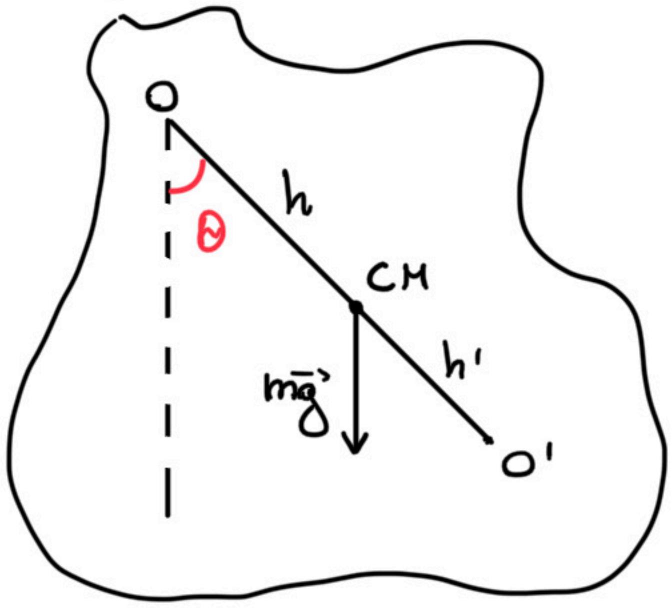
$$I_s = \frac{2}{5} m_s R^2 + \overbrace{m_s (d/2 + R)^2}^{\text{Rispett. al c.M.}}$$

$$I_{TOT} = \frac{1}{12} m d^2 + 2\left(\frac{2}{5} m_s R^2 + m_s \left(R + d/2 \right)^2 \right)$$

$$I_{TOT} = \frac{1}{12} m d^2 + 2 m_s \left(\frac{2}{5} R^2 + (R + d/2)^2 \right.$$

Pendolo armonico

Corpo rigido che può oscillare in un piano verticale per l'azione del suo peso attorno ad un asse orizzontale che non passa per il centro di massa.



h = Distanza tra l'asse di rotazione e C.M.

Equilibrio $\longrightarrow$ $\theta = 0°$ (quindi $m\vec{g}$ richiama il punto di eq)

$$\underbrace{\tau}_{\text{momento del peso}} = -mgh\sin\theta$$

$$\tau = \frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\frac{d^2\theta}{dt}$$

$$\tau = I_z\frac{d^2\theta}{dt} =$$

$$\boxed{I_z\frac{d^2\theta}{dt} = -mgh\sin\theta}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{mgh}{I_z}\sin\theta = 0$$

Applico Hoysen - Steiner

$$I_z = I_c + mh^2$$

Se si considera piccole oscillazioni: (θ piccoli) $\rightarrow$ $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{mgh\theta}{I_z} = 0$$

$$\Omega = \sqrt{mgh/I_z} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_z}{I_z}}$$

Periodo pendolo composto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}}$$

Pendolo semplice

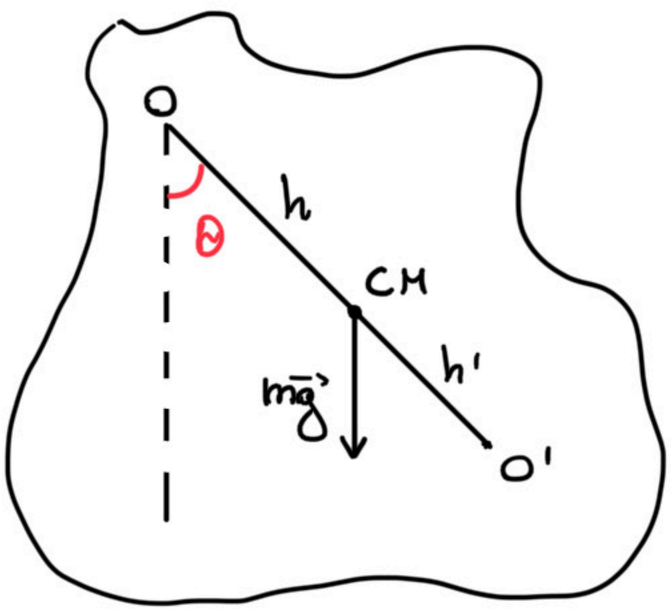
$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

Lunghezza del pendolo semplice con lo stesso periodo e' detta "L ridotta"

$$l = I_z / mh$$

Per cui $h = I_z / ml$, proviamo a usare Th H.S.

$$l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_c + mh^2}{mh} = \frac{I_c}{mh} + h$$



Si ha un punto O' che si trova a una certa distamza h' rispetto al C.M.

$$I_c = mh \cdot h'$$

Scegliamo un $\overbrace{\text{asse}}^{z'}$ che passa per O' e vediamo che succede $\longrightarrow$ $l' = \frac{I'}{mh'}$

$$= \frac{I_c + m h'^2}{m h'} = \frac{m h h' + m h'}{m h'}$$

$$= h + h' = l$$

Assi in O, O' si chiamano assi reciproci (il periodo di oscillazione è lo stesso.

! Questo effetto viene usato per la misura di g

! Guarda l'ultimo esercizio su teams

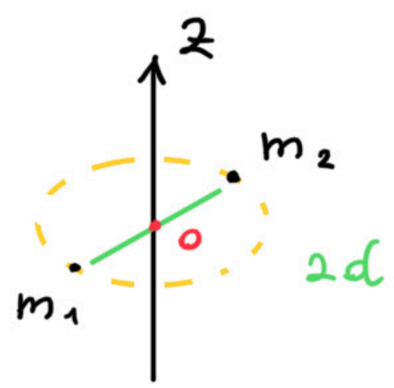
Pendolo composto / Fisico

E' un corpo rigido che oscilla per effetto del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale che non passa dal C.M.

$$\underbrace{I_z}_{\text{Rispetto all'asse in O} \perp \text{al piano}} = I_c + m\underbrace{h}_{\text{Distanza tra O e C.M.}}^2$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{I_z / mgh}$$

Momento e ω



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 2md^2\omega z$$

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Se varia ω, allora $\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \vec{\tau}^{(E)} = 0$, per cui anche se $\vec{R} = 0$, si hanno forze, in particolare una coppia di forze.

1. $|\omega|$ varia, ma non in direzione:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \parallel \vec{L}, \quad \vec{\tau}^{(E)} \parallel \vec{L} \longrightarrow \text{coppia di Forze}$$

2. ω varia in direzione $\vec{\omega}$, $\vec{L}$; quindi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L} \qquad \text{Si ha una coppia ortogonale}$$

Inoltre se $\vec{\tau}^{(E)} = 0$, $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ sono costanti (se I non cambia, ossia se il corpo non si deforma)

Sistemi deformabili

$$L_i = L_f \qquad I_i \, \omega_i = I_f \cdot \omega_f$$

Cosa succede se $\vec{L}$ non e' // a $\vec{\omega}$

L ruota attorno all' asse di rotazione (moto di precessione)

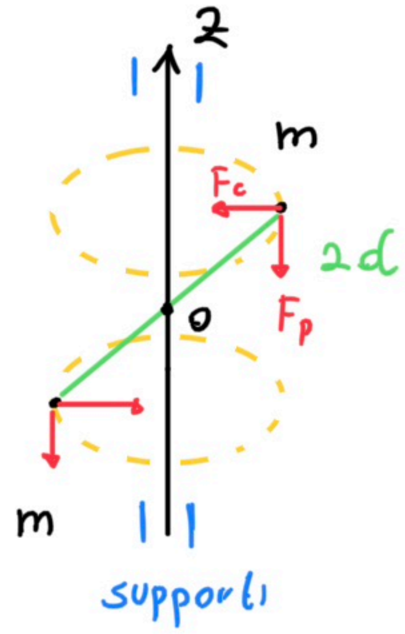
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{\tau}_z & \text{(componente //)} \\[2ex] \dfrac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{\tau}_\perp & \text{(componente } \perp\text{)} \end{cases}$$

L' equazione che "governa" il moto di rotazione e':

$\tau_z = I_z \cdot \alpha$, ma anche qui se $\vec{\tau}_z = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{L}$ costante

Se $\vec{L}_\perp$ varia in direzione, ruota assieme al corpo (potrebbe variare anche il modulo)

percio' considero: Due masse con velocita' angolare ω, collegate da un'asta trascurabile.



Momenti?

1. Cerco le forze: F_c → sono coppia di forza

Il momento di F_c, potrebbe produrre una variazione nella direzione dell'asse di rotazione ⟶ necessita di supporti per mantenere l'asse in posizione verticale

$\theta = \pi/2$, (caso precedente)

! Il momento di F_p e' nullo

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, $\vec{\tau} = 0$

Nelle rotazioni di un corpo rigido attorno ad un asse, è opportuno scegliere configurazioni in cui $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.
Ma se non riesco a $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, riscrivo il lavoro come:

$$W = \int I_z \, d\theta$$ (Quando $\vec{L}$ NO $\parallel \vec{\omega}$)

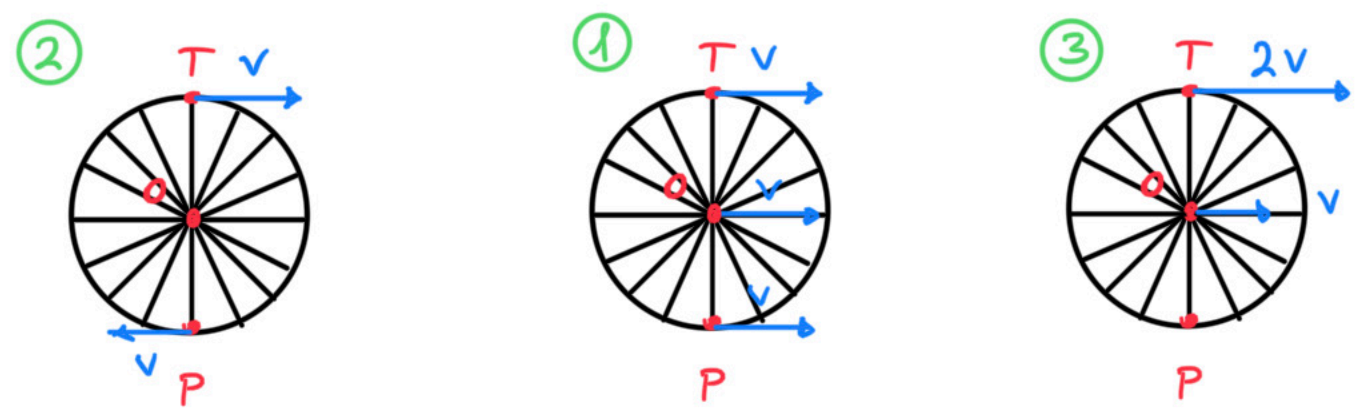
Per cui W, K, dipendono dalle componenti lungo z, $\vec{L}_z$, $\vec{\tau}_z$

Tabella sulle slide ! !

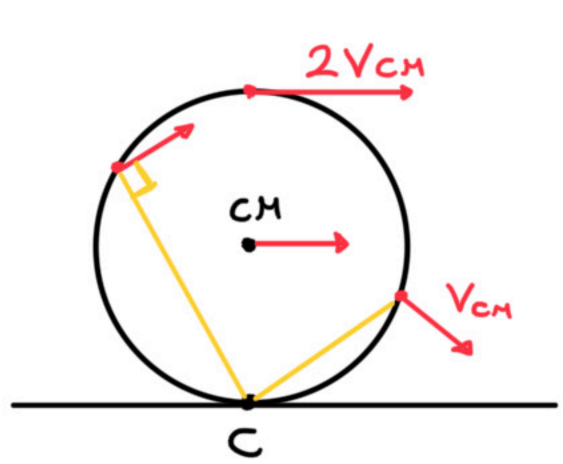
Moto di puro rotolamento

L'asse di rotazione è un asse geometrico che si sposta con il corpo rigido che si muove su un piano

Caso generale:



1. Quando le $\vec{v}$ di tutti i punti sono uguali, abbiamo un moto di pura traslazione e il corpo "striscia sul piano"
2. Quando un corpo rotola sul piano e il punto di contatto ha $\vec{v}$ non nulla rispetto al piano → ROTOLA e STRISCIA
3. Quando $\vec{v}$ del punto di contatto è nulla, allora si ha PURO ROTOLAMENTO



In un intervallo dt, si può considerare un asse fisso, passante in C, ortogonale al

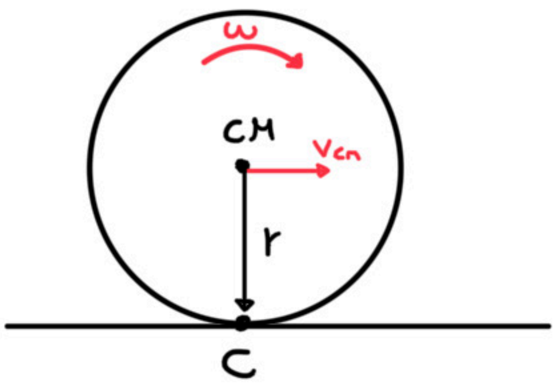
La $\vec{v}$ in ogni punto è ⊥ alla congiungente con il punto di contatto, e proporzionale alla distanza da esso.

$v_p = \omega |C_p|$

Nell' intervallo successivo ci sarà un punto c' di contatto, infinitamente vicino a c ⟶ il processo si ripeterà.

Punto Fermo ⟶ di contatto

Nell' intervallo dt, deve ∃ una forza che mantiene fisso il punto c. ⟶ Fatt (statico)



$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}_{\text{Vel. del punto c rispetto al C.M.}}$$

Condizione di puro rotolamento ⇒ $v_C = 0$, per cui

$$0 = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$, ma ω e r sono ⊥, per cui:

$$\boxed{|\vec{v}_{CM}| = \omega r}$$

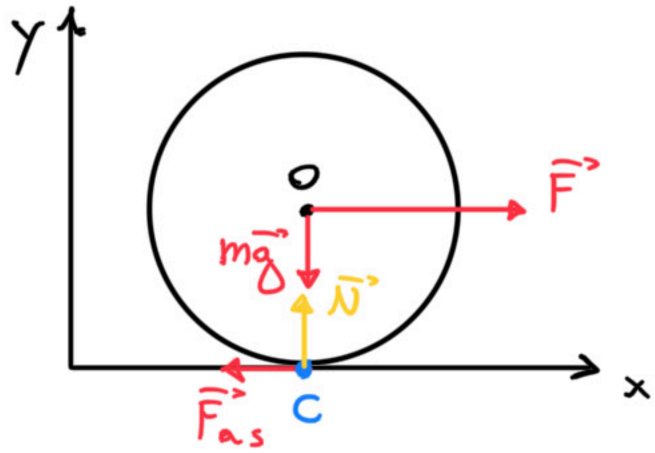
Analogamente: $v_{CM} = \omega r$, $a_{CM} = \alpha r$

Nel moto di rotolamento, la $\vec{v}_{CM}$ e $\vec{\omega}$ non sono indip.

Trasformazioni attorno a c = Rototraslazione, dove C.M. ha $\vec{v}_{CM}$ e il corpo ruota con ω rispetto al C.M.

esempio: (caso semplice)

Corpo che rotola senza strisciare, trainato da $\vec{F}$



Per il moto del C.M.

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{as} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\begin{cases} x: \quad F - F_{as} = m\vec{a}_{CM} \quad (1) \\ y: \quad m\vec{g} - \vec{N} = 0 \end{cases}$$

Scrivo: Th. mom. angolare

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad (\text{polo in } o) \quad (2)$$

$\vec{\tau}(mg)$ e $\vec{\tau}(\vec{F}) =$ nullo (perche' applicato in o)

$\vec{\tau}(\vec{N}) = 0$ perche' // all' asse

Per cui si ha l' unico:

$$\vec{\tau}(F_a) = \underset{(3)}{r \cdot F_a} = I\alpha$$

Faccio il sistema con le 3 equazioni

$$\begin{cases} F - F_a \\ N - mg = 0 \\ r\,F_a = I\alpha \end{cases} \longrightarrow \text{Applico puro rotolamento} \quad \alpha = \frac{a_{CM}}{r}$$

Risolvo il sistema: (calcoli apparte)

$$a_{CM} = \frac{F}{m(1 + I/mr^2)} \qquad F_a = \frac{F}{1 + mr^2/I}$$

! La F_a non puo' assumere valori arbitrari, ossia non puo' superare:

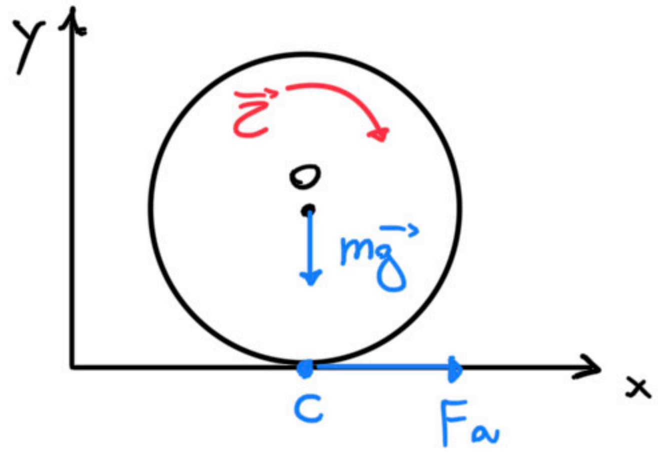
$$|F_a| = \mu_s \vec{N} = \mu_s m\vec{g}$$

$|F_a| \leq \mu_s mg$, quindi

$$F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) = F_{max}$$

Il moto di puro r. avviene solo se $\vec{F}$ non supera F_{max}, sennò il corpo rotola e striscia.

esercizio:



Il moto tende a far slittare il corpo in avanti, per cui F_a è diretta $\rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{N} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} + r \wedge \vec{F_a} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$

$$x: \quad F_a = m \cdot \vec{a}_{CM}$$

$$y: \quad N = mg$$

Studio l'effetto dei momenti:

$$\tau - rF_a = I\alpha$$

$$\tau - rF_a = I\frac{a_{CM}}{r}$$

Unisco le 3 equazioni

$$a_{CM} = \frac{\tau}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad F_a = \frac{\tau}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

! Notare che Fa favorisce il moto e genera l'a_{CM}. In pratica se un motore fa girare la ruota, l'attrito con il suolo spinge il veicolo in avanti

Come capire dove e' diretto l'attrito?

$$\vec{F_a} = \frac{\frac{\tau}{r} - \frac{I}{mr^2} \cdot F}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

, quindi il verso dipende dal segno di quella.

Se invece $\frac{\tau}{r} - \frac{I}{mr^2} \cdot F = 0$ ossia se $\tau = \frac{IF}{mr}$,

allora $F_a = 0$, quindi $a_{CM} = \frac{F}{m} \neq 0$, quindi e' possibile avere un moto accelerato anche se non c'e' attrito. (es: superficie ghiacciata)

! Nel moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, vale la conservazione dell'energia meccanica. La Fa agisce in un punto istantaneamente fermo, quindi non compie lavoro.

! Sperim. si osserva che un corpo che rotola si arresta dopo un certo tempo per l'attrito volvente

Si ha una deformazione locale del piano di appoggio, che ha un momento:

$$\vec{\tau}_v = \underbrace{\mu_{av}}_{\substack{\mu \text{ attrito volvente} \\ \text{(in metri)}}} mg$$

Occorre una forza di trazione $F \geq \frac{\mu_v mg}{r}$ per vincere l'attrito volvente.

(In genere l'effetto e' molto piccolo e non viene considerato.)

esempio:

Cilindro di acciaio su superficie acciaio, con:

$m = 10^3$ Kg $\quad r = 0,2$ m

$\mu_s = 0,2 \quad \mu_v = \underline{5 \cdot 10^{-5}}$ m

La trazione limite (strisciamento) è $F_1 = \mu_s mg = 2000 N$
" " (rotolamento) è $F_2 = \frac{\mu_v}{r} \cdot mg$
che è molto piccolo.
Per cui la ruota è molto più conveniente della slitta (perché $\mu_s >> \mu_{volvente}$)

ESERCIZI:

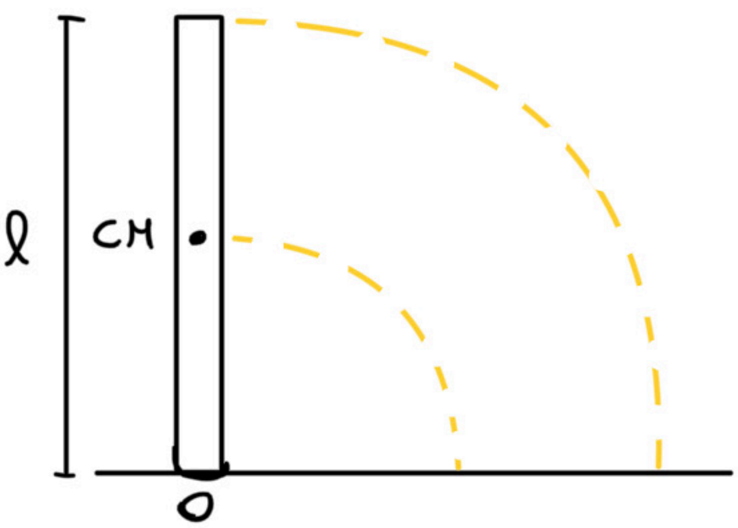
① Asta di m e lunghezza l, inizialmente in verticale e cade attorno ad un estremo fisso o, su un piano.

$\vec{a}_{estremo\ dell'asta} = ?$

$\vec{\omega} = ?$

$\vec{v} = ?$

$t_{impatto} = ?$



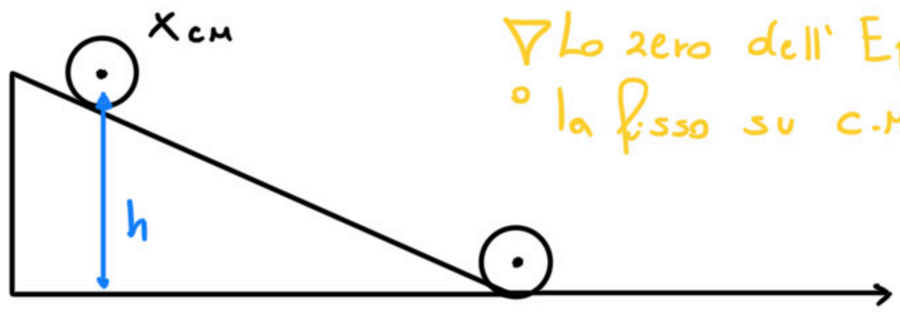
Si ha:

1 F_p applicata al C.M.

2 Reazione vincolare

▽ Polo = o così la reazione vincolare ha momento nullo

Esercizio:



∇ Lo zero dell' E_p lo fisso su C.M.

massa m e partenza da quota h e $v_0 = 0$. Calcolare v del corpo in fondo al piano inclinato

Applico conservazione dell'energia (perche la $\vec{F}_{at}$ volvente c'e' ma non compie rotolamento)

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (E_{pf} = 0)$$

$$mgh = \overbrace{\frac{1}{2} m v_{CM}^2}^{\text{Traslazione}} + \overbrace{\frac{1}{2} I_z \omega^2}^{\text{Rotolamento}}$$

v_{CM}, ω incognite, ma applico la condizione di rol. puro.

$$\Rightarrow \quad v_{CM} = \omega r$$

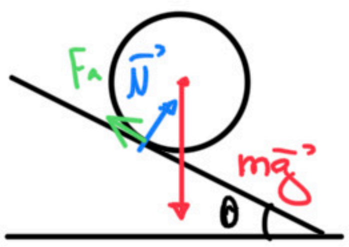
$$mgh = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z \frac{v_{CM}^2}{r^2}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \left(\cancel{m} + \frac{I_z}{r^2} \right)$$

$$gh = \frac{1}{2} v_{CM}^2 \left(1 + \frac{I_z}{mr^2} \right)$$

$$v_{CM} = \sqrt{2gh / (1 + I_z / mr^2)}$$

Calcolo forza di attrito



$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} = I \hat{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: \; mg\sin\theta - F_a = m a_{CM} \\ y: \; mg\cos\theta - N = 0 \end{cases}$$

Polo in C.M.

mg ha $\vec{\tau} = 0$

$$a_{CM} = \frac{F_a r^2}{I_z}$$

$$\vec{F_a} \wedge \vec{r} = I\hat{\alpha}$$

$$F_a r = I\hat{\alpha}$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_a = m a_{CM} \\ N - mg\cos\theta = 0 \\ F_a r = I \frac{a_{CM}}{r} \end{cases}$$

$$mg\sin\theta - F_a = m\frac{F_a r^2}{I_z}$$

$$mg\sin\theta = F_a\left(1 + \frac{mr^2}{I_z}\right)$$

$$F_a = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mr^2}{I_z}}$$

$$a_{CM} = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mr^2}{I_z}} \cdot \frac{r^2}{I_z} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_z}{mr^2}}$$

Devo imporre che $a_{CM} > \vec{F}_{at.\,statico}$

$$\frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_z}{mr^2}} > g\sin\theta$$

Trovo l'angolo minimo per muoversi

Impulso Angolare (Teorema)

$$\underbrace{\int_0^t \vec{\tau}\, dt} = \vec{L_f} - \vec{L_i} = \Delta\vec{L}$$

Si chiama impulso angolare o impulso del momento

Come porre in rotazione un corpo rigido?

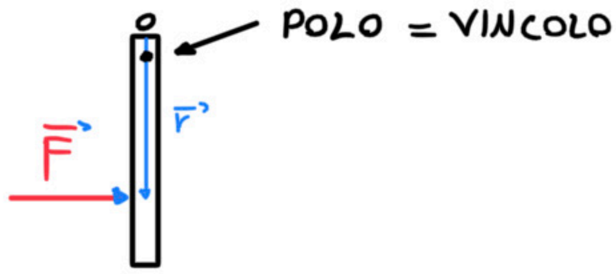
Applico una forza impulsiva in un determinato punto per un certo tempo (ossia applico un impulso)

Momento dell'impulso (Teorema)

$$\int_0^t \vec{\tau}\, dt = \int_0^t (\vec{r} \wedge \vec{F})\, dt = r \wedge \underbrace{\int_0^t \vec{F}\, dt}_{\text{Impulso } J}$$

$$= \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{J}}_{\text{Momento dell' impulso}} = \Delta\vec{L}$$

Cosa succede se applico un impulso? Varia $\vec{L}$



! In assenza di vincoli e' conservata la quantita' di moto
Se ho vincoli $\vec{P}$ non si conserva

In questo caso ho un vincolo in O quindi non si conserva la quantita' di moto

Urti tra P. Mat. e C. Rig.

La presenza di un vincolo che tiene fermo un punto del C.R. introduce una forza esterna di tipo impulsivo $\longrightarrow$ La quantità di moto non è conservata

Caso 1 : $\vec{\tau}^{(E)} = 0$ rispetto a polo O (fisso nel S.R. inerz. / coincide con C.M.)

Si conserva $\vec{L}$ rispetto al polo. Se ho solo forze interne: "Il momento è conservato rispetto a qualunque polo"

Caso 2 : Vincoli ($\vec{\tau}^{(E)} \neq 0$)

Se ho vincoli compariranno:

$\vec{R}$ (Risultante)

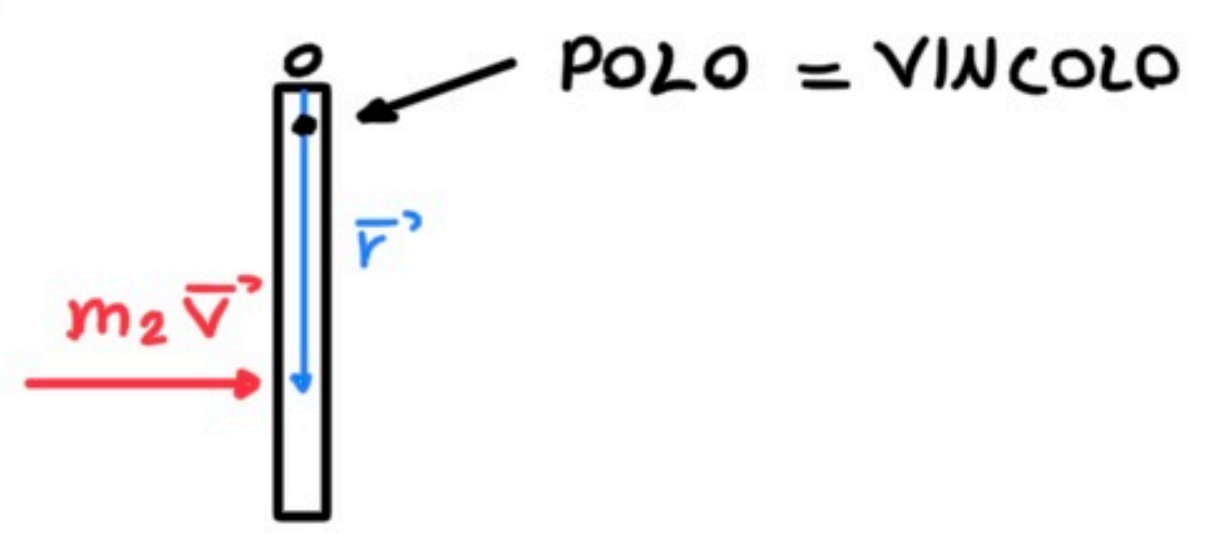
$\vec{\tau}^{(E)}$

Quindi:

1 Impulso $\quad \vec{J} = \int_0^t \vec{R}\, dt = \Delta \vec{P}$

2 Impulso angolare $\quad \int_0^t \vec{J}\, dt = \Delta \vec{L}$

Asta vincolata ad un estremo (NO ATTRITO), colpita da un proiettile di massa m_2 e velocità $\vec{v}$ a distanza r dall'estremo, il proiettile si conficca.



P non si conserva, ma se metto POLO = VINCOLO $\Rightarrow \vec{L}$ si conserva

$$m_2 r v = I \omega$$

$$m_2 r v = \Big(\underbrace{\frac{m l^2}{3}}_{\text{Momento dell'asta}} + \underbrace{m_2 r^2}_{\text{Momento d'In. punto mat.}} \Big) \omega$$

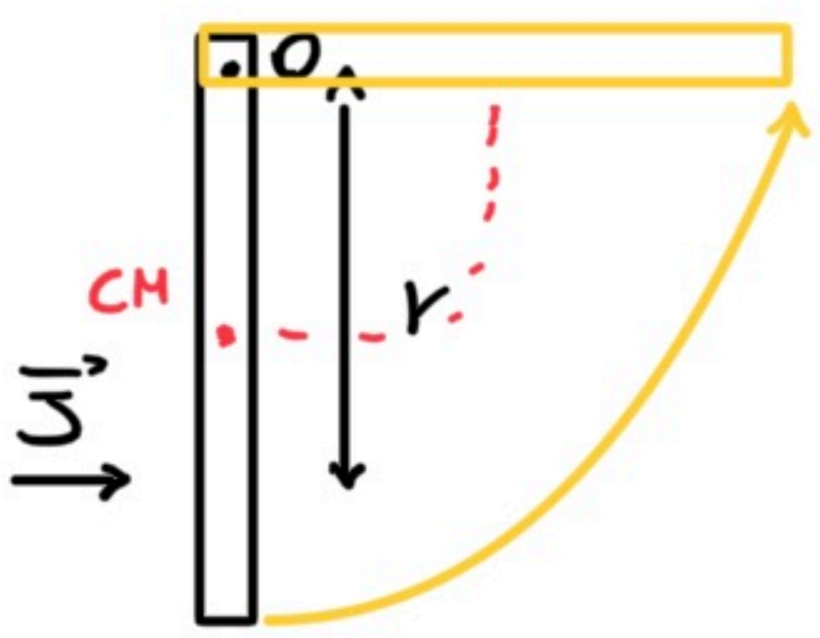
$$\omega = \frac{m_2 r v}{I}$$

$$\Delta p = ? \qquad (P_f - P_i)$$

$$\Delta p = \underbrace{\left(m_2 \omega r \hat{v} + m_1 \omega \overset{C.M.}{\boxed{\frac{\ell}{2}}} \hat{v}\right)}_{P_f} - \underbrace{m_2 \vec{v}}_{P_i}$$

Quanto vale l'impulso della reazione vincolare?

Considero asta di lunghezza l e massa m, libera di ruotare intorno ad un'asse orizzontale che passa per un estremo. L'asta è inizialmente verticale. Calcolare $\vec{J}$ applicato a $|\vec{F}|$ dal punto di sospensione per portare l'asta in orizzontale.



$$\int \vec{\tau}\, dt = \vec{r} \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L}$$

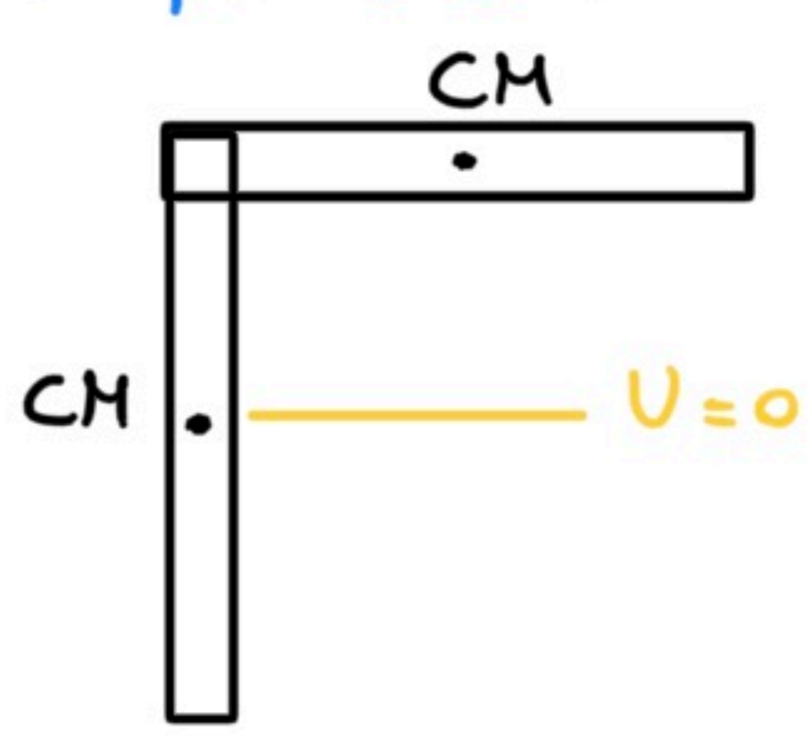
$$L_i = 0 \qquad \underbrace{L_f = ?}_{\text{L'angolo tra L e z e' 90°}} = r \cdot J$$

$$L = r \cdot J = I_z \cdot \omega \quad \text{con} \quad I_z = \frac{ml^2}{3}$$

$$\omega = \frac{rJ}{I_z} = \frac{3rJ}{ml^2}$$

Suddividiamo l'urto in primo, momento esatto, dopo.

Dopo urto: $v_{CM} = \omega \cdot \frac{l}{2}$, ma la quantità di moto non si conserva (per la presenza del vincolo)



Posso applicare la conservazione dell'energia

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$0 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = mg\,l/_2 + \underbrace{0}_{}$$

Assumo che arrivi in posiz. oriz. con v=0

$$\frac{r^2 J^2 \cancel{I_z}}{I_z^{\cancel{2}}} = mgl$$

$$\frac{r^2 J^2}{I_z} = mgl$$

$$J^2 = \frac{m^2 g l^3}{3r^2}$$

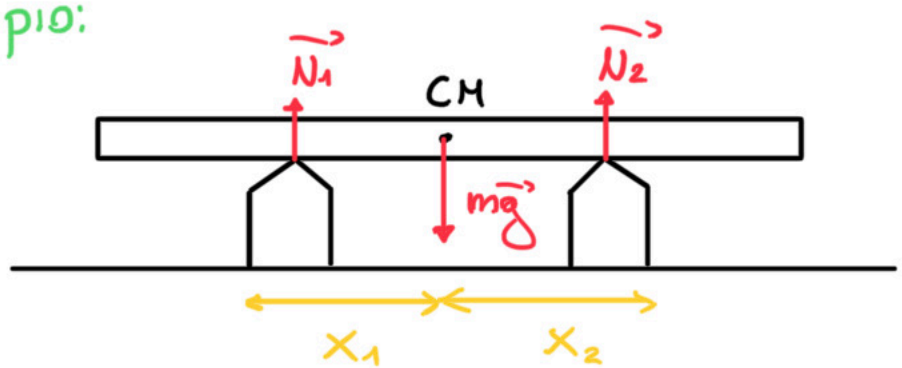
$$J = \frac{m}{r}\sqrt{gl^3/3}$$

Equilibri di corpi rigidi

1. Centro di massa non si muove $\left(\vec{R}^{(E)} = 0\right)$
2. Il sistema non ruota attorno ad esso $\left(\vec{\tau}^{(E)} = 0\right)$

$\vec{R}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}^{(E)}$ non dipende dal polo

Esempio:



$$\begin{cases} \vec{R}^{(E)} = 0 \quad \vec{N_1} + \vec{N_2} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau}^{(E)} = 0 \quad , \text{ polo nel C.M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = mg \\ N_1 x_1 - N_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

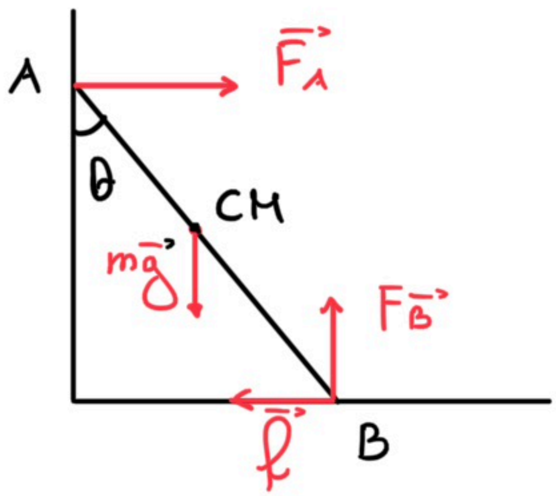
$$N_2 = \frac{N_1 x_1}{x_2}$$

$$N_1 + \frac{N_1 x_1}{x_2} = mg$$

$$N_1 = \frac{mg}{1 + \frac{x_1}{x_2}} = mg \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

$$N_2 = mg\frac{x_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{x_1}{x_2} = mg\frac{x_1}{x_1+x_2}$$

Esercizio classico: Scala



Lunghezza l e pavimento con attrito, parete liscia. massa m e angolo θ

$$\vec{R}^{(E)} = 0$$

$$\vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{f} + m\vec{g} = 0$$

$$\begin{cases} x: \ F_A - f = 0 \\ y: \ F_B - mg = 0 \end{cases}$$

$\vec{\tau}^{(E)}$ scelgo polo in B (così $\tau(f)$ e $\tau(F_B)$ sono nulle)

$$\vec{\tau}^{(F_A)} + \vec{\tau}^{(mg)} = 0$$

$$F_A \cdot l \cdot \cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0$$

$$F_A = \frac{1}{2} mg \tan\theta$$

Punto di sospensione

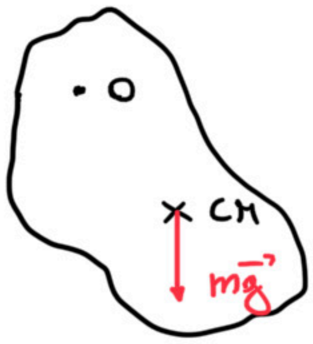
Equilibrio dei corpi sospesi

1 Quando il C.M. non si trova sulla verticale passante per O c'è un momento $\vec{mg} \neq 0$, per cui $\vec{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} \neq 0$

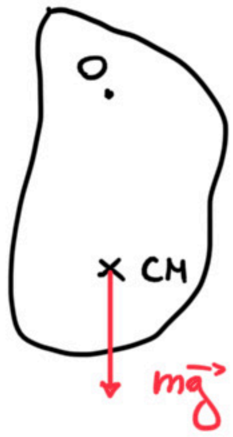
2 Se invece il C.M. si trova sulla verticale e si ha $\vec{v}_{CM} = 0$, il momento è nullo e si ha equilibrio stabile.

3 Se invece il C.M. si trova sopra O, si ha che quando io allontano C.M. dalla posizione di equilibrio, la forza peso tende ad allontanarlo sempre di più (equilibrio instabile).

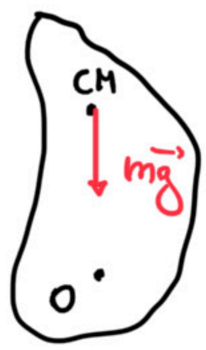
4 Con C.M. ≡ PUNTO DI SOS., il $\vec{\tau}(\vec{mg})$ è nulla e si parla di posizione di equilibrio indifferente.



CASO 1



CASO 2



CASO 3

CASO 4

Corpi appoggiati

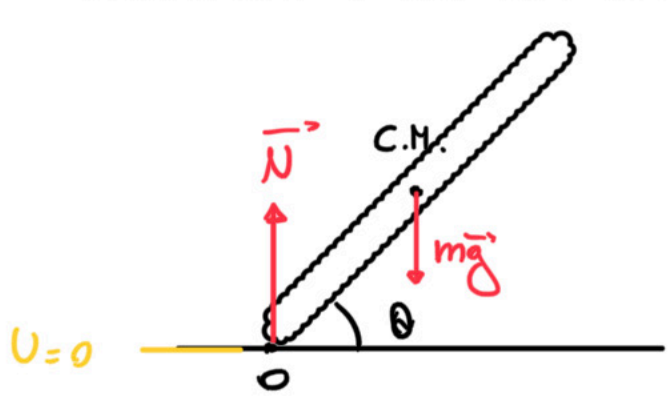
Con corpi appoggiati su un piano con una definita base di appoggio si ha in equilibrio se la verticale passante nel centro di massa cade entro la base di appoggio.

Scelta del polo

1. Punto fisso viene scelto come polo (ossia nel vincolo)
2. Polo nel centro di massa

esempio:

Asta di l e m appoggiata per un estremo su un piano orizzontale, sostenuta formando un angolo θ con il piano; $V_0 = 0$ quando viene lasciata. Moto del C.M.? Arrivo sul piano?



Inizialmente:

$ma_{CM_x} = 0$

$ma_{CM_y} = N - mg$

$V_0 = 0 \Rightarrow$ cade lungo una linea verticale, c'è un'accelerazione non nulla

Lungo x, la $a_{CM} = 0 \Rightarrow V$ costante $= 0$, per cui X_{CM} COSTANTE

$x_{CM} = \frac{1}{2}\ell\cos\theta$ (coordinata costante).

Tuttavia l'estremo dell'asta si sposta oltre il punto o, applico la conservazione dell'energia. (non si hanno forze non conservative)

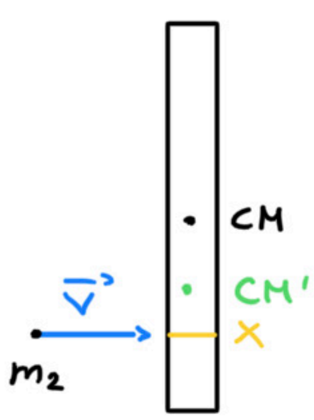
$$mg\,\ell/_2 \sin\theta = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{CM}^2}_{\text{TRASLAZIONE}} + \underbrace{\frac{1}{2} I\omega^2}_{\text{ROTAZIONE}}$$

$$I = \frac{m\ell^2}{12}$$

$$v_{CM} = \omega\frac{\ell}{2}$$

! $y_{CM} = \frac{\ell}{2}\sin\theta$

Esercizio:



Asta m, ℓ e un punto m_2 che colpisce l'asta a una distanza x dal C.M. (rimane conficcato). Trovare V_{CM} e ω dopo l'urto. NO VINCOLI

! Si conserva la quantità di moto.

$$m_2\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_2\vec{v}}{m_1 + m_2}$$

Calcoliamo la posizione del C.M.' dopo l'urto rispetto al C.M. dell'asta.

$$x_{CM'} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}x$$

Applico la conservazione del momento angolare

$$m_2 v\,(x - x_{CM}) = I\omega$$

$$I_{SISTEMA} = \frac{m\ell^2}{12} + \underbrace{m_2 x^2_{CM}}_{\substack{\text{CONTRIBUTO} \\ \text{DI } m_2}}$$

(Huygens Steiner)

$$w = (x - x_{CM}) m_2 V$$

(Palla da biliardo)