# Meccanica dei fluidi

I fluidi si dividono in liquidi (incomprimibili) e gas (comprimibili); assumono la forma del recipiente che li contiene.

Sono SISTEMI CONTINUI (come corpo rigido), dove occorre considerare elementi infinitesimi di massa:

$$dm = \rho \, dV$$

Ad esempio $\rho_{acqua} \sim 10^3 \ Kg/m^3$, $\rho_{aria} \sim 1{,}3 \ Kg/m^3$, ...

A differenza del corpo rigido, le parti del fluido possono scorrere l'una sull'altra o sulle pareti del recipiente che le contiene.

## Fluido in quiete

Le forze tra elementi del fluido sono normali alla superficie di separazione, altrimenti gli elementi inizierebbero a scorrere l'uno sull'altro

# Forza applicata ad un fluido

① Forze di volume ($F_v$)

Sono proporzionali all'elemento di volume $dV$

② Forze di superficie ($F_p$) o di pressione

Proporzionali all'elemento di superficie $dS$ (esempio: Forza peso)

$$dF = \underbrace{p}_{\text{PRESSIONE}} dS$$

# Pressione in un fluido

E' il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima e l'area della superficie

$$p = \frac{dF}{dS}$$

(funzione scalare)

si orienta ortogonalmente alla superficie.

## Misura della pressione

esempio:

Recipiente con parete deformabile a cui viene fatto il vuoto; dalla deformazione delle parete si possono ricavare le forze (principio del barometro aneroide)

$$1 \ Pascal = 1 \ Pa = 1 \ N/m^2 \quad S.I.$$

Bar $\longrightarrow$ $1\ bar = 10^5\ Pa$

Atm $\longrightarrow$ $1\ atm = 1$

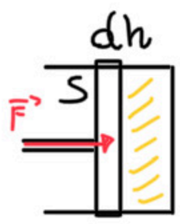
mmHg $\longrightarrow$ $1\ Tor = \frac{1}{760}\ atm = 133{,}3\ Pa$

## Esempi

| | |
|---|---|
| Migliore vuoto | $10^{-12}\ Pa$ |
| Pressione sistolica (*) | $1{,}6 \cdot 10^4\ Pa \sim 10^5$ |
| Pneumatici auto (*) | $2 \cdot 10^5$ |
| Tacco a spillo | $10^6$ |
| Fossa delle marianne | $1{,}1 \cdot 10^8$ |
| Centro della Terra | $4 \cdot 10^{11}$ |
| Centro del Sole | $2 \cdot 10^{16}$ |

(*) vuol dire in eccesso di quella atmosferica

## Lavoro




Forza esterna $\vec{F}$ diretta ortogonalmente alla superficie, con spostamento $dh$

$$dW = F\,dh = (pS)\,dh = p\underbrace{S\,dh}_{dV} = p\,dV$$

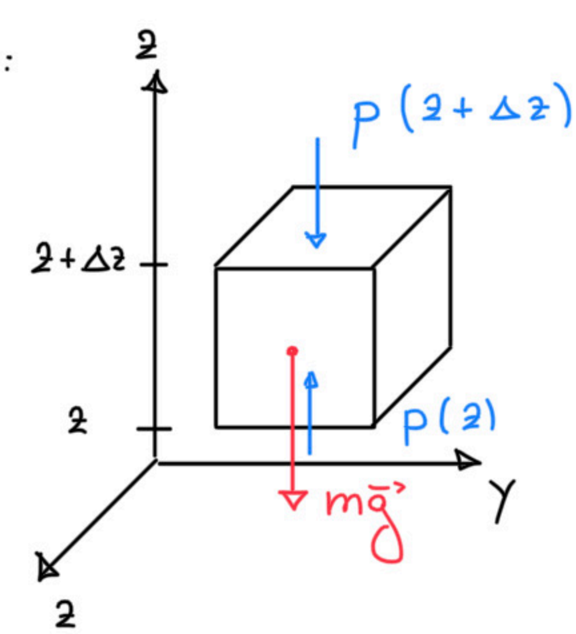
$$W = \int_{V_0}^{V_f} p\,dV \quad \text{(Lavoro in un fluido)}$$

## Equilibrio statico in presenza $m\vec{g}$

In un fluido in quiete tutti gli elementi hanno $a = 0$ e $v = 0$, ossia $\vec{R} = 0$ (in un sistema inerziale)

$$\underbrace{\vec{F}_p}_{\text{F di pressione}} + \underbrace{\vec{F}_v}_{\text{di volume}} = 0$$

esempio: Cubetto come elemento di Fluido:




Si avrà una pressione esercitata alla quota $z + \Delta z$ che spinge verso il basso e una alla quota $z$ che invece va verso l'alto.

$$\begin{cases} V = S\Delta z \\ S = \text{superficie} \\ m = \rho V \end{cases}$$

Le forze in gioco sono le seguenti:

Forza peso $= -mg = -\rho V g$

$\left.\begin{array}{l} \text{Faccia inferiore} = p(z) \cdot S \\ \text{Faccia superiore} = -p(z+\Delta z) S \end{array}\right\}$ Le altre forze di pressione

$p(z)S - p(z+\Delta z)S$

$pS - (p+\Delta p)S = \Delta p S$

chiamo $p(\Delta z) = \Delta p$ e $p(z) = p$

Risultante $= \Delta p S - \rho V g$

Equilibrio $\longrightarrow R = 0$

$\Delta p S = \rho V g$ ma $V = \Delta z S$

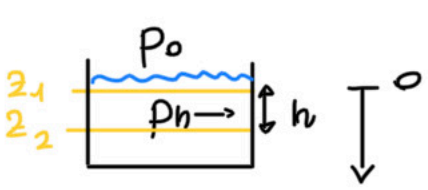
$\Delta p S - \Delta z \rho S g = 0$

$S(\Delta p - \Delta z \rho g) = 0$

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g \longrightarrow \Delta p = -\Delta z \rho g$$

In un fluido in quiete su cui agisce la forza peso la pressione non è costante (dipende a seconda di $\Delta z$)

Prendiamo per esempio due quote $z_1$, $z_2$ si ha:




$p(z_2) = p(z_1) - \rho g (z_2 - z_1)$

$p_0$ = pressione esterna

$z_2 = -h$ con $h$ = profondità

## Legge di Stevino

La pressione aumenta linearmente con la profondità

$p(h) = p_0 + \rho g h$

## Pressione in laghi, mari, oceani

Si ha una pressione atmosferica di $10^5$ Pa e $\rho_{acqua} \cong 10^3 \, Kg/m^3$

$p(h) = p_0 + \rho g h = 10^5 + 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot h =$

$p(h) = 10^5 + 10^4 h$

$\Delta p$ = ogni 10 m ci sono circa $10^5$ Pa ($\sim$ 1 Bar)

Ad esempio, consideriamo la profondità della fossa delle Marianne;

$h \sim 10^4$ m

$p(h) \sim 10^5 + 10^4 \cdot 10^4 \cong 10^8$ Pa che sono $10^3$ atm

esempio:

Subacqueo in piscina che riempie i polmoni d'aria e risale senza espirare l'aria gradualmente. In superficie si ha $\Delta p$ tra polmoni e $p_{est}$, calcolare la profondità h. (assumiamo che i tessuti sono in equilibrio con l'esterno)

$$p_1 = p_0 + \rho g h \quad \text{(a profondità h)}$$

$$p_2 = p_0 \quad \text{(in superficie)}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \cancel{p_0} + \rho g h - \cancel{p_0} = \rho g h$$

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

$$h = \frac{9,3 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^3} \cdot 9,81} = 0,95 \text{ m}$$

$\rho = 10^3$ Kg/m$^3$

$\Delta p = 9,3 \cdot 10^3$ Pa

(è meno del 10% della pressione esterna) => sufficiente per danneggiare gli alveoli e provocare un embolia

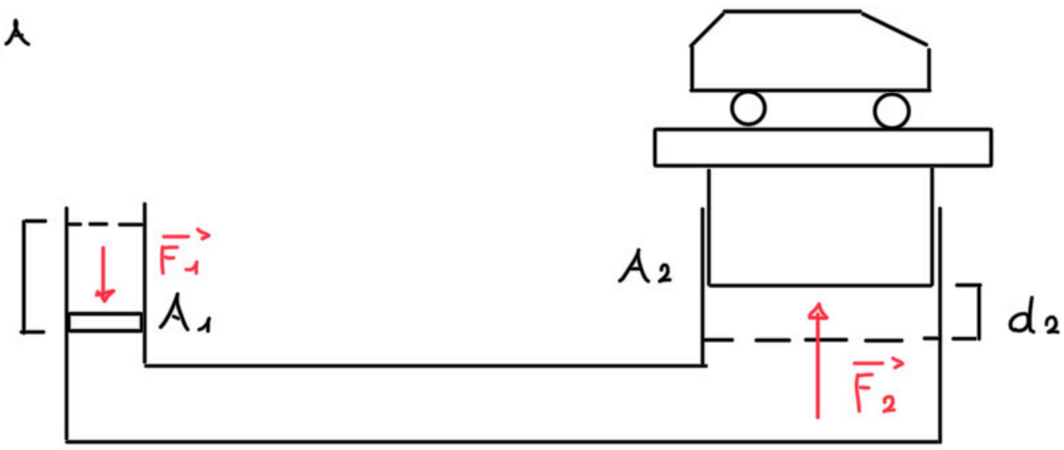
Quindi bastano 0,95 m risaliti senza espirare l'aria per provocare un embolia.

## Principio di Pascal

Ogni variazione di pressione esterna $p_0$ produce una identica variazione di pressione $p$, ossia la pressione in un fluido viene trasmessa invariata.

esempio: PRESSA IDRAULICA

In questo caso per il principio di Pascal, il $\Delta p$ deve essere lo stesso sia per il pistone 1 che per il 2, quindi:




① $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ ② $p_2 = \frac{F_2}{A_2}$ con $A_2 > A_1$

$$p_1 = p_2 \longrightarrow F_2 = \frac{F_1 \cdot A_2}{A_1}$$

Ma dato che $A_2 > A_1$, allora $F_2 > F_1$ e quindi partendo da una $F_1$ piccola posso generare con lavoro peso volume una forza $F_2$ più grande.

## Superficie di un liquido

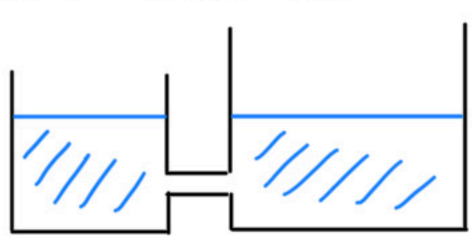
La superficie limite di un liquido in quiete è orizzontale, ma si può anche usare:

SUPERFICIE ISOBARICA: su un piano orizzontale definito da z costante, il valore della pressione è costante. Una superficie isobarica è equipotenziale (ossia a qualunque profondità U è costante).

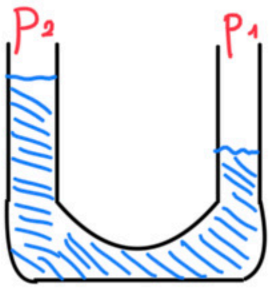
! Anche la superficie di separazione di due liquidi immiscibili è orizzontale

## PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI

Recipienti in comunicazione riempiti con lo stesso liquido e aperti nello stesso ambiente, hanno lo stesso livello nei recipienti



## Manometro a U

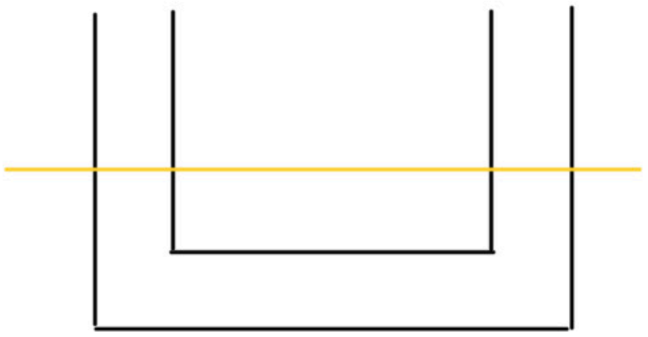



Se $p_1 = p_2$ stesso livello, ma se $p_1 \neq p_2$ si ha un dislivello:

$$p_1 = p_2 + \rho g h \longrightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h$$

esercizio:

Due liquidi $\rho_1$, $\rho_2$ non miscibili in un tubo a U, discutere le altezze dei liquidi.

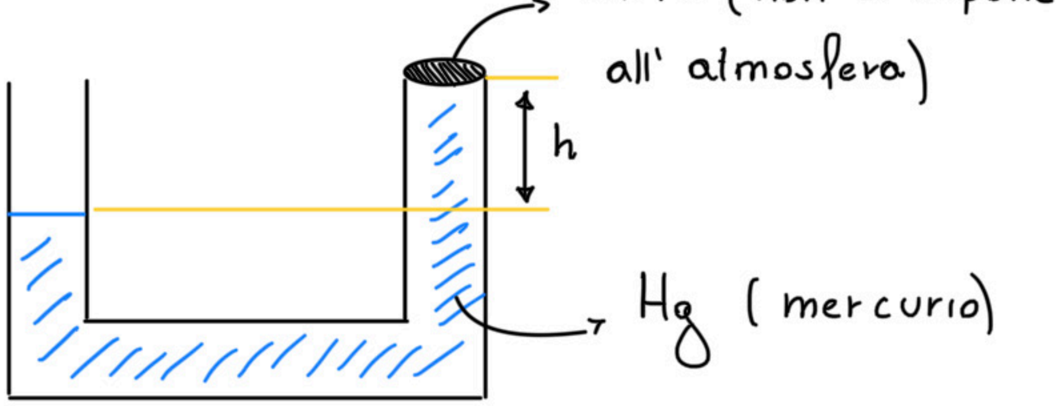



$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

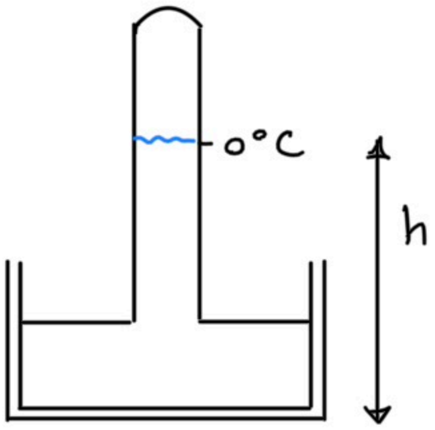
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{h_1}{h_2}$$

## Barometro di Thorricelli




Monometro a U con un ramo chiuso e un ramo a pressione atmosferica

# Termometro a Hg




Colonna di mercurio a 0°C, con $h = 760 \cdot 10^{-3}$ m mentre $g$ ha un valore

Si usa il mercurio perché l'altezza (ad esempio usando $H_2O$) raggiungerebbe valori elevatissimi ($10^{33}$ m)

# Principio di Archimede


Fluido in equilibrio sotto l'azione di $mg$ di cui isolo un volume finito che contiene una massa $m$ e sostituisco il volume identico con un materiale di densità $\rho'$ (densità del fluido invece è $\rho$), quindi:
$m' = \rho' V_0$

In equilibrio $\longrightarrow$ $\vec{F}_p + \vec{F}_v = 0$, le forze di volume è $m\vec{g}$, quindi $\vec{F}_{pressione} = -m\vec{g}$

$$\vec{F}_{pressione} + \vec{F}_{volume} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = m\vec{g} + m'\vec{g} = (m' - m)g = (\rho' - \rho) V_0 g$$

Un corpo immerso in un fluido, riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume spostato.

$$\vec{F}_A = -\rho V_0 \vec{g}$$

Si suppone che tale forza è applicata nel c.M. del fluido spostato, che non per forza coincide con il centro di massa del corpo.
Oltre alla forza risultante si ha anche un momento risultante

## esercizio: Iceberg immerso

$\rho$ (acqua salata) $= 1{,}024 \cdot 10^3\ Kg/m^3$

$\rho$ (ghiaccio) $= 917\ Kg/m^3$

$F_{peso} = F_A$

$$\rho_{acqua}\, g\, V_{immerso} = \rho_{ghiaccio}\, g\, V_{TOT}$$

$$\frac{V_{imm}}{V_{TOT}} = \rho_{ghiac.} / \rho_{acqua} = \text{FRAZIONE IMMERSA} \cong 0{,}90$$

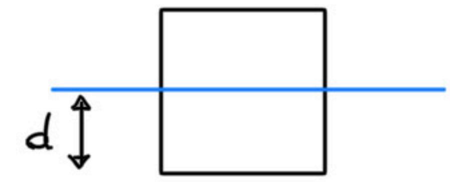
L'iceberg e' immerso per il 90 %.

! Ricordiamoci che non
- e' regolare come solido

esempio: Titanic, sommergibile Trieste, DCV1

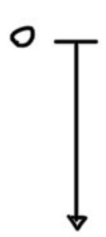
## Esercizio

Un cubetto di lato l e densità $\rho$ che galleggia sull'acqua ($\rho_a > \rho$), il cubetto viene abbassato leggermente e lasciato. Calcolare la frequenza del moto armonico.



Equilibrio: $\rho l^3 g = \rho_A (l^2 d) g$

pongo l'origine nel c.M. del cubetto all'equilibrio.



Abbasso il cubetto di y.

$$\rho l^3 \frac{d^2y}{d^2t} = \rho l^3 g - \rho_A g l^2 (d + y)$$

$$\cancel{\rho} l^{\cancel{3}} \frac{d^2y}{d^2t} + \rho_A \cancel{l^2} g y = \cancel{\rho} l^{\cancel{3}} g - \rho_A g \cancel{l^2}$$

$$\frac{d^2y}{d^2t} + \frac{\rho_1}{\rho \ell} g y = g - \rho_1 g d/\ell$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot g/\ell}$$

In realta' servirebbe anche la soluzione particolare

## Esercizio

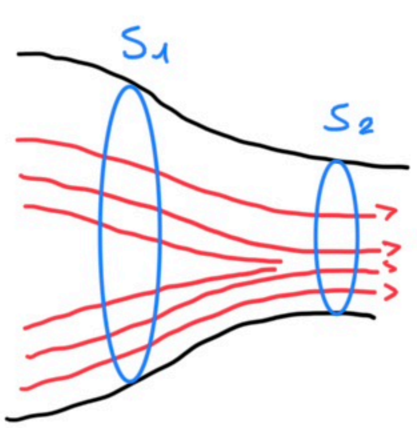
Sfera di raggio r e massa m e' appesa ad una molla K con lunghezza a riposo $l_0$ e viene immersa in un liquido (non conosciamo $\rho$). La posizione di eq varia di una quantita' d, calcolare $\rho$ del fluido.

## Moto in un fluido

Sia P un punto generico $(x, y, z)$, devo considerare alcune variabili (pressione, velocita', ...)

$\vec{v}(x, y, z, t)$ moto in un punto, all' istante t

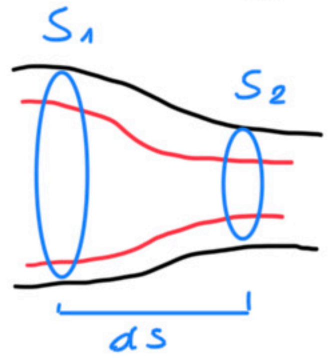
Consideriamo una versione senza t (regime stazionario), tutti gli elementi che passano dal punto P, hanno in quel punto sempre la stessa velocita' (ossia $\vec{v}$ dipende dalle coordinate).
In regime stazionario per un punto passa una sola linea di corrente (ossia le linee non si intersecano).
Consideriamo un insieme di linee che attraversano una sezione e introduciamo il TUBO DI FLUSSO. Se considero una sezione infinitesima dS. (e il tubo associato).




$$dV = dS\, v\, dt$$ (volume di fluido che attraversa dS in un tempo dt)

Definiamo ora come Portata: $dq = \frac{dV}{dt}$, che si può scrivere come:

$$dq = \frac{dV}{dt} = v\,dS \longrightarrow q = \int v\,dS$$




Se considero un fluido incomprimibile in un regime stazionario $\longrightarrow$ La portata e' costante attraverso qualsiasi sezione

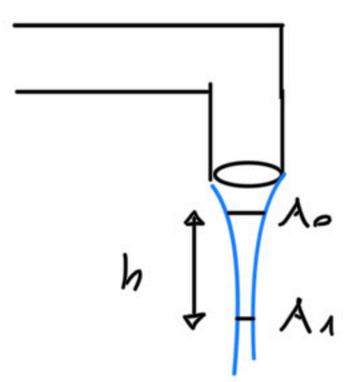
$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \longrightarrow$$ Vale per tubi di flusso e per condotti fisici

Equazione di continuita'

$R_V$ = portata in volume $= Sv$ ($v$ media) $[m^3/s]$

$R_M$ = portata in massa $= \rho S v$ $[Kg/s]$

Esercizio: Flusso da un rubinetto, voglio $V_0$ e $V_1$




$$\begin{cases} A_0 V_0 = A_1 V_1 \longrightarrow V_0 = \dfrac{A_1 V_1}{A_0} \\ V_1^2 = V_0^2 + 2gh \end{cases}$$

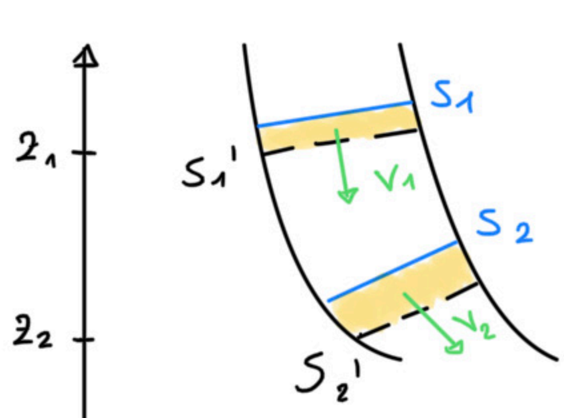
$$V_1^2 = \frac{A_1^2 V_1^2}{A_0^2} + 2gh$$

$$V_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_0^2}\right) = 2gh$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \frac{A_1^2}{A_0^2}\right)}}$$

## Teorema di Bernulli

Fluido in regime stazionario in un condotto a sezione visibile:




$\vec{s}_1$ = spostamento da $S_1$ a $S_1'$

$\vec{s}_2$ = spostamento da $S_2$ a $S_2'$

$\Delta V_1 = S_1 s_1 \qquad \Delta V_2 = S_2 s_2$

In un tempo $\Delta t$

$\Delta V_1 = \Delta V_2$

Si può usare il teorema delle forze vive:

$$W = \Delta K$$

Forze: peso, pressione e non c'è attrito interno

Consideriamo il lavoro per spostare massa $\Delta V_1$ in $\Delta V_2$

Forza peso

$$W_p = -\Delta U = -mg(z_2 - z_1) = -\rho g \Delta V(z_2 - z_1)$$

Forza di pressione

$$W_{pres} = \underbrace{\vec{F_1}}_{} \cdot \vec{s_1} + \underbrace{\vec{F_2}}_{} \cdot \vec{s_2}$$ ∇ Considero $F_1$, $F_2$ costanti

$$= p_1 S_1 \cdot s_1 - p_2 S_2 s_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

$$= (p_1 - p_2)\Delta V$$

Quindi:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$W = W_p + W_{pres} = -\rho g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)\Delta V$$

$$\frac{1}{2}\rho \cancel{\Delta V}(v_2^2 - v_1^2) = -\rho g \cancel{\Delta V}(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)\cancel{\Delta V}$$

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = -\rho g(z_2 - z_1) + (p_1 - p_2)$$

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g z_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

## Teorema di Bernulli:

In un fluido ideale in un regime stazionario, la somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume e dell'energia potenziale per unità di volume è costante in un tubo di flusso.

$$\boxed{\rho g z + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{COSTANTE}}$$

Se poniamo $v = 0$

$p + \rho g z = \text{COSTANTE} \longrightarrow$ La pressione del fluido in movimento e' < rispetto a quella del fluido in quiete

## Esempio

Tubo a sezione costante $S_1 = S_2 \longrightarrow$ velocita' costante

$$\rho g h_1 + p_1 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2} = \rho g h_2 + p_2 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$

$$h = h_2 - h_1 \qquad \Delta p = p_2 - p_1$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

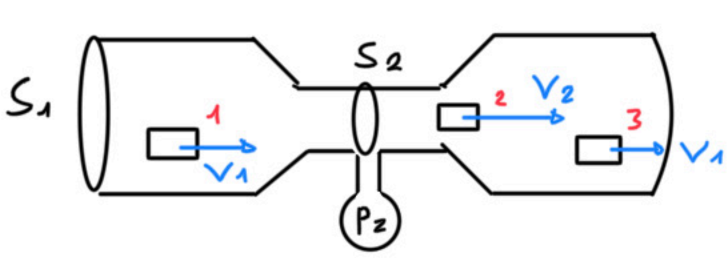
$\Delta p = \rho g h$ (come nel fluido in quiete)

esempio: Voglio pompare un fluido ad una quota h, deve garantire $\Delta p = \rho g h$

$$\text{Forza} = \Delta p S = \rho g h S$$

$$\text{Potenza} = \rho g h \underbrace{S \cdot v}_{q} = \rho g h \cdot q$$

## Tubo di Venturi



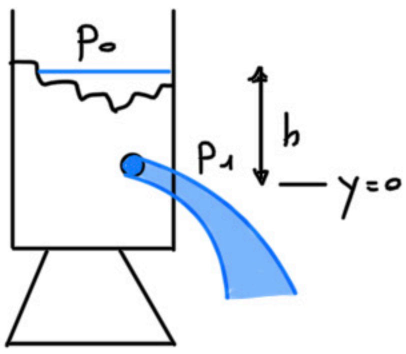

Condotto orizzontale a sezione variabile, usato per misure di velocita' e portata

$$\begin{cases} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ v_1 S_1 = v_2 S_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1) S_1^2}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}} \longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1) S_2^2}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}$$

velocità ricostruite a partire dal $\Delta p$

## Teorema di Torricelli




Superficie Foro

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$$

Superficie: $p = p_0$ $\quad v = 0 \quad z_s = h$

Foro = $p_0$ , $z_f = 0$

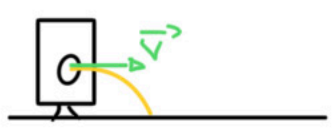
Si semplifica e si ottiene:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

La velocità di efflusso è uguale alla velocità di caduta libera (non dipende da $\rho$ o $p_0$)

La traiettoria è parabolica




Pulsazione vascolare (arteriosclerosi, si ha arterie con sezione diminuita a causa di placche)

Il cuore per mantenere q costante, deve fare uno sforzo maggiore, ciò provoca una diminuizione della pressione (pericoloso perché l'arteria si schiaccia e si può bloccare il flusso).