

# ANALISI II

## SPAZI E INSIEMI

### PRODOTTO SCALARE

Sia uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$  e siano  $v(v_1, v_2)$  e  $w(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ , allora si chiama prodotto scalare:

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

### PROPRIETA'

- 1) Rispetta la combinazione lineare (BILINEARITA')
- 2) E' simmetrico  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- 3) E' definito positivo, ossia  $\langle v, v \rangle \geq 0$  e  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = (0, 0)$

Si usa per definire la lunghezza di un vettore:

### NORMA DI UN VETTORE

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

### PROPRIETA'

- 1)  $\|v\| > 0$
- 2)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- 3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Diseguaglianza triangolare)

### ESEMPI IMPORTANTI

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 &\rightarrow \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \text{Norma del Taxi} \\ \|\cdot\|_\infty &= \max \{|x|, |y|\} \\ \|\cdot\|_2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Uno spazio di norme è detto **normale**.

### DISTANZA TRA VETTORI

Sia un insieme  $X$ ,  $(X, d)$  e  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ :  $d(v, w) = \|v - w\|$

- 1)  $d(v, w) \geq 0 \quad \forall v, w \in X$
- 2)  $d(v, w) = 0 \iff v = w$
- 3)  $d(v + w) \leq d(w, u) + d(v, u)$

### RELAZIONI TRA $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , $\|\cdot\|$ , $d(\cdot, \cdot)$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  definisce  $\|v\|$  che definisce  $d(v, u) = \|u - v\|$

### TEOREMA DEI COSENI IN $\mathbb{R}^n$

$$\cos(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

## SPAZIO METRICO

E' uno spazio in cui gli elementi hanno una distanza ben definita

## COEFFICIENTI DI FOURIER

Sia  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  spazio con prodotto scalare.

Consideriamo una base ortonormale  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tale che.

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0$$

Allora ogni  $v \in V$  (spazio dato) si scrive come:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

con  $\langle v, e_i \rangle = \hat{v}_i$  Coefficienti di Fourier (Si comportano come i componenti di un vettore)

$$\langle v, w \rangle = \langle v_1, e_1 \rangle \langle w_1, e_1 \rangle + \dots + \langle v_n, e_n \rangle \langle w_n, e_n \rangle$$
 ossia con coeff. Fourier:

$$\langle v, w \rangle = \hat{v}_1 \cdot \hat{w}_1 + \dots + \hat{v}_n \cdot \hat{w}_n$$

$$\langle v, w \rangle = \sum \hat{v}_i \hat{w}_i$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \hat{v}_1^2 + \dots + \hat{v}_n^2$$

ESEMPIO:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eucl}})$  e' isometria (ossia e' isomorfismo di s.v.)

## ISOMETRIA

Due spazi sono isometrici se, preso un vettore  $v_i$  di uno spazio (non cartesiano) posso mandarlo in uno spazio euclideo con i coef. di Fourier in modo che:

$$\|v_i\| = \|(\hat{v}_i)\|_{\text{eucl}}$$

## COMPLETEZZA DI SPAZI METRICI

Sia  $(X, d)$  spazio metrico e  $X_n$  una successione di Cauchy, ossia:

$\forall \epsilon > 0 \exists n : n, m > n$  e  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ , allora  $(X, d)$  e' completo se ogni  $x_n$  converge, ossia se una successione puo' convergere converge.

ESEMPIO:

$(\mathbb{Q}, d_{\text{eucl}})$  non e' completo, poiche' ad esempio  $x_n$  non puo' convergere in  $\pi$ , poiche'  $\pi \notin \mathbb{Q}$

## INTORNO SFERICO

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la palla  $B(x_0, r)$  e' l'intorno sferico di  $x_0$ :

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x_0, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

## PUNTI INTERNI, ESTERNI E FRONTIERA

Sia  $E$  un insieme, quali sono le posizioni che  $x_0$  puo' occupare?

### INTERNO

Se  $\exists r : B(x_0, r) \subset E$

### ESTERNO

Se  $\exists r : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n - E$

### FRONTIERA

$x_0$  e' punto di frontiera se  $\exists r : B(x_0, r) \cap E = \mathbb{R}^n - E$

(Si usa per definire gli insiemi aperti e chiusi)

### INSIEME APERTO

$E \subset \mathbb{R}^n$  e' aperto se ogni suo punto e' interno

### INSIEME CHIUSO

$E \subset \mathbb{R}^n$  e' chiuso se il suo complementare e' aperto, oppure se  $E \cap \partial E = \emptyset$  ( $\partial$  = frontiera)

ESEMPIO:

Le rette hanno solo punti di frontiera ( $r = \partial r$ )

ESEMPIO:

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ ,  $\partial B$  e' la semicirconferenza e la retta  $x=0$ ,

l'insieme non e' né chiuso né aperto



## PROPRIETA' DI APERTI E CHIUSI

- $\mathbb{R}^n$ ,  $\emptyset$  sono aperti
- Unione finita o infinita di aperti è aperta
- Un'intersezione finita è aperta, infinita è chiusa (= un punto)
- $\mathbb{R}^n$ ,  $\emptyset$  sono chiusi
- $U$  chiuso è chiuso,  $U^\complement$  è aperto
- $\cap$  e  $\cup$  di chiusi è chiuso

## TEOREMA

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\{x \in A : f(x) > 0\}$  è aperto

### DIMOSTRAZIONE

Da Th. della permanenza del segno se  $f(x_0) > 0$  e  $f$  continua allora  $\exists \delta > 0 : f(x) > 0$  se  $x \in B(x_0, \delta)$ , ossia se un intorno di  $x_0$  è ad  $A$  allora  $A$  è aperto

### INSIEME LIMITATO

$E \subset \mathbb{R}^n$  limitato se  $\exists R > 0 : B(0, R) \supset E$

### COMPATTO

$E$  è compatto se  $\forall \{x_n\} \subset E$  ha almeno una sottosuccessione convergente  
In  $\mathbb{R}^n$  compatto  $\Leftrightarrow$  chiuso e limitato

## LIMITI E CONTINUITÀ

### DEFINIZIONI IN UNA VARIABILE

- Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 : |x - x_0| < \gamma \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se  $\forall \langle x_n \rangle$  (con  $x_n \rightarrow x_0$ ) si ha  $f(x_n) \rightarrow L$

### DEFINIZIONE IN PIÙ VARIABILI

- Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora  $\exists \lim f(x) = L$  se  $\forall \langle x_n \rangle$  con  $d(x_0, x_n) \rightarrow 0$  si ha che  $f(\langle x_n \rangle) \rightarrow L$

### ESEMPIO:

Sia  $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$  con  $x, y \neq 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y)$  esiste?

Un metodo è muoversi in una direzione e vedere se esiste.

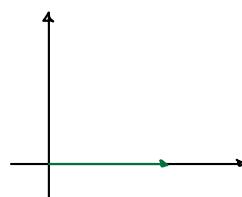
Se  $x \rightarrow 0$  allora il limite è 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$$

Cio' mi dice che se il limite esiste, allora è 0; riesco a pensare a qualcosa che non tenda a zero?  
Provo la bisettrice ( $x = y$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$$

quindi il limite non esiste perché non è unico.



### COORDINATE POLARI

$$x = p \cos \theta$$

$$y = p \sin \theta$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} = d((x, y), (0, 0)), \text{ ossia quando } f \rightarrow (0, 0) \text{ allora } p \rightarrow 0$$

ESEMPIO:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^2 \cos^2 \theta \rho \sin \theta}{\rho^2} = 2\rho \cos^2 \theta \sin \theta \quad (\text{tende a zero})$$

Prodotto tra una funzione limitata e una che tende a zero è 0, quindi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

ESEMPIO:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x-y+1}{x+y-1} \quad (x,y) \rightarrow (0,1) \quad \text{allora } \rho \rightarrow 1$$

$$f(\rho, \theta) = \rho \frac{\cos \theta - \rho \sin \theta + 1}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 1} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}, \text{ adesso il limite dipende da } \theta, \text{ per cui dalla direzione}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \neq$$

CONTINUITÀ

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ è continua in } P_0 \text{ se } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

ESEMPIO:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Noto che  $xy/x^2+y^2$  ha stesso grado sia sopra che sotto  $\Rightarrow$  METODO RETTE

$$Y = mx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \quad \text{dipende da } m \Rightarrow \text{Limite } \neq \text{ e } f \text{ non è continua}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cerco  $a$ :  $f(x,y)$  sia continua. Guardiamo il limite:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^4 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 0$$

$$a = 0$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

è continua in  $(0,0)$ ? Le rette non ci dicono nulla, provo con parabola

$$Y = x^2$$

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{Sulle rette } f=0 \text{ e sulla parabola } x=0 \Rightarrow \text{no continua}$$

## LIMITI INFINITI

Cosa significa che un punto va all'infinito?

$$d((x,y), (0,0)) \rightarrow +\infty$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \text{ (Convenzione le coordinate polari)}$$

### ESEMPIO

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{y - x^2 + x^4 + y^6}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p \sin \theta - p^2 \cos^2 \theta + p^4 \cos^4 \theta + p^6 \sin^6 \theta}{p^2} = p^4 \left( \frac{\sin \theta}{p^3} - \frac{\cos^2 \theta}{p^2} + \cos \theta + p^2 \sin^6 \theta \right) = +\infty$$

sicuramente positivo

## LIMITI SU PORZIONI DI SPAZIO

### ESEMPIO

$$\frac{x^2 y}{x-y} \quad \text{con } x \neq y \quad (\text{non posso usare la bisettrice})$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^3 \overset{\circ}{\cos^2 \theta \sin \theta}}{p(\cos \theta - \sin \theta)} = \text{non posso saperlo}$$

non lo so

Provo ad avvicinarmi con una curva tangente:

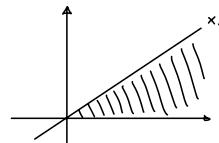
$$x + x^4 = y$$

$$\lim_{(x, x+x^4) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x+x^4)}{x^4} = \frac{x^4+x}{x^2} = +\infty$$

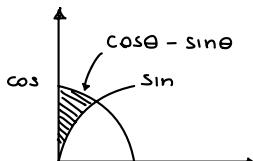
Se volessi calcolarlo per  $0 \leq y \leq x/2$ ? Cambio coordinate:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 \overset{\text{limitato}}{\cos^2 \theta \sin \theta}}{\cos \theta - \sin \theta}$$

?



Per vedere se  $\cos \theta - \sin \theta$  non va a zero (in tal caso avrei una forma indeterminata 0/0) lo disegno:

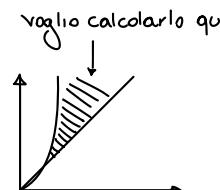


→ Osservo che  $\cos \theta - \sin \theta > 0$  per  $(0 < \theta < \theta_0)$  quindi il limite è ger

### ESEMPIO

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2} \quad \text{per } x \approx y \approx x^2 \text{ e } x > 0$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p^6 \overset{\text{limitato}}{\sin^6 \theta}}{1+p^2} = +\infty \quad \text{con } \pi/4 < \theta < \pi/2$$



## TEOREMI SU LIMITI VALIDI IN PIU' VARIABILI

- Unicità del limite
- Permanenza del segno
- Confronto
- Aritmetica dei limiti
- Continuità delle funzioni elementari
- Somma, prodotto
- Weierstrass e zeri

## TEOREMA DEGLI ZERI

Sia  $f$  continua e  $P \in \mathbb{R}^n$ :  $f(P) \geq 0$ ,  $Q \in \mathbb{R}^n$ :  $f(Q) \leq 0$ ,  $\forall \gamma$  che unisce  $P$  e  $Q$   $\exists M \in \gamma$ :  $f(M) = 0$

## TEOREMA DI WEISTRASS

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $A$  compatto, sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\exists \max$  e  $\min$  di  $f$  su  $A$

### DIMOSTRAZIONE

Sia  $M$  il Sup di  $f$  su  $A$  con  $M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , dalla definizione di Sup si ha:  $\exists \langle P_n \rangle \subseteq A: f(\langle P_n \rangle) \rightarrow M$   
ma  $A$  è compatto  $\Rightarrow \exists$  sottosuccessione convergente a un  $P_0 \in A$ , ossia:

$P_{n_k} \rightarrow P_0 \Rightarrow f(P_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$ , ma voglio che  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$  (continuità), allora  $f(P_0) = M$  ed  $M = \max(f)$

## DERIVATE

### DERIVATE PARZIALI RISPETTO AGLI ASSI

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , allora le derivate parziali di  $f(x,y)$  sono:

$$\begin{aligned} \cdot f_x(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \cdot f_y(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

### DERIVATE DIREZIONALI

Sia  $P(x_0, y_0)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  con  $\|v\| = 1$ , allora la derivata direzionale di  $f(x,y)$  è:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hv) - f(P)}{h}$$

ESEMPIO: Calcola derivate parziali e direzionali

$$f(x,y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2y}{x^4+y^2} \right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x = 2 \frac{x^2y}{x^4+y^2} \cdot \left( \frac{2xy(x^4+y^2) - 4x^3(y^2)}{(x^4+y^2)^2} \right)$$

$$f_y = 2 \frac{x^2y}{x^4+y^2} \cdot \frac{x^2(x^4+y^2) - 2y(x^2y)}{(x^4+y^2)^2}$$

Fissato  $v(v_1, v_2)$  con  $\|v\| = 1$  e calcolo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,0) + t(v_1, v_2) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \frac{1}{t} \left( \frac{t^3(v_1)^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} \right)^2 \\ &= t \left( \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \right)^2 = 0 \cdot \left( \frac{v_1^2 v_2}{v_2^2} \right) \end{aligned}$$

Se  $v_2 \neq 0 \rightarrow \lim = 0$

Se  $v_2 = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t(0) = 0$$

Quindi  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$

⚠ In più variabili derivabile non implica continua

## DIFFERENZIALE

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  è differenziale in  $P_0 \in \mathbb{R}^n$  se  $\exists$  una applicazione lineare (differenziale)

$d_{P_0} f [ \cdot ] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- $\forall P, f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f [P - P_0] + o(\|P - P_0\|)$
- $f(P_0 + v) = f(P_0) + d_{P_0} f [v] + o(\|v\|) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$

### IN DUE VARIABILI

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + d_{P_0} f \left[ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right] + o(|x - x_0|)$$

### FUNZIONE DIFFERENZIABILE

$f$  è differenziale in  $P_0$  ossia  $\exists d_{P_0} f [ \cdot ]$  se

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + v) - f(P_0) - d_{P_0} f [v]}{\|v\|} = 0$$

### TEOREMA DELLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Sia  $f$  differenziale in  $P_0$ , allora  $f$  è continua in  $P_0$ .

#### DIMOSTRAZIONE

Se  $f$  è differenziale  $\Rightarrow f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f [P - P_0] + o(\|P - P_0\|)$ , perciò:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) + d_{P_0} f [P - P_0] + o(\|P - P_0\|) = f(P_0)$$

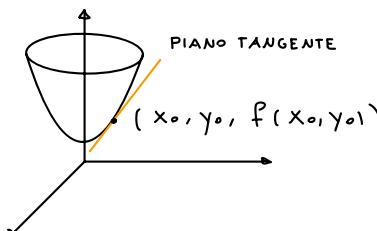
$d_{P_0} f [P - P_0]$  tende a zero poiché è applicazione lineare a vettore nullo

### PIANO TANGENTE

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + d_{P_0} f \left[ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right] + o(|x - x_0|)$$

$Z = f(x_0, y_0) + d_{P_0} f \left[ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right]$  è il grafico di un piano (funzione lineare) passante per  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ed è il **piano tangente** al punto



### LEMMA

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziale in  $(x_0, y_0)$ , allora  $f$  è derivabile e:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = d_{(x_0, y_0)} f [ \overset{1}{\underset{0}{\cdot}} ]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = d_{(x_0, y_0)} f [ \overset{0}{\underset{1}{\cdot}} ]$$

### DIMOSTRAZIONE

Sia un vettore  $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  applicato a  $f$ , calcolo  $f'_x$

$$f(x_0 + t, y_0) = f(x_0, y_0) + d_{(x_0, y_0)} \left[ \frac{t}{0} \right] + o(|t|)$$

$$= f(x_0, y_0) + t d_p \left[ \frac{1}{0} \right] + o(|t|)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0) + t d_p \left[ \frac{1}{0} \right] + o(|t|) - f(x_0, y_0)}{t} = d(x_0, y_0) \left[ \frac{1}{0} \right]$$

### TEOREMA

Sia  $f$  differenziabile e  $\nabla : \|\nabla\| = 1$

$$\partial f / \partial \nabla (x_0, y_0) = d(x_0, y_0) f[\nabla]$$

### PROPRIETA'

Sia  $f$  differenziabile in  $P_0 \in \mathbb{R}^2$ , allora

$$d(x_0, y_0) f[\nabla] = \partial f / \partial x (x_0, y_0) v_1 + \partial f / \partial y (x_0, y_0) v_2$$

### DIMOSTRAZIONE

Sia  $d(x_0, y_0) f[\nabla] = d(x_0, y_0) f \left[ \begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix} \right] = d(x_0, y_0) f \left[ v_1 \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) + v_2 \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right]$   
uso la linearita':

$$v_1 d(x_0, y_0) f \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + v_2 d(x_0, y_0) f \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = v_1 \partial f / \partial x + v_2 \partial f / \partial y$$

### COROLLARIO

Tutte le derivate direzionali di  $f$  si scrivono come combinazioni lineari delle parziali

$$\partial f / \partial \nabla = v_1 \partial f / \partial x + v_2 \partial f / \partial y$$

### TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$  (continua, derivabile, derivate continue fino a 1° ordine) in  $P_0$ , allora  $f$  è differenziabile tale che:

$$d_{P_0} f[\nabla] = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nabla \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial f / \partial x (P_0) \\ \partial f / \partial y (P_0) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

### GRADIENTE NABLA

$$\nabla f(P_0) = \left( \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \right)$$

### ESERCIZIO RIASSUNTIVO

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x, y) = e^x y$

•  $f_x$  e  $f_y$

$$f_x = e^x y$$

$$f_y = e^x$$

•  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(0, 0)$ , poiché è  $C^1$  in  $(0, 0)$ , calcolarlo per  $\nabla = (1, 2)$

$$f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 1$$

$$\nabla = (v_1, v_2) \quad \|\nabla\| = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} = v_2$$

$$d_{(0,0)} f \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = \langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

- Trovare il piano tangente in  $(0,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{vmatrix} + o(\dots) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y - y_0) + o(1\dots) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot (y - 0) = y \end{aligned}$$

Piano tangente  $\Rightarrow z = y$  in  $(0,0,0)$

### TEOREMA DI FERMAT

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in un punto  $p_0$  con  $p_0$  massimo o minimo relativo, allora il differenziale in  $p_0$  è nullo. (max/min sono detti punti estremali)

$$d_{p_0} f = 0$$

### DIMOSTRAZIONE

Sia  $v: |v| = 1$ , so che  $\exists \frac{\partial f}{\partial v}$  in  $p_0$  ed è  $d_{p_0} f[v]$ , perciò:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$$

Il numeratore è  $\leq 0$  poiché massimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t} \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t} \geq 0 \end{array} \right. \longrightarrow d_{p_0} f[v] = 0 \quad \forall v: |v| = 1$$

vale anche per  $|v| \neq 1$  poiché  $d_p f$  è lineare.

### TEOREMA DI SCHWARTZ (DERIVATA SECONDA)

Sia  $f \in C^2$  in  $p_0$ , allora le derivate seconde miste sono uguali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

vale anche con ordini superiori se  $f \in C^K$

### HESSIANO

È una matrice che contiene le derivate seconde:

$$H_f = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

### AUTOVALORI

Sia  $A$  una funzione, gli autovalori di  $A$  sono tali che:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = \text{polinomio caratteristico}$$

### PROPRIETÀ

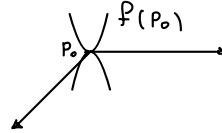
$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

## LEMMA DI MORSE

Sia  $P_0$  punto critico ( $d_{P_0}f = 0$ ) con  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $C^2$  in  $P_0$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  autovalori di  $Hf(P_0)$ , divisi tra  $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$  e  $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n < 0$ , allora in un intorno di  $P_0$ ,  $f$  si scrive come:

$$f(P) = f(P_0) + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_s^2 - (\lambda_{s+1}^2 + \dots + \lambda_n^2)$$



La funzione ci si avvicina come una parabola (+) o (-)

### OSSERVAZIONI

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  allora  $P_0$  è minimo locale (Hessiano definito positivamente)
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$  allora  $P_0$  è massimo locale

## PUNTI CRITICI

Se l'  $Hf$  non è ne definita (+) né (-) allora si ha un PUNTO DI SELLA (in una direzione cresce e nell'altra decresce).

Se  $f$  ha un  $\lambda_i = 0$  si ha un PUNTO CRITICO DEGENERE (ad esempio la sella di scimmia)

## SVILUPPI DI TAYLOR DI ORDINI SUCCESSIVI

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^K$  in  $P_0$ , allora:

$$\begin{aligned} f(P) = f(P_0) + & \left[ (P-P_0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (P-P_0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (P-P_0) \frac{\partial}{\partial x_n} \right] f(P_0) + \frac{1}{2} \left[ ((P-P_0)_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \right. \\ & \left. + (P-P_0)_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 f \right](P_0) + \dots + \frac{1}{K!} \left[ ((P-P_0)_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (P-P_0)_n \frac{\partial}{\partial x_n})^K f \right](P_0) + o(|P-P_0|^K) \end{aligned}$$

### ESEMPIO

$f = e^{xy}$  sviluppo del 3° ordine in  $(0,0)$

$$\begin{aligned} f_x = e^{xy} y ; \quad f_y = e^{xy} x ; \quad f_{xx} = y^2 e^{xy} ; \quad f_{yy} = x^2 e^{xy} ; \\ f_{xy} = f_{yx} = xy e^{xy} ; \quad f_{xxx} = y^3 e^{xy} ; \quad f_{yyy} = x^3 e^{xy} ; \quad f_{xxy} = f_{yxy} = 2ye^{xy} + xy^2 + e^{xy} \end{aligned}$$

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot xy + o(|\frac{x}{y}|^3)$$

$$e^{xy} = 1 + xy + o(|\frac{x}{y}|^3)$$

## FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K$  tale che:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_K(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

### LIMITI

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K$ , allora  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = L \quad P_0, P \in \mathbb{R}^n$  e  $L \in \mathbb{R}^K$   
si ha la continuità se:

$$f(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$$

### DIFFERENZIALE

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K$  è differenziabile se  $f_1, \dots, f_K$  sono differenziabili

### JACOBIANO DI UNA FUNZIONE

Scriviamo lo sviluppo di Taylor per una funzione vettoriale  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  :

$$f_1(p) = f_1(p_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0)(p-p_0)_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0)(p-p_0)_n + o(|p-p_0|)$$

$$f_2(p) = f_2(p_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_0)(p-p_0)_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_0)(p-p_0)_n + o(|p-p_0|)$$

.

.

$$f_k(p) = f_k(p_0) + \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p_0)(p-p_0)_1 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(p_0)(p-p_0)_n + o(|p-p_0|)$$

Usiamo una notazione più compatta introducendo il  $J_f$  (JACOBIANO)

$$f(p) = f(p_0) + J_f(p_0) \cdot (p-p_0) + o(|p-p_0|)$$

$$d_{p_0} f(p-p_0) = \begin{vmatrix} f_1(p_0) \\ \vdots \\ f_k(p_0) \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_{x_1} f_1 + \dots + \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots \\ \partial_{x_1} f_k + \dots + \partial_{x_n} f_k \end{vmatrix}}_{JACOBIANO} \cdot \begin{vmatrix} p_1 - p_{01} \\ \vdots \\ p_n - p_{0n} \end{vmatrix}$$

### DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

Siano  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $f$  differenziabile in  $p_0$ , allora  $g(f)$  è differenziabile in  $p_0$  e:

$$d_{p_0}(g \circ f)[v] = d_{f(p_0)} g [d_{p_0} f[v]] \text{ con } v \in \mathbb{R}^n \text{ e } d_{p_0} f[v] \in \mathbb{R}^k$$

### DIMOSTRAZIONE

$$g(f(p_0+v)) = g(f(p_0) + d_{p_0} f(v) + o(|v|)) = g(f(p_0)) + d_{f(p_0)} [d_{p_0} f(v)] + d_{f(p_0)} [\vec{o}(v)] +$$

$$+ \vec{o}[d_{p_0} f[v]] + \vec{o}(v)$$

ora occorre dimostrare che  $\vec{o}(d_{p_0} f[v] + \vec{o}(v)) = o(|\vec{o}(v)|)$ , ma se che  $d_{f(p_0)}[\vec{o}(v)] = \vec{o}(v)$   
perciò si ottiene:

$$g(f(p_0+v)) = g(f(p_0) + d_{f(p_0)} g[d_{p_0} f[v]] + o(|v|)$$

Scriviamolo ora con i Jacobiani

$$d_{p_0}(g \circ f)(v) = J_{g \circ f}(p_0) \cdot v = J_g(f(p_0)) \cdot J_f(p_0) \cdot v$$

### DERIVATA LUNGO UNA CURVA

Sia  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  e  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , vogliamo calcolare  $f(\gamma(t))$ :

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = J_f(\gamma(t_0)) \cdot J_\gamma(t_0)$$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{x}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \dot{y}(t_0)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0))} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

### FORMULA IN CAMBIO DI COORDINATE

$$\frac{\partial}{\partial p} f(x(p, \theta), y(p, \theta)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p}$$

ESEMPIO:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad \gamma = \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 25 \end{array} \right.$$

Parametrizziamo la curva:

$$y = \frac{25}{3} - \frac{4x}{3}$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{25}{3} - 4t \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 3t \\ \frac{25}{3} - 4t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ (è regolare)}$$

$$f(\gamma(t)) = e^{(-9t^2 + (\frac{25}{3} - 4t)^2)} \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-\infty)} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(-\infty)} = 0$$

$$\frac{df}{dt}(\gamma(t)) = e^{(-\infty)} (18t - 8(\frac{25}{3} - 4t)) = [60t + \frac{825}{3}] \cdot e^{(-9t^2 + (\frac{25}{3} - 4t)^2)} > 0$$

### CURVE DI LIVELLO

Sia  $f(x,y)$ , è definita curva di livello una  $\tilde{f}^c = \{(x,y) | f(x,y) = c\}$   
(si usano per studiare in 2D una curva 3D)

#### PROPOSIZIONE

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile e una curva di livello  $\tilde{f}^c = \{(x,y) | f(x,y) = c\}$ , supponiamo che  $\exists \gamma(t)$  parametrizzazione regolare, allora:

$$\nabla f \perp \tilde{f}^c$$

#### DIMOSTRAZIONE

Se  $f(\gamma(t)) = c$  e quindi  $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 \rightarrow \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle$

### MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $A$  compatto,  $\exists \max(f)$  e  $\min(f)$  per  $A$ .

#### DIMOSTRAZIONE

Per Fermat se  $f$  è differenziabile, allora in  $\max(f)$  il  $\nabla f = 0$ , ma se sul bordo  $f$  regolare la parametrizziamo in  $\gamma(t)$  e  $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0$

#### ESEMPIO:

$$f(x,y) = x^2(x^2+y^2)$$

$$D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \text{ è compatto e } f \text{ continua} \Rightarrow \exists \max, \min$$

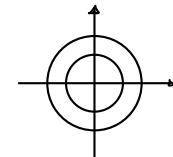
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 \\ 2yx^2 \end{pmatrix} \quad \nabla f = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f = 0 \text{ se } x = 0$$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$f(\gamma_1(t)) = \cos^2 t \rightarrow 1 \text{ per } t = 0$$



# SUPERFICI

## LINEE COORDINATE

Consideriamo un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  e una parametrizzazione

$$\pi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

In  $\mathbb{R}^2$  ci si può muovere su due direzioni, che su una superficie si traducono in spostamenti curvilinei chiamate linee coordinate.

## SUPERFICI REGOLARI

Osserviamo i vettori tangentи alle linee coordinate (in blu), questi saranno:

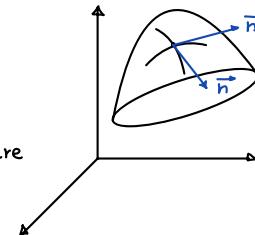
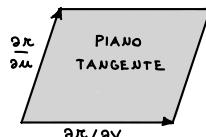
$$\frac{\partial \pi}{\partial u}(u_0, v_0); \quad \frac{\partial \pi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Per generare un piano tangente devono essere una base (ossia devono esistere ed essere indipendenti), questo è il criterio per dire che  $\Omega$  è **parametrizzata regolarmente**.

- I vettori normali sono indipendenti se:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} \neq 0$$

ossia se  $\vec{n}$  al piano tg non è nullo



## COME VEDERE SE UNA SUPERFICIE È REGOLARE

Scrivo il vettore  $\perp$  al piano tangente generato dai vettori:

$$\text{PIANO TG: } \text{Span}(\pi_u, \pi_v)$$

Scrivo  $\vec{n}$  a piano tg:

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} \neq 0 = \vec{n}$$

$$\vec{n}_u \wedge \vec{n}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{n} \longrightarrow \text{Faccio modulo } |\vec{n}| \neq 0$$

## ESEMPIO:

$$\pi(\theta, \varphi) = \begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

$$\pi_\theta = \frac{\partial \pi}{\partial \theta} = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi)$$

$$\vec{n} = \pi_\theta \wedge \pi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \sin \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \sin \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} = -\hat{i} (R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta) + \hat{j} (R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta) + \hat{k} (R^2 \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$= \Rightarrow |\vec{n}| = (R^4 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + R^4 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + R^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$|\vec{n}| = R^2 \sin \varphi \neq 0 \text{ per } \varphi \neq 0, \pi \text{ ossia ai poli nord e sud}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ no parametrizzato regolarmente}$$

## PARAMETRIZZAZIONE DI UN GRAFICO

Un grafico è del tipo  $z = f(x, y)$  con  $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\pi(u, v) = \begin{pmatrix} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\pi_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$$

$$\pi_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$$

$$\pi_u \wedge \pi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = (-f_u, -f_v, -1)$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

$$\hat{n} = \frac{\pi_u \wedge \pi_v}{|\pi_u \wedge \pi_v|}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \cdot \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

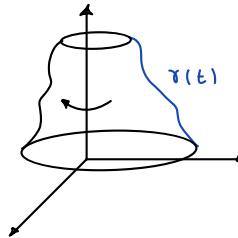
## PARAMETRIZZAZIONE DI SUPERFICI DI ROTAZIONE

Ad esempio consideriamo una rotazione attorno all'asse 2:

$$\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$$

$$\begin{cases} x = x(t) \cos \theta \\ y = y(t) \sin \theta \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [a, b]$$

La superficie ottenuta è regolare?



$$\pi_t = (\dot{x} \cos \theta, \dot{x} \sin \theta, \dot{z})$$

$$\pi_\theta = (-x \sin \theta, x \cos \theta, 0)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} \cos \theta & \dot{x} \sin \theta & \dot{z} \\ -x \sin \theta & x \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dot{z} \times \cos \theta \\ \dot{z} \times \sin \theta \\ \dot{x} \times \end{vmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \|\dot{x}\| \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{x}^2} \neq 0 \quad \text{se } \|\dot{x}\| \neq 0 \quad (\text{ossia se la curva non ha poli di rotazione})$$

## ESERCIZIO

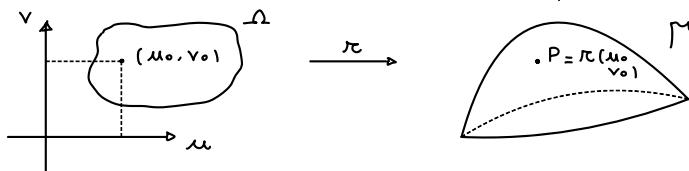
$$\Gamma = \{g(x, y, t) = 0\}$$

Supponiamo che esista una parametrizzazione regolare  $\pi(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ t(u, v) \end{pmatrix}$  con  $u, v \in \Omega$ ; voglio dimostrare che preso  $P(u_0, v_0) \in \Gamma$  allora:

$$\nabla g(u_0, v_0) \perp \Gamma = \{g(x, y, z) = 0\}, \text{ ovvero } \nabla g(P) \parallel n_P$$

## DIMOSTRAZIONE:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \pi(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), t(u_0, v_0))$$



$\pi(u, v)$  parametrizza  $\Gamma$ , ossia  $g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0 \quad \forall u, v \in \Omega$   
ma allora  $\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \quad \forall u, v$ , così come  $\frac{\partial g}{\partial v}$ , ossia:

$$\frac{\partial}{\partial u} g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \xrightarrow{\text{FUNZIONE COMPOSTA}} \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = \langle \nabla g(P), \pi_u \rangle$$

cio' significa che  $\frac{\partial}{\partial u} g(u_0, v_0) = \langle \nabla g(P), \pi_u(u_0, v_0) \rangle = 0$

allo stesso modo  $\frac{\partial}{\partial v} g(u_0, v_0) = \langle \nabla g(P), \pi_v(u_0, v_0) \rangle = 0$

e quindi  $\nabla g \perp \text{Span}(\pi_u(u_0, v_0), \pi_v(u_0, v_0))$  ovvero  $\nabla g(P) \perp \text{Piano tangente in } P$   
ovvero  $\nabla g(P) \parallel \pi_P$

### TEOREMA DEL DINI O DELLA FUNZIONE IMPLICITA IN $\mathbb{R}^2$

Sia  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$  e sia  $A = \{g(x, y) = 0\}$ , prendiamo  $(x_0, y_0) \in A$ , inoltre sia  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  allora:

- $\exists$  intorno  $I$  di  $x_0$  ed  $\exists ! f: I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g(x, f(x)) = 0$ , ovvero vicino a  $(x_0, y_0)$   $A$  e' il grafico di  $y = f(x)$
- $f$  e'  $C^1$  in  $I$

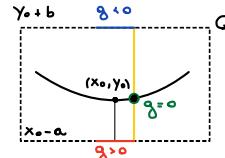
$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))} \quad \forall x \in I$$

#### DIMOSTRAZIONE

- Supponiamo  $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$  (sicuramente  $\neq 0$ , ma ipotizzando il segno). Se  $g \in C_1$  posso usare la permanenza del segno, ossia  $\exists Q = (x_0 - a, x_0 + a) \cdot (y_0 - b, y_0 + b)$ .

Cio' significa che  $g(\bar{x}, y)$  e' crescente, ossia fissato un  $\bar{x}$ , la  $y$  cresce. Inoltre:

$$g(x_0, y_0) = 0$$



$g(x_0, y_0 + b) > 0 \wedge g(x_0, y_0 - b) < 0$ , ma  $g$  e' continua per cui per permanenza del segno anche:

$$g(x_0 + a, y_0) > 0 \wedge g(x_0 - a, y_0) < 0$$

Ma se vado da un valore positivo a uno negativo (Th. degli zeri) allora  $\forall x \in I \exists$  almeno una  $y(x)$ :  $g(x, y(x)) = 0$ , ma  $\frac{\partial g}{\partial y} > 0 \Rightarrow \exists ! y(x)$ , chiamata  $f(x)$  che e' grafico della funzione.

#### NON SI DIMOSTRA

- $g(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$ , deriviamo rispetto a  $x$  (derivata composta)

$$\frac{d}{dx} g(x, f(x)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$$

ma cio' implica che  $f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))}$

#### FORMULAZIONE ALTERNATIVA

Sia  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$  e  $A = \{g(x, \bar{y}) = 0\}$  allora  $\exists (x_0, y_0) \in A$ :  $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$  allora:

- $\exists$  intorno  $I$  di  $y_0$  e  $\exists ! f: I \rightarrow \mathbb{R}$ :  $g(f(y), y_0) = 0$

•  $f$  e'  $C_1$  in  $I$

$$f'(y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(f(y), y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(f(y), y_0)} \quad \forall y \in I$$

### COROLLARIO (TH. DEL DINI)

Sia  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  e  $A = \{g(x,y) = 0\}$  e  $(x_0, y_0) \in A$  con  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$  allora:

- $A$  si parametrizza regolarmente vicino a  $(x_0, y_0)$

$\nabla g \perp A$

### DI MOSTRAZIONE

Sia  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ , suppongo  $g_x = 0$  allora  $\exists f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, f(x)) = 0$  parametrizza  $A$

$$\gamma(t) = (f'(t)) = (-\frac{1}{g_x}, \frac{1}{g_y})$$

$$\langle \dot{\gamma}; \nabla g \rangle = 0 \text{ infatti } \langle -\frac{1}{g_x}, \frac{1}{g_y} \rangle; \langle \frac{g_x}{g_y} \rangle = g_x - g_x = 0 \text{ (e' parametrizzazione regolare).}$$

ESEMPIO: Disegno di un grafico con curve di livello

$$z = x^2 - y^2$$

$$\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

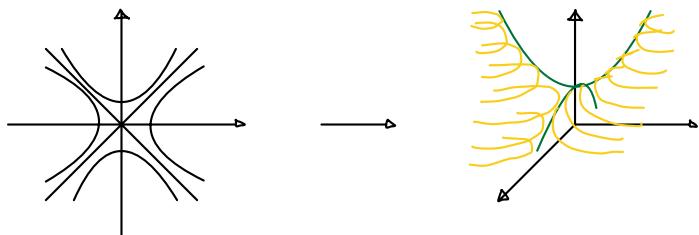
prendiamo ad esempio  $c = 0 \rightarrow x^2 - y^2 = 0$

$x = +y$   $x = -y$ , si hanno le bisetttrici

$c > 0$  si ha  $x^2 - y^2 = c$  che e' una

iperbole di semiassi  $\sqrt{c}$

$c < 0$  iperboli di semiassi  $\sqrt{|c|}$



ESEMPIO: TEOREMA DINI

Sia  $A = \{y + 2x + \sin x = 0\}$  dire se  $A$  e' localmente un grafico rispetto a  $y$

$$y = f(x) : f'(x) = -2 - \sin x, \text{ provo a usare il Th. del Dini}$$

$$g_x \neq 0 \text{ con } g = y + 2x + \sin x$$

$$g_x = 2 + \cos x \text{ non e' mai uguale a zero, quindi (Dini) } \forall \text{ punto } x \text{ si puo' scrivere } f(y) = x$$

ed e' grafico

### TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , sia il luogo di zeri  $\{g=0\}$  per cui se  $P_0$  e' punto critico per  $f$  su  $\{g=0\}$  e  $\nabla g \neq 0$  allora  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$$

con  $\lambda$  = moltiplicatore di Lagrange

Si possono trovare massimi e minimi senza parametrizzare

### DI MOSTRAZIONE

Se  $\nabla g \neq 0$  si puo' applicare il Th del Dini, ossia  $\exists$  parametrizzazione regolare e  $\nabla g(P_0) \perp \{g=0\}$ , supponiamo di essere in  $\mathbb{R}^2$ , allora  $\{g=0\}$  e' una curva con parametrizzazione  $\gamma(t)$  per  $t \rightarrow t_0$  si ha  $\gamma(t_0) = P_0$

Posto  $P_0$  punto critico si ha  $\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \langle \nabla f(\gamma(t_0); \dot{\gamma}(t_0)) \rangle = 0$  e per dini  $\nabla f(P_0) \perp \{g=0\}$  ma cio' vuol dire che:

$\nabla f(P_0) \parallel \nabla g(P_0) \rightarrow \text{FINE}$

In  $\mathbb{R}^3$  si ha  $\{g=0\}$  e' una superficie parametrizzata da  $R(u, v) = P_0$  ma  $P_0$  e' punto critico su  $f$  in  $\{g=0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f(R(u_0, v_0)) = 0 \rightarrow \nabla f(P_0) \perp \frac{\partial R}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f(R(u_0, v_0)) = 0 \rightarrow \nabla f(P_0) \perp \frac{\partial R}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$\text{Span} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$  e' il piano tangente in  $P_0(u_0, v_0)$  si ha quindi

che  $\nabla f \perp \{g=0\}$ , per dini  $\{g=0\} \perp \nabla g(P_0)$  e quindi  $\nabla f \parallel \nabla g$

### ESERCIZIO

$f(x, y) = xy$  e  $D = \{x^2 + ay^2 \leq 1\}$  calcolare max e min

1) Verifichiamo che esistono:  $f$  continua  $\rightarrow$  Weistrass  $\exists$  max e min

2) No punti singolari, quindi studio i punti critici:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ma dal segno vedo che non e' ne' max ne' min}$$

a) Moltiplicatori di Lagrange

$$\{x^2 + ay^2 - 1 = 0\} \text{ e' ellisse}$$

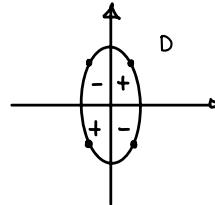
$$g(x, y) = x^2 + ay^2 - 1 \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2ay \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = xy \quad \nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2ay \end{pmatrix} \text{ e } g(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2ay \\ x^2 + ay^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \sqrt{2}/2 \\ y = \pm \sqrt{2}/a \end{cases}$$

$$\text{Dal segno notiamo } \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{a} \right) = \text{max} \text{ e } \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{a} \right) = \text{min}$$



### TEOREMA DEL DINI GENERALE

Siano  $g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, g_K(x_1, \dots, x_n)$  funzioni  $C^1$  in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq K$ , chiamiamo

$S = \{g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_K(x_1, \dots, x_n) = 0\}$  e prendiamo  $\bar{x}(x_1, \dots, x_n) \in S$  tale che:

$\nabla g_1(\bar{x}), \dots, \nabla g_K(\bar{x}) \neq 0$  e linearmente indipendenti, allora in un intorno di  $\bar{x}$  se è parametrizzato regolarmente e lo spazio tangente in  $\bar{x}$  a  $S$  chiamato:

$$T_{\bar{x}}S = \text{Span} (\nabla g_1(\bar{x}), \dots, \nabla g_K(\bar{x})) \text{ normale a } S \text{ con } \dim(T_{\bar{x}}S) = n - K$$

### ESEMPIO

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 5, x^2 + y^2 = 1\}$$

• Vedere se è regolare e trovare la retta tangente in  $(1, 0, 2)$

$$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 5 \quad g_2 = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla g_1(1, 0, 2) &= (2, 0, 4) \\ \nabla g_2(1, 0, 2) &= (2, 0, 0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Generano il piano} \\ x_2 \end{array} \right\}$$

$(0, 1, 0) \perp \nabla g_1$  e  $\nabla g_2$  è il piano tangente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x = 1 \quad z = 2 \text{ (retta tangente)}$$

• Sia  $f = xy + z$ , cercare max e min di  $f$  su  $S$ , uso Lagrange:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{array} \right.$$

Si ottengono i punti:

$$z = \pm 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}/2$$

$$y = \pm \sqrt{2}/2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda x + 2\mu z \\ y = 2\lambda y + 2\mu z \\ 1 = 2\mu^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{array} \right.$$

### PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Tra i parallelopipedi di area fissata, quale ha il volume massimo?

$$A = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$V = xyz$$

Fissiamo  $2A_0$  e cerchiamo  $\max(f)$

$$f = xyz$$

$$g = xy + yz + zx = A_0$$

$$\nabla f = (y^2, x^2, yx)$$

$$\nabla g = (y+2, x+2, x+y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 = \lambda(y+2) \\ x^2 = \lambda(x+2) \\ xy = \lambda(x+y) \\ xy + yz + zx = 0 \end{array} \right.$$

$x = y = z \rightarrow$  Parallelepipedo di  $V_{\max}$

▽ Altri esercizi su slide

# INTEGRALI

## INTEGRALI MULTIPLI SECONDO RIEMANN

Prendo un intervallo (per ora rettangolare) e lo quadretto:

$$Q = [a, b] \times [c, d]$$

prendiamo ora una partizione di  $[a, b]$  e  $[c, d]$

$$D_1: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$D_2: c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

ogni quadretto che compone  $Q$  sarà dato da

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Sia ora  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata, definiamo le somme superiori e inferiori:

### SOMME SUPERIORI

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{i,j} \cdot \delta x_i \delta y_j$$

con  $M_{i,j} = \sup(f)$  in  $Q_{i,j}$

$$\delta x_i = (x_i - x_{i-1})$$

$$\delta y_j = (y_j - y_{j-1})$$

### SOMME INFERIORI

$$s(f, D) = \sum_{i,j} m_{i,j} \cdot \delta x_i \delta y_j$$

con  $m_{i,j} = \inf(f)$  in  $Q_{i,j}$

$\bullet$   $f$  è integrabile su  $Q$  se:

$$\sup(s(D, f)) = \inf(S(D, f))$$

e si scrive come:

$$\iint_Q f \, dx \, dy$$

ESEMPIO: Funzione non integrabile (Dirichlet)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x, y \in Q \cap \mathbb{R} \cap [0, 1] \\ 0 & x, y \in Q \setminus \mathbb{R} \cap [0, 1] \end{cases}$$

## TEOREMA (FUNZIONI CONTINUE)

Sia  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $Q$ , allora  $f$  è integrabile su  $Q$

### COME INTEGRARE FUNZIONI NON A DOMINI RETTANGOLARI

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , prendiamo un quadrato  $Q$  che contiene  $\Omega$  e definisco:

$$1_\Omega = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q - \Omega \end{cases} = \tilde{f}(\text{indicatrice di } \Omega)$$

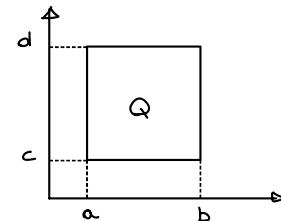
allora si ha che:  $f \cdot 1_\Omega$  è definito su  $Q$

### DEFINIZIONE

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \iint_Q f \cdot 1_\Omega \, dx \, dy$$

### OSSERVAZIONE

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy \text{ non dipende da come scelgo } Q$$



## MISURA DI PEANO (di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ )

Sia  $\Omega$  limitato in  $\mathbb{R}^2$  e misurabile ( $\Leftrightarrow 1_\Omega$  è integrabile) e la MISURA di  $\Omega$ :

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dx dy = \iint_Q 1_\Omega dx dy$$

La misura è in  $\mathbb{R}^2$  una superficie e in  $\mathbb{R}^3$  un volume

### OSSERVAZIONE

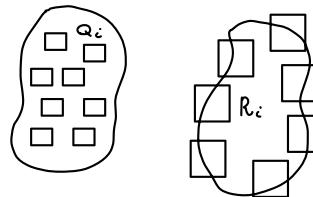
$A(Q) = (b-a)(d-c)$  con  $Q = [a,b] \times [c,d]$ , quando la misura di Peano estende la misura che già conosciamo

### DEFINIZIONE DIRETTA DI $A(\Omega)$

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un insieme suddiviso in quadretti e prendo l'unione dei quadrati  $Q_i$  contenuti in  $\Omega$  e un'unione  $R_i$  che ricopre totalmente  $\Omega$ , allora  $\Omega$  si dice MISURABILE se:

$$\inf(Q_i) = \sup(R_i) \text{ e}$$

$$A(\Omega) = \sup \sum A(Q_i) = \inf \sum A(R_i)$$



### INSIEME TRASCURABILI

$\Omega$  è trascurabile se  $A(\Omega) = 0$ , quindi se  $f$  è limitata su  $\Omega$  e  $\Omega$  trascurabile allora

$$\int_{\Omega} f = 0$$

### TEOREMA DEI TRASCURABILI

$\Omega$  limitato e misurabile se e solo se il bordo  $\partial\Omega$  è trascurabile

### LEMMA

Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora il grafico  $\{y = f(x)\}$  è trascurabile in  $\mathbb{R}^2$ .

### CONSEGUENZA

Se  $\partial\Omega$  è unione di grafici di funzioni continue allora è misurabile

### TEOREMA (INTEGRABILE)

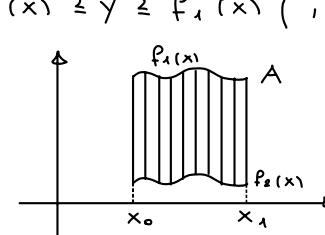
Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Omega$  limitato e misurabile. Se  $f$  è limitata e continua eccetto al più un insieme trascurabile di punti allora  $f$  è integrabile su  $\Omega$

### INSIEME SEMPLICE (O NORMALE)

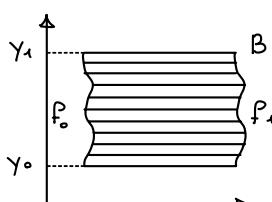
- Un insieme è semplice rispetto a  $y$  se  $A = \{x_0 \leq x \leq x_1; f_0(x) \leq y \leq f_1(x)\}$ , ossia le  $x$  sono comprese tra due valori e le  $y$  tra due funzioni.  
Più volgarmente si "affetta" bene su  $y$ .

### CONTROESEMPIO

Qualsiasi insieme in cui le linee si spezzano in 2 segmenti, come nella calamita



- Rispetto a  $x$  si ha l'opposto  $B = \{y_0 \leq y \leq y_1; f_0(y) \leq x \leq f_1(y)\}$



La misurabile  $\Leftrightarrow$  semplice rispetto a  $y$

### TEOREMA FUBINI - TONELLI

Sia  $A$  misurabile (semplice rispetto a  $y$ ) e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, allora l'integrale:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad \text{con } A = \{ x_0 \leq x \leq x_1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

(analogamente se semplice rispetto a  $x$ )

ESEMPIO:

Integriamo su  $D = \{ 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1 \}$  la funzione  $f = x^2 y + y^3$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 y + y^3) dx dy &= \int_{-2}^1 \left[ \int_0^2 (x^2 y + y^3) dx \right] dy \\ \int_{-2}^1 \left( \frac{x^3}{3} y + y^3 x \right) \Big|_0^2 dy &= \frac{8}{6} y^2 + \frac{1}{2} y^4 \Big|_{-2}^1 = \frac{8}{6} + \frac{1}{2} - \frac{32}{6} = -8 \end{aligned}$$

### PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI

- $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$
- Sia  $f \geq g$  in  $\Omega$  allora  $\int f \geq \int g$
- $|\int_f| \leq \int |f|$
- Sia  $f \geq 0$  e  $\Omega \geq \Omega'$  allora  $\int_f \geq \int_{\Omega'}$
- Siano  $\Omega_1, \Omega_2$  allora:

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$$

$$\bullet A(\Omega) = 0 \Rightarrow \int_f = 0$$

### TEOREMA (Funzione nulla)

- Sia  $\Omega$  limitato e misurabile,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata (quindi integrabile); se  $\Omega$  aperto,  $m(\Omega) > 0$ ,  $f \geq 0$ ,  $\int f = 0$  allora  $f \equiv 0$

#### DIMOSTRAZIONE

Supponiamo per assurdo  $P_0 \in \Omega$ :  $f(P_0) = \delta > 0$ , poiché  $\Omega$  aperto e  $f$  continua allora  $\exists B(P_0, r) \subset \Omega$ :  $f|_B \geq \delta/2$ , ma ciò significa:  
 $\int_B f = \frac{\delta}{2} A(B) = \frac{\delta}{2} \pi R^2 > 0$ , ma  $A(B) = 0$  (assurdo)

- Se  $\Omega$  è connesso allora vale il Th della media integrale:  $\exists P_0 \in \Omega$  tale che

$$\frac{1}{A(\Omega)} \int_\Omega f = f(P_0)$$

### TEOREMA (~ FONDAMENTALE DEL CALCOLO)

Sia  $f(x, y, t): \underline{\frac{D \subset \mathbb{R}^2}{x, y}} \times \underline{\frac{[a, b]}{t}} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D$  limitato e misurabile, allora:

- Se  $f$  continua in  $D \subset \mathbb{R}^2 \times [a, b]$ , allora  
 $\iint_D f(x, y, t) dx dy$  è continua in  $t \in [a, b]$
- Se  $\partial f / \partial t$  è continua in  $D \times [a, b]$  allora  $\forall t \in [a, b]$   
 $\frac{\partial}{\partial t} \iint_D f(x, y, t) dx dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) dx dy$

Esercizio: Baricentro del trapezio (media pesata delle coordinate) con ipotenusa  $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

$$B(T) = \frac{1}{A(T)} \cdot \left( \begin{array}{l} \iint_T x \, dx \, dy \\ \iint_T y \, dx \, dy \end{array} \right)$$

$$T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\}$$

$$\iint_{T_1} x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 x \, dy \, dx = \int_0^1 x [y]_0^1 \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\iint_{T_2} x \, dy \, dx = \int_1^3 \int_0^{3/2 - 1/2x} x \, dy \, dx = \int_1^3 x (3/2 - 1/2x) \, dx$$

$$= 6 - 13/3$$

$$m(T) = A_{\text{quad}} + A_{\text{triangolo}} = 2$$

$$\frac{1}{m(T)} \iint_T x \, dx \, dy = 13/12 \rightarrow x_B = 13/12$$

Ora integriamo la  $y$  (non conviene spezzarla)

$$\iint y \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_0^{3-2y} y \, dx \, dy \right) = \int_0^1 y (3-2y) \, dy = \left[ \frac{3}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = 5/12$$

$$\frac{1}{m(T)} \iint_T y \, dy \, dx = 5/12$$

$$B(T) = \begin{pmatrix} 13/12 \\ 5/12 \end{pmatrix}$$

### Cambi di variabile

Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e sia  $\phi: A \rightarrow B$  invertibile  $\Leftrightarrow$  iniettiva e surgettiva

### Teorema su invertibilità

Sia  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  aperto e  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Supponiamo che  $\exists P_0 \in A: \det(J\phi(P_0)) \neq 0$ , allora  $\phi$  è LOCALMENTE INVERTIBILE in  $P_0$ , ossia:

$\exists V \subseteq \mathbb{R}^n: P_0 \in V \subseteq A$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\phi: V \rightarrow B$  è invertibile, inoltre sia  $\phi^{-1}: B \rightarrow V$ ,  $\phi^{-1} \in C^1$  e  $J\phi^{-1}(P(x)) = [J\phi(x)]^{-1} \forall x \in V$  E' un Th Dini in forma vettoriale

### Diffeomorfismo locale

$\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è diffeomorfismo se sia  $\phi$  che  $\phi^{-1}$  sono  $C^1$  localmente

### Diffeomorfismo globale

Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\phi \in C^1$  in  $A, B$ :

- $\phi$  è bionivoca

- $J\phi \neq 0 \forall x \in A$

allora  $\phi$  è un buon cambio di variabile ed è invertibile globalmente.

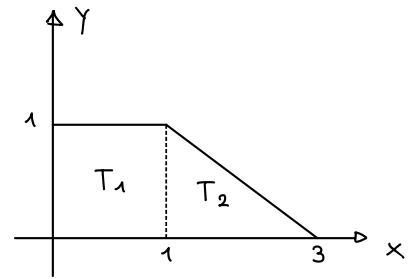
### ESEMPIO

$$\phi: (\mu, \nu) \rightarrow (x, y)$$

$$\phi(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \mu + \nu \\ \mu - \nu \end{pmatrix}$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |J\phi| = 2 \neq 0$$

$\phi$  è buon cambio

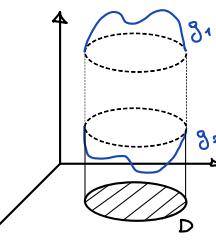


Se una funzione ha valori per cui  $\Im \phi = 0$  allora posso scrivere  $\phi : \mathbb{R}^2 - \{\text{valore che annulla}\}$  e renderla invertibile localmente.

### INTEGRAZIONE PER FILI (IN $\mathbb{R}^3$ )

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  limitato e misurabile con:  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$  con  $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  continue e  $D$  limitato e misurabile.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[ \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

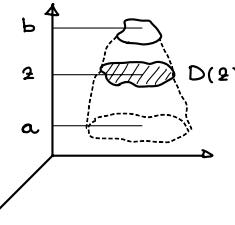


Si puo' ovviamente scambiare i ruoli di  $x, y, z$

### INTEGRAZIONE PER STRATI

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  limitato e misurabile con  $\Omega = \{a \leq z \leq b \text{ e } (x, y) \in D(z)\}$  con  $D$  limitato e misurabile  $\forall z \in [a, b]$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \iint_D f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

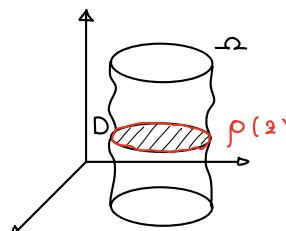


### FORMULE PAPPO - GULDINO (Volume di solidi di rotazione)

Prendiamo un solido di rotazione,  $D(z)$  sara' un cerchio mentre  $\Omega = \{a \leq z \leq b, 0 \leq x^2 + y^2 \leq p^2(z)\}$ , il suo volume e' dato da:

$$V = \int_a^b \left( \iint_D 1 dx dy \right) dz = \int_a^b \pi p^2(z) dz$$

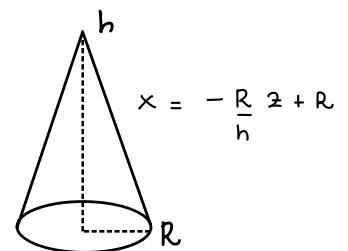
$$V = \pi \int_a^b p^2(z) dz$$



### ESEMPIO: Volume del cono

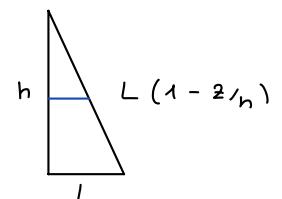
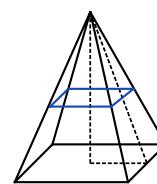
$$\begin{aligned} V_C &= \pi \int_0^h \left[ -\frac{R}{h} z + R \right]^2 dz = \pi \int_0^h \left[ \frac{R^2}{h^2} z^2 + R^2 - 2 \frac{R}{h} z^2 \right] dz \\ &= \pi R^2 \left| \frac{z^3}{3h^2} - \frac{z^2}{h} + z \right|_0^h = \pi R^2 \left( \frac{h^3}{3} - h + h \right) \end{aligned}$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



### ESERCIZIO: Volume della piramide a base quadrata

$$\begin{aligned} x &= L - \frac{L}{h} z \\ V &= \int_0^h \left[ \iint_A 1 dx dy \right] dz = \int_0^h \left[ 2L \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \right]^2 dz \\ &= 4L^2 \left[ z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h = 4L^2 (h - h + h^3/3h^2) \\ &= \frac{4}{3} L^2 h \end{aligned}$$



I solidi in cui tutti i punti del perimetro dell'area di base vanno in un vertice, il volume e'

$$V = A_{\text{base}} \cdot h \cdot \frac{1}{3}$$

## FORMULA DEL CAMBIO DI VARIABILE

Sia  $\phi : \Omega \rightarrow T$  un buon cambio di variabile (biunivoca e  $|\mathcal{J}\phi| \neq 0$ ), allora l'integrale:

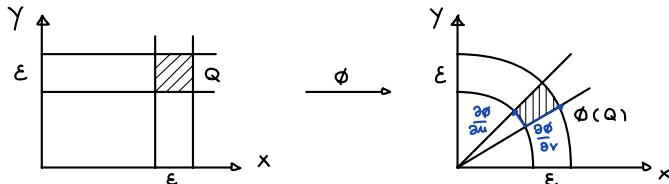
$$\int_{\phi(\Omega)} f(x,y) dx dy = \int_{\Omega} f(u,v) \cdot |\det \mathcal{J}\phi| du dv$$

### IDEA DI DEMOSTRAZIONE

Prendiamo il Jacobiano

$$\mathcal{J}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

consideriamo ad esempio le coordinate polari:



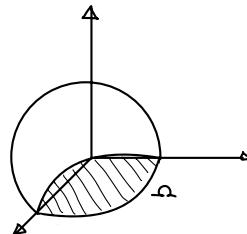
Area di  $\phi(Q) \approx \det(\mathcal{J}\phi) \cdot \text{Area}(Q)$  se  $\epsilon \ll 1$

- ▽ In pratica si approssimano le linee curve ai vettori tangentili  $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$

### ESERCIZIO

Calcola il volume di  $D = \{(x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0)\}$  e' metà di una sfera di  $R=1$ , integrando per fili.

$$\begin{aligned} D &= \left\{ x^2 + y^2 \leq 1 ; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\} \\ V &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 2\pi \left[ -\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \frac{4}{3} \end{aligned}$$



### OSSERVAZIONE

Se  $f$  e' dispari rispetto alle  $x$  (simmetrica rispetto alle asse  $x$ ) e  $\Omega$  simmetrico rispetto a  $y$ , allora:

$$\iint_{\Omega} f dx dy = 0$$

### DIMOSTRAZIONE

$$\Omega^+ = \{(x,y) \in \Omega, x \geq 0\}$$

$$\Omega^- = \{(x,y) \in \Omega, x \leq 0\}$$

con un cambio di variabile si ha:

$$\phi : \begin{matrix} \Omega^- & \longrightarrow & \Omega^+ \\ (u,v) & & (-u,v) \end{matrix}$$

$$|\mathcal{J}\phi| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$-\iint_{\Omega^-} f(u,v) du dv = - \iint_{\Omega^+} f(x,y) dx dy$$

ma  $f$  e' dispari e sono uguali:

$$\iint_{\Omega^+} f dx dy = \iint_{\Omega^-} f dx dy = 0$$

## INTEGRALI IMPROPRI

ESEMPIO:

$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  e' integrabile su  $\mathbb{R}^2$ ?

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{K \rightarrow +\infty} \iint_{A_K} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

con  $A_K = [-K, K]^2$  ossia un quadrato infinito; calcolo:

$$\iint_{A_K} \sin(x^2 + y^2) dx dy \Rightarrow \text{Somma: } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\begin{aligned} & \iint_{A_K} \sin x^2 \cos(y^2) dx dy + \iint_{A_K} \cos(x^2) \sin(y^2) dx dy \\ & \left| \begin{array}{l} \int_{-K}^K \sin x^2 dx + \int_{-K}^K \cos y^2 dy \\ \downarrow K \rightarrow +\infty \quad \downarrow \\ \sqrt{\pi/2} \quad \sqrt{\pi/2} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \int_{-K}^K \cos x^2 dx \quad \int_{-K}^K \sin y^2 dy \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \sqrt{\pi/2} \quad \sqrt{\pi/2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Quindi: } \lim_{K \rightarrow +\infty} \iint_{A_K} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi$$

Si puo' concludere? Proviamo a integrare su un disco e non su un quadrato:

$$\begin{aligned} B_K &= \{x^2 + y^2 \leq \pi K\} \\ \iint_{B_K} \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\pi K}} \rho \sin \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \left[ -\pi \cos \rho^2 \right]_0^{\sqrt{\pi K}} = \pi (1 - \sqrt{\pi K}) = \pi (1 - (-1)^K) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \text{non } \lim_{K \rightarrow +\infty} \iint_{B_K} \text{ per cui si ha un problema.}$$

OSSERVAZIONE Ciò è dovuto al fatto che  $\sin(x^2 + y^2)$  cambia segno; a seconda di  $A_K$  o  $B_K$  mettiamo dentro piu' meno zone dove  $\sin(x^2 + y^2)$  è negativa.

## METODO LEBEGUE

Cerco un'altra definizione di integrale (coincidente con Riemann nei casi semplici) che sia più "stabile" nel passaggio all'improprio.

Non definisco a partire dagli intervalli, ma da insiemi misurabili (ossia non solo dai rettangoli ma da forme generiche).

## METODO REIMANN

Restringo la classe di funzioni per cui definisco l'improprio a quelle assolutamente integrabili.

## INVASIONE

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora si dice che  $\{A_k\}_K$  invada  $A$  quando:

- $A_k \subset A_{k+1} \subset A_{k+2} \subset \dots$
- $A_k$  e' compatto e misurabile
- $\bigcup_K \text{int}(A_k) = \text{int}(A) \longrightarrow$  Parte interna

ESEMPIO:  $A_k$  e  $B_k$  della lezione passata invadevano  $\mathbb{R}^2$

## ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  misurabile e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile nei compatti contenuti in  $A$ .

Allora  $f$  e' assolutamente integrabile se  $\lim_{K \rightarrow +\infty} \iint_A |f| dx dy \exists$  ed e' finito per  $A_k$  che invada. In tal caso si dice che:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{K \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} f(x,y) dx dy$$

## TEOREMA

Sia  $f$  assolutamente integrabile su  $A$ , allora  $\iint_A f$  non dipende dalla scelta di  $A_k$

Osservazione:

L'integrale improprio di Riemann e' definito solo sulle  $f$  assolutamente integrabili. Inoltre, ovviamente, se  $f$  e' integrabile su  $A \iff f$  e' assolutamente integrabile su  $A$ .

Esercizio:

$$f = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \text{ e' assol. int. su } \mathbb{R}^2?$$

prendo  $A_k$ , cerchi di raggio  $K$ :  $A = \{x^2 + y^2 \leq K^2\}$

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} f(x,y) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^K \frac{1}{1 + \rho^2} \rho d\theta d\rho \\ &= 2\pi \int_0^K \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho \end{aligned}$$

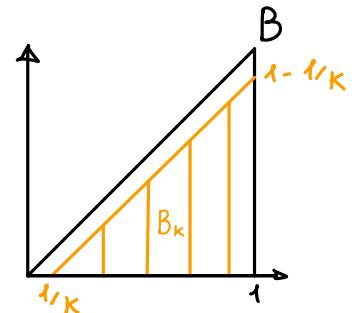
$$= \pi \ln(1+\rho^2) \Big|_0^K = \pi \log(1+K^2)$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \pi \log(1+K^2) = +\infty \quad (\text{f non e' integrabile in senso improprio su } \mathbb{R}^2)$$

Esercizio:

$B = \{0 \leq y \leq x \leq 1\}$ , voglio integrare su  $B$ :

$$f = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \quad (\text{h.b. non e' limitato in } B)$$



Cerco qualche  $B_K$  che posso invadere, ad esempio:

$$B_K = \left\{ 0 \leq y \leq x - \frac{1}{K} \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{K} \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 + \frac{1}{K} \right\}$$

$$\iint_{B_K} f \, dx \, dy = \int_{1/K}^1 \int_0^{x - 1/K} \frac{1}{\sqrt{x-y}} \, dy \, dx = \int_{1/K}^1 (-2\sqrt{x-y}) \Big|_0^{1+1/K} \, dx$$

$$= 2 \int_{1/K}^1 \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{K}} \, dx = \left[ \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{2x}{\sqrt{K}} \right]_{1/K}^1$$

$$= \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{K^{3/2}} \right) - \frac{2}{\sqrt{K}} \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \quad (\text{integrabile})$$

Esercizio:

Per quali valori positivi di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2 - B(0,1)} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \, dx \, dy$  e' integrabile?

$$B_K = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq K^2\}$$

$$\iint_{B_K} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \, dx \, dy \xrightarrow{\text{POLARI}} \int_0^{2\pi} \int_1^K \frac{\rho}{\rho^\alpha} \, d\rho = \int_0^{2\pi} \int_1^K \frac{1}{\rho^{\alpha-1}} \, d\rho$$

Si vede subito che l'integrale e' finito se  $\alpha - 1 > 1 \implies \alpha > 2$

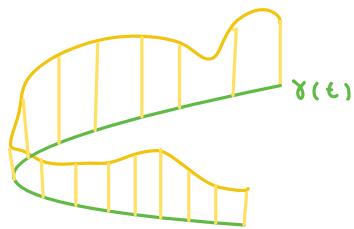
## ESERCIZI: (SOLUZIONI ORA 51)

- 1) Dire se e' integrabile  $f(x,y,z) = \frac{1}{z^3(x^2+y^2)^2}$  su  $|x^2+y^2+z^2| \geq 1$
- 2)  $\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \left(\frac{y}{x^2}\right)^{\alpha} dx dy$  per quali  $\alpha$  e' integrabile?
- 3) Trovare il baricentro della spirale ( $\rho = \theta$ )

## INTEGRALI DI LINEA

Risolvono problemi del tipo:

1. Trovare la lunghezza di  $\gamma(t) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
2. Dato  $f(\gamma(t))$ , calcolare l'area sottesa dal grafico di  $f$ , ovvero l'integrale di linea



In realtà questo caso è semplice, perché se so fare l'integrale di una funzione generica, allora definisco  $L(\gamma) = \int_{\gamma} 1$

### IDEA GENERALE

Approssimo  $\gamma$  con una linea spezzata che collega un certo n° di punti  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots$



### DEFINIZIONE (RETTIFICABILE)

Sia  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  partizione di  $[a,b]$  e sia  $\gamma(t) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua; inoltre chiamo

$\lambda(P) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ .

$\gamma$  si dice RETTIFICABILE se  $\text{Sup}(\lambda(P)) < +\infty$  e in tal caso  $\lambda(\gamma) = \sup(\lambda(P))$

### TEOREMA

Se  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è parametrizzabile regolarmente, allora:

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

## IDEA DI DIMOSTRAZIONE

La lunghezza di  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$  assomiglia a  $\dot{\gamma}$  quando  $|t_i - t_{i-1}| \ll 1$ , ossia, se spezzo la linea sempre di più, mi avvicino al vettore tangente.

$$\lim_{|t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \dot{\gamma}$$

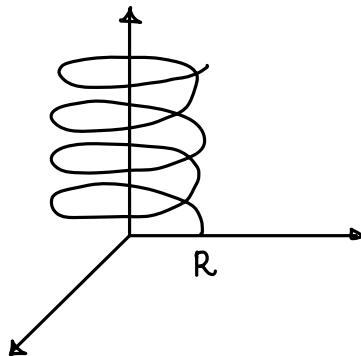
$$\int_a^b |\dot{\gamma}| dt \approx \sum_i \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \\ = \sum_i |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \text{ quando la partizione è molto fitta}$$

**ESERCIZIO:** Lunghezza della spirale; sia  $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{R^2 + 1}$$



$$l(\gamma) = \int_0^T |\dot{\gamma}| dt = T \sqrt{R^2 + 1}$$

## PROPRIETA'

$l(\gamma)$  non dipende dalla parametrizzazione scelta.

## DIMOSTRAZIONE

Sia la curva  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow$   , se prendo una altra parametrizzazione e' come se facesse un cambio di variabile:

$$[s_0, s_1] \xrightarrow{t(s)} [t_0, t_1] \xrightarrow{\gamma(t)} \text{curve from } P_0 \text{ to } P_1$$

✓  $\frac{dt}{ds} \neq 0$  senno' non è regolare

Calcoliamo la lunghezza di  $\gamma$ :

$$l(\gamma(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt$$

Supponiamo:

$$\begin{aligned} dt/ds > 0 \text{ allora } l(\gamma(t(s))) &= \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\gamma}{ds} \right| ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| ds = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \frac{dt}{ds} ds \\ &\xrightarrow[\text{Cambio}]{\text{di variab.}} \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt \text{ (fine)} \end{aligned}$$

### ESEMPIO:

$$\gamma(t) = \left( \begin{array}{c} \sin^2 t \\ \cos^2 t \end{array} \right) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(t) = \left( \begin{array}{c} \sin^2 t \\ 1 - \sin^2 t \end{array} \right) \text{ cambio variable } s = \sin^2(t)$$

$$\gamma(s) = \left( \begin{array}{c} s \\ 1 - s \end{array} \right) \text{ con } s \in [0, 1]$$

$$\dot{\gamma} = \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right) \longrightarrow |\dot{\gamma}| = \sqrt{2}$$

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{2} ds = \sqrt{2}$$

### DEFINIZIONE

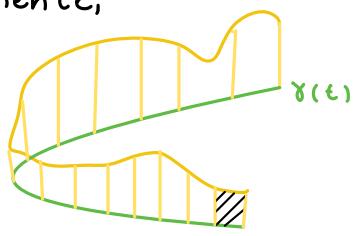
Se ho la lunghezza, ripeto il ragionamento dell'integrale di Riemann

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizzabile regolarmente,

allora, presa  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, allora:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt$$

ELEMENTO DI LUNGHEZZA



## OSSERVAZIONI:

$$1. \ell(\gamma) = \int_{\gamma} 1 ds$$

2.  $\int_{\gamma} f ds$  non dipende dalla parametrizzazione (perché la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione)

## ESEMPIO

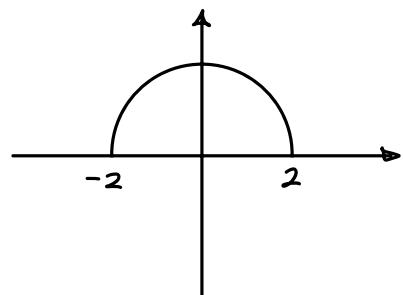
$$\int_{\gamma} x^2 y ds \text{ con } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \mid t \in [0, \pi]$$

$$|\gamma| = 2$$

$$\int_{\gamma} x^2 y ds = \int_0^{\pi} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2 dt$$

$$= 16 \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = -16 \left| \frac{\cos^3 t}{3} \right|_0^{\pi}$$

$$= 32/3$$



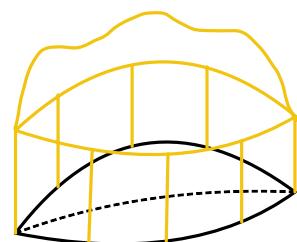
## INTEGRALI DI SUPERFICIE

Risolvono problemi del tipo:

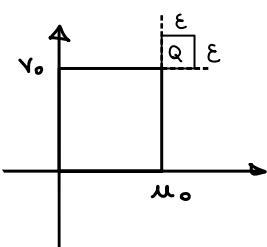
1. Data una superficie parametrizzata regolarmente, trovare l'area di  $S$

2. Sia  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , trovare  $\int_S f d\sigma$

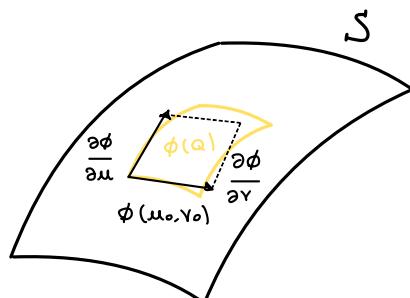
⚠ La partizione avrà per elementi  $d\sigma$  di cui sole misure.



## OSSERVAZIONE



$\phi$



Il rettangolo formato da  $\varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(\mu_0, v_0)$  e  $\varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(\mu_0, v_0)$   
 e' una buona approssimazione di  $\phi(Q)$ . L'area del rettangolo e'  
 $\varepsilon^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial u}(\mu_0, v_0) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(\mu_0, v_0) \right|$

Da qui si giustifica l'idea che l'elemento di superficie sia:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|$$

### DEFINIZIONE

- $A(S) = \iint_T |\phi_u \times \phi_v| dudv$  con  $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare
- $\iint_T f d\sigma = \iint_T f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\phi_u \wedge \phi_v| dudv$

⚠  $A(S) = \iint_S 1 d\sigma$

### PROPRIETA'

L'area non dipende dalla parametrizzazione

## AREA DEL GRAFICO

Cerchiamo di capire come calcolare aree. Sia un dominio  $T$ , sappiamo che è un grafico se  $S = \{ t = f(x, y) \forall x, y \in T \}$   
Parametrizziamo  $S$  in  $u, v$ :

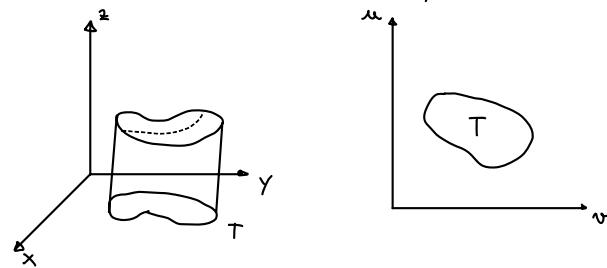
$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\phi_u = (1, 0, f_u)$$

$$\phi_v = (0, 1, f_v)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

$$|\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \neq 0 \text{ per cui } \phi \text{ è regolare}$$



$$A(S) = \iint_S 1 d\phi = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

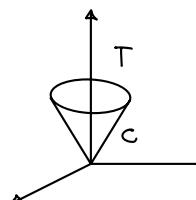
ESEMPIO: AREA DEL CONO

$$G = \left\{ x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

$$\nabla f = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

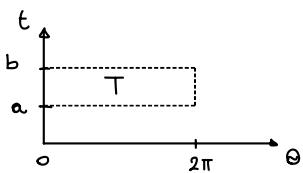
$$A(G) = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 1} dx dy = \pi \sqrt{2}$$



## AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

Sia una curva  $\gamma(t)$  sul piano  $xz$  e si fa ruotare. Grafichiamo i due parametri.

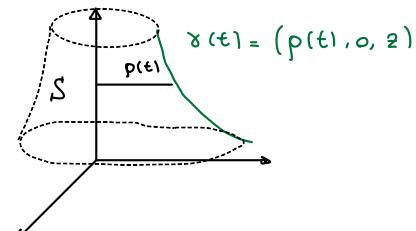


$$\phi(t, \theta) = \begin{cases} p(t) \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ p(t) \sin \theta & t \in [a, b] \\ z(t) \end{cases}$$

$$\phi_\theta = (-p(t) \sin \theta, p(t) \cos \theta, 0)$$

$$\phi_t = (p'(t) \cos \theta, p'(t) \sin \theta, z'(t))$$

$$\phi_\theta \times \phi_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & 0 \\ p' \cos \theta & p' \sin \theta & z' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2' p \cos \theta \\ 2' p \sin \theta \\ -pp' \end{pmatrix}$$



$$|\phi_\theta \times \phi_t| = \sqrt{(2')^2 p^2 \cos^2 \theta + (2')^2 p^2 \sin^2 \theta + p^2 p'^2}$$

$$= \sqrt{2'^2 p^2 + p'^2 p^2} = p \sqrt{(2')^2 + (p')^2} = p |\dot{\gamma}| \quad \text{è regolare se } p > 0 \text{ e } \gamma \text{ param. regolarm.}$$

modulo del  
vettore che genera la curva

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_S 1 \, d\sigma = \iint_T p(t) |\dot{\gamma}(t)| \, d\theta \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b p(t) |\dot{\gamma}(t)| \, dt = 2\pi \int_a^b p(t) |\dot{\gamma}(t)| \, dt \quad \leftarrow \text{Integrale di linea} \\
 &= 2\pi \int_{\gamma} p \, ds
 \end{aligned}$$

### ESERCIZI

a) Area del toro (cerca immagine su internet)

## Esercizi su integrali curvilinei

$$\iint_S x^3 e^x d\sigma$$

$$S = \left\{ 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq z, x \geq 0 \right\}$$

$$T = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq t \leq h \right\}$$

$$\phi: T \longrightarrow S' \quad \phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ t \end{pmatrix}$$

$$\phi_t = (0, 0, 1) \quad \phi_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$$

$$\phi_t \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-R \cos \theta, -R \sin \theta, 0)$$

$$|\phi_t \times \phi_\theta| = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta} = R$$

$$\begin{aligned} \iint_S x^3 e^x d\sigma &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^h R^3 \cos^3 \theta e^t R dt d\theta \\ &= R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \int_0^h e^t dt = R^4 (e^h - 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= R^4 (e^h - 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= R^4 (e^h - 1) [ \sin \theta ]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^4 (e^h - 1) (2 - 2/3) = \frac{4}{3} R^4 (e^h - 1) \end{aligned}$$

### Osservazione

Gli integrali superficiali sono un'estensione di quelli doppi, ossia se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie che in realtà sta solo sul piano  $x, y$  (ossia è piano), allora

$$\iint_{\Omega} f d\sigma = \iint_{\Omega} f dx dy \quad \forall f$$

Come si parametrizza?

$$\phi: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sia } f: \Omega \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$$

$$\phi_u = (x_u, y_u, 0)$$

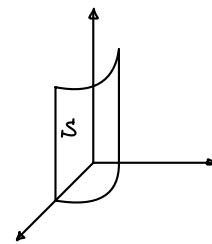
$$\phi_v = (x_v, y_v, 0)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ x_u y_u \\ x_v y_v \end{pmatrix} \quad |\phi_u \times \phi_v| = \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\Omega} f d\sigma = \iint_T f(u, v) \cdot \det \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv$$

$\phi$  è un cambio di variabile tra  $T$  e  $\Omega$ , allora  $\iint_{\Omega} f dx dy = \iint_T f(u, v) |J_{\phi}| du dv$

$$\text{ma } |J_{\phi}| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right| \Rightarrow \iint_{\Omega} f d\sigma = \iint_{\Omega} f dx dy$$



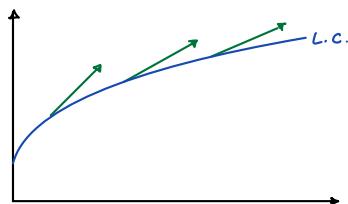
## CAMPPI VETTORIALI, LAVORO E FLUSSI

### CAMPO VETTORIALE:

E' un oggetto del tipo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ossia una funzione che ad ogni punto di  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  associa un altro punto di  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

### LINEA DI CAMPO:

Curva regolare tang. in ogni suo punto ai vettori del campo



### LAVORO

Il lavoro di un campo vettoriale lungo una curva  $\gamma = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  regolare con  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sia  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

$$L(\gamma) = \int_a^b F_1(\gamma(t)) \cdot \dot{x}_1 + F_2(\gamma(t)) \cdot \dot{y}_2 + F_3(\gamma(t)) \cdot \dot{z}_3 dt$$

$$L(\gamma) = \int_a^b F_1(\gamma(t)) \dot{x} + F_2(\gamma(t)) \dot{y} + F_3(\gamma(t)) \dot{z} dt$$

Se  $\underline{\gamma(a) = \gamma(b)}$  e  $\gamma$  semplice, allora il lavoro si indica con la circuazione:

### CIRCUITAZIONE

$$L(\gamma) = \oint F ds$$

### OSSERVAZIONE:

Il lavoro dipende dal verso di parametrizzazione di  $\gamma$  (a differenza dell'integrale di linea), ma non da parametrizzazioni che non cambiano il verso di percorrenza.

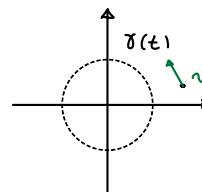
### ESEMPIO:

$$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v = (-y, x)$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{\cos t} \right) \cdot \left( -\frac{\sin t}{\cos t} \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi$$



### CAMPO CONSERVATIVO

Sia  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^1$  e conservativo su  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  se  $\exists \ U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2(\Omega)$ :  $F = \nabla U$   
ossia se:

$$F_x = \frac{du}{dx}, \quad F_y = \frac{du}{dy}, \quad F_z = \frac{du}{dz}$$

$U$  si dice POTENZIALE di  $F$  in  $\Omega$

• Essere conservativo dipende da  $\Omega$

ESEMPIO: Campo Gravitazionale

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$F : \mathbb{R}^3 - \{0,0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

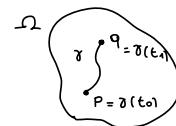
$$F = -\frac{k}{p^3} (x, y, z) \text{ ovvero } F = \left( \frac{-mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

$U = \frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$  e' un potenziale per  $F$  (ovvero  $F = \nabla U$ ) e quindi  $F$  e' campo conservativo.

### LEMMA (Campi conservativi)

Se  $F = \nabla U$ , ossia  $F$  è conservativo in  $\Omega$  e sia  $\gamma(t) \subset \Omega$  una curva regolare con  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ , allora il lavoro:

$$\int_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{s} = U(\gamma(t_1)) - U(\gamma(t_0)) = U(q) - U(p)$$



### DIMOSTRAZIONE

$$F = \nabla U \Rightarrow \int_{\gamma} F ds = \int_{t_0}^{t_1} \nabla U(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} U(\gamma(t)) dt = U(\gamma(t_1)) - U(\gamma(t_0))$$

### TEOREMA CAMPI CONSERVATIVI

Sia  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$   $C^1$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

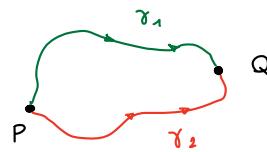
- $\forall \gamma_1, \gamma_2$  regolari in  $\Omega$  con:

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = P$$

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1) = Q$$

allora :

$$\int_{\gamma_1} F ds = \int_{\gamma_2} F ds$$



- $\forall \gamma$  chiusa, regolare in  $\Omega$  si ha  $\int_{\gamma} F ds = 0$

- $F$  è conservativa in  $\Omega$

### DIMOSTRAZIONE

③  $\Rightarrow$  ④ dal lemma precedente

④  $\Rightarrow$  ③ Immediato e banale

②  $\Rightarrow$  ③ (Lo diamo per buono)

## OPERATORI DIFFERENZIALI

### ROTATORI

Sia  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo  $C^1$ , si definisce il rotore di  $F$  come:

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{array} \right)$$

⚠ Rotore nullo se  $\frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$ ;  $\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}$ ;  $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$

### DIVERGENZA

Sia  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo  $C^1$ , si definisce divergenza di  $F$  come:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

### OSSERVAZIONE

La divergenza si esprime anche in  $\mathbb{R}^2$ , mentre per esprimere il rotore scrivo un vettore di  $\mathbb{R}^2$  come  $(F_1, F_2, 0)$  per cui il rotore è:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

## ESEMPIO

Sia  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(x_1, e^x y, x y z)$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} x^2 \\ x - yz \\ e^x y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(F) = 2 + e^x + xy$$

## OSSERVAZIONE

- Sia  $u \in C^2(\Omega) \Rightarrow \nabla \times (\nabla u) = 0$
- Sia  $F$  campo  $C^2 \Rightarrow \operatorname{div}(\nabla \times F) = 0$

## DIMOSTRAZIONE

- $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$

$$\operatorname{rot}(\nabla u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z u - \partial_z \partial_y u \\ \partial_z \partial_x u - \partial_x \partial_z u \\ \partial_x \partial_y u - \partial_y \partial_x u \end{pmatrix} \stackrel{\text{Th. Schwartz}}{=} 0$$

- $\nabla \times u = \left( \text{Guarda a casa} \right)$

## CAMPPI IRROTATIZIONALI

Sia  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo  $C^1$  e' irrotazionale se  $\nabla \times F = 0$

### TEOREMA

Sia  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  e' conservativo su  $\Omega \Rightarrow F$  e' irrotazionale su  $\Omega$  (il contrario non vale sempre)

### DIMOSTRAZIONE

$F$  conservativo su  $\Omega \Rightarrow \exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \nabla U = F$  con  $U \in C^2$

Allora  $\nabla \times F = \nabla \times (\nabla U) = 0$

### ESEMPIO (campo irrotazionale ma non conservativo)

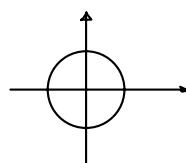
Sia  $F = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right): \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_x = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = y \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x \rightarrow \text{Irrotazionale}$$

Facciamo la circuitazione per vedere se e' conservativo (Scelgo la curva circonferenza)  $\gamma = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \text{ no conservativo} \end{aligned}$$



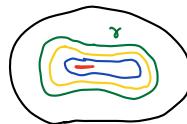
## DEFINIZIONI DI SPAZI CONNESSI

Sia  $\Omega$  aperto si dice **connesso** se e' "fatto di un pezzo solo", ossia unione di chiusi con  $n \neq 0$ , inoltre si dice **connessa per archi** se dati 2 punti a piacere  $\exists \gamma$  continua  $\subset \Omega$  che li congiunge (Th. non dimostrato: C. archi  $\Rightarrow$  connesso)

### SEMPLICEMENTE CONNESSO

- E' connesso (ossia un pezzo solo)
- Ogni curva chiusa contenuta in  $\Omega$  puo' essere **retratta** (deformata con continuita') ad un solo punto senza uscire da  $\Omega$

Retrazione di una curva  $\gamma$   $\rightarrow$



- ▼ Uno spazio non semplicemente connesso e'  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , se provo a retrarre una circonferenza si "impiglia" nell'origine

ESEMPIO:  $\mathbb{R}^3 - \{0,0,0\}$  e' semplicemente connesso,  $\mathbb{R}^3 - \{\text{Retta}\}$  non e' semplicemente connesso

### TEOREMA

$\Omega$  e' **stellato** (ossia  $\exists x_0 \in \Omega$ , ogni punto e' connesso a  $x_0$  con un segmento)  $\Rightarrow$  Semplicemente connesso

$\Omega$  e' rettangolare  $\Rightarrow$  s.connn.



### TEOREMA

Sia  $F \in C^1(\Omega)$  e  $\text{rot}(F) = 0$  con  $\Omega$  s.connesso, allora  $F$  e' conservativo su  $\Omega$

## Esercizi sul potenziale e lavoro

① Sia  $F \in C'(\mathbb{R}^3)$  e conservativo in  $\mathbb{R}^3$ ?

$$F \begin{pmatrix} \cos(x+y) + 2 \\ \cos(x+y) \\ x \end{pmatrix}$$

1)  $\nabla \times F = 0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin(x+y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Il rotore è nullo, quindi può essere conservativo.

2)  $\mathbb{R}^3$  è semplicemente connesso  $\Rightarrow F$  è conservativo su  $\mathbb{R}^3$ , ossia  $\exists U : \nabla U = F$ , cerchiamo la funzione potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \cos(x+y) + 2 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \cos(x+y) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x \end{cases}$$

•  $dU = x dz = xz + c \rightarrow C$  è una costante rispetto a  $z$ , quindi una  $f(x, y)$

•  $\frac{\partial U}{\partial y} = \cos(x+y)$

$$\frac{d(xz + c)}{dy} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \cos(x+y)$$

$$C(x, y) = \int \cos(x+y) dy = \underbrace{\sin(x+y)}_{\text{Non dipende da } z} + K(x)$$

$$C(x, y) = \sin(x+y) + K$$

•  $\frac{\partial U}{\partial x} = \cos(x+y) + 2$

$$\frac{d}{dx}(xz + \sin(x+y) + K(x)) = \cos(x+y) + 2$$

$$\cancel{x} + \cos(x+y) + \frac{d}{dx} K(x) = \cos(x+y) + \cancel{x}$$

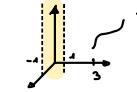
$$\frac{d}{dx}(K) = 0 \rightarrow K \text{ è una costante numerica}$$

$$U(x, y, z) = \sin(x+y) + xz + K$$

②  $F = \left( \frac{xz}{x^2-1} ; \frac{1}{2} \sin y ; \frac{1}{2} \log(x^2-1) \right)$

$$F : \mathbb{R}^3 - \{-1 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Sia  $\gamma(t) = \left( \frac{1}{3}t^3 + 3, 2t^2, 2t \right)$  con  $t \in [0, 1]$ , calcolare il lavoro sulla curva... ma ha senso? Sì, perché  $\gamma_1$  è  $3 + \frac{t^3}{3} > 3$ .



$$\int_{\gamma} F ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

L'integrale sarebbe molto lungo da svolgere, cerco una via alternativa.

Guardo se  $F$  è conservativo,  $\mathbb{R}^3 - \{x < 0\}$  è semplicemente connesso dove lavoro io  $\rightarrow$  (andrebbero fatte le derivate) è conservativo ( $\exists U: \nabla U = F$  e  $\int_{\gamma} F \cdot dS = \Delta U$ )

$$\nabla U = F$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$$

$$U = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C(x, y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{\frac{2}{x}} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot \cancel{dx} + \frac{dC}{dx} = \cancel{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = 0$$

$C$  = costante rispetto a  $x$

$$U = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dC}{dy} = -\frac{1}{2} \cos(y) + K$$

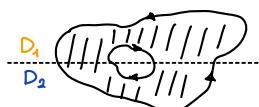
$$U = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \cos(y) + K$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dS = \Delta U = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U\left(\frac{1}{3} + 3, 2, 2\right) - U(3, 0, 0) = \ln\left(\frac{40}{9}\right) - \frac{1}{2} \cos(2) + \frac{1}{2}$$

### TEOREMA DI GAUSS - GREEN (RISTRETTO)

Sia  $D$  un insieme connesso, chiuso, limitato con bordo regolare e sia  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  irrotazionale, allora:

$$\int_{\partial D^+} F \cdot dS = 0$$



$\nabla \circ \partial D^+ =$  Bordo orientato positivamente (segue la regola della mano destra, verso +)

### DIMOSTRAZIONE

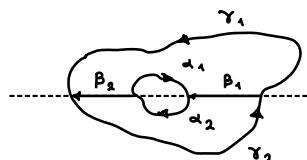
Prendiamo l'insieme e tagliamolo a metà in modo da eliminare il buco. Osserviamo  $D_1$  e  $D_2$ :

• Su  $D_1$   $F$  è conservativo  $\Rightarrow \oint_{D_1} F \cdot dS = 0$

• Su  $D_2$   $F$  è conservativo

Dividiamo il bordo e avremo:

$$\oint_{\partial D_1} F \cdot dS = 0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dS - \int_{\beta_2} F \cdot dS + \int_{\alpha_1} F \cdot dS - \int_{\beta_1} F \cdot dS$$



$$\oint_{\partial D} F \cdot dS = 0 = \int_{\gamma_2} F \cdot dS + \int_{\beta_2} F \cdot dS + \int_{\alpha_2} F \cdot dS + \int_{\beta_1} F \cdot dS$$

Le sommo e ottengo:

$$0 = \int_{\gamma_1} F \cdot dS + \int_{\gamma_2} F \cdot dS + \int_{\alpha_1} F \cdot dS + \int_{\alpha_2} F \cdot dS = \int_{\partial D^+} F \cdot dS$$

ossia

$$\int_{\partial D^+} F \cdot dS = 0$$

Esercizio:

$$F\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$\nabla \times F \neq 0$  no conservativo su  $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

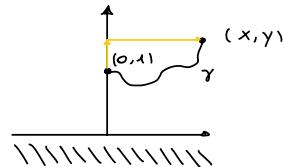
1) E' conservativo su  $y > 0$ ? Si poiche' e' semplicemente connesso. Cerco il potenziale ma non come prima (non e' facile).

• FISSO UN PUNTO, ad esempio  $(0,1)$

• SCRIVO IL POTENZIALE SU UNA CURVA ( $\Gamma$  tanto  $U$  non dipende da  $\gamma$ )

$$\gamma_1(t) = (0, t) \text{ con } t \in [1, y]$$

$$\gamma_2(t) = (t, y) \text{ con } t \in [0, x]$$



$$U(x,y) = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds = \int \cancel{\frac{-t}{t^2}} \cdot 0 + 0 \cdot dt + \int_0^y \frac{-y}{y^2+t^2} \cdot 1 + 0 \, dt$$

$$= \int_0^y \frac{-y}{y^2+t^2} \, dt = -\arctan(x/y)$$

$U(x,y) = -\arctan(x/y)$  e' potenziale su  $y >$

### ESERCIZIO

Sia  $F = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \right)$  con  $F: \{x^2+y^2 > 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $C^1$ , e' conservativo?

Scriviamo innanzitutto il rotore di  $F$ :

$$\partial F / \partial y = \left( -\frac{x}{2(x^2+y^2-1)^{3/2}} \cdot 2y \right)$$

$$\partial F / \partial x = -\frac{y}{2(x^2+y^2-1)^{3/2}} \cdot 2x$$

$\nabla \times F = 0$ , ma il dominio di  $F$  non e' semplicemente connesso, quindi devo prendere una curva test, ad esempio la circonferenza di raggio 2.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-1}} \cdot 2(-\sin t) + \frac{2\sin t}{\sqrt{4-1}} \cdot 2\cos t dt$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \sin t \cos t dt = 0 \longrightarrow F \text{ e' conservativo}$$

### ESEMPIO

$F = \left( \frac{2x}{x^2+y^2-1}, \frac{\alpha y}{x^2+y^2-1} \right)$  per quali  $\alpha$  e' conservativo?

$\nabla \times F = 0 \quad F: \{x^2+y^2 \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\longrightarrow \partial F_1 / \partial y = -\frac{2x}{(x^2+y^2-1)^2} \cdot 2y = -\frac{2x}{(x^2+y^2-1)^2} \cdot \alpha y = \partial F_2 / \partial x$$

$\alpha = 2$  quindi prendo  $\alpha = 2$  e guardo se e' conservativo

Il dominio e' unione di due insiemi  $\{x^2+y^2 < 1 \stackrel{\text{S.CONN.}}{\vee} x^2+y^2 > 1 \stackrel{\text{NO SEMP. CONN.}}{\vee}\} \Rightarrow F$  conservativo sul 1° pezzo, guardiamo sul 2° pezzo con una curva test:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} \frac{4\cos t \sin t}{3} - \frac{2\alpha \sin t \cos t}{3} dt = 0 \text{ per } \alpha = 2 \text{ e' conservativo}$$

### TEOREMA DI GAUSS - GREEN GENERALE

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  chiuso con bordo  $\partial D$  fatto dall'unione di una o piu' curve regolari:

$F = (P, Q)$  con  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1$ , allora

$$\begin{aligned} \iint_D (\nabla \times F) dx dy &= \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial D^+} F \cdot dS = \int_{\partial D^+} P dx + \int_{\partial D^+} Q dy \\ &= \int_{t_0}^{t_1} P(\gamma) \dot{x} dt + \int_{t_0}^{t_1} Q(\gamma) \dot{y} dt \end{aligned}$$

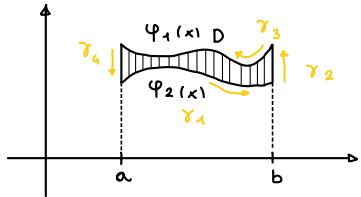
$\nabla \circ P, Q$  sono generatori del campo

$$\text{con } \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$\iint_D (\nabla \times F) dx dy = \int_{t_0}^{t_1} P(\gamma) \dot{x} + Q(\gamma) \dot{y} dt$$

DIMOSTRAZIONE SOLO PER Q=0 E D SEMPLICE RISPETTO A X

Per dimostrare il caso generale si fa il caso di P=0 spiegando in insiemi semplici D, poi sommo (P,0) + (0,Q).  
D'è semplice, ossia:  $D = \{ a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$



$$\begin{aligned} \iint_D (\nabla \times F) dx dy &= - \iint_D P_y dx dy \quad \text{integriamo per fili} \\ &= - \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) dx \quad (\text{Th. fondamentale del calcolo}) \end{aligned}$$

Parametrizziamo il bordo:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \text{ con } t \in [a, b] \quad \dot{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_1} F dS = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) \cdot 1 + 0 \cdot \varphi'_1(t) dt = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \text{ } t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \quad \dot{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} F dS = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b, t) \cdot 0 + 0 \cdot 1 dt = 0$$

$\gamma_3$  e' come  $\gamma_1$ :

$$\gamma_3 = \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt$$

$\gamma_4$  e' nullo come  $\gamma_2$

$$\int_{\partial D^+} F dS = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx$$

$$\iint_D (\nabla \times F) dx dy = \int_{\partial D^+} F dS$$

OSSERVAZIONE

$$F = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad D = \{ x^2+y^2 \leq 1 \} \quad \partial D = \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\text{avremo visto che } \int_{\gamma} F dS = \pi = \iint_D (\nabla \times F) dx dy = 0$$

Non si applica perche' F non e' definito su D, poiche' (0,0) e' punto singolare

### ESERCIZIO: AREA DELL' ELLISSE

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Area (E) =  $\iint_E 1 dx dy$ , uso gauss - green, cerco un campo  $F = (P, Q) : \nabla \times F = Q_x - P_y = 1$ , uno semplice si ha con:

$$F = (-y_2, x_2) \quad Q_x - P_y = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\iint_E 1 dx dy = \int_{\partial E^+} -y dx + x dy \quad \gamma_E = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{coordinate ellittiche}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab$$

### ESERCIZIO

$$F = \left( \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

• conservativo?

• Calcolare  $\int_B F dS$  con  $B = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$  e  $t \in [-\pi, \pi]$

### TEOREMA DI STOKES

Sia  $\Sigma$  una superficie regolare orientata da  $\vec{n}$ , con bordo  $\partial\Sigma$  regolare (unione di curve regolari) e sia  $F \in C^1$  su  $\Sigma$  campo.

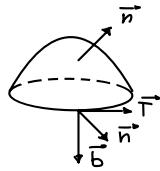
$$\iint_{\Sigma} \nabla \times F \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\partial \Sigma} F dS = \int_{\partial \Sigma} (F \cdot \vec{T}) ds \quad \text{dove } \vec{T} \text{ e' il vettore tangente al bordo}$$

Per prendere l'orientamento (+) di  $\partial\Sigma$  uso regola mano dx

$\vec{n}$  = normale

$\vec{b}$  = vettore che punta verso l'esterno di  $\Sigma$

$\vec{T}$  = tangente al bordo

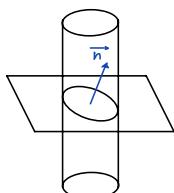


⚠ Stokes estende Gauss - Green alle superfici non piane

ESEMPIO: Calcolo della circuitazione  $F = (3x^2 y + y^2, x(x^2 + 2), xy)$  su  $x^2 + y^2 = 1$

$$\oint_{\partial D} F dS = \int_{\partial D} F dS = \iint_D (\nabla \times F) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

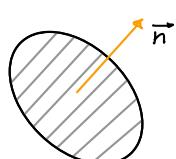
$$\nabla \times F = 0 \Rightarrow \oint_{\partial D} F dS = 0$$



### FLUSSO DI UN CAMPO

Sia  $\Sigma$  una superficie, il flusso del campo  $F$  su  $\Sigma$  e':

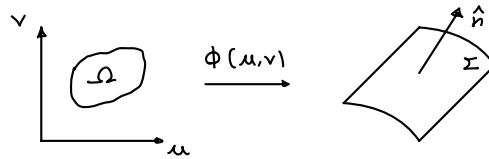
$$\Phi_{\Sigma}(F) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$



## COME CALCOLARE IL FLUSSO

Si usa una parametrizzazione  $\Omega$  della superficie con  $\phi_v \times \phi_u = \vec{n}$  e  $\hat{n} = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$   
notata che  $|\phi_u \times \phi_v|$  è l'elemento di superficie ( $d\sigma = |\phi_u \times \phi_v| du dv$ )

$$\iint_{\Sigma} F \cdot \hat{n} d\sigma = \iint_{\Omega} F \cdot \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|} \cdot |\phi_u \times \phi_v| du dv$$



$$\boxed{\iint_{\Omega} F \cdot (\phi_u \times \phi_v) du dv}$$

## ESEMPIO

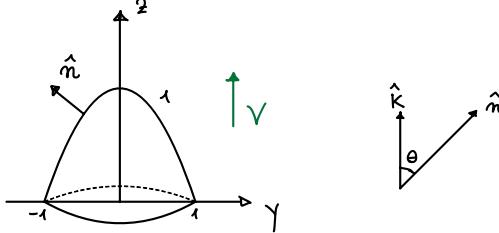
$$\Sigma = \{(x,y) \in \{x^2 + y^2 \leq 1\} \mid z = 1 - (x^2 + y^2)\}$$

$\vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ , ossia  $\vec{n}$  e  $\vec{k}$  formano angolo acuto, quindi  $\vec{n}$  verso l'alto (ossia ha una componente verso l'alto)  
calcola flusso di  $\vec{V} = (0,0,2)$

La simmetria è cilindrica e  $z = 1 - (x^2 + y^2)$  è un paraboloido, si parametrizza con:

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - (u^2 + v^2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}}$$



$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-\phi_u, -\phi_v, 1) du dv \\ &= \iint_{\Sigma} z du dv = \iint_{\Omega} 1 - (u^2 + v^2) du dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2) r dr d\theta = \pi/2 \end{aligned}$$

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia  $D \subset \mathbb{R}^3$  limitato e chiuso, il  $\partial D$  è unione di superfici regolari e orientabili, sia  $n$  il vettore normale uscente da  $D$ . Sia  $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1$ , allora:

$$\iint_D \nabla F dx dy dz = \iint_{\partial D} F \cdot \vec{n} e d\sigma$$

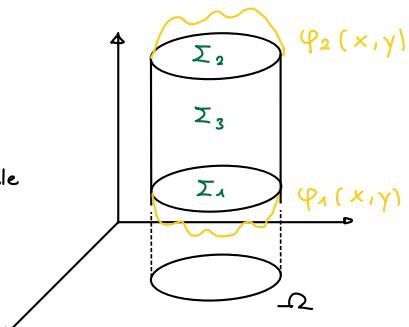
⚠  $\nabla F$  = DIVERGENZA

⚠ Bisogna avere un solido, non scordare superficie

## DIMOSTRAZIONE

Prendiamo un campo  $F_1 = F_2 = 0$  e  $D$  semplice rispetto a  $z$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div}(F) dx dy dz &= \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right] dx dy \Rightarrow \text{Th. fondamentale calcolo integrale} \\ &= \iint_{\Omega} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy \end{aligned}$$



$$= \iint_{\partial D} F \cdot n_e = \iint_{\Sigma_1} F \cdot n_e + \iint_{\Sigma_2} F \cdot n_e + \iint_{\Sigma_3} F \cdot n_e$$

$$\Sigma_2 = \{(x, y) \in \Omega, z = \varphi_2(x, y)\} \quad n_e = \frac{(-F_x, -F_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla F_e|^2}}$$

$$= \iint_{\Sigma_2} F \cdot n_e d\sigma = \iint_{\Omega} F \cdot (-F_x, -F_y, 1) dx dy$$

$$\text{ma } F = (0, 0, F_3) \rightarrow = \iint_{\Omega} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy \text{ stessa cosa con } \Sigma_1 \text{ e } \Sigma_2 (\because \text{ la normale è } (-))$$

$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \iint_{\Omega} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy$$

$\iint_{\Sigma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  deve essere nullo

$$\iint_{\Sigma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = (\text{ma } \mathbf{F}_3 \perp \mathbf{n}_e) = 0$$



Sommiamo i contributi e otteniamo l'enunciato

### Esercizio

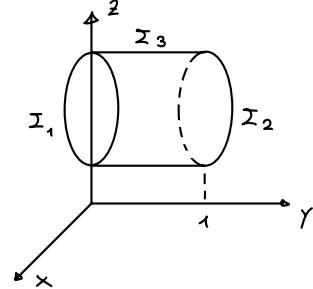
Calcolare il flusso uscente da ogni faccia del cilindro  $\left\{ x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right\}$

$$\vec{n} = (0, -1, 0)$$

$$\iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ y=0}} e^y dx dz = -\pi$$

$$\iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \vec{n} = (0, 1, 0)$$

$$= \iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ y=1}} \mathbf{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{x^2+z^2 \leq 1} e^y dx dy = e\pi$$



Mancava da calcolarlo su  $\Sigma_3$ , posso parametrizzarlo oppure:

$$\iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz - \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma - \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iint_{\Sigma_3} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma$$

$$\iint e^y dx dy dz = (\text{Integro per fili}) = \int_0^1 e^y dy \iint_{x^2+z^2 \leq 1} dx dy = (e-1)\pi$$

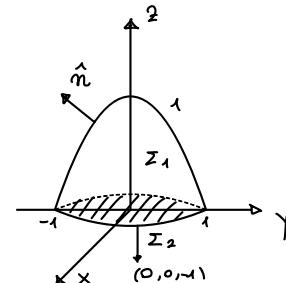
$$\iint_{\Sigma_3} \mathbf{F}_3 \cdot \vec{n}_e d\sigma = \pi e - \pi + \pi - \pi e = 0$$

### Esercizio

$\Sigma_1 = \left\{ z = 1 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 1 \right\}$ , calcoliamo  $\mathbf{F}(y, x, z)$

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma_2} = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0}} (y, x, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0$$

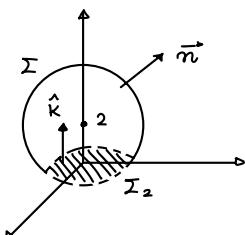


$$\iint_{\Sigma_1} \mathbf{F}_1 \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz = \iiint_D 1 dx dy dz \xrightarrow{\text{PER STRATI}} \pi/2$$

### ESERCIZIO

$$F(y^2 \cos(xz), x^3 e^{yz}, -e^{-xy^2})$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8) \mid z \geq 0\} \quad \text{flusso uscente} \\ &\text{Sfera di raggio 2 in } (0, 0, 2) \end{aligned}$$



$$\iint_{\Sigma} \nabla \times F \cdot \vec{n} \, d\sigma = ?$$

Provo con Stokes

$$= \oint_{\partial^+ \Sigma} F \cdot ds \quad \text{ma} \quad \partial^+ \Sigma_1 = \partial^+ \Sigma_2$$

$$= \iint_{\Sigma_2} \nabla \times F \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq u \\ z=0}} (\nabla \times F)_K \, dx \, dy \Rightarrow$$

$$z=0 \longrightarrow x^2 + y^2 = u$$

$$(\nabla \times F)_K = 3x^2 - 2y \quad \text{e} \quad z=0$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq u \\ z=0}} 3x^2 - 2y \, dx \, dy \stackrel{\text{PER SIMMETRIA}}{=} \iint_{x^2+y^2 \leq u} 3x^2 \, dx \, dy = 12\pi$$

i	j	K	
$\partial_x$	$\partial_y$	$\partial_z$	
$y^2 \cos x^2$	$x^3 e^{yz}$	$-e^{-xy^2}$	voglio solo la coordinata K

⚠ Si poteva fare ricordando che  
 $\nabla \times (\operatorname{div} F) = 0$  e  $\nabla \times (\operatorname{rot} F) = 0$

$$\begin{array}{lll} \text{ESERCIZIO} & \text{PARABOLA} & \text{CILINDRO} \\ C = \{z \leq u, x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1\} & \text{RENA} & \end{array}$$

calcola Volume C, Area(I\_1+I\_2);  $F = (x, 0, 0)$  flusso uscente da C, da  $\Sigma_3$

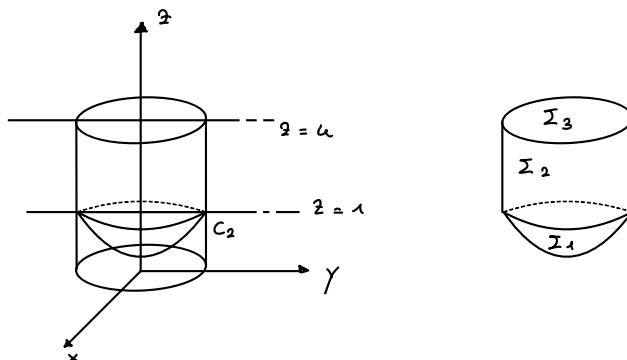
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \text{volume cilindro} + \text{paroloide} \\ &= \pi 3 + \iiint_{C_2} 1 \, dx \, dy \, dz = 3\pi + \int_0^1 \iint_{x^2+y^2 \leq z} 1 \, dx \, dy = \\ &= 3\pi + \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{1}{2}\pi \\ &= \frac{7}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\text{Area} = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_1 + 2\pi \cdot 3 = 6\pi + \Sigma_1$$

uso formula per superfici di rotazione

$$\gamma(t, 0, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{Area} = 6\pi + 2\pi \int_{\gamma} \rho(t) |\dot{\gamma}| dt = 6\pi + 2\pi \int_0^1 t \sqrt{1+4t^2} \, dt = (5^{3/2} - 1)\pi/6 + 6\pi$$



## Esercizio

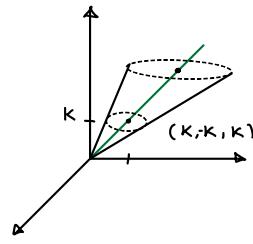
$D = \{(x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 2^2; 0 \leq z \leq 5\}$  e  $F = (x^2, x-y, z)$  calcolare flusso uscente da  $D$ .

osservando  $D$ , si nota che sul piano  $z=K$ ,  $(x-K)^2 + (y-K)^2 \leq K^2$  è un cerchio di centro  $(K, -K)$  e raggio  $K$ . Inoltre il raggio cresce linearmente con  $z$ , per cui è l'insieme dei cerchi con centro su una retta e diametro che cresce linearmente. Si tratta quindi di un cono con asse sulla retta  $(t, -t, t)$

$$\iint_D F \cdot \vec{n}_e \, d\sigma = \iint_D \operatorname{div}(F) \, dx dy dz = \iint_D 2 \, dx dy dz,$$

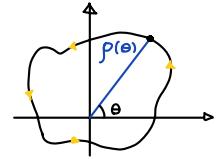
Si fa bene per strati, ogni cerchio è la  $B((2,2), z)$

$$\int_0^5 \left[ \iint_{B((2,2), z)} 2 \, dx dy \right] dz = \int_0^5 \left[ \iint_{B((2,2), z)} 1 \, dx dy \right] dz = \int_0^5 \frac{1}{4} \pi z^2 \cdot 2 \, dz = \frac{625}{4} \pi$$



**Esercizio:** Area di una superficie con bordo in coordinate polari, prendiamo  $A$  con  $\partial^+ A = \begin{pmatrix} p(\theta) \cos \theta \\ p(\theta) \sin \theta \end{pmatrix} = \gamma(\theta)$

$$\begin{aligned} \text{Area } (A) &= \iint_A 1 \, dx dy \Rightarrow \text{Gauss-Green} \Rightarrow \frac{1}{2} \iint_{\partial^+ A} x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta \cdot [p' \sin \theta + p \cos \theta] - p \sin \theta [p' \cos \theta - p \sin \theta] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} pp' \cos \theta \sin \theta + p^2 \cos^2 \theta - pp' \sin \theta \cos \theta + p^2 \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2 (\theta) \, d\theta \end{aligned}$$



FORMULA AREA DI BORDI IN COORDINATE POLARI

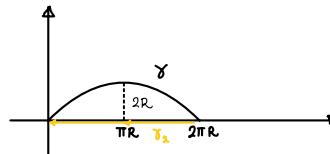
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2(\theta) \, d\theta$$

**Esercizio:**

Area della circoide:  $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta - \sin \theta) \\ r(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 2\pi R - t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\partial^- A = \gamma \vee \gamma_2$

$$\begin{aligned} \text{Area } (A) &= - \int_{\partial^+ A} y \, dx = \int_{\partial^- A} y \, dx = \int_{\gamma} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx \\ &= \int_{\gamma} y \, dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos \theta) \cdot r(1 - \cos \theta) \, d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2\pi R^2 + 0 - \pi R^2 = 3\pi R^2 \end{aligned}$$



**Esercizio**

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2)^2 - y \leq 0\}$ , calcolare  $\iint_D x \, dx dy$ , innanzitutto il bordo di  $D$ :

$$\partial D = \{(x^2 + y^2)^2 = y\} \rightarrow \{p^4 = p \sin \theta\}$$

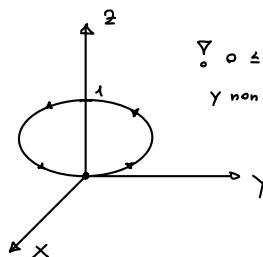
$p = \sqrt[3]{\sin \theta}$  → Il bordo di  $D$  si parametrizza come  $\begin{cases} x(\theta) = \sqrt[3]{\sin \theta} \cdot \cos \theta \\ y(\theta) = \sqrt[3]{\sin \theta} \cdot \sin \theta \end{cases}$

$$(P, Q) = (0, \frac{x^2}{2}) \rightarrow \iint_D x \, dx dy = \iint_{\partial^+ D} x^2/2 \, dy$$

$$Y'(\theta) = \frac{4}{3} (\sin \theta)^{1/3} \cos \theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\sin \theta)^{2/3}}{2} \cdot \cos^3 \theta \cdot \frac{4}{3} (\sin \theta)^{1/3} \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \, d\theta = 0$$

$\because 0 \leq \theta \leq \pi$  perché  
 $y$  non può essere negativa

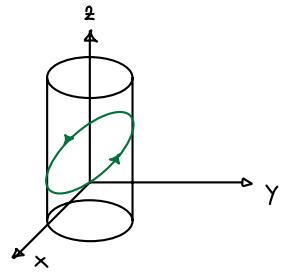


## Esercizi su campi

1.  $F(x, x+y, x+y+z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , calcolare Lavoro su  $C : \{x^2+y^2=1\} \cap \{z=1\}$ , orientato come in figura. Calcoliamo la circuitazione con Stokes:

$\oint_C F \cdot dS$ , definisco  $D = \{x^2+y^2 \leq 1, z=1\}$  orientato verso l'alto,  $C = \partial^+ D$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$



$$\oint_C F \cdot dS = \int_{\partial^+ D} F \cdot dS = \iint_D (\nabla \times F) \cdot \hat{n} \, d\sigma = \iint_D \langle (1, -1, 1), \hat{n} \rangle \, dp \, d\theta$$

parametrizziamo  $D = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, p), \theta \in [0, 2\pi], p \in [0, 1]\}$

$$\phi_\theta = (-p \sin \theta, p \cos \theta, p \cos \theta)$$

$$\phi_p = (\cos \theta, \sin \theta, \sin \theta)$$

$$\phi_p \times \phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta \\ -p \sin \theta & p \cos \theta & p \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \\ p \end{pmatrix}$$

$$\iint_D \langle (1, -1, 1), (0, -p, p) \rangle \, d\theta \, dp = \iint_D 2p \, d\theta \, dp = p^2 \Big|_0^1 \cdot 2\pi = 2\pi$$

### Osservazione

Si potranno calcolare anche direttamente:

$$\oint_C F \cdot dS \quad F = (p \cos \theta, p \cos \theta + p \sin \theta, p \cos \theta + 2p \sin \theta) \quad e \quad \vec{\gamma} = (-p \sin \theta, p \cos \theta, p \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \langle (\cos \theta, \cos \theta + \sin \theta, \cos \theta + 2 \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta, \cos \theta) \rangle \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

2.  $F = \{x/x^2+y^2, y/x^2+y^2, z\}$  e' conservativo sul suo dominio?  $F : \mathbb{R}^3 - x=y=0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Il dominio non e' semplicemente连通的.

$\nabla \times F = 0$  quindi OK, cerco curva test, ad esempio prendo circonferenza

$$\gamma: (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \dot{\gamma} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

Parametrizzo  $F : (\cos \theta, \sin \theta, 0)$

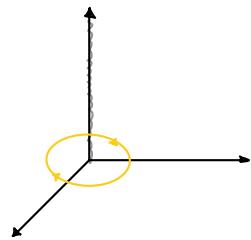
$$\oint_C F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F \cdot \dot{\gamma} \, d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta + 0 \, d\theta = 0$$

Il campo e' conservativo in  $\mathbb{R}^3$ , trovo il potenziale di  $F$ .

$$\nabla F = U = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \frac{z^2}{2} + C$$

### Osservazione

In 3D e' Stokes a garantire che la curva test sia sufficiente



# APPPLICAZIONI LINEARI E SPAZI DUALI

## APPPLICAZIONI LINEARI

Sia uno spazio  $V$  di dimensione finita e un insieme  $\{L: V \rightarrow \mathbb{R}, L \text{ applicazioni lineari}\}$ , osserviamo che  $L$  è uno spazio vettoriale.

## DIMOSTRAZIONI

Se  $L, W \in V'$ :  $L + W \in V'$ , se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $aL \in V'$   $\Rightarrow aL \in V'$

## ESEMPI

1 Sia  $V$  di base  $(b_1, b_2, b_3)$  e  $v \in V$ , allora  $v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3$ . Chiamiamo:

$L(v) = v_1 - v_2 + v_3$  è applicazione lineare

2 Prendiamo il campo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , siano  $w \in V$  e definiamo  $L_w(v) = \langle w, v \rangle$

3  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $P_0$ , allora  $d_{P_0} f[v] = \langle \nabla f(P_0), v \rangle$  è applicazione lineare.

## OSSERVAZIONE

$V'$  ha stessa dimensione di  $V$ , ossia presa  $(b_1, b_2, b_3)$  base di  $V$  e  $L_v = L(v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3)$ , questo per linearità è  $L(v_1 b_1) + L(v_2 b_2) + L(v_3 b_3) = v_1 L(b_1) + v_2 L(b_2) + v_3 L(b_3)$ , ma ciò vuol dire che basta conoscere  $L$  applicata alla base per conoscere l'applicazione su ogni vettore di  $V$   $\Rightarrow V'$  ha dim = 3

## BASE DUALE

Sia  $(b_1, b_2, b_3)$  base di  $V$ , costruisco  $L_1, L_2, L_3$  applicazioni lineari tali che:

$L_i(b_j) = 0$ ,  $L_i(b_i) = 1$  con  $i \neq j$ , allora  $\{L_1, L_2, L_3\}$  è una base duale di  $V'$

⚠ Ossia trovo un  $\{L_1, L_2, L_3\}$  tale che mandando una base di  $V$  in  $V'$  con una combinazione lineare di  $L_1, L_2, L_3$  ho una base di  $V'$ . Chiamiamo  $(b_1^*, b_2^*, b_3^*)$  la base di  $V'$ .

## DIMOSTRAZIONE

Sia  $L \in V'$ , posso scrivere  $L = L_1(b_1)b_1^* + L_2(b_2)b_2^* + L_3(b_3)b_3^*$ , infatti calcoliamo  $L(v)$  con  $v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 \rightarrow L(v) = L_1(b_1)b_1^*(v) + L_2(b_2)b_2^*(v) + L_3(b_3)b_3^*(v)$  ora  $b_1^*(v) = b_1^*(v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3) \stackrel{\text{def}}{=} v_1 \underline{b_1^*(b_1)} + v_2 \underline{b_1^*(b_2)} + v_3 \underline{b_1^*(b_3)}$   
 $b_1^*(v) = v_1$   
 $b_2^*(v) = v_2 \rightarrow L(v) = L_1(b_1)v_1 + L_2(b_2)v_2 + L_3(b_3)v_3$  che è proprio  $L(v)$   
 $b_3^*(v) = v_3$

⚠ Se  $V \equiv \mathbb{R}^3$  allora  $B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  e:  
 $L(v) = (L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

## SPAZI ISOMORFI

Ve  $V'$  sono spazi isomorfi se  $\exists L$  applicazione lineare tale che, presa una base di  $V$   $b_V(b_1, \dots, b_n)$  e  $b_{V'}(b_1^*, \dots, b_n^*)$ ,  $L(b_V) = b_{V'}$  e  $L$  è detto ISOMORFISMO

## TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI REISZ

Sia  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  spazio vettoriale con prodotto scalare, allora  $\forall L \in V' \exists w \in V: L(v) = \langle w, v \rangle$

## DIMOSTRAZIONE

$L \in V'$  allora  $\text{Ker}(L)$  ha dimensione almeno di  $n-1$  e  $(\text{Ker}(L))^\perp$  ha dimensione 1, prendiamo  $z \in (\text{Ker}(L))^\perp$  e  $\|z\| = 1$ . Per linearità  $L(z) \cdot L(v) - L(v) \cdot L(z) = 0$  si scrive anche come:  
 $z \cdot L(v) - v L(z) \in \text{Ker}(L) \quad \forall v \in V$ , ossia  $\langle z, z L(v) - v L(z) \rangle = 0$ , sempre per linearità:

$$\langle z, z L(v) - v L(z) \rangle = 0 = \overbrace{\langle z, z \rangle}^{\|z\|^2} L(v) - \langle z, v \rangle L(z) = L(v) - \langle z, v \rangle L(z) = 0$$

$$L(v) = \langle z, v \rangle \cdot L(z) = \langle z L(z), v \rangle, \text{ quindi dato } L \text{ trovo } w = z L(z): L(v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v$$

Ho dimostrato che  $\exists w: L(v) = \langle v, w \rangle$ , dobbiamo dimostrare l'unicità, quindi suppongo  $\exists t \in V$   $L(v) = \langle t, v \rangle \quad \forall v \in V$ .

Prendiamo  $w = L(z)$  e considero  $t-w$ , allora  $\forall v \Rightarrow \langle t-w, v \rangle = 0$  (vedi con linearità)  
 $\langle t-w, v \rangle = \langle t, v \rangle - \langle w, v \rangle = L(v) - L(v) = 0$

Ma allora  $0 = \langle t - \omega, t - \omega \rangle = \|t - \omega\|^2$  perche' l'unico vettore tale che il  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  con ogni  $v \in V$  e' nullo e' il vettore nullo.

$$\|t - \omega\|^2 \Rightarrow t - \omega = 0 \text{ e quindi } t = \omega \text{ (UNICITA')}$$

### ESEMPIO:

Prendiamo  $\mathbb{R}^n$  con base  $(e_1, \dots, e_n)$ , so che  $L = L(e_1) \cdot e_1^* + \dots + L(e_n) e_n^*$  ossia:  
 $L : (L(e_1), \dots, L(e_n))$  e  $L(v) = \langle (L(e_1), \dots, L(e_n)), (v_1, \dots, v_n) \rangle$

### NOTA2IONE

In  $\mathbb{R}^3$  la base e'  $i, j, k$ , ma la base duale si indica con  $\langle dx, dy, dz \rangle$ , dove:

$$dx[v] = v_1 \text{ (componente } x \text{ di } v)$$

$$dy[v] = v_2 \text{ (... } y \text{ di } v)$$

$$dz[v] = v_3 \text{ (... } z \text{ di } v)$$

### DIFFERENZIALE CON REISZ

Sappiamo che  $d_p f[v] = \frac{\partial f(p)}{\partial x} \cdot v_1 + \frac{\partial f(p)}{\partial y} \cdot v_2 + \frac{\partial f(p)}{\partial z} \cdot v_3$ , con questo linguaggio si puo' scrivere come (non applicato):

$$d_p f = \frac{\partial f(p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(p)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(p)}{\partial z} dz$$

sappiamo che  $d_p f[v] = \langle \nabla f, v \rangle$ , allora  $\nabla f$  e' la rappresentazione di Reisz di  $d_p f$

## FORME DIFFERENZIALI

### 1 - FORME

Si chiamano 1-forme le applicazioni lineari da uno spazio  $V \rightarrow \mathbb{R}$ . In  $\mathbb{R}^n$  le 1-forme sono generate da  $dx_1, \dots, dx_n$ , ad esempio:

$$\langle 1\text{-forma} \rangle = \langle a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n, \text{ con } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \rangle$$

▽  $d_p f$  e' una 1-forma

### K - FORME (su $\mathbb{R}^n$ )

Sia  $\Omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_K \rightarrow \mathbb{R}$  e' una K-forma se

• e' multilineare, ossia lineare in ogni variabile.

• e' alternante, ovvero  $w(v_1, v_2, v_3) = -w(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) \rightarrow$  ogni volta che si cambia di posto due vettori nell'ordine, si cambia segno

### NOTA2IONE

A volte si trova K-covettore per K-forma.

▽  $\Lambda^K(\mathbb{R}^n) = \{ K\text{-Forme su } \mathbb{R}^n \}$

### ESEMPIO

Sia  $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$  e definisco  $w(v, w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - w_1 v_2$ , per le proprietà del determinante,  $w$  e' bilineare e alternante  
 $w \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$

## OSSERVAZIONE

Con la stessa idea definisco una  $K$ -forma su  $\mathbb{R}^n$ ,  $K \leq n$  ad esempio  $K = 3, n = 5$

$$\omega_{1,3,u} = [v, w, z] = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_2 & w_2 & z_2 \\ v_3 & w_3 & z_3 \\ v_u & w_u & z_u \\ v_5 & w_5 & z_5 \end{vmatrix} \rightarrow = \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & z_1 \\ v_3 & w_3 & z_3 \\ v_u & w_u & z_u \end{vmatrix}$$

Prendo solo le forme  $1, 3, u$

Se  $K \geq n$ , ad esempio  $K = 3, n = 2$ , aggiungo una colonna

$$\omega_{1,2,t} (v, t, z) = \det \begin{vmatrix} v_1 & t_1 & z_1 \\ v_2 & t_2 & z_2 \\ v_t & t_t & z_1 \end{vmatrix}$$

## NOTAzione

Sia  $\lambda$  multi indice di  $K$  numeri, allora  $\omega_\lambda$  è una **forma elementare** di  $\Lambda^K(\mathbb{R}^n)$

## OSSERVAZIONI

- $\Lambda^K(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio vettoriale
- Sia  $\alpha \in \Lambda^K(\mathbb{R}^n)$ , se la valutiamo in  $K$  vettori di cui 2 o più sono uguali allora  $\alpha$  è nulla. Infatti  $\alpha(v, w, v, \dots) = -\alpha(v, w, v, \dots) \Rightarrow \alpha(v, w, v, \dots) = 0$
- Sia  $\lambda$  multi indice di  $K$  numeri e  $K \geq n$ , con  $\omega_\lambda$  forma elementare  $\Rightarrow \omega_\lambda = 0$

## PRODOTTO ESTERNO DI FORME

Sia  $\lambda = \langle \dots \rangle$  (sono  $K$  interi da 1 a  $n$ ) e  $\mu = \langle \dots \rangle$  (sono  $m$  interi da 1 a  $n$ ) siano  $\omega_\lambda$  forma elementare  $\in \Lambda^K(\mathbb{R}^n)$   
 $\omega_\mu$  " " "  $\in \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$

si dice prodotto esterno:

$$\omega_\lambda \wedge \omega_\mu = \omega_{\lambda, \mu} \in \Lambda^{K+m}(\mathbb{R}^n)$$

con  $\lambda, \mu$  = multi indice dove si scrive prima  $\lambda$  e poi  $\mu$

## ESEMPIO

$$\omega_{1,3} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^5); \omega_5 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^5)$$

$$\omega_{1,3} \wedge \omega_5 = \omega_{1,3,5}$$

## PROPRIETÀ

$\wedge$  gode della proprietà distributiva e associativa:

- $w = a \omega_\lambda$  e  $\beta = b \omega_\mu \rightarrow w \wedge \beta = a \cdot b \omega_\lambda \wedge \omega_\mu$
  - $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$
- Non commutativo per forza

ESEMPI: Come generare 2-forme in  $\mathbb{R}^3$

$$w_1 = dx \quad w_2 = dy$$

$$dx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$$

$$3(dx \wedge dz) [v, w] = 3 \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

ESEMPIO: Scrivi forma  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$

$$w = 3dx_1 \wedge dz - 5dz \wedge dy = 3\omega_{1,3} - 5\omega_{3,2} = 3\omega_{1,3} + 5\omega_{2,3}$$

## BASI DI FORME

Una base di  $\Lambda^k(\mathbb{R}^3)$  è data dalle forme elementari non nulle e linearmente indipendenti tale che la base è  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

### ESEMPIO:

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \text{Span} \{ dx_1 \wedge dy, dx_2 \wedge dz, dy \wedge dz \}$$

### ESEMPIO:

$w \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  con  $w = 2dx_1 \wedge dy - dx_1 \wedge dz$ , calcolare  $w \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$2 \det \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

## PROPOSIZIONE

Sia  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  ha come base tutti i possibili prodotti esterni di  $k$  1-forme elementari indipendenti tra loro

### ESEMPIO:

$w \in \Lambda^3(\mathbb{R}^5)$  ad esempio  $w = 3dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1$

## CONTRAZIONE DI UNA FORMA

Sia  $\Omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  e preso un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$ , si contrae  $\Omega$  con  $v$  e si ottiene  $\Omega_v \in \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$

$$\Omega_v [w_1, \dots, w_{k-1}] = \omega [v, w_1, \dots, w_{k-1}] \text{ in pratica } P$$

In pratica vado a fissare la prima variabile con un vettore noto e otengo una  $k-1$  forma

### ESEMPIO:

Chiaramente si può fare più volte:

$$[\omega_v]_w = \omega_{v,w} = \omega [v, w, \dots]$$

## ESERCIZIO

$w \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$   $w = dx + 2dz$   $\varphi = dx \wedge dy + 2dy \wedge dz$ , calcolare  $w \wedge \varphi$  e  $w \wedge \varphi$  contratto con  $v = (1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} w \wedge \varphi &= \underset{0}{(dx + 2dz)} \wedge (dx \wedge dy + 2dy \wedge dz) \\ &= \underset{0}{dx \wedge dx \wedge dy} + 2dx \wedge dy \wedge dz + 2dz \wedge \underset{0}{dx \wedge dy} + \underset{0}{4dz \wedge dy \wedge dz} \\ &= 4dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

$$\text{contraiamo } w \wedge \varphi [w, t] = 4dx \wedge dy \wedge dz [1, -1, 0, w, t]$$

$$= 4 \det \begin{vmatrix} 1 & w_1 & t_1 \\ -1 & w_2 & t_2 \\ 0 & w_3 & t_3 \end{vmatrix}$$

## OSSERVAZIONE

Quante forme ci sono in  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ :  $\text{Span} \{ dx, dy, dz \} \rightarrow \dim(\Lambda^1(\mathbb{R}^3)) = 3$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \text{Span} \{ dx \wedge dy, dy \wedge dz, dx \wedge dz \} \rightarrow \dim(\Lambda^2(\mathbb{R}^3)) = 3$

$\Lambda^3(\mathbb{R}^3) = \text{Span} \{ dx \wedge dy \wedge dz \} \rightarrow \dim = 1$

$\Lambda^k(\mathbb{R}^3) = 0 \quad \forall k > 3$  perché non posso non avere elementi uguali

## FORME DIFFERENZIALI

Per ogni punto di  $\mathbb{R}^3$  si prende una forma  $\wedge^K(\mathbb{R}^3)$  per cui  $w(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \wedge^K(\mathbb{R}^3)$  in modo che sia  $C^1$  una forma differenziale e del tipo:

$$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \wedge^1(\mathbb{R}^3)$$

$$w(P) = a(P)dx + b(P)dy + c(P)dz$$

▼ Mentre le forme elementari erano per costanti, quelle differenziali e per funzioni  $C^1$

Si definiscono le **o-forme** differenziali come funzioni  $C^1(\mathbb{R}^3)$

### OSSERVAZIONI

In questo modo c'è una corrispondenza biunivoca tra 3-forme e  $3-K$  forme di  $\mathbb{R}^3$ , ad esempio:

- **0-FORME  $\rightarrow$  3-FORME**

$f(P)$  va in  $f(P)dx \wedge dy \wedge dz$

- **1-FORME  $\rightarrow$  2-FORMA**

$a(P)dx$  va in  $a(P)dy \wedge dz$  } Trasformazione  
 $b(P)dy$  va in  $b(P)dz \wedge dx$  } di Hodge  
 $c(P)dz$  va in  $c(P)dx \wedge dy$

### TRASFORMAZIONE DI HODGE

$$\wedge^K(\mathbb{R}^n) \rightarrow \wedge^{n-K}(\mathbb{R}^n) \text{ per } K \leq n$$

$$a(P)dx + b(P)dy + c(P)dz \rightarrow a(P)dy \wedge dz + b(P)dz \wedge dx + c(P)dx \wedge dy$$

### PRODOTTO ESTERNO TRA FORME DIFFERENZIALI

Sia  $w = a(x)dx \wedge dz + b(x)dx \wedge dy$  e  $\varphi = v(x)dz$

$$w \wedge \varphi = a(x)v(x)dx \wedge dz \wedge dz + b(x)v(x)dx \wedge dy \wedge dz$$

$$w \wedge \varphi = b(x) \cdot v(x)dx \wedge dy \wedge dz$$

### DERIVATA ESTERNA DI UNA FORMA

Sia  $w$  una  $K$ -forma differenziale e  $w = f(x_1) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$  con  $i_1, \dots, i_K \in 1, \dots, n$  allora

$$dw = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_K} = \sum_j \partial f / \partial x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \cancel{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

$dw$  è una  $K-1$  forma differenziale

### ESEMPI

$$1. f(x,y) = ye^x \quad (0\text{-forma})$$

$$df = ye^x dx + e^x dy \quad (1\text{-forma})$$

$$2. \text{ Prendiamo una } w = 3dx \wedge dy + 2ydx \wedge dz + \sin(z)dx \wedge dz$$

$$dw = \overline{(d3)dx \wedge dy} + \overline{2dy \wedge dx \wedge dz} + \overline{\cos z \cdot dz \wedge dx \wedge dz} \quad (2\text{-forma})$$

$$dw = 2dy \wedge dx \wedge dz = -2dx \wedge dy \wedge dz \quad (3\text{-forma})$$

$$3. w = xy dy \wedge dz + xy^2 dz \wedge dx + 2dx \wedge dy$$

$$dw = ydx \wedge dy \wedge dz + xdy \wedge dz \wedge dx + y^2 dx \wedge dz \wedge dx + 2xy dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy$$

$$dw = (y+2xy+x)dx \wedge dy \wedge dz$$

## PROPRIETA' DELLA DERIVATA ESTERNA

1 Siano  $\alpha, \beta \in \Lambda^k_{\text{diff}}$ , allora  $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$

2  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$

3  $d(d\alpha) = d^2\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in C^2$

## DIMOSTRAZIONI

1 ovvia dalla proprietà di derivata

2 Partiamo con  $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}$  e  $\beta = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= d\alpha \wedge \beta + \underline{\frac{\sigma}{\alpha \wedge d\beta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{In generale } \alpha \wedge \beta &= f \cdot g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \underbrace{g df dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m}}_{\text{faccio m scambi}} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} + f dg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \wedge \underbrace{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}}_{\text{faccio m scambi}}\end{aligned}$$

Per spostare da  $f$  a  $g$  faccio  $m$  scambi e quindi  $(-1)^m$

3 Facciamo il caso di  $\wedge^0_{\text{diff}}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x, y) \in C^2 \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx$$

Th. Schwartz

$$\downarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx \wedge dy = 0$$

## FORMA CHIUSA

Una funzione con  $d\omega = 0$  si chiama forma chiusa

### ESEMPI

1  $\omega = d\alpha$  e' chiusa  $\forall \alpha$

2  $d\omega \in \Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^n) = \langle 0 \rangle \rightarrow$  chiuse

3 Le 0-forme costanti sono chiuse

## FORMA ESATTA

Sia  $\omega \in \Lambda^k_{\text{df}}(\mathbb{R}^n)$  si dice esatta se  $\exists \alpha \in \Lambda^k_{\text{df}}(\mathbb{R}^n) : \omega = d\alpha$  e  $\alpha$  e' primitiva (o potenziale) di  $\omega$

▼ Tutte le forme esatte sono chiuse

## ESERCIZI

1  $\omega = xy^2 dx \wedge dy \wedge dz$  chiusa / esatta in  $\mathbb{R}^3$ ?

K con derivata va a una - FORMA quindi chiusa, cerchiamo  $f(x, y, z) dy \wedge dz = \omega$

$$d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz = \frac{x^2 y^2}{2} dy \wedge dz$$

$$2 \quad \omega = x dx \wedge dy + z dz \wedge dx$$

$$d\omega = 0 \cdot dx \wedge dy \wedge dz + 0 \cdot dz \wedge dx \wedge dy = 0 \Rightarrow \text{chiusa}$$

Cerco  $\alpha = adx + bdy + cdz$  con  $a, b, c$  funzioni  $C^2$

$$\begin{aligned} d\alpha &= a_y dy \wedge dx + a_z dz \wedge dx + b_x dx \wedge dy + b_z dz \wedge dy + c_x dx \wedge dz + c_y dy \wedge dz \\ &= (-a_x + b_y) dx \wedge dy + (-a_z + c_x) dx \wedge dz + (-b_z + c_y) dy \wedge dz \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -a_x + b_y = x \\ -a_z + c_x = -z \\ -b_z + c_y = 0 \end{cases}$$

Provo con  $a \equiv 0 \Rightarrow b_x = x, c_x = -z, c_y = b_z$

$$b = \frac{x^2}{2} + h(y, z)$$

$$c = -z \cdot x + g(y, z)$$

se prendo  $h \equiv g \equiv 0$  ho anche  $c_y = b_z = 0$

$$d\alpha = \frac{x^2}{2} dy - z \times dz$$

### PROPOSIZIONI

1 Se  $\omega$  e' esatta  $\Rightarrow \omega$  chiusa

2 Se  $\alpha \in \Lambda_{df}^{k-1}$ , primitiva di  $\omega \in \Lambda_{df}^k$  allora ogni primitiva  $\alpha_1$  di  $\omega$  e' del tipo:

$\alpha_1 = \alpha + \beta$  con  $\beta \in \Lambda_{df}^{k-1}$  chiusa, ossia due primitive differiscono per una forma chiusa (quando la derivo tanto si annulla).

▷ Dimostrazioni banali

### COROLLARIO

Sia  $\alpha \in \Lambda_{df}^{k-1}$  primitiva di  $\omega$  e  $\beta \in \Lambda_{df}^{k-1}$  chiusa  $\Rightarrow$  anche  $\alpha + d\beta$  primitiva di  $\omega$

### ESERCIZIO

$\omega = x \alpha(y) dx + y b(x) dy$ , esistono  $\alpha(x), b(y) \in C^2$ :  $\omega$  sia chiusa ed esatta in  $\mathbb{R}^2$ ?

$$d\omega = x \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \wedge dx + y \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy = 0$$

$$x \frac{\partial \alpha}{\partial y} = y \frac{\partial b}{\partial x} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = x \quad \frac{\partial b}{\partial x} = y \quad \text{ad esempio}$$

$$xy = yx \quad \Rightarrow \quad \alpha = y^2/2 \quad b = x^2/2$$

$$\omega = \frac{xy^2}{2} dx + \frac{x^2 y}{2} dy$$

Cerchiamo ora  $f$  tale che  $df = \omega$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy^2}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2y}{2}$$

$$f = \frac{x^2y^2}{2} \quad \text{quindi e' esatta}$$

**X CASA**

$\omega = (3x^2y + y^2)dx + x(x^2 + z)dy + xydz$  e' chiusa ed esatta su  $\mathbb{R}^3$ ?

**CASO GENERICO DI 1-FORME IN  $\mathbb{R}^2$**

Sia  $\omega \in \Lambda_1^d(\mathbb{R}^2)$  e  $\omega = F_1 dx + F_2 dy$  e' chiusa quando:

$$d\omega = \partial_y F_1 dy \wedge dx + \partial_x F_2 dx \wedge dy = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx \wedge dy = 0$$

$$\partial_x F_2 = \partial_y F_1$$

**CASO GENERICO DI 1-FORME IN  $\mathbb{R}^3$**

Sia  $\omega \in \Lambda_1^d(\mathbb{R}^3)$  con  $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$  e' chiusa quando:

$$d\omega = \partial_y F_1 dy \wedge dx + \partial_z F_1 dz \wedge dx + \dots + \partial_y F_3 dy \wedge dz$$

$$= (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx \wedge dy + (\partial_x F_3 - \partial_z F_1) dx \wedge dz + (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) dy \wedge dz = 0$$

$$\begin{cases} \partial_x F_2 = \partial_y F_1 \\ \partial_x F_3 = \partial_z F_1 \\ \partial_y F_3 = \partial_z F_2 \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ e' chiusa}$$

**OSSERVAZIONE**

Forme chiuse corrispondono a campi irrotazionali, inoltre il concetto di forma non dipende dalla dimensione.

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \quad \nabla = (F_1, F_2, F_3)$$

$$d\omega = 0 \iff \text{rot } (\nabla) = 0$$

**PROPOSIZIONE SU FORME ESATTE**

$\omega$  e' esatta se  $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ :  $\omega = U_x dx + U_y dy + U_z dz$  ma  $\nabla$  e' conservativo se  $\exists U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ :  $\nabla = (U_x, U_y, U_z)$  quindi:

FORMA ESATTA  $\Leftrightarrow$  CAMPO CONSERVATIVO

**INTEGRAZIONE DI 1-FORME**

Una 1-forma si puo' integrare su una curva orientata, parametrizzata regolarmente  $\gamma(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ , sia  $\omega = a dx + b dy + c dz$  con  $a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{t_0}^{t_1} (a(\gamma) \dot{\gamma}_1 + b(\gamma) \dot{\gamma}_2 + c(\gamma) \dot{\gamma}_3) dt$$

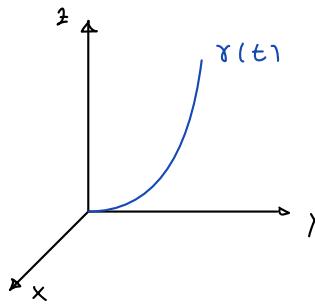
### ESEMPIO

$$\omega = x^2 dx + y^2 dy + z dz$$

$$\gamma(t) = (t, 0, t^2) \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int t^2 \cdot 1 + 0 + t \cdot 2t \, dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 \, dt = t^3 \Big|_0^1 = 1$$



### OSSERVAZIONE (Teoremi dei campi)

L'integrale di una 1-forma corrisponde al lavoro del campo vettoriale; allora nelle forme esatte si ereditano i teoremi dei campi conservativi

### ESEMPI

- 1  $\omega$  chiusa e dominio sem. connesso  $\Rightarrow \omega$  esatta
- 2  $\omega$  chiusa e dominio non sem. connesso  $\Rightarrow$  curva test
- 3  $\omega$  esatta e  $\gamma$  curva semplice chiusa  $\int_{\gamma} \omega = 0$

### ESEMPIO

Sia  $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + g(x,y) dy$ ,  $\exists g(x,y)$  per cui  $\omega$  esatta nel C.E.?

$\omega$  chiusa?

$$d\omega = \left( -\partial_y \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) + \partial_x g \right) dx \wedge dy = 0$$

$$\partial_x g = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \rightarrow g = \frac{y}{x^2+y^2} + h(y)$$

C.E.  $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$  non è semplicemente connesso, cerco curva test:

$$\gamma = (\cos t, \sin t) \dot{\gamma} (-\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot (\cos t) + h(\sin t) \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} h(\sin t) \cdot \cos t \, dt \quad \rightarrow \quad s = \sin t$$

$$= 0$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy \text{ è esatta} \quad \forall h \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\})$$

### ESEMPIO

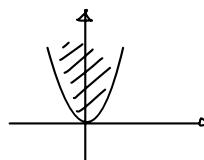
$\omega = -\frac{x}{y-x^2} dx + \frac{1}{2(y-x^2)} dy$  è esatta su  $\{y > x^2\}$ , trovare la primitiva e calcolare

$$\int_{\gamma} \omega, \quad \gamma = (t, 3+\sin t) \text{ con } t \in [0, \pi/2]$$

$$d\omega = \left( \partial_y \frac{x}{y-x^2} + \partial_x \frac{1}{2(y-x^2)} \right) dx \wedge dy$$

$$= \left( -\frac{x}{(y-x^2)^2} + \frac{2x}{2(y-x^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0$$

OK,  $\omega$  è chiusa,  $\{y > x^2\}$  è semplicemente connesso  $\Rightarrow \omega$  è esatta



Per la primitiva, cerco  $U$  tale che:  $dU = -\frac{x}{y-x^2} dx + \frac{x}{2(y-x^2)} dy$ , partiamo da:

$$\log(y-x^2) \xrightarrow{\text{derivo}} -\frac{1}{y-x^2} \cdot 2x dx + \frac{1}{y-x^2} dy$$

manca un  $\frac{1}{2}$ , quindi:

$$U = \frac{1}{2} \log(y-x^2) + C$$

L'integrale è su  $\gamma(t)$ , ma osservo che  $\gamma(t) \in \{y > x^2\}$ , infatti  $3+\sin t > 2 > t^2$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi/2} \frac{-t}{3+\sin t - t^2} + \frac{1}{2(3+\sin t - t^2)} \cdot \text{cost } dt \xrightarrow{\text{è complicato, meglio usare il potenziale}}$$

$$\int_{\gamma} \omega = U(\gamma(\pi/2)) - U(\gamma(0)) = \frac{1}{2} (\log(u - (\pi/2)^2) - \log(3))$$

### OSSERVAZIONE

1-forme si integrano sulle curve, le 2-forme sulle superfici regolari, le  $k$ -forme sui domini  $k$ -dimensionali regolari.

### INTEGRALI DI $N$ -FORME

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato,  $\omega \in \Lambda_d^n(\mathbb{R}^n)$  con  $\omega = \alpha(x_1 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$

$$\int_D \omega = \int_D \alpha(x_1 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

### ESEMPIO

$$\omega = x^2 dx \wedge dy ; Q = [0,1] \wedge [0,1]$$

$$\iint_Q \omega = \iint_Q x^2 dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy = 1/3$$

### ESEMPIO

$$\omega = x^3 z dx \wedge dz \wedge dy \text{ su } D = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\int_D \omega = \int_D x^3 z dx \wedge dz \wedge dy \xrightarrow{\text{Devo avere le variabili in ordine}}$$

$$= - \int_D x^3 z dx dy dz$$

### TEOREMA DI CARTAN (GAUSS - GREEN NELLE FORME)

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $\partial^+ D$  regolare e orientato positivamente; siano ora (equivalenti a  $F(P,Q)$ ,  $\text{rot}(F)_K$  nel teorema negli spazi):

$$\omega = P dx + Q dy \xrightarrow{\text{F(P,Q)}}$$

$$\phi \omega = (-Py + Qx) dx dy \xrightarrow{(\text{rot } F)_K}$$

allora:

$$\int_D d\omega \xrightarrow{} \iint (\text{rot } F)_K dx dy$$

il lavoro invece si ottiene come integrale sulle forme

$$\int_D d\omega = \int_{\partial^+ D} \omega$$

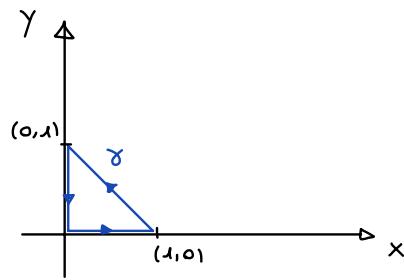
### ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Sia  $\omega = x^2 dx + y^2 dy$ , calcolare la circolazione sul triangolo D in figura ( $\partial^+ D = \gamma$ ) di vertici  $(0,0); (1,0); (0,1)$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_D d\omega = \int_D 2x dy \wedge dx + 2y dx \wedge dy$$

$$= 2 \int_D (y - x) dx \wedge dy = 2 \int_D (y - x) dx dy$$

$$= 2 \left[ -x + \int_0^1 y dy \right] dx = 2 \left[ -x + \frac{1}{2} y^2 \right] dx = 0$$



## ESERCIZI SU FORME DIFFERENZIALI

1. Sia  $\omega = \frac{x}{x^2+z^2} dx + y dy + \frac{z}{x^2+z^2} dz$  e' chiuso, esatto<sup>1</sup> nel suo dominio?

$$d\omega = \partial_z \left( \frac{x}{x^2+z^2} \right) dz \wedge dx + 0 + \partial_x \left( \frac{z}{x^2+z^2} \right) dx \wedge dz$$

$$d\omega = - \left( \frac{2xz}{(x^2+z^2)^2} \right) dx \wedge dz + \left( \frac{2xz}{(x^2+z^2)^2} \right) dx \wedge dz$$

$$d\omega = 0 \Rightarrow \text{chiusa}$$

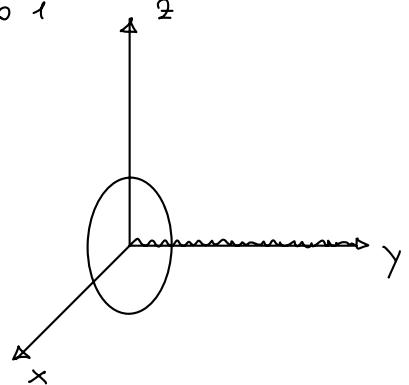
asse y

Il dominio e'  $\mathbb{R}^3 - \{x = z = 0\}$ , non e' perciò semplicemente connesso, a questo punto scelgo una curva test.

Ad esempio prendo una circonferenza su piano  $xz$ , di raggio 1

$$\gamma = (\cos t, 0, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \cos t (-\sin t) + \sin t (-\cos t) dt = 0 \text{ (esatta)}$$



Il potenziale e' semplice:

$$U = \frac{1}{2} \log(x^2 + z^2) + \frac{1}{2} y^2 + C$$

2.  $\omega = z dx \wedge dz + dy \wedge dz$ , trovare una primitiva di  $\omega$  e trovarle tutte.

$\omega \in \Lambda^2 d(\mathbb{R}^3)$  e chiusa, si vede subito; e esatta perché  $\mathbb{R}^3$  è semplicemente connessa.

$$\exists \alpha \in \Lambda^1 d(\mathbb{R}^3) : d\alpha = \omega$$

$$\alpha = z x dz + y dz$$

$$d\alpha = (2x) dx \wedge dz + (y) dy \wedge dz = z dx \wedge dz + dy \wedge dz$$

Le altre primitive sono del tipo:

$$\alpha = (zx + y) dz + \beta \quad \text{con } d\beta = 0, \text{ tanto } \beta \text{ in } \mathbb{R}^3 \text{ e anche esatta}$$

ma  $\beta \in C^2$ , quindi  $d^2 \beta = 0$ , per cui tutte le primitive si ottengono come

$$\alpha = (zx + y) dz + df \quad \text{con } df \in C^2$$

3.  $\gamma = (\cos t, \sin t)$ ;  $\omega = (y^2 + y) dx + x dy$ , mi chiedo se  $\omega$  e' chiusa, a quel punto l'integrale sarebbe nullo

$d\omega = 2y dy \wedge dx \Rightarrow \omega$  no chiusa, ma noto che  $y dx + x dy$  e' chiusa, quindi:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} y^2 dx + \int_{\gamma} \overline{\overset{0}{y dx + x dy}} = \int_{\gamma} y^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot (-\sin t) dt = \dots$$

# SUCCESSIONI DI FUNZIONI

## DISTANZA TRA FUNZIONI

Si sono due funzioni continue  $f, g$  in  $[0,1]$  come si fa a dire se sono vicine o lontane, ossia una relazione di distanza. Proviamo con qualche idea:

**Esempio 1.**: proviamo con la distanza tra punti  $|f(x_0) - g(x_0)|$ , ma dipende da  $x$ , quindi per eliminare questa dipendenza guardiamo il Sup della distanza:

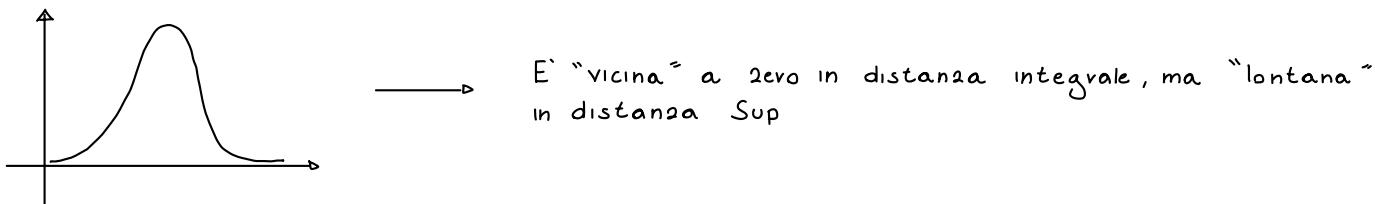
$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

questa è effettivamente una buona distanza.

**Esempio 2.**: proviamo con l'integrale e anche questa è una buona distanza (misura l'area tra le funzioni):

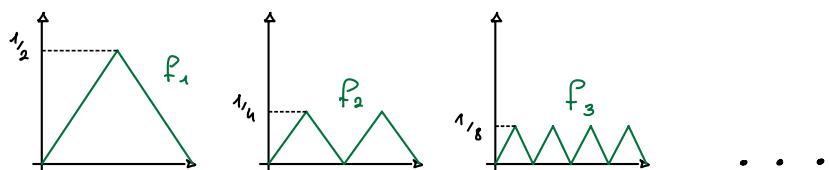
$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Tra le due c'è una bella differenza, consideriamo ad esempio:



⚠ La scelta del sistema di distanza dipende dal tipo di problema. Ad esempio la scala Mercalli va a vedere nelle zone in cui vi è stato un sisma e valuta le case crollate / crepate (fa una stima di Sup, ossia si guarda il massimo danno in una zona); la scala Richter invece misura l'energia sprigionata superficialmente dal sisma (stima con integrale)

**Esempio 3.** Prendiamo una successione di funzioni come in figura:



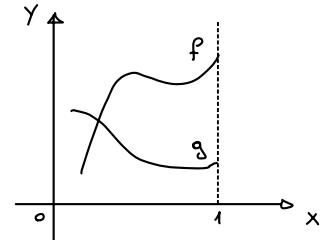
$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n - 0| = \frac{1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n - 0| = 0$$

misuriamo la lunghezza del grafico di  $f_n$ :  $L(f_n) = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La lunghezza del segmento  $[0,1]$  è chiaramente 1, quindi mentre con la distanza  $f_n - 0$  con la lunghezza  $f_n$  e 0 non sono vicine. → Questo perché  $L$  dipende dalle derivate, per cui la distanza giusta potrebbe essere:

$$\sup |f_n(x) - 0| + \sup |f'_n(x) - 0| = \frac{1}{n} + 1 \neq 0$$

$$\sup |f(x) - g(x)| + \sup |f'(x) - g'(x)|$$



## ESEMPI DI DISTANZE

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| DISTANZA DI SUP                | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> f - g _{C^0} = \sup  f(x) - g(x) </math></li> <li><math> f - g _{C^K} = \sup  f(x) - g(x)  + \sup  f'(x) - g'(x)  + \dots + \sup  f^{(K)}(x) - g^{(K)}(x) </math></li> <li><math> f - g _{L^1} = \int_0^1  f - g  dx</math></li> </ul> |
| DISTANZA DI LEBEGUE (L $\nu$ ) | <ul style="list-style-type: none"> <li><math> f - g _{L^2} = \left( \int_0^1  f - g ^2 dx \right)^{1/2}</math></li> <li><math> f - g _{L^4} = \left( \int_0^1  f - g ^4 dx \right)^{1/4}</math></li> <li><math> f - g _{L^\infty} =  f - g _{C^0}</math></li> </ul>                  |

## OSSERVAZIONE

$|f - g|_{L^2}$  e' una distanza che viene dal prodotto scalare  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$

## ESERCIZIO

$$f = x^2 \quad g = x$$

$d(f, g)$  su  $[0,1]$  con  $L^1, L^2, C^0$

$$|f - g|_{L^1} = \int_0^1 |x - x^2| dx = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$|f - g|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 |x^2 - x|^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{30}}$$

$$|f - g|_{C^0} = \sup |x^2 - x| = \frac{1}{2}$$

## LIMITE DI FUNZIONI

CONVERGERE UNIFORMEMENTE

Si dice che  $f_n \rightarrow f$  (converge) UNIFORMEMENTE su  $[0,1]$  se:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

CONVERGENZA PUNTUALE

Si dice che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  puntualmente se fissato  $x \forall x \in [0,1]$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$  ossia fisso  $x$  e mi muovo sulle  $n$

## ESEMPIO:

$f_n = x^n$  su  $[0,1]$

$$x^n \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [0,1] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Qui la convergenza e' puntuale

## ESEMPIO FONDAMENTALE

Sia  $f_n(x) = x^n$   $x \in [0, 1]$ , studiare la convergenza.

$x = 1 \rightarrow$  converge a 1 sempre

$$0 \leq x < 1 \rightarrow f_n \rightarrow 0$$

Quindi la successione tende alla funzione:

$$f_n(x) \rightarrow f \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

La funzione quindi converge puntualmente, ma anche uniformemente?

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$$

perciò  $f_n$  non converge ad  $f$  uniformemente su  $[0, 1]$

▽ Osserva che non basta prendere l'intervallo aperto  $[0, 1)$ , ossia togliendo il punto che potrebbe dare noia, per avere convergenza uniforme.

Se prendo invece:

$[0, d]$  con  $d < 1$  allora a quel punto

$$f_n \rightarrow f$$
 uniformemente su  $[0, d]$

▽ Studiare su  $[0, d]$  è diverso che su  $[0, 1]$ .

## ESERCIZIO

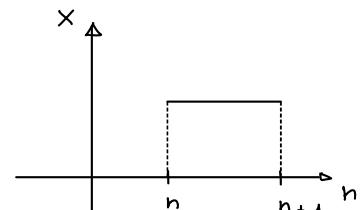
$$f_n \begin{cases} 1 & [n, n+1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\forall x$  si ha  $f_n(x) \rightarrow 0$  perche'  $f_n(x) = 0 \quad \forall n > x$   
per lo stesso motivo:

$\forall D > 0 \quad f_n \rightarrow 0$  uniformemente su  $[0, D]$  poiche'  $f_n = 0$  su  $[0, D] \quad \forall n > D$

Noto invece che il  $\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n - 0| = 1$  perche'  $|f_n - 0| = 1 \quad \forall x \in [n, n+1]$

$f_n$  non converge uniformemente su  $\mathbb{R}^+$



## ESERCIZIO

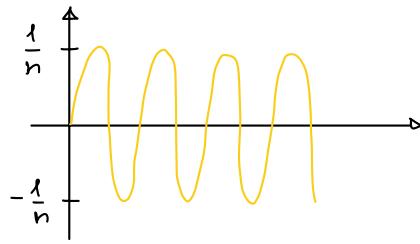
$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \text{ su } [0, 1]$$

La convergenza uniforme e' semplice:

$$\left| \frac{1}{n} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n}$$

ma  $\sup_{x \in [0,1]} |f_n - 0| \leq \frac{1}{n}$  e  $\frac{1}{n}$  converge

a zero quindi  $f_n \rightarrow 0$



Y In pratica se ho una  $\{a_n\}$  che moltiplica  $g_n$  ( $\sin, \cos, \dots$ ) allora se  $\{a_n\}$  converge a zero anche  $f_n = \{a_n\} \cdot g_n \rightarrow 0$

## OSSERVAZIONE

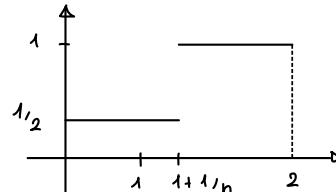
La convergenza uniforme su  $[0, 1] \Rightarrow$  convergenza  $L^1$  su  $[0, 1]$  perche'

$$\int_0^1 |f_n - f| \leq 1 \cdot \sup_{x \in [0,1]} |f_n - f|$$

## ESERCIZIO

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 + 1/n \\ 1/2 & x \leq 1 + 1/n \end{cases}$$

$$f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$



Convergenza puntuale:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & [0, 1] \\ 1 & (1, 2] \end{cases}$$

Infatti  $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \equiv 1/2 \quad \forall n ; \quad \forall x \in (1, 2] \quad f_n(x) \equiv 1 \quad \forall n$

Convergenza uniforme:

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n - f| = \sup_{x \in [1, 1 + 1/n]} |f_n - f| \text{ perche' per } x < 1 \text{ e } x = 2 \quad |f_n - f| \text{ vale}$$

sempre  $1/2$ . Nel mezzo invece  $[1, 1 + 1/n]$  vale  $1/2 \neq 0$  quindi non converge

Convergenza  $L^1([0, 2])$

$$\int_0^1 |f_n - f| = \int_1^{1 + 1/n} |f_n - f| dx = \int_1^{1 + 1/n} 1/2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$f_n \rightarrow f$  su  $[0, 2]$  anche in  $L^1$  (puntualmente)

Cerchiamo un intervallo su cui converge uniforme. Nota che il problema sta tra  $[1, 1 + 1/n]$  quindi ad esempio prendo:

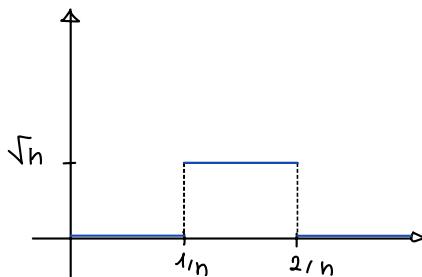
$[0, 1] \vee [d, 2]$  con  $d > 1$  perche' per  $n \rightarrow +\infty$

$$f_n = \begin{cases} 1/n & [0, 1] \\ 1 & [d, 2] \end{cases} \equiv f(x) \rightarrow f_n = f \text{ e converge}$$

### ESERCIZIO

$$f_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1/n \\ \sqrt{n} & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Puntuale su  $[0, 1]$
2. Uniforme su  $[0, 1]$
3. Per quali  $P$   $f_n \rightarrow f$  con  $L^P[0, 1]$



$f_n \rightarrow 0$  puntualmente perche':  $f_n(0) = 0 \forall n$  e fissato  $x_0 > 0$  per  $n > 2/x_0$  si ha  $f_n(x_0) = 0$

Convergenza uniforme:

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0, 2]} f_n(x) = \sqrt{n} \neq 0$$

non converge uniformemente, ma  $f_n \rightarrow 0$  uniforme su  $[d, 2]$  per  $d > 0$

Convergenza  $L^1$

$$\int_0^1 |f_n - f| dx = \int_0^1 f_n dx = \int_{1/n}^{2/n} \sqrt{n} dx = \left( \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right) \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \text{ converge a } 0 \text{ in } L^1$$

Convergenza in  $L^p$

$$|f_n - f|^p = \int_{1/n}^{2/n} (\sqrt{n})^p = \frac{1}{n} \cdot n^{p/2} \text{ quindi per } 1 \leq p < 2 \text{ } f_n \text{ converge}$$

### RAPPORTO DI CONVERGENZA PUNTUALE, UNIFORME, INTEGRALE

① UNIFORME  $\Rightarrow$  PUNTUALE

DIMOSTRAZIONE

Conv. uniforme su A indica  $\sup_{x \in A} |f_n - f| \wedge \varepsilon_n \rightarrow 0$ , ma allora

$$\forall x \in A \quad |f_n - f(x)| \wedge \sup_{x \in A} |f_n - f(x)| \wedge \varepsilon_n \rightarrow 0$$

②  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente su A compatto  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  in  $L^p(A)$  per  $p > 1$

DIMOSTRAZIONE (per  $L^1$ )

$$\int_A |f_n - f| dx \leq \int_A \sup_{x \in A} |f_n - f| dx \leq \text{mis}(A) \cdot \sup_{x \in A} |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ (FINE)}$$

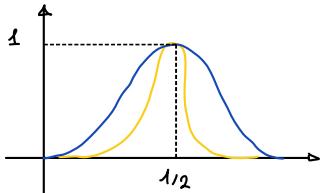
▼ La seconda non vale sempre se A non e' compatto.

### OSSERVAZIONE

Prendiamo una  $f_n$  del tipo, ossia che mano a mano che vado avanti si strizza sempre di più, allora:

$$f_n \rightarrow 0 \text{ in } L^1, \text{ ma } f_n \text{ converge puntualmente: } f_n \rightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 1/2 \\ 1 & x = 1/2 \end{cases}$$

quindi  $f_n \rightarrow 0 \forall x \in [0,1]$  poiché gli integrali non vedono ciò che succede punto per punto.



### PROPOSIZIONE

Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  su  $[0,1]$  allora  $\exists$  sottosuccessione  $f_{n_k} \rightarrow f$  a meno di un numero finito di  $x$

## TEOREMI DI PASSAGGIO AL LIMITE

### 1. TEOREMA (CONTINUITÀ E CONVERGENZA)

Siano  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, con  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $I \Rightarrow f$  è continua

#### DIMOSTRAZIONE

Voglio mostrare che  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_0) = f(x_0)$  con  $x_0 \in I$ . Ho che le  $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$  su  $I$ , ovvero  $\exists \bar{m} : \sup_I |f_n - f| < \varepsilon/4 \quad \forall n \geq \bar{m}$ ;

Ho che  $f_{\bar{m}}$  è continua in  $x_0$ , ovvero  $\forall \varepsilon \exists \delta : |f_{\bar{m}}(x) - f_{\bar{m}}(x_0)| < \varepsilon/4$  se  $|x - x_0| < \delta$  allora  $\forall \varepsilon \exists \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , infatti

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{\bar{m}}(x) + f_{\bar{m}}(x) - f_{\bar{m}}(x_0) + f_{\bar{m}}(x_0) - f(x_0)|$$

$$\begin{aligned} &\leq |f(x) - f_{\bar{m}}(x)| + |f_{\bar{m}}(x) - f_{\bar{m}}(x_0)| + |f_{\bar{m}}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \sup_I |f(x) - f_{\bar{m}}(x)| + |f_{\bar{m}}(x) - f_{\bar{m}}(x_0)| + \sup_I |f_{\bar{m}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta \text{ quindi } f \text{ è continua} \end{aligned}$$

#### OSSERVAZIONE

La convergenza puntuale non basta, ad esempio  $x^n$  su  $[0,1]$  conv. puntualmente ed è continua in  $[0,1]$ , ma non uniformemente infatti:

$$f_n \rightarrow \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ non è continua su tutto } [0,1]$$

## 2. TEOREMA DI SCAMBIO DEI LIMITI

$f_k \rightarrow f$  uniformemente su  $I$ . Supponiamo che  $\forall K$  esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_K \in \mathbb{R}$ , allora esistono e sono uguali i limiti seguenti:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{K \rightarrow +\infty} f_k(x) \right)$$

### DIMOSTRAZIONE

Voglio dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} l_K$  esiste:  $\forall \varepsilon \exists \bar{m}$  t.c.  $\sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k > \bar{m}$

allora  $\forall x \quad |f_k(x) - f_n(x)| \leq |f_k - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|$

$\leq |f_k - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon + 2 < 2\varepsilon$  per  $n, k > \bar{m}$ , ciò significa che se

Paccio limite per  $x \rightarrow x_0$  nell'equazione sopra, ottengo:

$|l_K - l_n| < 2\varepsilon \quad \forall k, n > \bar{m} \Rightarrow \langle l_n \rangle_n$  è successione di Cauchy  $\Rightarrow l_n$  converge

ciò significa che  $\exists \ell \in \mathbb{R} : l_n \rightarrow \ell$ , da qui, dato  $\varepsilon$ ,  $\exists \bar{m}$  tale che:

$$1. \sup_x |f_{\bar{n}}(x) - f(x)| < \varepsilon/4$$

$$2. |\ell_{\bar{n}} - \ell| < \varepsilon/4$$

$$3. \exists \delta : |f_{\bar{n}}(x) - \ell_{\bar{n}}| < \varepsilon/4$$

Allora dato  $\varepsilon \exists \delta$  tale che:

$$|f(x) - \ell| < |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - \ell_{\bar{n}}| + |\ell_{\bar{n}} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \quad (\text{FINE})$$

## 3. PASSAGGIO DEL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

Sia  $f_k$  integrabile su  $[a, b]$  e  $f_k \xrightarrow{\text{uni}} f$  su  $[a, b]$  e  $f$  integrabile, allora:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

### DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f_k - f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_k - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_x |f_k - f(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### OSSERVAZIONE

Se prendo  $f_k$  continue su  $[a, b]$ , allora:

1.  $f_k$  integrabili su  $[a, b]$

2.  $f$  continua  $\Rightarrow$  integrabile su  $[a, b]$

## ESERCIZIO

$f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ , studiare convergenza su  $[0,1]$  e dire se

$$\lim_n \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 f dx$$

$f_n \rightarrow 0$  puntualmente  $\forall x$

$\sup_{[0,1]} |f_n| = ?$  cerchiamo il massimo dato che  $f_n$  è continua

$$nx e^{-nx^2} - 2x^2 n^2 e^{-nx^2} = 0$$

$$1 - 2x^2 n = 0$$

$$x = 1/\sqrt{2n} \text{ max}$$

$\max_{[0,1]} f_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-1/2} = +\infty$  non converge a  $f$  uniformemente

Il secondo punto non è perciò garantito dal problema, verifichiamolo

$$\int_0^1 f dx = 0$$

$$\lim_n \int_0^1 nx e^{-x^2 n} dx = \lim_n -\frac{1}{2} \int_0^1 -2nx e^{-x^2 n} = \lim_n -\frac{1}{2} e^{-x^2 n} \Big|_0^1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} (e^{-n} - e^1) = \frac{1}{2e} \neq 0 \quad \text{quindi non converge L'}$$

## 4. PASSAGGIO DEL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA

Sia  $f_n \in [a,b]$  funzioni  $C^1([a,b])$  e sia  $x_0 \in [a,b] : f(x_0) = L$ .  
Sia  $g$  tale che  $f'_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} g_x$  su  $[a,b]$  allora:

$\exists f \in C^1[a,b]$  tale che  $f'_n \rightarrow f'$

## OSSERVAZIONE

Il punto è saper dimostrare che  $\exists f$  tale che  $f' = g$ , inoltre è fondamentale conoscere il  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n$  in almeno un  $x_0$ .

## DIMOSTRAZIONE

Scriviamo  $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n dx$  (dal Th. calcolo integrale). Allora per convergenza uniforme  $g$  è continua e quindi integrabile.

Inoltre:  $\int f'_n \rightarrow \int g$

Definisco perciò  $f = L + \int_{x_0}^x g dx$ ; voglio far vedere che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $[a,b]$ .

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_0) - L + \int_{x_0}^x f'_n dx - \int_{x_0}^x f dx| \leq |f_n(x_0) - L| + \left| \int_{x_0}^x (f'_n - f) dx \right|$$

$$\leq |f_n(x_0) - L| + (b-a) \sup_x |f'_n - f| \text{ ma questo va a zero indipendentemente da } x$$

$$\Rightarrow \sup_x |f_n - f| \leq |f_n(x_0) - L| + (b-a) \sup_x |f'_n - f| \rightarrow 0$$

Quindi  $f_n \rightarrow f$  (FINE)

### 5. TEOREMA

Siano le  $f_n$  derivabili in  $[a,b]$  e sia  $x_0 \in [a,b]$  tale che  $f_n(x_0) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ , supponiamo ora che  $f'_n \rightarrow g$  uniformemente in  $[a,b]$ , allora  $\exists f$  derivabile tale che  $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$  e  $f'_n \rightarrow f'$

Notare che  $f'_n$  non devono essere continue.

### TEOREMA DI MONOTONIA

1. Sia  $[a,b] = I$  e  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  successione di funzioni continue monotona

rispetto a  $K$  (ossia se  $K$  cresce / decresce se  $f_k$  cresce,  $\forall x, K$ )

Supponiamo ora che  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  puntualmente su  $[a,b]$  e  $f$  continua su  $[a,b]$ , allora  $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$

#### OSSERVAZIONE

Se  $f$  non è continua, il Th. non vale, ad esempio: (anche la chiusura dell'intervallo è fondamentale)

$$f_n = x^n \quad f_n \rightarrow \begin{cases} 0 & [0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

$x^n$  è continua e monotonica crescente in  $[0,1]$  ma  $x^n$  non converge a  $\begin{cases} 0 & [0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$

2. Siano  $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f_n$  crescenti (o decrescenti) su  $[a,b]$ , con  $f_n \rightarrow f$  puntualmente su  $[a,b]$  e  $f$  continua allora:

$$f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$$

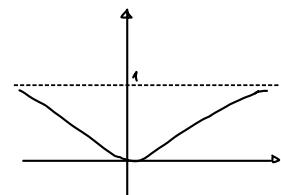
#### ESERCIZIO

Sia  $f_k = \frac{x^2}{k+x^2}$  e  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , convergenza:

1.  $f_k(x) \rightarrow 0 \quad \forall x, k \rightarrow +\infty$ , allora

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_k(x) - 0| = \sup_{\mathbb{R}} f_k \geq 1 \quad (\text{poiché } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 1),$$

quindi  $f_k \not\rightarrow 0$  uniformemente su  $\mathbb{R}$



#### OSSERVAZIONE

Nei teoremi di monotonia anche la limitatezza dell'intervallo è necessaria

## Esercizi sulle successioni

①  $f_n(x) = n \int_0^x y^2 e^{-n^2 y^2} dy$  dire se converge puntualmente su  $\mathbb{R}$  o uniformemente

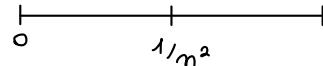
1. Chiamo  $g_n = ny^2 e^{-n^2 y^2}$ , in modo da usare i teoremi di passaggio al limite (per  $x$  fisso) voglio far vedere che, fissato  $x$ ,  $g_n(y) \xrightarrow{\text{uni}} g$  su  $[0, x]$

$g_n(y) = ny^2 e^{-n^2 y^2}$ , domina l'esponenziale quindi puntualmente  $g_n \rightarrow 0 \forall y \in \mathbb{R}$

Convergenza uniforme  $\sup_x |g_n(y)|$ , ha un massimo:

$$g_n' = 2ny e^{-n^2 y^2} - 2n^3 y^2 e^{-n^2 y^2} = 0$$

$$2ny e^{-n^2 y^2} (1 - n^2 y) = 0$$



$$y = \frac{1}{m^2}$$

2. Studio il segno solo per  $y \in (0, +\infty)$  perché  $g_n$  è pari

$$g_n(1/m^2) = \frac{m}{m^4} e^{-m^2/m^4} = \frac{1}{m^3} e^{-1/m^2} \rightarrow 0$$

$$\forall x \sup_{[0, x]} |g_n - g| = \sup_{[0, x]} g_n \leq \sup_{\mathbb{R}^+} g_n = g_n(1/m^2) \rightarrow 0$$

quindi  $g_n \rightarrow g$  uniformemente su  $\mathbb{R}^+$ , allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_n(x) = \int_0^x \lim_m g_n(y) dy = 0 \quad \text{quindi converge a 0 puntualmente su } \mathbb{R}$$

2.  $f_n(x) = n \int_0^x y^2 e^{-n^2 y^2} dy$ , convergenza sui compatti è facile perché  $g_n \geq 0$   
quindi  $\int_0^x g_n(y) dx$  è crescente in  $[0, x]$  per il teorema di monotonia converge a 0

② Sia  $f_n(x) = \frac{2}{1-5nx}$ , trovare un insieme di convergenza

$$f_n: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{5n} \right\}, \text{ però per } x > 0 \quad f_n \text{ è definita per } m > \frac{1}{5x}.$$

possiamo studiare la convergenza puntuale su  $\mathbb{R}$ :

$$f_n(0) = 2$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \neq 0$$

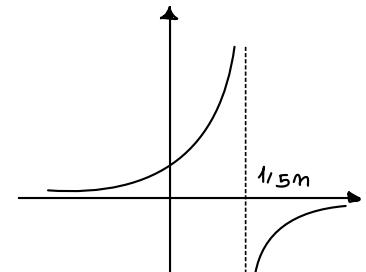
$$f_n \begin{cases} 2 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

Chiaramente non può essere uniformemente convergente su tutto  $\mathbb{R}$ , devo tagliare lo zero. Studio su  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

$$\sup_{(-\infty, -a]} |f_n - f| = \sup_{(-\infty, -a]} f_n = f_n(-a) \rightarrow 0$$

$$\sup_{[a, +\infty)} |f_n - f| = \sup_{[a, +\infty)} f_n \rightarrow 0$$

converge a zero su  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$  e  $a > 1/5n$



③ Ricordiamo che se  $f_n$  continua,  $f_n \rightarrow f$  puntualmente,  $f$  continua non significa che anche uniformemente, ad esempio:

$$f_n(x) = nx e^{-nx^2}, f_n \text{ continua}, f_n \rightarrow 0 \text{ su } [0,1] \text{ puntualmente, ma}$$

$$\sup_{[0,1]} |nx e^{-nx^2}| = \max_{[0,1]} f_n = \sqrt{\frac{n}{2e}} \rightarrow +\infty \text{ (non converge)}$$

④ Studiare la convergenza di  $f_n = \frac{x-1}{x^n}$  su  $[1, +\infty]$ , cosa succede su  $(0,1)$ ?

1. Fissiamo  $x > 1$  e mandiamo  $n \rightarrow +\infty$ ,  $f_n \rightarrow 0$ ;  $f_n(1) = 0 \forall n$  quindi  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente su  $[1, +\infty)$ .

2. Fissiamo  $n > 1$  e facciamo i limiti agli estremi dell'intervallo:

$$f_n(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0$$

Notiamo ora che in  $[1, +\infty)$   $f_n$  è continua, quindi ha Max

$$f_n' = (1-x)x^n + nx^{-(n+1)} = \frac{(1-n)x + n}{x^{n+1}} \Rightarrow \text{è zero per } x = \frac{n}{n-1}$$

$$f_n\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{\frac{n}{n-1} - 1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{1/e} = 0$$

Si ha che  $f_n \xrightarrow{\text{UNI}} 0$  su  $[1, +\infty)$

3. Cosa succede in  $0 < x < 1$ ,  $x^n \rightarrow 0^+$  e  $f_n \rightarrow -\infty$ , quindi diverge  $\forall x$

⑤  $f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  per  $[0, +\infty)$ , dal limite notevole sappiamo che

$f_n(x) \rightarrow e^x \forall x$  puntualmente.

1. Uniforme, fissiamo  $m$  e calcoliamo:

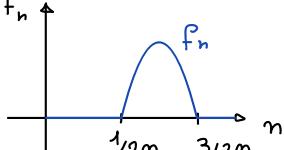
$\sup |f_n(x) - e^x|$ , va più veloce  $e^x$  quindi il limite va a  $+\infty$  e  $f_n$  non converge uniformemente in  $[0, +\infty)$

$$⑥ f_n = \begin{cases} -4(m^2+1)x^2 + 8\frac{(m^2+1)}{m}x - 3(m^2+1) & \text{per } \frac{1}{2m} < x < \frac{3}{2m} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$f_n(x) = 0 \forall m$  e  $\forall x \leq 0$ , fissato  $x_0 > 0$  si ha  $f_n(x_0) = 0$  definitivamente quindi  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente

2. Osserviamo che in realtà è una parabola:

$$-4(m^2+1)x^2 + 8\frac{(m^2+1)}{m}x - 3(m^2+1) = -4(m^2+1)\left(x - \frac{1}{2m}\right)\left(x - \frac{3}{2m}\right)$$



→ Prendo il vertice, che è in  $1/m$ , facciamo  $f_n(1/m)$  che è il  $\sup = \frac{m^2+1}{m^2} \rightarrow 1 \neq 0$  (non converge)

7)  $f_n(x) = \sqrt[m]{2 + m^2 x^2}$  convergenza su  $\mathbb{R}$  ( $f$  è pari quindi posso studiarla su  $\mathbb{R}^+$ )

1. Fisso  $x$ ,  $f(0) = \sqrt[m]{2} \rightarrow 1$ ,  $x > 0$   $f_n(x) \rightarrow 1$ , convergenza uniforme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{2 + m^2 x^2} = +\infty \quad \text{quindi il Sup è } +\infty \quad (\text{non converge a 1 su } [0, +\infty))$$

# SERIE DI FUNZIONI

## RICHIAMO SULLE SERIE NUMERICHE

Siano  $a_k \in \mathbb{R}$ , faccio la somma  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e la chiamo serie numerica; che legame c'è con le successioni?

Consideriamo e chiamiamo  $\sum_{k=0}^n a_k$  somme parziali  $S_n$ . Allora si ha che la serie converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = S$$

## SERIE A TERMINI POSITIVI ( $a_k \geq 0 \forall k$ )

Prendiamo 3 serie famose:

### 1. SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

La somma parziale

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{a_2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{a_n}$$

Moto che si cancellano  $a_2 a_2$ , per cui:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

! Le serie di questo tipo si chiamano **Telescopiche** (rimane solo il primo e l'ultimo termine)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

### 2. SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \text{ con } q > 0$$

$$(1-q) \underbrace{(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n)}_{S_n} = 1-q+q-q^2+q^2-q^3+\dots+q^{n-1}-q^n$$

$$S_n \cdot (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{per } q \neq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad \text{se } q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \quad \text{se } q > 1$$

Quindi se  $q < 1$  la serie converge a  $\frac{1}{1-q}$

### 3. SERIE ARMONICA

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Notiamo graficamente che:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

Cio' significa che quando faccio la somma infinita:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty, \text{ ossia la serie non converge}$$

A desso generalizziamola:

$$K \leq x \leq K+1 \text{ allora } \frac{1}{(K+1)^{\alpha}} \leq \frac{1}{x^{\alpha}} \leq \frac{1}{K^{\alpha}} \rightarrow \frac{1}{(K+1)^{\alpha}} \leq \int_K^{K+1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \leq \frac{1}{K^{\alpha}}$$

e la serie non converge per  $\alpha \leq 1$ , per  $\alpha > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ converge se } \alpha > 1$$

### SERIE A SEGNI ALTERNI E VARIABILI

#### SEGNI VARIABILI

$$\sum_k a_k \text{ con } a_k \in \mathbb{R}$$

#### SEGNI ALTERNI

$$\sum_k (-1)^k a_k \text{ con } a_k \in \mathbb{R}^+$$

#### CRITERIO DI LEIBNITZ

Se  $a_k \rightarrow 0$ , allora  $\sum_k (-1)^k a_k$  converge

⚠  $|a_k| \rightarrow 0$  e' condizione necessaria ma non sufficiente

#### TIPI DI CONVERGENZA

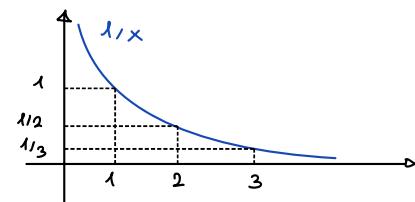
Prendiamo ad esempio la serie armonica

$$S = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$S \cdot \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$S + \frac{1}{2} S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = S \quad (\text{⚠})$$

⚠ Cio' significa che per le serie non valgono proprieta' associativa e commutativa



## TEOREMA DI REIMANN - DINI

Sia  $\sum_k a_k$  convergente,  $a_k \in \mathbb{R}$  ma  $\sum_k |a_k| = +\infty$  (diverge), allora scelto un numero  $S \in \mathbb{R}$ , esiste una permutazione  $i(k)$  degli indici:

$$\sum_k a_{i(k)} = S$$

- ▼  
o Ossia sono serie brutte

Se  $\sum_k |a_k|$  e' convergente, allora la serie si dice **ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE**.

## OSSERVAZIONE

ASSOLUTA CONVERGENZA  $\Rightarrow$  CONVERGENZA

## Criteri di convergenza (SERIE A TERMINI POSITIVI)

### 1. CONFRONTO

Siano  $a_k, b_k$  tali che  $0 \leq a_k \leq b_k$  definitivamente, se  $\sum_k a_k$  diverge allora  $\sum_k b_k$  diverge, se  $\sum_k b_k$  converge allora  $\sum_k a_k$  converge

### 2. CONFRONTO ASINTOTICO

Siano  $a_k, b_k \geq 0$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l > 0$ , allora  $\sum_k a_k$  converge  $\Leftrightarrow \sum_k b_k$  converge

#### DIMOSTRAZIONE

Definitivamente poiche'  $a_k/b_k \rightarrow l$ , vuol dire che  $l_{1/2} \leq a_k/b_k \leq 3_{1/2} l$ , allora  $l_{1/2} b_k \leq a_k \leq 3_{1/2} l b_k$  poi uso il confronto (FINE)

### 3. CRITERIO DELLA RADICE

Sia  $a_n \geq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , allora:

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$  converge
- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$  diverge
- $l = 1$  non si sa nulla

### 4. CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia  $a_n \geq 0$  e sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  allora:

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty$
- $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$  converge

## SERIE DI POTENZE

### CRITERIO GENERALE

Una serie di potenze e' del tipo:

$$\sum_n a_n (x - x_0)^n \quad \text{con } a_n \in \mathbb{R} \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}$$

usiamo il criterio della radice (fissando la  $x$ ):

$\sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|}$ , se  $\sqrt[n]{|a_n|} = l$  allora la radice tende a  $l|x - x_0|$ , quindi:

$\sum a_n (x - x_0)^n$  converge per  $|x - x_0| < 1/l$

## ESERCIZI SU SERIE DI FUNZIONI

1.

$$\sum_n x^n \text{ con } x \in \mathbb{R}^+$$

Iniziamo fissando  $x$ , ad esempio  $x > 1$ , la serie diverge. Se  $|x| < 1$  allora

$\sum |x|^n$  e' una serie geometrica con argomento minore di 1  $\Rightarrow \sum x^n$  converge assolutamente

Per  $x = 1$  si ha la  $\sum 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$ , la serie diverge

▽ In pratica abbiamo studiato la convergenza puntuale

2.

$\sum \frac{1}{2^n} x^n$ , ma ci si riconduce a  $\sum x^n / 2^n = \sum \left(\frac{x}{2}\right)^n$  e ci troviamo nel caso di prima, che converge solo per  $|x| = 2$  e converge a  $\frac{1}{1 - x/2} = \frac{2}{2 - x}$

3.

Studiare la somma di  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n^2}$ .  $\rightarrow \sin(x)$  non dipende da  $n$ , quindi si puo' portare fuori:

$$\sin(x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sin x$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

SERIE NOTEVOLI

La convergenza e' totale, infatti:

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{n^2} \right| < 1/n^2 \text{ e } \sum 1/n^2 < +\infty$$

X CASA prova  $\sum \frac{\cos(nx)}{n^4 + n^2}$

4. Studiare per  $x \geq 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^3}$ , studiamo per  $x=0$  e  $x>0$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^3} \quad \nabla \text{ Per } x=0 \text{ la serie converge}$$

Per  $x>0$  si ha:  $x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^3} < \frac{1}{n^2} < +\infty$  e quindi converge puntualmente su  $\{x \geq 0\}$

Studiamo la convergenza totale:

$$\sup_{x \geq 0} \frac{x}{n^2 + x^3} = f_n(x)$$

$$f_n(0) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2 + x^3} = 0 \quad ; \quad f_n \geq 0 \text{ quindi ho un massimo su } [0, +\infty)$$

$$f_n'(x) = \frac{(n^2 + x^3) - x(3x^2)}{(n^2 + x^3)^2} \Rightarrow n^2 - 2x^3 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{n^2/2}$$

$$\max(f_n) = f_n(\sqrt[3]{n^2/2}) = \frac{\sqrt[3]{n^2/2}}{n^2 + n^2/2} = \sqrt[3]{n^2/2} \cdot \frac{2}{3n^2}$$

La convergenza totale si ha:

$$\sum_m \sup_{x \geq 0} |f_m| = \sum_m \sqrt[3]{m^2/2} \cdot \frac{2}{3m^2} = 0 \rightarrow \text{conv. totale su } x \geq 0$$

5. I  $\frac{x^n}{n!}$  converge su  $\mathbb{R}$ ? Come?

$\forall x \quad \sum_n \frac{x^n}{n!} = e^x$  perche'  $\sum \frac{x^n}{n!}$  e' lo sviluppo di Taylor

quindi converge a  $e^x$  puntualmente, vediamo la convergenza totale:

$$\sup_{\mathbb{R}} \frac{x^n}{n!} = +\infty \rightarrow \text{no totale, ma e' uniforme?}$$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| e^x - \sum_{k=0}^K \frac{x^k}{k!} \right| = +\infty$$

### TEOREMA SU CONVERGENZA E SVILUPPO DI TAYLOR

Sia  $f \in C^\infty$  in  $(x_0 - r, x_0 + r)$ ,

se  $\exists M > 0 : |f^{(k)}(x)| < \frac{M k!}{r^k} \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad \forall k$  allora:

- $f$  e' sviluppabile in serie di Taylor, ossia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ su } (x_0 - r, x_0 + r)$$

- La convergenza e' uniforme

### DIMOSTRAZIONE

$$\begin{aligned} \text{Prendiamo } & \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \stackrel{\text{RESTO DI LAGRANGE}}{=} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \\ \text{che e' piu' piccolo di } & \frac{M (n+1)!}{r^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{r} \text{ e} \\ \text{questo tende a 0 se } & |x - x_0| < r \\ \sup & \left| f - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f \text{ converge uniformemente su } (x_0 - r, x_0 + r) \end{aligned}$$

### ESEMPIO

$\sin x$  e  $\cos x$  sono sviluppabili in 0 e la convergenza alla serie di Taylor e' uniforme sui compatti perche':

$$|\cos^{(n)} x| < 1 \quad \forall x, n$$

$$|\sin^{(n)} x| < 1 \quad \forall x, n$$

Converge uniforme sui compatti, comunque preso un  $r$

### TEOREMA SU CONTINUITÀ

Siano  $a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue e sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$  uniformemente convergente su  $I$ , allora la somma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \text{ e' una funzione continua su } I$$

### TEOREMA PASSAGGIO ALLA DERIVATA

Siano  $a_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili tali che:

1  $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n(x)$  e' UNIFORMEMENTE SOMMABILE in  $(a, b)$ , ossia la somma esiste e converge

$$\text{a } G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(x)$$

2  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$  converge in almeno un punto  $x_0 \in (a, b)$

Allora  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$  CONVERGE UNIF. SU  $(a, b)$  e preso  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$  allora

$$F'(x) = G(x) \text{ su } (a, b)$$

### TEOREMA DI PASSAGGIO ALL'INTEGRALE

Sia  $a_n$  limitato ed integrabile su  $[a, b]$  e sia  $\sum a_n(x)$  uniformemente su  $[a, b]$ , e  $S(x) = \sum a_n(x)$  allora  $S(x)$  e' integrabile su  $[a, b]$  e:

$$\int_a^b S(x) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx$$

### DIMOSTRAZIONE DEI 3 TEOREMI

Si applicano i teoremi di passaggio al limite per successioni di funzioni a  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$

#### ESEMPI DI APPLICAZIONE

1. Calcolare la serie di  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;

$x=0 \rightarrow$  converge a zero (mi serve almeno un punto per applicare le derivate)  
Guardiamo la serie delle derivate:

$$\sum a'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ converge puntualmente in } [0, 1] \text{ e uniformemente}$$

in  $[0, 1-\varepsilon]$ , ma e' una serie geometrica quindi sappiamo quanto fa, perche':

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ quindi applico il Th di passaggio delle derivate:}$$

$$S'(x) = \frac{1}{1-x}, \quad S(0) = 0$$

$$S(x) = -\log(1-x), \text{ ossia } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \text{ uniformemente su } [0, 1-\varepsilon] \text{ e puntualmente su } |x| < 1$$

2. Calcolare  $\int_{3/2}^2 \sum_{n \geq 0} (x-2)^n dx$  con una precisione migliore di  $\frac{1}{100}$ , ossia alla 3<sup>a</sup> cifra decimale.

$\sum (x-2)^n$  ha centro 2 e raggio 1  $\rightarrow$  converge puntualmente su  $|x-2| < 1$  ossia  $1 < x < 3$ , uniformemente su  $|x-2| \leq 1 - \delta$  ovvero  $1 + \delta \leq x \leq 3 - \delta$ , per cui  $[3/2, 2]$  va bene, applico l'integrazione per serie:

$$\begin{aligned} \sum \int (x-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} \right]_{3/2}^2 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \text{ faccio } a_n(1), a_n(2), \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} \text{ ma } \frac{1}{5 \cdot 2^5} < \frac{1}{100} \text{ quindi mi fermo,} \end{aligned}$$

$$\int_{3/2}^2 \sum (x-2)^n dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{150} = 0,401 \pm \frac{1}{100}$$

### TEOREMA GENERALE SU SERIE DI POTENZE

Sia  $\sum a_n(x-x_0)^n$  serie di potenze con raggio di convergenza  $R$ , allora

1. La serie converge unif. e tot. per  $|x-x_0| \leq R$  comunque scelto un  $r < R$
2.  $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$  è continua su  $|x-x_0| < R$
3. La serie delle derivate  $\sum n a_n(x-x_0)^{n-1}$ , questa ha raggio di convergenza  $R$  e vale:

$$f'(x) = \sum n a_n(x-x_0)^{n-1} \text{ su } |x-x_0| < R$$

4. La serie delle primitive  $\sum \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$  ha raggio di convergenza  $R$  e vale
- $$\sum \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \int_{x_0}^x f(s) ds \text{ su } |x-x_0| < R$$

5.  $f$  è  $C^\infty$  su  $|x-x_0| < R$

$$6. a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

### DIMOSTRAZIONE

1.  $\sup_{|x-x_0| < r} |a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n|r^n$ , ma  $\sum a_n r^n$  converge, poiché  $r < R$ , quindi siamo nell'insieme di convergenza puntuale. Perciò  $\sum \sup |a_n(x-x_0)^n| < +\infty$  e la serie converge totalmente ( $\Rightarrow$  uniformemente) su  $|x-x_0| < r$

2. Uso il Th. sulla convergenza uniforme (gli  $a_n$  sono tutte funzioni continue)

3. Supponiamo che si possa determinare il raggio con il criterio della radice, cioè  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{R}$ , allora:

$$\begin{aligned} \sum n a_n (x-x_0)^{n-1} &= \sum (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n, \text{ applico radice } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(n+1) a_{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) = 1/R \end{aligned}$$

4. Analogamente a 3.

5. Ripeto 3. quante volte voglio

6. Derivo  $f$   $K$ -volte

$$f^{(k)}(x) = \sum m(m-1)(m-2) \cdots (m-k+1) a_n (x-x_0)^{m-k}$$

scelgo  $x = x_0$  e nella serie resta solo il termine  $n = k$

$$f^k(0) = k(k-1) \cdots (1) a_k = k! a_k$$

### ESEMPIO

Sviluppare in zero  $\log(1+x)$  per  $|x| < 1$

$$\frac{d}{dt} \log(1+t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \text{ e questa converge uniformemente sui compatti}$$

in  $|t| < 1$ , allora scelto  $x < 1$ , integro in  $(0, x)$  entrambi i membri

$$\int_0^x \frac{d}{dt} \log(1+t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt, \text{ uso passaggio integrale:}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

### TEOREMA DI ABEL

Sia  $\sum a_n x^n$  serie con raggio  $R \in \mathbb{R}^+$ ,

1. Se  $\sum a_n R^n$  converge, allora  $\sum a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (ossia e' continua fino al bordo sx)

2. Se  $\sum a_n (-R)^n$  converge allora  $\sum a_n (-R)^n = \lim_{x \rightarrow R^+} \sum a_n x^n$  (ossia lo e' anche a dx)

### ESEMPIO

Abbiamo visto che  $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n$ , ora per  $x = +1$  si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 1 / n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \text{ che converge, allora Th Abel:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 1 / n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log(1+x) = \log(2)$$

▼ La serie armonica  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log 2$

## ESERCIZI SU SERIE DI POTENZE

1.  $\sum_{n \geq 1} x e^{-nx}$  su  $\mathbb{R}$ , studio la convergenza puntuale in  $\mathbb{R}^+$ :

$$\begin{array}{ll} x = 0 & \sum a_n(x) = 0 \\ x \rightarrow +\infty & \sum a_n(x) \rightarrow 0 \end{array}$$

La serie converge puntualmente e su  $\mathbb{R}^+$  e non converge in  $\mathbb{R}^-$ .

Vediamo la convergenza totale su  $\mathbb{R}^+$ :

$$a_n(0) = 0$$

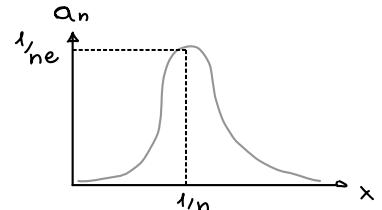
$$a_n(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty \quad \forall N$$

Se è continua e infinitesima agli estremi significa che ha un Max su  $[0, +\infty)$

$$a'_n(x) = e^{-nx} - n \cdot x e^{-nx} = 0$$

$$1 - nx = 0$$

$$x = \frac{1}{n}$$



$$a_n(1/n) = e^{-1}/n \text{ che è la serie armonica } \frac{1}{e} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ che diverge.}$$

Cerchiamo un compatto osservando graficamente:

basta prendere un compatto del tipo  $[\delta, +\infty)$   $\forall \delta > 0$  poiché  $\forall \delta \exists m_0$  tale che definitivamente  $\delta > 1/n$  su  $n > m_0 \rightarrow a_n(x)$  è decrescente quindi:

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sup_{[\delta, +\infty)} |a_n(x)| \right) = \sum_{n \geq 0} a_n(\delta) \leftarrow +\infty \text{ e converge totalmente}$$

$$2. \text{ Convergenza di } \sum_{n \geq 1} \frac{(\log n)^{nx}}{n^n} = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(\log n)^x}{n} \right)^n$$

$$x = 0 \quad \sum a_n \rightarrow 0$$

$$x > 0, \text{ criterio radice } \sqrt[n]{(\log n)^x} = (\log n)^{x/n} \rightarrow 0$$

$$x < 0 \quad \sum a_n \rightarrow 0$$

Quindi ho convergenza puntuale in tutto  $\mathbb{R}$ , convergenza totale

$$\frac{(\log n)^{nx}}{n^n} \rightarrow +\infty \text{ se } x \rightarrow \pm \infty \text{ fissato } n > 2, \text{ quindi non c'è conv. tot in } (-\infty, +\infty)$$

cerchiamo un intervallo in cui ho la convergenza; osserviamo che  $a_n$  è crescente (fissiamo  $M < +\infty$ )

$$\sum_{n \geq 2} \sup_{[0, M]} \left| \frac{(\log n)^{nx}}{n^n} \right| = \frac{(\log n)^{M \cdot n}}{n^n} \rightarrow 0 \text{ poiché la serie converge in } n \text{ e quindi la}$$

serie  $\sum \frac{(\log n)^{nx}}{n^n}$  converge totalmente su  $(-\infty, M]$

3.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^{2n}}{3^n}$ , chiamata serie lacunare, perche'  $(x+4)$  compare in potenze pari, si puo' descrivere ad esempio come:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ DISPARI} \\ \frac{(-1)^{k/2}}{3^{k/2}} & k \text{ PARI} \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{k \text{ PARI} \\ k \rightarrow +\infty}} \sqrt{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \lim_{\substack{k \text{ DISPARI} \\ k \rightarrow +\infty}} \sqrt{|a_k|} = 0$$

Non posso lavorare come prima, ma qua ho gia' il sup regalato, che e'  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , quindi:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \text{ho convergenza per } |x+4| > \sqrt{3}, \text{ ma se } |x+4| = \sqrt{3},$$

si ha:  $|a_n|(x+4) = \sqrt{3} = (-1)^n$  che non converge

∴ Si potera' fare il criterio della radice  $\sqrt{\frac{(-1)^n (x+4)^{2n}}{3^n}} = \frac{(x+4)^2}{3} < 1$  e si ri otteneva

# POLINOMI TRIGONOMETRICI

Un polinomio trigonometrico di ordine  $n$  su  $[0, 2\pi]$  ha la forma del tipo:

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , se voglio il periodo  $[0, T]$  basta prendere  $\cos(k \frac{T}{2\pi} x)$  e  $\sin(k \frac{T}{2\pi} x)$

La SERIE TRIGONOMETRICA e'  $a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$

ESEMPIO: Note musicali, le onde sonore hanno una forma periodica. Ciò che distingue il timbro della nota (esempio se flauto, violino, ...) sono le FREQUENZE ARMONICHE, ossia i termini per  $k > 1$ .

$k=1 \rightarrow$  Nota principale (LA, FA, ...)

$k > 1 \rightarrow$  Armonici a frequenza sempre maggiore fino a una certa frequenza che non riusciamo più a sentire.

$$S(k) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \underbrace{S(1)}_{\text{NOTA}} + \underbrace{S(2)}_{\text{ARMONICI}} + \dots$$

⚠ Gli armonici cambiano da strumento a strumento, inoltre questa serie può creare e sintetizzare suoni esistenti e non esistenti.

## OSSERVAZIONE

Se  $\|a_k\|$  e  $\|b_k\|$  convergono, allora  $a_0 + \sum a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$  converge, usando la triangolare si vede:

$$\sup_{\mathbb{R}} |a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |a_k| + |b_k|$$

## TEOREMA INUTILE

Sia  $a_n \geq 0$  monotona decrescente ( $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ ;  $a_n \rightarrow 0$ ) allora:

1.  $\sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx)$  e  $\sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx)$  convergono in  $[0, 2\pi]$ . In  $0$  e  $2\pi$ , la serie

dei seni è nulla (i coseni non lo so).

2.  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \cos(nx)$  e  $\sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx)$  convergono in  $[0, \pi] \cup (\pi, 2\pi]$ , in  $\pi$  la

serie dei seni è nulla (coseni non lo so).

## OSSERVAZIONE

Avevamo visto che  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\}$  per  $k = 1, \dots, n$  è un insieme ORTONORMALE per  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Chiamiamo ora:

$\mathcal{Y}_n = \text{Span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\}$  con  $\mathcal{Y}_n \subset V$  (V è uno spazio generico)

## PROIEZIONE SU COMPONENTI DELLA BASE

Sia  $f \in V$ , definisco la PROIEZIONE di  $f$  su  $\mathcal{Y}_n$  come

$$P_{\mathcal{Y}_n} f = S_n f = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) + \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$\text{con } a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

## TEOREMA SU SPAZI ORTONORMALI

Sia  $V$  spazio vettoriale e  $V_n = \text{Span} \{e_1, \dots, e_n\}$  e<sub>i</sub> ortonormali, sia  $\mu \in V$  e  $\mu_0 = P_{V_n} \mu = \sum_i \underbrace{\langle \mu, e_i \rangle}_{v_i} e_i = \sum_i v_i e_i$ , allora

$$1. (\mu - \mu_0) \perp V$$

$$2. \|\mu_0\|^2 = \sum_i |\langle \mu, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \|\mu\|^2$$

3.  $\mu_0$  realizza il minimo  $\min_{v \in V_n} \|\mu - v\|^2$ , ossia è il punto di minima distanza tra i due

### DIMOSTRAZIONE

$$1. \langle \mu - \mu_0, e_i \rangle = \langle \mu - \sum_{k=1}^n v_k e_k, e_i \rangle = \langle \mu, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle v_k e_k, e_i \rangle = \\ = \langle \mu, e_i \rangle - \sum_k v_k \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_0 = v_i - v_i = 0, \text{ allora } (\mu - \mu_0) \perp e_i \forall i \Rightarrow \perp V$$

$$2. \|\mu_0\|^2 = \langle \mu_0, \mu_0 \rangle = \left\langle \sum_i v_i e_i, \sum_k v_k e_k \right\rangle = \sum_i v_i^2$$

$$\|\mu_0\|^2 = \|\mu - \mu_0 + \mu_0\|^2 = \langle (\mu - \mu_0) + \mu_0, (\mu - \mu_0) + \mu_0 \rangle =$$

$$= \langle (\mu - \mu_0), (\mu - \mu_0) \rangle + \langle \mu_0, \mu_0 \rangle + \underbrace{2 \langle \mu - \mu_0, \mu_0 \rangle}_0 =$$

$$= \langle (\mu - \mu_0), (\mu - \mu_0) \rangle + \langle \mu_0, \mu_0 \rangle = \|\mu - \mu_0\|^2 + \|\mu_0\|^2 \leq \|\mu_0\|^2$$

$$3. \text{ Sia } v \in V_n \text{ e calcolo } \|\mu - v\|^2 = \|( \mu - \mu_0 ) + ( \mu_0 - v ) \|^2 =$$

$$= \|\mu - \mu_0\|^2 + \|\mu_0 - v\|^2 \geq \|\mu - \mu_0\|^2 \text{ e vale se e solo se } \mu_0 - v = 0 \text{ ossia } \mu_0 = v$$

## TEOREMA SU SPAZI DI FUNZIONI INTEGRABILI

Sia  $V = \{ \text{funzioni integrabili} \}$  su  $[0, 2\pi]$  e  $V_n = \text{Span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, k=1 \dots n \right\}$   
sia  $f \in V$  e  $P_{V_n} f = a_0 \frac{1}{2} + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ ,

$$1. \|S_n f\|^2 = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \text{ e } \|S_n f\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty \text{ (converge) e } a_k, b_k \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

3.  $S_n f$  è il polinomio trigonometrico per cui è minimo  $\|f - P_n f\|^2$  con  $P_n$  trigonometrico

$$4. \|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2 dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right]$$

### DIMOSTRAZIONE

$$1. \|S_n f\|^2 = \left\| \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} \int_0^{2\pi} 1 dx + \sum_{k=1}^n a_k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx + b_k^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

5.  $\|S_n f\|^2 \leq \|f\|^2$  come nel Teorema precedente

$$2. \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \|S_n f\|^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \forall n \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|^2 \quad \forall n$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (a_k^2 + b_k^2)$  è crescente in  $n$  e uniformemente limitata, ossia converge

3. Identico al teorema precedente

$$4. f - S_n f \perp S_n f \Rightarrow \|f\|^2 = \|f - S_n f + S_n f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$$

### OSSERVAZIONE

$\forall$  non ha base finita  $\Rightarrow S_n f$  non descrive completamente  $f$  (infatti  $\|f - S_n f\|^2 = 0$ ), ma si puo' dire che  $S_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ ? Se sì, in che modo?

Il teorema ci dice che  $S_n f$  è convergente (almeno  $L^2$ ) ma non dice a cosa converge.

### TEOREMA SU CONVERGENZA

Sia  $f \in \mathcal{V}$ , allora  $\|S_n f - f\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , ovvero  $S_n f \rightarrow f$  in  $L^2$ .

! Ricorda che  $L^2 \neq$  conv. puntuale / uniforme

### CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI FOURIER

Spesso è meglio considerare  $[-\pi, \pi]$  invece che  $[0, 2\pi]$  poiché se  $f: [-\pi, \pi]$  è pari

- $b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$  per simmetria
- $a_k = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$  per simmetria

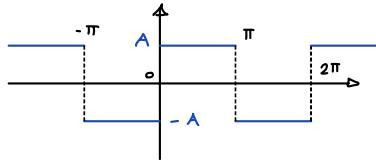
Se invece  $f: [-\pi, \pi]$  è dispari

- $a_k = 0$
- $b_k = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$

### ESEMPIO:

Calcolare i coefficienti di Fourier di:

$$f(x) = \begin{cases} A & 0 \leq x < \pi \\ -A & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$



poi prolungata per periodicità.

$f: [-\pi, \pi]$  è dispari  $\Rightarrow a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin(kx) dx = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2A}{\pi} \left[ \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{4A}{\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$S_{(K \text{ DISPARI})} = \sum_{i=1}^{\frac{t}{2}} \frac{4A}{\pi(2i+1)} \sin((2i+1)x)$$

### ESEMPIO

$f: [-\pi, \pi]$   $f(x) = x$  (DISPARI)

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ -x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx = -\frac{2}{k} (-1)^k$$

$$S_n x = \sum_{k=1}^n -\frac{2}{k} (-1)^k \sin(kx)$$

## PERIODI DIVERSI DA $2\pi$

Sia  $f$  una funzione  $T$ -periodica t.c.  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , le funzioni ortonormali sono:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right), \frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right\} \quad \text{con} \quad \omega = 2\pi/T$$

Si definiscono

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\omega kx) dx \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\omega kx) dx \quad k \geq 1$$

Allora la serie ridotta di Fourier è:

$$S_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(\omega kx) + b_k \sin(\omega kx)$$

$$\text{con } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

### ESEMPIO:

Negli armonici naturali quello che faccio è mettere un punto fisso sulla corda, questo seleziona solo determinati armonici, ossia quelli che hanno punto di partenza nel nodo. Per cui ad esempio se prendo l'armonico sul tasto 12 (circa a metà lunghezza della corda), andiamo a selezionare gli armonici con frequenza doppia rispetto alla nota fondamentale (corda a vuoto); in pratica ho selezionato le frequenze dell'ottava superiore

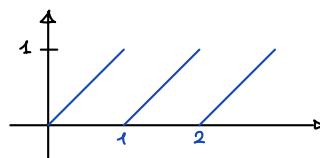
▷ In pratica per suonare devo selezionare un intervallo finito (motivo per cui non posso farlo su un insieme finito su  $\mathbb{R}$ )

### ESEMPIO:

Il la fondamentale è 440 Hz  $\rightarrow \sin(880\pi x)$ , il mio  $T = \frac{1}{440}$

### ONDA A DENTE DI SEGA

$$f(x) = \begin{cases} x & [0, 1] \\ x - n & [n, n+1] \end{cases}$$



Scriviamo la serie di Fourier ( $T=1$ )

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

$$a_k = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi kx) dx = (\text{INTEGRO PER PARTI}) = 0$$

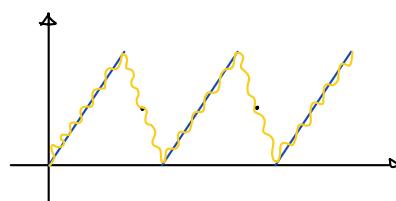
$$b_k = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi kx) dx = 2 \left[ -\frac{x \cos(2\pi kx)}{2\pi k} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi kx)}{2\pi k} dx = -\frac{1}{\pi k}$$

$$S_n f = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi kx)}{k} \quad \text{in } [0, 1]$$

Osserviamo una cosa:

$$S_n f(0) = S_n f(1) = \dots = \frac{1}{2}$$

$S_n f(0)$  converge a  $\frac{1}{2} \neq f(0)$



## FUNZIONE REGOLARE A TRATTI

$f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e' regolare a tratti se:

- $f$  e' limitata

- $[0, T]$  e' unione finita di sottointervalli su cui  $f$  e' continua, descrivibile ed esistono i limiti  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ai bordi dei sottointervalli

Dato  $x_0 \in [0, T]$  si chiama:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Se  $f \in C^2$  allora e' regolare a tratti

## TEOREMA CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER

Se  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e' regolare a tratti allora le serie di Fourier convergono puntualmente su  $[0, T]$  per  $x_0 \in [0, T]$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \quad \text{in } x_0 = 0 \quad \text{e } x_0 = T$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_0) = \frac{f(0^+) + f(T^-)}{2}$$

con  $\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega k x) + b_k \sin(\omega k x)$

## COROLLARIO

Sia  $f$  continua in  $x$ , allora  $\sum_n f(x) \rightarrow f(x)$  puntualmente e cio' vale se  $f(0) = f(T)$

## TEOREMA (CONVERGENZA TOTALE)

Se  $f$  e'  $T$ -periodica, regolare a tratti su  $[0, T]$  e continua su  $\mathbb{R}$  allora

$\sum_n f \rightarrow f$  TOTALMENTE su  $\mathbb{R}$ .

## TEOREMA DI PASSAGGIO A DERIVATA PER SERIE DI FOURIER

Sia  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $C^1([0, T])$  e  $f'$  regolare a tratti e sia  $f(0) = f(T)$ , ossia estendibile per periodicità. Allora la serie di Fourier si puo' derivare su tutto  $(0, T)$ .

Se vale anche  $f'(0^+) = f'(T^-)$ , allora vale anche su  $[0, T]$ .

## COROLLARIO

Sia  $f$   $T$ -periodica con  $f \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_n f$  converge totalmente su  $\mathbb{R}$  e si puo' derivare, ossia  $\sum_n f' \rightarrow f'$

## TEOREMA DI INTEGRAZIONE

Sia  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , regolare a tratti su  $[0, T]$ . Dati  $x_0, x \in [0, T]$ , vale che:

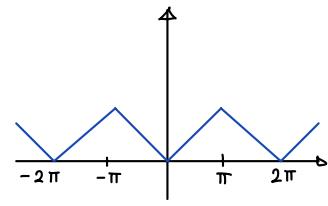
$$\int_{x_0}^x f(s) ds = \frac{a_0}{2} (x - x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_k \cos(\omega k s) + b_k \sin(\omega k s) ds$$

## ESERCIZI SU SERIE DI FOURIER

### 1. ONDA TRIANGOLARE

$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$        $f(x) = |x|$ , e' pari quindi  $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$



$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[ x \frac{\sin kx}{k} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ x \frac{\sin kx}{k} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \left[ \cos \frac{k\pi}{k^2} \right]_0^\pi = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$S_n f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}}^n \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos((2l+1)x)}{(2l+1)^2}$$

💡 Osservo che  $f$  e' continua    $Sf(x) = f(x) \forall x$ , in particolare vale  $f(0) = Sf(0)$

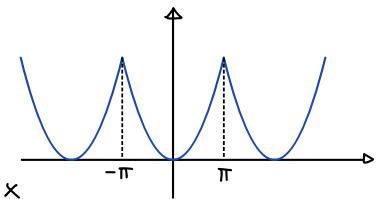
$$S_n f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{(2l+1)^2} = 0$$

$$\sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{SERIE NOTEVOLA})$$

### 2. SERIE DI FOURIER DI $x^2$ SU $[-\pi, \pi]$ , $f$ e' pari $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx dx = \left[ \frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x \sin kx}{k} dx \\ &= + \left[ \frac{\cos kx}{k^2} \cdot 2x \right]_0^\pi + \int_0^\pi 2 \frac{\cos kx}{k^2} dx = \frac{2\pi}{k^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \cos kx \right]_0^\pi \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2} \end{aligned}$$



In definitiva  $S_n(x^2) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2} \cos kx$ , la serie converge puntualmente su  $(-\pi, \pi)$ , ma  $f(-\pi) = f(\pi)$  e quindi converge su  $[-\pi, \pi]$

$$💡 S_n(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{4}{k^2} \frac{1}{\cos kx} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\begin{aligned} S_n(\pi) \text{ noto che } \cos(\pi k) = (-1)^k \text{ quindi:} &= \frac{\pi^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^{2k} \cdot \frac{4}{k^2} \\ \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
---

Somma notevole

3. Sviluppiamo in serie  $f = \begin{cases} 1 & [-\pi, 0) \\ -2 & (0, \pi] \end{cases}$  non è né pari né dispari:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 dx$$

$$a_0 = -1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(kx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(kx) dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(kx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ PARI} \\ -\frac{6}{\pi k} & k \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\sum_n f = -1 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

▽  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$  =  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} & x \in (0, \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$

4. Sviluppare  $f(x) = x$  in  $[-\pi, \pi]$  e vedere che succede alla derivata.

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

## PROBLEMA DI CAUCHY

Sia  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , un'equazione differenziale puo' essere del tipo:

$$P_C = \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \quad (\text{PROBLEMA DI CAUCHY}) \end{cases}$$

## TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA' LOCALE DELLE SOLUZIONI

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P_C$  il problema di cauchy, tale che:

1.  $f$  e continua in  $\Omega$  e  $(x_0, y_0) \in \Omega$
2.  $f$  e' (localmente) Lipschitziana in  $y$ , uniformemente rispetto a  $x$ , ossia

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega$$

Uniforme rispetto a  $x$ , significa che  $K$  non varia nel compatto (ossia localmente)  $\Omega$

Allora ESISTE UNICA soluzione locale di  $P_C$ , ovvero

$\exists \delta$  tale che:  $\exists y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione di  $P_C$ .

Se  $\frac{\partial f}{\partial y}$  e continua in  $\Omega$  allora e verificata la condizione ②

## ESEMPI:

### 1. EQUAZIONI LINEARI (di ogni ordine)

$$\begin{cases} a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si riduce a un'equazione del 1° ordine per il vettore  $(y')$

### 2. EQUAZIONI $\wedge$ VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} y'(x) = h(x) \cdot g(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Con  $h(x)$  continua e  $g \in C^1$  (o Lipschitziana)

## PROPOSIZIONE

Sia  $\{f_n\}_n$  successione di funzioni continue su  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  di Cauchy rispetto alla  $\|\cdot\|_\infty$  ossia dalla distanza del Sup, allora  $f \in [a, b]$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente

## DIMOSTRAZIONE

$\{f_n\}_n$  e' di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ , ossia  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall n, m > n_0$ , oppure  $f_n(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_n(x) + \varepsilon$

Scelgo ora  $x_0 \in [a, b]$ , allora  $\{f_n\}_n$  converge, chiamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ , ripeto

$\forall x \in [a, b] \Rightarrow$  Trovo una  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e quindi:

$f_n \rightarrow f$  puntualmente su  $[a, b]$

Passo al limite per  $m \rightarrow +\infty$  nell'equazione \*

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

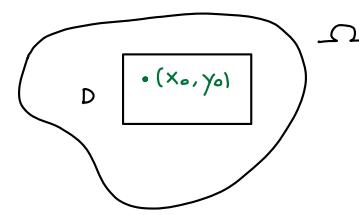
$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n - f| < \varepsilon \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ uniformemente} \quad (f \text{ e' continua perche' le } f_n \text{ sono continue})$$

## DIMOSTRAZIONE DEL TH. DI ESISTENZA

Prendo  $D = \{(x, y) \in \Omega, |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$

1.  $y$  e' soluzione del P.C. se e solo se:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$



(si vede derivando l'espressione integrale, oppure integrando il P.C.)

2. Definisco lo spazio

$$\mathbb{Y}_\delta = \{y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continua e tali che: } |y - y_0| < b \text{ se } |x - x_0| \leq \delta\}$$

$$y \in \mathbb{Y}_\delta \Rightarrow (x, y(x)) \in D \subset \Omega$$

A questo punto definisco  $F: \mathbb{Y}_\delta \rightarrow \mathbb{Y}_\delta$  come  $F(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$ ,  
N.B. se  $y \in \mathbb{Y}_\delta$ :  $y = F(y) \Rightarrow y$  e' soluzione locale del problema  
 $F$  e' ben definita, infatti se:

$y \in \mathbb{Y}_\delta \Rightarrow f(s, y(s))$  e' continua ( $\Rightarrow$  integrabile) e  $F(y(x))$  e' continua e derivabile (per Th calcolo).

$$\text{Inoltre } F(y) \in \mathbb{Y}_\delta, \text{ infatti } |F(y(x)) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \leq \int_{x_0}^x M ds \leq \sup_{\Omega} |f| = M \leq M \delta; \text{ se } \delta < \frac{b}{M} \Rightarrow \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |F(y(x)) - y_0| < b$$

3.  $F$  e' contrazione su  $\mathbb{Y}_\delta$ , ossia:

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_\infty, \text{ infatti}$$

$$|F(y_1(x)) - F(y_2(x))| \leq \left| \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \leq$$

$$\leq \delta \sup_{|x - x_0| \leq \delta} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq \delta K < \frac{1}{2} \text{ se } \delta < \frac{1}{2K}$$

▷ RIASSUMENDO  $\delta < \min \left\{ \frac{1}{2K}, \frac{b}{M} \right\}$ , e  $F: \mathbb{Y}_\delta \rightarrow \mathbb{Y}_\delta$  e' CONTRAZIONE (ossia

$F$  e' continua se  $y_n \rightarrow y$  in norma del Sup  $\Rightarrow F(y_n) \rightarrow F(y)$  in norma del Sup.

4. Definisco  $\langle y_n \rangle_n \subset \mathbb{Y}_\delta$  come  $\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = F(y_n(x)) \end{cases}$

$$\|y_{n+1} - y_n\|_\infty = \|F(y_n) - F(y_{n+1})\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y_n - y_{n-1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|F(y_{n+1}) - F(y_{n+2})\|_\infty \leq \frac{1}{2^2} \|y_{n-1} - y_{n-2}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|y_1 - y_0\|_\infty$$

$$\leq \frac{b}{2^n} \quad \text{quindi } \|y_{n+1} - y_n\| \leq \frac{b}{2^n}, \text{ allora } \langle y_n \rangle \text{ e' di Cauchy per } \|\cdot\|_\infty \text{ infatti}$$

$$\forall n, m: \|y_n - y_m\|_\infty = \|y_n - y_{n-1} + y_{n-1} - y_{n-2} + \dots + y_{m+1} - y_m\|_\infty \leq$$

$$\leq \|y_n - y_{n-1}\|_\infty + \dots + \|y_{m+1} - y_m\|_\infty = \sum_{k=m}^{n-1} \|y_{k+1} - y_k\|_\infty \leq$$

$$\leq b \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq b \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = b \frac{\frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

Ma allora per la proposizione  $\exists \bar{y} \in C^0([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$  e  $y_n \rightarrow \bar{y}$  uniforme  $\Rightarrow$   
1)  $\bar{y} \in \mathbb{Y}_\delta$

$$2) F(\bar{y}) = \bar{y} \text{ perche' } \frac{F(y_n)}{\bar{y}} \rightarrow$$

quindi  $\bar{y} = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$  e' una soluzione locale

3) La soluzione e' unica, supponiamo che ne esistano piu' di una  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$

$$\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|_\infty = \|F(\bar{y}_1) - F(\bar{y}_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|_\infty \Rightarrow \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \bar{y}_2 \text{ (perche' se } a \leq \frac{1}{2}a \rightarrow a=0)$$

## EQUAZIONI LINEARI

### RICHIAMO

$a(x)y'' + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$  (equazione diff. lineare di 2° ordine omogenea), se  $y_1, y_2$  soluzioni dell'equazione, allora:

- $y_1 + y_2$  e' soluzione
- $\alpha y_1$  e' soluzione

Ossia le soluzioni sono uno spazio vettoriale (con il PC si ha unica soluzione)

Se non e' omogenea, non vale la linearita' ma noto che:

$a(x)y'' + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$ , sia  $y_0$  e' soluzione dell'omogenea e  $y_p$  la soluzione particolare della non omogenea, allora:

$$\text{SOLUZIONE} = y_0 + y_p$$

Quindi le soluzioni dell'omogenea formano uno spazio del tipo:  $y_p + \{ \text{sol. omogenea} \}$ , ossia uno spazio affine (spazio traslato in un punto particolare).

### TEOREMA SU SOLUZIONI OMOGENEE E NON OMOGENEE

1. Le soluzioni di una eq. diff. omogenea di ordine n formano uno spazio  $V$  tale che  $\dim V = n$

2. Le soluzioni di una eq. diff. non omogenea di ordine n sono uno SPAZIO AFFINE di  $\dim = n$  e si ottengono sommando all'omogenea una soluzione particolare.

3. Il PC sotto, ammette un'unica soluzione (tipicamente definita su  $\mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = b(x) \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \\ \vdots \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Y Ossia se e' di ordine n, ha n-soluzioni particolari

### CASO DI COEFFICIENTI COSTANTI DEL 2° ORDINE

#### CASO GENERALE

$ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , ha due radici  $\lambda_1, \lambda_2$ :

1)  $\Delta > 0 \quad \lambda_1 = \alpha_1 \quad \lambda_2 = \alpha_2 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , la soluzione omogenea e':

$$y(x) = A e^{\alpha_1 x} + B e^{\alpha_2 x}$$

2)  $\Delta < 0 \quad \lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora la soluzione e':

$$y(x) = A e^{\alpha x} \cos(\beta x) + B e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

3)  $\Delta = 0 \quad \alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow e^{\alpha x}$  duplice soluzione coincidente, quindi non ho informazioni complete, tale caso è detto **RISONANZA**.

Allora cerco un'altra condizione ricordando che in caso di radice doppia si ha:

$$\frac{d}{dx} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 2a\lambda + b = 0, \text{ ossia anche } xe^{\alpha x} \text{ è soluzione, infatti:}$$

$$y = xe^{\alpha x} \rightarrow y' = x\alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x}; \quad y'' = \alpha^2 x e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x}$$

Ora, se prendo  $ay'' + by' + cy$  e sostituisco le mie  $y, y', y''$

$$a(\underline{\alpha^2 x e^{\alpha x}} + 2\alpha e^{\alpha x}) + b(\underline{\alpha x e^{\alpha x}} + e^{\alpha x}) + c \underline{x e^{\alpha x}} = 0$$

$$= xe^{\alpha x} (\underbrace{a\alpha^2 + b\alpha + c}_0) + e^{\alpha x} (2a\alpha + b\alpha) = 0 \rightarrow xe^{\alpha x} \text{ è soluzione}$$

Quindi se  $\Delta = 0$  le soluzioni sono:

$$y = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$$

### ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Trovo una soluzione del tipo  $\{y = e^{\lambda x}\}$

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Scriro l'EQUAZIONE ASSOCIATA, ossia:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 1$$

2. Ho due soluzioni:  $\{e^{2x}, e^x\}$ , che sono linearmente indipendenti

$$\{y(x) = Ae^{2x} + Be^x\} \quad (\text{SOLUZIONE GENERALE})$$

$$y(0) = A + B = 0$$

$$y' = 2Ae^{2x} + Be^x$$

$$y'(0) = 2A + B = 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \rightarrow A = 1 \quad B = -1$$

La soluzione del P.C. è  $y(x) = e^{2x} - e^x$

### ESERCIZIO (x CASA)

$$\begin{cases} y'' - 4y = x^3 + 5 \\ y(0) = 3/4 \\ y'(0) = 1/16 \end{cases}$$

Per trovare la particolare scrivo un polinomio di grado 3 ( $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ), sostituisco i dati iniziali e trovo  $a, b, c, d$  e  $A, B$

### OSSERVAZIONE

$$y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$$

si sa che (n° complessi)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Ho una base  $\{\cos x + i \sin x; \cos x - i \sin x\}$  da cui posso ottenere solo seni e cosegni, per cui lo spazio delle soluzioni ha base  $\{\sin x, \cos x\}$

### ESEMPIO

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$\lambda_1 = -1 - i$$

$$\lambda_2 = -1 + i$$

La soluzione generale è: (ossia la parte reale mi dà i termini in esponenziale, mentre l'immaginaria mi dà il cos e il sin)

$$y = A e^{-x} \cos x + B e^{-x} \sin x$$

### RISONANZA (CASI PARTICOLARI)

#### RISONANZA CON TERMINE NOTO

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + y = -25 \cos(2x) \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 7 \end{array} \right.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$y_{\text{omo}} = A e^x + B x e^x$$

Se ho cosegni nel termine noto scrivo  $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$

$$y_p' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$$

$$y_p'' = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$$

$$y'' - 2y' + y = -25 \cos(2x)$$

$$= -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x) + 4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + a \cos(2x) + b \sin(2x) = 25 \cos(2x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3a - 4b = 25 \\ 4a - 3b = 0 \end{array} \right.$$

$$a = 3 \quad b = 4$$

$$y = A e^x + B x e^x + 3 \cos(2x) + 4 \sin(2x)$$

Metto i dati iniziali:

$$y' = A e^x + B e^x + B x e^x - 6 \sin(2x) + 8 \cos(2x)$$

$$y(0) = 1 \longrightarrow A = -2$$

$$y'(0) = 7 \longrightarrow A + B = -1$$

$$y = -2 e^x - x e^x + 3 \cos(2x) + 4 \sin(2x)$$

esempio di risonanza:

Ogni oggetto ha una propria frequenza di oscillazione. Se noi emaniamo onde meccaniche (suoni, vento, ...) con stessa frequenza, allora si ha risonanza e si aggiunge quel termine  $x e^x$  che aumenta l'ampiezza delle oscillazioni (Tacoma Bridge, bicchiere che si rompe, ...)

## RISONANZA NEL TERMINE NOTO

$$y'' + y = \cos(x)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$$

$$y_0 = A \cos(x) + B \sin(x)$$

$\cos(x)$  e  $\sin(x)$  sono soluzioni dell'omogenea, quindi se cerco una  $y_p$  del tipo  $a \cos x + b \sin x$  non riesco a ottenerne nulla; quindi scrivo:

$$y_p = a x \cos x + b x \sin x$$

$$y_p' = a \cos x - a x \sin x + b \sin x + b x \cos x$$

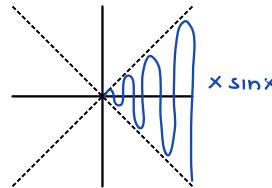
$$y_p'' = -a \sin x - a x \cos x + b \cos x - b x \sin x + b x \cos x$$

$$y_p'' + y = -2a \sin x - a x \cos x + 2b \cos x - b x \sin x + a x \cos x + b x \sin x$$

$$2b \cos x - 2a \sin x = \cos x$$

$$a = 0 \quad b = 1/2$$

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$



▷ L'esempio è simile all'altalena perché l'ampiezza dell'oscillazione cresce sempre di più grazie al termine  $\frac{1}{2} x \sin x$ , che rende la funzione illimitata.

## RISONANZA MULTIPLA:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda = 2$$

$$y_0 = A e^{2x} + B x e^{2x}$$

Se provo con la forma  $y_p = a e^{2x}$  non ottengo nulla (fa parte dell'omogenea), ma non posso nemmeno mettere  $x e^{2x}$  per lo stesso motivo.  
Continuo ad aumentare il grado e  $y_p = a x^2 e^{2x}$

$$y_p' = a 2x e^{2x} + 2a x^2 e^{2x}$$

$$y_p'' = 2a e^{2x} + 4ax e^{2x} + 4ax e^{2x} + 4ax^2 e^{2x} = 4ax^2 e^{2x} + 8ax e^{2x} + 2ae^{2x}$$

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2ae^{2x} (1 + 4x + 2x^2 - 4x - 4x^2 + 2x^2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = A e^{2x} + B x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

▷ Il procedimento si può iterare, ossia aumento il grado di  $y_p$  ( $x e^{2x}, x^2 e^{2x}, x^3 e^{2x}, \dots$ ) finché non ottengo roba che non sta nell'omogenea.

**X CASA**

$$1. 2y'' - y' - y = x^2 - 3e^{2x} \quad [y = Ae^x + Be^{-x/2} - x^2 + 2x + 6 - \frac{3}{5}e^{2x}]$$

2. Trovare  $y_0$  e  $y_1$  per cui  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y < 0$

$$\begin{cases} y'' - 2y' = xe^x + x \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$$

$$y_{\text{omo}} = Be^{2x} + A$$

$$y_{P_1} = ax^2 + bx \quad (\text{perche' devo derivare 2 volte})$$

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

$$2a - 4ax - 2b = x$$

$$x(1+4a) + 2b - 2a = 0$$

$$a = -\frac{1}{4} \quad b = a = -\frac{1}{4}$$

$$y_{P_1} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$y_{P_2} = (ax+b)e^x$$

$$y''_{P_2} = ae^x + ae^x + e^x(ax+b)$$

$$y'' - 2y' = -e^x(ax+b) = xe^x$$

$$a = -1 \quad b = 0$$

$$y_{P_2} = -xe^x$$

$$y = Be^{2x} + A - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - xe^x$$

$$y(0) = A + B = y_0$$

$$y'(0) = 2B - \frac{5}{4} = y_1$$

$$B = \frac{y_1}{2} - \frac{5}{8}$$

$$A = y_0 - B = y_0 - \frac{y_1}{2} + \frac{5}{8}$$

$$y = (\frac{y_1}{2} - \frac{5}{8})e^{2x} + y_0 - \frac{y_1}{2} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - xe^x$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  ho un termine dominante (il primo), quindi voglio che  $y_{1/2} \leq \frac{5}{8} \rightarrow y_1 \leq \frac{5}{4}$  e  $y_0$  qualsiasi (il termine dominante non dipende da  $y_0$ )

## EQUAZIONI LINEARI A TERMINI NON COSTANTI

### METODO DELLE VARIAZIONI COSTANTI

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

Se  $A(x)$  è una primitiva di  $a(x)$  allora la soluzione dell'equazione è:

$$Y(x) = e^{A(x)} \left( y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right)$$

⚠ Funziona per equazioni lineari del 1° ordine  
a coefficienti non costanti

### DIMOSTRAZIONE

Se  $y$  risolve l'equazione, allora  $y' = a(x)y(x) + b(x)$ , moltiplico per  $e^{-A(x)}$ :

$$y' \frac{e^{-A(x)} - e^{-A(x)}}{= d/dx e^{-A(x)} y(x)} a(x)y(x) = e^{-A(x)} b(x)$$

Integriamo ora tra  $x$  e  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{d}{dt} e^{-A(t)} y(t) dt &= \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \\ e^{-A(x)} y(x) - e^{-A(x_0)} y(x_0) &= \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \\ \text{Osserviamo ora che } \int_{x_0}^{x_0} a(x) &= 0 \Rightarrow e^{-A(x_0)} = 1 \\ e^{-A(x)} y(x) - y_0 &= \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \\ y(x) &= e^{A(x)} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt \right] \text{ (FINE)} \end{aligned}$$

### ESEMPIO:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Studio dall'istante 1 in poi ( $x \geq 1$ ) poiché in  $x = 0$  non è ben definita

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{x} \quad A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x \\ y(x) &= e^{\log x} \left( 3 + \int_1^x e^{-\log t} \cdot t^2 dt \right) \\ &= x \left( 3 + \int_1^x t dt \right) = 3x + x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^x = 3x + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x + \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Notiamo ora che in realtà è definita anche per  $x = 0$ , infatti

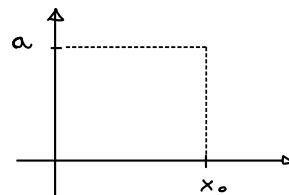
$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{x(\frac{5}{2}x + \frac{x^3}{2})}{x} = \frac{5}{2}x + \frac{x^2}{2}$$

Per cui  $y(x)$  è soluzione  $\forall x \in \mathbb{R}$

## EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Sono equazioni del tipo:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \\ y(x_0) = a \end{cases}$$



### ESISTENZA DELLA SOLUZIONE

1. Se  $f$  è continua e  $g \in C^1$  in un intorno di  $(x_0, a)$  allora  $\exists$  unica soluzione locale (per il Teorema di esistenza).
2. Se  $f \in C(\mathbb{R})$  e  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , allora se  $\exists \bar{y}$  tale che  $g(\bar{y}) = 0$  allora  $y = \bar{y}$  è una soluzione (costante) dell'equazione  $y' = f(x) \cdot g(y(x))$

► Si richiede che  $y(x) = \bar{y} \forall x \in \mathbb{R}$ , ossia che siano costantemente uguali per ogni istante. In questo modo per il Th. di esistenza e unicità qualsiasi altra soluzione non tocca il valore di  $\bar{y}$  per qualche  $\bar{x}$ .

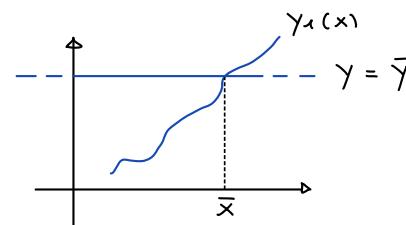
### DIMOSTRAZIONE

$y_1(x)$  = soluzione per l'equazione, per cui  $y_1(\bar{x}) = \bar{y}$

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

A questo punto  $\exists!$  soluzione ma  $y = \bar{y}$  e  $y_1(x)$  sono due soluzioni del P.C. quindi  $y_1(x) = \bar{y}$ , per cui

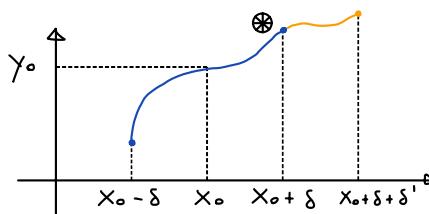
3. Se  $\bar{y}$  è soluzione costante di  $y' = f(x) \cdot g(y(x))$  e il dato iniziale  $y(x_0) = a$ :
  - $a < \bar{y}$  allora  $y(x) < \bar{y} \forall x$
  - $a > \bar{y}$  allora  $y(x) > \bar{y} \forall x$



### INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA

Consideriamo un generico PC e supponiamo di avere esistenza locale per  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$PC = \begin{cases} y = f(x, y) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases}$$



Ora, dal punto  $\circledast$ , se voglio, posso far partire un nuovo PC. Per il Th di esistenza e unicità la soluzione del problema di Cauchy PROLUNGA la precedente, perché non si possono avere due soluzioni.

Tuttavia non posso prolungare all'infinito, ossia  $\delta^n < \delta^{n-1} < \dots < \delta^1 < \delta$  ossia ogni volta prolungo di un pezzo più piccolo.

Definisco INTERVALLO MASSIMALE:  $(T_{\min}, T_{\max})$  con  $x_0 \in (T_{\min}, T_{\max})$  e:

- $T_{\max} = \sup \{ x \text{ t.c. } x \text{ è prolungabile a destra} \}$
- $T_{\min} = \inf \{ x \text{ t.c. } y(x) \text{ è prolungabile a sinistra} \}$

## INTEGRAZIONE PER SEPARAZIONE DI VARIABILI

Consideriamo il seguente pc:

$$\begin{cases} y' = f(x) g(y) \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

E' possibile scrivere la prima equazione come:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Se  $\exists \bar{y}$  tale che  $g(\bar{y}) = 0$  allora  $\bar{y} = y$  e' soluzione costante, ma per le altre soluzioni  $g(y) \neq 0$  (giustifica il fatto che possa dividere per  $g(y)$ ).

A questo punto integro in  $x$ : (integrali indefiniti)

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx + C$$

$$\int \frac{dy}{dx} \frac{1}{g(y)} dx = \int f(x) dx + C$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

C si trova con le condizioni iniziali, oppure posso svolgere tutto in un solo passaggio, integrando tra gli estremi  $x_0, x$  ( $C$  viene omesso)

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$\int_a^{y(x)} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

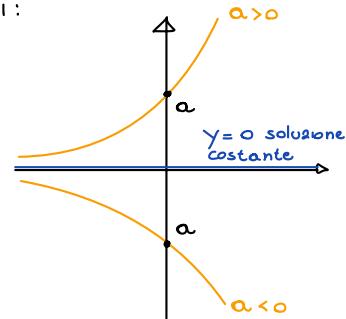
### ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Si trova subito che  $y=0$  e' una soluzione costante, quindi:

- $a > 0 \rightarrow y(x) > 0$  (soluzione crescente)
- $a < 0 \rightarrow y(x) < 0$  (soluzione decrescente)

$$\begin{aligned} \int_a^{y(x)} \frac{dy}{y^3} &= \int_0^x 1 dx & y &= \frac{|a|}{\sqrt{1 - 2a^2 x}} \quad \forall a > 0 \\ -\frac{1}{2y^2} \Big|_a^{y(x)} &= x \implies & y &= \frac{-|a|}{\sqrt{1 - 2a^2 x}} \quad \forall a < 0 \\ -\frac{1}{2y^2} &= \frac{1}{a^2} - 2x \end{aligned}$$



In conclusione  $y = \frac{a}{\sqrt{1-2a^2x}}$   $\forall a$ , definita per  $x < \frac{1}{2a^2}$  ossia il suo intervallo massimale è:

$$I_{MAX} = (-\infty, \frac{1}{2a^2})$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = a \end{cases}$$

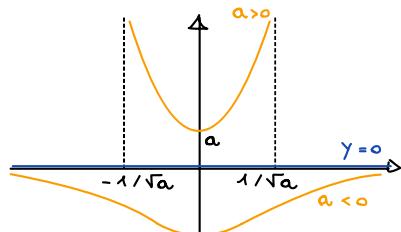
$y = 0$  è soluzione costante, cerchiamo di integrare:

$$\int_a^{y(x)} \frac{1}{Y^2} dy = \int_0^x 2x dx$$

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{a} = x^2 \implies y = -\frac{1}{1/a - x^2}$$

$y(x)$  è definita per  $x^2 - 1/a \neq 0$ , ossia  $x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$   $\forall a > 0$ , e  $x^2 - \frac{1}{a} \neq 0$   $\forall a < 0$ .

Per  $a > 0$  l'  $I_{MAX} = (-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}})$ , mentre per  $a < 0$   $I_{MAX} = (-\infty, +\infty)$



### OSSERVAZIONE

Calcolare  $y'(1/2)$  e  $y'(3)$

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Da esercizio precedente  $y(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ,  $I_{MAX} (-1, 1)$ , scriviamo:

$$y'(1/2) = 2 \cdot \frac{1}{2} y^2(1/2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$y'(3) = 2 \cdot 3 y^2(3)$ , ma  $x = 3 \notin I_{MAX}$ , quindi non ha senso calcolare  $y'(3)$  anche se formalmente è possibile.

### ESERCIZIO

$$\begin{cases} y' = xy^2 - xy \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

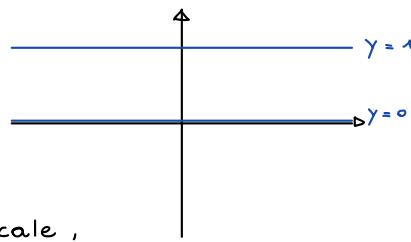
Soluzioni costanti  $(y-1)x = 0 \Rightarrow y=0, y=1$  sono soluzioni costanti e  $\frac{1}{2}$  ci sta dentro, ciò ci dice anche che  $y(x) \in (0, 1)$ .

$x > 0 \implies y' = xy(y-1) \text{ quindi } y' < 0 \text{ (decrescente)}$

$x < 0 \implies y' > 0 \text{ (crescente)}$

Ma ciò significa che in  $x = 0$   $y(x)$  ha un massimo locale, cerchiamo la soluzione esplicita:

$$\int_{1/2}^{y(x)} \frac{1}{y^2-y} dy = \int_0^x x dx = \int_{1/2}^{y(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} dy$$



$$\left[ \log \frac{y-1}{y} \right]_{1/2}^{y(x)} = \frac{x^2}{2}$$

ma  $\left| \frac{y-1}{y} \right| < 0$  quindi lo scrivo come:

$$\log \left( \frac{y-1}{y} \right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\log \frac{1-y}{y} = \frac{x^2}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{1 + e^{-x^2/2}} \quad \text{che ha } I_{\text{MAX}} = \mathbb{R}$$

### ESEMPIO CASA

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$[ y = \sqrt{x^2 + 3} ; I_{\text{MAX}} = \mathbb{R} ]$$

### TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE

Consideriamo un problema di Cauchy e  $S = (z_1, z_2) \times \mathbb{R}$  con

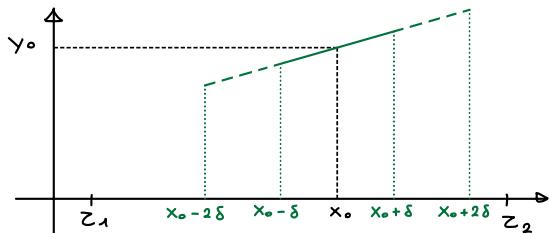
- $f$  definita in  $\bar{S}$  (chiuso)
- Valgono le ipotesi del Th. esistenza locale in  $S$
- $\exists P, Q \in \mathbb{R}$  tali che  $|f(x, y)| \leq \underbrace{P + Q|y|}_{\text{RETTA}}$   $\forall (x, y) \in \bar{S}$ , ossia cresce più lentamente di una funzione lineare.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora  $y(x)$ , soluzione di PC è definita  $\forall x \in [z_1, z_2]$

### DIMOSTRAZIONE

Si procede come nel Th. di esistenza locale e prolunga la soluzione, ma in questo caso si può prolungare senza cambiare  $\delta$ , ossia posso ripetere il ragionamento fino agli estremi  $z_1, z_2$  (dopo no perché  $f$  non rispetta più le ipotesi).



▼  
• Va bene anche se si ottiene la stima sulle soluzioni, ovvero  $|f(x, y(x))| \leq P + Q|y(x)|$ ;  $y$  dipende da  $x$  e non è una variabile indipendente

### ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = xy^2 - xy \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

Prendo un intervallo  $I = (-a, a)$  qualsiasi e  $S = (-a, a) \times \mathbb{R}$ , provo a stimare  $f$ :  $|f(x, y)| \leq |x||y| + |x||y^2|$  → non va bene perché non è lineare; ma se considero che:  $0 < y(x) < 1 \Rightarrow |f(x, y)| \leq |x| < a$ , quindi per il Th. la soluzione  $\exists$  su  $[-a, a]$  comunque scelto  $a$ . Quindi  $I_{\text{MAX}} = \mathbb{R}$

Una volta che so che  $I_{\text{MAX}} = \mathbb{R}$  allora ha un asintoto, quindi:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(y^2 - y) = 0 \rightarrow y^2 - y$  deve andare a zero (per  $x \rightarrow +\infty$ ), allora  $y \rightarrow 0$  oppure  $y \rightarrow 1$ ,

poiché  $y(0) = \frac{1}{2}$  e  $y$  decrescente allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , analogamente  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$

## OSSERVAZIONE (SIMMETRIE)

L'unicità della soluzione si può usare per trovare simmetrie della soluzione, ad esempio:

$$\begin{cases} y' = x \sin(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Voglio dimostrare che:

- $y(x)$  è definita su  $\mathbb{R}$
- $x=0$  ha un minimo
- $y(x)$  è pari

$|x \sin y| < |x| \rightarrow$  Th. di esistenza globale,  $y(x)$  è definita su  $\mathbb{R}$

$y = K\pi$  è soluzione globale

$0 < y(x) < \pi \Rightarrow \sin(y) > 0$ , ossia  $y$  è crescente per  $x > 0$  e decrescente per  $x < 0 \Rightarrow x=0$  è minimo.

### CONTROLLO SIMMETRIA

Voglio ora dimostrare che  $y(x) = y(-x)$ , chiamo  $z(-x) = z(x)$

1. Vedo se risolvono la stessa eq.

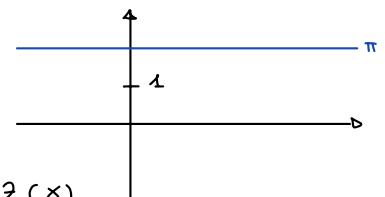
$$z'(x) = -y'(-x) = -(-x \sin(y(-x))) = x \sin(y(-x)) = \sin(z(x))$$

quindi  $z$  e  $y$  risolvono la stessa equazione differenziale, infine:

2. Controllo le condizioni iniziali

$$z(0) = y(-0) = y(0) = 1$$

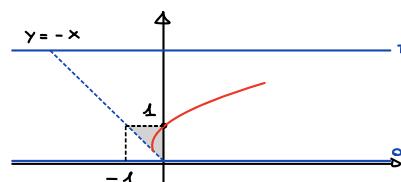
Quindi anche  $z$  è sol. dello stesso PC  $\Rightarrow z = y(-x) = y(x)$  per unicità e quindi  $y(x)$  è pari.



## STUDIO QUALITATIVO (ALCUNI ESEMPI)

1.

$$\begin{cases} y' = \frac{\sin y}{x+y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Per  $x = -y$  il Th. di Cauchy non vale (non può passare dal rosso)

$y = 0, \pi$  soluzioni costanti

Notiamo che  $0 < y(x) < \pi$  quindi  $\sin y > 0$ ,  $y > 0$  e analizziamo  $x$ :

$x + y(x) > 0$  per  $x > 0$   $y'(x) > 0$  e quindi  $y(x)$  è crescente per  $x \geq 0$ ,

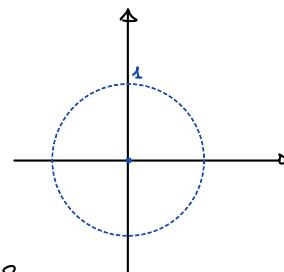
$$\bullet x \geq 0 \quad x + y(x) > y(x) > y(0) > 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin y}{x+y} \right| < 1 \quad \forall x \geq 0 \text{ quindi } T_{\max} = +\infty$$

$\bullet x < 0$  Dato che parte da 1 e decresce, deve per forza andare a sbattere con la bisettrice in un punto  $x_0 \in (-1, 0) \rightarrow I_{\max} = (x_0, +\infty)$  per  $-1 < x_0 < 0$ , ma cosa succede in  $x_0$ , facciamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\sin y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} y' = +\infty \text{ quindi a un certo punto ha pendenza verticale.}$$

2. Trovare  $x_0, y_0$  per cui vale il Th. di esistenza locale, cosa succede partendo da  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  e da  $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



1) Quando  $|x^2+y^2-1|$  si annulla, ossia  $x^2+y^2 \neq 1$ , quando tocca la circonferenza di  $R=1$

2) Notare che  $y(x)$  è dispari, infatti se  $z(x) = -y(-x)$ , allora risolve P.C. (si verifica come prima).

$y'(x) > 0 \rightarrow y(x)$  crescente e l'intervalle massimale è simmetrico.

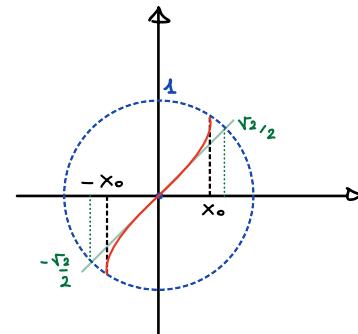
$$I_{\max} = (-x_0, x_0) \text{ con } x_0 < 1$$

$$y' \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow x_0^-$$

$$y' \rightarrow -\infty \text{ per } x \rightarrow x_0^+$$

Possiamo studiare la concavità, ossia  $y''$

$$y'' = -\frac{1}{2} \frac{(-2x - 2yy')}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$



$$y'' > 0 \quad \forall x > 0$$

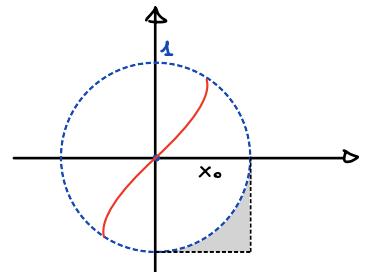
$$y'' < 0 \quad \forall x < 0$$

Notiamo infine che  $y'(0) = 1$  quindi  $y(x)$  è tg a  $y = x$  in  $x = 0$ , ciò ci dice che  $0 < x_0 < \sqrt{2}/2$

3)  $y$  è localmente e  $y' > 0 \rightarrow y(x)$  è crescente e sta nel quadratino  $(-1, 1)$ , ossia:

$$x^2 + y^2 - 1 > \delta > 0 \quad \forall x$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-1|}} > \frac{1}{\delta} \quad \forall x \Rightarrow \text{la soluzione esiste } \forall x \in \mathbb{R}$$



## Esercizi 21 su equazioni differenziali

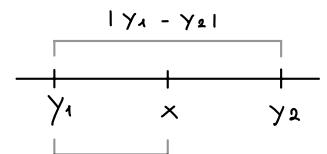
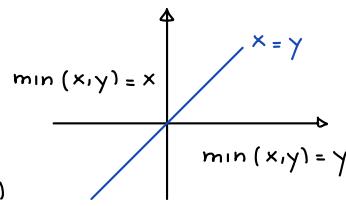
1. Studiare l'esistenza,  $y(0) = a$ , soluzione esplicita per  $y(-1) = 0$

$$\begin{cases} y' = \min(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1)  $\min(x, y)$  non è  $C^1$ , quindi non è derivabile

In questo caso, dobbiamo far vedere che la funzione  $\min(x, y)$  è 1-Lipschitziana.

- se  $y_1, y_2 > x$ , ossia  $\min(x, y_1) = x = \min(x, y_2)$   $\Rightarrow |\min(x, y_1) - \min(x, y_2)| = 0 < |y_1 - y_2|$  ✓
- se  $y_1, y_2 < x$  allora  $|\min(x, y_1) - \min(x, y_2)| = |y_1 - y_2|$  ✓
- se  $y_1 < x < y_2$  allora  $|\min(x, y_1) - \min(x, y_2)| = |y_1 - x| < |y_1 - y_2|$  ✓



In generale  $|\min(x, y_1) - \min(x, y_2)| < |y_1 - y_2| \quad \forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

quindi vale il teorema di esistenza e unicità, inoltre:

$|\min(x, y)| < |y| \quad \forall x \Rightarrow$  Ho esistenza globale su  $\mathbb{R}$

$$|y_1 - y_2|$$

$$|y_1 - x|$$

2)  $y(0) = a$ , dove siamo? Devo distinguere i due casi:

•  $y > x \Rightarrow \min(x, y) = x$  e risolvo:

$$\begin{cases} y' = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{INTEGRO}} \int_{y_0}^{y(x)} y' dy = \int_{x_0}^x \frac{x^2}{2} dx$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}$$

•  $y < x \Rightarrow \min(x, y) = y$

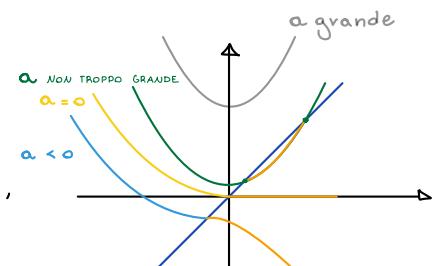
$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \lambda = 1 \quad y = A e^x$$

$$y(x) = y_0 e^x \cdot \frac{1}{e^{x_0}}$$

•  $y = x$  cosa succede, consideriamo vari casi di  $a$ :

$a$  grande  $\rightarrow$  non si ha l'interfaccia

$a$  "non troppo grande"  $\rightarrow$  Ho due punti in cui si attraversa  $y = x$ , che delimitano una regione



$a = 0 \rightarrow$  Parto con una parabola e continuo con una retta

$a < 0 \rightarrow$  Si parte con una parabola e si finisce con un'esponenziale rivolta verso il basso

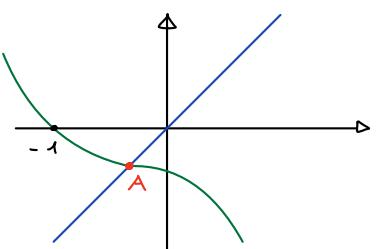
3)  $y(-1) = 0$ , so già che parto con una parabola (+) e finisco con un'esponenziale (-)

$$\begin{cases} y' = \min(x, y) \\ y(-1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{} y = \frac{x^2 - 1}{2} \quad \text{per } y > x$$

Voglio vedere che succede nel punto A ( $y = x$ )

$$x = \frac{x^2 - 1}{2} \xrightarrow{} x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x_A = 1 - \sqrt{2}$$

Per  $y < x$  si ha  $y = \frac{y_0}{e^{x_0}} e^x = \frac{1 - \sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}} e^x$  per  $x \in (1 - \sqrt{2}, +\infty)$



2. Studiare i casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} Y' = \frac{Y^2 + 1}{x^2 + 1} \\ Y(0) = \alpha \end{cases}$$

1)  $\alpha = 0$

$$\begin{cases} Y' = \frac{Y^2 + 1}{x^2 + 1} \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^Y \frac{1}{Y^2 + 1} dy = \int_0^x \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\arctg Y = \arctg x \Rightarrow Y = x \quad I_{\max} (-\infty, +\infty)$$

2)  $\alpha = \sqrt{3}$

$$\arctg Y - \pi/3 = \arctg x$$

$$Y = \tan(\pi/3 + \arctg x) \quad \text{ma ricordo che } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3} + x}{1 - \sqrt{3} \cdot x} \quad I_{\max} (-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

ESEMPIO: Cambio di variabile

$$\begin{cases} Y' = 1 - \log(x+y) \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

Possiamo introdurre una variabile  $z(x) = y(x) + x$ , ossia se  $y$  risolve il problema di partenza, allora

$$z(0) = y(0) + 0 = 1$$

$$z' = Y' + 1$$

$$\log(x+y) = \log(z)$$

$$\begin{cases} z' = 2 - \log(z) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

con  $z$  soluzione del nuovo problema.

$z > 0$  (è argomento del logaritmo)

La soluzione costante è  $z = e^2$ , quindi possiamo già delimitare la funzione  $0 < z(x) < e^2$ .

Studiamo il segno della derivata:

$z - \log(z) \geq 0$  quindi è crescente

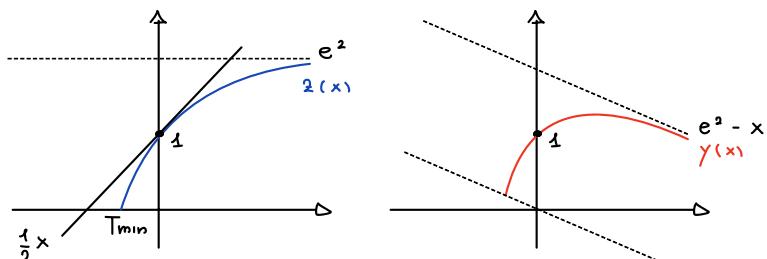
$$z'(0) = 2 \quad (\text{quindi la tangente è } y = \frac{1}{2}x + 1)$$

$$T_{\max} = +\infty \quad (\text{ha un asintoto in } e^2)$$

Cerchiamo la concavità:

$$z'' = Y'' = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{perche' } z > 0 \quad \text{quindi } z'' < 0 \quad \forall x \quad \text{quindi } z \text{ è concava,}$$

Ma  $z(x) = y - x$  quindi devo togliere  $x$ , ossia la funzione in rosso.



## RISOLUZIONE PER SERIE DI POTENZE

Quando un'equazione differenziale non è lineare ma ha come coefficienti le potenze si può usare il seguente metodo

ESEMPIO:

$$y''(x) = xy(x)$$

Suppongo che  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (ossia si può scrivere come serie di potenze centrata in zero), posso passare a:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$xy(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Scrivo le equazioni con le serie, ma rinomino gli indici per confrontare (porto tutto in  $x^n$ )

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n a_{n+2} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

Ora posso confrontare: ( $\nabla a_2 = 0$ )

$$a_{n-1} = (n+2)(n+1) a_{n+2}$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \geq 1$$

Per comodità chiamo  $K = n-1$

$$a_{K+3} = \frac{a_K}{(K+3)(K+2)}$$

$$a_5 = \frac{\overset{\circ}{a}_2}{5 \cdot 4} = 0 \quad \text{che sarebbe come dire } a_8 = \frac{a_5}{\dots} = 0$$

Quindi scopro che  $a_{3K+2} = 0 \quad \forall K \geq 0$  e noto che tutto dipende da 2 parametri  $a_0, a_1$ , perché:

$$a_0 \neq a_{3K+2}$$

$$a_1 \neq a_{3K+2}$$

$$a_3 = a_{3K+2} \quad \text{per } K=0$$

$a_0, a_5, \dots$  si scrivono come combinazioni lineari di  $a_0, a_1$ , quindi:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A a_0 x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B a_1 x^n$$

$a_0, a_1$  si determinano con il problema di Cauchy.

### ESEMPIO

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = (x-1)^2 y \\ y(1) = 0 \quad y'(1) = 1 \end{array} \right.$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} (x-1)^{n-2} n(n-1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (x-1)^n (n+1)(n+2) + 2a_2 + 6a_3(x-1)$$

$$(x-1)^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n (x-1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_2 = a_3 = 0 \quad n+2 = k$$

$$a_k = \frac{a_{k-a}}{k(k-a)}$$

Dai dati iniziali:

$$y(1) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y'(1) = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$a_0 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $a_1 = 1$  da qui ricavo:

$$a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{a_1}{5 \cdot 4} \quad a_6 = a_7 = a_8 = 0$$

$$a_{4k+1} = \frac{1}{(5 \cdot 4) \cdot \dots \cdot ((4k+1)4k)}$$

$$y = (x-1) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{4k+1} (x-1)^{4k+1}$$

### EQUAZIONI DIFFERENZIALI ESATTE

Cerchiamo di capire come risolvere equazioni del tipo (  $\nabla$  Non si possono separare le variabili )

$$y' = - \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

### IPOTESI:

1.  $Q, P$  continue su  $\mathbb{R}^2$  e  $Q \neq 0$ , inoltre:

2.  $\omega = Pdx + Qdy$  è esatta, ossia  $\exists U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $dU = \omega$  ovvero  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$  e  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0)$

### TESI:

Allora le soluzioni del P.C. sono date (in forma implicita) da  $U(x,y) = c$  (curva di livello)

### DIMOSTRAZIONE

Sia  $y(x)$  soluzione del P.C., sia inoltre:  $\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(x) = P + Q \left( -\frac{P}{Q} \right) = 0$  quindi  $dU = 0 \rightarrow U(x, y(x))$  è costante  $\forall x$

$$U(x, y(x)) = c$$

Sia ora  $\gamma = \{(x, y) : U(x, y) = c\}$ ;  $\frac{dU}{dy} = Q \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \gamma \Rightarrow$  dato un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \gamma$  esplicito e posso scrivere  $\gamma$  come grafico di  $y(x)$ :

$$y'(x) = - \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = - \frac{P}{Q} \Rightarrow y(x) \text{ risolve PC}$$

Ma posso ripetere su tutti i punti di  $\gamma \rightarrow$  FINE

### ESERCIZIO:

$$\begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x-3y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$P = x+y$$

$$Q = x-3y$$

$$d\omega = \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy = (-1+1) dx \wedge dy$$

$d\omega = 0 \rightarrow \omega$  e definita su  $\mathbb{R}^2$  (semp. conn.)  $\Rightarrow \omega$  e esatta, cerco  $U$

$$dU = \omega = P dx + Q dy$$

$$\frac{dU}{dx} = x+y \quad \frac{dU}{dy} = x-3y$$

$$U = \frac{x^2}{2} + xy + g(y) \quad U = -\frac{3}{2}y^2 + g'(y)$$

$$g = -\frac{3}{2}y^2 + c$$

$$U = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{3}{2}y^2 + c$$

$$U(0,1) = -\frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

La mia soluzione implicita e'

$$x^2 + 2xy - 3y^2 = -3 \quad (\text{e' un iperbole})$$

$$y = \frac{1}{3}(x + \sqrt{4x^2 + 9})$$

### DIPENDENZA DAI DATI

Ossia si vuole studiare come varia la soluzione di un P.C. se sposto (anche di poco) le condizioni iniziali. Talvolta variare una condizione puo' portare a conseguenze imprevedibili, come nella Teoria del caos (esempio: biliardo si puo' prevedere la traiettoria dopo varie sponde, ma non dopo un minuto).

### LEMMA DI GRONWALL

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  e  $x_0 \in I$ , siano  $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u, v \geq 0$  e prendiamo  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Se  $v(x) \leq c + \left| \int_{x_0}^x u(s) \cdot v(s) ds \right|$  allora:

$$v(x) \leq c \cdot \exp \left( \left| \int_{x_0}^x u(s) ds \right| \right)$$

### DIMOSTRAZIONE

Prendiamo  $x_0 < x \Rightarrow \int_{x_0}^x u(s) ds > 0$ , quindi potro' togliere il modulo.

Sia una funzione:

$$w(x) = c + \int_{x_0}^x u(s) \cdot v(s) ds$$

Possiamo ora derivare:

$$w'(x) = u(x) \cdot v(x) \leq u(x) w(x) \quad \text{poche' } w(x) \geq v(x)$$

$$\frac{d}{dx} w e^{- \int_{x_0}^x u(s) ds} = e^{- \int_{x_0}^x u(s) ds} (w' - u \cdot w) < 0 \quad \text{quindi } w(x) e^{\int_{-x_0}^x u(s) ds}$$

$$w(x) e^{- \int_{x_0}^x u(s) ds} \leq w(x_0) e^{- \int_{x_0}^{x_0} u(s) ds} = w(x_0) = c$$

$$w(x) \leq c e^{\int_{x_0}^x u(s) ds} \quad (\text{FINE DIMOSTRAZ.})$$

## TEOREMA DELLA DIPENDENZA CONTINUA DAL DATO INIZIALE

Sia  $y' = f(x, y)$  con  $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua e localmente Lipschitziana in  $y$ , uniformemente rispetto ad  $x$  (in  $D$ ).

Prendo un dato  $(x_0, y_0) \in D$  e suppongo che in un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  ogni soluzione che parte con dato iniziale  $(x_1, y_1) \in U$  sia definita su un intervallo  $[T_1, T_2]$  uguale  $\forall (x_0, y_0) \in U$

Si puo' dimostrare che  $U$  esiste sempre

Allora:

1. Se  $x_1, y_1 \in U$  e  $\bar{y}$  e' soluzione del P.C. con dato iniziale  $y(x_0) = y_0$  e  $\bar{y}_1$  e' soluzione del P.C. con dato  $y(x_1) = y_1$ , allora:  $L(T_2 - T_1)$

$$|\bar{y}(x) - \bar{y}_1(x)| \leq (|y_0 - y_1| + M|x_0 - x_1|) e^{L(T_2 - T_1)} \quad \forall x \in [T_1, T_2]$$

2. L'esponenziale dice quanto divergono le soluzioni e  $M = \text{Sup}(f)$  su  $D$  e  $L$  e' la costante di Lipschitz di  $f$  su  $D$

2. Siano  $(x_n, y_n) \xrightarrow{\text{CONVERGE}} (x_0, y_0) \Rightarrow \bar{y}_n \xrightarrow{\text{CONVERGE}} \bar{y}$  uniformemente su  $[T_1, T_2]$ , dove  $\bar{y}_n$  e' soluzione del P.C. con  $y(x_n) = y_n$

DIMOSTRAZIONE (Tanto 1.  $\Rightarrow$  2.)

1. Scrivo  $\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \bar{y}(s)) ds$

$$\bar{y}_1(x) = y_1 + \int_{x_1}^x f(s, \bar{y}_1(s)) ds \stackrel{\leq M}{\sim} L |\bar{y}_1(s) - \bar{y}(s)|$$

$$|\bar{y}_1(x) - \bar{y}(x)| \leq |y_1 - y_0| + \left| \int_{x_0}^x f(s, \bar{y}_1(s)) ds \right| + \left| \int_{x_1}^x f(s, \bar{y}(s)) - f(s, \bar{y}_1(s)) ds \right| \\ \leq |y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0| + \left| \int_{x_1}^x L |\bar{y}_1(s) - \bar{y}(s)| ds \right|$$

Chiamiamo  $|\bar{y}_1(x) - \bar{y}(x)| = \nu(x)$ ;  $|y_1 - y_0| M = c$ ;  $\mu(x) \equiv L$

a questo punto la diseguaglianza diventa:

$$\nu(x) \leq c + \left| \int_{x_1}^x \mu(s) \nu(s) ds \right|$$

che per Th. di Gron. e':

$\nu(x) \leq c \cdot \exp(\left| \int_{x_1}^x \mu(s) ds \right|)$  e quindi:

$$|\bar{y}_1(x) - \bar{y}(x)| \leq (|y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0|) e^{(L|x_1 - x_0|)} \leq (|y_1 - y_0| + M|x_1 - x_0|) e^{(L[T_2 - T_1])} \quad (\text{FINE})$$

3. Più ampio e'  $[T_2 - T_1]$  e più le funzioni  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}$  divergono dopo quell'intervalle di tempo

## TEOREMA DI DIPENDENZA DAI DATI (Ossia anche $f$ e non solo quelli iniziali)

Siano  $\{f_n\}_n$  successione di funzioni con  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  continua tali che:

1.  $f_n \rightarrow f$  sui compatti contenuti in  $D$

2.  $\forall K \subset D$  compatto, presi due punti  $(x, u), (x, v) \in K$  deve valere che (Lipschitzianità):

$$|f_n(x, u) - f_n(x, v)| \leq L|u - v| \text{ e stesse ipotesi per } f \quad \forall n \text{ (ossia } L \text{ non dipende da } n\text{)}$$

3. Siano  $\bar{y}$  e  $\bar{y}_n$  le soluzioni rispettivamente di:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{y}' = f_n(x, y) \\ \bar{y}(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con  $x_n \rightarrow x_0$  e  $y_n \rightarrow y_0$

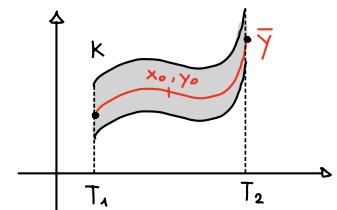
4. Sia  $[T_1, T_2]$  tale che  $\bar{y}$  e  $\bar{y}_n$  definite su  $[T_1, T_2] \quad \forall n$  (vale sempre, ma non si dimostra).

• Dato  $K = \{(x, y) : T_1 \leq x \leq T_2, |y - \bar{y}(x)| \leq K \in \mathbb{R}^+\}$   
allora per  $n$  sufficientemente grande:

$$|\bar{y}_n(x) - \bar{y}(x)| \leq \left( \frac{\|f_n - f\|_\infty}{L} + |y_n - y_0| + 2M|x_n - x_0| \right) e^{L(T_2 - T_1)}$$

con  $\|f_n - f\|_\infty = \text{Sup}_{(x, y) \in K} |f_n(x, y) - f(x, y)|$  e  $L$  costante su  $K$ ,  
 $M = \text{Sup}_K |f|$

•  $\bar{y}_n(x) \rightarrow \bar{y}(x)$  uniformemente su  $[T_1, T_2]$



• K e' l'insieme in ○

## PROBLEMA AI LIMITI

Ossia non si danno le condizioni del problema di Cauchy, ma si danno condizioni ai limiti. Non è sicuro che abbia soluzione (non è un P.C.)

### ESERCIZIO

$$\begin{cases} y'' + y = e^x & [0, \pi] \\ y(0) = \frac{1}{2} & y(\pi) = 1 \end{cases}$$

Normalmente si fornisce anche l'intervalle in cui il problema ha soluzione

L'omogenea ha soluzioni  $y_{omo} = A \cos x + B \sin x$ , la particolare è  $y_p = \frac{1}{2} e^x$ , quindi

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

$$y(0) = A + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow A = 0$$

$$y = B \sin x + \frac{1}{2} e^x$$

$$y(\pi) = \frac{1}{2} e^\pi \neq 1 \rightarrow \text{No Soluzione del problema}$$

### ESERCIZIO

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = e^x & [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) & y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$$

$$y_{omo} = A \sin(\omega x) + B \cos \omega x$$

$$y_p = \frac{e^x}{1 + \omega^2}$$

$$y(0) = A + \frac{1}{1 + \omega^2} = A \cos \omega \pi + B \sin \omega \pi + \frac{e^\pi}{1 + \omega^2} = y(\pi)$$

$$y'(0) = \omega B + \frac{1}{1 + \omega^2} = -\omega A \sin \omega \pi + \omega B \cos \omega \pi + \frac{e^\pi}{1 + \omega^2} = y'(\pi)$$

$$\begin{cases} A + \frac{1}{1 + \omega^2} = A \cos \omega \pi + B \sin \omega \pi + \frac{e^\pi}{1 + \omega^2} \\ \omega B + \frac{1}{1 + \omega^2} = -\omega A \sin \omega \pi + \omega B \cos \omega \pi + \frac{e^\pi}{1 + \omega^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(1 - \cos \omega \pi) - B \sin \omega \pi = \frac{e^\pi - 1}{1 + \omega^2} \\ \omega A \sin \omega \pi + \omega B(1 - \cos \omega \pi) = \frac{e^\pi - 1}{1 + \omega^2} \end{cases}$$

Scriviamolo in forma matriciale per usare Vouche capelli:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos \omega \pi & -\sin \omega \pi \\ \omega \sin \omega \pi & \omega(1 - \cos \omega \pi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{e^\pi - 1}{1 + \omega^2} \\ \frac{e^\pi - 1}{1 + \omega^2} \end{vmatrix}$$

È unica soluzione se  $\det() \neq 0$

$$\det() = \omega(1 - \cos \omega \pi)^2 + \omega \sin^2 \omega \pi = \omega(2 - 2 \cos \omega \pi) \text{ che è } = 0 \text{ per } \omega = 2k$$

Il sistema ha unica soluzione se  $\omega \neq 2k$ , se  $\omega = 2k$  non ho soluzione