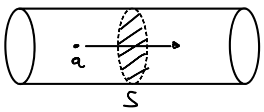
Ripasso elettromagnetismo

Corrente elettrica

$i(t) = dQ/dt$ (istantanea)

si ha la corrente media

$I = \Delta Q / \Delta t$



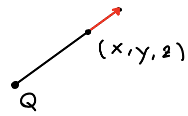
Densità di corrente

$\frac{i}{S} = J$

Differenza di potenziale

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \hat{R}$

$d\vec{L} = \vec{F} \cdot d\vec{x}$



$\Delta V = \int_a^b \vec{E}\, d\vec{l}$ [V]

$V_A = -\int_\infty^A \vec{E}\, d\vec{l}$

! D.D.P = Tensione

! Convenzione: Lettere minuscole per grandezze variabili nel tempo, maiuscole per costanti

Ad esempio:

$v(t)$ = tensione

$i(t)$ = corrente

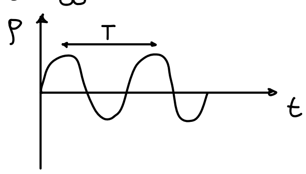
Potenza

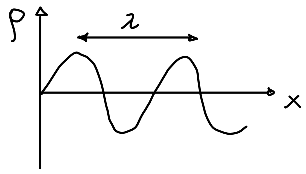
$P(t) = v(t) \cdot i(t)$ [Watt]

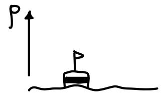
Energia $= W = \int P(t)\, dt$ [KW·h]

Onde meccaniche

Immaginiamo di lanciare un sasso in acqua e fare una foto alle onde (Grafico a dx). Successivamente ripetiamo con un galleggiante posto sull'acqua (a sx)







Lunghezza caratteristica

Lunghezza approssimata del sistema (esempio: Tavolo è qualche metro)

↓

Confrontando λ e L si osserva $\lambda \gg L$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$\omega = 2\pi f = 2\pi / T$

λ = Lunghezza d'onda (Periodo in termine di spazio)

$\boxed{\lambda = \frac{v}{f}}$ $\boxed{c = \lambda \cdot f}$

E. magnetiche (nel vuoto)

Ipotesi a parametri concentrati

Si applica tutto ciò che studiamo se è verificata $\lambda \gg L$ (ipotesi fondamentale), dove L è la lunghezza caratteristica.

Se consideriamo la frequenza delle onde che viaggiano in casa, possiamo calcolare la lunghezza d'onda e confrontarla con L.

$f = 50$ Hz

$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6$ m $\gg L$ (qualche decina di m) ✓

Se ad esempio consideriamo un telefono e le frequenze che viaggiano al suo interno si nota che:

$f = 1$ GHz

$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 30$ cm (Non si ha $\lambda \gg L$ e non vale ciò che applichiamo, ossia non si può applicare l'elettrotecnica)

Bipolo

È l'elemento fondamentale per formare un circuito, si schematizza come una scatola in cui passa corrente collegata a due **poli**. Si caratterizza attraverso $v(t)$ e $i(t)$. Le convenzioni per V e i sono:

SISTEMI RIF. ASSOCIATI (i entra nel ⊕)
$P>0$ ⟶ Potenza assorbita dal bipolo

NON ASSOCIATI O DEI GENERATORI (esce dal ⊖)
$P>0$ ⟶ Potenza ceduta dal bipolo

! V_{AB} = Va da A (+) a B (−) = ΔV_{+-} } CONVENZIONI DI RIFERIMENTO
i = direzioni

Proprietà del bipolo

Linearità
Se la relazione tra $i(t)$ e $v(t)$ è lineare e passa per l'origine

Passività
Un bipolo è passivo se assorbe potenza, ossia se $w(t) \geq 0$

Memoria
La $i(t)$ dipende da un $i(0)$ con t_0 antecedente a t

Tempo invariante
Un bipolo è invariante se la sua curva descrittiva non dipende dal tempo

Principi di Kirchhoff

Consideriamo un gruppo di bipoli collegati tra loro (**Circuito**)
Rami: Bipoli che fanno parte del circuito
Nodi: Punti a comune tra 3 o più bipoli
Maglie: Circuiti chiusi composti da bipoli

1ª LEGGE (Kirchhoff Circuit Law)

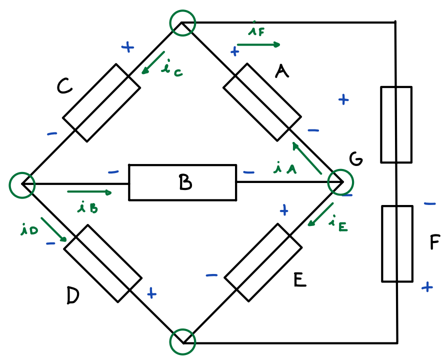
$$\boxed{\Sigma_K i_K = 0}$$

La somma algebrica delle correnti in un nodo è uguale a zero

2ª LEGGE (K. Voltage Law)

$$\boxed{\Sigma_{jK} v_{jK} = 0}$$

La somma algebrica delle tensioni che formano una maglia è uguale a zero



1ª LEGGE: $i_A - i_F - i_C = 0$
2ª LEGGE (Triangolo in alto): $v_C - v_B - v_A = 0$

Convenzione:
- $i(t) > 0$ se la corrente esce dal bipolo ($i < 0$ se entra)
- Si stabilisce un verso di percorrenza e se si entra da + a − allora $v > 0$ sennò $v < 0$

Uscita / Risposta di un circuito: Si chiama una grandezza quando ci interessa solo quella

Circuiti equivalenti: Se le relazioni tra v e i è la stessa.
Se ho due circuiti A e B sono eq. se:

$$v_1 = f(i_1)$$

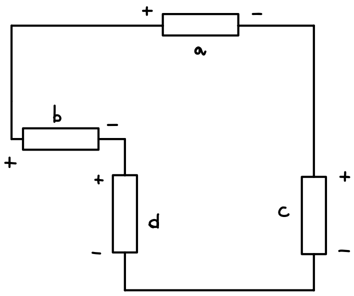
$$v_2 = f(i_2)$$

! Se ho un circuito di 100 bipoli equivalente a uno da 2 bipoli, usando quello da 2 mi semplifico la vita.

! Se ho n nodi, posso scrivere $n-1$ equazioni di Kirchhoff (1ª)

Esempi di applicazioni dei principi di Kirchhoff

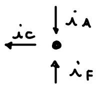
Prendo il senso antiorario, avrò per il 2° PRINCIPIO:



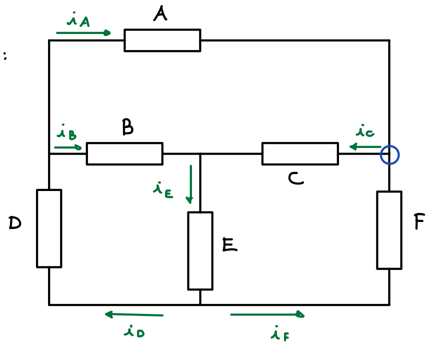
$\sum v_{jk} = 0$

$- v_a + v_b + v_d - v_c = 0$

Per il primo principio se prendiamo un nodo come in figura: chiusa: $\sum i_k = 0$



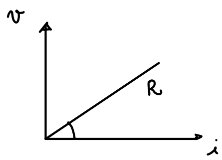
$- i_A - i_F + i_c = 0$

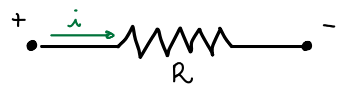


Resistore

Tipologia di bipolo identificato dalla 2ª legge di Ohm. È un bipolo lineare, passivo, e senza memoria. La potenza assorbita è dissipata per effetto Joule.

$v(t) = i(t) \cdot R$





con $R = l \cdot \rho / S$

$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = G v(t)$

$\longrightarrow \frac{1}{R} = G \quad [S] =$ Siemens

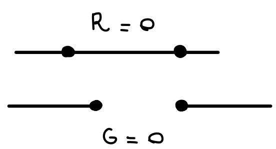
ρ = Resistività (misura la resistenza materiale a farsi attraversare da corrente)

$P = i^2(t) \cdot R$

Caso limite:

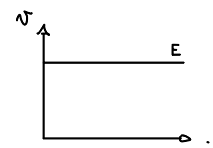
1) $R \longrightarrow 0$ (corto circuito)

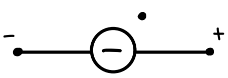
2) $R \longrightarrow +\infty$ (CIRCUITO APERTO)



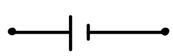
Generatori ideali di tensione

È un bipolo che impone una tensione costante tra i due terminali. Se un generatore viene disattivato allora vuol dire che si ha un corto circuito (Impone $v = 0$) CASO LIMITE.

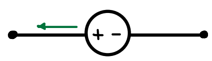




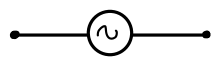
EUROPEO (Il pallino indica dove sta il +)



BATTERIA



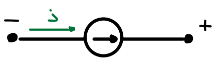
ANGLOSASSONE

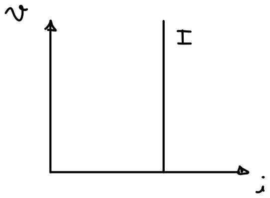


TENSIONE SINUSOIDALE

Generatore ideale di corrente

Impone una corrente costante, il caso limite e' quando ho il circuito aperto ($i=0$), per cui si disattiva sostituendolo con un circuito aperto.





Esempio:

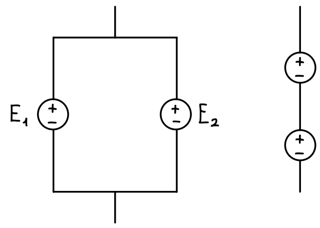
$v_R = i \cdot R$

$v_{TOT} = i \cdot R - E$

Osservazione

Si puo' collegare 2 generatori in parallelo? Scriviamo la 2ª legge di Kirchoff e notiamo che e' possibile solo se erogano la stessa tensione.

$E_2 - E_1 = 0 \iff E_1 = E_2$



In serie vale lo stesso, solo se

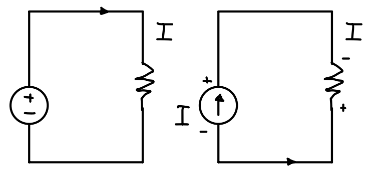
$E_1 = E_2 \Rightarrow i_1 = i_2$ (1ª Kirchof)

Esempio

Cerco la corrente nel circuito. Dalla 2ª Kirchoff si ha:

$E - RI = 0$

$E = RI$ (2ª Ohm)



Nel secondo caso, si ha che:

$I_2 - I_1 = 0$

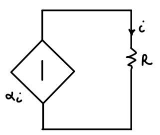
$-RI + RI = 0$ (Perche' una circola in un verso e l'altra nell'altro verso)

2ª KIR rispettata nella maglia

Generatori controllati (o pilotati)

Sono generatori che erogano una corrente che dipende dalla tensione o una corrente appartenente a un altro ramo e possono essere di tensione o di corrente. Sono utilizzati per riprodurre comportamenti di semiconduttori come ad esempio transistor o amplificatori. Come si puo' verificare, non erogano alcuna corrente / tensione per conto loro:

$$E(t) = \begin{cases} \alpha i \\ \beta v \end{cases}$$



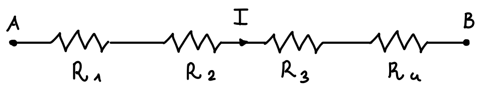
$V = Ri = \beta i$

quindi $\beta = R$ e $i = 0$

Collegamento in serie

Due o piu' bipoli sono detti in serie se giustapposti in modo che passi la stessa corrente (appartengono allo stesso ramo)

$$V_{AB} = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + \dots + V_n$$



$$V_{AB} = I R_1 + \dots + R_n I$$

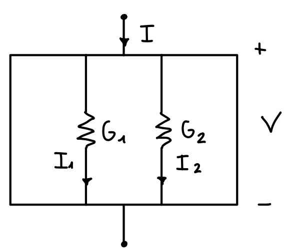
Si puo' rappresentare come un unica resistenza pari alla somma delle resistenze

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + \dots + R_n$$

Collegamento parallelo

Se hanno tutti gli stessi terminali a comune e quindi stessa tensione

$I = I_1 + \dots + I_n$



$I = G_1 V + \dots + G_n V$

Si sostituisce con un resistore con conduttanza pari alla somma:

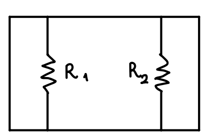
$G = G_1 + \dots + G_n$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Osservazione

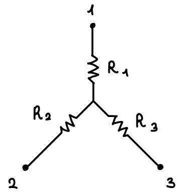
Un parallelo in corto circuito (R_1 o R_2 che va a zero) da un corto circuito, ossia:

$R_2 \longrightarrow 0 \Rightarrow R_{eq} = 0 \longrightarrow V = 0$



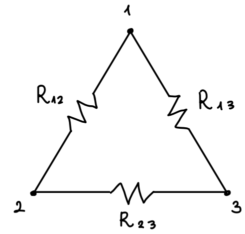
Collegamento a stella

Un morsetto e' comune a tre bipoli, mentre gli altri collegano il circuito



Collegamento a triangolo

I morsetti dei bipoli sono a due a due in sequenza



Trasformazioni stella - triangolo

- STELLA ⟶ TRIANGOLO

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1}$$

$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2}$$

- TRIANGOLO ⟶ STELLA

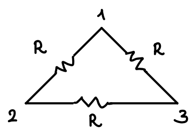
$$R_1 = \frac{R_{13}\,R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

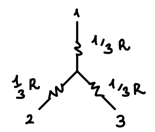
$$R_2 = \frac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13}\,R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

! Se le resistenze sono tutte uguali si puo' passare da una all'altra come:

$$R_S = \frac{R_T}{3}$$





Circuiti equivalenti

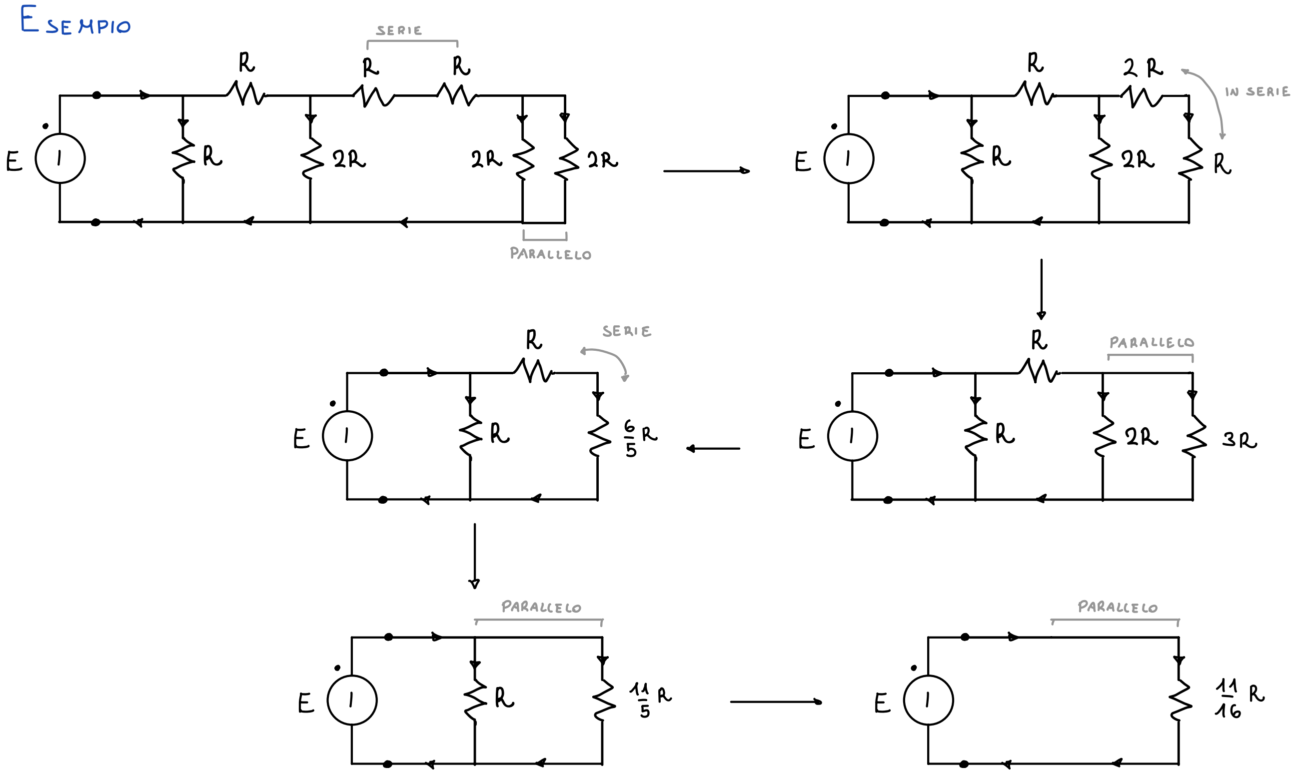
La strategia e' trovare un R_{eq}, il problema e' che mi perdo le I intermedie.

- COLLEGAMENTI IN SERIE 1
- COLLEGAMENTI IN PARALLELO 2

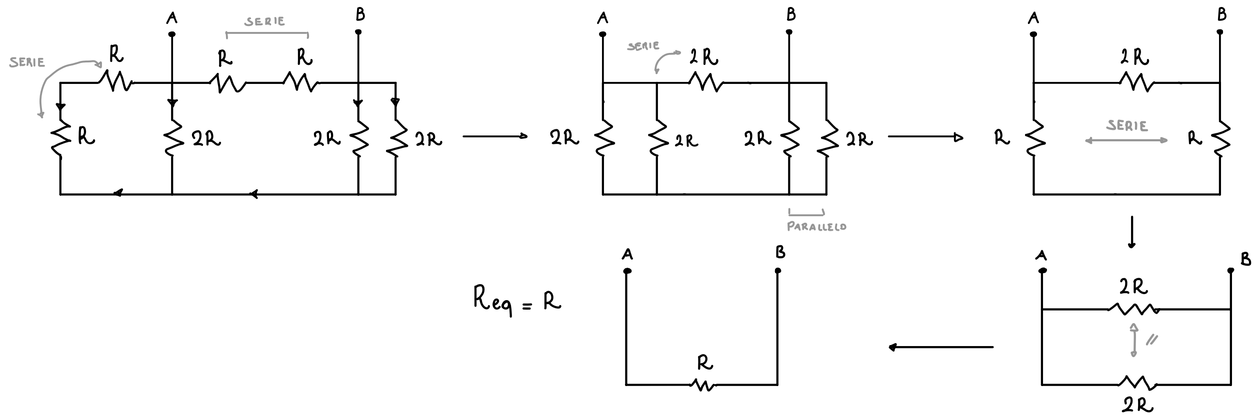
Ripeto 1 e 2, quando non ho piu' serie o paralleli da semplificare provo a trasformare stelle e triangoli per vedere se si generano serie o paralleli

- STELLE ⟷ TRIANGOLI 3
- CALCOLO R_{eq} e I

Esempio



ESERCIZIO: Aggiungiamo 2 terminali

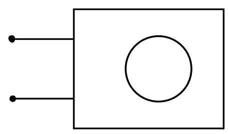


$R_{eq} = R$

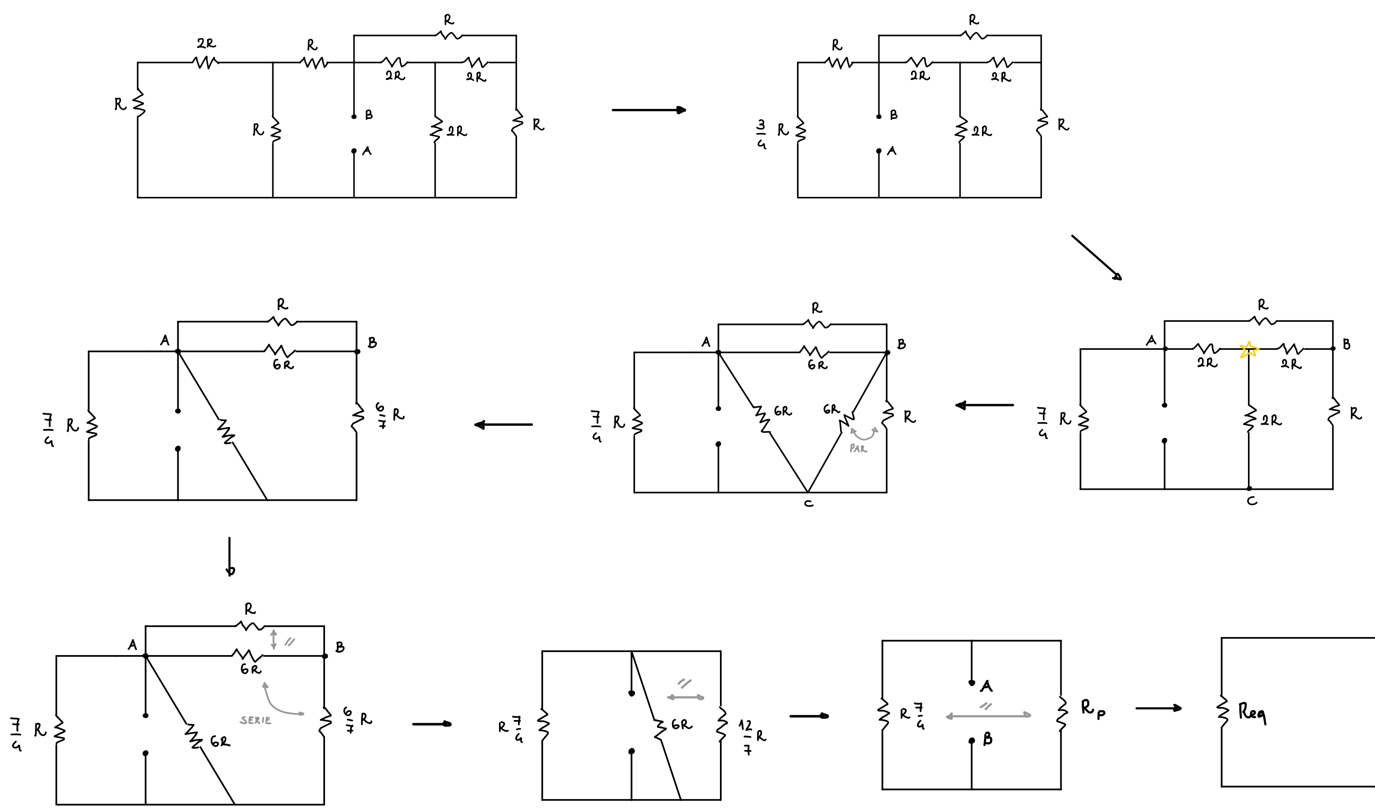
$R_{eq} = R$

TESTER

Strumento che misura la resistenza equivalente imponendo la tensione, misura la corrente e fa il rapporto ottenendo la R_{eq}



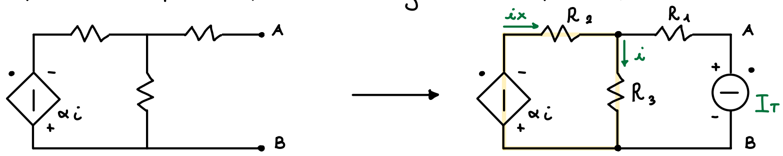
ESERCIZIO: Semplificare il circuito e trovare R_{eq}



Trasformo la stella di terminali ABC

CASO DI GENERATORE PILOTATO

In presenza di un generatore pilotato non risulta possibile applicare serie e parallelo, per cui per trovare la resistenza equivalente e' necessario applicare la definizione, inserendo un generatore di prova (TESTER)



$R_{eq} = V_T / I_T$

Supponiamo che I_T sia noto, per trovare V_T applichiamo le leggi di Kirchoff; per la seconda e' preferibile una maglia che NON includa il generatore test.

1ª KIR: $i_x - i + I_T = 0$

2ª KIR (su maglia in giallo): $R_3 i + R_2 i_x - \alpha i = 0$

$$\begin{cases} i_x - i + I_T = 0 \\ R_3 i + R_2 i_x - \alpha i = 0 \end{cases}$$

$$i = \frac{R_2 I_T}{R_2 + R_3 - \alpha}$$

A questo punto trovo V_T e R_{eq}:

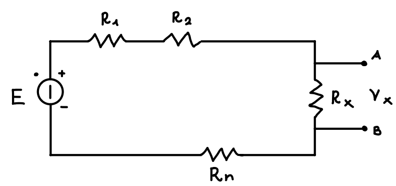
$V_T = V_B - V_A = R_1 I_T + R_3 i$

$$R_{eq} = V_T / I_T = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3 - \alpha}$$

PARTITORE DI TENSIONE

Consideriamo un circuito di n resistori in serie e osserviamo con le leggi di Kirchhoff come si ripartisce la tensione erogata dal generatore, ossia cerchiamo V_x:

$E = R_{eq} \cdot I = \sum^{K} R_K \cdot I \longrightarrow I = \frac{E}{(R_1 + \dots + R_n)}$ ma $V_i = R_i \cdot I$

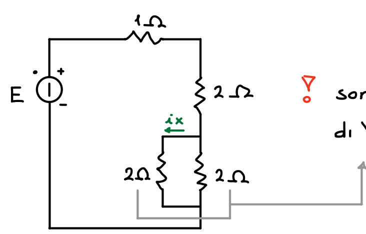


$$\boxed{V_x = \frac{R_x I}{(R_1 + \dots + R_n)}}$$

ESEMPIO: Trovare i_x nel seguente circuito. Trovo R_{eq} e applico la formula:

$V_x = \frac{E \cdot (1\,\Omega)}{1\,\Omega + 2\,\Omega + 1\,\Omega} = E/4$

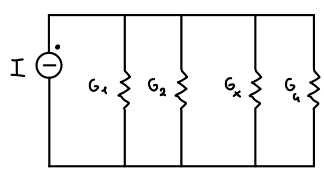
$i_x = \frac{E/4}{R_x} = E/8$



! sono in parallelo (stessa V), per il calcolo di V_x le considero come un $R_{1,2} = \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1\,\Omega$

PARTITORE DI CORRENTE

Consideriamo n resistori in parallelo collegati a un generatore, vogliamo sapere come si ripartisce I e calcolare una generica i_x. Cerco la R_{eq}:



$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{\sum_K G_K}$

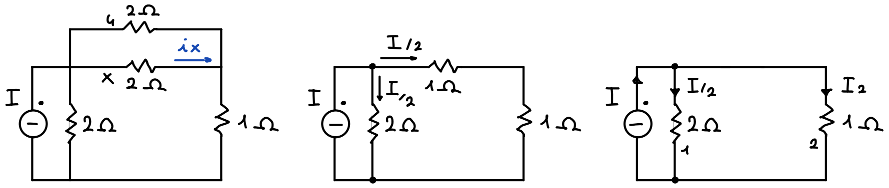
$V = R_{eq} \cdot I = \frac{I}{\sum_K G_K}$

$i_x = G_x \cdot V = \frac{I\, G_x}{\sum_K G_K}$

$$\boxed{i_n = \frac{I \cdot 1/R_x}{1/R_1 + \dots + 1/R_n}}$$

! Se $n = 2$ e $R_1 = R_2$, allora la corrente si equipartisce

ESEMPIO: Trovare la corrente i_x



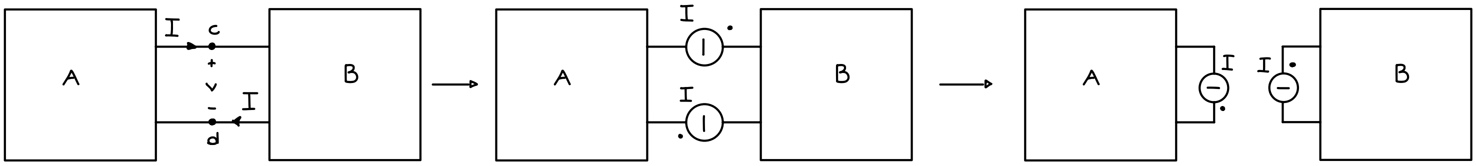
1) Semplifico il circuito e noto che ho un partitore di corrente con $R_1 = R_2$, quindi si ha $I_1 = I_2 = I/2$

2) Vado a ritroso e osservo che nelle resistenze in parallelo $R_x = R_4$ scorre $I/2$ che, come prima si equipartisce:

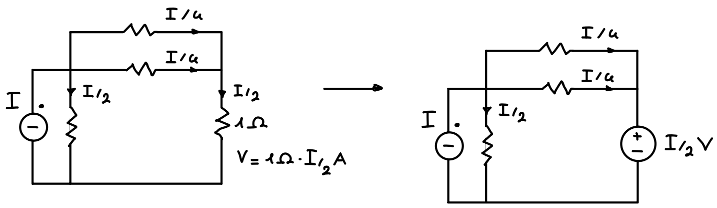
$i_x = i_4 = I/4$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

- Noto il valore della corrente in un ramo di una rete e' possibile inserire in quel ramo un generatore di corrente che eroga una corrente pari a quella che circola nel ramo
- Noto il valore della tensione tra due punti di una rete e' possibile inserire in quel ramo un generatore di tensione che eroga una tensione pari a quella tra i due punti della rete.



ESEMPIO



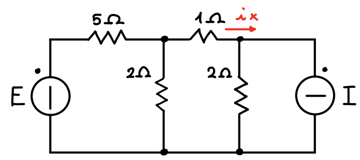
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

E' possibile determinare una tensione o corrente in un qualunque ramo di una rete sommando i valori di tensione o corrente in quel ramo che si ottengono facendo agire separatamente i generatori indipendenti della rete.

I generatori possono essere fatti agire a gruppi o singolarmente (gli altri vanno disattivati)

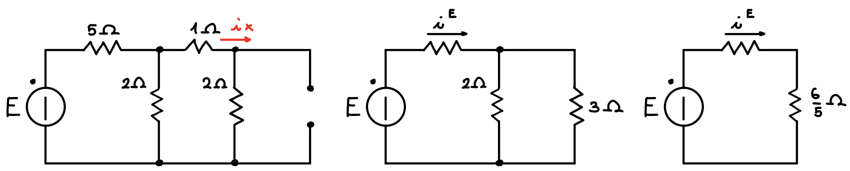
! SI APPLICA SOLO A FUNZIONI LINEARI (i, V, ...), ad esempio NON vale con la potenza.

ESEMPIO:



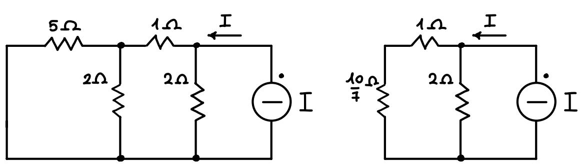
Disattivo a turno uno dei due generatori e misuro i_x:

1) Misuro i_x^E, ponendo un circuito aperto



$i^E = \dfrac{E}{5 + 6/5} \longrightarrow i_x^E = \dfrac{i^E \cdot 2}{2 + 2 + 1}$ (PARTITORE DI TENSIONE)

2) Misuro i_x^I, ponendo un corto circuito



! $10/7\,\Omega$ e 1Ω sono in serie e posso usare il partitore di corrente

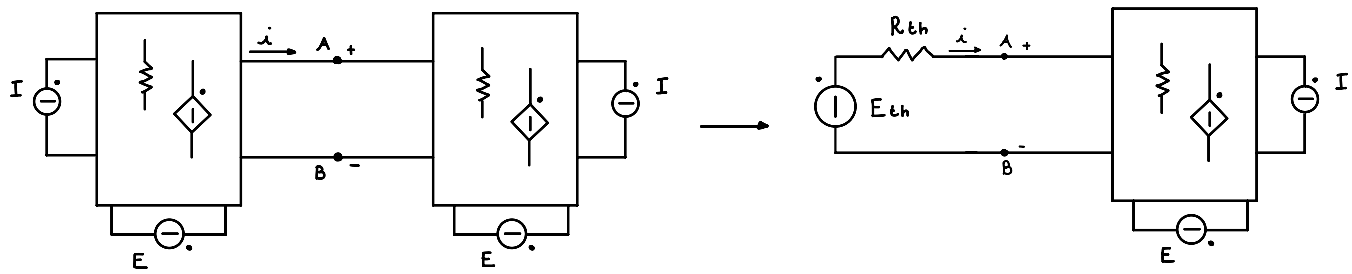
$i_x^I = \dfrac{-I\,2\Omega}{2 + 17/7}$

Infine uso la sovrapposizione:

$i_x = i_x^I + i_x^E = \dots$

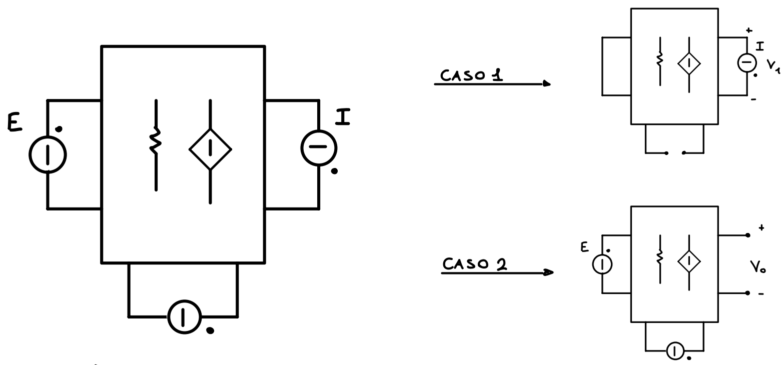
Teorema di Thevenin

Consente di determinare un circuito equivalente di una rete in cui vi sono elementi come resistori, pilotati o generatori indipendenti tramite un circuito costituito da una resistenza di thevenin (R_{th}) e un generatore di Thevenin (V_{th}).
Consideriamo il seguente circuito formato da due generiche unità contenenti gli elementi visti fin'ora, il teorema afferma che è possibile sostituire la parte sinistra con un circuito equivalente ammesso che questa sia lineare e isolata (ossia i pilotati dipendono da parti interne al circuito).



Dimostrazione

Supponiamo di conoscere la corrente I del circuito di destra e applicare una sostituzione con un generatore di corrente I e calcoliamo V considerando prima solo il generatore I (caso 1) e poi gli altri separatamente (caso 2).

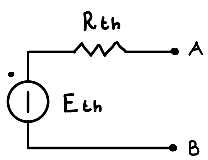


V_0 = Tensione ai capi del generatore I se questo è disattivato (tensione a vuoto)
V_1 = Tensione erogata da I

$V_1 = -R_{eq} \cdot I$
$V = V_0 - R_{eq} \cdot I$ (Principio di sovrapposizione)

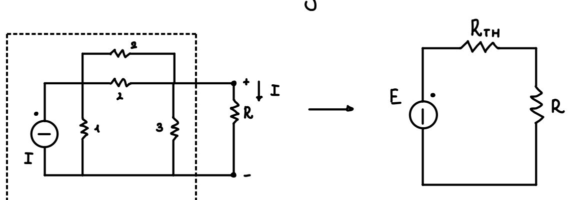
A questo punto paragoniamolo al circuito di Thevenin e si nota che $R_{eq} = R_{th}$ e $V_0 = E_{th}$, perciò si ha che

$V = -R_{th} I + E_{TH}$

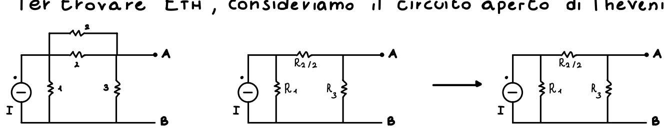


Esempio:

Consideriamo il circuito seguente e sostituiamo l'area tratteggiata con un circuito di Thevenin



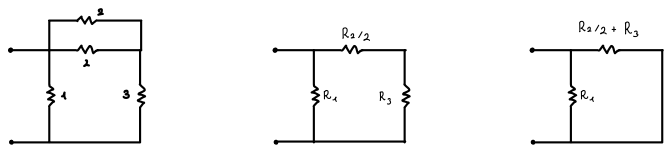
Per trovare E_{TH}, consideriamo il circuito aperto di Thevenin e cerchiamo V_{AB}



Partitore di corrente tra $R_2/2$ e R_3

$I_3 = \frac{I R_1}{R_1 + \frac{R_2}{2} + R_3} \longrightarrow V_{AB} = V_{th} = I_3 \cdot R$

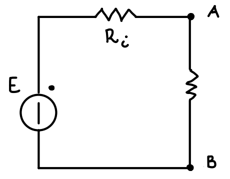
Per trovare R_{th} calcolo la R_{eq} del circuito disattivato:



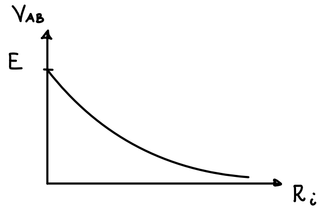
$$R_{eq} = \frac{R_1 (R_2/2 + R_3)}{R_1 + R_2/2 + R_3}$$

Generatore reale di tensione

Un generatore ideale e' considerato con resistenza interna nulla, ma in realta' si schematizza come un circuito di Thevenin, ossia con un generatore E e una R_i:



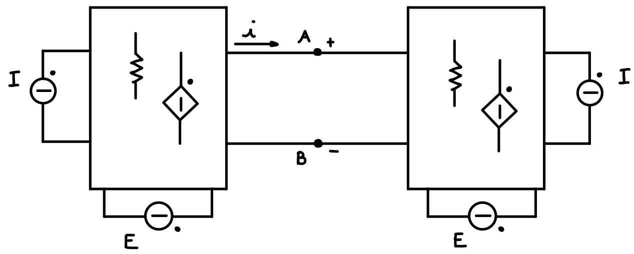
$$V_{AB} = \frac{E \cdot R_c}{R_i + R_c}$$

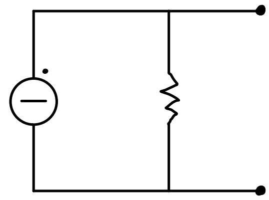


Teorema di Norton

Consente di determinare un circuito equivalente di una rete in cui vi sono più bipoli (tra cui generatori indipendenti) tramite un circuito formato da un generatore di Norton (di corrente) e una resistenza di Norton.

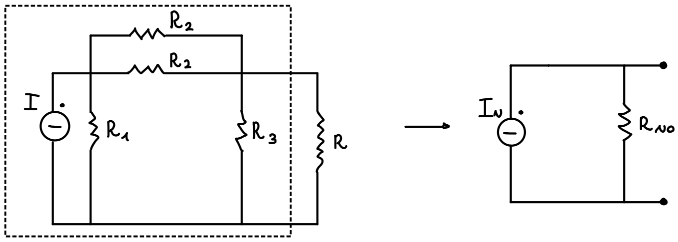
- R_{No} coincide con quella di Thevenin e perciò è la R_{eq} del circuito disattivato
- I_{No} coincide con la corrente che circola tra i due terminali in cortocircuito.



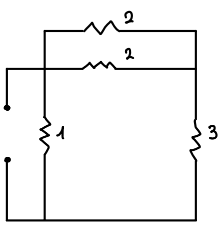


Esempio:

Consideriamo il circuito seguente e sostituiamo l'area tratteggiata con un circuito di Norton



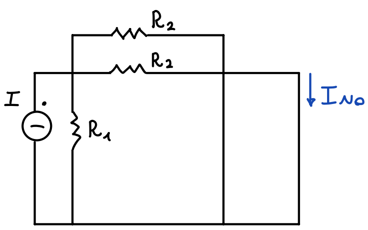
- R_{No} si trova considerando il circuito aperto



$$R_{eq} = (R_1 + R_2 \parallel R_2) \parallel R_3$$

$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2/2) \cdot R_3}{R_1 + R_2/2 + R_3}$$

- Troviamo I_{No} mettendo in cortocircuito i terminali



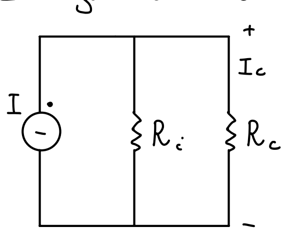
R_3 è in $\parallel$ a un corto e quindi non passa corrente e possiamo escluderla

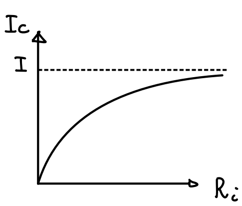
Partitore di corrente:

$$I_{No} = \frac{2/R_2 \cdot I}{2/R_2 + 1/R_1}$$

Generatore reale di corrente

È un generatore ideale di corrente con una resistenza interna in parallelo



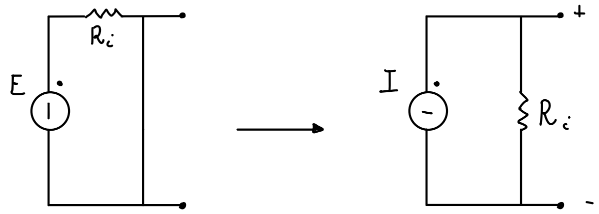


$$I_c = \frac{R_i I}{R_i + R_c}$$

La R_i deve essere abbastanza grande

TRASFORMAZIONE TRA GENERATORI REALI

Consideriamo un generatore di tensione (reale) e proviamo ad applicare il teorema di Norton. Notiamo che la resistenza non cambia ($R_{No} = R_i$), la corrente invece la scriviamo con la 1ª legge di ohm.



con $I = E/R_i$

In questo modo abbiamo trasformato un generatore reale di tensione in uno di corrente.

NOTA: La trasformazione e' sconveniente se sono di interesse grandezze interne al generatore, come ad esempio la potenza erogata dal circuito aperto:

$P_{(TENSIONE)} = R \cdot I^2$ ma $i = 0$ $\qquad$ $P_{(CORRENTE)} = R I^2$

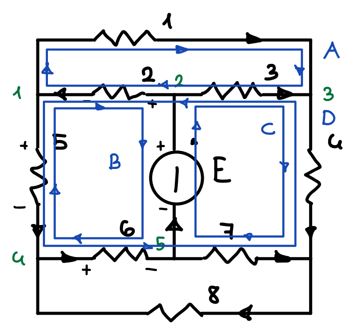
$P(E) = 0$ $\qquad$ $P(I) = R_i I^2$

SISTEMI DI RISOLUZIONE

METODO DEL TABLEAU

Si indica con n = n° nodi e r = n° rami e si impostano le equazioni di Kirchhoff con le correnti come incognite

ESEMPIO



$n = 6 \longrightarrow$ dal 1° di Kirchoff ho $(n-1)$ equazioni

$r = 9 \longrightarrow$ Ottengo le restanti equazioni

Si ottiene un sistema con 9 eq e 9 incognite (preferibile con circuiti piccoli)

! Il verso delle correnti si imposta arbitrariamente

- 1° KIR (KCL) $\longrightarrow$ imposto su $(n-1)$ nodi

$-i_1 + i_2 - i_5 = 0$ 1

$i_E - i_2 - i_3 = 0$ 2

$i_1 + i_3 - i_4 = 0$ 3

$i_5 - i_6 + i_8 = 0$ 4

$i_6 - i_E - i_7 = 0$ 5

- 2° KIR (KVL) $\longrightarrow$ Per scegliere le maglie in modo da avere equazioni indipendenti uso la REGOLA DEL TAGLIO, ossia scelgo una maglia, "taglio" un ramo di quella maglia e proseguo.

$-R_3 i_3 + R_2 i_2 + R_1 i_1 = 0$ A (TAGLIO RAMO IN ALTO)

$E - R_6 i_6 - R_5 i_5 - R_2 i_2 = 0$ B (TAGLIO RAMO A SX)

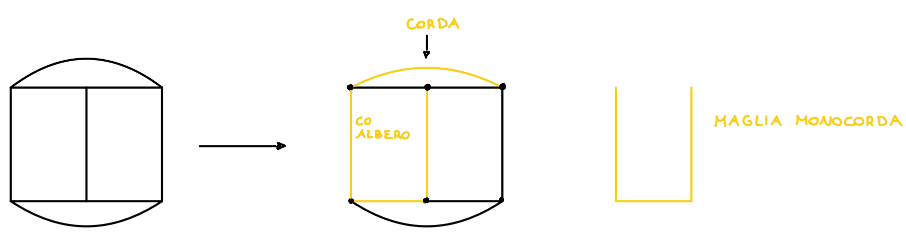
$R_4 R_4 - R_7 i_7 - E + R_3 i_3 = 0$ C (...)

$-R_7 i_7 - R_6 i_6 - R_8 i_8 = 0$ D (...)

Ho ottenuto un sistema 9x9, possiamo costruire un sistema matriciale 9x9 con i come incognite

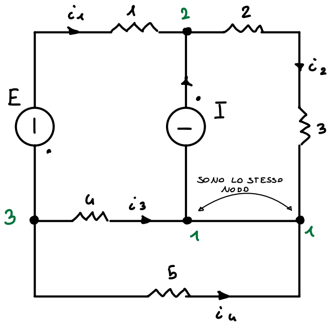
GRAFO DEL CIRCUITO

Contiene solo nodi e rami senza i bipoli, segue un esempio di regola del taglio nel grafo dell'esercizio precedente



- ALBERO: insieme di rami che uniscono tutti i nodi senza formare un circuito ($r_A = n_A - 1$)
- CORDA: collegamento tra nodi che non fanno parte dell'albero, vanno a formare il COALBERO
- MAGLIA MONO CORDA

ESEMPIO: Cosa cambia se ho un generatore di corrente?



$n = 3$

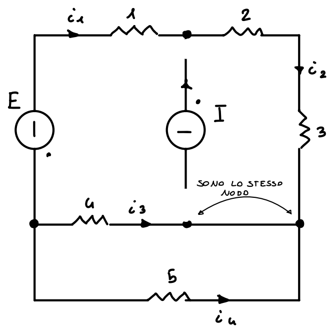
$r = 5$

Il numero di incognite e' $(n - \overset{\text{n° di generatori di corrente}}{\overline{N_I}})$ (I e' nota) $= 4$

① $i_3 + i_2 + i_4 - I = 0$ 1

② $I - i_2 + i_1 = 0$

Per il 2° Kirchoff taglio il ramo del generatore di corrente



③ $R_3 i_2 - i_3 R_4 + E + R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0$

⑥ $- R_5 i_4 + R_4 i_3 = 0$

In realtà V_I si può calcolare come $V_{(\text{nodo } 2)} - V_{(\text{nodo } 1)}$ e si trova come:

$V_I = (R_2 + R_3) i_2$

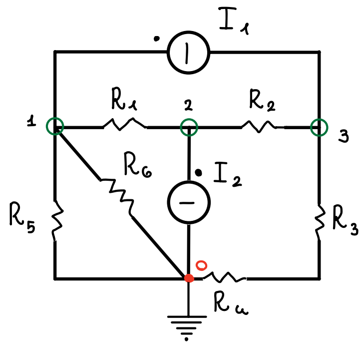
Si taglia subito il generatore di corrente

Metodo delle tensioni di nodo

Si puo' applicare a qualsiasi circuito, senza restrizioni e sfrutta la TENSIONE DI NODO, ovvero la ΔV dai nodi a un punto di riferimento. Usato dai software come "spice".

Consideriamo il circuito in figura e prendiamo come nodo di riferimento il nodo in rosso; definiamo ora V_i come la tensione tra il nodo i-esimo e quello di riferimento.

Il circuito ha $n = 4$ e $r = 7$, per cui possiamo scrivere un massimo di $(n-1)$ equazioni indipendenti (tolgo il nodo di riferimento)



REGOLA PRATICA

Scrivo la generica equazione al nodo i come

$$I = V_i \Sigma \frac{1}{R} - \Sigma V_j \left(\Sigma \frac{1}{R}\right)$$

I: Somma dei generatori di corrente collegati al nodo

$V_i \Sigma \frac{1}{R}$: Tensione al nodo per la somma delle resistenze collegate al nodo

$V_j \Sigma \frac{1}{R}$: Tensione ai nodi $\neq i$ per le resistenze che collegano i, j

$$n_1 \longrightarrow I_1 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5}\right) - V_2 \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_3 \cdot (0)$$

$$n_2 \longrightarrow I_2 = V_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) - V_1 \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_3 \cdot \frac{1}{R_2}$$

$$n_3 \longrightarrow I_2 = V_3 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}\right) - V_1 \cdot 0 - V_2 \cdot \frac{1}{R_2}$$

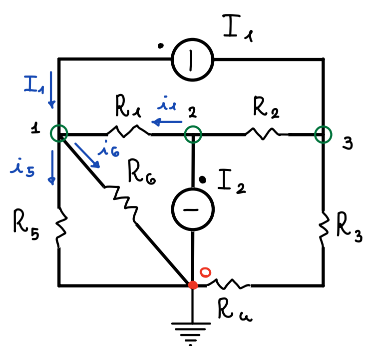
Ho ottenuto un sistema 3×3 che in forma matriciale e':

$$\begin{vmatrix} \text{MATRICE DELLE} \\ \text{CONDUTTANZE} \\ \text{(Simmetrica)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_2 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

Risolvendo ottengo V_1, V_2, V_3

∇ Con V_1, V_2, V_3 si puo' ricavare qualsiasi grandezza di interesse, come ad esempio la potenza erogata dai generatori:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \qquad P_{I_1} = (V_1 - V_3)\, I_1$$



Giustificazione del metodo

Riordiniamo ad esempio la 1^a equazione:

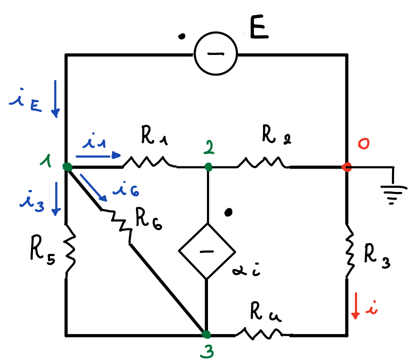
$$I_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_1} - \frac{V_1}{R_6} - \frac{V_1}{R_5} = 0$$

$$I_1 + i_1 - i_5 - i_6 = 0$$

il metodo e' semplicemente un riarrangiamento del KCL (nota che il Tableau di questo circuito darebbe un sistema molto complicato.

Caso di pilotato

Scegliamo come riferimento uno dei nodi ai capi del generatore E, in modo da conoscere almeno uno di due e scrivere $n-1$ equazioni (una e' $V_1 = E$)



$$n_2 : \quad \alpha I = V_2 (G_1 + G_2) - V_1 \frac{1}{R_1} - V_3 \cdot 0$$

$$n_3 : \quad -\alpha i = V_3 (G_5 + G_6 + G_{3,4}) - V_1 (G_6 + G_5) - V_2 (0)$$

∇ $n°$ INCOGNITE $= n - (n°$ generatori di tensione$)$

Pur avendo un sistema 2×2 la i che pilota e' incognita per cui occorre scriverla in funzione di incognite, ottenendo quindi un sistema 3×3

$$i = - \frac{V_3}{R_3 + R_u}$$

I PILOTATI aggiungono un incognita al sistema.

OSSERVAZIONI

- Se ho generatori E che appartengono a percorsi diversi, ossia non ci sono percorsi diretti (senza R) che li uniscono, non conviene utilizzare il metodo di nodi.
- Se i generatori appartengono allo stesso percorso allora conviene perche' scrivo $n-2$ equazioni.
- Scrivendo l'equazione al nodo associato a E si nota:

$$n_1 : \quad 0 = V_1 (G_1 + G_5 + G_6) - V_2 G_1 - V_3 (G_5 + G_6)$$

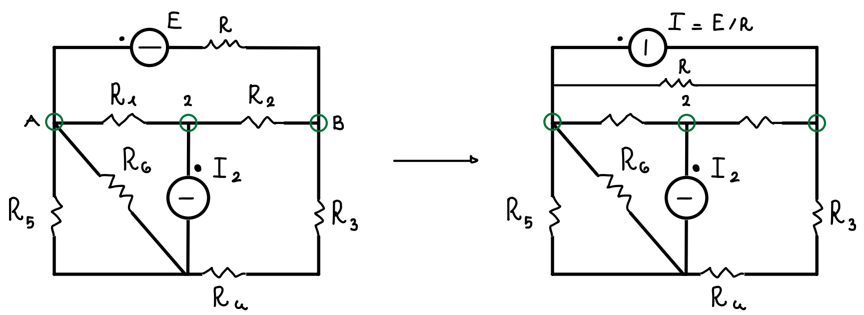
$$G_1 (V_1 - V_2) + G_5 (V_1 - V_3) + G_6 (V_1 - V_3) = 0$$

$i_1 + i_6 + i_3 = 0 \longrightarrow$ Non torna, perche' manca i_E, quindi dovrei aggiungere un'altra equazione al sistema.

CASO DI GENERATORE REALE

La presenza di R fa si che io non conosca piu' V_{AB}, si hanno due metodi:

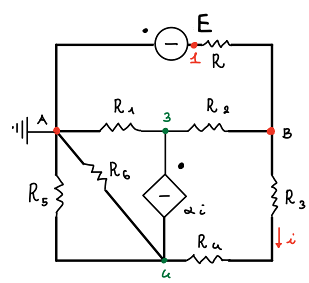
1 Sostituisco con un generatore reale di corrente e faccio il tableau



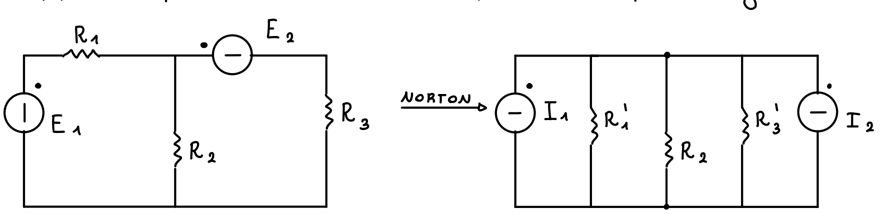
2 Prendo come riferimento A e considero il punto 1 come un nodo in modo che $V_1 = E$

$$n_B : \quad 0 = V_B \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_u} + \frac{1}{R} \right) - \frac{V_1}{R} - \frac{V_3}{R} - \frac{V_u}{R_3 + R_u}$$

Il n° di equazioni che si possono scrivere e'
$n - 1 - n_E^o$



OSSERVAZIONE: In caso di generatori di tensione non connessi direttamente tra loro, si deve applicare prima il Th di Norton, ossia trasformo i generatori di tensione in corrente:



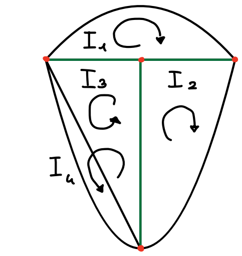
$R_1' = R_1$, $R_3' = R_3$

$I_1 = E_1 / R_1$ $\quad I_2 = E_2 / R_3$

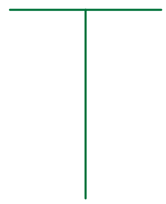
A quel punto applico il metodo dei nodi normalmente

Metodo delle correnti di maglia (monocorda)

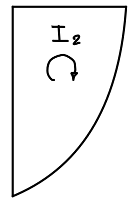
Consideriamo un circuito e il suo grafo, inoltre consideriamo un albero:

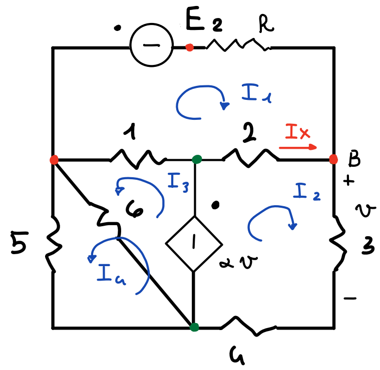


ALBERO



MAGLIA MONOCORDA





CORRENTE DI MAGLIA MONOCORDA: Una maglia m.c. si ottiene prendendo rami dell'albero e una sola corda, la corrente che scorre nella maglia m.c. ha verso arbitrario.

① $-E_1 = I_1 (R + R_1 + R_2) - R_2 I_2 + R_1 I_3 + R_1 I_4$ ▽ Posso scrivere $r-(n-1)$ equaz.

Tensione di generatori = I_x (somma resistenze della maglia) + I R(a comune tra le maglie)· Imaglia

② $\alpha v = I_2 (R_2 + R_3 + R_4) - R_2 I_1 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4$ ▽ Se I entra nel + allora RI ha segno (−)

③ $\alpha v = I_3 (R_6 + R_1) + R_1 I_1 - R_1 I_4 + 0 \cdot I_2$

④ $\alpha v = I_4 (R_1 + R_5) + R_1 I_1 - R_1 I_3 + 0 \cdot I_2$

Aggiungo equazione di αv: $v = I_2 R_3$ ho le 4 equazioni e 4 incognite

Supponiamo di calcolare la corrente I_x

$I_x = I_2 - I_1$

posso trovare ogni grandezza di interesse

Giustificazione del metodo

Riordino equazione 1

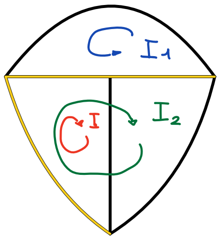
$0 = E + R I_1 + R_1 (I_1 + I_3 + I_4) + R_2 (I_1 - I_2)$

e' un 2° principio di Kirchhoff nella maglia 1

Circuito planare

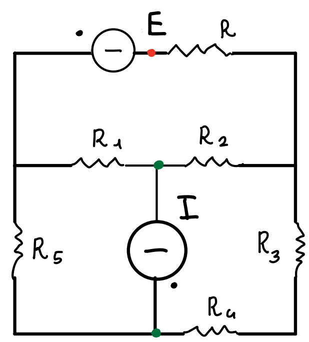
E' un circuito che si può disegnare su un foglio senza che si incrociano i rami (per cui conviene usare le correnti di maglia)

Caso di generatori di corrente



① $E_1 = I_1 (R_1 + R_2 + R) + (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I$

② $0 = I_2 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + (R_1 + R_2) I_1 + (R_1 + R_5) I$



Non scrivo la maglia I, ossia ho un'equazione in meno per cui

n° equazioni $= r - (n-1) - n°I$

Osservazione

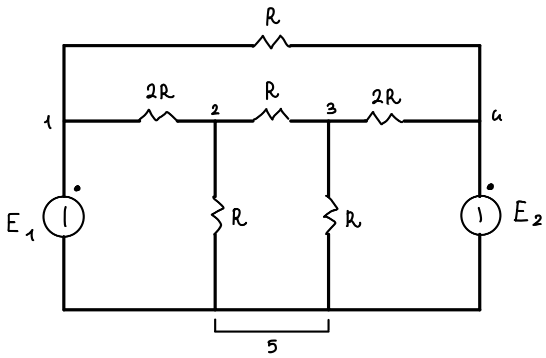
I nodi sfruttano il KCL, le maglie monocorda il KVL, mentre il Tableau sfrutta entrambi.
Tuttavia entrambi soddisfano la KL che non sfruttano

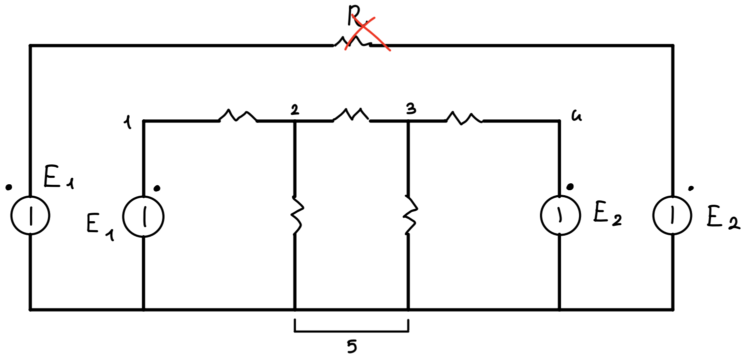
Sdoppiamento dei generatori

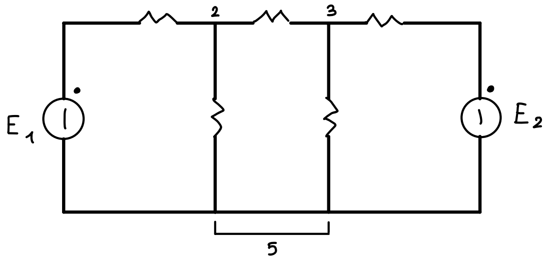
Consideriamo il seguente circuito; $n = 5$, $r = 8$ per cui:

- TABLEAU $\longrightarrow$ Sistema 8×8
- NODI $\longrightarrow$ 3×3
- MAGLIE $\longrightarrow$ 4×4

Notiamo che modificando il circuito con una sostituzione, trovato I posso togliere una parte



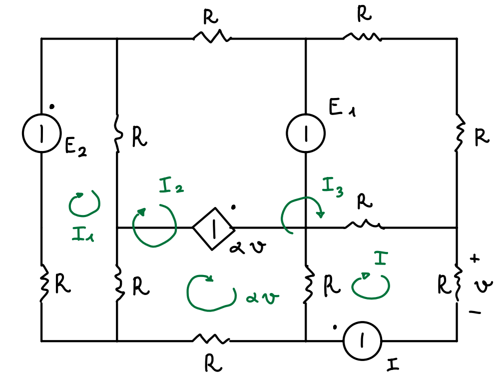




A questo punto facendo le maglie si ottiene un sistema $r - (n-1) = 5 - 2 = 3 \times 3$ analogo al metodo di nodi

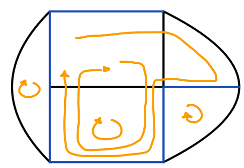
Esercizio

Considera il circuito mostrato, scrivere le equazioni usando il metodo delle correnti di maglia e delle tensioni di nodo.



$n = 7$

$r = 11$



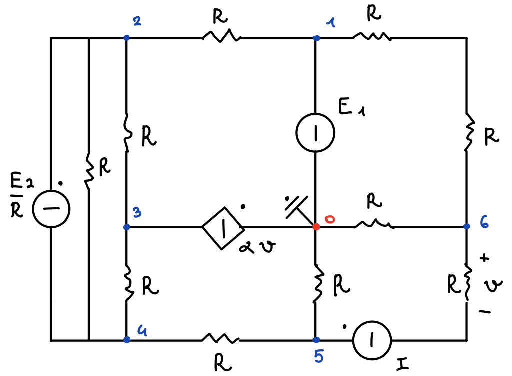
1. $n°\text{corde} = 11 - 6 = 5$

   $n°\text{eq} = n°c - n°I = 5 - 2 = 3$ equazioni

1. $E_2 = I_1(3R) - I_2(2R) - I_3(2R) - R\alpha v$
2. $-E_1 = I_2(5R) - 2RI_1 + 5I_3 + 3R\alpha v - IR$
3. $0 = I_3 \cdot 8R - 2RI_1 + 5RI_2 + 3R\alpha v - 2RI$

   $v = RI$

2. Trasformo il generatore reale di tensione E_2 in uno di corrente.



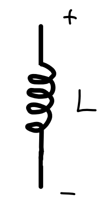
1. $V_1 = E_1$
2. $E_2/R = V_2 \cdot 3G - GV_1 - GV_3 - GV_4$
3. $-\alpha v = V_3\, 2G - GV_2 - GV_4$
4. $-E_2/R = V_4 \cdot 3G - GV_3 - GV_5 - GV_2$
5. $I = V_5 \cdot 2G - V_4 \cdot G$
6. $-I = V_6 \cdot \frac{3}{2}G - V_1 \cdot G/2$
7. $v = RI$

Induttore

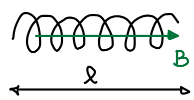
E' un bipolo costituito da un avvolgimento di spire, ossia un solenoide

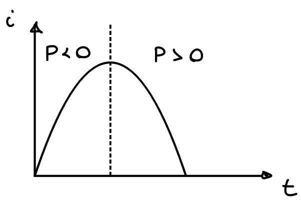
$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \qquad L = \frac{\phi_s(B)}{I} \quad [H]$$

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$



E' una componente con memoria, ossia dipende da un istante t_0.
Inoltre e' detto bipolo reattivo: puo' sia immagazzinare che cedere potenza, ma solo quanta ne ha assorbita.





Vediamo come scrivere l'energia W:

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{i(t)\, di\, dt}{dt} = \frac{1}{L}\int_0^t i\, di + i_0$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t)}$$

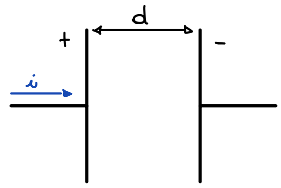
Caso limite

i costante, si ha che $v = 0$ e l'induttore si comporta come un cortocircuito.
Essendo comunque un filo metallico avvolto, puo' avere una resistenza interna e/o una capacita', dovuta alla vicinanza delle spire, poste in serie all'induttore.

Condensatore (o Capacitore)

E' un bipolo costituito da due armature con capacità:

$E = \frac{\Delta V}{d}$ $\quad C = Q/_{\Delta V}$ $\quad \boxed{i = C\frac{dv(t)}{dt}}$



$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v_0$$

$$W = \frac{1}{2}C\Delta V^2$$

Ha le stesse proprietà di un induttore, ossia è un bipolo reattivo

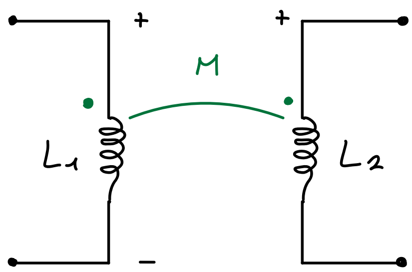
CASO LIMITE

Se V è costante la corrente è $i = 0$, per cui si ha un circuito aperto

Induttori Mutualmente Accoppiati

Il fenomeno della mutua induzione si verifica con due induttori adiacenti

$\phi_c = \phi_{CONCATENATO}$, ossia quello che attraversa una curva



$$M = \frac{\phi_{c\,1,2}}{I_2} = \frac{\phi_{c\,2,1}}{I_1}$$

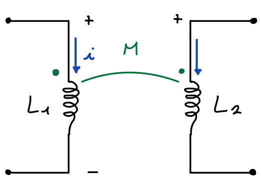
$$v_1(t) = M_{1,2}\frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M_{1,2}\frac{di_1(t)}{dt}$$

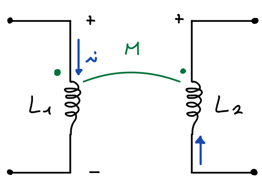
CONVENZIONE

I pallini indicano che:

- Se le correnti che attraversano gli induttori sono concordi, ossia entrano entrambe dallo stesso lato, allora M ha segno (+)
- Se le correnti sono discordi allora M ha segno (−)



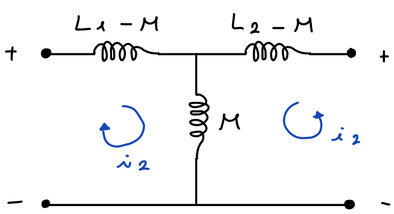
$\boxed{M > 0}$



$\boxed{M < 0}$

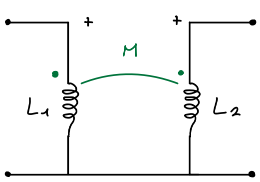
OSSERVAZIONE

Se le induttanze sono poste alternativamente:



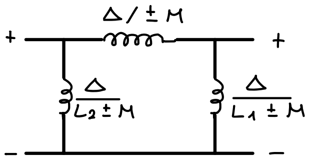
$$v_1 = (L_1 - M)\frac{di_2}{dt} + \frac{M\,di_2}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$= L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \longrightarrow \text{è equivalente al circuito sotto riportato}$$



Equivalente π

Si dimostra che un equivalente ai circuiti precedenti è anche il seguente:



$$\boxed{\Delta = L_1 L_2 - M^2}$$

▽ Il segno di M dipende dal pallino e dal verso della corrente

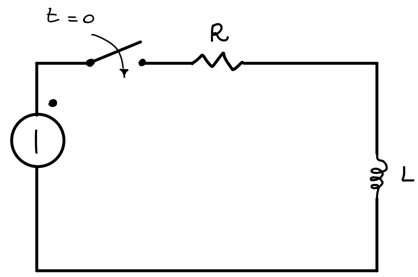
▽ Nota che mentre l'equivalente a forma T ha un nodo in più, quello a π aggiunge una maglia

Circuiti Dinamici

Sono circuiti non resistivi, ossia contengono anche L e C, che variano col tempo. In particolare i circuiti più semplici RC, RL variano con interruttori.

Circuiti RL o di carica dell'induttore

Sono composti da resistori e induttori, il circuito a una maglia sotto riportato è un semplice caso dell'RL, cui 2° KVC si scrive come:



$$E = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Ci si trova a risolvere equazioni lineari non omogenee:

1 Soluzioni dell'omogenea (TRANSITORIA)

$$0 = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$0 = R + L \cdot \lambda \quad \text{con} \quad \lambda = -R/L$$

$$i(t) = K e^{\lambda t} = K e^{-R/L \cdot t}$$

▽ In genere si approssima con la corrente di regime dopo 3τ

2 Soluzione particolare (DI REGIME)

$$\begin{cases} i(0) = 0 \\ E = RKe^{-\frac{R}{L} \cdot t} + LK\dfrac{d\left(e^{-R/L \cdot t}\right)}{dt} \end{cases}$$

$$i(0) = i(0)_{TR} + i(0)_P$$

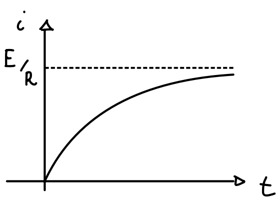
$$i_P = -K = E/R \qquad K = -E/R$$

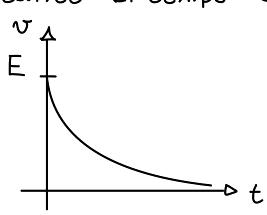
3 Sommo i due termini

$$i(t) = i(t)_{TR} + i(t)_P = E/R\left(1 - e^{-R/L \cdot t}\right)$$

NOTAZIONE

$L/R = \tau\ [s] =$ Costante di tempo del circuito RL





La tensione dell'induttore a sto punto si ottiene come:

$$v(t)_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E \cdot e^{-R/L \cdot t} \longrightarrow W_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{L \cdot E^2}{R^2} (1 - e^{-R/L \cdot t})^2$$

$$P_{erogata} = E \cdot i = E \left(E/_R - E/_R \, e^{-R/L \cdot t} \right)$$, ora per trovare l'energia integriamo tra

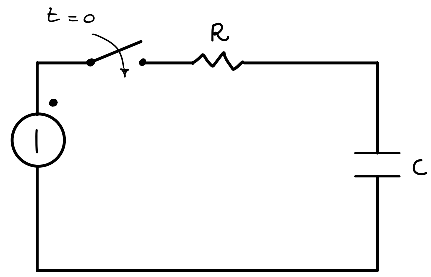
$$\int_0^{+\infty} P_{generatore} = 2 W_L$$

Notiamo quindi che l'energia erogata dal generatore si ziga tra la resistenza (dissipata) e l'induttore (immagazzinata)

Circuiti RC

Analogamente a prima scriviamo la 2ª KVC per la maglia; avremo una somma di 2 termini

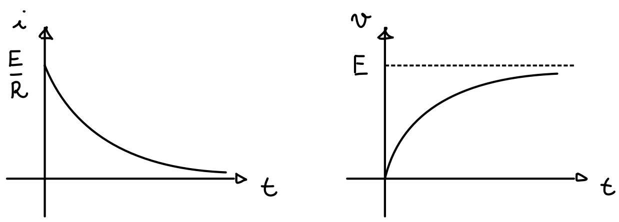
$$E = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_C(0)$$



supponiamo che il condensatore sia inizialmente scarico, deriviamo per trovare $i(t)$:

$$0 = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t)$$

da qui trovo normalmente le soluzioni (andamenti inversi agli RL)



Regime sinusoidale

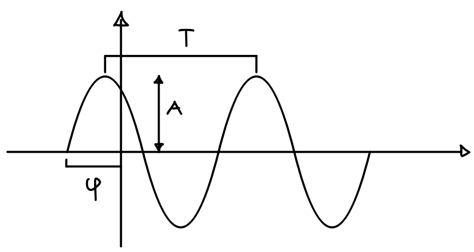
L'ipotesi suppone di assumere alcune condizioni di regime:

1. Tutti i generatori sono descritti da funzioni sinusoidali
2. Tutti i generatori hanno la stessa ω e quindi stessa f

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f$$

⚠ Usare sin o cos è una convenzione arbitraria



Richiamo numeri complessi

Forma cartesiana

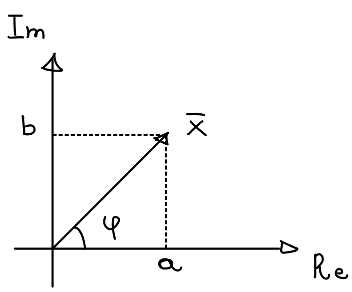
$$\bar{x} = a + jb$$

$$j^2 = -1$$

Coniugato

$$\bar{x}_c = a - jb$$

$$= M e^{-j\varphi}$$



Polare

$$M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan(b/a)$$

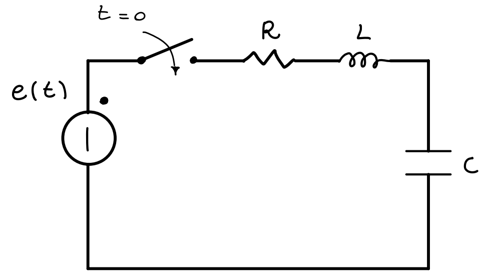
$$\bar{x} = M(\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

Esponenziale

$$\bar{x} = M e^{\varphi j}$$

⚠ Somma in forma cartesiana, prodotto in esponenziale

Circuiti RLC a regime sinusoidale



Consideriamo l'unica maglia del circuito e scriviamo 2° KVC

$$e(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v_C(0)$$

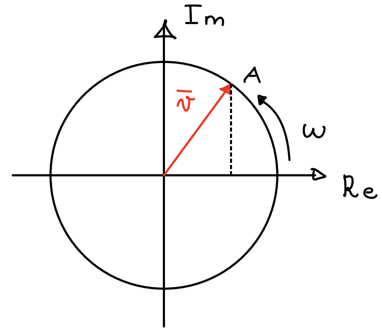
L'equazione di regime risulta:

$$i(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)}} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right)$$

Scrivere quella transitoria risulterebbe complesso per cui si ricorre a metodi alternativi che usano i complessi.

Metodo Fasoriale

Immaginiamo di ruotare il vettore v attorno all'origine sulla circonferenza di raggio uguale al modulo, con una frequenza che dipende dal tempo.



$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

Notazione

Se φ ruota in senso antiorario si dice in anticipo, altrimenti in ritardo.

$$\mathrm{Re}\{\bar{v}\} = A \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\mathrm{Im}\{\bar{v}\} = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{v} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Fasore di una forma sinusoidale

È un numero complesso che indica $\bar{v}(0)$

$$\boxed{\dot{v} = A \cdot e^{j\varphi}}$$

1 Da onda a fasore:

$$e(t) = 300 \sin(314t + \pi/3)$$

$$\dot{e} = 300 \cdot e^{j\pi/3} \quad \text{(si perde la pulsazione)}$$

! Nota che $\omega = 314 \Rightarrow f = 50\,Hz$

2

$$\dot{v} = 1 + j \Rightarrow \sqrt{2}\, e^{j\pi/4}, \quad \omega = 314 \text{ rad/s}$$

$$v(t) = \sqrt{2} \sin(314t + \pi/4)$$

Somma di onde con i fasori

Prendiamo due funzioni d'onda e calcoliamo la somma:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi)$$

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) + y(t) = X_M \cos\omega t \cos\phi - X_M \sin\omega t \sin\phi + Y_M \cos\omega t \cos\varphi - Y_M \sin\omega t \sin\varphi$$

$$= \cos\omega t \cdot (X_M \cos\phi + Y_M \cos\varphi) - \sin\omega t \cdot (X_M \sin\phi + Y_M \sin\varphi)$$

Se usiamo i fasori:

$$\dot{X} = X_M e^{j\phi} \longrightarrow X_M (\cos\phi + j\sin\phi)$$

$$\dot{Y} = Y_M e^{j\varphi} \longrightarrow Y_M (\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\dot{X} + \dot{Y} = X_M (\cos\phi + j\sin\phi) + Y_M (\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$= (X_M \cos\phi + Y_M \cos\varphi) + j (X_M \sin\phi + Y_M \sin\varphi)$$

Prendiamo $\mathrm{Re}\{(\dot{X}+\dot{Y}) e^{j\omega t}\} = (X_M \cos\phi + Y_M \cos\varphi)\cos\omega t - (X_M \sin\phi + Y_M \sin\varphi) \sin\omega t$

$$\boxed{x(t) + y(t) = \mathrm{Re}\{(\dot{X}+\dot{Y}) e^{j\omega t}\}}$$

Esempio

Calcolare $20 \sin(314t) + 10 \sin(314t + \pi/4)$

$$20 + 10 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (20 + 5\sqrt{2} + j\, 5\sqrt{2}) \cdot e^{j\omega t}$$

$$(\dot{X} + \dot{Y}) e^{j\omega t} \cong 28\, e^{j \cdot 0{,}25}$$

$$\mathrm{Re}\{28\, e^{j \cdot 0{,}25}\} = 28 \sin(314t + 0{,}25)$$

Derivata di forma sinusoidale

$$p(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \dot{p} = A e^{j\varphi}$$

$$dp/dt = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \sin(\omega t + \varphi + \pi/2) = g(t)$$

$$g(t) = \omega A \cdot e^{j(\pi/2 + \varphi)} = \omega A\, e^{j\varphi} \cdot \underbrace{e^{j\pi/2}}_{j} \qquad \boxed{j = e^{j\pi/2}}$$

$$= j\omega A e^{j\varphi} = j\omega \cdot \dot{p} \longrightarrow \text{Derivare} = \text{moltiplicare per } j\omega$$

$$\boxed{dp(t)/dt = \dot{p} \cdot j\omega}$$

Integrale di forma sinusoidale

E' come dividere per $j\omega$

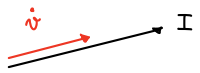
$$\boxed{\int p(t)\, dt = \dot{p}(t) \cdot \frac{1}{j \cdot \omega}}$$

Comportamento dei bipoli (nel dominio dei fasori)

Resistori

Nel dominio di fasori vale la 1ª OHM, graficamente si osserva come un vettore con $M \neq I$

$$\boxed{\dot{v} = R \cdot \dot{i}}$$

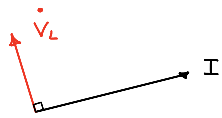


Induttori

Usiamo la derivata in fasori, graficamente risulta accorciato e ruotato in anticipo di $\pi/2$

$$v(t) = L \frac{d\, i(t)}{dt}$$

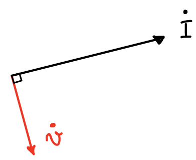
$$\boxed{\dot{v}(t) = j \omega L \dot{i}}$$



Condensatori

Regola di integrazione nei fasori, graficamente è rotazione di $\pi/2$ in ritardo

$$i(t) = C\, dv/dt \Rightarrow \dot{I} = j\omega \cdot C \dot{V}$$



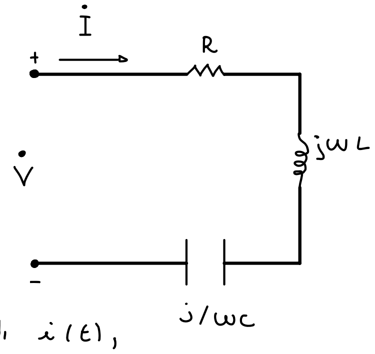
$$\boxed{\dot{v} = \frac{\dot{I}}{j\omega C}}$$

IMPEDENZA

Consideriamo una serie RLC come in figura, ricordando le leggi dei fasori sui bipoli si ha che applicando la legge di KCL:

$$\dot{V} = \dot{I}R + j\omega \dot{I} - j/\omega c \ \dot{I} = \dot{I}\,(R + \omega L - j/\omega c)$$

$$\dot{V} = \dot{I}\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)\right)$$



Notiamo che il fasore di $v(t)$ è quello di $i(t)$ moltiplicato per un numero complesso chiamato IMPEDENZA.

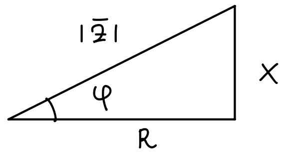
$\bar{Z}$ = IMPEDENZA, ossia il rapporto tra il fasore di v e quello di $i(t)$, si misura in $[\Omega]$

$$\boxed{\dot{V} = \bar{Z} \cdot \dot{I} = R + j\bar{X}}$$

- Reale $(\bar{Z}) = R$ (Resistenza), ciò significa che in assenza di L, C il circuito è come quelli visti a inizio corso.

- $\text{Im}(\bar{Z}) = X$ (REATTANZA), a differenza di R è dotata di segno e dipende da induttori e capacitori.

$$\bar{Z} = R + j(X) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{X}{R}\right)}$$



! L'impedenza dipende ovviamente da ω

ESEMPIO:

$e = 10 \sin(1000t + \pi/4)$ V

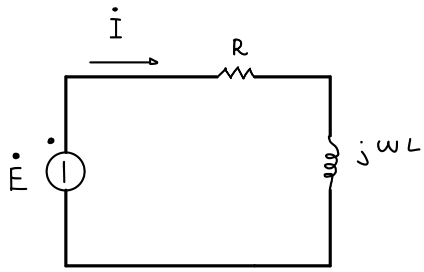
$R = 1\,\Omega \qquad L = 1\,mH$

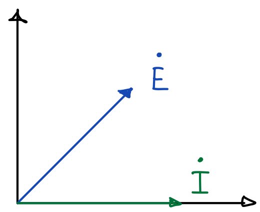
$$\dot{E} = 10\, e^{j\pi/4} = \dot{I}\,\bar{Z}$$

$$\bar{Z} = R + j\omega L = 1 + j$$

$$\dot{I} = \frac{10\, e^{j\pi/4}}{1 + j} = \frac{10\,\cancel{e^{j\pi/4}}}{\sqrt{2}\,\cancel{e^{j\pi/4}}} = 5\sqrt{2}$$

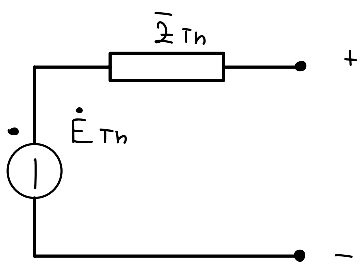
$$i(t) = 5\sqrt{2}\sin(1000t) \ A$$





OSSERVAZIONI

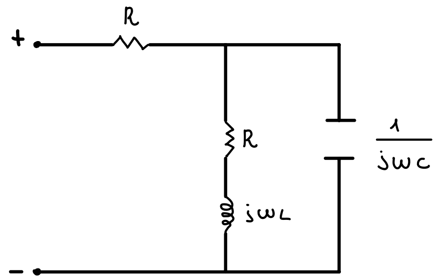
Tutti i teoremi e i metodi già visti valgono, ad esempio Thevenin si riformula con un circuito:



ESEMPIO: Trovare l'impedenza equivalente $R = 1\,\Omega$; $L = 1\,mH$; $C = 100\,\mu F$; $\omega = 314$

$$\bar{Z} = \left((R + j\omega L) \,//\, \frac{1}{j\omega C}\right) + R$$

$$= \frac{(R + j\omega L)\cdot 1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} + R = (1{,}02 + j0{,}28)\ \text{ohm}$$



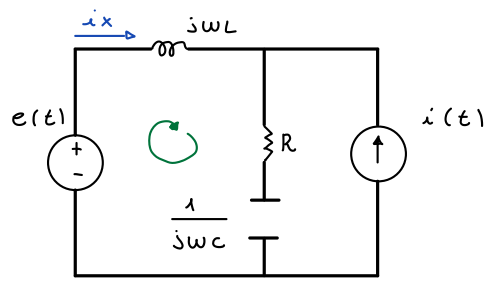
ESERCIZIO

$e(t) = 10 \sin(1000t + \pi/3)$

$i(t) = \cos(1000t) = \sin(1000t + \pi/2)$

$i_x = ?$

$\dot{E} = 10\, e^{j\pi/3}$ $\quad \dot{I} = e^{j\pi/2} = j$



Applichiamo metodo delle correnti di maglia:

$$\dot{E} = (R + j\omega L - j/\omega C)\,\dot{I}_x + \dot{I}\,(R - j/\omega C)$$

$$\dot{I}_x = (0{,}18 + j0.96)\ A = 0{,}97\, e^{-j1{,}75}\ A$$

$$i_x(t) = 0{,}97 \sin(1000t - 1{,}75)$$

AMMETTENZA

E' l'inverso dell'impedenza, si indica con $\bar{y}$ e si misura in Siemens:

$$\boxed{\bar{y} = G - jB}$$

- $Re(\bar{y}) = G$ (conduttanza)
- $Im(\bar{y}) = B$ (SUSCETTANZA)

! Il segno meno nella definizione fa sì che B e X abbiano lo stesso segno

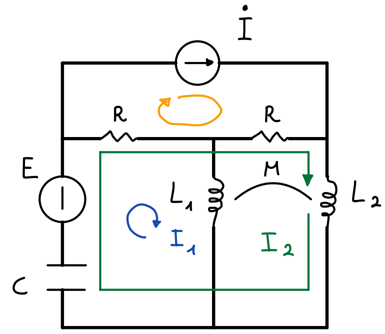
ESEMPIO:

$$\bar{z} = (1 + j) \longrightarrow \bar{y} = \frac{1}{1+j} = \frac{(1-j)}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

CASO DI MUTUALMENTE ACCOPPIATI

Consideriamo il circuito di lato, applico correnti di maglia $(r-(n-1)-n_I = 2)$

! Se ho M non posso fare i nodi direttamente ma devo prima trasformare in 3 induttori a T o π.



! Con induttori mutualmente accoppiati e' consigliato mettere gli induttori su e || corde.

1. $E = (R + j\omega L_1 - j/\omega C)\dot{I}_1 - R\dot{I} + (R - j/\omega C)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_2$

2. $E = (2R + j\omega L_2 - j/\omega C)\dot{I}_2 - 2R\dot{I} + (R - j/\omega C)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_1$

Valore efficace di funzioni

Sia $f(t)$ una funzione periodica, definiamo valore efficace o R.M.S. (Root Mid Squared):

$$f_e = f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

Per una funzione sinusoidale si dimostra che:

$$\boxed{f_{ef} = \frac{f_M}{\sqrt{2}}}$$

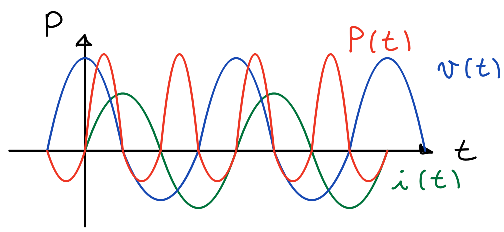
! f_M = VALORE MASSIMO della grandezza nel periodo (ossia l'ampiezza della sinusoide)

Potenza (Regime sinusoidale)

Consideriamo un circuito elementare costituito da un singolo bipolo e descritto dalle grandezze $v(t)$ e $i(t)$:

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega t)$$



Cerchiamo la potenza del bipolo:

Osserviamo graficamente che la potenza e' asimmetrica rispetto all' asse t, per cui la potenza media non e' mai nulla. Inoltre $P(t)$ oscilla con un periodo dimezzato. Piu' precisamente, usando i riferimenti associati, se $P>0$ allora e' assorbita dal bipolo.

$$P(t) = v(t)\cdot i(t) = V_M I_M \sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t)$$

Dalle formule di prostaferesi $-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\alpha - \cos\beta$

$$= \frac{V_M I_M}{2}\left(\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right)$$

$$= \frac{V_M I_M}{2}\left(\cos\varphi - \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi\right)$$

Ponendo ora i due estremi affinche' i termini si annullino ($\cos\varphi = 0$; $\sin\varphi = 0$) si nota che se $\sin\varphi = 0$ allora i fasori non hanno componente Im e il circuito risulta resistivo, ossia:

1 $\varphi = 0 \longrightarrow \sin\varphi = 0$, solo bipoli resistivi (R)

2 $\varphi = 0 \longrightarrow \cos\varphi = 0$, solo bipoli reattivi (X)

$$P(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \big(\underbrace{\cos\varphi - \cos 2\omega t\cos\varphi}_{\text{Legato a presenza di } R} + \underbrace{\sin 2\omega t\sin\varphi}_{\text{Legato a presenza di } L \text{ e } C\text{, ossia } X}\big)$$

Rispettivamente si definiscono:

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA

Termine legato alla presenza di bipoli resistivi, perciò è sempre positiva, in quanto è assorbita dal bipolo

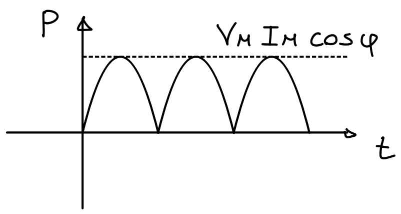
$$P_{ATTIVA}(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi \,(1 - \cos 2\omega t)$$

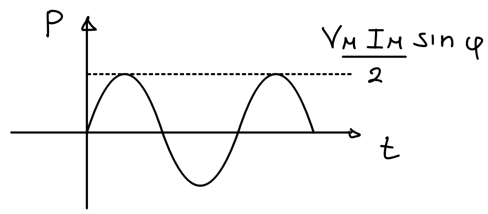
POTENZA REATTIVA ISTANTANEA

Termine legato alla presenza di reattanze (L, C) ed è dotata di segno, per cui può essere sia (+) che (−)

$$P_{REATTIVA}(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \sin\varphi \sin 2\omega t$$

! Graficamente si osserva che:





POTENZA ATTIVA [W]

Nel tempo si approssima al valor medio.

$$\boxed{P = \frac{V_M I_M}{2} \cdot \cos\varphi}$$

POTENZA REATTIVA

Si approssima al suo valore massimo e si misura in VAR (Volt Ampere Reattivo)

$$\boxed{Q = \frac{V_M I_M}{2} \sin\varphi}$$

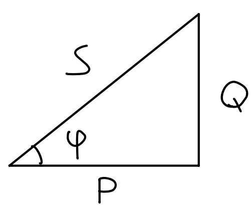
POTENZA APPARENTE

Non dà alcuna informazione sulla natura (ossia se reattiva o passiva) e si misura in [VA], Volt Ampere.

$$\boxed{S = \frac{V_M I_M}{2} \cdot \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

POTENZE ESPRESSE IN VALORI EFFICACI

1. $P = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos\varphi$
2. $Q = V_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \sin\varphi$
3. $S = V_{ef} \cdot I_{ef}$



CONVENZIONE

Se una grandezza è fornita con la sua legge temporale allora si legge il valore massimo, altrimenti se è fornita con i fasori, si legge il valore efficace.

1. $f(t) = F_M \sin(\omega t + \varphi)$
2. $\dot{F} = F_{ef} \cdot e^{j\varphi}$

Supponiamo di conoscere l'impedenza $\bar{Z} = R + jX$ e ricordiamo che: $V = Z \cdot I$ allora si ha che, presi i fasori ($I = I_{ef}$; $V = V_{ef}$)

$$\boxed{\begin{aligned} P &= Z I^2 \cos\varphi = R I^2 = G V^2 \\ Q &= Z I^2 \sin\varphi = X I^2 = B V^2 \end{aligned}}$$

OSSERVAZIONE

Se $Q > 0$ allora $X > 0$ per cui prevale la componente e si dice che il bipolo "assorbe potenza reattiva".

POTENZA COMPLESSA

Consideriamo i fasori di $i(t)$ e $v(t)$ con I_{ef}, V_{ef}, definiamo potenza complessa il prodotto tra il fasore $\dot{V}$ e il coniugato di $\dot{I}$

∇ $(\varphi_V - \varphi_I)$ = SFASAMENTO

$$\dot{V} = V e^{j\varphi_V} \qquad \dot{I} = I e^{j\varphi_I}$$

$$\dot{V} \cdot \dot{I}^* = V I e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \overbrace{VI\cos\varphi}^{P} + j\overbrace{VI\sin\varphi}^{Q} \qquad \text{con } \varphi = (\varphi_V - \varphi_I)$$

$$\boxed{\bar{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ}$$

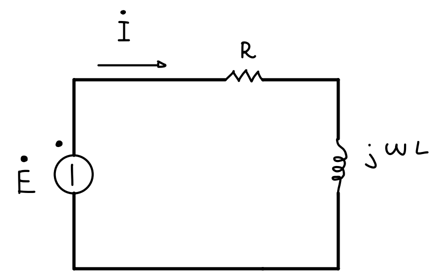
ESEMPIO: Trovare la potenza attiva e reattiva dei bipoli e del generatore

$e(t) = 10 \sin(1000t + \pi/4)$

$E_M = 10\,V \qquad \dot{E} = 10 e^{j\pi/4} \qquad \dot{I} = 10/\sqrt{2}$

$R = 1\,\Omega$

$L = 1\,mH$



$P = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{100}{2} = 25\,W$

$Q = \frac{1}{2} X I^2 = 25\,VAR$

Quelle del generatore si trovano con la potenza complessa:

$$\bar{S}^E = \frac{1}{2} \dot{E} \cdot \dot{I}^* = \frac{1}{2} 10 e^{j\pi/4} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{100}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \overset{P}{25} + j\overset{Q}{25}$$

ENERGIA (REGIME SINUSOIDALE)

Osserviamo cosa cambia in un regime sinusoidale riguardo all'energia:

ENERGIA MEDIA DI UN INDUTTORE

$i(t) = I_M \sin(\omega t)$

$W(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{2} L I_M \sin^2(\omega t) \xrightarrow{\text{BISEZIONE}} \frac{1}{4} L I_M^2 (1 - \cos 2\omega t)$

$W_L = W_{MEDIA} = \frac{1}{4} L I_M^2$

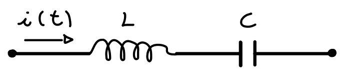
$W_{ef_L} = \frac{1}{2} L I^2$

L'energia media di un induttore è uguale alla formula vista in passato.

ENERGIA MEDIA DI UN CONDENSATORE E RISONANZA

Poniamo in serie L e C in modo che $i(t)$ sia la stessa.

$$v_C = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = -V_M \cos(\omega t)$$

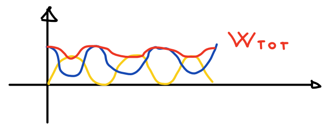


$$W_C = \frac{1}{2} C V_M \left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 \quad \text{con } V = V_{ef}$$

L'energia media di un condensatore e' uguale alla formula vista in passato.
Consideriamo ora la serie:

$$W_{TOT} = W_C + W_L > 0$$

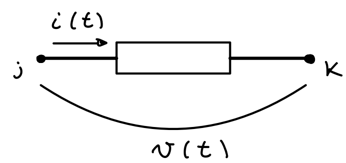


Nel caso in cui $W_L(\max) = W_C(\max)$ l'energia sarebbe costante ; questo fenomeno e' detto RISONANZA.

TEOREMA DI TELLEGEN

La somma delle potenze istantanee in tutti i rami del circuito e' nulla in ogni istante (vale anche non in regime sinusoidale)

$$\sum_{jk} v_{jk}(t) \cdot i_{jk}(t) = 0$$



DIMOSTRAZIONE

Applichiamo il metodo dei nodi, ossia fissiamo a terra un nodo o :

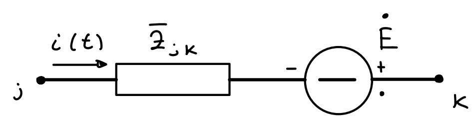
$$\sum_{jk} \left[v_{j,o}(t) + v_{o,k}(t) \right] \cdot i_{jk}(t)$$

$$= v_{jo} \sum_k i_{j,k} + \sum_j v_{o,k} \cdot i_{j,k} = 0 \quad (\text{per KVL e KCL})$$

TEOREMA DI BOUCHEROT

Ipotizziamo un ramo composto da un impedenza e un generatore di tensione.
Dal teorema precedente si ha:

$$\sum_{jk} v_{jk} \cdot i_k = 0$$



cio' implica anche che la potenza complessa sia zero:

$$\sum_{jk} \dot{V}_{jk} \cdot \dot{I}^*_{jk} = 0 \qquad \text{ma} \qquad \dot{V}_{jk} = (\bar{Z}_{jk} \dot{I}_{jk} - \dot{E}_{jk})$$

$$\sum_{jk} \dot{V}_{jk} \cdot \dot{I}^*_{jk} = \sum (\bar{Z}_{jk} \dot{I}_{jk} - \dot{E}_{jk}) \dot{I}^*_{jk}$$

$$\sum \dot{E}_{jk} \dot{I}_{jk} = \sum \bar{Z}_{jk} \cdot \dot{I}^2_{jk} \qquad \text{ma} \qquad \bar{Z}_{jk} = R_{jk} + jX_{jk}$$

$$\boxed{\sum_{jk} P^E_{jk} + j \sum_{jk} Q^E_{jk} = \sum_{jk} R_{jk} \cdot I^2_{jk} + j \sum_{jk} X_{jk} I^2_{jk}}$$

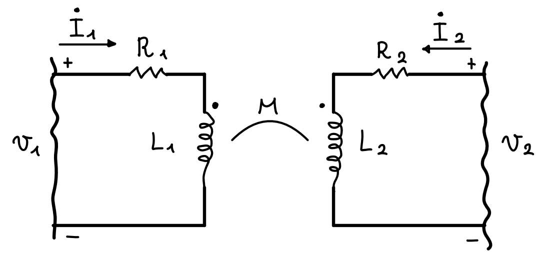
"La somma delle potenze attive e reattive assorbite / erogate dal generatore e' uguale a quelle relative ai bipoli."

Potenza in induttori mutualmente accoppiati

Consideriamo le tensioni di entrambi i circuiti e calcoliamo la potenza:

$$\dot V_1 = R_1 \dot I_1 + j\omega L_1 \dot I_1 + j\omega M \dot I_2$$

$$\dot V_2 = R_2 \dot I_2 + j\omega L_2 \dot I_2 + j\omega M \dot I_1$$



Cerchiamo la potenza complessa dei due circuiti:

1. $$\dot V_1 \cdot \dot I_1^* = \underbrace{R_1 I_1^2}_{P_{R_1}} + j\underbrace{\omega L_1 I_1^2}_{P_{L_1}} + j\omega \dot I_2 \dot I_1^*$$

2. $$\dot V_2 \cdot \dot I_2^* = R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega \dot I_1 \dot I_2^*$$

I termini misti rimangono da trattare (non so ancora cosa siano): $\dot I_1 = I_1 e^{\alpha_1 j}$; $\dot I_2 = I_2 e^{\alpha_2 j}$

$$j\omega \dot I_2 \dot I_1^* = j\omega I_1 I_2 (\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + j\sin(\alpha_2 - \alpha_1))$$

$$j\omega \dot I_1 \dot I_2^* = j\omega I_1 I_2 (\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - j\sin(\alpha_2 - \alpha_1))$$

Noto che si scompongono in due termini, uno è identico in entrambe, il secondo è uguale ma opposto. Svolgendo il prodotto ci si accorge dalla presenza di j che uno è attivo e l'altro reattivo:

① $j\omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \longrightarrow$ Potenza reattiva sviluppata dal mutuo accoppiamento

② $\pm \omega M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \longrightarrow$ Potenza attiva trasferita da un bipolo all'altro, ossia una la cede e l'altro l'assorbe.

Si conclude infine che le potenze ai due bipoli sono:

1. $$P_1 = \underbrace{R_1 I_1^2}_{P_{R_1}} + j\underbrace{\omega L_1 I_1^2}_{Q_{L_1}} + j\underbrace{\omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}_{Q_M} - \underbrace{\omega M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1))}_{P_M}$$

2. $$P_2 = \underbrace{R_2 I_2^2}_{P_{R_2}} + j\underbrace{\omega L_2 I_2^2}_{Q_{L_2}} + j\underbrace{\omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}_{Q_M} + \underbrace{\omega M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1))}_{P_M}$$

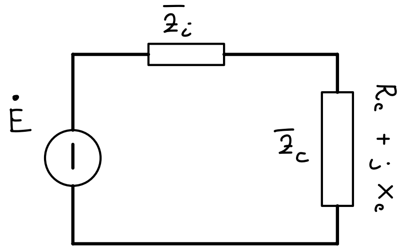
Teorema del trasferimento massimo di potenza

Consideriamo un circuito composto da un generatore reale di corrente e una impedenza $\bar Z_c$.

Vogliamo trovare il valore di X_c e R_c per cui la potenza trasferita è massima.

La potenza al trasferita è:

$$P = R_c I^2 = R_c \frac{E^2}{(R_i + R_c)^2 + (X_i + X_c)^2}$$



La prima condizione risulta immediata ossia:

$$X_c = -X_i$$

Per la seconda occorrerà svolgere la derivata rispetto a R_c che fornisce l'altra condizione.

$$\partial P / \partial R_c = E^2 \frac{R_i^2 - R_c^2}{(R + R_c)^4} \longrightarrow R_i = R_c$$

Si conclude che per il Teorema, la massima potenza trasferita in un tale circuito si ha con un impedenza del tipo:

$$\boxed{\bar{Z}_c = R_i - j X_i} \qquad R_c = R_i \; ; \; X_c = -X_i$$

ESEMPIO:

Trovare la potenza R_c, usando Thevenin

$R = 10 \, \Omega$

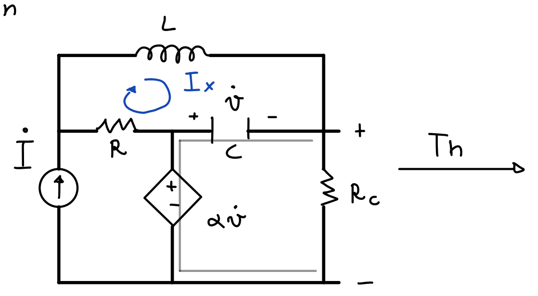
$R_c = 6 \, \Omega$

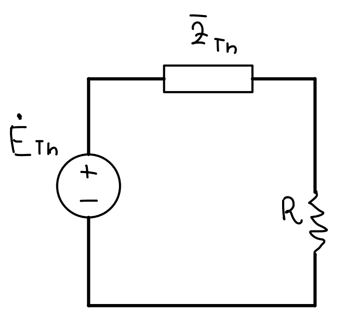
$L = 2 \, mH$

$C = 100 \, \mu F$

$\alpha = 3$

$i(t) = \cos(2000t + \pi/3)$





Per trovare $\dot{E}_{Th}$ considero circuito aperto e scrivo maglia

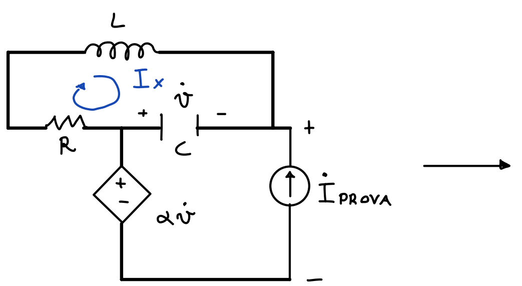
$$0 = (R + \omega L - j/\omega c) I_x + R \dot{I}$$

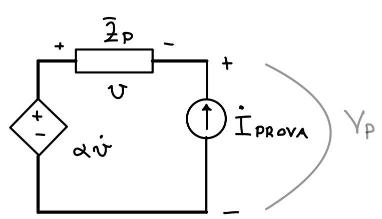
$$I_x = -(0{,}41 + j\, 0{,}91) \, A$$

$$\dot{E}_{Th} = \frac{1}{j\omega c} \cdot I_x + \alpha \dot{v}$$ (scelgo un percorso che va dal + al -, in grigio)

$$\dot{v} = \frac{1}{j\omega c} \cdot \dot{I}_x$$

Trovo $\bar{Z}_{Th}$, disattivo i generatori indipendenti e metto un generatore di prova





$$\dot{v} = -\dot{Z}_P \cdot I_P$$

$$\dot{V}_P = -\dot{v} + \alpha \dot{v} = 2\dot{v} = -2((R+L) \,//\, c) \cdot \dot{I}_P$$

$$\dot{Z}_{Th} = \dot{V}_P / \dot{I}_P = (-4{,}95 + j\, 9{,}51) \, \Omega$$

A questo punto possiamo trovare P_{R_c}:

$$I_{Rc} = \frac{E_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + R_c} = (1{,}02 + j\, 0{,}22) \, A$$

$$P = \frac{1}{2} R_c I_{Rc}^2 = 3{,}25 \, W$$

Esempio:

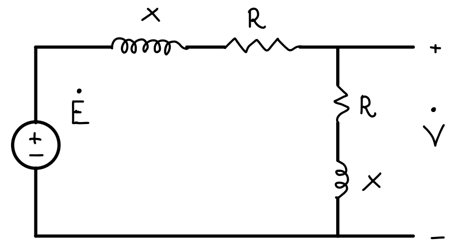
$I = 10\ A$

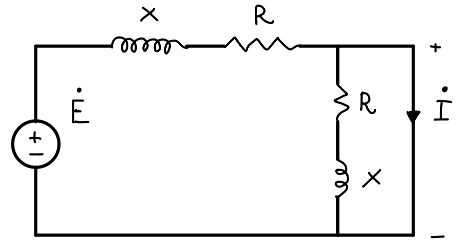
$X_C = 5\sqrt{2}\ \Omega$

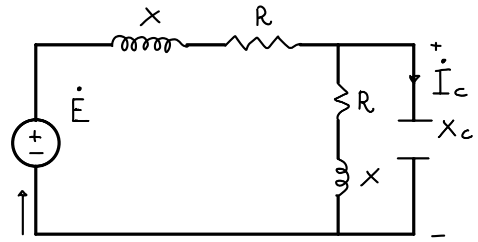
$V = 100\,V$

$R = X$

Trovare l'equivalente di Thevenin e le potenze.







1. Cerco $\dot{E}$, nel primo notiamo un partitore

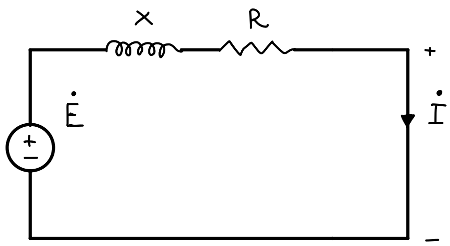
$$V = \frac{E(\cancel{jX+}R)}{2(\cancel{jX+}R)}$$

$$E = 2V = 200\,V$$

Diamo un riferimento di fase $\varphi = 0$

$$\dot{E} = E = 200\,V$$

2. Cerco R, X nel 2° circuito che possiamo riscrivere come:



Non conosco il fasore di $\dot{I}$ quindi

$$|\dot{E}| = |R + jX| \cdot |\dot{I}| = \sqrt{2}\, R\, I$$

$$R = X = 10\sqrt{2}$$

3. Cerco ora l'equivalente di Th.

$$\dot{E}_{Th} = \dot{V} \qquad \bar{Z}_{Th} = (R+X) \,/\!/\, (R+X) = 5\sqrt{2} + j\,5\sqrt{2}$$

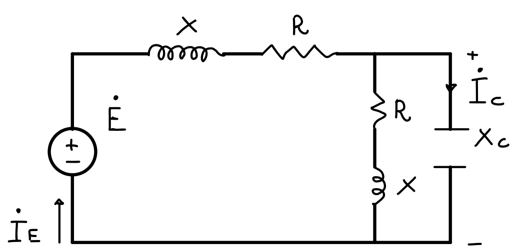
da qui si trova facile $\dot{I}_C = \dfrac{\dot{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} - jX_C} = 10\sqrt{2}\ A$

4. Potenza del condensatore e del generatore (nel 3° caso)

$$Q_C = X_C I_C^2 = -500\sqrt{2}\ VAR$$

$$\dot{I}_E = 10{,}61 - j\,3{,}54$$

$$\dot{S}_E = \dot{I}^* \cdot \dot{E} = 1500\sqrt{2} + j\,500\sqrt{2}$$



RIFASAMENTO

E' una pratica che consiste nel diminuire le potenze reattive assorbite, al fine da ridurre al minimo le perdite energetiche durante il viaggio dalla centrale al consumatore; ossia dal generatore ai terminali di $\bar{Z}_c$.

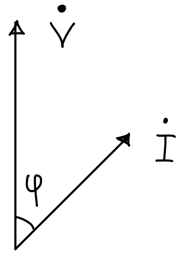
Quindi occorre che $\dot{I}_L < \dot{I}$ ma che $\dot{I}$ non diminuisca.

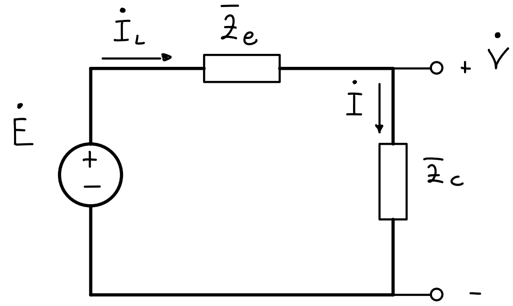
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_e + \bar{Z}_c}$$

$$\dot{V} = \dot{E} - \bar{Z}_e \cdot \dot{I}$$

$$\bar{Z}_c = R + jX_L$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$$





$\bar{Z}_c$ = UTILIZZATORE (Circuito RL)

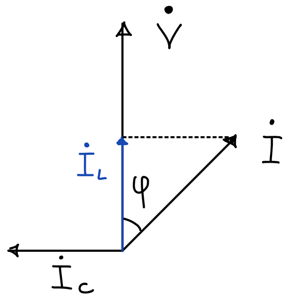
Si fa mettendo un'opportuna C in parallelo, in modo da portare in fase $\dot{V}$ e $\dot{I}_L$, in questo modo si massimizza la P attiva ($\cos\varphi \longrightarrow 1$)

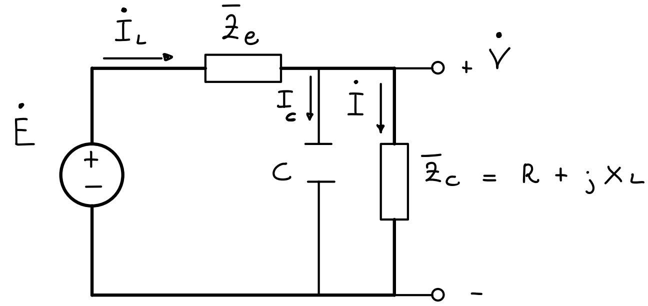
Ricordiamo che il condensatore ritarda di $\pi/2$

$$\dot{I}_C = j\omega C\,\dot{V}$$

$$\dot{I}_L = \dot{I} + \dot{I}_C$$

A questo punto $\dot{I}_L < \dot{I}$





Cerchiamo C in modo che $\dot{V}$ e $\dot{I}_L$ siano in fase. Noto che se $\varphi \longrightarrow 0$ allora il $\sin\varphi$ e' nullo e quindi si ha solo la componente resistiva. (Q diminuisce $\longrightarrow$ P aumenta)

Cio' significa che $\bar{Z}_c \,//\, C$ si comporti come una resistenza. Facciamo il parallelo usando le ammettenze:

$$\bar{Y}_{TOT} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\boxed{C = \frac{L}{Z_c^2}}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \longrightarrow R_{RIFASATA} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R}$$

Rifasamento parziale se $\varphi' < \varphi$, totale se $\varphi' = 0$

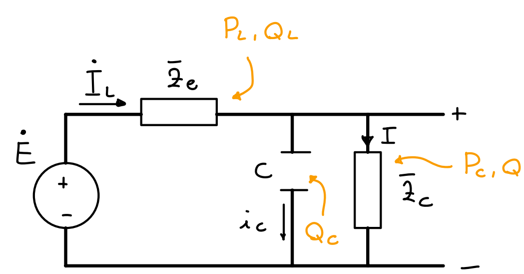
INTERPRETAZIONE DELLE POTENZE

Applichiamo il Teorema di Bouchevot al circuito rifasato. Relativamente a $\bar{Z}_c$ (ossia il carico) si avra' una potenza assorbita attiva pari a quella erogata dal generatore, ossia P_c, e una reattiva Q fornita dal condensatore (Q_c).

$Q_c = BV^2 = \omega C V^2$ (erogata dal condensatore)

$Q = BV^2$ dove B e' quella del carico (assorbita da $\bar{Z}_c$)

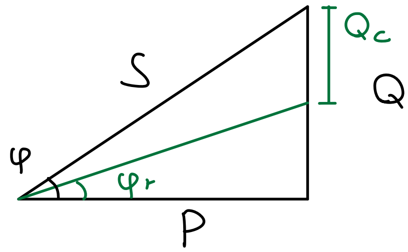
$$Q = \frac{\omega L}{Z^2} V^2$$



In un rifasamento totale si ha $Q = Q_c$

In un RIFASAMENTO PARZIALE invece si ha che $\varphi_{RIF} \neq 0°$ e si avra' un angolo residuo φ_r, la cui tangente sara':

$$tg(\varphi_r) = \frac{Q - Q_c}{P}$$



Da qui si ricava che in termini di potenza:

$$\boxed{C = \frac{(tg\varphi - tg\varphi_r) \cdot P}{\omega V^2}}$$

Dipende da ω ma non da V (il termine V^2 va via se esplicitiamo P)

Nonostante C sia indipendente da V, e' comodo esprimerla cosi' poiche' le targhe dei carici (come gli elettrodomestici) riportano V_n (TENSIONE NOMINALE, a cui il carico lavora da progetto) e non la $\bar{Z}_c$, che puo' essere banalmente ricavata:

TARGA DI CARICO
$V_n = 220\,V$
$f = 50\,Hz$
$P_n = 1,2\,KW$
$\cos\varphi_n$

P_n (potenza nominale) $= V_n I_n \cos\varphi_n$

$\bar{Z}_n$ (impedenza equivalente) $= V_n / I_n$

$$\bar{Z}_n = \frac{V_n^2 \cdot \cos\varphi}{P_n} (\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n)$$

VANTAGGI DEL RIFASAMENTO

1. Corrente meno intensa durante i trasporti
2. Meno consumo di potenza reattiva
3. Risparmio sul materiale

NORMATIVA

Si hanno tre casi per il rifasamento, che indicano quando e se e' necessario. L'enel valuta in base all'angolo φ

- $\cos\varphi > 0,95$ non occorre (in ogni caso fa tutto l'enel)
- $0,7 < \cos\varphi < 0,95$ si puo' non fare ma l'enel chiede di pagare la potenza reattiva
- $\cos\varphi < 0,7$ e' necessario rifasare

ESERCIZIO SU RIFASAMENTO

Verificare che il circuito TOTALMENTE rifasato in figura presenta i vantaggi elencati prima, considerando i seguenti dati:

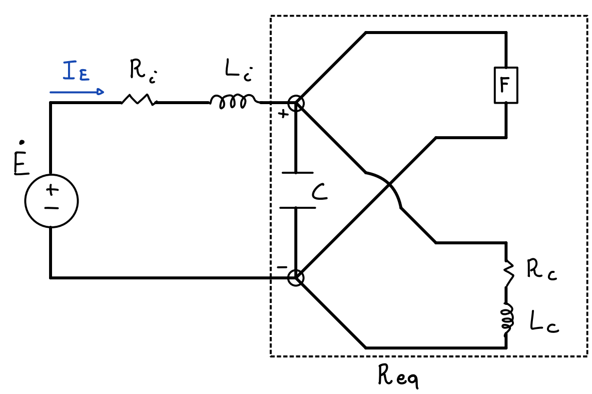
$$F \begin{cases} P_n = 10\,Kw \\ V_n = 400\,V \\ \cos\varphi_n = 0,8 \end{cases} \qquad \begin{aligned} L_c &= 20\,mH \\ R_i &= 0,2\,\Omega \\ L_i &= 1\,mH \\ R_c &= 2\,\Omega \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= 390\,V \\ f &= 50\,Hz \end{aligned}$$

1. Calcoliamo la resistenza equivalente rifasata e l'impedenza equivalente di F:

$$\bar{Z}_n = \frac{V_n^2}{P_n} \cos\varphi_n (\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n) = 10,24 + j\,6,78\,\Omega$$

$$R_{eq} = (G_{eq})^{-1} = C \,//\, (R_c + L_c) = 9,21\,\Omega$$

solo R perche' e' totalmente rifasato



Possiamo dunque trovare la corrente $\dot{I}_E$ e la $P_{i\,(RIF)}$

$$\dot{I}_{E\,(RIF)} = \frac{\dot{V}}{R_{eq}} = 41,25\,A \qquad P_{i\,(RIF)} = R_i \cdot I_E^2$$

$$\dot{E} = \dot{I}_{E\,(RIF)} \cdot \bar{Z}_{TOT} = 388 + j\,13\,V$$

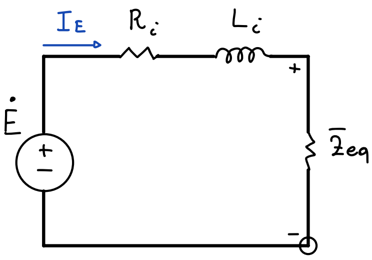
2. Ricalcoliamo le stesse grandezze nel circuito non rifasato, ossia rimuovo C ($\dot{E}$ rimane uguale)

$\bar{Z}_{eq} = (R_C + L_C) \,//\, (F)$

$$\dot{I}_E = \frac{\dot{E}}{(R_i + L_i) + \bar{Z}_{eq}} = 41{,}5 - j67{,}3 \text{ A} \quad (\text{N.B. } I_{E\,(RIF)} < I_E) \checkmark$$

$\Delta P = R_i \,(I_E^2 - I_{E\,(RIF)}^2) = 909 \text{ W} \quad (P_{i\,(RIF)} < P_i) \checkmark$

$V_{OLD} = Z_{eq} \cdot I_E \approx 360 \text{ V} \quad (V_{(RIF)} > V) \checkmark$

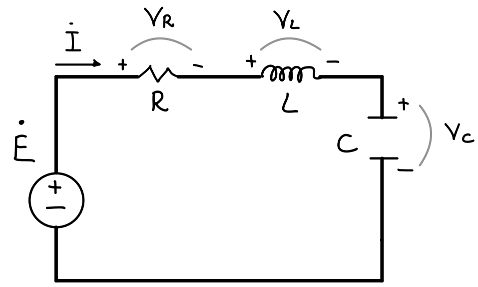


CIRCUITI RISONANTI

CIRCUITI RISONANTI IN SERIE

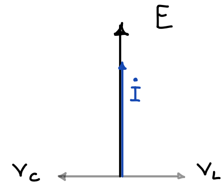
Consideriamo una serie RLC come quello in figura, si puo' facilmente vedere che esiste una frequenza e quindi un ω_0 per cui $\dot{E}$ e' in fase con $\dot{I}$, ossia che L e C annullano i propri effetti di tensione.

In pratica V_L e V_C si annullano per un certo ω_0 e si comportano come un "corto circuito virtuale"; tale condizione e' detta CONDIZIONE DI RISONANZA.



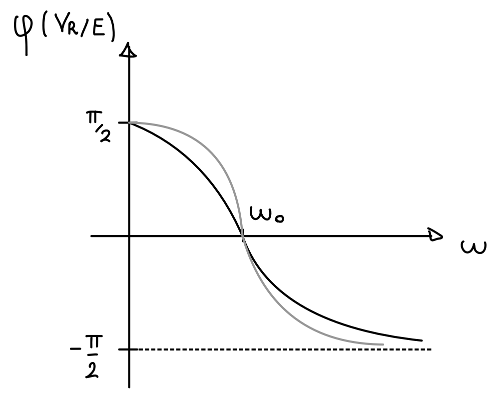
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega L - j/\omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \implies \dot{I}_0 = \dot{E}/R$$



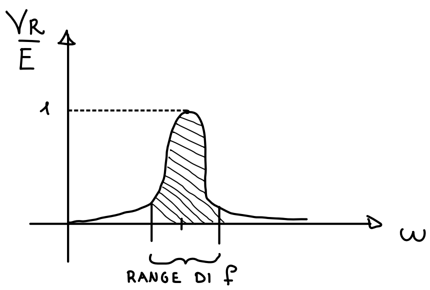
▽ In pratica I e' limitata solo da R, graficamente si puo' osservare l'incidenza di un fattore di BONTA' (QUALITY FACTOR):

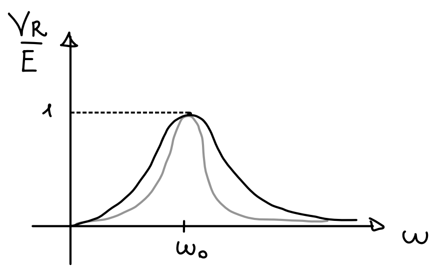
$$\boxed{Q_{SERIE} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}}$$



All'aumentare di Q_S, le curve si stringono attorno al valore ideale, ossia selezionano un range di frequenze sempre piu' ristretto per tale uscita.

Inoltre si puo' verificare che $Q_S > 1$ (SOVRATENSIONE), ossia la tensione di V_L e V_C e' maggiore rispetto ad E in condizione di risonanza (ho un guadagno di tensione)



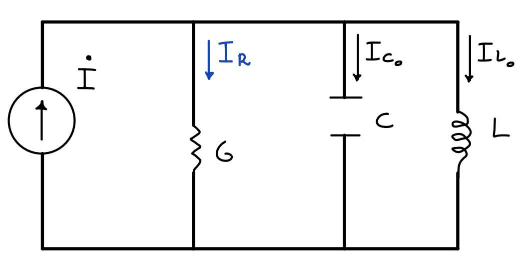


CIRCUITI RISONANTI IN PARALLELO

Sono analoghi in principio a quelli in serie, solo con le correnti I_{C_0} e I_{L_0} che si annullano in risonanza:

$$V = \frac{\dot{I}}{G + j\omega C - j/\omega L} \longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

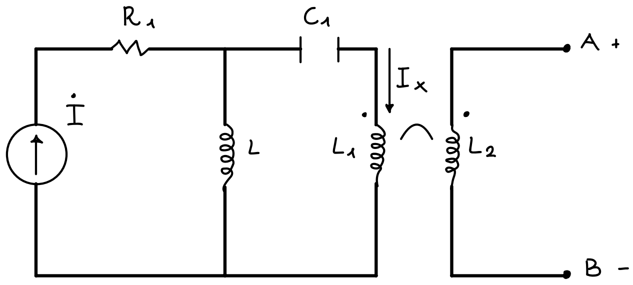
$$Q_P = \frac{I_{L_0}}{I} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$



Alla risonanza C e L sono un "circuito aperto virtuale".

ESERCIZIO SU RISONANZA

Consideriamo il circuito, voglio M affinché il valore efficace di V_{AB} sia 10V



$I = 10\sqrt{2} \cdot \sin(500t)$ A

$R_1 = 10\ \Omega$

$L_1 = 4$ mH

$L_2 = 20$ mH

$C_1 = 1$ mF

$L_2 = 10$ mH

Nel circuito a DX noto che non passa corrente, quindi V_{AB} e' dato solo dal termine della mutua induzione. Troviamo I_x con un partitore:

$$I_x = \frac{j\omega L}{j\omega L + \cancel{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C}}} = I$$

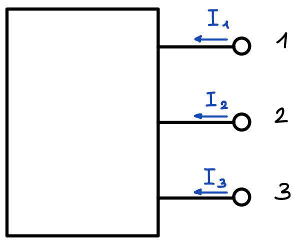
! Noto che $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ quindi sono in risonanza

$$V_{AB} = 10\,V = \omega I_x \cdot M \longrightarrow M = 2\,mH$$

Circuiti trifasi

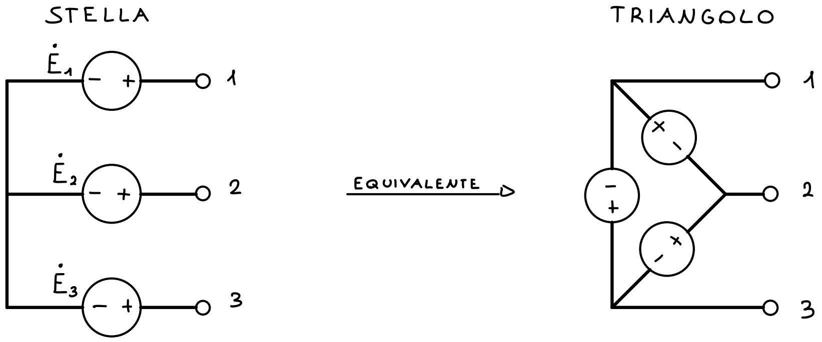
Tripoli

Sono oggetti a 3 terminali, di cui possiamo osservare la tensione e la corrente ai terminali, chiamate GRANDEZZE DI LINEA (correnti di linea e tensioni di linea o concatenate).



$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0 \quad (1° \text{ KCL})$$

ESEMPIO: Generatore trifase, e' un tripolo che si presenta come un collegamento a stella o a triangolo tra 3 generatori.



Le 3 tensioni dei generatori sono dette TENSIONI DI FASE, la relazione che le lega a quelle di linea e':

$$\dot{V}_{12} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$$

$$\dot{V}_{23} = \dot{E}_2 - \dot{E}_3$$

$$\dot{V}_{31} = \dot{E}_3 - \dot{E}_1$$

Sistemi simmetrici

Un sistema simmetrico di generatori e' tale da avere le seguenti proprieta':

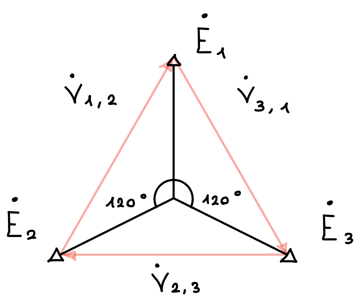
1. FASORI SINUSOIDALI
2. STESSO MODULO
3. SFASAMENTO A 120°

Se le fasi sono numerate in senso orario allora la terna e' DIRETTA, senno' e' INVERSA.

$$\dot{E}_1 = E e^{j\varphi}$$

$$\dot{E}_2 = E e^{(j\varphi + \frac{2}{3}\pi)}$$

$$\dot{E}_3 = E e^{(j\varphi + \frac{4}{3}\pi)}$$

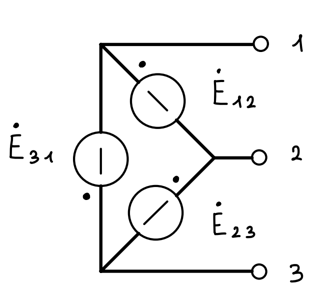


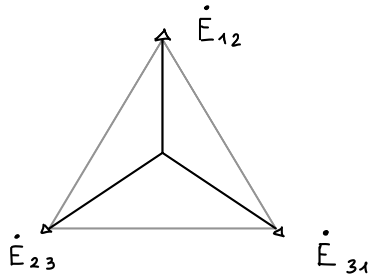
Si nota subito che anche le tensioni di linea hanno le stesse proprieta' di quelle di fase, inoltre la V_i e' sfasata di $\pi/6$ rispetto a $E_{i,j}$, quindi il fasore di linea e' in relazione con quello delle fasi:

$$\boxed{\dot{V}_L = \sqrt{3}\, \dot{E}_F e^{\pm j \pi/6}}$$

Osservazione: Trifase a triangolo

In un triangolo i ruoli sono invertiti, ossia i generatori danno già quelle di linea





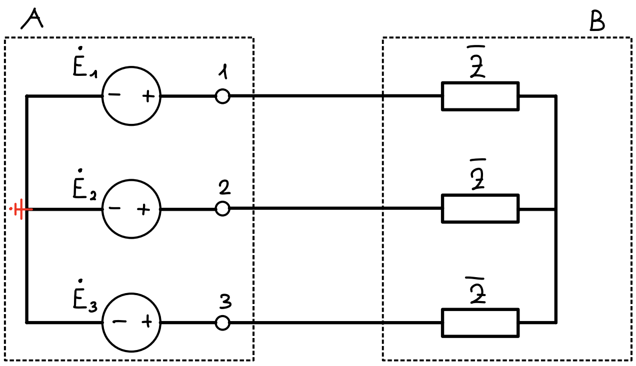
Se passo da stella a triangolo vale la relazione

$$\boxed{\dot{V}_{L\Delta} = \sqrt{3}\,\dot{V}_{L☆} \cdot e^{\pm j\pi/6}}$$

Sistemi simmetrici equilibrati (o bilanciati)

Nella pratica di progettazione si ha un'altra semplificazione, tipica dei SISTEMI EQUILIBRATI, in cui è richiesto che:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$$



Voglio trovare la V_{AB}, uso i nodi:

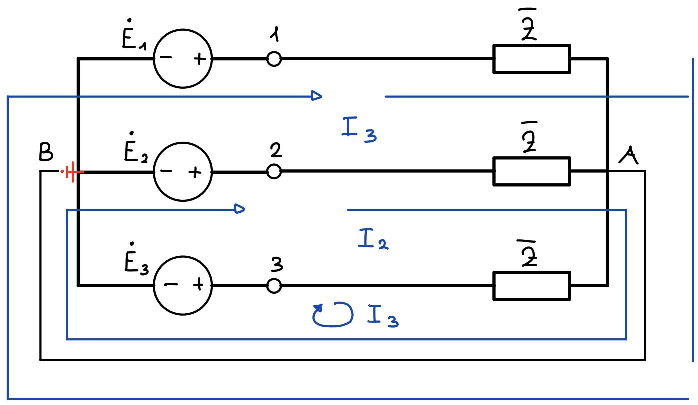
$$0 = \dot{V}_{AB}\left(\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}\right) - \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}} - \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}} - \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}}$$

$$V_{AB} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}}(\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3)}{3/\bar{Z}} = \phi$$

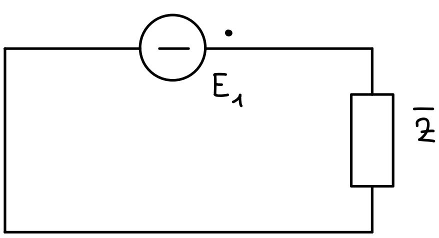
! In un sistema trifase la $V_{AB} = 0$, posso perciò aggiungere un cortocircuito e scrivere le 3 maglie:

PRINCIPIO DI SOSTIT.

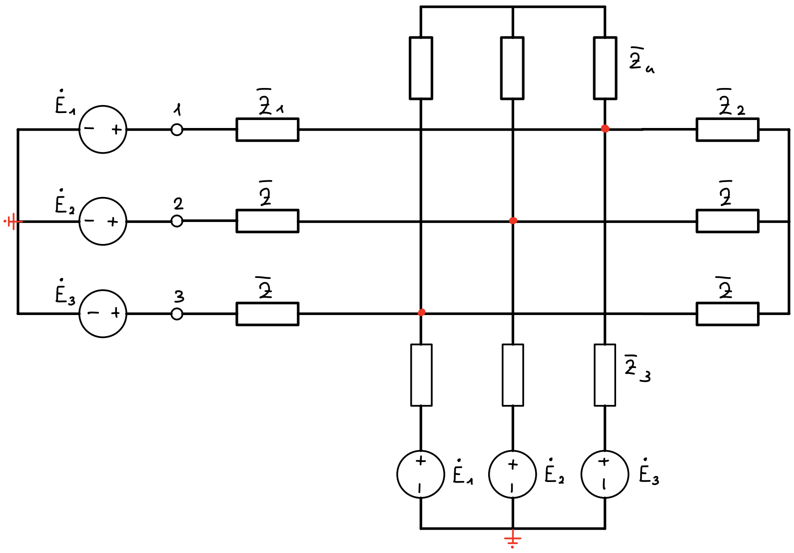
$$\begin{cases} \dot{E}_1 = \dot{I}_1 \bar{Z} \longrightarrow \dot{I}_1 = \dot{E}_1/\bar{Z} = I_0 e^{j\varphi} \\ \dot{E}_2 = \dot{I}_2 \bar{Z} \longrightarrow \dot{I}_2 = \dot{E}_2/\bar{Z} = I_0 e^{j(\varphi \pm \frac{2}{3}\pi)} \\ \dot{E}_3 = I_3 \bar{Z} \longrightarrow \dot{I}_3 = \dot{E}_3/\bar{Z} = I_0 e^{j(\varphi \pm \frac{4}{3}\pi)} \end{cases}$$



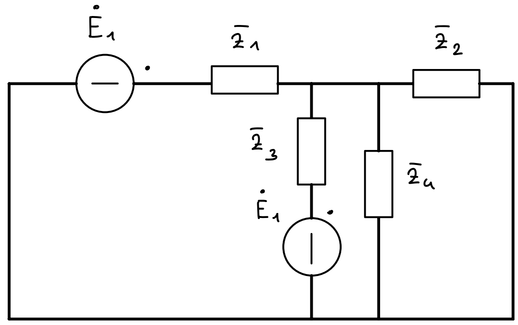
! Anche $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ sono una terna simetrica. Si può scrivere più semplificato, ossia il CIRCUITO MONOFASE EQUIVALENTE associato. Ciò significa che ai fini di calcolarci le grandezze richieste è sufficiente studiare un circuito più semplice.



Esempio: Semplificare il circuito tramite il principio di sostituzione di circuiti trifase.



EQUIVALENTE



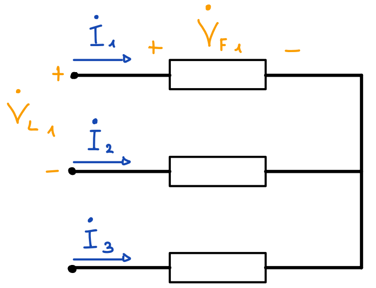
Grandezze di linea e di fase rispetto al carico

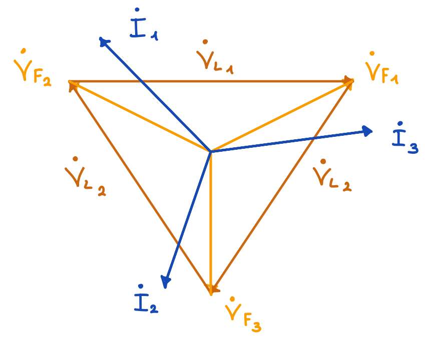
Le grandezze sono chiaramente le correnti e le tensioni relative al carico. Anche in questo caso si fa distinzione tra stella e triangolo.

Carico a stella

In una configurazione a stella, le correnti di linea coincidono con quelle di fase, mentre le tensioni invece sono sfalzate di 120° tra loro.

$\dot{V}_{L1} = \dot{V}_{F1} - \dot{V}_{F2}$



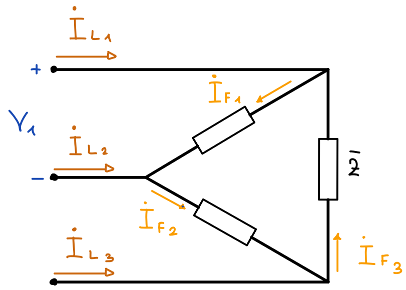


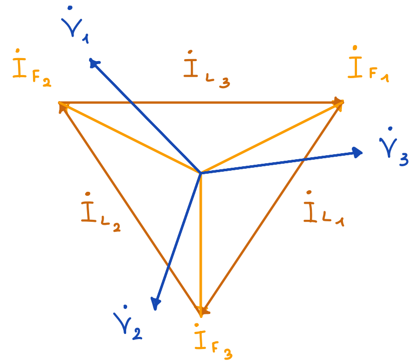
$$\boxed{\begin{array}{l} I_L = I_F \\ V_L = \sqrt{3}\, V_F \end{array}}$$

Carico a triangolo

In una configurazione a stella, le correnti di linea coincidono con quelle di fase, mentre le tensioni invece sono sfalzate di 120° tra loro.

$\dot{I}_{L1} = \dot{I}_{F1} - \dot{I}_{F3}$





$$\boxed{\begin{array}{l} V_F = V_L \\ I_L = \sqrt{3}\, I_F \end{array}}$$

Potenza nei sistemi trifase

In sistemi trifase e' di interesse calcolare la potenza del carico complessivo, non quella delle singole impedenze.

$$P = V_1 I_1 \cos\varphi_1 + V_2 I_2 \cos\varphi_2 + V_3 I_3 \cos\varphi_3$$

$$\boxed{P = 3\, V_F\, I_F \cos\varphi}$$

Tuttavia, dato che spesso sono note le grandezze di linea, e' piu' pratico esprimer= la con I_L e V_L. Notare che non vi e' differenza tra stella o triangolo.

$$\boxed{P_{STAR} = P_{TRI} = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi}$$

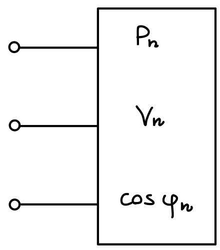
Osservazione

Se abbiamo un circuito a Δ, va portato a stella per poter passare all'equiva= lente monofase.

CASO DI VALORI DI TARGA

Spesso di un carico trifase si conoscono solo i dati di targa, per cui dobbiamo ricavare la $\bar{Z}_n$, osserviamo che l'espressione non cambia rispetto al monofase.

$P_n = \sqrt{3}\, V_n I_n \cos\varphi_n$



$$\boxed{\bar{Z}_n = \frac{V_n^2 \cos\varphi_n}{P_n} (\cos\varphi_n + j \sin\varphi_n)}$$

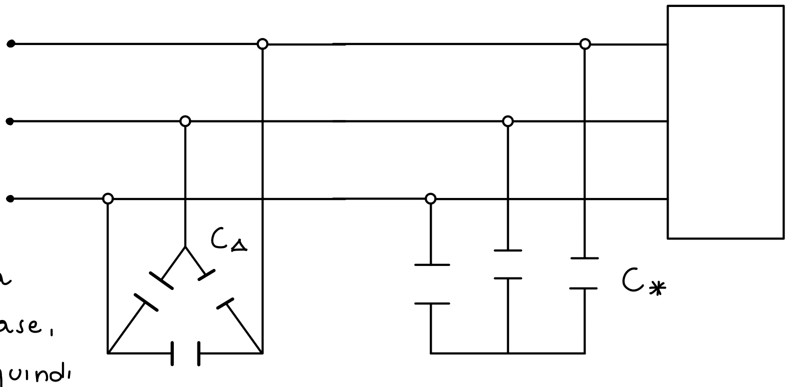
Uguale ai carichi monofase

RIFASAMENTO NEI SISTEMI TRIFASE

E' necessario di tre condensatori per rifasare, che cambiano di capacità a seconda di un trifase a stella o a triangolo.

$Z_* = \frac{Z_\Delta}{3}$ ma $C_* = \frac{L}{Z^2}$, allora:

$$\boxed{C_* = 3 C_\Delta}$$

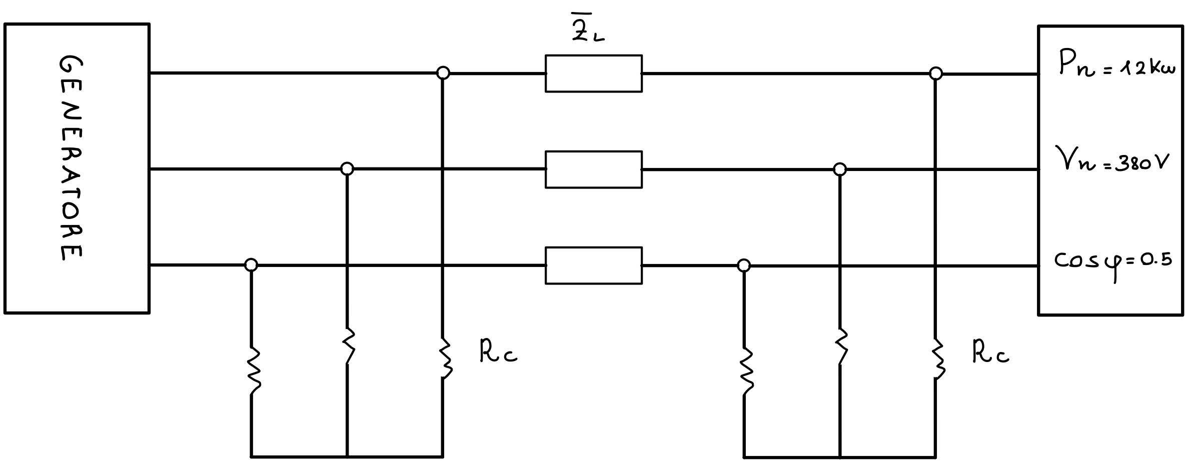


Dal punto di vista economico quelle a triangolo sopportano le tensioni di fase, che sono inferiori a quelle di linea, quindi devono sopportare voltaggi meno elevati di quelli a stella, perciò a seconda del range di tensioni si rifasa con uno o con l'altro.

In impianti moderni si operano tensioni nominali maggiori di 380 V, per cui si usa la stella, dato che il triangolo non ce la farebbe.

ESERCIZIO

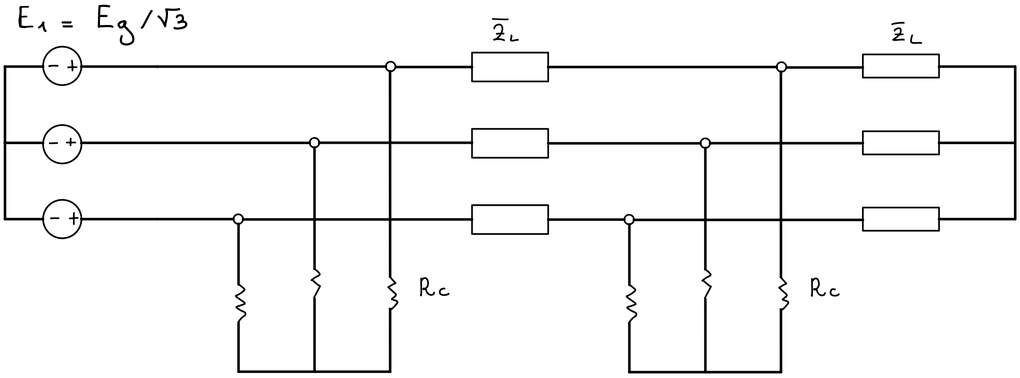
Calcolare la potnza attiva e reattiva del carico e le tensioni del carico. Successivamente il sistema viene rifasato con tre condensatori a stella, a frquenza 50Hz.
Si considerano i seguenti valori di linea per il generatore e per il carico.



$R_c = 2\,\Omega$ $\quad E_{Gen} = 380\,V \quad \bar{Z}_L = 0,5 + 0,5j$

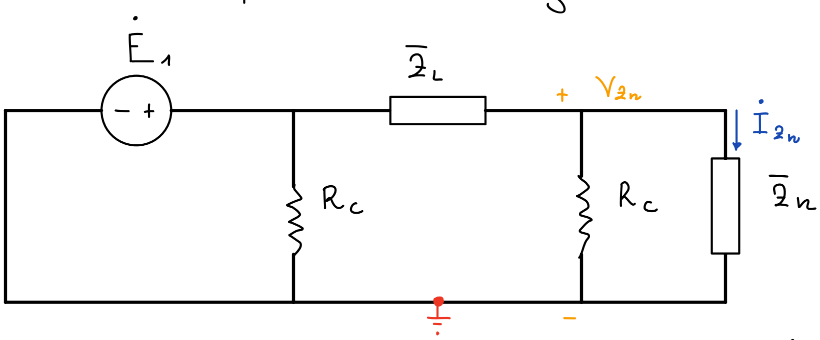
1. Calcoliamo gli equivalenti a stella del carico e dei generatori, in modo da poter trasformare nel monofase

$$\bar{Z}_n = \frac{V_n^2 \cos\varphi_n}{P_n} (\cos\varphi + j \sin\varphi) = 3 + j\,5,21$$



Dato che il problema non da' indicazioni sulle fasi, possiamo scegliere un riferimento comodo, come $\varphi = 0$ per $\dot{E}_1$.

2. Scrivo l'equivalente monomaglia:



Con i nodi si ha un'equazione da cui ricavo $\dot{I}_{2n}$ e $\dot{V}_{2n}$.

$\dot{I}_{2n} = 9,40 - 24,69j$

$\dot{V}_{2n} = Z_n \dot{I}_n = 157,83 - 25,1j \Rightarrow V_n = 158,82$ V

3. Calcolo le grandezze richieste:

$P_{2n} = 6,3$ KW

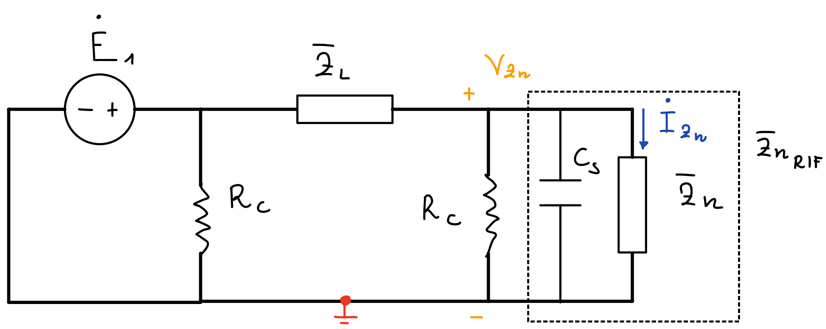
$Q_{2n} = 10,9$ KVAR

$V_L = \sqrt{3}\, V_{2n} = 275$ V (va bene anche perche' $E_g > V_L$)

4. Procediamo con il rifasamento, scrivendo direttamente il circuito monofase

$$C_s = \frac{P_n \cdot \tan\varphi_n}{\omega\, V_n^2} = 0.46 \text{ mF}$$

$\bar{Z}_n^{RIF} = 12\ \Omega$ (va bene dato che e' resistiva)



5. Ricalcolo come prima le quantita', ma metto $\bar{Z}_n^{RIF}$:

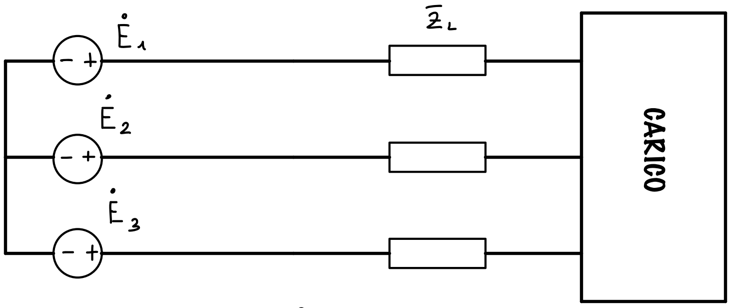
$V_n^R = 287$ V

$P_n^R = 6,9$ Kw

$Q_n^R = 0$ VAR

ESERCIZIO

Calcolare la potenza assorbita dal carico e quella dissipata sulla linea. Successivamente, a seguito di un guasto, la tensione della fase uno si riduce del 50%, trovare la potenza dissipata. (Ossia prima il sistema è equilibrato, dopo non lo è più)



$\dot{E}_1 = 6\ kV$

$\bar{Z}_L = (1 + j0.5)$

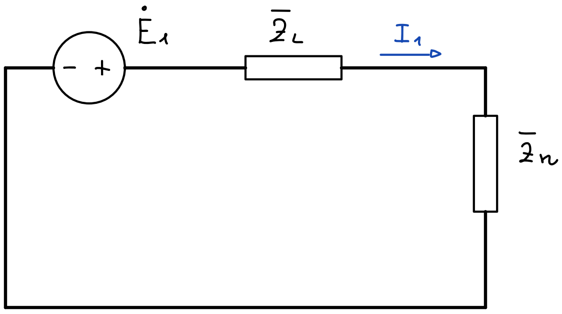
$V_n = 12,5\ kV$

$P_n = 800\ kW$

$Q_n = 650\ kVAR$

1. Trovo $\bar{Z}_n = \frac{V_n^2}{P_n} \cos\varphi\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \Rightarrow \left(\varphi_n = \arctan\frac{Q_n}{P_n} = 0,68\ rad\right)$

$\bar{Z}_n = (117,65 + j\,95,59)\,\Omega$

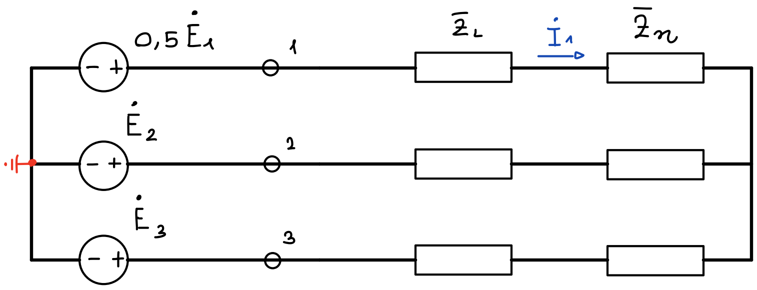


$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c}$

$P_c = 3 R_c I_1^2 = 545\ kW$

$P_L = 3 R_L I_1^2 = 4,6\ kW$

2. Se il primo generatore perde il 50% della tensione erogata, il sistema non e' piu' bilanciato e diventa un normale circuito a tre maglie.



$0 = 3V\left(\frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_n}\right) - \frac{(E_1 + E_2 + E_3)}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_n}$

$V = \frac{\frac{1}{Z_L + Z_n}(0,5E_1 + E_2 + E_3)}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_n}$

$I_1 = \frac{V}{Z_L + Z_n} = (-10,18 + j\,8,24)\,A$

$P_c = R_c\,(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = 393,7\ kW \longrightarrow P_L = 3,35\ kW$

POTENZA ISTANTANEA IN TRIFASE (simmetrico ed equilibrato)

$p(t) = v_1(t)\,i_1(t) + v_2(t)\,i_2(t) + v_3(t)\,i_3(t)$

dalla dimostrazione sulla potenza ricordo che: (formule di prosta feresi)

$= V_F I_F \cos\varphi - V_F I_F \cancel{\cos}(2\omega t + \varphi) + V_F I_F \cos\varphi - V_F I_F \cos(\cancel{2\omega t} + \varphi - \frac{4}{3}\pi) +$
$+ V_F I_F \cos\varphi - V_F I_F \cancel{\cos}(2\omega t + \varphi + \frac{2}{3}\pi)$

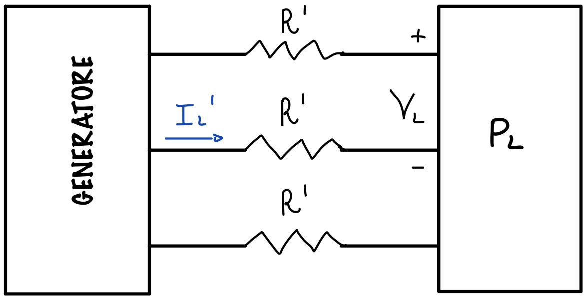
! | termini negativi sono una terna simmetrica, per cui la loro somma e' zero

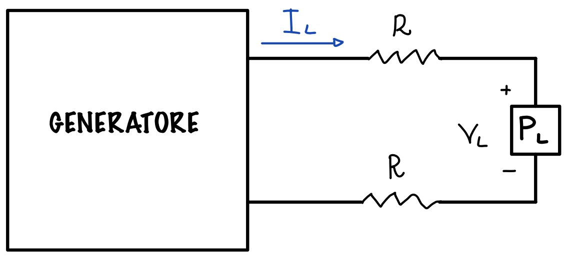
$P(t) = P = 3 V_F I_F \cos\varphi$

In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato la potenza (attiva) istantanea e' costantemente pari a quella media, mentre quella reattiva e' nulla

ESERCIZIO

Confrontare il costo del trasporto ad un carico, di cui sono noti i valori di targa, in un caso di monofase e in un caso di trifase simmetrico ed equilibrato, al pari di tensione, distanza e potenza assorbita.





P_L = Potenza di linea assorbita dal carico

$$P_{MONO} = 2R\, I_L^2 = 2R \frac{P_L^2}{V_L^2}$$

$$P_{TRI} = 3\, I_L'^{\,2} = R' \frac{P_L^2}{V_L^2}$$

$$\frac{P_{TRI}}{P_{MONO}} = \frac{R'}{2R}$$

Supponiamo siano fatti entrambi di rame: $R = \rho \frac{L}{S}$ (L e' la stessa)

$$\frac{P_{TRI}}{P_{MONO}} = \frac{S}{2S'}$$

Per avere pari potenza $S' = \frac{1}{2} S$, ossia nel monofase e' richiesto un filo con sezione doppia, quindi in termini di volume:

$$\frac{Vol}{Vol'} = \frac{2SL}{3S'L} = \frac{4S'}{3S'} = \frac{4}{3} \longrightarrow \text{costa di piu' il monofase.}$$