

MANUALI

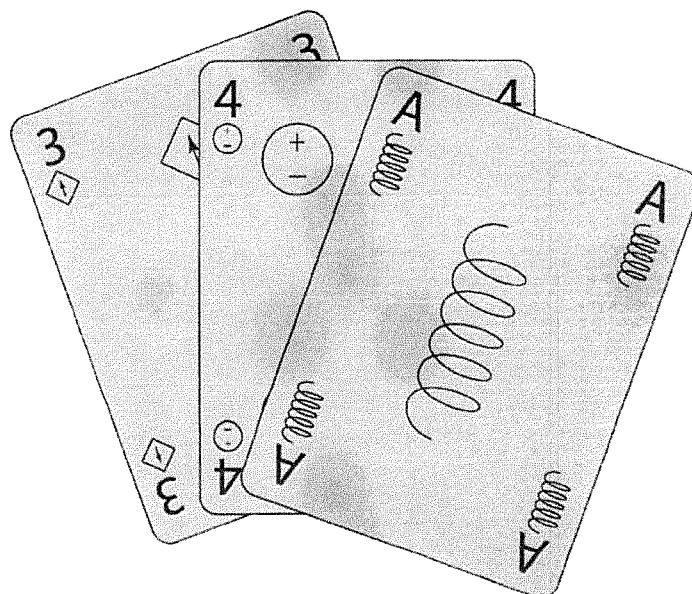


Sami Barmada

ELETTRTECNICA: 84 ESERCIZI

Soluzione guidata e commentata

PISA
UNIVERSITY
PRESS



una complessità computazionale maggiore).

All'interno di ogni sezione gli esercizi sono ordinati in modo casuale e, salvo rare eccezioni, non vengono mai effettuati richiami ad esercizi precedenti. Lo studente può pertanto scegliere gli esercizi da svolgere in completa autonomia non rispettando alcun ordine.

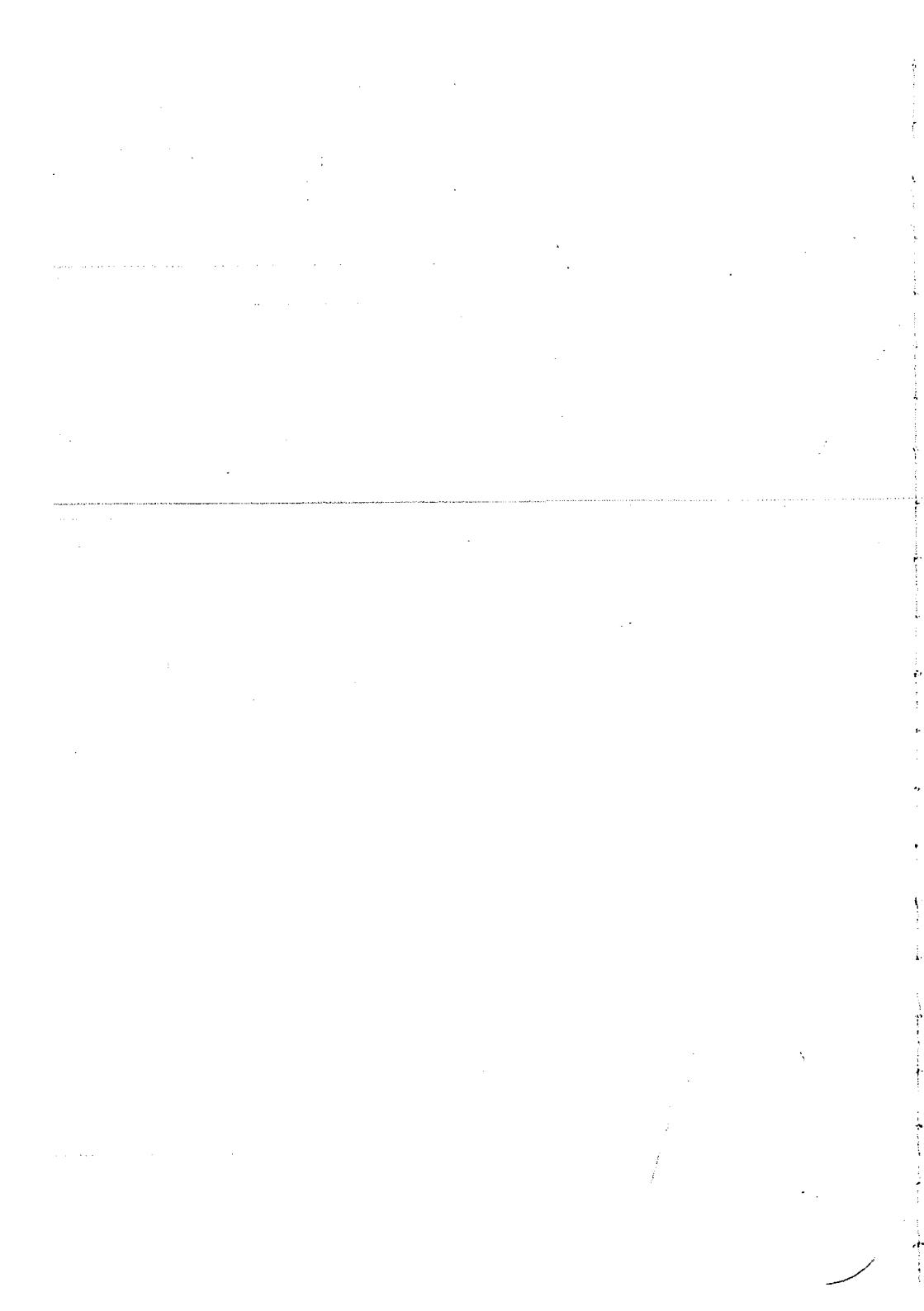
Il linguaggio usato in questo eserciziario è volutamente estremamente semplice, con lo scopo di consentire allo studente di focalizzare la propria attenzione esclusivamente sul metodo risolutivo adottato. Ringrazio anticipatamente coloro i quali segnaleranno errori ed inesattezze sicuramente presenti in questa prima stesura del testo.

Pisa, Settembre 2015

Indice

1	<u>Scrittura di equazioni relativa a circuiti a regime sinusoidale</u>	1
2	<u>Soluzione di circuiti caratterizzati da transitori del I e del II ordine</u>	47
3	<u>Soluzione di circuiti a regime sinusoidale</u>	135
4	<u>Soluzione di circuiti a regime sinusoidale con presenza di circuiti magnetici</u>	185
5	<u>Soluzione di circuiti a regime periodico non sinusoidale</u>	213
6	<u>Valutazione della risposta in frequenza e diagrammi di Bode</u>	231
7	<u>Soluzione di circuiti trifasi</u>	241

1 Scrittura di equazioni relativa a circuiti a regime sinusoidale



1.1 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

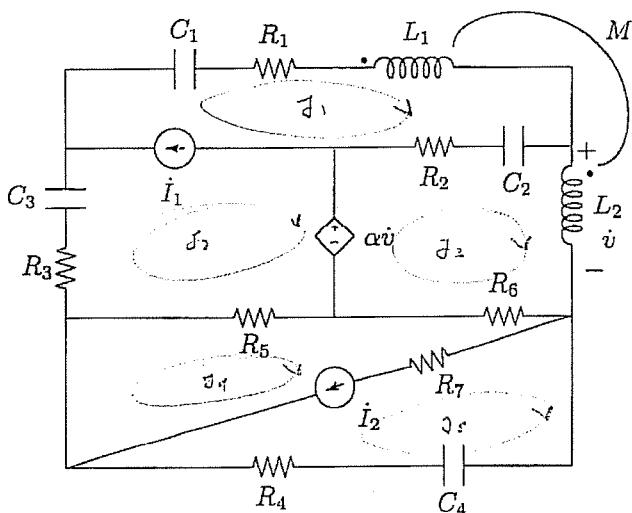


Figura 1.1.1: Circuito esercizio 1.1

Essendo presente un mutuo accoppiamento, per poter scrivere le equazioni con il metodo delle tensioni ai nodi, è necessario trasformare l'accoppiamento in uno dei due equivalenti, ma dato che la grandezza di controllo è la tensione v ai capi di L_2 , si può essere indotti all'errore.

La scelta ricade pertanto nella scrittura delle equazioni con il metodo delle correnti alle maglie o con il metodo degli anelli. Si procederà con la scrittura delle equazioni utilizzando quest'ultimo metodo, considerando la presenza dei due superanelli $j_1 - j_2$ e $j_4 - j_5$ come indicato in figura 1.1.2.

$$\begin{aligned}
 \text{I}_1 : -\alpha \dot{v} &= \left(-\frac{j}{\omega C_1} + R_1 + j\omega L_1 + R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_1 + \left(R_5 + R_3 - \frac{j}{\omega C_3} \right) \dot{j}_2 + \\
 &\quad - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M \right) \dot{j}_3 - R_5 \dot{j}_4 \\
 \text{I}_3 : \alpha \dot{v} &= \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} + j\omega L_2 + R_6 \right) \dot{j}_3 - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} - j\omega M \right) \dot{j}_1 - R_6 \dot{j}_4 \\
 \text{I}_2 : 0 &= (R_5 + R_6) \dot{j}_4 + \left(R_4 - \frac{j}{\omega C_4} \right) \dot{j}_5 - R_5 \dot{j}_2 - R_6 \dot{j}_3 \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{j}_1 = \dot{j}_1 - \dot{j}_2 \\ \dot{j}_2 = \dot{j}_4 - \dot{j}_5 \\ \dot{v} = j\omega L_2 \dot{j}_3 + j\omega M \dot{j}_1 \end{array} \right. \quad (1.1.1)
 \end{aligned}$$

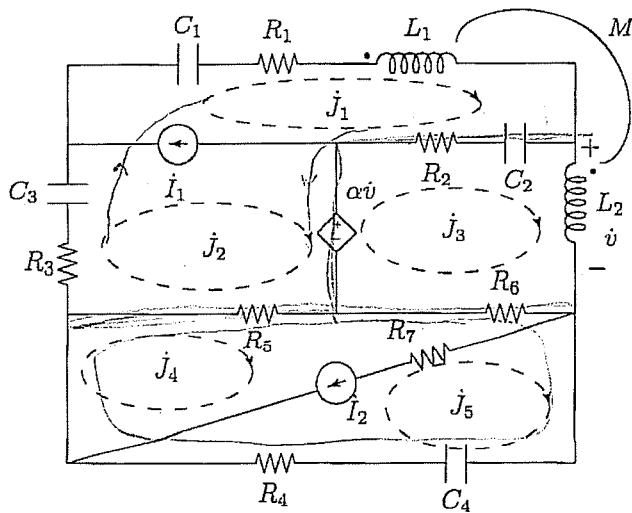


Figura 1.1.2: Scelta degli anelli

1.2 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

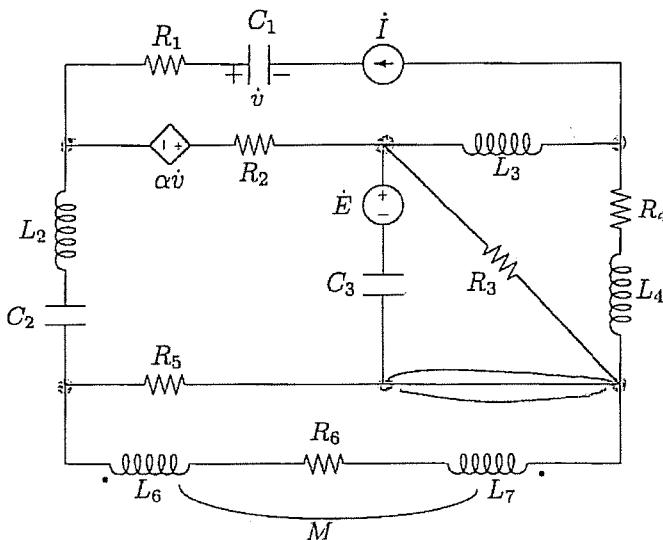


Figura 1.2.1: Circuito esercizio 1.2

$$\text{N.C.N} \quad Z = M + 1 \quad S - S + 1 - M \frac{I}{I} = 4$$

$$\text{M.T.N} \quad M - 1 \quad S - 1 = 4$$

Il numero di equazioni da scrivere è equivalente sia che si applichi il metodo delle tensioni ai nodi sia il metodo degli anelli o delle maglie. In questo caso il metodo degli anelli consente una scrittura semplice delle equazioni dato che il generatore di corrente e gli induttori mutuamente accoppiati sono inseriti in rami che non sono a comune fra più anelli. Si procede quindi alla scrittura delle equazioni in accordo con la figura 1.2.2.

$$\begin{aligned}
 \dot{E} - \alpha \dot{v} &= \left(R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2} + R_5 - \frac{j}{\omega C_3} \right) \dot{I}_1 - \frac{j}{\omega C_3} \dot{I}_3 - R_5 \dot{I}_4 - R_2 \dot{I} \\
 0 &= (R_4 + j\omega L_3 + R_3 + j\omega L_4) \dot{I}_2 + R_3 \dot{I}_3 - j\omega L_3 \dot{I} \\
 \dot{E} &= \left(R_3 - \frac{j}{\omega C_3} \right) \dot{I}_3 + R_3 \dot{I}_2 - \frac{j}{\omega C_3} \dot{I}_1 \\
 0 &= (R_5 + j\omega L_7 - 2j\omega M + R_6) \dot{I}_4 - R_5 \dot{I}_1
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

$$\dot{v} = \frac{j}{\omega C_1} \dot{I}$$

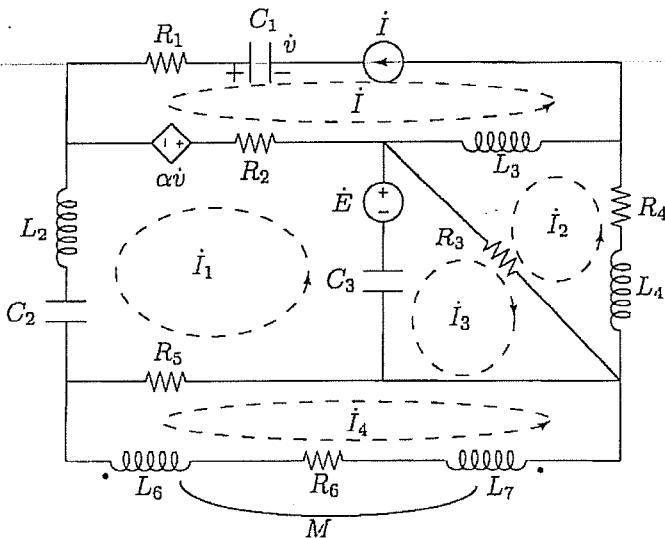


Figura 1.2.2: Scelta degli anelli

1.3 Scrivere un sistema di equazioni per il seguente circuito.

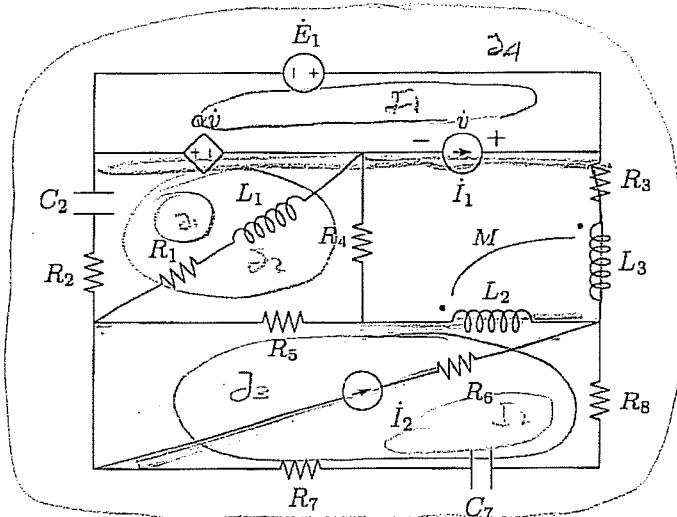


Figura 1.3.1: Circuito esercizio 1.3

Data la presenza di due induttori mutuamente accoppiati, per scrivere le equazioni con il metodo delle tensioni ai nodi è necessario effettuare la trasformazione; data la presenza di due generatori di corrente in rami "interni" al circuito, qualora si scrivessero le equazioni con il metodo degli anelli, dovremmo scrivere le equazioni a due superanelli, coinvolgenti anche rami in cui sono presenti induttori mutuamente accoppiati. Nello svolgimento di questo esercizio si scriveranno le equazioni con il metodo delle correnti di maglia, avendo cura di scegliere l'albero in modo tale che i generatori di corrente stiano sulle corde e che gli induttori mutuamente accoppiati stiano anche essi sulle corde. Le maglie risultanti sono riportate in figura 1.3.1

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \alpha \dot{v} &= \left(R_2 + R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_1 + \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_2 - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_4 \\
 \textcircled{2} \quad \alpha \dot{v} &= \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} + R_5 + R_4 \right) \dot{j}_2 + \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_1 + R_5 \dot{j}_3 - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_4 \\
 \textcircled{3} \quad 0 &= \left(R_5 + R_7 + R_8 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_7} \right) \dot{j}_3 + R_5 \dot{j}_2 + \left(R_7 + R_8 + -\frac{j}{\omega C_7} + j\omega M \right) \dot{j}_4 + \\
 &\quad + \left(R_7 + R_8 - \frac{j}{\omega C_7} \right) \dot{j}_2 \\
 \textcircled{4} \quad \dot{E}_1 &= \left(R_2 + R_3 + R_7 + R_8 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_7} - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_4 - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_1 + \\
 &\quad - \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) \dot{j}_2 + \left(R_7 + R_8 + -\frac{j}{\omega C_7} + j\omega M \right) \dot{j}_3 + \left(R_7 + R_8 - \frac{j}{\omega C_7} \right) \dot{j}_2 \\
 \boxed{\dot{v} = \dot{E}_1 + \alpha \dot{v}} \quad \text{CONTROLLO}
 \end{aligned}$$

(1.3.1)

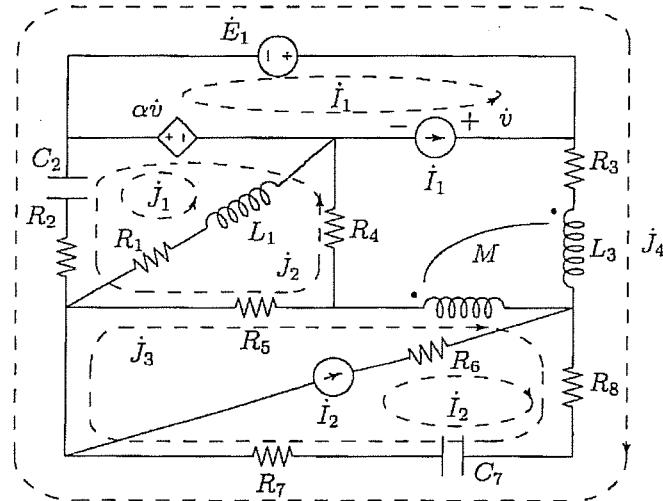
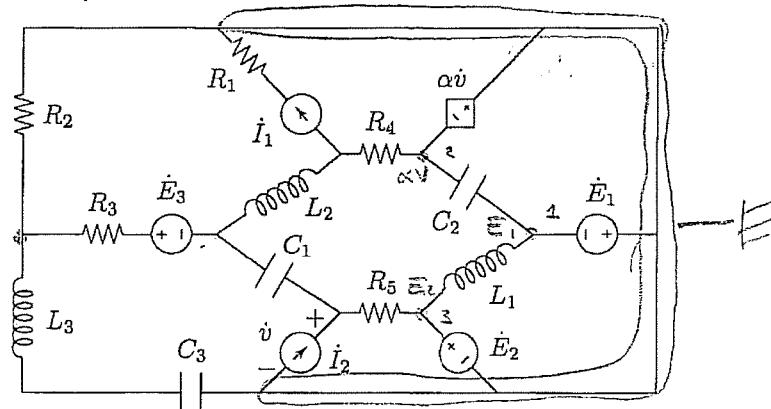


Figura 1.3.2: Scelta delle correnti di maglia

1.4 Scrivere un sistema di equazioni per il seguente circuito.



$\text{Z-M+1} - M\text{I} = 14 - S + 1 - L = 5$

Data la particolare topologia del circuito la scrittura delle equazioni con il metodo delle tensioni ai nodi consente di scrivere un numero di equazioni uguale a 4, contro le 5 del metodo degli anelli (o correnti di maglia). La scelta più conveniente per il nodo di riferimento è il nodo all'estrema destra del circuito, a cui sono collegati tre generatori di tensione ideali, in modo che i tre nodi corrispondenti siano a tensione imposta. Particolare attenzione deve essere rivolta al generatore di tensione E_3 in quanto non è collegato in nessun modo al nodo di riferimento così scelto. Viene qui fornita la soluzione con due metodologie distinte ma equivalenti.

1.4.1 Soluzione con l'utilizzo del supernodo

In figura 1.4.2 è riportato il nodo di riferimento precedentemente scelto, la numerazione dei nodi e l'indicazione del supernodo.

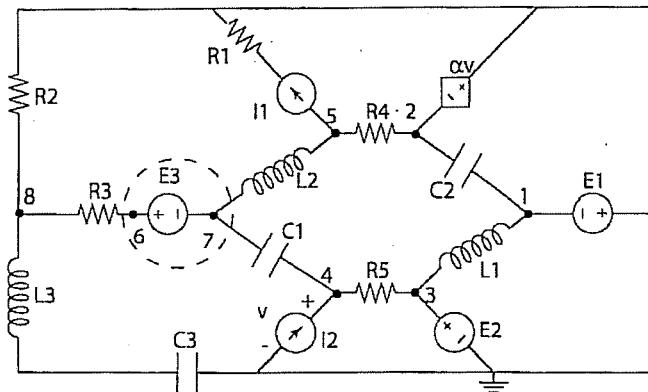


Figura 1.4.2: Scelta dei nodi con l'opzione supernodo

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\dot{E}_1 \\
 \dot{V}_2 &= -\alpha \dot{v} \\
 \dot{V}_3 &= \dot{E}_2 \\
 \dot{V}_6 - \dot{V}_7 &= \dot{E}_3 \\
 \dot{I}_2 &= \left(\frac{1}{R_5} + j\omega C_1 \right) \dot{V}_4 - \frac{\dot{E}_2}{R_5} - j\omega C_1 \dot{V}_7 \\
 -\dot{I}_1 &= \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) \dot{V}_5 - \frac{\dot{V}_2}{R_4} - \frac{\dot{V}_7}{j\omega L_2} \\
 0 &= \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3}} \right) \dot{V}_8 - \frac{\dot{V}_6}{R_3} \\
 0 &= \frac{\dot{V}_7 - \dot{V}_5}{j\omega L_2} + \frac{\dot{V}_6 - \dot{V}_8}{R_3} + (\dot{V}_7 - \dot{V}_4) j\omega C_1
 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

1.4.2 Soluzione con l'utilizzo della trasformazione del generatore reale di tensione

Operando la trasformazione del generatore reale di tensione in un generatore reale di corrente e mantenendo la numerazione de nodi precedentemente scelta, abbiamo il circuito rappresentato in figura 1.4.3.

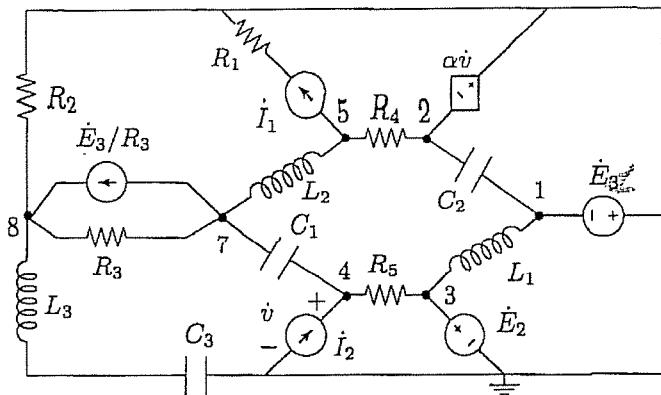


Figura 1.4.3: Scelta dei nodi con la trasformazione del generatore di tensione reale

Le prime due equazioni di 1.4.1 rimangono invariate, mentre cambiano le ultime due equazioni che risultano equivalenti (sono l'una la combinazione lineare dell'altra).

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\dot{E}_1 \\ \dot{V}_2 &= -\alpha \dot{V}_1 \\ \dot{V}_3 &= \dot{E}_2 \end{aligned} \right\} \\
 & \dot{V}_6 - \dot{V}_7 = \dot{E}_3 \\
 & \bigg. \quad \begin{aligned} \dot{I}_2 &= \left(\frac{1}{R_5} + j\omega C_1 \right) \dot{V}_4 - \frac{\dot{E}_3}{R_5} - j\omega C_1 \dot{V}_7 \\ -\dot{I}_1 &= \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) \dot{V}_5 - \frac{\dot{V}_2}{R_4} - \frac{\dot{V}_7}{j\omega L_2} \\ \frac{\dot{E}_3}{R_3} &= \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3}} \right) \dot{V}_6 - \frac{\dot{V}_7}{R_3} \\ -\frac{\dot{E}_3}{R_3} &= \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_1 \right) \dot{V}_7 - \frac{V_5}{j\omega L_2} - \dot{V}_4 j\omega C_1 - \frac{\dot{V}_8}{R_3} \end{aligned} \quad (1.4.2)
 \end{aligned}$$

1.5 Scrivere un sistema di equazioni per il seguente circuito.

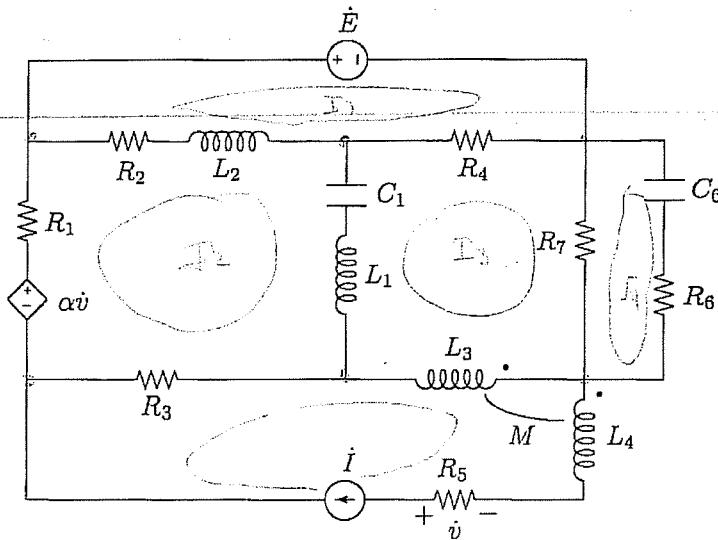


Figura 1.5.1: Circuito esercizio 1.5

$$10 - 5 - M_1 + 1 = 4 - 1 + 1 = 4$$

Data la natura del circuito una scelta opportuna potrebbe essere quella del metodo degli anelli. La complicazione della presenza di induttori mutualmente accoppiati in rami a comune è in questo caso limitata dal fatto che uno dei due anelli in questione (in particolare quello che contiene entrambi gli induttori) è quello a corrente imposta.

$\text{I}_{\text{a}} \quad \dot{E} = (R_2 + j\omega L_2 + R_4) \dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 - R_4 \dot{I}_3$
 $\text{I}_{\text{b}} \quad \alpha \dot{v} = \left(R_1 + R_2 + R_3 + j\omega L_1 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_1} \right) \dot{I}_2 + (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_1 +$
 $\quad + \left(j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} \right) \dot{I}_3 - R_3 \dot{I}$
 $\text{I}_{\text{c}} \quad 0 = \left(R_4 + R_7 + j\omega L_3 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} \right) \dot{I}_3 - R_7 \dot{I}_4 + (j\omega L_3 - j\omega M) \dot{I} - R_4 \dot{I}_1 +$
 $\quad + (j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1}) \dot{I}_2$
 $\text{I}_{\text{d}} \quad 0 = \left(R_6 + R_7 - \frac{j}{\omega C_6} \right) \dot{I}_4 - R_7 \dot{I}_3$
 $\boxed{\dot{v} = -R_5 \dot{I}}$ CONTRARIO

(1.5.1)

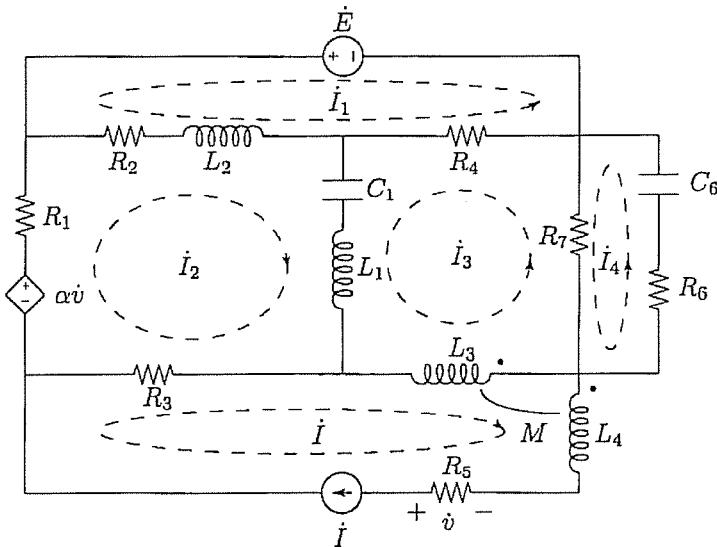


Figura 1.5.2: Scelta degli anelli

1.6 Scrivere un sistema di equazioni per il seguente circuito.

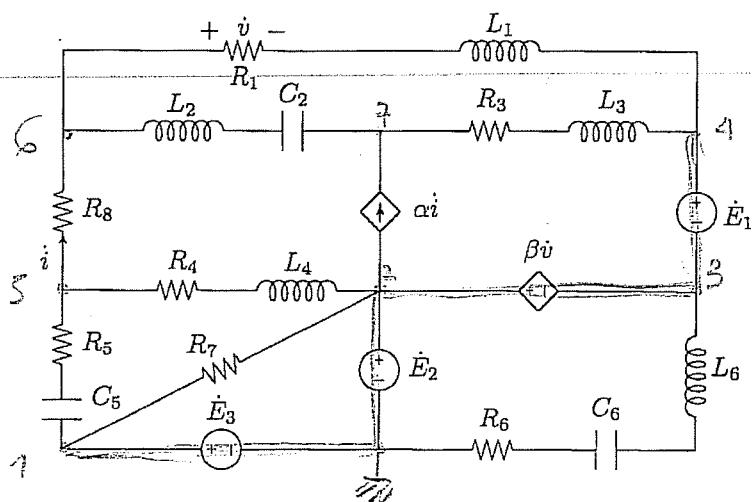


Figura 1.6.1: Circuito Esercizio 1.6

$$8 - 1 = ? \text{ eq}$$

Analizzando il circuito è possibile osservare che tutti i 4 generatori di tensione appartengono ad uno stesso percorso, pertanto scegliendo uno qualsiasi dei nodi appartenenti a tale percorso come nodo di riferimento, avremo gli altri 4 nodi del percorso a tensione nota. Resteranno dunque da scrivere solo 3 equazioni. La scelta del nodo di riferimento è riportata in figura 1.6.2.

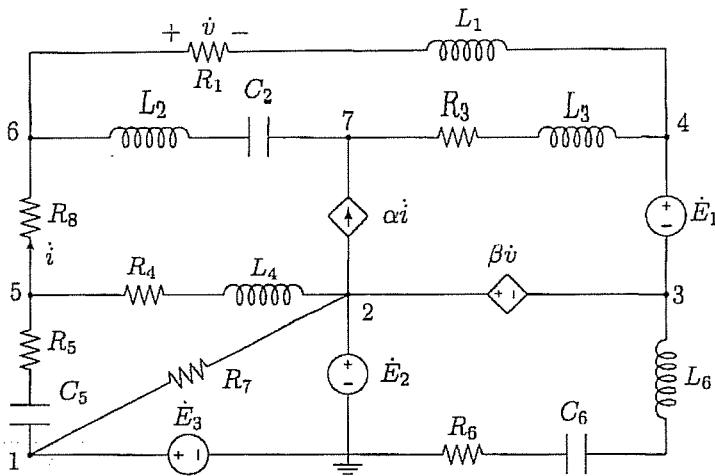


Figura 1.6.2: Indicazione dei nodi

$$\dot{V}_1 = \dot{E}_3$$

$$\dot{V}_2 = \dot{E}_2$$

$$\dot{V}_3 = -\beta \dot{v} + \dot{E}_2$$

$$\dot{V}_4 = \dot{E}_1 - \beta \dot{v} + \dot{E}_2$$

$$0 = \left(\frac{1}{R_5 - \frac{j}{\omega C_5}} + \frac{1}{R_4 + j\omega L_4} + \frac{1}{R_8} \right) \dot{V}_5 - \left(\frac{1}{R_5 - \frac{j}{\omega C_5}} \right) \dot{V}_1 - \left(\frac{1}{R_4 + j\omega L_4} \right) \dot{V}_2 - \frac{\dot{V}_6}{R_6}$$

$$0 = \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} \right) \dot{V}_6 - \frac{\dot{V}_5}{R_8} - \left(\frac{1}{j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}} \right) \dot{V}_7 + \left(\frac{1}{R_1 + j\omega L_1} \right) \dot{V}_4$$

$$\alpha i = \left(\frac{1}{j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3} \right) \dot{V}_7 - \left(\frac{1}{j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}} \right) \dot{V}_6 - \left(\frac{1}{R_3 + j\omega L_3} \right) \dot{V}_4$$

$$i = \frac{\dot{V}_5 - \dot{V}_6}{R_8}$$

$$\dot{v} = \frac{\dot{V}_6 - \dot{V}_4}{R_1 + j\omega L_1} R_1$$

-e^j - di controllo

(1.6.1)

1.7 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

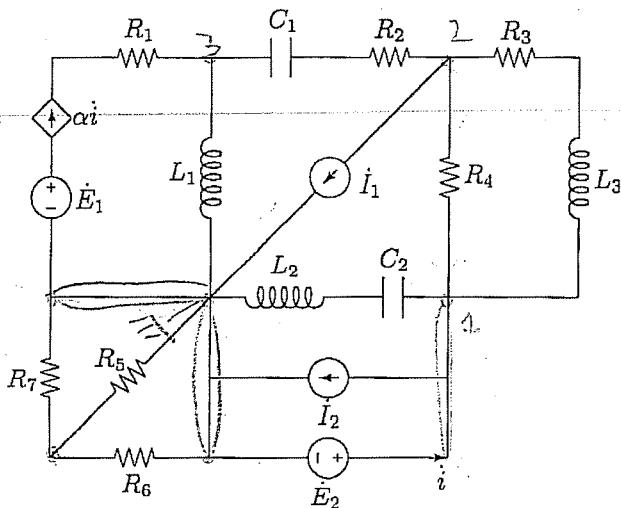


Figura 1.7.1: Circuito esercizio 1.7

$$5 - 1 = 4 \text{ eq}$$

$$14 - 5 - 2 + 1 = 5 \text{ eq}$$

Il metodo che consente la scrittura di un numero minore di equazioni è il metodo delle tensioni ai nodi, conveniente anche perché il metodo agli anelli avrebbe comportato la valutazione di due superanelli, mentre il metodo alle maglie avrebbe comportato una scelta non immediata delle maglie indipendenti. La stella di resistenze R_5, R_6, R_7 è cortocircuitata ad un estremo, pertanto non è attraversata da correnti e può essere quindi rimossa.

$$\begin{aligned}
 & \text{1} \quad \dot{V}_1 = \dot{E}_2 \\
 & \text{2} \quad -\dot{I}_1 = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) \dot{V}_2 - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3} \right) \dot{V}_1 - \frac{\dot{V}_3}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} \\
 & \text{3} \quad \alpha i = \left(\frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) \dot{V}_3 - \frac{\dot{V}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} \\
 & \text{4} \quad \dot{i} = (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3} \right) + \frac{\dot{V}_1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} + \dot{I}_2
 \end{aligned}
 \tag{1.7.1}$$

Da notare come la corrente pilota i debba essere espressa con l'utilizzo della KCL al nodo 1 in quanto non esprimibile altrimenti come rapporto fra una tensione ed una impedenza.

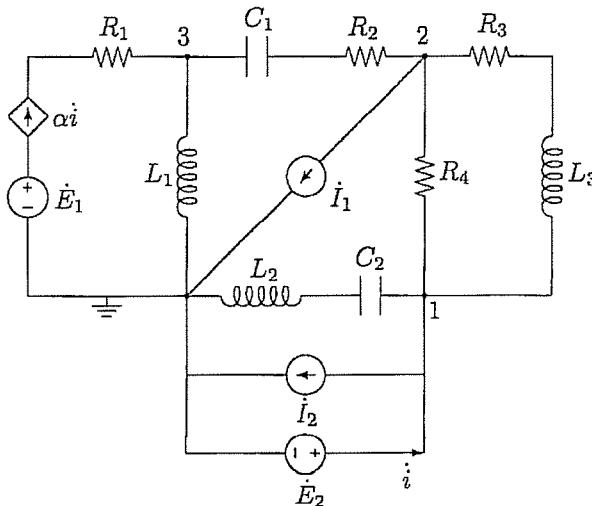


Figura 1.7.2: Scelta dei nodi

1.8 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

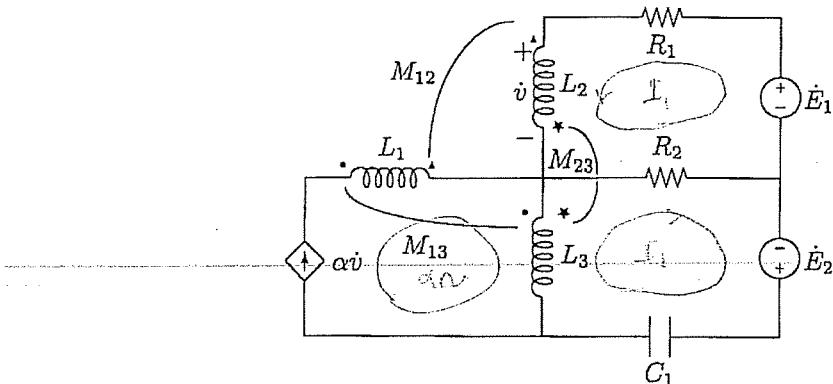


Figura 1.8.1: Circuito esercizio 1.8

Data la natura del circuito la scelta più pratica per la scrittura delle equazioni è il método degli anelli, come indicato nella figura 1.8.2.

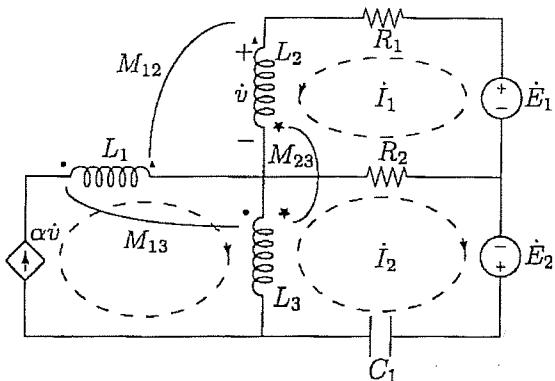


Figura 1.8.2: Scelta degli anelli

$$\boxed{1} \quad \dot{E}_1 = (R_1 + R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_1 + R_2\dot{I}_2 + j\omega M_{23}(I_2 - \alpha v) - j\omega M_{12}\alpha \dot{v}$$

$$\boxed{2} \quad \dot{E}_2 = (R_2 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_1})\dot{I}_2 + (R_2 + j\omega M_{23})\dot{I}_1 - (j\omega L_3 + j\omega M_{13})\alpha \dot{v} \quad (1.8.1)$$

$$\boxed{\dot{v} = j\omega L_2\dot{I}_1 - j\omega M_{12}\alpha \dot{v} + j\omega M_{23}\dot{I}_2} \quad \text{ep. CONSIDER}$$

1.9 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito

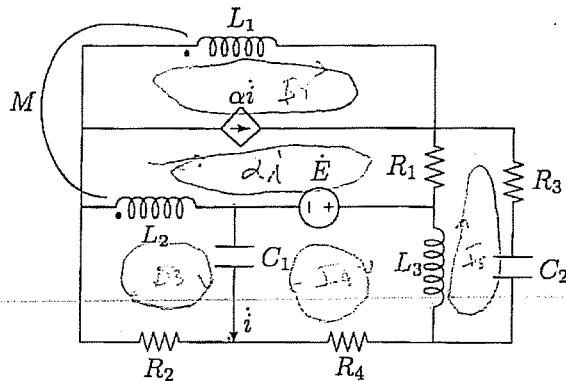


Figura 1.9.1: Circuito esercizio 1.9

La scrittura delle equazioni al circuito con il metodo delle tensioni ai nodi porterebbe ad un numero di equazioni uguale a 4 ma con la necessità di trasformare gli induttori mutualmente accoppiati in un equivalente senza il mutuo accoppiamento. Invece la scelta del metodo degli anelli o delle maglie porta comunque ad avere 4 equazioni ma senza la necessità di dovere compiere operazioni sul circuito. In questo caso le equazioni verranno scritte con il metodo degli anelli, come indicato in figura 1.9.2.

$$\begin{aligned}
 \text{I}_1 \quad & -\dot{E} = j\omega L_1 \dot{i}_1 + \dot{i}_2(R_1 + j\omega L_2) - R_1 \dot{i}_5 - j\omega L_2 \dot{i}_3 + j\omega M(\dot{i}_2 - \dot{i}_3) + j\omega M \dot{i}_1 \\
 \text{I}_2 \quad & 0 = \dot{i}_3 \left(j\omega L_2 + R_2 - \frac{j}{\omega C_1} \right) + j\omega L_2 \dot{i}_2 + \frac{j}{\omega C_1} \dot{i}_4 - j\omega M \dot{i}_1 \\
 \text{I}_3 \quad & \dot{E} = \dot{i}_4 \left(j\omega L_3 + R_4 - \frac{j}{\omega C_1} \right) + \frac{j}{\omega C_1} \dot{i}_3 - j\omega L_3 \dot{i}_5 \\
 \text{I}_4 \quad & 0 = \dot{i}_5 \left(R_1 + R_3 - \frac{j}{\omega C_2} + j\omega L_3 \right) - j\omega L_3 \dot{i}_4 - R_1 \dot{i}_2
 \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

$i = \dot{i}_3 - \dot{i}_4$ *ep controllo*

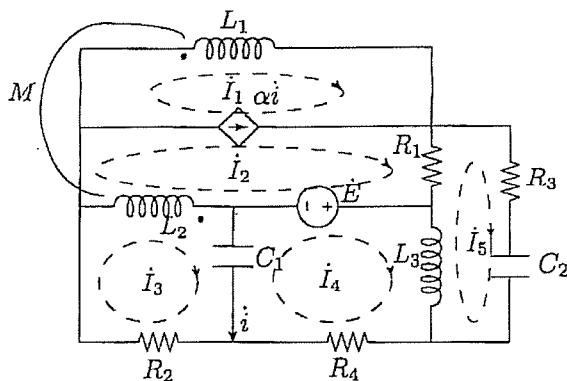
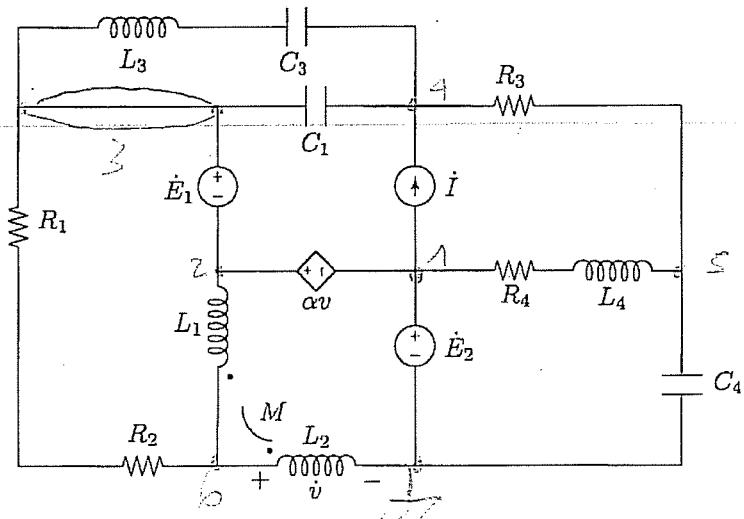


Figura 1.9.2: Scelta degli anelli

1.10 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.



$$\frac{d}{dt} \cdot \int = 6$$

Figura 1.10.1: Circuito esercizio 1.10

$$AZ - Z - A + A = 5$$

Il metodo che comporta la scrittura di un numero inferiore di equazioni è il metodo ai nodi. È necessario pertanto trasformare l'accoppiamento-mutuo con l'equivalente a T (che in questo caso non aumenta il numero dei nodi) stando attenti alla corretta collocazione della tensione v , come indicato in figura 1.10.2 in cui è anche indicata la denominazione dei nodi. È importante effettuare il corretto posizionamento dei terminali a cui prelevare la tensione pilota v .

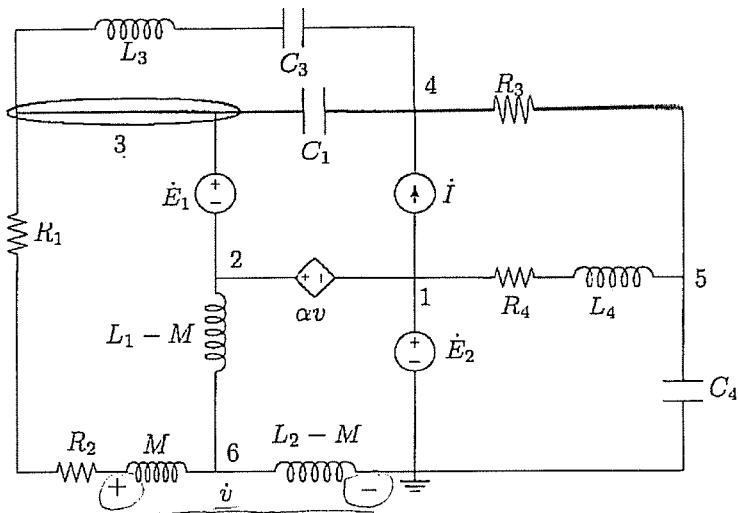


Figura 1.10.2: Indicazione dei nodi

$$\dot{V}_1 = \dot{E}_2$$

$$\dot{V}_2 = \alpha \dot{V} + \dot{E}_2$$

$$\dot{V}_3 = \dot{E}_1 + \alpha \dot{V} \neq \dot{E}_2$$

$$I = \dot{V}_4 \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} + \frac{1}{R_3} \right) - \dot{V}_3 \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} \right) - \frac{\dot{V}_5}{R_3}$$

$$0 = \dot{V}_5 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + j\omega L_4} + j\omega C_4 \right) - \frac{\dot{V}_4}{R_3} - \frac{\dot{V}_1}{R_4 + j\omega L_4}$$

$$0 = \dot{V}_6 \left(\frac{1}{j\omega(L_1 - M)} + \frac{1}{j\omega(L_2 - M)} + \frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega M} \right) - \frac{\dot{V}_2}{j\omega(L_1 - M)} + \frac{\dot{V}_3}{R_1 + R_2 + j\omega M}$$

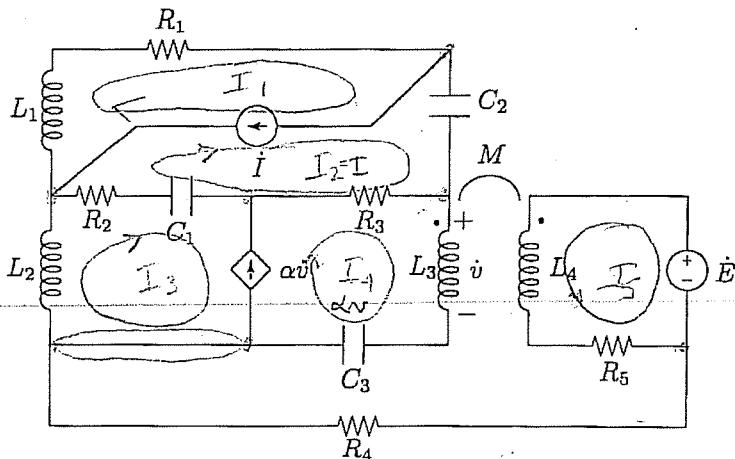
$$\boxed{\dot{V} = \dot{V}_6 + (\dot{V}_3 - \dot{V}_6) \frac{j\omega M}{R_1 + R_2 + j\omega M}}$$

(1.10.1)

PARTITORE di:

TENSIONE

1.11 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.



$$11 - 6 - 2 + 1 = 4$$

Figura 1.11.1: Circuito esercizio 1.11

Essendo presente l'accoppiamento mutuo senza punto a comune l'applicazione del metodo delle tensioni ai nodi obbligherebbe ad utilizzare un equivalente che altererebbe la natura del circuito. Il metodo più conveniente da utilizzare in questo è quello degli anelli, anche considerando il fatto che in questo modo le induttanze sono attraversate da una sola corrente.

$$\begin{aligned} \text{I}_1 \quad 0 &= i_1(R_1 + j\omega L_1) + i_2\left(R_3 - \frac{j}{\omega C_2} - \frac{j}{\omega C_1}\right) - R_3 i_4 - i_3\left(R_2 - \frac{j}{\omega C_1}\right) \\ \text{I}_3 \quad 0 &= i_3\left(R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_1}\right) + i_4\left(R_3 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_3}\right) - i_2\left(R_2 + R_3 - \frac{j}{\omega C_1}\right) + \\ &\quad + j\omega M i_5 \\ \text{I}_5 \quad \dot{E} &= i_5(R_5 + j\omega L_4) + j\omega M i_4 \\ &\boxed{i = i_1 - i_2} \\ &\boxed{\alpha \dot{v} = i_4 - i_3} \\ &\boxed{\dot{v} = j\omega L_3 + j\omega M i_5} \end{aligned} \quad \text{ep controllo} \quad (1.11.1)$$

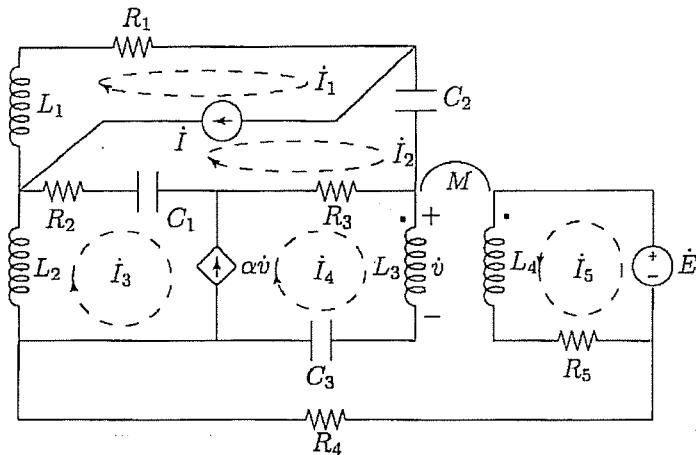


Figura 1.11.2: Indicazione delle correnti di anello

1.12 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

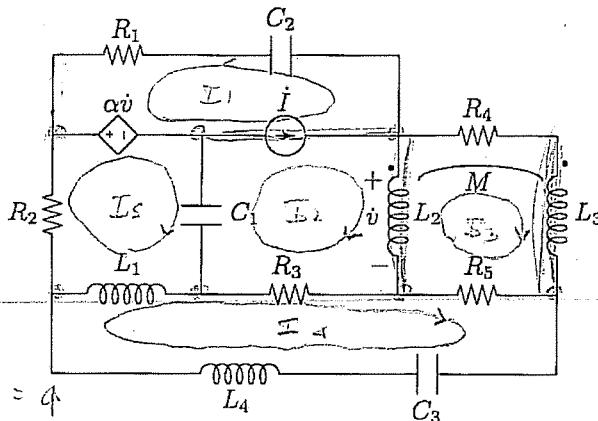


Figura 1.12.1: Circuito esercizio 1.12

Dato che gli induttori non hanno un terminale a comune, e che la scelta dell'albero costituito in modo tale che gli induttori stiano sulle corde porta a delle maglie costituite da molti elementi, la scelta più comoda è quella del metodo agli anelli. In Figura 1.12.2 sono riportati i versi delle correnti di anello.

$$\begin{aligned}
 I_1 & \quad \alpha \dot{v} = \dot{I}_1 \left(R_1 - \frac{j}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_2 \left(j\omega L_2 + R_3 - \frac{j}{\omega C_1} \right) + \frac{j}{\omega C_1} \dot{I}_5 - R_3 \dot{I}_4 - j\omega L_2 \dot{I}_3 + j\omega M \dot{I}_3 \\
 I_3 & \quad 0 = \dot{I}_3 \left(R_4 + R_5 + j\omega(L_2 + L_3 - 2M) \right) - j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_2 - R_5 \dot{I}_4 \\
 I_4 & \quad 0 = \dot{I}_4 \left(R_3 + R_5 + j\omega(L_1 + L_4) - \frac{j}{\omega C_3} \right) - R_3 \dot{I}_2 - j\omega L_1 \dot{I}_5 - R_5 \dot{I}_3 \\
 I_5 & \quad -\alpha \dot{v} = \dot{I}_5 \left(R - 2 + j\omega L_1 \frac{j}{\omega C_1} \right) + \frac{j}{\omega C_1} \dot{I}_2 - \frac{j}{\omega C_1} \dot{I}_4 \\
 & \quad \dot{v} = j\omega L_2 (\dot{I}_2 - \dot{I}_3) + j\omega M \dot{I}_3
 \end{aligned}
 \quad \text{eq. di CONTRARIO} \quad (1.12.1)$$

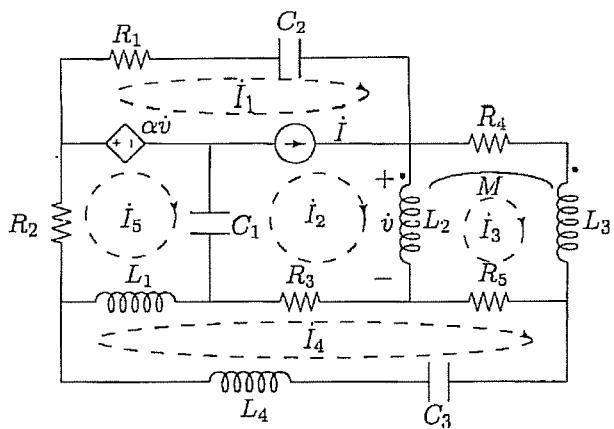


Figura 1.12.2: Indicazione delle correnti di anello

1.13 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

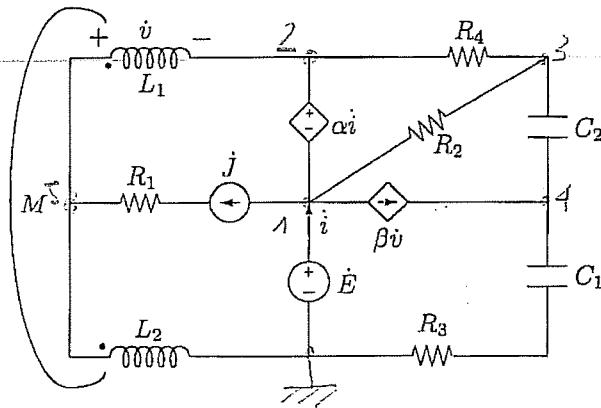


Figura 1.13.1: Circuito esercizio 1.13

$$\begin{aligned} \text{1} - 1 &= 5 - 2 \\ 1 @ - 6 - 2 + 1 &= ? \end{aligned}$$

La scrittura delle equazioni con i metodi noti porta allo stesso numero di equazioni finali, si sceglie quindi il metodo delle tensioni nodali. È necessario pertanto trasformare l'accoppiamento mutuo con l'equivalente a T (che in questo caso non aumenta il numero dei nodi) stando attenti alla corretta collocazione della tensione v , come indicato in figura 1.13.2 in cui è anche indicata la denominazione dei nodi. È da notare la necessità di scrivere una KCL al nodo di riferimento per valutare la corrente i .

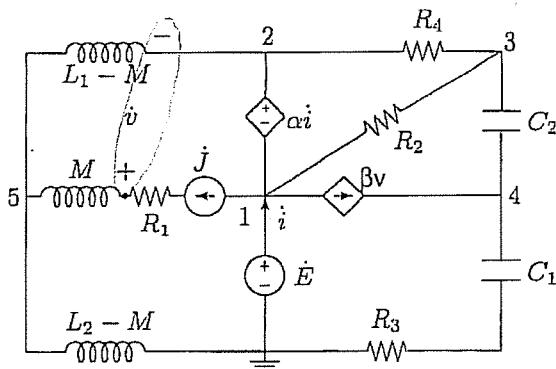


Figura 1.13.2: Indicazione del nodo di riferimento e numerazione

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1 \quad \dot{V}_1 = \dot{E} \\
 2 \quad \dot{V}_2 = \dot{E} + \alpha i \\
 3 \quad 0 = \dot{V}_3 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 \right) - \frac{\dot{V}_2}{R_4} - j\omega C_2 \dot{V}_4 \\
 4 \quad \beta \dot{v} = \dot{V}_4 \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) - j\omega C_2 \dot{V}_3 \\
 5 \quad \dot{j} = \dot{V}_5 \left(\frac{1}{j\omega(L_1 - M)} + \frac{1}{j\omega(L_2 - M)} \right) - \frac{\dot{V}_2}{j\omega(L_1 - M)} \\
 6 \quad \dot{i} = \frac{\dot{V}_4}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{\dot{V}_5}{j\omega(L_2 - M)} \\
 7 \quad \dot{v} = j\omega M \dot{j} + \frac{\dot{V}_5 - \dot{V}_2}{j\omega(L_1 - M)}
 \end{array} \right. \quad (1.13.1)$$

1.14 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

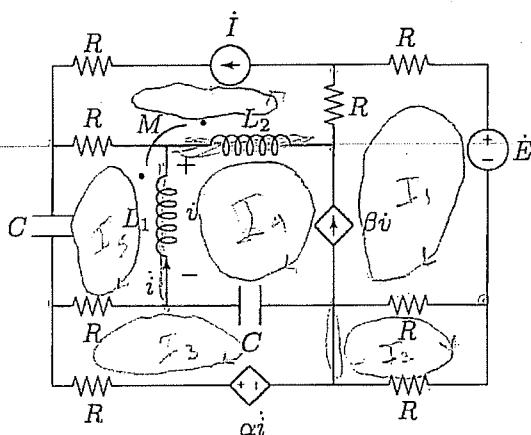


Figura 1.14.1: Circuito esercizio 1.14

La scelta del metodo con cui scrivere le equazioni si basa sulle seguenti considerazioni: il metodo delle tensioni ai nodi obbliga la trasformazione del muto accoppiamento e comunque è caratterizzato da un numero di equazioni alte (> 4). Il metodo alle maglie ed agli anelli consente invece di scrivere 4 equazioni. Il metodo alle maglie consentirebbe di poter scegliere un albero in modo tale da avere le mutue induttanze sulle corde, ma in questo caso particolare la topologia del circuito porterebbe a delle maglie monocorda "ampie", pertanto complicando la scrittura delle equazioni. Il metodo più semplice sembra quindi il metodo agli anelli.

In figura 1.14.2 è riportata la scelta degli anelli ed i versi delle correnti di anello.

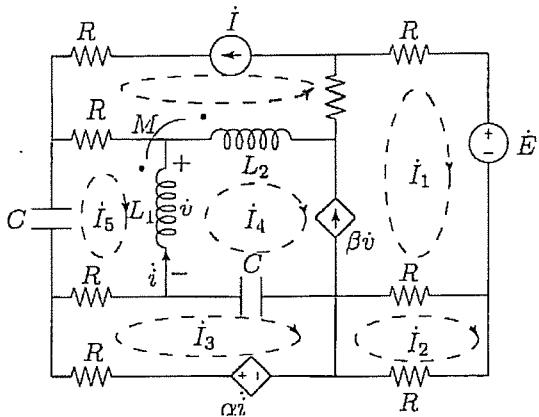
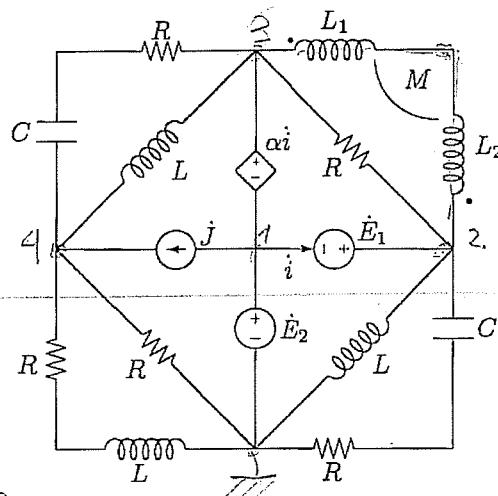


Figura 1.14.2: Circuito con indicazione delle correnti di anello

$$\left\{
 \begin{aligned}
 -\dot{E} &= 3R\dot{I}_1 + \dot{I}_4 \left(j\omega(L_1 + L_2 - 2M) - \frac{j}{\omega C} \right) - j\omega L_1 \dot{I}_5 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \\
 &\quad + j\omega M \dot{I}_5 + \frac{j}{\omega C} \dot{I}_3 \\
 0 &= 2R\dot{I}_2 - R\dot{I}_1 \\
 \alpha i &= \dot{I}_3 \left(2R - \frac{j}{\omega C} \right) + \frac{j}{\omega C} \dot{I}_4 \\
 0 &= \dot{I}_5 \left(2R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 \right) - j\omega L_1 \dot{I}_4 + j\omega M(\dot{I}_2 + \dot{I}_4) \\
 \beta v &= \dot{I}_1 - \dot{I}_4 \\
 i &= \dot{I}_4 - \dot{I}_5 \\
 \dot{v} &= j\omega L_1(\dot{I}_5 - \dot{I}_4) + j\omega M(\dot{I} + \dot{I}_4)
 \end{aligned} \right. \quad (1.14.1)$$

1.15 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.



$$\begin{aligned} S-1 &= 54 \text{ eq} \\ 12 - S - 1 + 1 &= 2 \text{ eq} \end{aligned}$$

Figura 1.15.1: Circuito esercizio 1.15

Data la natura del circuito è conveniente procedere con l'analisi nodale in modo da dover scrivere solo 1 equazione dal momento che tutti i generatori di tensione appartengono ad uno stesso percorso; in figura 1.15.2 è riportato il circuito dove è indicato il nodo di riferimento (a comune fra i generatori di tensione), la numerazione dei nodi e la trasformazione nell'equivalente a T dei due induttori mutuamente accoppiati. Le equazioni sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_1 = \dot{E}_2 \\ \dot{V}_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \\ \dot{V}_3 = \alpha i + \dot{E}_2 \\ j = \dot{V}_4 \left(\frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R - \frac{j}{\omega C}} \right) - \dot{V}_3 \left(\frac{1}{R - \frac{j}{\omega C}} \right) \\ i = \dot{V}_2 \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R - \frac{j}{\omega C}} \right) + (\dot{V}_2 - \dot{V}_3) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} \right) \end{array} \right. \quad (1.15.1)$$

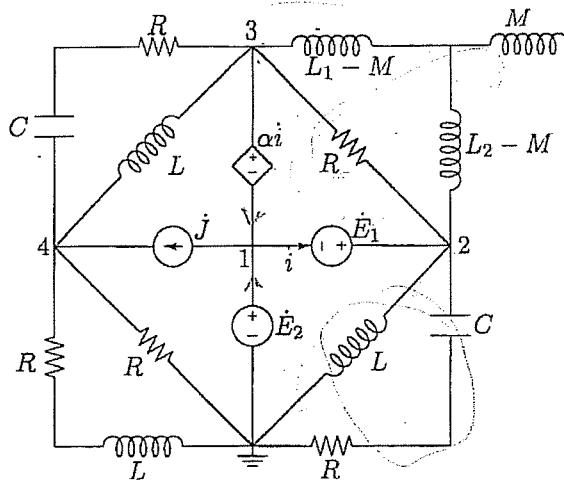


Figura 1.15.2: Indicazione dei nodi

Da notare che per determinare il valore di i si è reso necessario scrivere una equazione con la KCL al nodo 2.

1.16 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

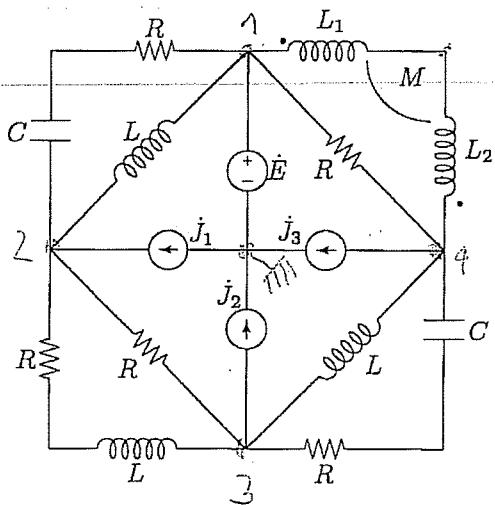


Figura 1.16.1: Circuito esercizio 1.16

Data la natura del circuito è conveniente procedere con l'analisi nodale in modo da dover scrivere solo 3 equazioni; in figura 1.16.2 è riportato il circuito dove è indicato il nodo di riferimento, la numerazione dei nodi e la trasformazione nell'equivalente a T dei due induttori mutuamente accoppiati. Le equazioni sono le seguenti:

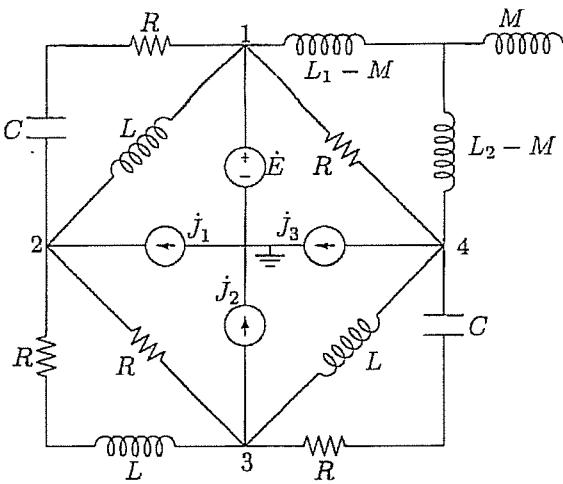


Figura 1.16.2: Indicazione dei nodi

$$\dot{V}_1 = \dot{E}$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \dot{J}_1 = \dot{V}_2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) - \dot{V}_1 \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) + \\
 \quad - \dot{V}_3 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+j\omega L} \right) \\
 \\
 \dot{J}_2 = \dot{V}_3 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) - \dot{V}_2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+j\omega L} \right) + \\
 \quad - \dot{V}_4 \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) \\
 \\
 -\dot{J}_3 = \dot{V}_4 \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega(L_1+L_2-2M)} - \dot{V}_3 \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R-\frac{j}{\omega C}} \right) + \\
 \quad - \dot{V}_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega(L_1+L_2-2M)} \right)
 \end{array}
 \right. \tag{1.16.1}$$

Si noti che nel caso in cui si scelga il metodo degli anelli, il superanello che comprende gli anelli a correnti imposte è il rombo interno al circuito.

1.17 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

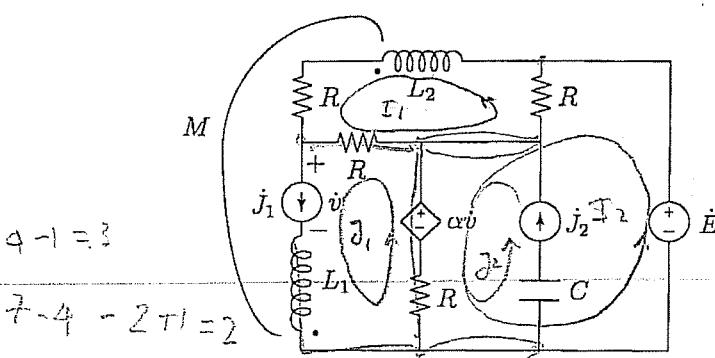


Figura 1.17.1: Circuito esercizio 1.17

Il circuito in questione è composto da 4 maglie/anelli e due generatori di corrente. In questo particolare caso il metodo alle maglie/anelli ed il metodo delle tensioni nodali portano allo stesso numero di equazioni.

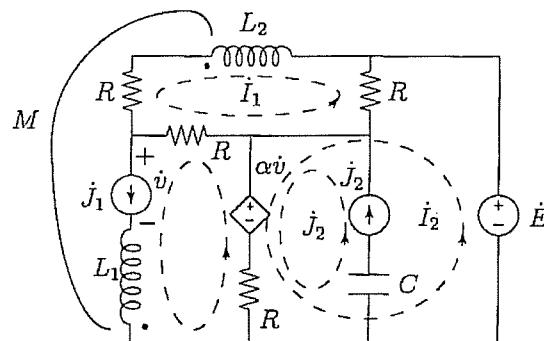


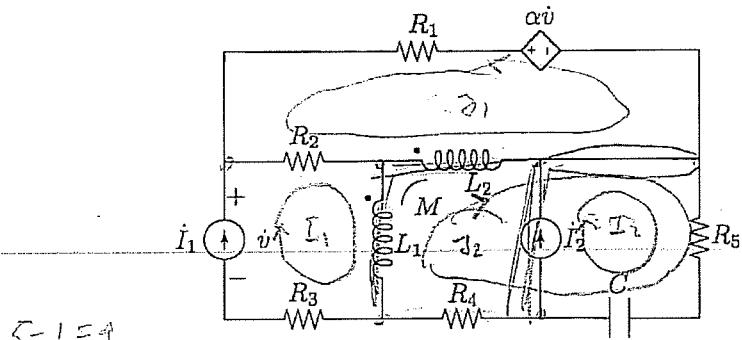
Figura 1.17.2: Indicazione delle correnti di maglia

La figura 1.17.2 mostra l'indicazione delle correnti di maglia scelte per la scritt-

tura delle equazioni.

$$\begin{aligned} \text{1)} \quad & 0 = \dot{I}_1(3R + j\omega L_2) - \dot{J}_1R - \dot{J}_2R - j\omega M\dot{J}_1 \\ \text{2)} \quad & \dot{E} - \underline{\alpha \dot{v} = 2R\dot{I}_2 - \dot{I}_1R + \dot{J}_2R - \dot{J}_1R} \quad (1.17.1) \\ & \boxed{\dot{v} = R(\dot{I}_1 - \dot{J}_1) + \alpha \dot{v} + R(\dot{I}_2 + \dot{J}_2 - \dot{J}_1) - j\omega L_1\dot{J}_1 - j\omega M\dot{J}_1} \quad \text{Cap, CONTRARIO} \end{aligned}$$

1.18 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.



$\delta - \Sigma - \Sigma + 1 = 2$

Figura 1.18.1: Circuito esercizio 1.18

Data la natura particolare del circuito è conveniente il metodo alle maglie/anelli piuttosto che il metodo delle tensioni nodali, dal momento che in questo modo si possono scrivere solo due equazioni (più l'equazione della grandezza pilota). L'indicazione delle maglie è riportata in figura 1.18.2.

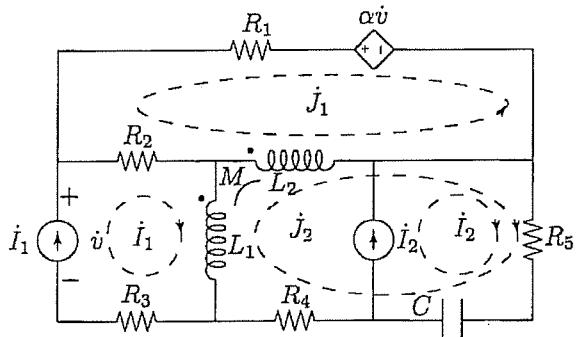


Figura 1.18.2: Indicazione delle maglie

$$\mathcal{D}_1 \quad \alpha \dot{v} = (R_1 + R_2 + j\omega L_2)j_1 + R_2 j_1 + j\omega L_2 j_2 + j\omega M(j_1 - j_2)$$

$$\mathcal{D}_2 \quad 0 = \left(R_4 + R_5 - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 + j\omega L_2 \right) j_2 + j\omega L_2 j_1 - j\omega L_1 j_1 + \left(R_5 - \frac{j}{\omega C} \right) j_2 + \\ - j\omega M(j_1 + j_2) + j\omega M(j_1 - j_2)$$

$$\boxed{\dot{v} = R_2(j_1 + j_2) + j\omega L_1(j_1 - j_2) + R_3 j_1 + j\omega M(j_1 + j_2)} \quad \text{e.p. con TROLL} \quad (1.18.1)$$

Le stesse equazioni potevano essere scritte anche trasformando gli induttori mutuamente accoppiati con l'equivalente a T, come indicato in figura 1.18.3.

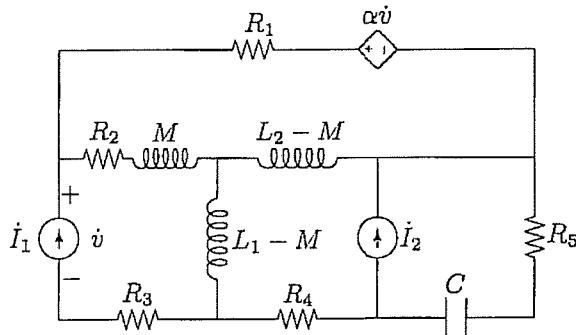


Figura 1.18.3: Circuito con trasformazione a T degli induttori mutuamente accoppiati

1.19 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

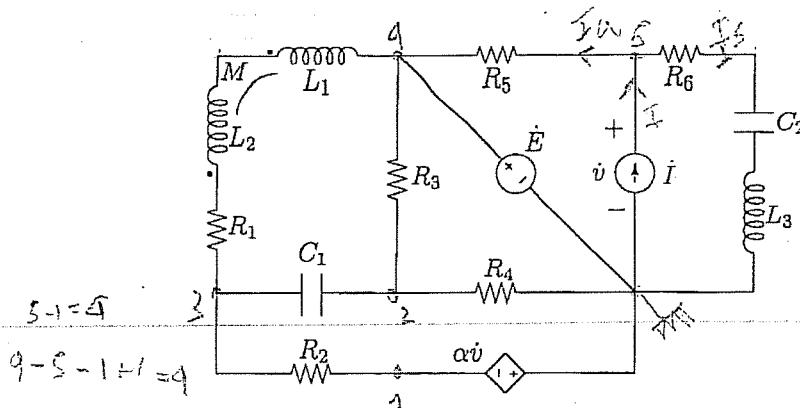


Figura 1.19.1: Circuito esercizio 1.19

Data la natura del circuito è conveniente procedere con l'analisi nodale in modo da dover scrivere solo 3. equazioni; in figura 1.19.2 è riportato il circuito dove è indicato il nodo di riferimento (a comune fra i due generatori di tensione), la numerazione dei nodi e la trasformazione nell'equivalente a T dei due induttori mutuamente accoppiati. Le equazioni sono le seguenti:

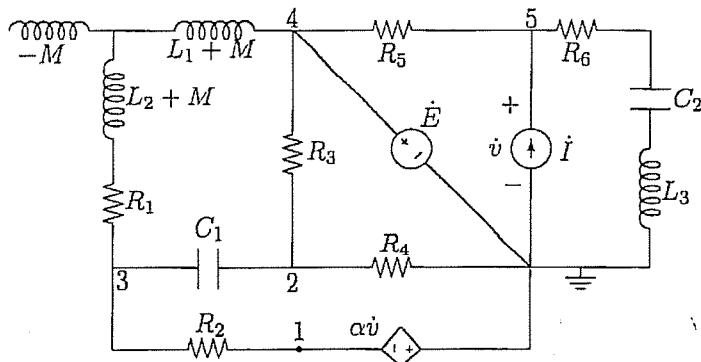


Figura 1.19.2: Indicazione della numerazione dei nodi

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= -\alpha \dot{\nu} \\
 \dot{V}_4 &= \dot{E} \\
 \dot{\nu} &= V_5 \\
 V_2 & \left\{ \begin{array}{l} 0 = \dot{V}_2 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + j\omega C_1 \right) - \frac{\dot{V}_4}{R_3} - j\omega C_1 V_3 \\ 0 = \dot{V}_3 \left(\frac{1}{R_1 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)} + j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} \right) - j\omega C_1 \dot{V}_2 + \end{array} \right. \\
 V_3 & \left. \begin{array}{l} - \frac{\dot{V}_4}{R_1 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)} - \frac{\dot{V}_1}{R_2} \\ \dot{I} = \dot{V}_5 \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_2}} \right) - \frac{\dot{V}_4}{R_5} \end{array} \right. \\
 \dot{\Gamma} &= \mathcal{F}\zeta - \mathcal{I}\epsilon
 \end{aligned} \tag{1.19.1}$$

1.20 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

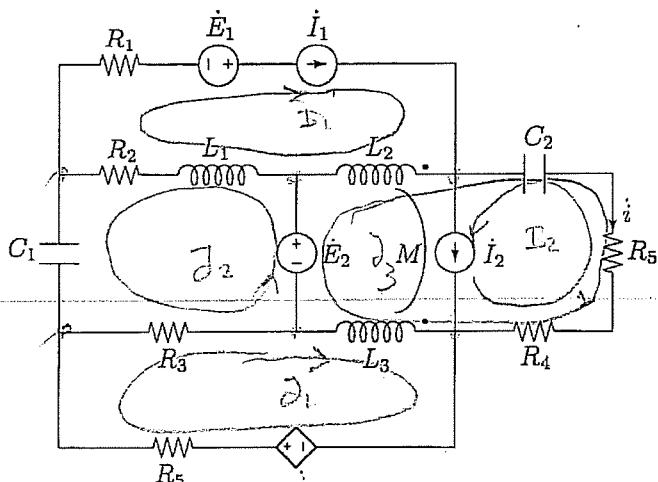


Figura 1.20.1: Circuito esercizio 1.20

Data la presenza di due induttori mutuamente accoppiati senza un terminale a comune la scelta più conveniente per la scrittura delle equazioni è il metodo degli anelli/maglie. In figura 1.20.2 è mostrato il circuito con la scelta delle correnti di maglia.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha i = (R_3 + R_5 + j\omega L_3)j_1 + R_3 j_2 - j\omega L_3 j_3 + j\omega M(j_3 - j_1) \\ \dot{E}_2 = \left(R_2 + j\omega L_1 + R_3 - \frac{j}{\omega C_1} \right) j_2 + R_3 j_1 + (R_2 + j\omega L_1) j_1 \\ \dot{E}_2 = \left(j\omega L_2 + j\omega L_3 - \frac{j}{\omega C_2} + R_4 + R_5 \right) j_3 - j\omega L_2 j_1 - j\omega L_3 j_1 + \\ \quad - \left(R_4 + R_5 - \frac{j}{\omega C_2} \right) j_2 + j\omega M(j_1 - j_3) + j\omega M(j_1 - j_3) \\ | i = j_3 - j_2 | \quad \text{e.p. controlla} \end{array} \right. \quad (1.20.1)$$

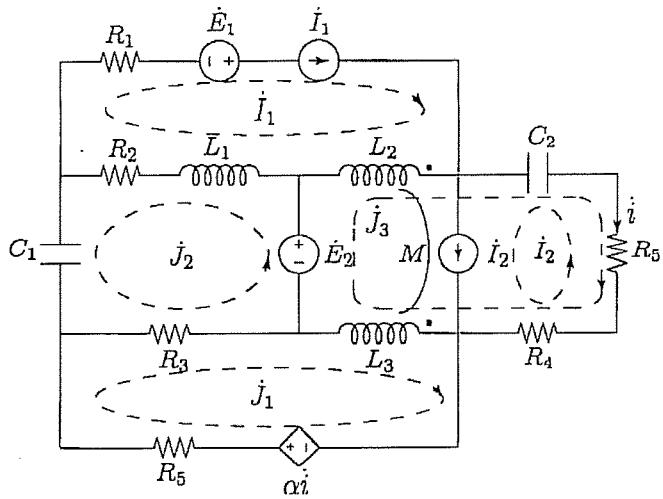


Figura 1.20.2: Scelta delle correnti di maglia

1.21 Scrivere un sistema di equazioni per la risoluzione del seguente circuito.

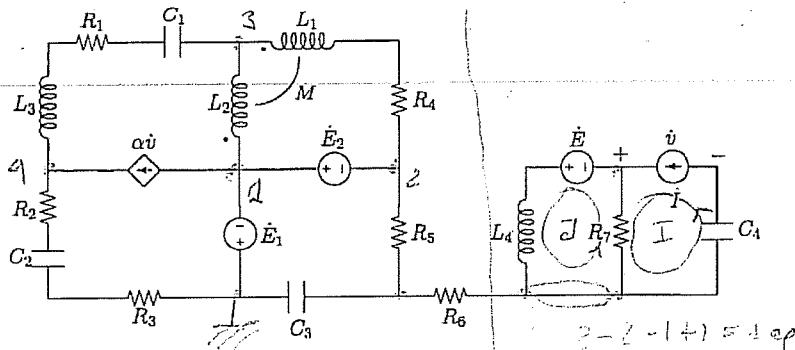


Figura 1.21.1: Circuito esercizio 1.21

$$B - 1 = \Sigma i$$

$$A3 - E - 1 + 1 = \Sigma$$

I due sottocircuiti sono collegati dal ramo contenente R_6 . Per la KCL tale ramo non è percorso da alcuna corrente, è quindi possibile considerare i due sottocircuiti separatamente. Per il sottocircuito di destra la via più immediata è quella di scrivere una sola equazione all'anello contenente il generatore di tensione, mentre per il sottocircuito di sinistra è opportuno scrivere le equazioni con il metodo delle tensioni ai nodi, dal momento che in questo modo si devono scrivere solo due equazioni. In Figura 1.21.2 è indicata la numerazione dei nodi ed il verso delle correnti di anelli scelti. Inoltre è necessario procedere alla trasformazione degli induttori mutuamente accoppiati nell'equivalente a T.

$$\dot{V}_1 = -\dot{E}_1$$

$$\dot{V}_2 = -\dot{E}_2 - \dot{E}_1$$

$$0 = \left(\frac{1}{j\omega(L_2 + M)} + \frac{1}{j\omega(L_1 + M) + R_4} + \frac{1}{j\omega(L_3 - M) + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) \dot{V}_3 +$$

$$- \left(\frac{1}{j\omega(L_1 + M) + R_4} \right) \dot{V}_2 - \left(\frac{1}{j\omega(L_3 - M) + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) \dot{V}_4$$

$$\alpha \dot{v} = \left(\frac{1}{j\omega(L_3 - M) + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2}} \right) \dot{V}_4$$

$$- \left(\frac{1}{j\omega(L_3 - M) + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \right) \dot{V}_3$$

$$\boxed{\dot{E} = (j\omega L_4 + R_7)\dot{I} - R_7\dot{I}}$$

$$\boxed{\dot{v} = R_7(\dot{I} - \dot{J}) - \frac{J}{\omega C_4}} \quad \text{cioè, CONVERSOLO}$$

(1.21.1)

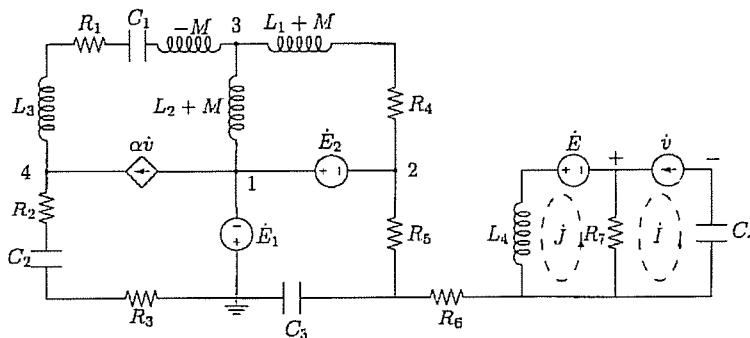
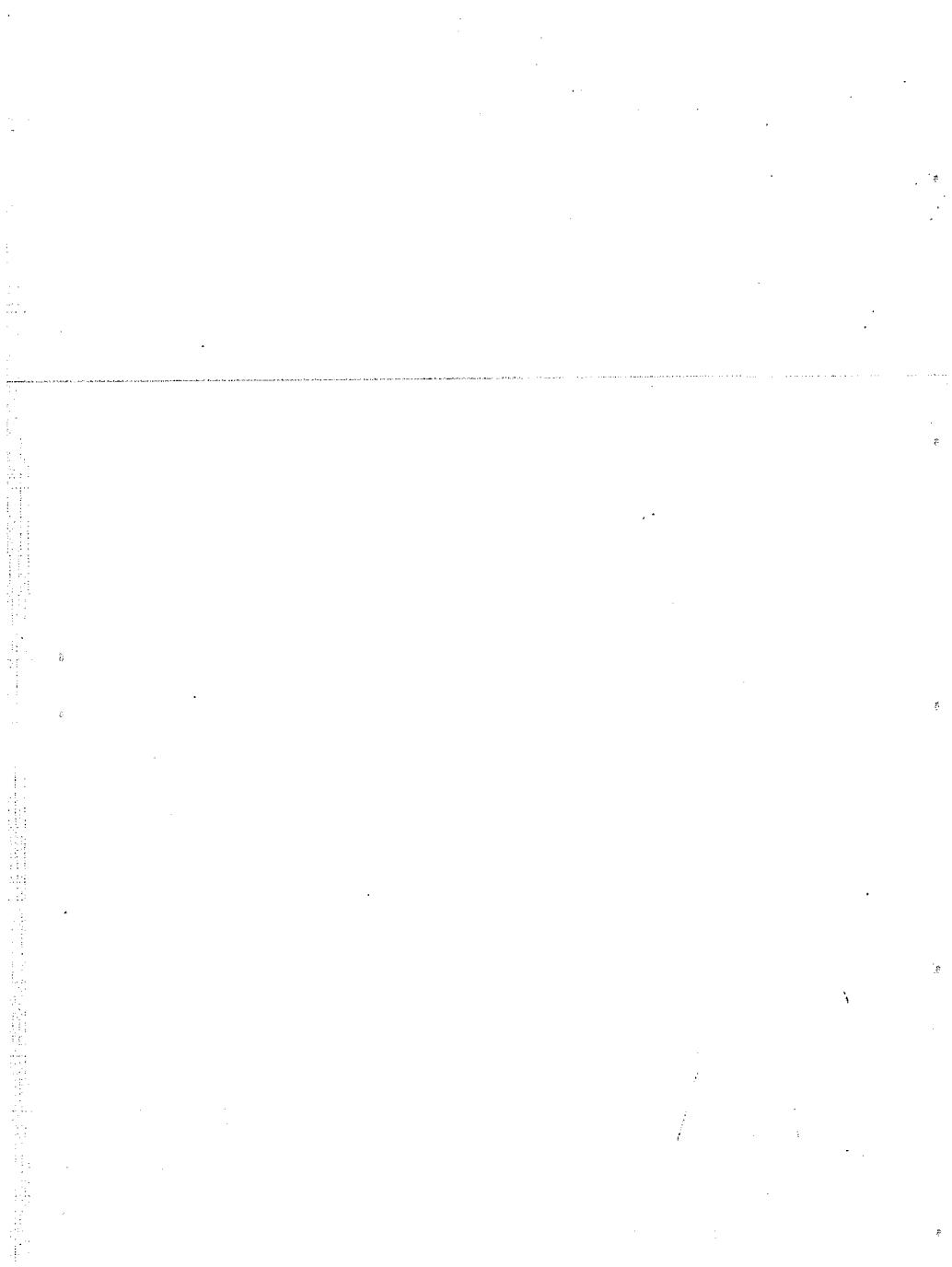


Figura 1.21.2: Indicazione dei nodi e degli anelli

2 Soluzione di circuiti caratterizzati da transitori del I e del II ordine



2.1 Il circuito si trova a regime per $t < 0$.

All'istante $t = 0$ il tasto T si apre; determinare l'andamento della corrente erogata dal generatore pilotato.

$$E = 12V$$

$$\alpha = 2$$

$$R_1 = R_3 = 2\Omega$$

$$C = 1\mu F$$

$$R_2 = 5\Omega$$

$$L = 50mH$$

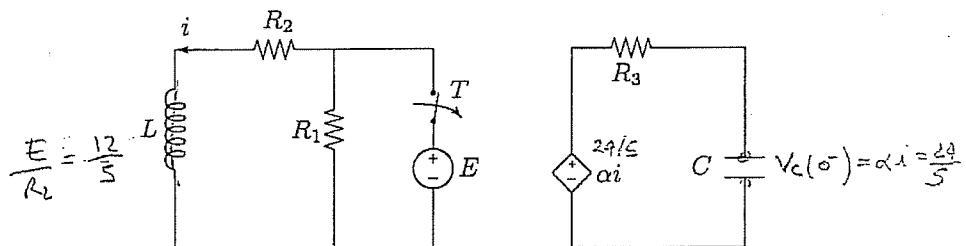


Figura 2.1.1: Circuito esercizio 2.1

Analizzando qualitativamente il circuito, dopo l'apertura del tasto si creerà una corrente i (di scarica dell'induttore) che causerà un passaggio di corrente nella parte destra del circuito dovuta alla presenza del generatore di tensione pilotato dalla stessa corrente i .

2.1.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

La presenza del generatore di tensione, che all'istante $t = 0$ viene scollegato, fa sì che esistano una corrente nell'induttore ed una tensione ai capi del condensatore. Le condizioni iniziali fisiche pertanto si calcolano studiando il circuito di figura 2.1.1, ossia con il tasto chiuso. Sappiamo che a regime continuo l'induttore si comporta come un corto circuito ed il condensatore come un circuito aperto, pertanto

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R_2} = 2.4A \quad (2.1.1)$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = \alpha i = \frac{\alpha E}{R_2} = 4.8V \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Soluzione del circuito

Analizzando il circuito di figura 2.1.2, vediamo che la parte sinistra evolve in maniera autonoma (scarica di un induttore), mentre la parte destra è alimentata dal generatore pilotato. Entrambi i sottocircuiti saranno governati da equazioni differenziali di primo grado, con la differenza che per il sottocircuito di sinistra l'equazione sarà omogenea, mentre per il sottocircuito di destra comparirà un termine forzante.

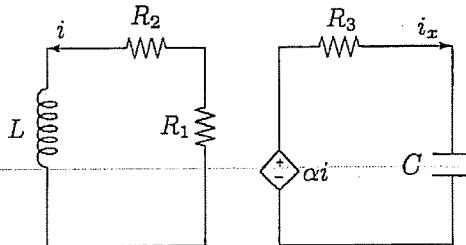


Figura 2.1.2: Circuito per $t > 0$

Per la parte sinistra del circuito, possiamo scrivere

$$(R_1 + R_2) i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (2.1.3)$$

che risulta fornisce

$$i(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} \quad \tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2} = 7.1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (2.1.4)$$

Per il calcolo di K_1 si utilizza la condizione iniziale calcolata in (2.1.2), ottenendo

$$i(t) = \frac{E}{R_2} e^{-t/\tau_1} = 2.4 e^{-t/(7.1 \cdot 10^{-3})} \quad (2.1.5)$$

Per la parte destra del circuito, possiamo scrivere l'equazione alla maglia, chiamando i_x la corrente incognita (ossia quella erogata dal generatore pilotato).

$$\alpha \frac{E}{R_2} e^{-t/\tau_1} = R_3 i_x(t) + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(\tau) d\tau + v_C(0^+) \leq \frac{\alpha E}{R_2} \quad (2.1.6)$$

che deriva equivalente a

$$-\frac{\alpha}{\tau_1} \frac{E}{R_2} e^{-t/\tau_1} = R_3 \frac{di_x(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_x(t) \quad (2.1.7)$$

L'equazione (2.1.7) deve essere risolta sommando la soluzione della relativa equazione omogenea con una soluzione particolare. La soluzione della equazione omogenea è semplicemente

$$\left. \begin{array}{l} i_{x0}(t) = K_2 e^{-t/\tau_2} \\ \tau_2 = R_3 C = 2 \cdot 10^{-6} s \end{array} \right\} \quad (2.1.8)$$

La ricerca della soluzione particolare si esegue ipotizzando una soluzione che sia simile al termine noto. Cercheremo pertanto una soluzione del tipo $i_{xp} = K_3 e^{-t/\tau_1}$.

$$K_3 e^{-t/\tau_1} = K_2 e^{-t/\tau_2} \Rightarrow K_3 e^{-t(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} = \frac{K_2}{\tau_2} e^{-t(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2})}$$

Sostituendo $i_{xp}(t)$ in (2.1.7) e semplificando si ottiene

$$\left. \frac{-K_3 R_3 + K_3}{\tau_1} + \frac{K_3}{C} = -\frac{\alpha E}{\tau_1 R_2} \right\} \quad (2.1.9)$$

da cui si determina

$$K_3 = \frac{\frac{\alpha E}{\tau_1 R_2}}{\frac{1}{C} - \frac{R_3}{\tau_1}} = 6.72 \cdot 10^{-4} \quad (2.1.10)$$

La corrente richiesta assume pertanto la forma

$$\left. i_x(t) = i_{x0}(t) + i_{xp}(t) = (K_3 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}) u(t) A \right\} \quad (2.1.11)$$

2.1.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Resta ora da determinare il valore di K_2 , per il quale occorre conoscere il valore della $i_x(0^+)$, per la quale è necessario studiare il circuito a $t = 0^+$ riportato in figura 2.1.3

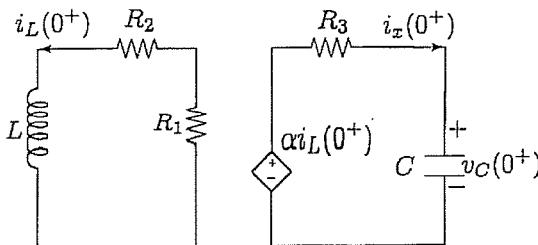


Figura 2.1.3: Circuito per $t = 0^+$

da cui si ricava, con la KVL,

$$i_x(0^+) = \frac{\alpha i_L(0^+) - v_c(0^+)}{R_3} = 0A \quad (2.1.12)$$

Valutando l'equazione (2.1.11) all'istante $t = 0$ abbiamo che

$$K_2 + K_3 = 0$$

$$K_2 = -K_3$$

$$(2.1.13)$$

ossia con i valori così calcolati, otteniamo

$$i_x(t) = [6.72 \cdot 10^{-4} e^{-t/(7.1 \cdot 10^{-3})} - 6.72 \cdot 10^{-4} e^{-t/(2 \cdot 10^{-6})}] u(t) A \quad (2.1.14)$$

L'andamento della corrente è riportato nella figura 2.1.4.

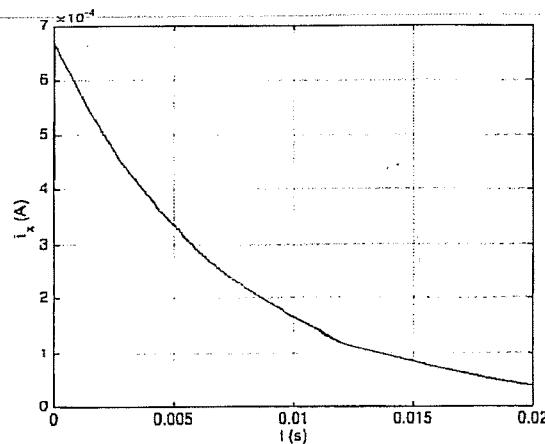


Figura 2.1.4: Andamento temporale della corrente richiesta

2.2 Il circuito si trova a regime per $t < 0$. Al tempo $t = 0$ il tasto si apre: determinare l'andamento della corrente $i(t)$ nell'induttore L .

$$V_s = 100V$$

$$C = 1mF$$

$$L = 2mH$$

$$R = 5\Omega$$

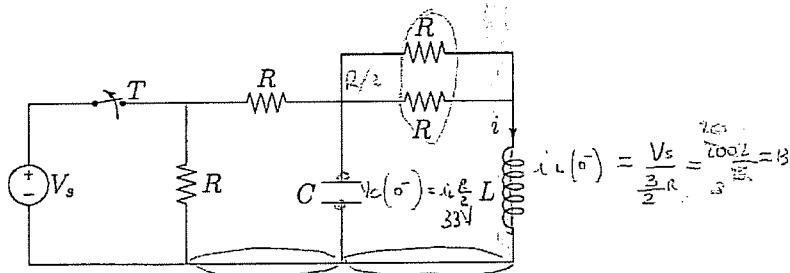


Figura 2.2.1: Circuito esercizio 2.2

Una volta aperto il tasto le condizioni iniziali fisiche daranno origine ad un transitorio del secondo ordine in cui l'energia immagazzinata negli elementi reattivi verrà dissipata sui resistori, ed a regime la corrente richiesta assumerà valore nullo.

2.2.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Prima del transitorio, il circuito funziona con il tasto chiuso, come raffigurato in figura 2.2.2. Le condizioni iniziali fisiche sono come sempre tensione sui condensatori e correnti negli induttori. Analizzando semplicemente il circuito, possiamo direttamente calcolare

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{V_s}{\frac{3}{2}R} = 13.33A$$

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = i_L(0^-) \frac{R}{2} = \frac{V_s}{\frac{3}{2}R} \frac{R}{2} = \frac{V_s}{3} = 33.33V$$
(2.2.1)

2.2.2 Soluzione del circuito

Analizzando il circuito rappresentato in figura 2.2.3, ci aspettiamo una equazione differenziale del secondo ordine; il modo più immediato per ottenerne

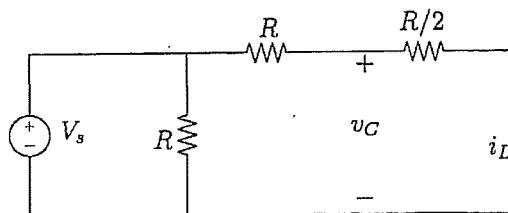


Figura 2.2.2: Circuito a regime per $t < 0$

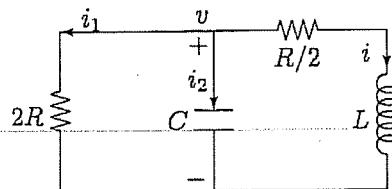


Figura 2.2.3: Circuito per $t > 0$

tal equazione (nella incognita i) è quello di scrivere una equazione con la KCL ad uno dei due nodi, e poi di esprimere la tensione v in funzione della corrente incognita.

$$i_1(t) + i_2(t) + i(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

dove

$$i_1(t) = \frac{v(t)}{2R} \quad i_2(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \frac{R}{2} i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.2.3)$$

che, sostituiti nell'equazione (2.2.2), forniscono

$$\frac{i(t)}{4} + \frac{L}{2R} \frac{di(t)}{dt} + \frac{RC}{2} \frac{di(t)}{dt} + LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + i(t) = 0 \quad (2.2.4)$$

che, riordinata, ci dà l'equazione differenziale del secondo ordine del circuito.

$$LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \left(\frac{RC}{2} + \frac{L}{2R} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{5}{4} i(t) = 0 \quad (2.2.5)$$

L'equazione (2.2.5) è omogenea, e viene risolta in maniera standard trovando le radici del polinomio di secondo grado associato nell'incognita λ . Le due soluzioni sono

$$LC \lambda^2 + \left(\frac{RC}{2} + \frac{L}{2R} \right) \lambda + \frac{5}{4} = 0$$

$$i(t) = e^{-at} [A_1 \cos(bt) + A_2 \sin(bt)]$$

$$\lambda = a \pm b\omega$$

$$\lambda_1 = -675 + j411.55 \quad \lambda_2 = -675 - j411.55 \quad (2.2.6)$$

che significa una corrente del tipo

$$i(t) = e^{-675t} [A_1 \cos(411.55t) + A_2 \sin(411.55t)] u(t) A \quad (2.2.7)$$

che dal punto di vista fisico è corretta in quanto la corrente $i(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ dal momento che ci sono resistori che dissipano l'energia inizialmente immagazzinata nell'induttore e nel condensatore e non ci sono generatori pilotati.

2.2.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

I valori delle costanti A_1 ed A_2 si determinano studiando le condizioni iniziali, ossia $i(0^+) = i_L(0^+)$ e $\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+}$

Il valore di $\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+}$ si calcola studiando il circuito di figura 2.2.4 all'istante $t = 0^+$.

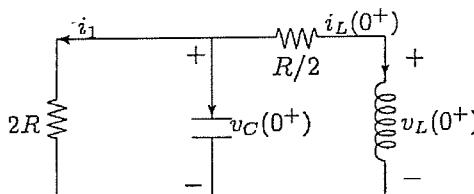


Figura 2.2.4: Circuito per $t = 0^+$

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) - \frac{R}{2} i_L(0^+) = 0V \quad (2.2.8)$$

$$v_L(0^+) = L \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0V \quad (2.2.9)$$

da cui

$$\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 0 \frac{A}{s} \quad (2.2.10)$$

Utilizzando le condizioni iniziali delle equazioni (2.2.1) e (2.2.10), combinate con l'espressione temporale (2.2.7), si ottiene

$$i(0) = A_1 = 13.33 \quad (2.2.11)$$

$$\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -675A_1 + 411.55A_2 = 0 \quad (2.2.12)$$

da cui $A_2 = 21.87$
Risulta per cui

$$i(t) = e^{-675t}[13.33\cos(411.55t) + 21.87\sin(411.55t)]u(t)A \quad (2.2.13)$$

L'andamento della corrente è riportato nella figura 2.2.5.

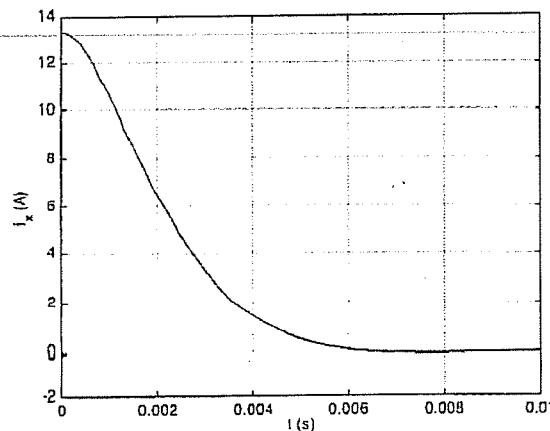


Figura 2.2.5: Andamento temporale della corrente richiesta

2.3 Nel seguente circuito inizialmente scarico, il tasto T commuta nella posizione 1 per $t = 0$. Per $t = 0.1s$ il tasto passa dalla posizione 1 alla posizione 2. Determinare l'andamento della corrente $i(t)$ nel circuito per $t > 0$.

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad L = 200mH \quad C = 10mF \quad V_s = 12V$$

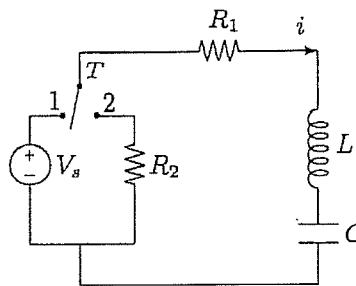


Figura 2.3.1: Circuito esercizio 2.3

In questo problema si tratta di studiare due transitori distinti, il primo nell'intervallo di tempo $0 < t < 0.1s$ ed il secondo per $t > 0.1$. Per entrambi andranno studiate le condizioni iniziali e la relativa equazione differenziale.

2.3.1 Calcolo condizioni iniziali fisiche per il primo transitorio

Il circuito è inizialmente scarico, quindi non ci sono tensioni sui condensatori e correnti negli induttori per $t < 0$.

2.3.2 Soluzione della equazione differenziale relativa al primo transitorio

Per $0 < t < 0.1s$ il circuito si trova con il tasto chiuso in posizione 1, come rappresentato nella figura 2.3.2. L'equazione differenziale che regola il circuito si ottiene scrivendo l'equilibrio con la KVL, che fornisce come risultato

$$V_s = R_1 i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(\tau) d\tau + v_C(0^+) \quad (2.3.1)$$

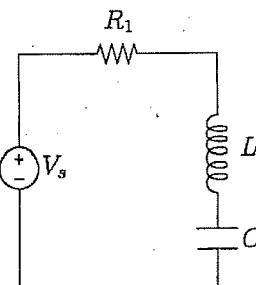


Figura 2.3.2: Circuito con tasto nella posizione 1

che derivata nel tempo fornisce

$$0 = LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R_1 C \frac{di(t)}{dt} + i(t) \quad (2.3.2)$$

ossia una equazione omogenea del secondo ordine; il polinomio di secondo grado associato all'equazione ha come soluzioni

$$\lambda_1 = -13.82 \quad \lambda_2 = -36.18 \quad (2.3.3)$$

pertanto la forma d'onda della corrente $i(t)$ sarà la seguente

$$i(t) = (A_1 e^{-13.82t} + A_2 e^{-36.18t}) u(t) \quad (2.3.4)$$

con le costanti A_1 ed A_2 da determinarsi studiando le condizioni iniziali del circuito.

2.3.3 Calcolo condizioni iniziali matematiche per il primo transitorio

Riferendosi al circuito di figura 2.3.3, inizialmente scorre una corrente $i(0^+) = 0A$ (dalle condizioni iniziali fisiche), mentre dobbiamo determinare la grandezza (utile per il calcolo delle costanti) $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$. Possiamo scrivere

$$V_s = R_1 i(0^+) + L \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + v_C(0^+) \quad (2.3.5)$$

ossia, considerando i valori delle condizioni iniziali fisiche

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{V_s}{L} = 60 \frac{A}{s} \quad (2.3.6)$$

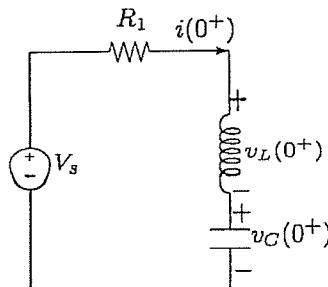


Figura 2.3.3: Circuito per il calcolo delle condizioni iniziali matematiche transitorio 1

Inserendo i valori così trovati nell'equazione (2.3.4) otteniamo

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -13.82A_1 - 36.18A_2 &= 60 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

da cui risulta che $A_1 = 2.68$ e $A_2 = -2.68$, pertanto l'andamento della corrente per $0 < t < 0.1$ è

$$i(t) = 2.68e^{-13.82t} - 2.68e^{-36.18t} A \quad (2.3.8)$$

2.3.4 Calcolo condizioni iniziali fisiche per il secondo transitorio

Il secondo transitorio comincia all'istante $t = 0.1\text{s}$ (il relativo circuito è riportato in figura 2.3.4) con la commutazione del tasto dalla posizione 1 alla posizione 2. Le condizioni iniziali fisiche invarianti devono essere calcolate utilizzando il circuito prima della commutazione del tasto, con la corrente circolante espressa dalla relazione (2.3.8).

$$\begin{aligned} i(t)|_{t=0.1} &= 0.60 A \\ v_c(t)|_{t=0.1} &= \left[V_s - R_1 i(t) - L \frac{di(t)}{dt} \right] \Big|_{t=0.1} = 7.32 V \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

nella quale la seconda espressione è valutata calcolando la derivata in questione e ponendo $t = 0.1\text{s}$.

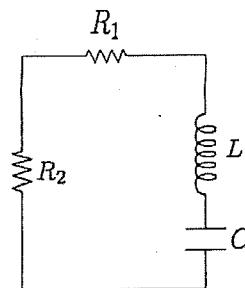


Figura 2.3.4: Circuito con tasto nella posizione 2

2.3.5 Soluzione della equazione differenziale relativa al secondo transitorio

Scrivendo l'equazione differenziale relativa al circuito di figura 2.3.4 utilizzando la KVL otteniamo

$$0 = LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)C \frac{di(t)}{dt} + i(t) \quad (2.3.10)$$

il cui polinomio di secondo grado ha come soluzione

$$\gamma_1 = -3.41 \quad \gamma_2 = -146.59 \quad (2.3.11)$$

pertanto la forma d'onda della corrente $i(t)$ per $t > 0.1$ sarà la seguente

$$i(t) = [B_1 e^{-3.41(t-0.1)} + B_2 e^{-146.59(t-0.1)}] u(t-0.1) A \quad (2.3.12)$$

con le costanti B_1 ed B_2 da determinarsi studiando le condizioni iniziali del circuito.

2.3.6 Calcolo condizioni iniziali matematiche per il secondo transitorio

Dato che le costanti da determinare riguardano ancora una volta la corrente, ci occorrono i valori $i(0.1^+)$ e $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0.1^+}$. Per quanto riguarda $i(0.1^+)$, il valore è direttamente ottenuto dall'equazione (2.3.8) dal momento che si riferisce alla corrente nell'induttore che si conserva. Si procede analogamente a prima per il calcolo della condizione iniziale sulla derivata, considerando il circuito rappresentato in figura 2.3.5

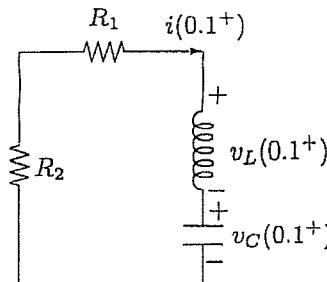


Figura 2.3.5: Circuito per il calcolo delle condizioni iniziali matematiche transitorio 2

$$0 = (R_1 + R_2)i(0.1^+) + L \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0.1^+} + v_C(0.1^+) \quad (2.3.13)$$

nella quale l'unica incognita è la grandezza desiderata, pertanto sostituendo i valori otteniamo $\frac{di(t)}{dt} \Big|_{0.1^+} = -126.88A$. Inserendo i valori così trovati nell'equazione (2.3.12) otteniamo

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= 0.60 \\ -3.41B_1 - 146.59B_2 &= -126.88 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

da cui risulta che $B_1 = 0.27$ e $B_2 = -0.87$, pertanto l'andamento della corrente per $t > 0.1$ è

$$i(t) = [-0.27e^{-3.41(t-0.1)} + 0.87e^{-146.59(t-0.1)}] u(t-0.1) A \quad (2.3.15)$$

L'andamento della corrente è riportato nella figura 2.3.6.

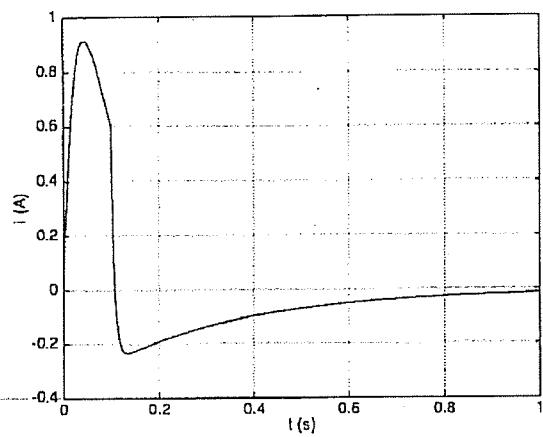


Figura 2.3.6: Andamento temporale della corrente richiesta

2.4 Nel circuito rappresentato in figura, all'istante $t = 0$ il tasto T si chiude. Determinare l'andamento di $i_2(t)$ conoscendo la tensione sul condensatore C_1 , $v_{C_1} = 10V$ per $t < 0$ e che tutti gli altri componenti sono inizialmente scarichi.

$$C_1 = 1mF$$

$$R = 2\Omega$$

$$L_1 = 25mH$$

$$L_2 = 10mH$$

$$\alpha = 0.1$$

$$C_2 = 1mF$$

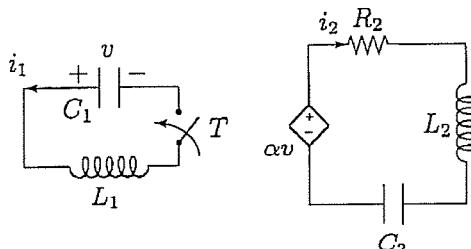


Figura 2.4.1: Circuito esercizio 2.4

Osservando il problema, è possibile comprendere che una volta chiuso il tasto il sottocircuito di sinistra evolve naturalmente sulla base dell'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore, ed in particolare la corrente (così come la tensione) saranno delle sinusoidi non smorzate data l'assenza di elementi dissipativi. Di conseguenza il sottocircuito di destra sarà alimentato da una tensione sinusoidale, si avrà pertanto un circuito in cui sarà presente un regime sinusoidale ed un transitorio del secondo ordine.

2.4.1 Calcolo condizioni iniziali fisiche

Per il sottocircuito di sinistra abbiamo $v_{C_1}(0^+) = 10V$, $i_{L1}(0^+) = i_1(0^+) = 0A$, mentre per il sottocircuito di destra dobbiamo considerare che per $t < 0$ il generatore pilotato eroga una tensione costante αv_{C_1} pertanto si crea una situazione di regime nella quale $i_{L2}(0^+) = i_2(0^+) = 0A$ e $v_{C_2}(0^+) = \alpha v_{C_1}(0^+) = 1V$.

2.4.2 Soluzione del transitorio del sottocircuito di sinistra

Con i riferimenti di corrente indicati possiamo scrivere:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - v_{C_1}(t) = 0 \quad (2.4.1)$$

e sapendo che

$$i_1(t) = -C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} \quad (2.4.2)$$

otteniamo

$$L_1 C_1 \frac{d^2 v_{C_1}(t)}{dt^2} + v_{C_1}(t) = 0 \quad (2.4.3)$$

ossia una equazione differenziale del secondo ordine omogenea. Risolvendo l'equazione algebrica di secondo grado corrispondente otteniamo

$$\lambda_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = j\omega_0 = \pm j200 \quad (2.4.4)$$

pertanto la generica soluzione sarà

$$v_{C_1}(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t) \quad (2.4.5)$$

2.4.3 Calcolo condizioni iniziali matematiche

Per determinare le costanti dell'equazione (2.4.5) dobbiamo valutare il valore della tensione sul condensatore all'istante $t = 0^+$ ed il valore della derivata della tensione all'istante $t = 0^+$.

La condizione iniziale sul condensatore è nota e vale $v_{C_1}(0^+) = 10V$, mentre valutando il circuito all'istante $t = 0^+$ riportato in figura 2.4.2 (sottocircuito di sinistra) sappiamo che

$$i_1(0^+) = 0A$$

$$\left. \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -i_1(0^+)/C_1 = 0V/s \quad (2.4.6)$$

Di conseguenza derivando l'equazione (2.4.5) otteniamo

$$\left. \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = [-\omega_0 A_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 A_2 \cos(\omega_0 t)]_{t=0^+} = 0 \quad (2.4.7)$$

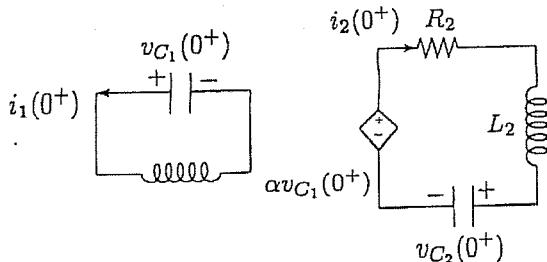


Figura 2.4.2: Circuito per $t = 0^+$

da cui otteniamo che $A_2 = 0$, mentre valutando l'equazione (2.4.5) all'istante $t = 0$ abbiamo che $A_1 = 10$; pertanto l'espressione finale della tensione sul condensatore C_1 è

$$v_{C_1}(t) = 10 \cos(\omega_0 t) V \quad (2.4.8)$$

2.4.4 Risoluzione del sottocircuito di destra

Applicando la KVL al sottocircuito di destra si ottiene la classica equazione differenziale del secondo ordine non omogenea, dato che esiste il termine forzante dato dal generatore pilotato

$$10\alpha \cos(\omega_0 t) = R i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_{C_2}(0^+) \quad (2.4.9)$$

Un'equazione differenziale lineare non omogenea la si risolve sommando la cosiddetta soluzione particolare (una funzione che soddisfa l'equazione differenziale) e la soluzione dell'equazione omogenea associata. La soluzione particolare può essere calcolata con il metodo delle funzioni simili, oppure sapendo che questa corrisponde necessariamente alla soluzione di regime, utilizzando il metodo fasoriale. Questa seconda possibilità è chiaramente la più semplice dal punto di vista computazionale.

Pertanto abbiamo che

$$i_{2p} = \frac{10\alpha}{\left(R + j\omega_0 L_2 + \frac{1}{j\omega_0 C_2}\right)} = 0.28 e^{j56.31^\circ} A \quad (2.4.10)$$

da cui, nel dominio del tempo

$$i_{2p}(t) = 0.28 \cos(200t + 56.31^\circ) A \quad (2.4.11)$$

Derivando l'equazione omogenea associata alla (2.4.9) otteniamo la classica equazione differenziale di secondo ordine, la cui equazione di secondo grado in λ ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -100 \pm j300 \quad (2.4.12)$$

pertanto l'andamento della corrente richiesta risulta

$$i_2(t) = 0.28 \cos(200t + 56.31^\circ) + e^{-100t} [B_1 \cos(300t) + B_2 \sin(300t)] u(t) A \quad (2.4.13)$$

2.4.5 Calcolo condizioni iniziali matematiche per il sottocircuito di destra

Sappiamo dall'analisi precedente che $i_2(0^+) = 0$, mentre per determinare $\frac{di_2(t)}{dt}\Big|_{t=0^+}$ dobbiamo scrivere la KVL al sottocircuito di destra per $t = 0^+$ (figura 2.4.2).

$$\alpha v_{C_1}(0^+) = R i_2(0^+) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}\Big|_{t=0^+} + v_{C_2}(0^+) \quad (2.4.14)$$

da cui si determina, inserendo i valori precedentemente calcolati per le condizioni iniziali fisiche, che

$$\frac{di_2(t)}{dt}\Big|_{t=0^+} = 0 \frac{A}{s} \quad (2.4.15)$$

Possiamo ora calcolare i valori delle costanti B_1 e B_2

$$\begin{aligned} i_2(0) &= 0.28 \cos(56.31^\circ) + B_1 = 0 \\ B_1 &= -0.15 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_2(t)}{dt} &= -200 \cdot 0.28 \sin(200t + 56.31^\circ) - 100e^{-100t} [B_1 \cos(300t) + B_2 \sin(300t)] + \\ &\quad + e^{-100t} [-300B_1 \sin(300t) + 300B_2 \cos(300t)] \\ B_2 &= 0.13 \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

da cui risulta l'andamento della corrente richiesta, riportato in figura 2.4.3.

$$i_2(t) = 0.28 \cos(200t + 56.31^\circ) + e^{-100t} [-0.15 \cos(300t) + 0.13 \sin(300t)] u(t) A \quad (2.4.18)$$

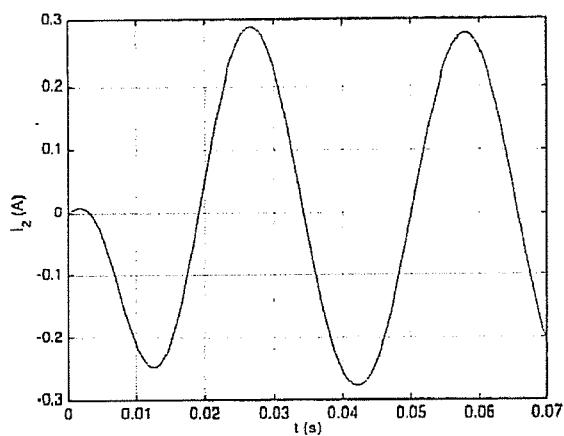


Figura 2.4.3: Andamento temporale della corrente richiesta

2.5 Il circuito di figura è supposto a regime per $t < 0$. All'istante $t = 0$ il tasto T si chiude.

Determinare $i_2(t)$ per $t > 0$.

$$I = 1A$$

$$M = 1mH$$

$$L_1 = 10mH$$

$$R_1 = 1\Omega$$

$$L_2 = 2mH$$

$$R_2 = 6\Omega$$

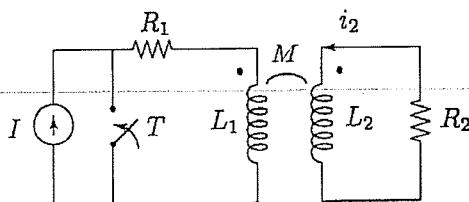


Figura 2.5.1: Circuito esercizio 2.5

Da una analisi qualitativa del circuito possiamo affermare che la chiusura del tasto, che cortocircuita il generatore di corrente, causerà un transitorio nel quale l'energia inizialmente immagazzinata nel circuito (grazie alla corrente continua inizialmente circolante) verrà dissipata nei resistori R_1 ed R_2 risultando in un regime continuo nullo.

2.5.1 Calcolo condizioni iniziali fisiche

Il calcolo delle condizioni iniziali fisiche è pressoché immediato: nel circuito di figura 2.5.1 scorre la corrente I nella maglia di sinistra, mentre nella maglia destra non scorre corrente in quanto a regime continuo l'accoppiamento mutuo fra gli induttori non ha effetto. Abbiamo pertanto

$$i_1(0^-) = i_1(0^+) = I = 1A \quad i_2(0^-) = i_2(0^+) = 0A \quad (2.5.1)$$

2.5.2 Soluzione del transitorio

In figura 2.5.2 è riportato il circuito per $t > 0$, ossia dopo la chiusura del tasto. Per ottenere l'equazione differenziale del circuito occorre scrivere l'equilibrio con la KVL alle due maglie e combinarle in una unica equazione

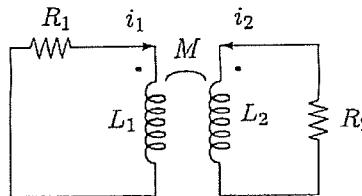


Figura 2.5.2: Circuito per $t > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ 0 &= R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Dalla seconda equazione ricaviamo

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_2}{M} i_2(t) - \frac{L_2}{M} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (2.5.3)$$

che derivata ulteriormente fornisce

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} = -\frac{R_2}{M} \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{L_2}{M} \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \quad (2.5.4)$$

Derivando la prima delle equazioni (2.5.2) otteniamo

$$0 = R_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \quad (2.5.5)$$

Sostituendo le equazioni (2.5.3) e (2.5.4) in (2.5.5) otteniamo l'equazione differenziale rappresentativa del circuito

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + (R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 R_2 I_2(t) = 0 \quad (2.5.6)$$

Le soluzioni dell'equazione algebrica associata sono

$$\lambda_1 = -3163.3 \quad \lambda_2 = -99.8 \quad (2.5.7)$$

pertanto

$$i_2(t) = (A_1 e^{-3163.3t} + A_2 e^{-99.8t}) u(t) \quad (2.5.8)$$

dove le costanti A_1 e A_2 verranno calcolate sulla base delle condizioni iniziali.

2.5.3 Calcolo condizioni iniziali

Per il calcolo delle condizioni iniziali ci dobbiamo riferire ancora al circuito di figura 2.5.2. Il valore di $i_2(0^+) = 0A$ lo abbiamo già calcolato precedentemente. Dobbiamo procedere al calcolo del valore di $\left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$. Per far questo si riscrivono le equazioni (2.5.2) valutate in $t = 0^+$ tenendo conto che $i_2(0^+) = 0A$.

$$\begin{aligned} 0 &= R_1 i_1(0^+) + L_1 \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + M \left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \\ 0 &= L_2 \left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + M \left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Dalla seconda equazione di 2.5.9 ricaviamo

$$\left. \frac{di_1(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{L_2}{M} \left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \quad (2.5.10)$$

da cui, sostituendo (2.5.10) nella prima di (2.5.9) otteniamo

$$\left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{R_1 M}{L_1 L_2 - M^2} I = 52.63 \frac{A}{s} \quad (2.5.11)$$

Le costanti A_1 ed A_2 vengono pertanto ottenute valutando l'equazione 2.5.8 e la sua derivata in $t = 0$, ed ottenendo

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ -3163.3A_1 - 99.8A_2 &= 52.63 \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

da cui l'andamento temporale di i_2 risulta

$$i_2(t) = (-0.017e^{-3163.3t} + 0.017e^{-99.8t}) u(t) A \quad (2.5.13)$$

come riportato in figura 2.5.3

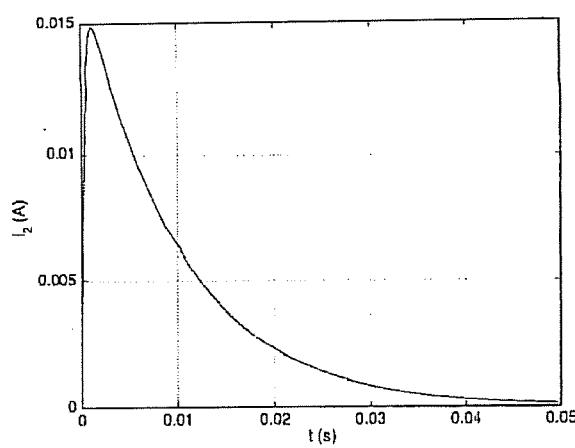


Figura 2.5.3: Andamento temporale della corrente

2.6 Il circuito in figura si trova a regime per $t < 0$. All'istante $t = 0$ il tasto T_1 si chiude ed il tasto T_2 si apre. Determinare l'andamento della corrente $i_x(t)$ per $t > 0$.

$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 5\Omega$$

$$R_3 = 4\Omega$$

$$L_1 = 2mH$$

$$C_1 = 100\mu F$$

$$C_2 = 2\mu F$$

$$I = 2A$$

$$E = 50V$$

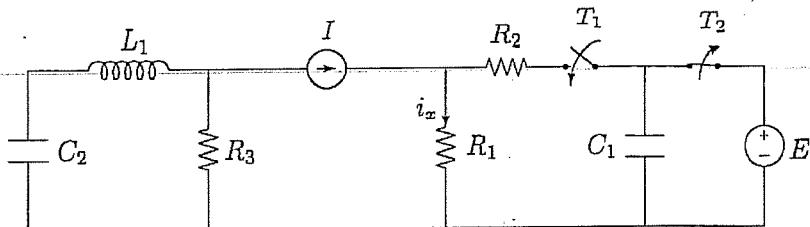


Figura 2.6.1: Circuito Esercizio 2.6

Il generatore di tensione fornisce la condizione iniziale sul condensatore; alla modifica della posizione degli interruttori si viene a creare un circuito del primo ordine alimentato dal solo generatore di corrente. A regime continuo tutta la corrente erogata dal generatore passerà attraverso la resistenza R_1 .

2.6.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Le condizioni iniziali fisiche si riferiscono al regime prima della variazione della posizione dei tasti, ed in particolare alle correnti negli induttori e le tensioni sui condensatori.

È possibile osservare che il ramo sottostante al generatore di corrente, porta anch'esso la corrente I (con verso opposto a quella del generatore) per la KCL, pertanto è possibile disegnare il circuito per $t > 0$ come in figura 2.6.2. Per questo motivo, di fatto, possiamo completamente trascurare lo studio della parte a sinistra del circuito, dal momento che non ha nessuna influenza sulla grandezza richiesta. Abbiamo pertanto

$$\nu_{C_1}(0^-) = \nu_{C_1}(0^+) = E = 50V \quad (2.6.1)$$

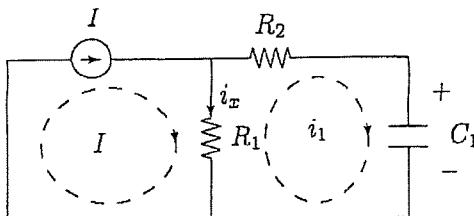


Figura 2.6.2: Circuito per $t > 0$

2.6.2 Soluzione del circuito

In figura 2.6.2 è riportato il circuito per $t > 0$ con l'indicazione degli anelli scelti. Possiamo scrivere

$$(R_1 + R_2)i_1(t) + v_{C_1}(t) = R_1 I \quad (2.6.2)$$

con $i_1(t) = C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt}$; pertanto l'equazione differenziale finale da risolvere è

$$(R_1 + R_2)C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} + v_{C_1}(t) = R_1 I \quad (2.6.3)$$

ossia una equazione differenziale lineare di primo ordine non omogenea. Possiamo ottenere la soluzione come somma della soluzione della equazione omogenea associata ed una soluzione particolare. Quest'ultima la si ottiene semplicemente con il metodo delle funzioni simili, ed è banalmente $v_{C_1}^p(t) = R_1 I = 4V$, mentre per l'equazione associata possiamo direttamente utilizzare la nota espressione esponenziale con la costante di tempo τ . La soluzione finale è pertanto

$$v_{C_1}(t) = \left(K e^{-\frac{t}{\tau}} + 4 \right) u(t) \quad \tau = (R_1 + R_2)C = 7 \cdot 10^{-4} s \quad (2.6.4)$$

La condizione iniziale fisica e quella matematica coincidono, quindi per calcolare il valore di K è sufficiente valutare la (2.6.4) in $t = 0$, da cui

$$v_{C_1}(0^+) = K + 4 = 50 \quad K = 46 \quad (2.6.5)$$

e

$$v_{C_1}(t) = \left(46 e^{-\frac{t}{7 \cdot 10^{-4}}} + 4 \right) u(t) V \quad (2.6.6)$$

La grandezza richiesta è la corrente $i_x(t)$, pertanto

$$i_x(t) = I - i_1(t) = I - C_1 \frac{d v_{C_1}(t)}{dt} = \left(2 + 6.57 e^{-\frac{t}{7 \cdot 10^{-4}}} \right) u(t) A \quad (2.6.7)$$

ed il suo andamento è riportato in figura 2.6.3.

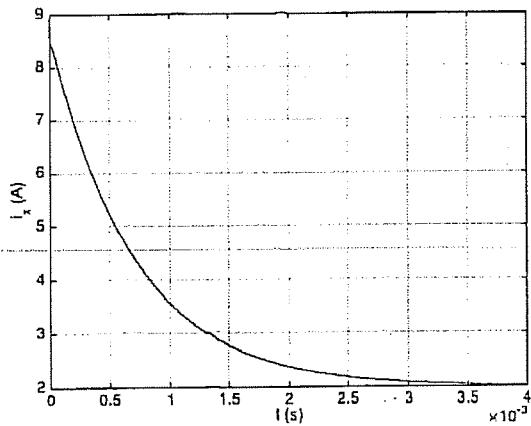


Figura 2.6.3: Andamento temporale della corrente richiesta

2.7 Il circuito rappresentato in figura si trova a regime per $t < 0$; all'istante $t = 0$ il tasto T si chiude: trovare l'andamento temporale della corrente $I_L(t)$.

$$R_1 = 1\Omega$$

$$\alpha = 0.05$$

$$R_2 = 5\Omega$$

$$L = 0.2H$$

$$C = 1mF$$

$$E = 12V$$

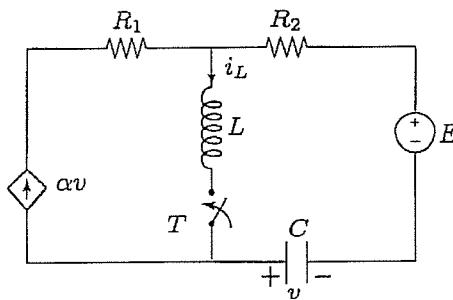


Figura 2.7.1: Circuito esercizio 2.7

Osservando qualitativamente il circuito, a regime continuo dopo la chiusura del tasto si può notare che la corrente richiesta sarà quella fornita dal generatore di corrente αv con la tensione v che coinciderà con la tensione imposta dal generatore di tensione E .

2.7.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Il circuito a regime prima della chiusura del tasto ($t < 0$) è riportato in figura 2.7.2. Si tratta di un circuito a regime continuo con una sola maglia in cui è presente un condensatore. Sapiamo che a regime continuo il condensatore si comporta da circuito aperto, pertanto la corrente che scorre nella maglia deve essere uguale a zero ossia abbiamo $\alpha v = 0V$, da cui si ricava che $v(0^-) = v(0^+) = 0V$, e che tutta la tensione $E = 12V$ si trova ai capi del generatore di corrente. Chiaramente abbiamo anche che $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0A$.

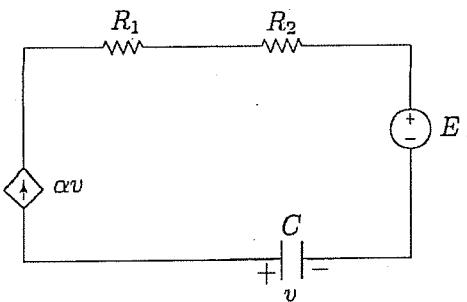


Figura 2.7.2: Circuito per $t < 0$

2.7.2 Soluzione del circuito

Dal momento che l'incognita del problema è la corrente nell'induttore, la scelta più opportuna del metodo è quella dell'utilizzo delle correnti di maglia, come indicato in figura 2.7.3. La scelta è dettata dal fatto che in questo modo la corrente circolante in L è una sola e quindi è possibile scrivere l'equazione differenziale direttamente in quell'incognita.

Scrivendo l'unica equazione alla maglia percorsa dalla corrente $i_L(t)$ abbiamo

$$E = R_2[i_L(t) - \alpha v(t)] + L \frac{di_L(t)}{dt} + v(t) \quad (2.7.1)$$

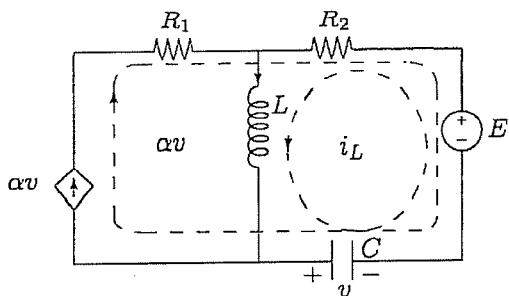


Figura 2.7.3: Circuito per $t > 0$

Sapendo che l'equazione tensione - corrente del condensatore è

$$i_L(t) - \alpha v(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.7.2)$$

possiamo sostituire l'equazione (2.7.2) in (2.7.1) ed ottenere

$$LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + (R_2 C + L\alpha) \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = E \quad (2.7.3)$$

La soluzione dell'equazione differenziale non omogenea 2.7.3 si ottiene sommando la soluzione particolare (che si dimostra essere banalmente $v_p(t) = E$) e la soluzione dell'equazione differenziale omogenea.

Le due soluzioni dell'equazione algebrica associata sono

$$\lambda_{1,2} = -37.50 \pm j59.95 \quad (2.7.4)$$

da cui otteniamo un andamento della tensione pari a

$$v(t) = \{e^{-37.50t} [A_1 \cos(59.95t) + A_2 \sin(59.95t)] + 12\} u(t) V \quad (2.7.5)$$

con le due costanti A_1 ed A_2 da determinarsi con il calcolo delle condizioni iniziali.

2.7.3 Calcolo condizioni iniziali matematiche

Per il calcolo delle condizioni iniziali dobbiamo riferirci al circuito di figura 2.7.4, ossia dopo la chiusura del tasto all'istante $t = 0^+$, sapendo che $v(0^+) = 0V$ precedentemente calcolata.

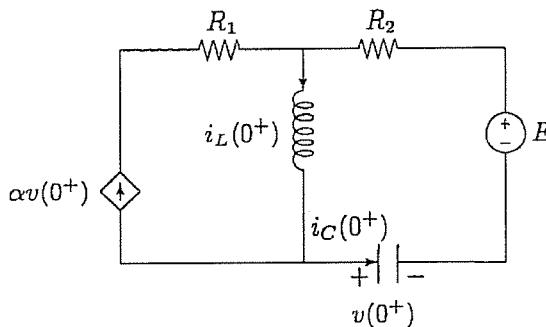


Figura 2.7.4: Circuito per $t = 0^+$

Applicando la KCL ad uno dei due nodi si ottiene

$$i_L(0^+) - \alpha v(0^+) = i_C(0^+) = C \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} \quad (2.7.6)$$

da cui

$$\left. \frac{d\nu(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = 0 \frac{V}{s} \quad (2.7.7)$$

Valutando (2.7.5) e la sua derivata in $t = 0^+$ otteniamo le seguenti equazioni per le costanti

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + 12 \\ 0 &= -37.50A_1 + 59.95A_2 \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

da cui l'andamento temporale risultante è il seguente (riportato in figura 2.7.5)

$$\nu(t) = \{e^{-37.50t}[-12\cos(59.95t) - 7.51\sin(59.95t)] + 12\} V \quad (2.7.9)$$

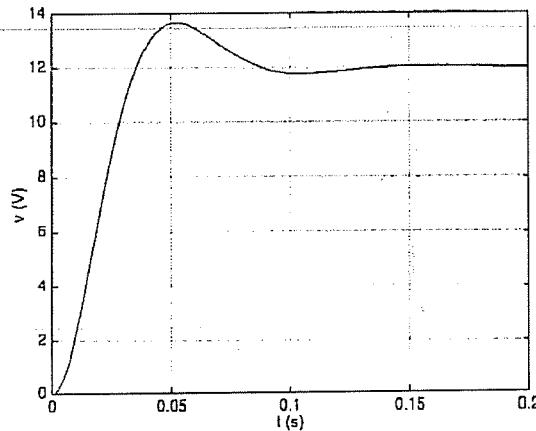


Figura 2.7.5: Andamento della tensione

Dato che la grandezza richiesta è la corrente nell'induttore, è sufficiente valutare, secondo la (2.7.2) la funzione $i_L(t) = \alpha\nu(t) + C\frac{d\nu(t)}{dt}$ ossia

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \{0.05e^{-37.50t}[-12\cos(59.95t) - 7.51\sin(59.95t)] + \\ &+ 0.6 + 10^{-3}\{-37.50e^{-37.50t}[-12\cos(59.95t) - 7.51\sin(59.95t)] + \\ &+ e^{-37.50t}[12 \cdot 59.95\sin(59.95t) - 7.51 \cdot 59.95\cos(59.95t)]\}\} u(t) A \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.7.6.

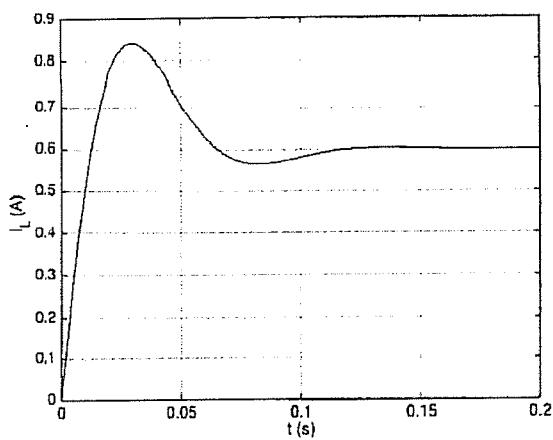


Figura 2.7.6: Andamento della corrente

2.8 Il circuito rappresentato in figura si trova a regime per $t < 0$; Determinare la tensione $v_C(t)$ per $t > 0$ sapendo che il generatore di tensione eroga una tensione pari a $E(t) = 10u(t)$.

$$R = 1k\Omega$$

$$C = C_1 = 100\mu F$$

$$\alpha = 0.5$$

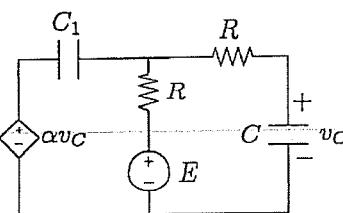


Figura 2.8.1: Circuito esercizio 2.8

Osservando il circuito si può facilmente notare come a regime continuo nel circuito non circoleranno correnti, e la tensione sul condensatore si assesterà al valore imposto dal generatore di tensione.

2.8.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Il circuito per $t < 0$ è completamente scarico, dal momento che il generatore indipendente eroga una tensione nulla. Pertanto $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0V$.

2.8.2 Risoluzione del circuito

Dal momento che la grandezza richiesta è la tensione sul condensatore, dobbiamo scrivere una equazione differenziale che ha come per incognita la funzione $v_C(t)$. A questo scopo si procede scrivendo la KCL al nodo più in alto del circuito (che avendo due nodi è equivalente all'equazione all'altro nodo); indicando con $v_1(t)$ la tensione a tale nodo abbiamo

$$0 = \frac{v_1(t) - E(t)}{R} + C \frac{dv_C(t)}{dt} + C_1 \frac{d(v_1(t) - \alpha v_C(t))}{dt} \quad (2.8.1)$$

Occorre inoltre esprimere la $v_1(t)$ in funzione della grandezza incognita, ossia riferendosi al ramo di destra

$$v_1(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (2.8.2)$$

Sostituendo l'equazione (2.8.2) in (2.8.1) otteniamo, una volta messi in evidenza i termini dello stesso ordine,

$$C_1 RC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + [2C + (1 - \alpha)C_1] \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = \frac{E(t)}{R} \quad (2.8.3)$$

ossia una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea. La soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado associata alla (2.8.3) fornisce come soluzioni

$$\lambda_1 = -20 \quad \lambda_2 = -5 \quad (2.8.4)$$

mentre, banalmente, si ottiene che la soluzione particolare dell'equazione (2.8.3) è $v_C^p(t) = 10V$.

Abbiamo pertanto come soluzione finale

$$v_C(t) = [Ae^{-20t} + Be^{-5t} + 10] u(t) V \quad (2.8.5)$$

con le costanti A e B da determinare in funzione delle condizioni iniziali.

2.8.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche.

Il valore di $v_C(0^+)$ è già stato determinato in precedenza, mentre dobbiamo determinare il valore di $\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$. A tal scopo si consideri il circuito di figura 2.8.2 ossia il circuito all'istante $t = 0^+$, ottenuto dal circuito iniziale sapendo che i condensatori C e C_1 hanno tensione nulla, e di conseguenza anche il generatore pilotato impone una tensione nulla.

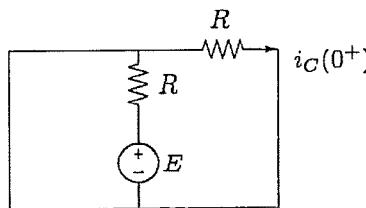


Figura 2.8.2: Circuito per $t = 0^+$

Analizzando il circuito 2.8.2 è evidente che la corrente i_C (indicata in figura) che attraversa il condensatore C è nulla all'istante $t = 0^+$ in quanto il relativo ramo è in parallelo ad un corto circuito. Otteniamo quindi

$$i_C(0^+) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0 \quad \frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0 \frac{V}{s} \quad (2.8.6)$$

Valutando per $t = 0$ l'equazione (2.8.5) e la sua derivata si ottengono le due equazioni

$$\begin{aligned} A + B &= -10 \\ -20A - 5B &= 0 \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

da cui, risolvendo il sistema si ottiene l'espressione generale della grandezza richiesta per $t > 0$

$$v_C(t) = [3.33e^{-20t} + -13.33e^{-5t} + 10] u(t) V \quad (2.8.8)$$

il cui andamento temporale è riportato in figura 2.8.3.

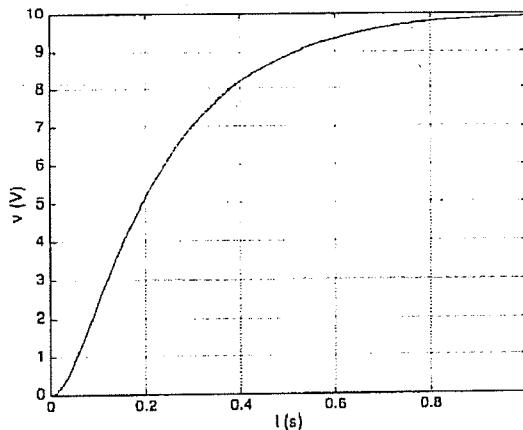


Figura 2.8.3: Andamento temporale della tensione

2.9 Nel circuito di figura, inizialmente scarico, si determini l'andamento della corrente $i(t)$. Si valuti inoltre l'energia W fornita dal generatore controllato nell'intervallo di tempo $0 < t < \infty$ e quella W_L immagazzinata nel circuito per $t = \infty$

$$I(t) = 20u(t)mA \quad R = 10\Omega \quad L = 100mH \quad \alpha = 0.1$$

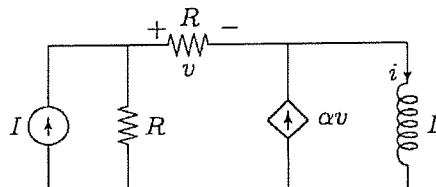


Figura 2.9.1: Circuito esercizio 2.9

Una analisi qualitativa del circuito porta alle seguenti conclusioni: la corrente nell'induttore a regime continuo è data dalla somma fra la corrente αv imposta dal generatore pilotato e la corrente $I/2$ risultante dalla ripartizione della corrente imposta dal generatore indipendente fra le due resistenze uguali. Quest'ultima considerazione si può fare data la particolare topologia del circuito e non in generale dato che non si tratta di un partitore di corrente.

2.9.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Il circuito per $t < 0$ è completamente scarico, dal momento che il generatore indipendente eroga una corrente nulla. Pertanto $i(0^-) = i(0^+) = 0A$.

2.9.2 Risoluzione del circuito

È necessario scrivere un sistema di equazioni utilizzando i principi di Kirchhoff e le relazioni tensione - corrente degli elementi al fine di ottenere una unica equazione differenziale nell'incognita $i(t)$ o $v(t)$. Scrivendo la KVL all'unica maglia del circuito (che non comprende generatori di corrente) e rispettivamente le KCL ai nodi A e B otteniamo (Figura 2.9.2)

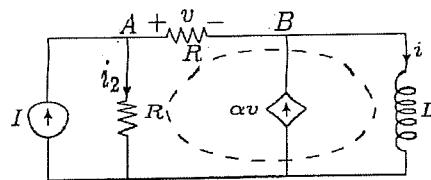


Figura 2.9.2: Indicazioni nodi e maglie

$$v(t) + L \frac{di(t)}{dt} - Ri_2(t) = 0 \quad (2.9.1)$$

$$\frac{v(t)}{R} + i_2(t) - I(t) = 0 \quad (2.9.2)$$

$$\frac{v(t)}{R} + \alpha v(t) - i(t) = 0 \quad (2.9.3)$$

Sostituendo le due equazioni nella prima, otteniamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$2v(t) + L \left(\alpha + \frac{1}{R} \right) \frac{dv(t)}{dt} = RI(t) \quad (2.9.4)$$

la cui equazione algebrica associata ha come soluzione $\lambda = -100$.

Essendo l'equazione (2.9.4) non omogenea, dobbiamo anche calcolare una soluzione particolare, che è semplicemente (con il metodo delle funzioni simili) $v_p(t) = \frac{RI(t)}{2} = 0.1u(t)V$
da cui si ottiene l'andamento di $v(t)$ per $t > 0$

$$v(t) = (Ke^{-100t} + 0.1)u(t)V \quad (2.9.5)$$

Essendo inoltre dalla seconda di (2.9.3) $i(t) = v(t)\left(\frac{1}{R} + \alpha\right) = 0.2v(t)$, abbiamo

$$i(t) = (He^{-100t} + 0.02)u(t)A \quad (2.9.6)$$

con $H = 0.2K$.

Date le condizioni iniziali $i(0) = 0$ abbiamo dalla (2.9.6) $H = -0.02$ ossia

$$i(t) = 0.02(1 - e^{-100t})u(t)A \quad (2.9.7)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.9.3

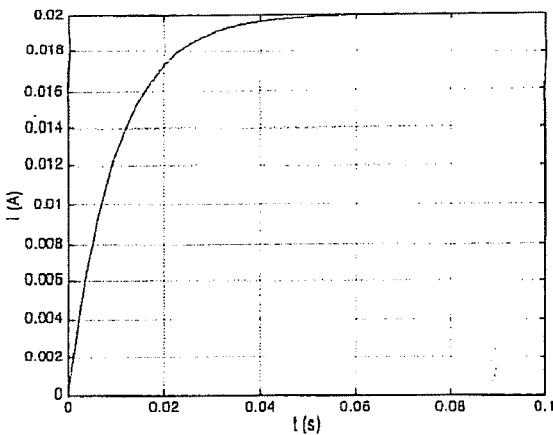


Figura 2.9.3: Andamento temporale della corrente

Essendo di conseguenza $K = -0.1$ abbiamo

$$v(t) = 0.1(1 - e^{-100t})u(t)V \quad (2.9.8)$$

L'energia fornita dal generatore controllato nel tempo richiesto viene calcolata attraverso l'integrale della potenza da esso fornita, pertanto dobbiamo prima calcolare la tensione ai suoi capi, ossia

$$v_x(t) = L \frac{di(t)}{dt} = 0.2e^{-100t} u(t) V \quad (2.9.9)$$

da cui

$$W = \int_0^{\infty} v_x(t) \alpha v(t) = 10 \mu J \quad (2.9.10)$$

mentre l'energia immagazzinata nel circuito coincide con quella immagazzinata nell'induttore ossia

$$W_L = \frac{1}{2} L i(t)^2 \Big|_{t=\infty} = 20 \mu J \quad (2.9.11)$$

- 2.10 Nel circuito di figura il parametro α assume il valore che rende $v_c = 15V$ a regime stazionario raggiunto ($t = \infty$). Per tale valore di α determinare l'andamento della tensione $v_c(t)$ per $t > 0$ e l'energia W fornita dal generatore di tensione nell'intervallo $0 < t < 10ms$.

$$E(t) = 10u(t)V \quad R = 1k\Omega \quad C = 20\mu F$$

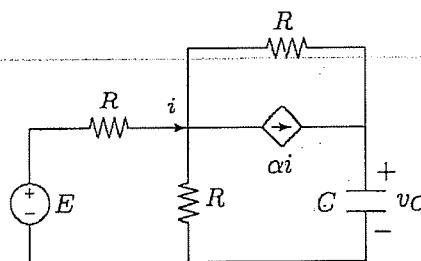


Figura 2.10.1: Circuito esercizio 2.10

2.10.1 Calcolo del parametro α

Il circuito è inizialmente scarico, pertanto le condizioni iniziali fisiche sono nulle ($v_c(0) = 0$). È necessario però studiare il circuito a regime stazionario raggiunto per determinare il parametro α . A regime stazionario il circuito si semplifica come in figura 2.10.2 dal momento che il condensatore si comporta come un circuito aperto.

Abbiamo pertanto, calcolando v_c attraverso il percorso che comprende le due sole resistenze:

$$v_c = R\alpha i + \frac{E}{2} \quad (2.10.1)$$

ma dal momento che $i = \frac{E}{2R}$ abbiamo che

$$v_c = R\alpha \frac{E}{2R} + \frac{E}{2} = (\alpha + 1) \frac{E}{2} = 5\alpha + 5 \quad (2.10.2)$$

Dovendo essere $v_c = 15V$ si ricava immediatamente che $\alpha = 2$.

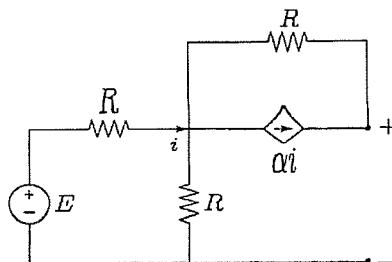


Figura 2.10.2: Circuito a regime continuo

2.10.2 Soluzione del circuito

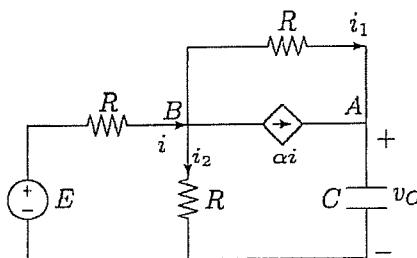


Figura 2.10.3: Circuito con indicazione dei nodi e delle correnti

È necessario scrivere un sistema di equazioni sfruttando i principi di Kirchhoff in modo poi da ottenere una unica equazione differenziale che ha come incognita la funzione $v_c(t)$. A tal scopo si scrivono nell'ordine due KVL rispettivamente alla maglia esterna ed alla maglia di sinistra, e due KCL ai nodi A e B.

$$0 = R i_1(t) + v_c(t) - E(t) + R i(t) \quad (2.10.3)$$

$$E(t) = R i(t) + R i_2(t) \quad (2.10.4)$$

$$C \frac{d v_c(t)}{dt} = i_1(t) + \alpha i(t) \quad (2.10.5)$$

$$i_2(t) = i(t) - \alpha i(t) - i_1(t) \quad (2.10.6)$$

Sostituendo la (2.10.6) nella (2.10.4) e considerando il valore di α si ricava $E(t) = -R i_1(t)$ che sostituita in (2.10.3) e (2.10.5) dà origine a due equazioni

nelle incognite $i(t)$ e $v_c(t)$, che combinate consentono di trovare l'equazione differenziale del circuito nell'incognita desiderata.

$$C \frac{d v_c(t)}{dt} + 2 \frac{v_c(t)}{R} = 3 \frac{E}{R} \quad (2.10.7)$$

L'equazione algebrica associata ha come soluzione $\lambda = -\frac{2}{RC} = -100$, pertanto le soluzioni dell'equazione omogenea associata e la soluzione particolare sono rispettivamente $v_c(t) = Ae^{-100t} u(t)$ e $v_c = 15$ (come, fra l'altro, imposto dal problema). Per cui otteniamo

$$v_c(t) = (15 + Ae^{-100t}) u(t) V \quad (2.10.8)$$

e considerando la condizione iniziale nulla abbiamo

$$v_c(t) = 15(1 - e^{-100t}) u(t) V \quad (2.10.9)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.10.4.

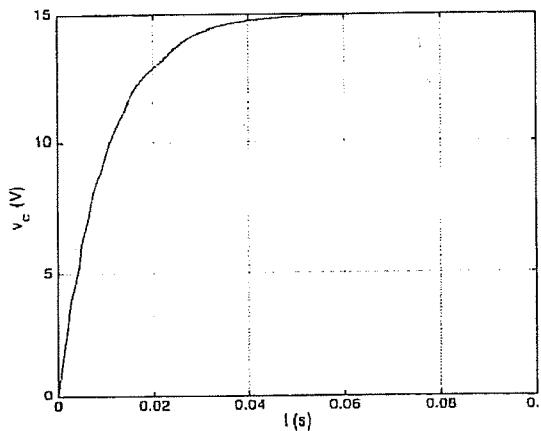


Figura 2.10.4: Andamento della tensione

2.10.3 Calcolo dell'energia

Per il calcolo dell'energia richiesta è necessario calcolare la corrente $i(t)$. Considerando che $E(t) = -Ri_1(t)$ (come trovato in precedenza) e sostituendo in (2.10.3) otteniamo

$$i(t) = 2 \frac{E(t)}{R} - \frac{v_C(t)}{R} \quad (2.10.10)$$

da cui possiamo trovare la potenza istantanea

$$p(t) = E(t)i(t) = E(t) \left(2 \frac{E(t)}{R} - \frac{v_C(t)}{R} \right) = \left[2 \frac{E^2}{R} + \frac{15E}{R} (e^{-100t} - 1) \right] u(t) \quad (2.10.11)$$

Integrando la potenza istantanea otteniamo

$$W(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = \left| \frac{2}{R} E^2 \tau + 15 \frac{E}{R} \left(-\frac{1}{100} e^{-100\tau} - \tau \right) \right|_0^t \quad (2.10.12)$$

che valutata fra 0 e $T = 10ms$ fornisce il valore di $W = 1.45mJ$.

2.11 Il circuito in figura è a regime stazionario quando il tasto si apre all'istante $t = 0$.

Determinare l'andamento della corrente $i(t)$ e l'energia immagazzinata nei campi elettromagnetici del circuito per $t = \infty$.

$$J = 5A \quad R = 100\Omega \quad C = 10\mu F \quad L = 100mH \quad \alpha = 50\Omega$$

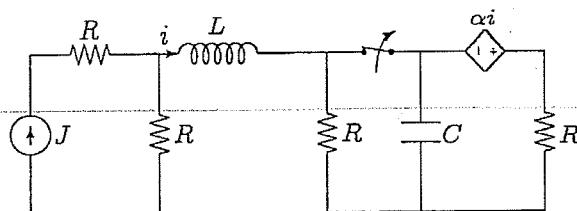


Figura 2.11.1: Circuito esercizio 2.11

Da una analisi qualitativa del circuito si può notare come una volta raggiunto il regime il generatore di corrente impone una corrente pari a $J/2$ nell'induttore.

2.11.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Per $t < 0$ il circuito lavora a regime continuo con il tasto chiuso. Dopo l'apertura del tasto otteniamo due circuiti separati, che daranno origine a due transitori del primo ordine. Ci interessa calcolare solamente il transitorio del sottocircuito di sinistra per determinare la $i(t)$, mentre il calcolo delle energie immagazzinate per $t = \infty$ lo si può fare solo valutando il regime continuo dopo la perturbazione.

In figura 2.11.2 è riportato il circuito per $t < 0$ con l'indicazione delle correnti di anello, metodo che ci consente di trovare direttamente il valore dell'unica grandezza iniziale che ci interessa ossia $I_L(0^+)$.

Il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{aligned} 0 &= 2Ri - RJ - RI_x & (2.11.1) \\ \alpha i &= 2RI_x - Ri \end{aligned}$$

da cui si ricava dalla seconda equazione di (2.11.1)

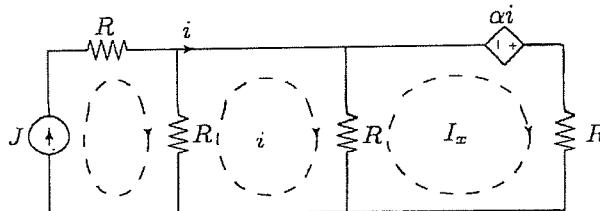


Figura 2.11.2: Circuito per $t < 0$

$$i = \frac{2R}{\alpha + R} I_x \quad (2.11.2)$$

che sostituita nella prima di (2.11.1) fornisce

$$I_x = \frac{RJ}{\frac{3R^2 - \alpha R}{\alpha + R}} = 3A \quad (2.11.3)$$

da cui, sostituendo il valore in (2.11.2), otteniamo che $i = I_L(0^-) = I_L(0^+) = 4A$. Dato che non dobbiamo calcolare il transitorio della parte destra del circuito dopo l'apertura del tasto le condizioni iniziali sul condensatore non sono di nostro interesse.

2.11.2 Soluzione del circuito

Il circuito da analizzare dopo l'apertura del tasto è riportato in figura 2.11.3. Per semplificare i calcoli, può essere utile rappresentare la parte sinistra del circuito attraverso un equivalente di Thevenin la cui determinazione è immediata dal momento che si tratta di un unico anello costituito da due resistori uguali ed un generatore di corrente. Il nuovo circuito è riportato in figura 2.11.4.

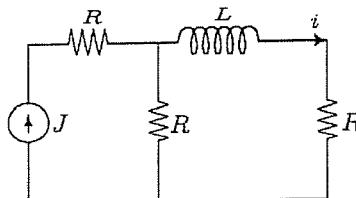


Figura 2.11.3: Circuito per $t > 0$

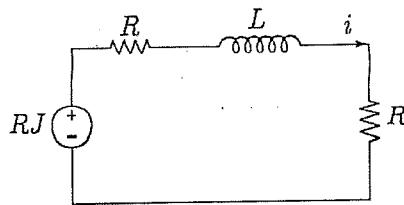


Figura 2.11.4: Circuito per $t > 0$ con equivalente di Thevenin

Si tratta di un circuito RL del primo ordine la cui equazione differenziale nell'incognita $i(t)$ è la seguente:

$$RJ = 2RI(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.11.4)$$

L'equazione omogenea associata di primo grado ha come soluzione

$$\lambda = -2 \frac{R}{L} = -2000 \quad (2.11.5)$$

mentre la soluzione particolare dell'equazione differenziale è $i_p(t) = \frac{J}{2}$.

L'andamento di $i(t)$ è pertanto

$$i(t) = \left(Ae^{-2000t} + \frac{J}{2} \right) u(t) \quad (2.11.6)$$

Valutando l'equazione (2.11.6) in $t = 0$ ed imponendo il valore pari a $I_L(0^+)$ otteniamo $A = 1.5$, pertanto

$$i(t) = \left(1.5e^{-2000t} + \frac{J}{2} \right) u(t) \quad (2.11.7)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.11.5.

2.11.3 Calcolo dell'energia

Per $t = \infty$ i due circuiti separati sono a regime continuo; l'induttore è attraversato da una corrente $I_L = \frac{J}{2}$ mentre il condensatore è caratterizzato da una tensione $V_C = \alpha I_L = \alpha \frac{J}{2}$. Pertanto l'energia si calcola semplicemente come

$$W = \frac{1}{2} L I_L^2 + \frac{1}{2} C V_C^2 = 0.39 J \quad (2.11.8)$$

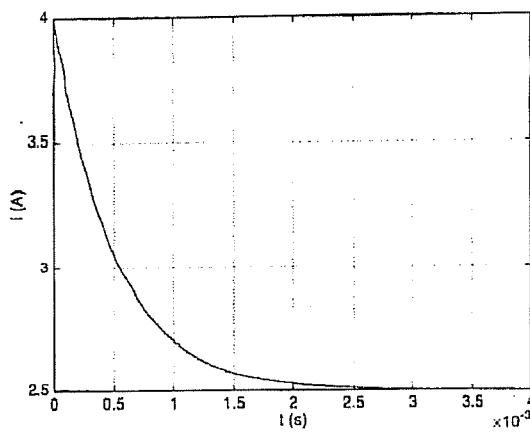


Figura 2.11.5: Andamento temporale della corrente

2.12 Il circuito in figura è operante a regime per $t < 0$. A partire dall'istante $t = 0$ in cui si chiude l'interruttore determinare l'andamento della corrente nei due induttori e della tensione sui due condensatori (si assuma il condensatore C_1 inizialmente scarico).

$$E = 100V \quad R = 100\Omega \quad C_1 = 100\mu F \quad C_2 = 15\mu F$$

$$L_1 = 0.1H \quad L_2 = 0.2H \quad \alpha = -2$$

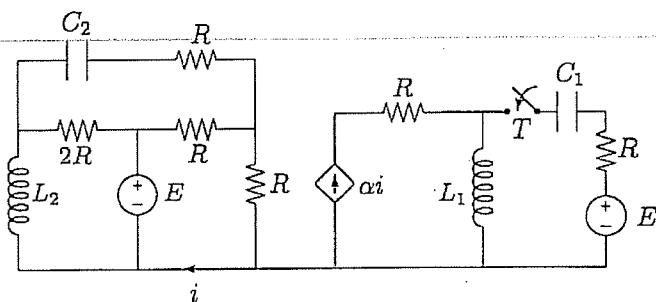


Figura 2.12.1: Circuito esercizio 2.12

Una analisi qualitativa del circuito porta alle seguenti conclusioni: la parte sinistra è alimentata in continua e non è caratterizzata da alcuna perturbazione, di conseguenza la corrente pilota i è costante, ed a regime il generatore controllato αi sarà quello che impone la corrente sull'induttore. La tensione sul condensatore a regime assumerà il valore imposto dal generatore di tensione.

2.12.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche e delle grandezze su C_2 ed L_2

I due circuiti sono uniti solo dal collegamento in basso che non crea alcun percorso chiuso, pertanto non è attraversato da alcuna corrente, ma si limita a fornire un riferimento comune per il potenziale che è ininfluente ai fini delle grandezze richieste. Il sottocircuito a sinistra è a regime continuo, pertanto il condensatore C_2 si comporta come un circuito aperto e la corrente i è immediatamente calcolabile come $i = \frac{E}{2R} = 0.5A$.

Pertanto il sottocircuito di destra è sottoposto alla corrente imposta dal generatore pilotato $\alpha i = -1A$ che è la corrente che attraversa l'induttore L_1 , ossia $i_{L_1}(0^-) = -1A$, mentre $v_{C_1}(0^-) = 0$ come dai dati del problema. È anche possibile, dato che il sottocircuito di sinistra non è sede di alcun transitorio, calcolare direttamente le grandezze richieste su C_2 ed L_2 :

$$i_{L_2} = \frac{E}{2R} = 0.5A$$

$$v_{C_2} = -2R \frac{E}{2R} + R \frac{E}{2R} = -\frac{E}{2} = -50V$$
(2.12.1)

con la polarità positiva sul terminale di sinistra.

2.12.2 Soluzione del circuito

Il sottocircuito di destra dopo la chiusura del tasto è riportato in figura 2.12.2 con indicati i versi delle correnti scelti per la scrittura delle equazioni. Considerando che la corrente αi è costante, è possibile scrivere l'equazione

$$E = Ri_x(t) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_x(\tau) d\tau + v_{C_1}(0^+) + L_1 \frac{di_x(t)}{dt}$$
(2.12.2)

che derivata nel tempo fornisce la classica equazione algebrica dell'omogenea associata

$$\lambda^2 + \frac{R}{L_1} \lambda + \frac{1}{LC_1} = 0$$
(2.12.3)

che risolta fornisce i valori di λ

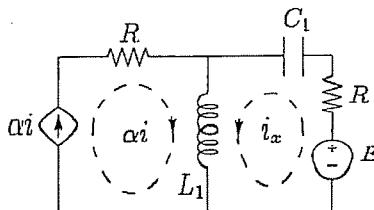


Figura 2.12.2: Circuito dopo la chiusura del tasto

$$\lambda_1 = -887.30$$

$$\lambda_2 = -112.70$$
(2.12.4)

L'andamento temporale della $i(t)$ è pertanto dato dalla somma della corrente $i_x(t)$ più il valore del generatore di corrente αi ossia

$$i(t) = (Ae^{-887.3t} + Be^{-112.7t} - 1) u(t) A \quad (2.12.5)$$

2.12.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Dalle precedenti considerazioni abbiamo che $I_{L_1}(0^-) = I_{L_1}(0^+) = -1A$, dobbiamo ora calcolare il valore della derivata della corrente. Analizzando il circuito di figura 2.12.3 all'istante $t = 0^+$ osserviamo che nell'induttore scorre la corrente suddetta, che $i_E(0^+) = 0$ ed il condensatore è inizialmente scarico, pertanto scrivendo una KVL all'anello di destra abbiamo

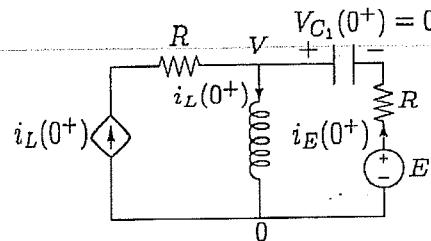


Figura 2.12.3: Circuito all'istante $t = 0^+$

$$\begin{aligned} V &= E = L_1 \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} \\ \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} &= \frac{E}{L_1} = 1000 \frac{A}{s} \end{aligned} \quad (2.12.6)$$

Derivando l'equazione (2.12.5), valutandola per $t = 0$ ed imponendo i valori trovati si ottiene il seguente sistema

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1000 &= -887.30A - 112.70B \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

da cui si ricava

$$i(t) = (-1.29e^{-887.3t} + 1.29e^{-112.7t} - 1) u(t) A \quad (2.12.8)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.12.4.

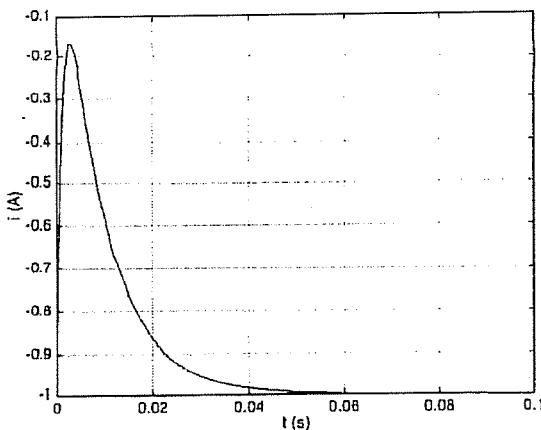


Figura 2.12.4: Andamento temporale della corrente

Per il calcolo della tensione sul condensatore si utilizza la relazione tensione corrente ai capi di un generico condensatore, ossia

$$v_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_x(\tau) d\tau = (14.55 e^{-807.30t} - 114.55 e^{-112.70t} + 100) u(t) V \quad (2.12.9)$$

dove si è tenuto conto che la tensione sul condensatore all'istante $t = 0$ è nulla. L'andamento della $v_{C_1}(t)$ è riportato in figura 2.12.5.

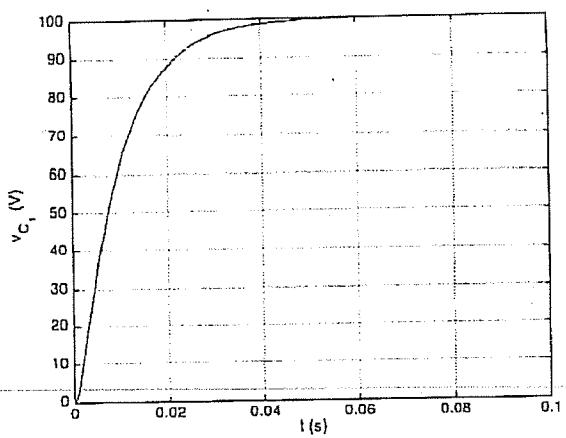


Figura 2.12.5: Andamento temporale della tensione

2.13 Nel circuito in figura si determini l'andamento della tensione sul condensatore a partire dall'istante $t = T/4$ (dove T è il periodo del generatore E_1) in cui l'interruttore commuta dalla posizione 1 alla posizione 2. Il circuito è a regime prima della commutazione.

$$E_1(t) = 100 \sin(100t) V \quad E_2(t) = 50 V \quad L = 0.1 H \quad C = 1 mF \quad R = 10 \Omega$$

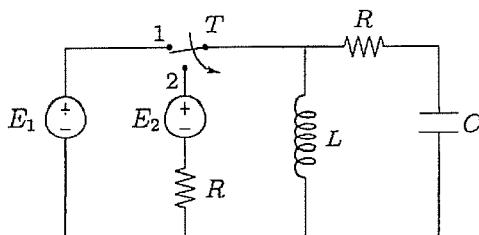


Figura 2.13.1: Circuito esercizio 2.13

Una analisi qualitativa del circuito a regime dopo la perturbazione consente di valutare che la tensione sul condensatore tenderà ad un valore nullo, dopo un transitorio del secondo ordine, dal momento che si trova in parallelo ad un induttore.

2.13.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Il circuito prima della commutazione del tasto si trova a regime sinusoidale in quanto alimentato da un generatore di tensione sinusoidale. Le grandezze di interesse per la soluzione del transitorio sono le condizioni iniziali fisiche indicate con i loro riferimenti nel circuito rappresentato in Figura 2.13.2. Quando il circuito funziona a regime (tasto T in posizione 1) la tensione erogata dal generatore E_1 è rappresentata dal fasore $\dot{E}_1 = 100$. Conseguentemente la corrente sull'induttore, in parallelo con il generatore di tensione, vale

$$I_L = \frac{\dot{E}_1}{j\omega L} = -j10A$$

$$I_L(t) = 10 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$
(2.13.1)

da cui nell'istante di commutazione

$$I_L\left(\frac{T}{4}\right) = 0A$$
(2.13.2)

La tensione sul condensatore la si può calcolare utilizzando la regola del paritore di tensione, ossia

$$\dot{V}_C = \frac{\dot{E}_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \frac{1}{j\omega C} = \frac{\dot{E}_1}{1 + j\omega RC} = (50 - j50)V$$

$$V_C(t) = \frac{100}{\sqrt{2}} \sin\left(100t - \frac{\pi}{4}\right)$$
(2.13.3)

da cui nell'istante di commutazione

$$V_C\left(\frac{T}{4}\right) = 50V$$
(2.13.4)

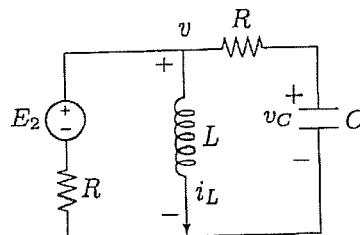


Figura 2.13.2: Circuito dopo la commutazione

2.13.2 Soluzione del circuito

Facendo riferimento alla figura 2.13.2 si possono scrivere le seguenti equazioni di equilibrio al circuito

$$v(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.13.5)$$

$$v(t) = v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2.13.6)$$

$$E_2(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + R \left(i_L(t) + C \frac{dv_C(t)}{dt} \right) \quad (2.13.7)$$

Derivando l'equazione (2.13.7) e sostituendo al posto dei termini funzioni di $i_L(t)$ le espressioni ricavate combinando (2.13.5) e (2.13.6) si ottiene l'equazione differenziale relativa al circuito

$$0 = 2RC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R^2C}{L} + 1 \right) \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{R}{L} v_C(t) \quad (2.13.8)$$

La corrispondente equazione algebrica di secondo grado ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -50 \pm j50 \quad (2.13.9)$$

pertanto l'andamento temporale della tensione sul condensatore è

$$v_C(t) = e^{-50(t-\frac{T}{4})} \left[A \cos \left(50 \left(t - \frac{T}{4} \right) \right) + B \sin \left(50 \left(t - \frac{T}{4} \right) \right) \right] u \left(t - \frac{T}{4} \right) V \quad (2.13.10)$$

2.13.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Il valore di $v_C(\frac{T}{4})$ è stato precedentemente calcolato in (2.13.4), mentre dobbiamo ancora calcolare il valore di $\frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=\frac{T}{4}}$. Il circuito di figura 2.13.3 è il circuito all'istante iniziale $t = \frac{T}{4}$, in cui il ramo contenente L non è inserito considerando che $i_L(\frac{T}{4}) = 0$. Il valore di $v_C(\frac{T}{4})$ coincide con il valore della tensione imposta dal generatore E_2 , pertanto la corrente nell'unica maglia del circuito coincidente con $i_C(t = \frac{T}{4})$ è nulla. Abbiamo di conseguenza

$$\frac{dv_C(t)}{dt} \Big|_{t=\frac{T}{4}} = 0 \quad (2.13.11)$$

Valutando l'equazione (2.13.10) all'istante $t = \frac{T}{4}$ ed eguagliandola al valore di 50 V otteniamo che $A = 50$. Derivando l'equazione (2.13.10) e valutando la sua derivata allo stesso istante considerando il valore riportato in (2.13.11) si ottiene $B = A = 50$.

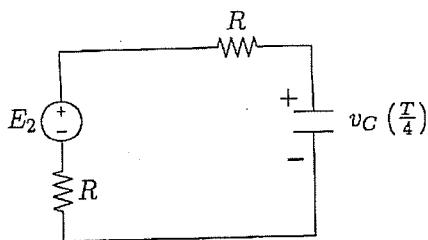


Figura 2.13.3: Circuito all'istante $t = \frac{T}{4}$

L'andamento temporale di $v_C(t)$ risulta pertanto

$$v_C(t) = e^{-50(t-\frac{T}{4})} \left[50\cos\left(50\left(t - \frac{T}{4}\right)\right) + 50\sin\left(50\left(t - \frac{T}{4}\right)\right) \right] u\left(t - \frac{T}{4}\right) \quad (2.13.12)$$

ed è mostrato in figura 2.13.4

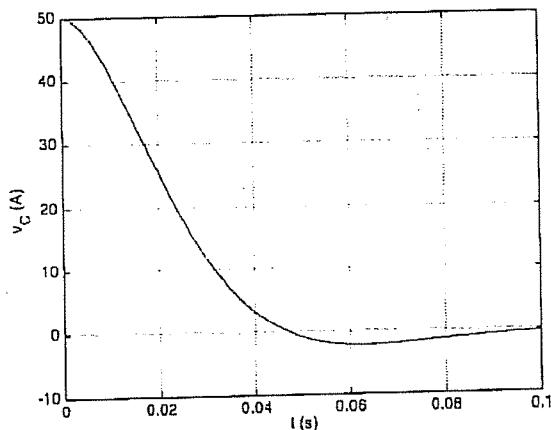


Figura 2.13.4: Andamento temporale della tensione

2.14 Il circuito in figura si trova a regime permanente per $t < 0$ con i tasti T_1 e T_2 chiusi e T_3 aperto. All'istante $t = 0$ i tasti T_1 e T_2 si aprono ed il tasto T_3 si chiude. Determinare l'andamento della corrente erogata dal generatore di tensione E per $t > 0$.

$$E(t) = 12V(dc) \quad V(t) = 50V(dc) \quad I(t) = 0.2 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) A$$

$$R = 4\Omega$$

$$R_1 = 0.5\Omega$$

$$R_2 = 0.1\Omega$$

$$C = 0.25F$$

$$L = 1H$$

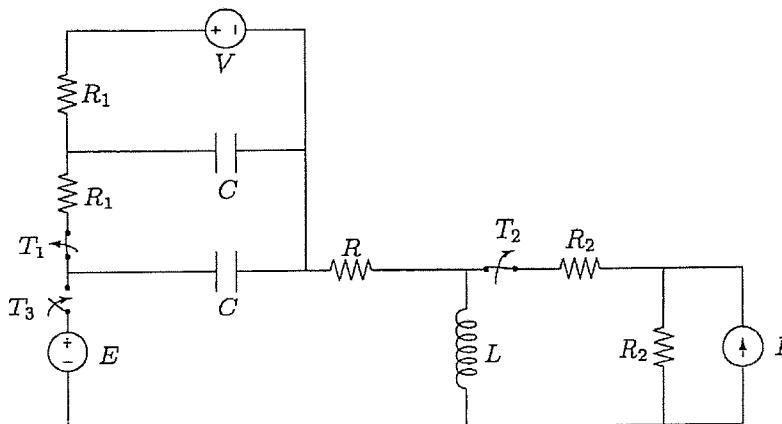


Figura 2.14.1: Circuito esercizio 2.14

Dopo la perturbazione (apertura e chiusura degli interruttori), il circuito è ridotto ad un circuito del secondo ordine RLC serie alimentato da un generatore di tensione, pertanto la corrente avrà un andamento smorzato tendendo al valore nullo a regime.

Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Le condizioni iniziali fisiche (tensione sui condensatori e correnti negli induttori) si calcolano studiando il circuito prima delle perturbazioni, ossia per

$t < 0$; il circuito risulta diviso in due sottocircuiti separati, riportati in Figura 2.14.2 dove le grandezze da calcolare (una tensione ed una corrente) sono riportate con i loro riferimenti.

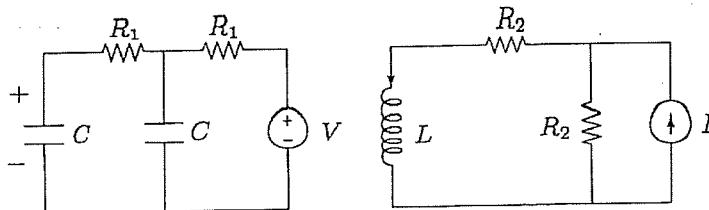


Figura 2.14.2: Circuito per $t < 0$

Per quanto riguarda la tensione sul condensatore C , è facile osservare che si tratta di un circuito a regime continuo in cui i condensatori si comportano come circuiti aperti, pertanto la tensione $v_C(0^-) = v_C(0^+) = V = 50V$.

Per quanto riguarda la corrente nell'induttore si può semplicemente applicare un partitore di corrente, indicando con $\dot{I} = 0.2e^{j\frac{\pi}{4}}$ il fasore della corrente:

$$\dot{I}_L = \dot{I} \frac{R_2}{2R_2 + j\omega L} = (1.41 - j1.41) \cdot 10^{-5} A \quad (2.14.1)$$

da cui otteniamo l'andamento temporale $i_L(t) = 2 \cdot 10^{-5} \sin(1000t - 45^\circ)$ che valutato per $t = 0$ fornisce $i_L(0^-) = i_L(0^+) = -1.41 \cdot 10^{-5}$.

Soluzione del circuito

Una volta avvenuta la commutazione degli interruttori rimane attivo un circuito del secondo ordine alimentato dal generatore E continuo. L'equazione algebrica associata è la classica equazione di un circuito del secondo ordine

$$0 = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} \quad (2.14.2)$$

che risolta fornisce i valori di λ

$$\lambda_{1,2} = -2 \quad (2.14.3)$$

ossia la corrente erogata dal generatore ha la forma

$$i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t} u(t) A \quad (2.14.4)$$

con i parametri A_1 ed A_2 da determinarsi attraverso lo studio delle condizioni iniziali matematiche.

Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Il circuito in Figura 2.14.3 per $t = 0^+$ consente di scrivere la seguente equazione:

$$E = v_C(0^+) + R i(0^+) + L \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} \quad (2.14.5)$$

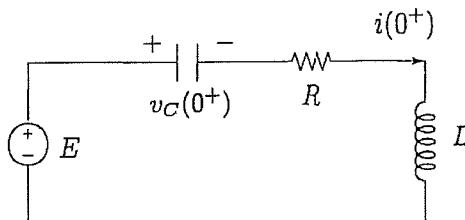


Figura 2.14.3: Circuito per $t = 0^+$

da cui

$$\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{E - v_C(0^+) - R i(0^+)}{L} = -38 \frac{A}{s} \quad (2.14.6)$$

È possibile ora determinare i due parametri incogniti. Dall'equazione (2.14.4) valutata per $t = 0$ si ottiene direttamente $A_1 = i_L(0^+) = -1.41 \cdot 10^{-5}$. Derivando invece l'equazione (2.14.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= A_2 e^{-2t} - 2(A_1 + A_2 t)e^{-2t} \\ \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} &= A_2 - 2A_1 \end{aligned} \quad (2.14.7)$$

da cui $A_2 = -38$.

L'andamento risultante della corrente è riportato in figura 2.14.4.

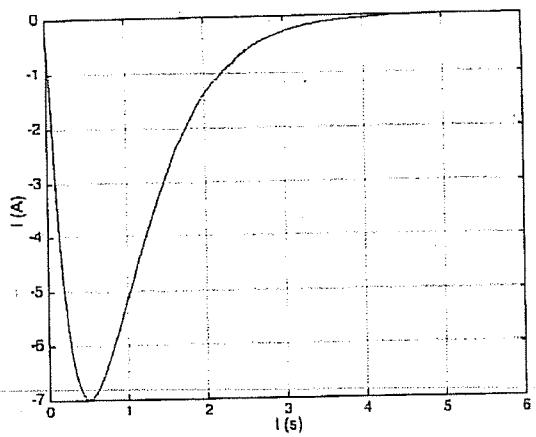


Figura 2.14.4: Andamento temporale della corrente

2.15 Nel circuito in figura a regime stazionario per $t < 0$, l'interruttore si apre all'istante $t = 0$. Determinare l'andamento della corrente nel ramo serie $L_1 - R$ per $t > 0$.

$$E = 24V \quad R = 6\Omega \quad R_1 = 2\Omega \quad L_1 = 100mH \quad L_2 = 200mH$$

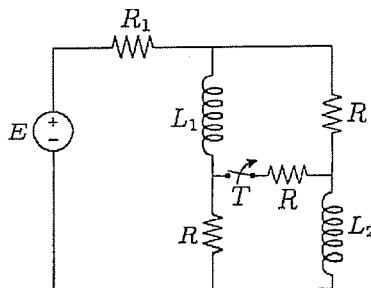


Figura 2.15.1: Circuito esercizio 2.15

Analizzando qualitativamente il circuito si nota come al termine del transitorio dovuto alla apertura del tasto la corrente erogata dal generatore (e limitata dalle tre resistenze) si ripartirà in maniera uguale fra i due rami in parallelo.

2.15.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Le condizioni iniziali fisiche si calcolano studiando il circuito prima della apertura del tasto a regime continuo, mostrato in figura 2.15.2.

È semplice verificare che i tre resistori di resistenza R sono in parallelo, pertanto la corrente i erogata dal generatore è pari a

$$i = \frac{R}{R_1 + \frac{R}{3}} = 6A \quad (2.15.1)$$

e che, conseguentemente,

$$i_1(0^-) = i_1(0^+) = i_2(0^-) = i_2(0^+) = 4A \quad (2.15.2)$$

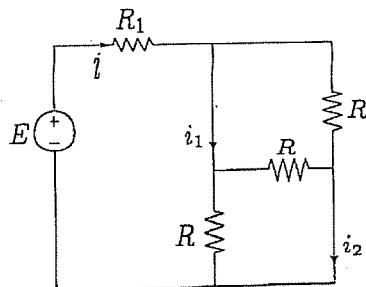


Figura 2.15.2: Circuito per $t < 0$ a regime

2.15.2 Soluzione del circuito

Dopo l'apertura del tasto il circuito assume la topologia rappresentata in figura 2.15.3, dove sono indicati anche i versi ed i nomi delle correnti scelte per la soluzione.

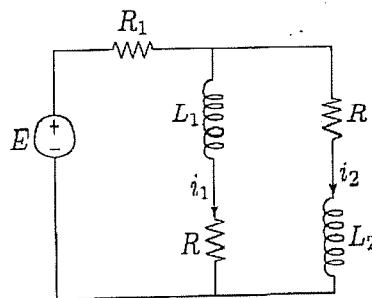


Figura 2.15.3: Circuito per $t > 0$

Scrivendo la KVL ai due anelli si ottiene

$$E = R_1(i_1(t) + i_2(t)) + R i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (2.15.3)$$

$$R i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = R i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Ricavando $i_2(t)$ dalla prima equazione delle (2.15.3) e sostituendolo nella seconda, dopo aver aggregato i termini dello stesso ordine si ottiene l'equazione differenziale non omogenea del secondo ordine nell'incognita desiderata

$$\frac{L_1 L_2}{R_1} \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \left(L_1 + L_2 + \frac{R L_1}{R_1} + \frac{R L_2}{R_1} \right) \frac{di_1(t)}{dt} + \left(2R + \frac{R^2}{R_1} \right) i_1 = \frac{RE}{R_1} \quad (2.15.4)$$

Risolvendo l'equazione algebrica di secondo grado associata alla equazione differenziale si ottengono i due valori

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -84.49 \\ \lambda_2 &= -35.50\end{aligned}\quad (2.15.5)$$

mentre la soluzione particolare di (2.15.4) è $i_p(t) = \frac{RE}{R_1(2R + \frac{R^2}{R_1})} = 2.4A$; pertanto l'andamento temporale della corrente richiesta $i_1(t)$ risulta

$$i_1(t) = (2.4 + Ae^{-84.49t} + Be^{-35.5t}) u(t) \quad (2.15.6)$$

con le costanti A e B da determinarsi attraverso la conoscenza delle condizioni iniziali matematiche.

2.15.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Il valore di $i_1(0^+)$ è già stato calcolato in precedenza essendo una condizione iniziale fisica; è necessario ora procedere al calcolo del valore di $\frac{di_1(t)}{dt} \Big|_{t=0^+}$. A tal scopo dobbiamo considerare ancora il circuito di figura 2.15.3 e scrivere la KVL all'anello di sinistra all'istante $t = 0^+$

$$R i_1(0^+) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} - E + R_1 i_1(0^+) = 0 \quad (2.15.7)$$

da cui

$$\frac{di_1(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{E - R_1 i_1(0^+) - R i_1(0^+)}{L_1} = -120 \frac{A}{s} \quad (2.15.8)$$

Valutando ora l'equazione (2.15.6) e la sua derivata all'istante $t = 0$ si ottiene un sistema di due equazioni nelle due incognite A e B , che risolto fornisce i loro valori. Pertanto l'andamento della corrente richiesta è

$$i_1(t) = (2.4 + 1.29e^{-84.49t} + 0.31e^{-35.5t}) u(t) \quad (2.15.9)$$

il cui grafico è riportato in figura 2.15.4.

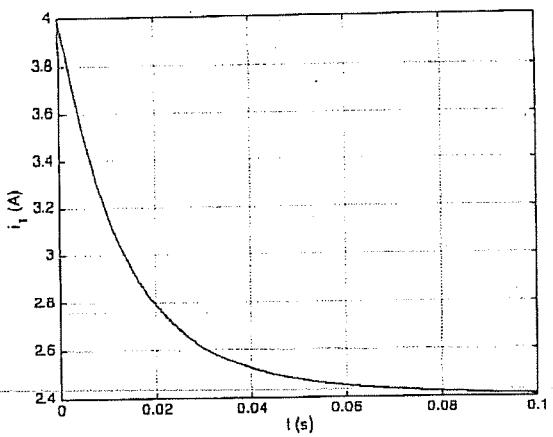


Figura 2.15.4: Andamento della corrente $i_1(t)$

2.16 Nel circuito in figura inizialmente scarico i tasti T_1 , T_2 , e T_3 sono tutti aperti. All'istante $t = 0$ si chiude il tasto T_1 . All'istante $t = 0.2\text{s}$ si apre il tasto T_1 e contemporaneamente si chiude il tasto T_2 . All'istante $t = 1\text{s}$ si chiude il tasto T_3 . Determinare l'andamento della tensione sul condensatore per $0 < t < \infty$ e disegnarne l'andamento.

$$E = 12V \quad R_1 = 1\Omega \quad R_2 = 0.5\Omega \quad C = 0.1F \quad L = 0.1H$$

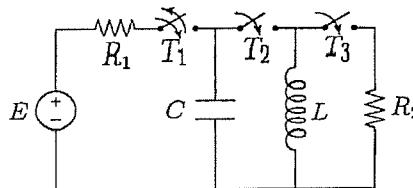


Figura 2.16.1: Circuito esercizio 2.16

Il presente circuito è sottoposto a tre transitori: il primo (con la chiusura di T_1) è la carica di un condensatore. Dopodichè si apre T_1 e si chiude T_2 dando origine ad un circuito LC , quindi oscillatorio non smorzato, la cui condizione iniziale è la tensione sul condensatore caricato durante il primo transitorio. Alla chiusura di T_3 si ha la scarica di un circuito parallelo del secondo ordine.

2.16.1 Risoluzione del circuito per $0 < t < 0.2$

Il circuito è inizialmente scarico e le condizioni iniziali fisiche ($t = 0^+$) sono tutte nulle. All'istante $t = 0$ si chiude il primo interruttore (T_1), si viene quindi a creare un circuito RC che carica il condensatore con costante di tempo $\tau = R_1 C = 0.1\text{s}$, di conseguenza l'andamento della tensione sul condensatore (con la polarità positiva sul terminale più in alto), risulta per $0 < t < 0.2$

$$v(t) = 12(1 - e^{-10t})u(t)V \quad (2.16.1)$$

2.16.2 Risoluzione del circuito per $0.2 < t < 1$

In questo intervallo di tempo in cui solo T_2 è chiuso, abbiamo un anello costituito da un induttore ed un condensatore, la cui equazione differenziale è ottenuta considerando il circuito in figura 2.16.2

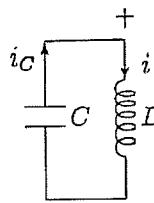


Figura 2.16.2: Circuito relativo al secondo transitorio

$$v(t) = LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \quad (2.16.2)$$

che risulta, come noto, dà origine ad una oscillazione non smorzata con pulsazione pari alla risonanza della coppia $L - C$ ($\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10 \text{ rad/s}$), ossia

$$v(t) = [A \cos(10(t - 0.2)) + B \sin(10(t - 0.2))] u(t - 0.2) V \quad (2.16.3)$$

con i parametri A e B da determinarsi in base alle condizioni iniziali per $t = 0.2^+$. Per $t = 0.2^-$ sappiamo che la tensione sul condensatore è data dall'equazione (2.16.1), ossia $v_{0.2}^+ = 10.38V$, mentre la corrente nell'induttore è chiaramente nulla. Da quest'ultima considerazione, sapendo che

$$i(t) = -C \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad (2.16.4)$$

abbiamo che $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0.2} = 0$, da cui, sostituendo i valori in (2.16.3) otteniamo che

$$v(t) = 10.38 \cos[10(t - 0.2)] u(t - 0.2) \quad (2.16.5)$$

Per il seguente cambiamento topologico (chiusura del tasto T_3) è necessario calcolare le condizioni iniziali fisiche, ossia la tensione sul condensatore e la corrente sull'induttore con i riferimenti sempre indicati in figura 2.16.2.

Abbiamo

$$\begin{aligned} v(t=1) &= -1.51V \\ i(t=1) &= -10.27A \end{aligned} \quad (2.16.6)$$

con la corrente sull'induttore determinata attraverso la relazione $i = -C \frac{d\nu(t)}{dt}$, quindi derivando l'equazione (2.16.5) e valutandola all'istante $t = 1$.

2.16.3 Risoluzione del circuito per $t > 1$

Per $t > 1$ si chiude il tasto T_3 , dando origine ad un circuito parallelo $R - L - C$ in evoluzione libera, la cui equazione differenziale è

$$\frac{d^2\nu(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\nu(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \nu(t) = 0 \quad (2.16.7)$$

L'equazione algebrica di secondo grado associata ha due soluzioni coincidenti pari a $\lambda_{1,2} = -10$, pertanto l'evoluzione libera del sistema è

$$\nu(t) = [H + K(t-1)]e^{-10(t-1)}u(t-1)V \quad (2.16.8)$$

con le costanti H e K da determinarsi in base alle condizioni iniziali matematiche.

Guardando il parallelo $R - L - C$ all'istante $t = 1^+$, rappresentato in figura 2.16.3, vediamo che

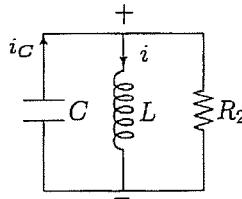


Figura 2.16.3: Circuito all'istante $t = 1^+$

$$i_C(t=1^+) = i(t=1^+) + \frac{\nu(t=1^+)}{R} = -13.29A \quad (2.16.9)$$

da cui

$$\left. \frac{d\nu(t)}{dt} \right|_{(t=1^+)} = \frac{i_c(t=1^+)}{C} = -132.85 \frac{V}{s} \quad (2.16.10)$$

ottenendo quindi $H = -1.51$ e $K = -147.95$ dando origine ad un andamento temporale riportato in figura 2.16.4.

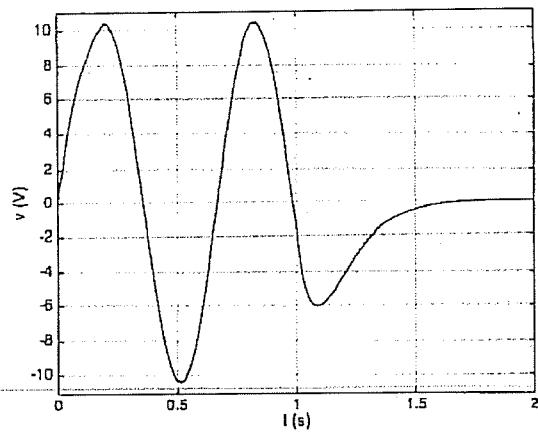


Figura 2.16.4: Andamento temporale della tensione sul condensatore

2.17 Il circuito in figura è a regime per $t < 0$ con i tasti chiusi. All'istante $t = 0$ i due tasti si aprono. Determinare le seguenti grandezze:
la corrente erogata dal generatore E_1 per $t > 0$
e l'energia dissipata nei tre resistori del circuito dall'apertura dei tasti fino a $t \rightarrow \infty$.

$$E_1 = 12V \quad E_2 = 10V \quad R = 1\Omega \quad C = 100mF \quad L = 10mH \quad \alpha = 1$$

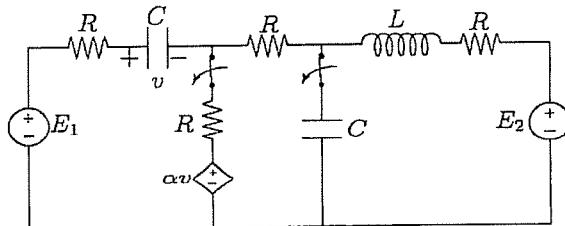


Figura 2.17.1: Circuito esercizio 2.17

Dopo l'apertura dei tasti il circuito costituito dalla maglia più esterna non è altro che un circuito del secondo ordine, la cui corrente tenderà a zero.

2.17.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

il circuito per $t < 0$, prima dell'apertura dei tasti a regime continuo, è rappresentato in figura 2.17.2 in cui è anche indicato il verso scelto per l'unica corrente circolante nel circuito ed i riferimenti per la tensione sul condensatore di interesse.

Possiamo scrivere

$$I_x = \frac{\alpha v - E_2}{3R} \quad (2.17.1)$$

$$v = E_1 - \alpha v + RI_x$$

da cui si ricava

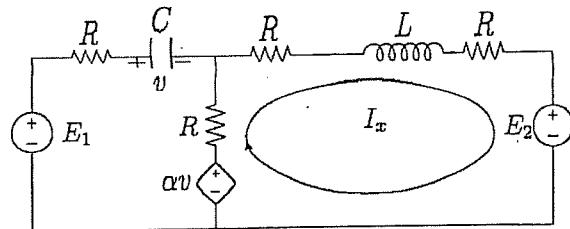


Figura 2.17.2: Circuito per \$t < 0\$

$$I_x = i_L(0^+) = \frac{-\frac{E_2}{3R} + \frac{E_1}{6R}}{1 - \frac{R}{6}} = -1.6A \quad (2.17.2)$$

$$v = v_C(0^+) = 5.2V$$

2.17.2 Soluzione del circuito

La figura 2.17.3 mostra il circuito dopo l'apertura dei tasti: si tratta di un circuito del secondo ordine alimentato dalla serie di due generatori di tensione, pertanto l'equazione differenziale relativa alla corrente è la seguente

$$E_1 - E_2 = 3Ri_E(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_E(\tau) d\tau + v_C(0^+) + L \frac{di_E(t)}{dt} \quad (2.17.3)$$

che derivata e riordinata fornisce

$$\frac{d^2 i_E(t)}{dt^2} + \frac{3R}{L} \frac{di_E(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_E(t) = 0 \quad (2.17.4)$$

la cui equazione algebrica associata ha come soluzioni \$\lambda_1 = -296.63\$ e \$\lambda_2 = -3.37\$.

L'andamento della \$i_E(t)\$ è pertanto

$$i_E(t) = (Ae^{-296.63t} + Be^{-3.37t}) u(t)A \quad (2.17.5)$$

con le costanti da determinarsi studiando il circuito all'istante \$t = 0^+\$.

2.17.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Analizzando il circuito riportato in figura 2.17.4 all'istante \$t = 0^+\$ e valutandolo all'inizio del transitorio abbiamo che

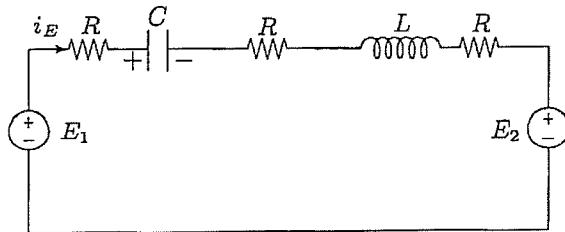


Figura 2.17.3: Circuito per $t > 0$

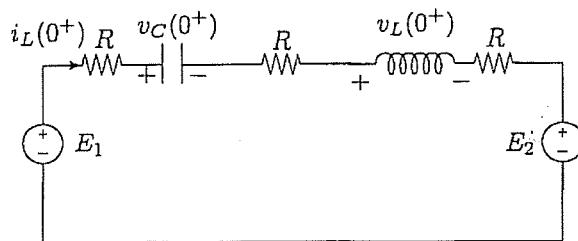


Figura 2.17.4: Circuito all'istante $t = 0^+$

$$v_L(0^+) = -v_C(0^+) - 3R i_L(0^+) + E_1 - E_2 = 1.6V \quad (2.17.6)$$

da cui

$$\left. \frac{di_E(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 160 \quad (2.17.7)$$

Valutando l'equazione (2.17.5) e la sua derivata all'istante $t = 0$ si determinano i valori delle due costanti A e B , pertanto l'andamento della corrente è il seguente

$$i_E(t) = (-0.53e^{-296.63t} + 1.07e^{-3.37t}) u(t) A \quad (2.17.8)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.17.4.

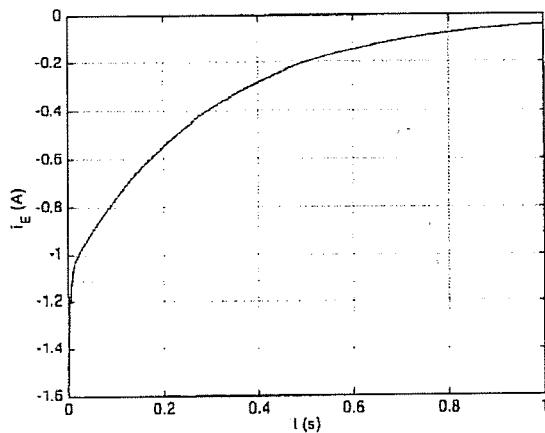


Figura 2.17.5: Andamento temporale di $i_E(t)$

Il calcolo dell'energia dissipata nei tre resistori si effettua integrando la potenza istantanea dissipata su di essi nell'intervallo $[0, \infty]$, partendo dall'espressione della corrente riportata in (2.17.5)

Abbiamo di conseguenza

$$W_R = \int_0^\infty 3R i_E(t)^2 dt = 3R \left(\frac{A^2}{2\lambda_1} + \frac{B^2}{2\lambda_2} + \frac{2AB}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) = 0.52J \quad (2.17.9)$$

2.18 Il circuito in figura è a regime per $t < 0$ con il tasto chiuso. All'istante $t = 0$ il tasto si apre: determinare l'andamento della corrente $i(t)$ per $t > 0$.

$$E_1 = 200V \quad E_2 = 100V \quad R = 2\Omega \quad C_1 = 1mF \quad C_2 = 2mF \quad L = 10mH \quad \alpha = 2$$

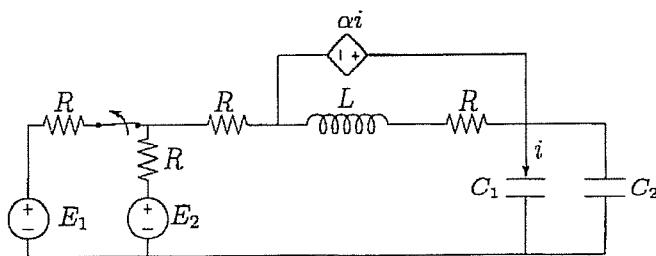


Figura 2.18.1: Circuito esercizio 2.18

Dopo l'apertura del tasto il circuito è costituito da una unica maglia composta da elementi R e C , in quanto la serie RL è in parallelo ad un generatore di tensione, pertanto evolve in maniera indipendente dal resto del circuito. Il risultato sarà quindi un transitorio del primo ordine di carica di un condensatore.

2.18.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Per $t < 0$ il circuito si trova a regime continuo, nei condensatori non passa corrente ed il generatore pilotato di tensione è di conseguenza inattivo (cortocircuitato). Il circuito pertanto si riduce a quello riportato in figura 2.18.2.

Le condizioni iniziali fisiche sono quindi

$$i_L(0^-) = 0A \tag{2.18.1}$$

$$\nu_C(0^-) = E_2 + \frac{E_1 - E_2}{2R}R = 150V \tag{2.18.2}$$

in cui con ν_C si intende la tensione ai capi di entrambi i condensatori in parallelo.

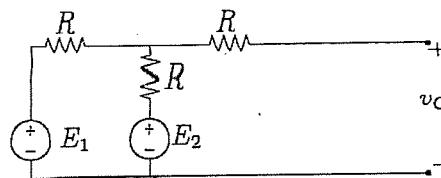


Figura 2.18.2: Circuito per $t < 0$

2.18.2 Soluzione del circuito

Per $t > 0$ il circuito si riduce a quello mostrato in figura 2.18.3 in cui con $C = C_1 + C_2$ si intende la capacità risultante in parallelo. Inoltre la resistenza e l'induttanza sono in parallelo ad un generatore di tensione, di conseguenza ininfluenti per l'equilibrio del circuito. È immediato stabilire il legame fra la corrente pilota i che scorre in C_1 e la corrente i_x incognita attraverso il partitore capacitivo

$$i = i_x \frac{C_1}{C_1 + C_2} = i_x \frac{C_1}{C} \quad (2.18.3)$$

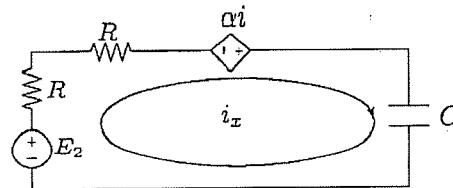


Figura 2.18.3: Circuito per $t > 0$

È possibile scrivere una equazione all'unico anello del circuito con incognita $i_x(t)$

$$E_2(t) + \alpha i(t) = 2R i_x(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_x(\tau) d\tau + v_C(0^+) \quad (2.18.4)$$

Sostituendo la (2.18.3) nella (2.18.4) e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\left(\frac{\alpha C_1}{C} - 2R \right) \frac{di_x(t)}{dt} - \frac{1}{C} i_x(t) = 0 \quad (2.18.5)$$

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale del primo ordine (2.18.5) ha come soluzione il valore $\lambda = -100$, pertanto la corrente assume un andamento

$$i_x(t) = Ae^{-100t} u(t)A \quad (2.18.6)$$

2.18.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Il circuito da studiare per la valutazione della condizione iniziale $i_x(0^+)$ è nuovamente quello riportato in figura 2.18.3 valutato all'istante $t = 0^+$. Abbiamo pertanto

$$E_2 - v_C(0^+) + \frac{\alpha i_x(0^+) C_1}{C} = 2R i_x(0^+) \quad (2.18.7)$$

da cui

$$i_x(0^+) = \frac{E_2 - v_C(0^+)}{2R - \alpha \frac{C_1}{C}} = -15A \quad (2.18.8)$$

e conseguentemente

$$i_x(t) = -15e^{-100t} u(t)A \quad i(t) = -5e^{-100t} u(t)A \quad (2.18.9)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.18.4.

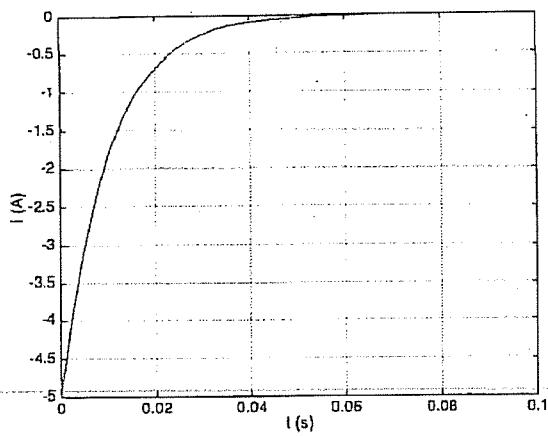


Figura 2.18.4: Andamento temporale della corrente

- 2.19 Il circuito in figura è a regime per $t < 0$ con il tasto T_1 chiuso ed il tasto T_2 in posizione a . All'istante $t = 0$ T_1 si apre e T_2 commuta dalla posizione a alla posizione b . Determinare l'andamento della corrente nell'induttore per $t > 0$ e l'energia dissipata sulla resistenza R nell'intervallo di tempo $[0, \infty]$.

$$i(t) = \sin(1000t) A$$

$$e(t) = 10 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) V$$

$$R = 10\Omega$$

$$C = 100\mu F$$

$$L = 5mH$$

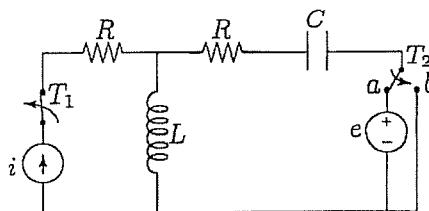


Figura 2.19.1: Circuito esercizio 2.19

Il regime permanente prima della variazione topologica è dato da due generatori sinusoidali e le condizioni iniziali fisiche andranno valutate conseguentemente. Dopo la perturbazione si viene a creare un circuito del secondo ordine in evoluzione libera.

2.19.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Per $t < 0$ il circuito si trova a regime sinusoidale, pertanto vanno valutate le condizioni iniziali fisiche (tensione sul condensatore e corrente nell'induttore) con il metodo fasoriale e poi valutare le espressioni temporali ottenute per $t = 0$. Definiamo pertanto $\bar{i} = 1A$ e $\bar{E} = 10e^{j\frac{\pi}{3}}$.

La figura 2.19.2 mostra il circuito prima della perturbazione a regime sinusoidale con indicate le correnti di anello incognite. Abbiamo pertanto

$$\bar{E} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) \bar{i}_1 + j\omega L \bar{i} \quad (2.19.1)$$

da cui si ricava che

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E} - j\omega L \dot{I}}{\left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right)} = (0.25 + j0.49) A \\ \dot{I}_L &= \dot{I}_1 + \dot{I} = (1.25 + j0.49) A \\ \dot{V}_C &= \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_1 = (4.93 - j2.53) V \end{aligned} \quad (2.19.2)$$

e le corrispondenti grandezze temporali sono

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 1.35 \sin(1000t + 21.46^\circ) A \\ v_C(t) &= 5.54 \sin(1000t - 27.22^\circ) V \end{aligned} \quad (2.19.3)$$

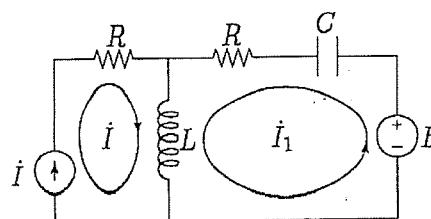


Figura 2.19.2: Circuito per $t < 0$

Le equazioni (2.19.3) valutate per $t = 0$ ci danno le condizioni iniziali fisiche

$$\begin{aligned} i_L(0^-) &= i_L(0^+) = 0.49 A \\ v_C(0^-) &= v_C(0^+) = -2.54 V \end{aligned} \quad (2.19.4)$$

2.19.2 Soluzione del circuito

La figura 2.19.3 mostra il circuito dopo l'apertura dei tasti: si tratta di un circuito del secondo ordine in evoluzione libera, pertanto l'equazione differenziale relativa alla corrente è la seguente

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t). \quad (2.19.5)$$

la cui equazione algebrica associata ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = -1000 \pm j1000$.

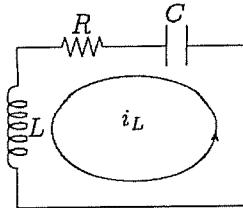


Figura 2.19.3: Circuito per $t > 0$

L'andamento temporale di $i_L(t)$ risulta di conseguenza

$$i_L(t) = e^{-1000t} ([A \cos(1000t) + B \sin(1000t)] u(t)) A \quad (2.19.6)$$

2.19.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Per calcolare i valori delle costanti A e B dobbiamo valutare l'espressione (2.19.6) per $t = 0$ e la sua derivata sempre in $t = 0$. Per far questo occorre determinare il valore di $\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0^+}$ dal circuito valutato a $t = 0^+$ in figura 2.19.4.

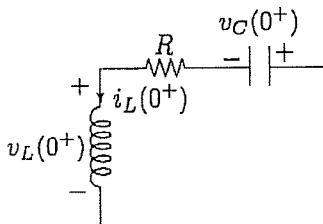


Figura 2.19.4: Circuito per $t = 0^+$

Abbiamo

$$v_L(0^+) = -v_C(0^+) - Ri_L(0^+) = -2.39 V \quad (2.19.7)$$

da cui

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -478.46 \frac{A}{s} \quad (2.19.8)$$

La valutazione di (2.19.6) e della sua derivata per $t = 0$ portano a calcolare

$$i_L(0^+) = A = 0.49$$

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -1000A + 1000B = -478.46 \quad (2.19.9)$$

da cui $B = 0.01$.

L'andamento della corrente è rappresentato in figura 2.19.5.

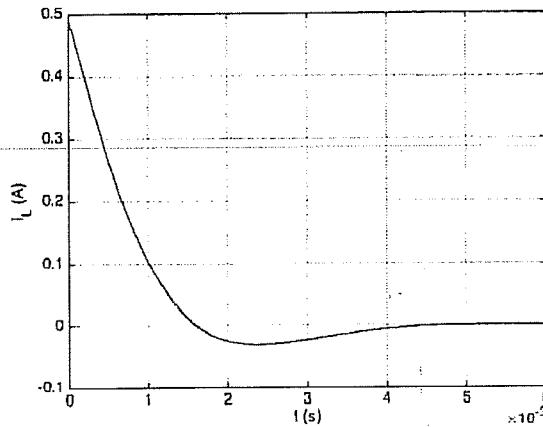


Figura 2.19.5: Andamento della corrente $i_L(t)$

La valutazione dell'energia dissipata sul resistore durante tutto il transitorio può semplicemente effettuarsi ragionando fisicamente: tutta l'energia eletromagnetica immagazzinata all'istante iniziale nel condensatore e nell'induttore viene dissipata integralmente sul resistore, pertanto

$$W_R = \frac{1}{2} L i_L(0^+)^2 + \frac{1}{2} C v_C(0^+)^2 = 9.29 \cdot 10^{-4} J \quad (2.19.10)$$

2.20 Il circuito in figura è a regime per $t < 0$ con il tasto T chiuso. All'istante $t = 0$ il tasto si apre: determinare l'andamento della corrente nell'induttore dopo l'apertura del tasto.

$$E = 100V$$

$$R_3 = 0.5\Omega$$

$$I = 10A$$

$$C = 0.01F$$

$$R_1 = 2\Omega$$

$$L = 0.1H$$

$$R_2 = 1\Omega$$

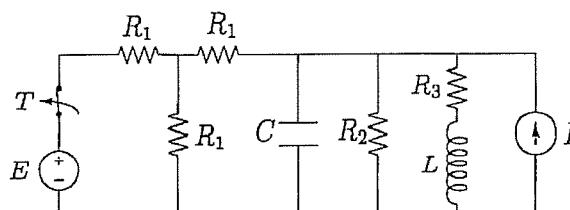


Figura 2.20.1: Circuito esercizio 2.20

Dopo l'apertura del tasto il circuito è caratterizzato da un transitorio del secondo ordine con la corrente nell'induttore che si assesta ad un valore costante pari al partitore di corrente che si viene a creare fra il ramo $R_3 - L$ e le altre resistenze del circuito.

2.20.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Per il calcolo delle condizioni iniziali fisiche è conveniente rappresentare la parte del circuito costituita dal generatore di tensione e tutte le resistenze come un equivalente di Thevenin.

Il calcolo dell'equivalente di Thevenin ed il circuito risultante sono mostrati in figura 2.20.2.

Possiamo calcolare direttamente l'equivalente di Thevenin considerando due partitori di tensione (per E_{th}) ed semplificazioni serie/parallelo

$$E_{th} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_1(R_1+R_2)}{2R_1+R_2}} \cdot \frac{R_1(R_1+R_2)}{2R_1+R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 12.5V$$

$$R_{th} = \frac{\frac{3}{2}R_1R_2}{\frac{3}{2}R_1+R_2} = 0.75\Omega$$
(2.20.1)

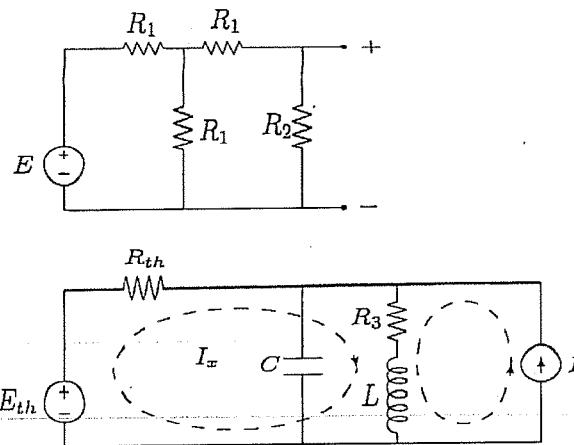


Figura 2.20.2: Circuito con equivalente di Thevenin

È ora possibile procedere con il calcolo delle condizioni iniziali fisiche, scrivendo un'equazione all'anello con corrente incognita I_x come indicato in figura 2.20.2

$$E_{th} = (R_{th} + R_3) I_x + R_3 I \quad (2.20.2)$$

da cui si ricava $I_x = 6A$, e conseguentemente

$$\begin{aligned} v_C(0^-) &= v_C(0^+) = E_{th} - R_{th} I_x = 8.00V \\ i_L(0^-) &= i_L(0^+) = I_x + I = 16.00A \end{aligned} \quad (2.20.3)$$

2.20.2 Soluzione del circuito

Il circuito dopo l'apertura del tasto è rappresentato in figura 2.20.3, in cui sono indicati i riferimenti per la tensione $v(t)$ e per la corrente $i_L(t)$ utilizzati per la soluzione e per R_4 si intende la resistenza risultante

$$R_4 = \frac{2R_1 R_2}{2R_1 + R_2} = 0.8\Omega \quad (2.20.4)$$

Applicando una KCL ad un nodo del circuito possiamo scrivere:

$$\frac{v(t)}{R_4} + C \frac{dv(t)}{dt} + i_L(t) = I \quad (2.20.5)$$

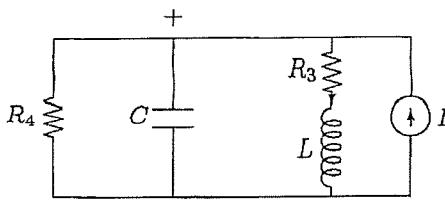


Figura 2.20.3: Circuito dopo la perturbazione

mentre il legame fra tensione e corrente ai capi del ramo in cui scorre $i_L(t)$ è il seguente

$$v(t) = R_3 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.20.6)$$

Sostituendo (2.20.6) in (2.20.5) e riordinando i termini si ottiene

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left(CR_3 + \frac{L}{R_4} \right) \frac{di_L(t)}{dt} + \left(\frac{R_3}{R_4} + 1 \right) i_L(t) = I \quad (2.20.7)$$

ossia una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea.

La soluzione particolare (trovata con il metodo delle funzioni simili) e le due soluzioni dell'equazione algebrica associata sono

$$\begin{aligned} i_p &= 6.15 A \\ \lambda_1 &= -116.00 \\ \lambda_2 &= -14.00 \end{aligned} \quad (2.20.8)$$

L'andamento della corrente sarà conseguentemente

$$i_L(t) = (6.15 + Ae^{-116.00t} + Be^{-14.00t}) u(t) A \quad (2.20.9)$$

2.20.3 Calcolo delle condizioni iniziali matematiche

Il circuito per il calcolo delle condizioni iniziali matematiche è riportato in figura 2.20.4
per il quale abbiamo

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) - R_3 i_L(0^+) = 0 \quad (2.20.10)$$

da cui $\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0$.

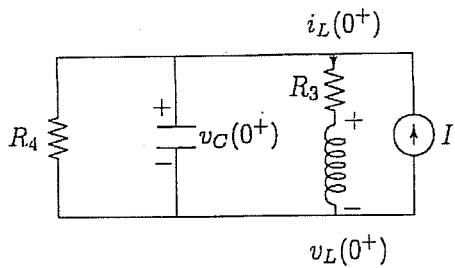


Figura 2.20.4: Circuito all'istante $t = 0^+$

Conseguentemente può essere effettuato il calcolo delle costanti A e B di (2.20.9) che risultano essere $A = -1.35$ e $B = 11.20$, da cui

$$i_L(t) = (6.15 - 1.35e^{-116.00t} + 11.20e^{-14.00t}) u(t) A \quad (2.20.11)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.20.5.

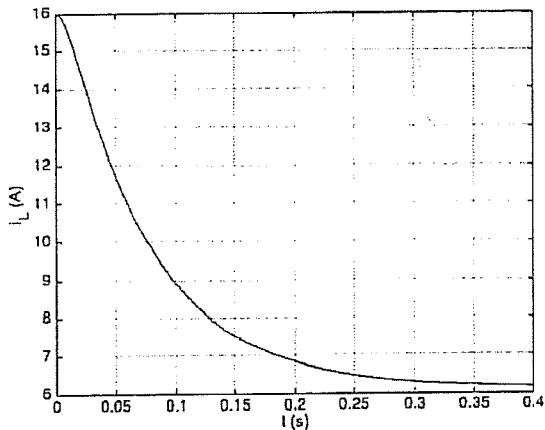


Figura 2.20.5: Andamento temporale della corrente $i_L(t)$

2.21 Il circuito si trova a regime continuo prima della perturbazione. All'istante $t=0$ il tasto T_1 si chiude mentre il tasto T_2 si apre.
 Determinare l'andamento temporale della tensione sul condensatore per $t > 0$, l'energia elettromagnetica media e la potenza erogata dal generatore di corrente a transitorio esaurito ($t \rightarrow \infty$)

$$E_1 = E_2 = 100V \quad R = 4\Omega \quad \alpha = 2 \quad C = 2mF \quad L = 10mH$$

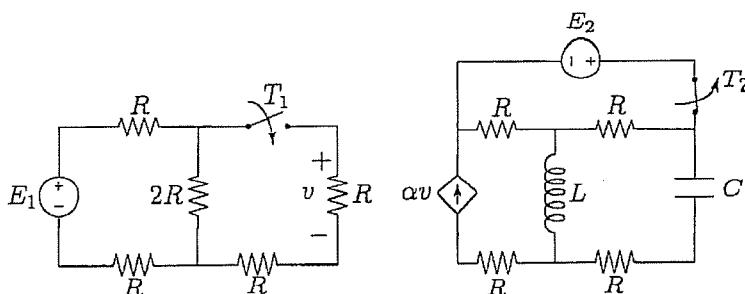


Figura 2.21.1: Circuito esercizio 2.21

È evidente che il circuito di sinistra, non presentando elementi reattivi, non è caratterizzato da alcun transitorio. Una volta commutati gli interruttori si stabilisce nel circuito di sinistra una corrente che costituisce l'eccitazione del circuito di destra. Quest'ultimo è caratterizzato da un transitorio del secondo ordine e la tensione sul condensatore, una volta estinto il transitorio, tenderà ad un valore nullo data la presenza del ramo parallelo L .

2.21.1 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Prima della perturbazione il circuito di sinistra non è attraversato da correnti, pertanto il generatore pilotato αv impone una corrente nulla; l'unica corrente

che attraversa il circuito di destra è quella nell'anello più in alto. La corrente nell'induttore è nulla (dato che è in parallelo al condensatore che comporta da circuito aperto) mentre la tensione sul condensatore, con terminale positivo in alto, è pari alla metà della tensione E_2 (partitore resistivo).

Abbiamo quindi

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0A \quad v_C(0^-) = v_C(0^+) = 50V \quad (2.21.1)$$

2.21.2 Soluzione del circuito

Il circuito dopo la variazione è rappresentato in figura 2.21.2, dove la corrente αv imposta dal generatore pilotato vale

$$\alpha v = \alpha R \frac{1}{2} \left(\frac{E}{3R} \right) = 33.33 A \quad (2.21.2)$$

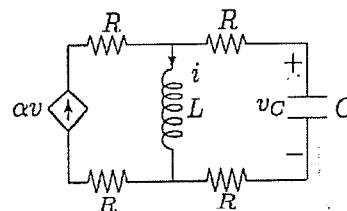


Figura 2.21.2: Circuito per $t > 0$

Scrivendo una KCL ad uno dei due nodi del circuito in figura 2.21.3 e una KVL all'unico anello disponibile abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha v &= i(t) + C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_C(t) &= -2RC \frac{dv_C(t)}{dt} + L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.21.3)$$

da cui si ricava

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad (2.21.4)$$

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale appena ottenuta ha come radici i valori

$$\lambda_1 = -731.66 \quad \lambda_2 = -68.34 \quad (2.21.5)$$

che corrisponde ad un andamento temporale della tensione sul condensatore pari a

$$v_C(t) = Ae^{-731.66t} + Be^{-68.34t} \quad (2.21.6)$$

2.21.3 Calcolo delle condizioni iniziali fisiche

Per il calcolo del valore $\frac{dv_C(t)}{dt}\Big|_{t=0^+}$ occorre riferirsi al circuito rappresentato in figura 2.21.3, nel quale è necessario calcolare il valore di $i_C(0^+)$ da cui poi ricavare la grandezza richiesta.

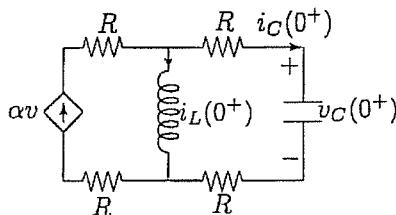


Figura 2.21.3: Circuito a $t = 0^+$

Sapendo che $i_L(0^+) = 0$ la corrente αv scorre interamente nel ramo del condensatore, ossia $i_C(0^+) = \alpha v$ da cui otteniamo che

$$\left. \frac{dv_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{\alpha v}{C} = 16.67 \cdot 10^3 \frac{V}{s} \quad (2.21.7)$$

È ora possibile calcolare i valori delle costanti A e B nell'equazione (2.21.6) valutandola in $t = 0$ e successivamente valutando la sua derivata sempre in $t = 0$.

La forma d'onda risultante della tensione è

$$v_C(t) = -30.28e^{-731.66t} + 80.28e^{-68.34t} \quad (2.21.8)$$

il cui andamento è riportato in figura 2.21.4.

L'energia elettromagnetica media immagazzinata del condensatore a transitorio estinto è nulla dal momento che non è attraversato da corrente, mentre

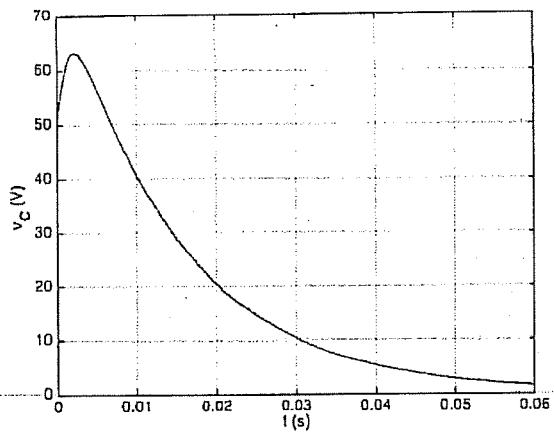


Figura 2.21.4: Andamento temporale della grandezza richiesta

tutta la corrente imposta dal generatore pilotato attraversa l'induttore. Possiamo pertanto scrivere

$$W_L = \frac{1}{2} L(\alpha v)^2 = 5.56 J \quad (2.21.9)$$

$$P = 2R(\alpha v)^2 = 8.89 kW \quad (2.21.10)$$

3 Soluzione di circuiti a regime sinusoidale

3.1 Trovare il circuito equivalente di Thevenin visto dai terminali A-B.

$$R = 1\Omega$$

$$C = 1mF$$

$$L = 1mH$$

$$\alpha = 2$$

$$J(t) = \sin(1000t)$$

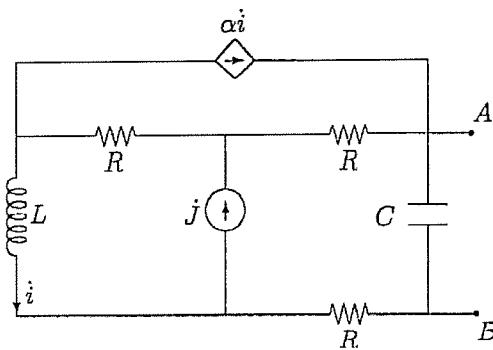


Figura 3.1.1: Circuito esercizio 3.1

Il circuito in questione è caratterizzato da 3 maglie e 2 generatori di corrente, pertanto con la scelta delle maglie riportata in figura 3.1.2 si deve scrivere esclusivamente l'equazione alla maglia \dot{i} .

$$0 = \left(3R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right)\dot{i} + 2R\alpha\dot{i} - \left(2R - \frac{j}{\omega C}\right)\dot{j} \quad (3.1.1)$$

dalla quale si ricava

$$\dot{i} = \dot{j} \frac{\left(2R - \frac{j}{\omega C}\right)}{\left(3R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} + 2R\alpha\right)} = (0.29 - j0.14)A \quad (3.1.2)$$

Prendendo come terminale positivo A è ora possibile scrivere la tensione di Thevenin come

$$\dot{E}_{th} = -\frac{j}{\omega C}(\dot{j} - \dot{i}) = (0.14 - j0.71)V \quad (3.1.3)$$

Essendo presente un generatore pilotato, per calcolare la \dot{Z}_{th} è necessario studiare il circuito di prova, alimentato da un generatore indipendente di tensione o di corrente, una volta disattivati i generatori indipendenti presenti nel

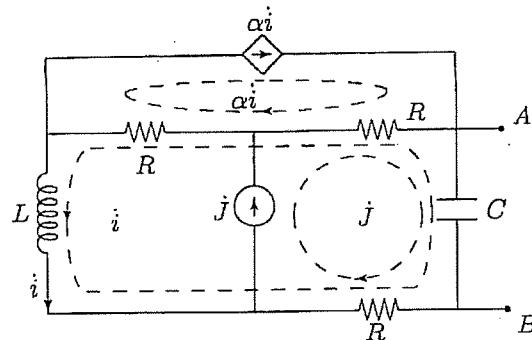


Figura 3.1.2: Scelta delle maglie per il calcolo di \dot{E}_{th}

circuito. Scegliendo come generatore di prova un generatore di tensione, è necessario calcolare la \bar{Z}_{th} come rapporto fra la tensione di prova \dot{V}_p , supposta nota, e la corrente erogata dal generatore di prova \dot{I}_p .

Data la scelta effettuata (generatore di tensione) riportata in figura 3.1.3, è possibile scrivere una unica equazione alla maglia con corrente i , di fatto trascurando la presenza del condensatore dal momento che è in parallelo ad un generatore ideale di tensione. La corrente che scorre nel condensatore vale $\dot{I}_C = j\omega C \dot{V}_p$, pertanto come risultato della corrente di prova avremo $\dot{I}_p = i + \dot{I}_C$

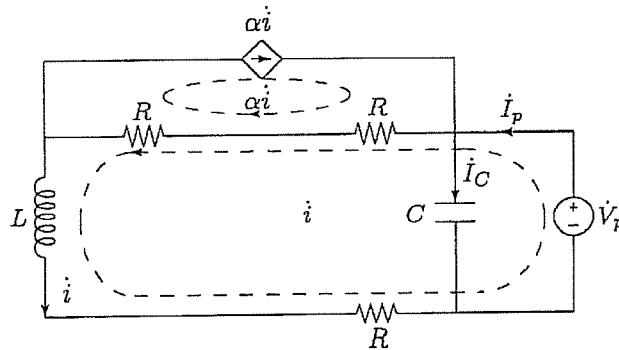


Figura 3.1.3: Circuito di prova per il calcolo di Z_{th}

$$\dot{V}_p = (3R + j\omega L)\dot{i} + \alpha i 2R \quad (3.1.4)$$

da cui si ricava

$$i = \frac{\dot{V}_p}{3R + j\omega L + 2R\alpha} \quad (3.1.5)$$

$$I_p = i + j\omega C \dot{V}_p = \dot{V}_p \left(\frac{1}{3R + j\omega L + 2R\alpha} + j\omega C \right) \quad (3.1.6)$$

ed infine

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\dot{V}_p}{I_p} = \left(\frac{1}{3R + j\omega L + 2R\alpha} + j\omega C \right)^{-1} = (0.14 - j)\Omega \quad (3.1.7)$$

3.2 Trovare l'energia media immagazzinata in L ed in C e la potenza media erogata dal generatore di corrente.

$$R_1 = 2\Omega$$

$$C = 100\mu F$$

$$R_2 = 1\Omega$$

$$L = 2mH$$

$$R_3 = 0.1\Omega$$

$$\alpha = 5$$

$$i(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{6}\right)$$

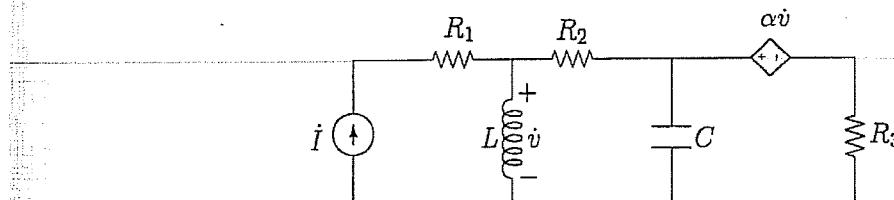


Figura 3.2.1: Circuito Esercizio 3.2

Per trovare le grandezze richieste è necessario calcolare la tensione sul condensatore C , la corrente nell'induttore L e la tensione a capi del generatore di corrente. È necessario pertanto scrivere un sistema di equazioni per risolvere il circuito. Indipendentemente dal metodo scelto è facile verificare che le equazioni risultanti sono in numero di 2. Il metodo che pertanto sembra più adatto e non comporta nessun tipo di equazione aggiuntiva è il metodo degli anelli, come indicato in figura 3.2.2

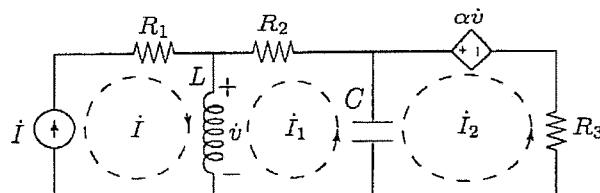


Figura 3.2.2: Scelta degli anelli

Le equazioni risultano pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \left(R_2 - \frac{j}{\omega C} + j\omega L \right) \dot{I}_1 + \frac{j}{\omega C} \dot{I}_2 + j\omega L \dot{I} \\ \alpha \dot{v} &= \left(R_3 - \frac{j}{\omega C} \right) \dot{I}_2 + \frac{j}{\omega C} \dot{I}_1 \\ \dot{v} &= j\omega L(\dot{I} + \dot{I}_1) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

che scritte in forma di sistema 2X2 risultano in

$$\begin{vmatrix} R_2 - \frac{j}{\omega C} + j\omega L & \frac{j}{\omega C} \\ \frac{j}{\omega C} - \alpha j\omega L & R_3 - \frac{j}{\omega C} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j\omega L \dot{I} \\ \alpha j\omega L \dot{I} \end{vmatrix} \quad (3.2.2)$$

in cui $\dot{I} = e^{j\pi/6}$. Risolvendo il sistema (3.2.2) si ottengono i seguenti valori delle correnti

$$\dot{I}_1 = -0.92 - j0.37 = 0.99 e^{-j157.84^\circ} A \quad (3.2.3)$$

$$\dot{I}_2 = -0.87 - j0.49 = e^{-j150.57^\circ} A \quad (3.2.4)$$

In base ai risultati ottenuti è possibile calcolare l'energia media immagazzinata nell'induttore come

$$\dot{I}_L = \dot{I} + \dot{I}_1 = -0.05 + j0.13 = 0.14 e^{j112.82^\circ} \quad (3.2.5)$$

$$W_L = \frac{1}{2} L \frac{\dot{I}_L^2}{2} = 9.31 \mu J \quad (3.2.6)$$

e l'energia media immagazzinata del condensatore come

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = -0.48 + j1.17 = 1.27 e^{j112.30^\circ} V \quad (3.2.7)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \frac{\dot{V}_C^2}{2} = 4.00 \cdot 10^{-5} J \quad (3.2.8)$$

Per il calcolo della potenza media erogata dal generatore di corrente è necessario calcolare la tensione ai suoi capi attraverso la relazione

$$\dot{V}_I = R_1 \dot{I} + j\omega L(\dot{I} + \dot{I}_1) = (1.48 + j0.89) V \quad (3.2.9)$$

da cui la potenza media P la possiamo calcolare come parte reale della potenza complessa.

$$P = \frac{1}{2} \Re e[\dot{V}_I \dot{I}^*] = 0.86W \quad (3.2.10)$$

3.3 Determinare i valori di X_a e di α (relativi al circuito racchiuso nel quadrato) al fine di ottenere la massima potenza trasferita al carico Z_C .

$$I = 1e^{j\pi/4}$$

$$\bar{Z}_1 = 1\Omega$$

$$\bar{Z}_2 = (1 - j)\Omega$$

$$\bar{Z}_3 = (1 + 2j)\Omega$$

$$\bar{Z}_C = (0.1 + j)\Omega$$

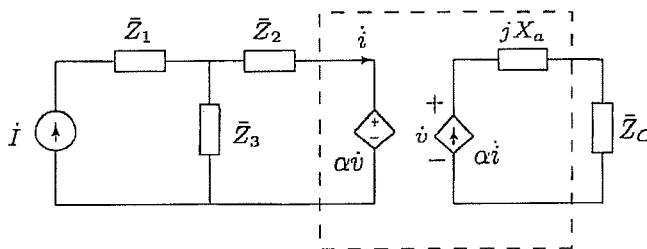


Figura 3.3.1: Circuito esercizio 3.3

Il teorema del massimo trasferimento di potenza afferma che un generatore di tensione dotato di impedenza interna (che può anche essere un equivalente di Thevenin di un circuito di generazione più complesso) fornisce la massima potenza ad una impedenza quando quest'ultima ha come valore il complesso coniugato dell'impedenza interna del generatore.

Nel circuito di figura 3.3.1 la parte a sinistra del riquadro rappresenta il circuito che eroga potenza, pertanto è necessario rappresentarlo attraverso un equivalente di Thevenin.

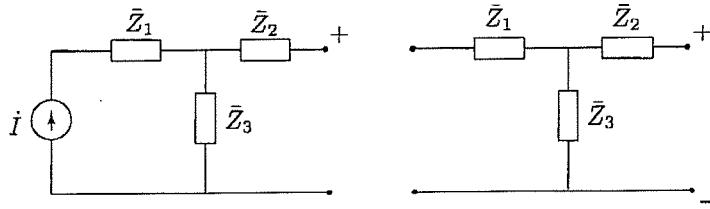


Figura 3.3.2: Equivalente di Thevenin del generatore

In figura 3.3.2 sono riportate le configurazioni per il calcolo di \dot{E}_{th} e \bar{Z}_{th} . I due circuiti sono estremamente semplici, pertanto è possibile scrivere direttamente

$$\begin{aligned}\dot{E}_{th} &= \dot{I} \bar{Z}_3 = (2.19 + j4.39) V \\ \bar{Z}_{th} &= \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = (2 + j)\Omega\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

Osserviamo che $\bar{Z}_C \neq \bar{Z}_{th}$, quindi il circuito racchiuso nel riquadro, in sostanza, "trasforma" (con la scelta opportuna dei parametri α e X_a) l'impedenza di carico in una impedenza che avrà come valore il complesso coniugato di \bar{Z}_{th} . Si deve quindi procedere calcolando l'impedenza vista a valle dell'impedenza \bar{Z}_{th}

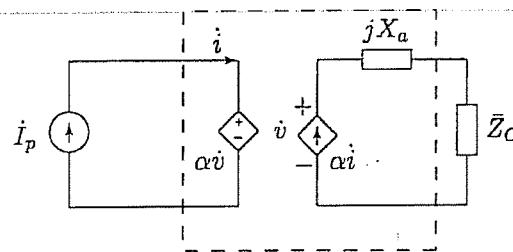


Figura 3.3.3: Calcolo dell'impedenza vista

Come sempre è possibile alimentare il circuito con un generatore di prova di tensione o di corrente. In questo caso la scelta nettamente più efficace è quella di alimentare il circuito con un generatore di corrente \dot{i}_p , dal momento che la corrente che impone è coincidente con la corrente pilota i , e la conseguente tensione \dot{V}_p ai capi del generatore di corrente coincide con la tensione αv del generatore pilotato. Pertanto possiamo scrivere:

$$\dot{V}_p = \alpha v = \alpha [\alpha \dot{i}_p (jX_a + R_c + jX_c)] \quad (3.3.2)$$

da cui l'impedenza vista dal generatore \bar{Z}_v

$$\bar{Z}_v = \frac{\dot{V}_p}{\dot{i}_p} = \alpha^2 [R_c + j(X_a + X_c)] \quad (3.3.3)$$

per la quale dobbiamo imporre $\bar{Z}_v = \bar{Z}_{th}^*$
ossia

$$\alpha^2(0.1 + j(X_a + 1)) = 2 + j \quad (3.3.4)$$

da cui imponendo l'uguaglianza delle parti reali otteniamo $\alpha = \sqrt{20} = 4.47$ e imponendo l'uguaglianza delle parti immaginarie otteniamo $20(1 + X_a) = -1$ ossia $X_a = -1.05\Omega$.

3.4 Determinare l'equivalente di Thevenin del circuito in figura visto dai terminali A-B.

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 10\Omega$$

$$R_3 = 4\Omega$$

$$L_1 = 12mH$$

$$L_2 = 10mH$$

$$i(t) = \sin(314t)$$

$$\alpha = 1$$

$$C = 100\mu F$$

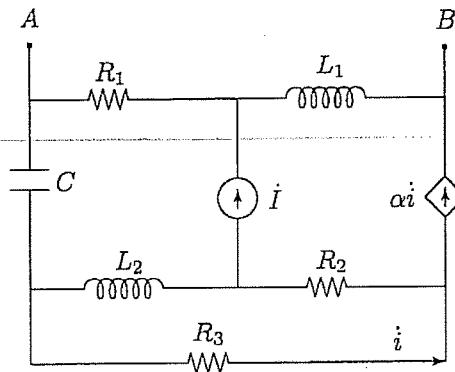


Figura 3.4.1: Circuito esercizio 3.4

3.4.1 Calcolo della tensione di Thevenin

Il metodo più rapido per la scrittura delle equazioni al circuito in questione è con il metodo delle correnti di maglia: ci sono due maglie a corrente imposta ed è pertanto necessario scrivere solo una equazione. In figura 2.5.2 è riportato il circuito con l'indicazione delle maglie.

L'equazione della maglia incognita risulta la seguente

$$0 = (R_2 + R_3 + j\omega L_2)i - (R_2 + j\omega L_2)\alpha i - j\omega L_2 i \quad (3.4.1)$$

da cui si ricava

$$i = \frac{j\omega L_2}{[R_2(1-\alpha) + R_3 + j\omega L_2(1-\alpha)]} i = j0.79A \quad (3.4.2)$$

avendo scelto come $i = 1$.

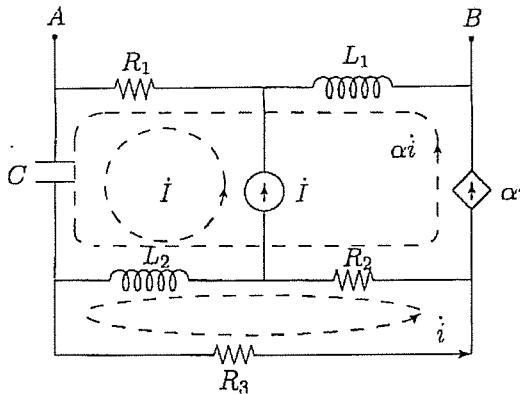


Figura 3.4.2: Scelta delle maglie per il calcolo di \dot{E}_{th} .

Nota la corrente è possibile calcolare la tensione di Thevenin

$$\dot{V}_{AB} = \dot{E}_{th} = -R_1(\dot{I} + \alpha\dot{i}) - j\omega L_1 \alpha\dot{i} = (-7.04 - j7.85) V \quad (3.4.3)$$

3.4.2 Calcolo dell'impedenza di Thevenin

Per il calcolo della Z_{th} , vista la presenza di un generatore pilotato, è necessario alimentare il circuito dai terminali AB con un generatore di prova. Per poter scrivere un numero di equazioni minori la scelta migliore è l'alimentazione con un generatore di corrente. In figura 3.4.3 è riportato il circuito con l'alimentazione esterna e con la scelta delle maglie. Ancora una volta è necessario scrivere una sola equazione.

$$0 = (R_2 + R_3 + j\omega L_2)\dot{i} - \alpha\dot{i}(R_2 + j\omega L_2) \quad (3.4.4)$$

da cui si ricava che $\dot{i} = 0A$, ossia che $Z_{th} = R_1 + j\omega L_1 = (10 + j3.77)\Omega$.

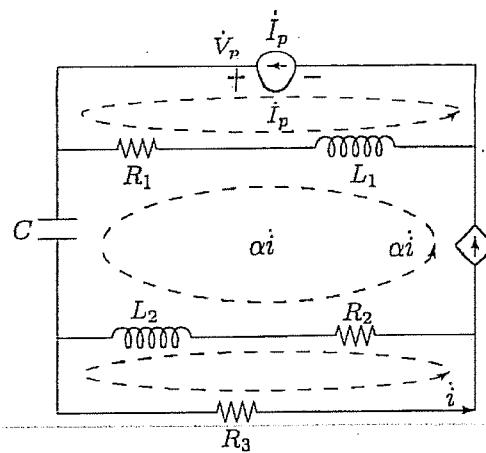


Figura 3.4.3: Scelta delle maglie per il calcolo di \bar{Z}_{th} .

3.5 Determinare l'equivalente di Norton visto dai terminali A - B del circuito rappresentato in figura.

$$R_1 = 5\Omega$$

$$R_2 = 10\Omega$$

$$R_3 = 2\Omega$$

$$R_4 = 4\Omega$$

$$R_5 = 1\Omega$$

$$C_1 = 100\mu F$$

$$L_1 = 2mH$$

$$C_2 = 1mF$$

$$L_2 = 0.1mH$$

$$E(t) = 10 \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha = 2$$

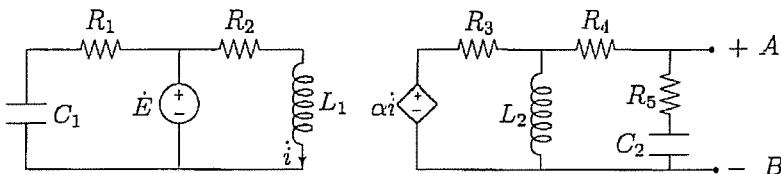


Figura 3.5.1: Circuito esercizio 3.5

3.5.1 Calcolo della corrente di Norton

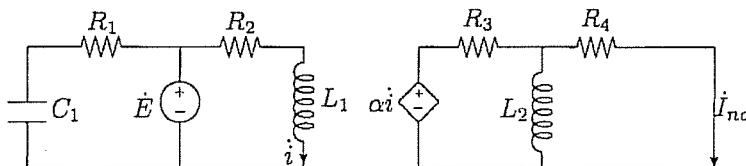


Figura 3.5.2: Circuito per il calcolo della corrente di Norton

Il teorema di Norton dimostra che il circuito equivalente di Norton è composto da un generatore di corrente in parallelo ad una impedenza, ed il valore della corrente di Norton è pari alla corrente di corto circuito ai terminali a cui si determina l'equivalente. La figura 3.5.2 mostra il circuito da studiare per il calcolo di tale corrente. È chiaramente possibile trascurare la serie del condensatore C_2 con la resistenza R_5 in quanto in parallelo ad un corto circuito. Trattandosi di un circuito a regime sinusoidale, esprimiamo il generatore indipendente di tensione attraverso il suo fasore $\dot{E} = 10e^{j\pi/6}$.

La parte sinistra del circuito è indipendente dalla parte destra, e questo ci consente di calcolare immediatamente il valore della corrente i , grandezza pilota del generatore di tensione

$$i = \frac{\dot{E}}{R_2 + j\omega L_1} = (0.89 + j0.44) A \quad (3.5.1)$$

È ora possibile calcolare la corrente erogata dal generatore pilotato di tensione

$$i_x = \frac{\alpha i}{R_3 + \frac{j\omega L_2 R_1}{R_4 + j\omega L_2}} = (0.90 + j0.43) A \quad (3.5.2)$$

da cui con un partitore di corrente

$$i_{no} = i_x \frac{j\omega L_2}{R_4 + j\omega L_2} = (-3.3 + j0.7) \cdot 10^{-3} A \quad (3.5.3)$$

3.5.2 Calcolo della impedenza di Norton

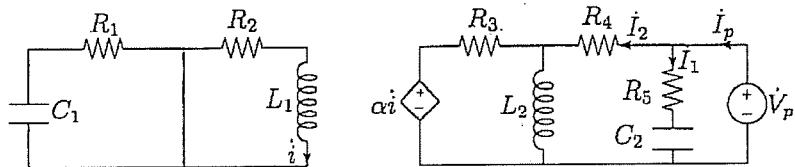


Figura 3.5.3: Circuito per il calcolo della impedenza di Norton

Per il calcolo dell'impedenza di Norton, data la presenza di un generatore indipendente, è necessario alimentare il circuito con un generatore di prova e disattivare il generatore indipendente di tensione. La scelta più opportuna è quella di alimentare il circuito con un generatore di tensione, in modo che la corrente i_1 che attraversa la serie ($R_5 - \frac{j}{\omega C_2}$) è nota, ed è quindi possibile calcolare la corrente i_2 con dei semplici calcoli. Si noti che $i = 0$.

$$i_1 = \frac{\dot{V}_p}{R_5 - \frac{j}{\omega C_2}} \quad (3.5.4)$$

e

$$i_2 = \frac{\dot{V}_p}{R_4 + \frac{j\omega L_2 R_3}{R_3 + j\omega L_2}} \quad (3.5.5)$$

da cui

$$\bar{Z}_{no} = \frac{\dot{V}_p}{\dot{i}_p} = \frac{1}{\frac{1}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_4 + \frac{j\omega L_2 R_1}{R_3 + j\omega L_2}}} = (1.73 - j1.45)\Omega \quad (3.5.6)$$

che poteva anche essere valutata considerando che essendo $i = 0$, il circuito di destra risulta indipendente da quello di sinistra ed il generatore pilotato di tensione è un corto circuito, pertanto inesistente. Quindi l'impedenza nell'equazione (3.5.6) non è altro che l'impedenza equivalente del circuito di destra (senza generatore pilotato) calcolabile anche con la procedura delle semplificazioni serie/parallelo.

3.6 Il circuito A racchiuso dal riquadro è composto da generatori indipendenti, dipendenti ed impedenze. Viene misurata prima la tensione ai suoi terminali aperti, pari a \dot{V}_0 , poi viene chiuso su una resistenza R e misurata la corrente \dot{I} . Calcolare la corrente che attraverserebbe un'impedenza \bar{Z}_L collegata al posto della resistenza R .

$$\dot{V}_0 = 220e^{j\pi/4} V \quad R = 10\Omega \quad \dot{I} = (1 + 2j) A \quad \bar{Z}_L = (30 + j10)\Omega$$

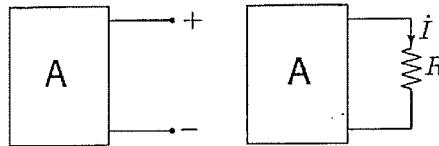


Figura 3.6.1: Circuito esercizio 3.6

Il circuito indicato con A è rappresentabile attraverso un circuito equivalente di Thevenin, ossia da un generatore di tensione \dot{E}_{th} ed una impedenza in serie \bar{Z}_{th} .

Essendo nota la tensione ai terminali aperti \dot{V}_0 , possiamo affermare che

$$\dot{E}_{th} = \dot{V}_0 \quad (3.6.1)$$

Per quanto riguarda il comportamento del circuito quando è chiuso sulla resistenza R , abbiamo che

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_{th}}{\bar{Z}_{th} + R} \quad (3.6.2)$$

da cui si ricava che

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\dot{E}_{th}}{\dot{I}} - R = (83.34 - j31.11)\Omega \quad (3.6.3)$$

Conseguentemente

$$I_{Z_L} = \frac{\dot{E}_{th}}{\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L} = (1.08 + j1.57) A \quad (3.6.4)$$

- 3.7 Nel circuito, operante a regime sinusoidale, in cui sono noti i valori efficaci delle tensioni alle estremità di R_2 , L e C , determinare: a) il valore efficace della corrente nella resistenza R_1 e di quella erogata dal generatore; b) la potenza attiva, reattiva ed apparente erogate dal generatore; c) i valori di L e C se $f = 50\text{Hz}$

$$V_R = 100\text{V} \quad V_L = 150\text{V} \quad V_C = 50\text{V} \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 5\Omega$$

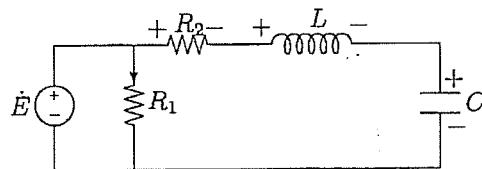


Figura 3.7.1: Circuito esercizio 3.7

Delle tre tensioni note conosciamo solo il valore efficace e non la fase, sappiamo però che, data la natura degli elementi R , L e C , queste sono sfasate l'una rispetto all'altra di un angolo pari a $\pi/2$ dato che sono attraversate dalla stessa corrente. Scegliendo come riferimento V_R sull'asse reale, abbiamo

$$\dot{E} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = (100 + j100)\text{V} \quad (3.7.1)$$

$$\dot{i}_{R_1} = \frac{\dot{E}}{R_1} = 10 + j10 = 14.14e^{j45^\circ}\text{A} \quad (3.7.2)$$

$$\dot{i}_E = \frac{\dot{V}_R}{R_2} + \frac{\dot{E}}{R_1} = 30 + j10 = 31.62e^{j10.43^\circ}\text{A} \quad (3.7.3)$$

Noti \dot{E} ed \dot{i}_E è quindi possibile calcolare le potenze erogate dal generatore:

$$\tilde{S} = \dot{E}\dot{I}^* = 4000 + i2000 \quad (3.7.4)$$

$$P = 4000W \quad (3.7.5)$$

$$Q = 2000VAR \quad (3.7.6)$$

$$S = 316VA \quad (3.7.7)$$

Per rispondere alla terza domanda, osserviamo nuovamente che il valore della corrente che circola sia nell'induttore che nel condensatore è pari a V_R/R , per cui abbiamo

$$X_L = V_L \frac{R_2}{V_R} = 7.5\Omega \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = 23.87mH \quad (3.7.8)$$

$$X_C = V_C \frac{R_2}{V_R} = 2.5\Omega \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} = 1.27mF \quad (3.7.9)$$

3.8 Nel circuito di figura a regime sinusoidale, in cui sono assegnati i valori indicati, è noto che il condensatore rifasa completamente il carico. Determinare: a) la tensione \dot{V} ai capi del condensatore; b) la capacità del condensatore; c) la tensione \dot{E} imposta dal generatore; d) le potenze attive e reattive erogate dal generatore.

$$f = 50 \text{ Hz} \quad I_1 = 10 \text{ A} \quad I_2 = 10 \text{ A} \quad R = 10 \Omega \quad R_1 = 2 \Omega \quad P = 1.414 \text{ kW} \quad Q = 1.6 \text{ kVAR}$$

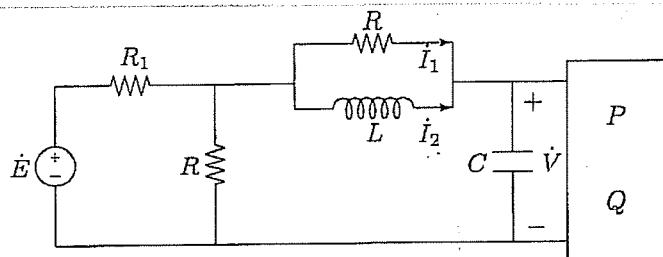


Figura 3.8.1: Circuito esercizio 3.8

Conoscendo il valore di I_1 ed il valore del modulo I_2 , è possibile concludere (trattandosi rispettivamente di un resistore e di un induttore) che la corrente I_2 è in ritardo di $\pi/2$ rispetto ad I_1 , ossia

$$I_2 = -j10 \quad (3.8.1)$$

$$I_T = I_1 + I_2 = 10 - j10 = 14.14 e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (3.8.2)$$

Essendo riasato, il carico con in parallelo il condensatore assorbono solo potenza P , pertanto possiamo calcolare il fasore della tensione \dot{V} dato che I_T e \dot{V} sono in fase.

$$V = \frac{P}{I_T} = 100 \text{ V} \quad (3.8.3)$$

$$\dot{V} = 100 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

La capacità del condensatore si ottiene semplicemente considerando che la potenza reattiva Q viene integralmente fornita dal condensatore, pertanto

$$C = \frac{Q}{\omega V^2} = 509.45 \mu F \quad (3.8.4)$$

Seguendo la notazione di figura 3.8.2, possiamo scrivere che

$$\dot{V}_R = \dot{V} + R \dot{I}_1 = (170.70 - j70.70) V \quad (3.8.5)$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_R}{R} = (17.07 - j7.07) A \quad (3.8.6)$$

$$\dot{I}_E = \dot{I}_T + \dot{I}_R = (27.07 - j17.07) A \quad (3.8.7)$$

È possibile pertanto calcolare la tensione del generatore e le potenze erogate

$$\dot{E} = \dot{V}_R + R_1 \dot{I}_E = (224.8 - j104.84) V \quad (3.8.8)$$

$$P + jQ &= \bar{S} = \dot{E} \dot{I}_E^* = 7876 + j1000 \quad (3.8.9)$$

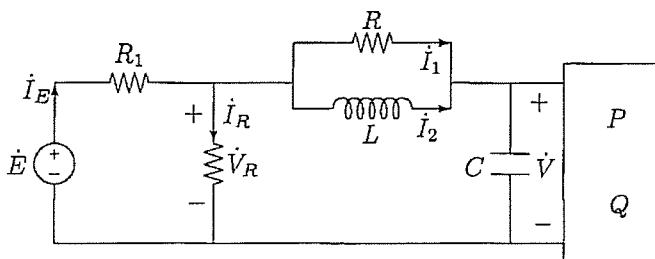


Figura 3.8.2: Indicazione delle tensioni e delle correnti nel circuito

3.9 Nel circuito in figura a regime sinusoidale, si determinino: a) gli andamenti temporali delle correnti $I_x(t)$ ed $I_y(t)$; b) le potenze attive e reattive erogate dal generatore I_1 ; c) le potenze attive e reattive assorbite dagli elementi del ramo attraversato da I_y .

$$R_1 = 1\Omega$$

$$R_4 = 10\Omega$$

$$C = 40\mu F$$

$$R_2 = 0.5\Omega$$

$$R_5 = 4\Omega$$

$$I_1(t) = \sin\left(500t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R_3 = 5\Omega$$

$$L = 100mH$$

$$I_2(t) = \cos\left(500t + \frac{\pi}{4}\right)$$

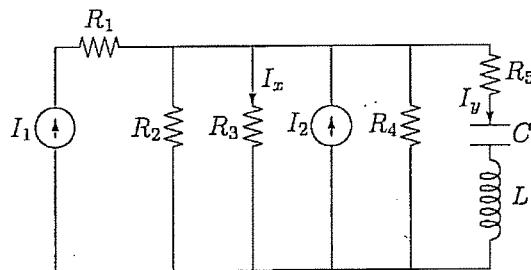


Figura 3.9.1: Circuito esercizio 3.9

È possibile verificare che la pulsazione di risonanza della serie $L - C$ è pari a 500rad/s , pertanto coincidente con la pulsazione di risonanza dei due generatori di corrente, di conseguenza i 4 rami si comportano nella stessa maniera, ossia come 4 rami resistivi. Quindi gli andamenti delle correnti $I_x(t)$ ed $I_y(t)$ possono semplicemente ottersi con un partitore resistivo:

$$I_x(t) = \frac{G_3}{G_2 + G_3 + G_4 + G_5} (I_1(t) + I_2(t)) = 0.078 \left(\sin\left(500t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(500t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (3.9.1)$$

$$I_y(t) = \frac{G_5}{G_2 + G_3 + G_4 + G_5} (I_1(t) + I_2(t)) = 0.098 \left(\sin\left(500t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(500t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (3.9.2)$$

Per trovare le potenze attive e reattive assorbite dagli elementi del ramo dove scorre \dot{I}_y occorre il modulo del fasore \dot{I}_y , che otteniamo considerando i fasori delle due correnti (riportate a coseno): $\dot{I}_1 = 1^{-j\frac{\pi}{4}}$ e $\dot{I}_2 = 1^{j\frac{\pi}{4}}$. Si ottiene quindi $\dot{I}_y = 0.14e^{j0}$
da cui

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} R_5 I_y^2 = 38.40 \text{mW} \\ Q_L &= \frac{1}{2} \omega L I_y^2 = 0.48 \text{VAR} \\ Q_C &= -Q_L = -0.48 \text{VAR} \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

in cui l'ultima equazione di (3.9.3) discende dal fatto che L e C sono in risonanza, di conseguenza le potenze reattive sono uguali ma di segno opposto.
Per il calcolo delle potenze erogate dal generatore \dot{I}_1 è necessario calcolare la tensione ai suoi capi, che si può esprimere come

$$\dot{V}_{I_1} = R_5 \dot{I}_y + R_1 \dot{I}_1 = (1.26 - j0.71) V \quad (3.9.4)$$

da cui si ottengono le potenze richieste

$$P_1 + jQ_1 = \dot{V}_{I_1} I_1^* = 0.70 + j0.20 \quad (3.9.5)$$

3.10 Nel circuito in figura, a regime sinusoidale, si determini l'equivalente di Thevenin visto dai terminali A - B alla frequenza di 50 Hz.

$$i = 1A \quad R = 10\Omega \quad C_1 = 100\mu F \quad L = 10mH \quad \alpha = 2$$

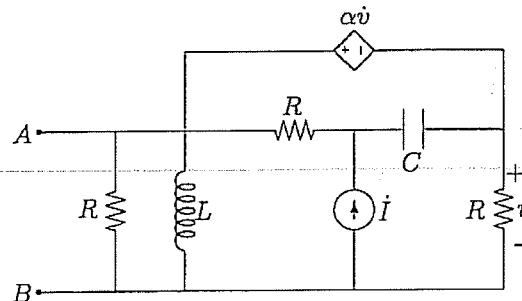


Figura 3.10.1: Circuito esercizio 3.10

In questo caso data la particolare conformazione topologica del circuito è possibile calcolare l'equivalente di Thevenin in due passaggi successivi, ossia determinando prima l'equivalente del circuito senza il ramo parallelo RL , calcolando quindi il generatore \dot{E}_{th1} e l'impedenza \bar{Z}_{th1} che insieme al ramo sudetto costituiranno il circuito di figura 3.10.2 (in cui $\bar{Z}_p = 0.90 + j2.86$). Dopotiché con un partitore di tensione ed un parallelo di impedenze si calcola l'equivalente finale. In questo modo si eseguono più operazioni ma non si deve mai risolvere un sistema.

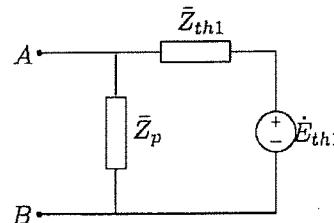


Figura 3.10.2: Circuito equivalente intermedio

3.10.1 Calcolo del generatore di Thevenin "intermedio"

Riferendosi al circuito di figura 3.10.3 è possibile affermare che:

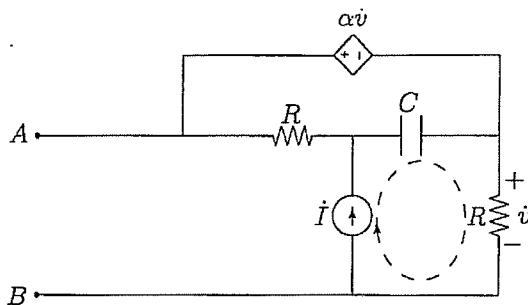


Figura 3.10.3: Circuito per il calcolo di E_{th1}

$$\begin{aligned}\dot{v} &= R\dot{I} \\ E_{th1} &= \alpha(R\dot{I}) + R\dot{I}(1+\alpha) = 30V\end{aligned}\quad (3.10.1)$$

3.10.2 Calcolo dell'impedenza di Thevenin "intermedia"

Ancora una volta per non dover risolvere alcuna equazione e per lavorare con correnti note è opportuno alimentare con un generatore di prova di corrente ed otteniamo il circuito riportato in figura 3.10.4.

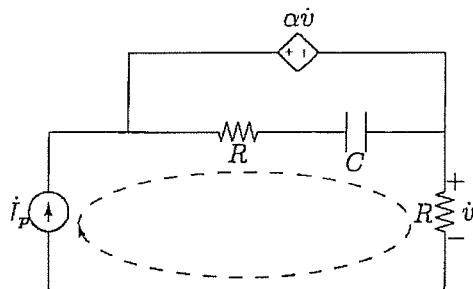


Figura 3.10.4: Circuito per il calcolo di Z_{th1}

Osservando il circuito abbiamo ancora una volta

$$\begin{aligned}\dot{v} &= R\dot{I}_p \\ \dot{V}_p &= \alpha(R\dot{I}) + R\dot{I} = R\dot{I}(1 + \alpha)\end{aligned}\quad (3.10.2)$$

da cui

$$\bar{Z}_{th1} = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p} = R(1 + \alpha) = 30\Omega \quad (3.10.3)$$

3.10.3 Calcolo dell'equivalente di Thevenin

Riferendosi alla figura 3.10.2 sono noti tutti i parametri, pertanto possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\dot{E}_{th} &= \dot{E}_{th1} \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}_{th1} + \bar{Z}} = (1.12 + j2.67)V \\ \bar{Z}_{th} &= \frac{\bar{Z}\bar{Z}_{th1}}{\bar{Z} + \bar{Z}_{th1}} = (1.12 + j2.67)\Omega\end{aligned}\quad (3.10.4)$$

3.11 Il sistema in figura, operante alla frequenza di 50 Hz, è costituito da tre carichi monofasi di cui sono noti i dati di targa. Calcolare la capacità C con cui effettuare il rifasamento totale dell'insieme dei tre carichi, la tensione V che si stabilisce ai capi dei carichi dopo il rifasamento e la potenza dissipata sulla resistenza R sempre dopo il rifasamento.

$$E = 1kV$$

$$R = 0.5\Omega$$

$$P_{n1} = 25kW$$

$$V_{n1} = 1kV$$

$$\cos\phi_{n1} = 0.75$$

$$P_{n2} = 75kW$$

$$V_{n2} = 900V$$

$$Q_{n2} = 25kVAR$$

$$P_{n3} = 50kW$$

$$V_{n3} = 1kV$$

$$S_{n3} = 80kVA$$

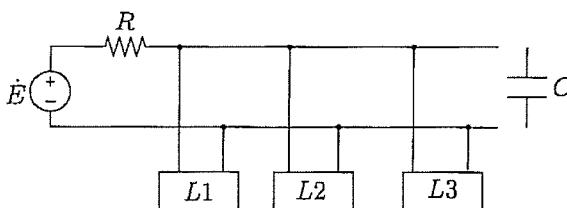


Figura 3.11.1: Circuito esercizio 3.11

Il modo più rapido per calcolare la capacità di rifasamento è quello di passare attraverso le potenze. Prima però è necessario trovare tutte le potenze reattive assorbite alla stessa tensione, dal momento che il secondo carico ha dei dati di targa riferiti ad una tensione diversa dai carichi 1 e 3. Procediamo pertanto al calcolo delle potenze reattive assorbite dai tre carichi.

$$Q_1 = P_{n1} \tan\phi_{n1} = 22.05kVAR$$

$$Q_2 = Q_{n2} \frac{V_{n1}^2}{V_{n2}^2} = 30.86kVAR \quad (3.11.1)$$

$$Q_3 = \sqrt{S_{n3}^2 - P_{n3}^2} = 62.45kVAR$$

da cui si calcolano direttamente i valori di potenza reattiva totale (da rifasare) e la capacità

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 115.35 \text{ kVAR}$$

$$C = \frac{Q_{tot}}{\omega V_{n1}^2} 0.37 \text{ mF} \quad (3.11.2)$$

A rifasamento avvenuto il carico equivalente è una resistenza che assorbe la potenza attiva totale dei tre carichi (con le potenze attive riportate tutte alla stessa tensione), pertanto possiamo scrivere che

$$R_{eq} = \frac{V_{n1}^2}{P_{n1} + P_{n3} + \frac{P_{n2}V_{n1}^2}{V_{n2}^2}} = 5.97 \Omega \quad (3.11.3)$$

Ragionando ora sul circuito equivalente ad una sola maglia costituito dalla resistenza R e dalla resistenza equivalente si possono calcolare le due grandezze richieste

$$V = E \frac{R}{R + R_{eq}} = 922.68 \text{ V} \quad (3.11.4)$$

$$P = R \left(\frac{E}{R + R_{eq}} \right)^2 = 11.96 \text{ kW}$$

3.12 Un circuito costituito da impedenze, generatori pilotati ed ideali (operanti alla frequenza di 50 Hz) è accessibile da due terminali. È stata misurata la tensione a vuoto fra i due terminali \dot{E}_0 e la corrente di corto-circuito (sempre fra i due terminali) \dot{I}_{cc} . Ai due terminali viene ora collegato un carico composto dalla serie fra un resistore R , un condensatore C ed un induttore L . Determinare la corrente che scorre nel carico RLC, la potenza attiva e reattiva assorbite dal carico e l'energia elettromagnetica media in esso immagazzinata.

$$\dot{E}_0 = 380e^{j120^\circ} \quad \dot{I}_{cc} = (1 + j)A \quad R = 1\Omega \quad L = 10mH \quad C = 0.2mF$$

Il circuito accessibile dai due terminali è schematizzabile attraverso il suo equivalente di Thevenin (o di Norton, nella sua configurazione duale). Lavorando con l'equivalente di Thevenin, è necessario conoscere il valore della tensione e dell'impedenza. Come sappiamo il generatore \dot{E}_{th} coincide con la tensione a vuoto, mentre invece l'impedenza di Thevenin può essere calcolata conoscendo la corrente di corto circuito osservando che quando l'equivalente di Thevenin è cortocircuitato la corrente che lo caratterizza è proprio la corrente di corto circuito misurata dai terminali.

Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \dot{E}_{th} &= \dot{E}_0 = 380e^{j120^\circ} \\ \bar{Z}_{th} &= \frac{\dot{E}_0}{\dot{I}_{cc}} = (69.55 + j259.54)\Omega \end{aligned} \tag{3.12.1}$$

Collegando l'equivalente al carico RLC noto, possiamo semplicemente calcolare la corrente che lo attraversa

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_{th}}{\bar{Z}_{th} + R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = (1.03 + j1.06)A \tag{3.12.2}$$

e conseguentemente le potenze attive e reattive come

$$P = RI^2 = 2.19W$$
$$Q = XI^2 = -28.00VAR$$

(3.12.3)

Possiamo ricavare ora la tensione sul condensatore come

$$\dot{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \dot{I} = (16.94 - j16.38)V$$

e di conseguenza le energie medie immagazzinate

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 = 0.011J$$
$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 = 0.055J$$

da cui $W = W_L + W_T = 0.066J$.

3.13 Nel circuito in figura, operante a regime sinusoidale, determinare le potenze attive complessivamente erogate dai tre generatori e le potenze reattive impegnate in ciascun condensatore ed induttore.

$$E(t) = 200 \sin(1000t) V \quad I(t) = 5 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) A \quad R = 10\Omega \quad \alpha = 2$$

$$L_1 = 100mH$$

$$L_2 = 50mH$$

$$C_1 = 10\mu F \quad C_2 = 20\mu F$$

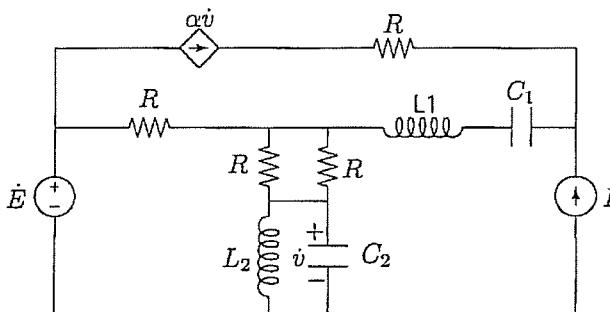


Figura 3.13.1: Circuito esercizio 3.13

Il circuito rappresentato è caratterizzato da tre anelli, considerando l'impedenza equivalente del ramo centrale. Due dei tre anelli sono caratterizzati dalla presenza di un generatore di corrente, pertanto l'equazione da scrivere è una sola.

È possibile però semplificare ancora il circuito osservando che le due coppie di elementi reattivi sono entrambi in risonanza alla pulsazione $\omega = 1000$ imposta da entrambi i generatori. Per questo motivo il circuito risultante da studiare è quello riportato in figura 3.13.2 per il quale, di fatto, non è necessario scrivere alcuna equazione in quanto le correnti nei tre rami sono imposte dai generatori di corrente.

L'unica incognita da determinare è la tensione v , ai capi del parallelo $L_2 - C_2$, per la quale è possibile scrivere

$$\dot{v} = \dot{E} + R(\alpha \dot{v} + \dot{I}) \quad (3.13.1)$$

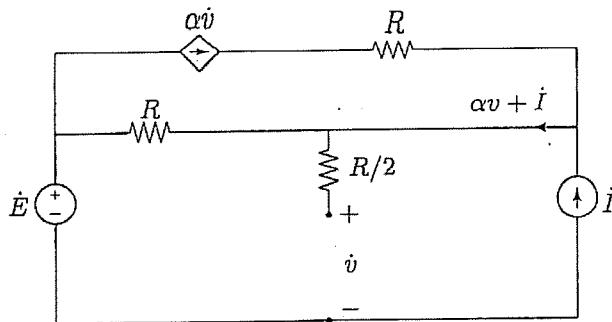


Figura 3.13.2: Circuito risultante alla frequenza imposta

da cui si ottiene

$$\dot{v} = \frac{\dot{E} + R\dot{I}}{1 - R\alpha} = -(12.39 + j1.86)V \quad (3.13.2)$$

Per il calcolo della potenza attiva complessivamente erogata dai generatori del circuito è opportuno utilizzare il teorema di Boucherot, ossia valutare la potenza complessivamente assorbita dai due resistori del circuito;abbiamo pertanto

$$P = \frac{1}{2} (R(\alpha\dot{v})^2 + R|\alpha\dot{v} + \dot{I}|^2) = 5.39 kW \quad (3.13.3)$$

Essendo risonanti le due coppie di elementi $L - C$ è sufficiente determinare la potenza reattiva in uno degli elementi della coppia dal momento che l'altro avrà esattamente lo stesso valore con segno opposto, ossia

$$\begin{aligned} Q_{L_1} &= \frac{1}{2} X_{L_1} |\alpha\dot{v} + \dot{I}|^2 = 22.56 kVAR \\ Q_{C_1} &= -Q_{L_1} = -22.56 kVAR \\ Q_{C_2} &= \frac{1}{2} B_{C_2} \dot{v}^2 = 1.57 VAR \\ Q_{L_2} &= -Q_{C_2} = -1.57 VAR \end{aligned} \quad (3.13.4)$$

3.14 Nel circuito in figura sono assegnati i valori delle impedenze sotto riportati ed i valori efficaci delle correnti \dot{I}_1 ed \dot{I}_2 , e la capacità del condensatore è tale da rifasare completamente i due carichi in parallelo. Calcolare le seguenti grandezze: la capacità del condensatore; la corrente complessiva assorbita dai due carichi in parallelo; la corrente erogata dal generatore; la tensione E ; le potenze attive e reattive erogate dal generatore.

$$I_1 = 20A \quad I_2 = 10\sqrt{2}A \quad R_3 = 2\Omega \quad X_3 = 2\Omega \quad X_1 = 10\Omega \quad f = 50Hz \quad R_2 = X_2$$

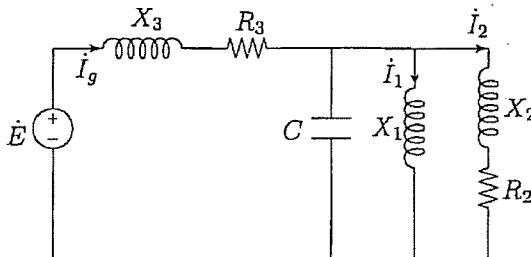


Figura 3.14.1: Circuito esercizio 3.14

Conoscendo le correnti I_1 ed I_2 riferite ad un parallelo, possiamo impostare che la tensione \dot{V} ai capi dei due rami sia la stessa. Abbiamo pertanto

$$X_1 I_1 = Z_2 I_2 = \sqrt{2X_2^2} I_2 \quad (3.14.1)$$

da cui

$$X_2 = \frac{X_1 I_1}{\sqrt{2} I_2} = \frac{10 \cdot 20}{\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = 10\Omega = R_2 \quad (3.14.2)$$

è inoltre possibile assumere per la tensione ai capi del parallelo una fase nulla, ossia $\dot{V} = 200$.

La capacità del condensatore (per un rifasamento totale) si calcola come è noto imponendo che il carico risultante abbia parte immaginaria nulla, pertanto

$$C = \frac{L_1}{X_1^2} + \frac{L_2}{R_2^2 + X_2^2} = 477.7 \mu F \quad (3.14.3)$$

Partendo dalla tensione \dot{V} si conoscono anche gli sfasamenti di \dot{i}_1 ed \dot{i}_2 , quindi

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = I_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} + I_2 e^{-j\frac{\pi}{4}} = (10 - j30) A \quad (3.14.4)$$

Sapendo che abbiamo effettuato rifasamento totale, la corrente di linea \dot{i}_g sarà in fase con \dot{V} e quindi coincide con la parte reale di \dot{i} , ossia $i_g = 10$. Conseguentemente si calcola la tensione imposta dal generatore

$$\dot{E} = \dot{V} + (R_3 + jX_3)\dot{i}_g + \dot{V} = 220 + j20 V \quad (3.14.5)$$

da cui, attraverso l'utilizzo della potenza complessa, si ha $P = 2200 W$ e $Q = 200 VAR$.

3.15 Il circuito in figura è costituito da un generatore di tensione a 50 Hz e da un'impedenza ohmico - capacitiva. Vengono effettuate le misure (a regime sinusoidale) di tensione a vuoto E_0 e di corrente di corto circuito I_{cc} . Inoltre (sempre a regime sinusoidale) al circuito viene collegato un resistore R : in queste condizioni il generatore eroga una corrente I_R e sul resistore viene dissipata la potenza P . Calcolare il valore degli elementi del circuito riportato in figura.

$$E_0 = 220V$$

$$I_{cc} = 61A$$

$$I_R = 41A$$

$$P = 3.36kW$$

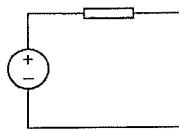


Figura 3.15.1: Circuito esercizio 3.15

Le informazioni necessarie al calcolo delle grandezze del circuito sono contenute nelle prove fatte. In particolare la conoscenza della tensione a vuoto $E_0 = 220V$ ci dà direttamente il valore del generatore di tensione indicato nella figura 3.15.1. Indichiamo con \bar{Z}_C l'impedenza incognita.

Sappiamo che la prova in cortocircuito ci fornisce direttamente il valore del modulo dell'impedenza, ossia

$$\begin{aligned} Z_C &= \sqrt{R_C^2 + X_C^2} = \frac{E_0}{I_{cc}} = 3.6\Omega \\ R_C^2 + X_C^2 &= \left(\frac{E_0}{I_{cc}}\right)^2 = 13.01\Omega^2 \end{aligned} \tag{3.15.1}$$

Inoltre dalla misura della potenza e della corrente assorbita dalla resistenza addizionale R possiamo direttamente calcolarne il suo valore:

$$R = \frac{P}{I_R^2} = 2.00\Omega \quad (3.15.2)$$

La seconda informazione che si ottiene dalla misura della corrente I_R sulla resistenza addizionale è che il rapporto fra E_0 ed I_R fornisce il modulo dell'impedenza serie fra \bar{Z}_C ed R

$$(R_C + R)^2 + X_C^2 = \left(\frac{E_0}{I_R}\right)^2 = 28.80\Omega^2 \quad (3.15.3)$$

Sottraendo la seconda equazione di (3.15.1) dall'equazione (3.15.3) si ottiene la seguente equazione di primo grado in R_C

$$2RR_C = \left(\frac{E_0}{I_R}\right)^2 - \left(\frac{E_0}{I_{cc}}\right)^2 - R^2 \quad (3.15.4)$$

che risolta fornisce il valore $R_C = 2.95\Omega$. Dall'equazione (3.15.1) si ricava ora il valore di $X_C = 2.08\Omega$ ed il conseguente valore di capacità $C = 1/(\omega X_C) = 1.5mF$.

3.16 Il circuito in figura lavora a regime sinusoidale ad una frequenza di 50Hz. Del carico \bar{Z}_4 sono noti i dati di targa e la capacità C è tale da rifasare completamente il carico. Calcolare il valore della tensione sul carico \bar{Z}_4 prima e dopo il riasamento, ed il valore della capacità che lo realizza. I due generatori di tensione sono in fase fra loro.

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 1kV \quad \bar{Z}_1 = (0.5 + j0.5)\Omega \quad \bar{Z}_2 = (0.5 + j)\Omega \quad \bar{Z}_3 = (1 + j0.5)\Omega \\ P_n = 100kW \quad V_n = 1kV \quad \cos\phi_n = 0.75$$

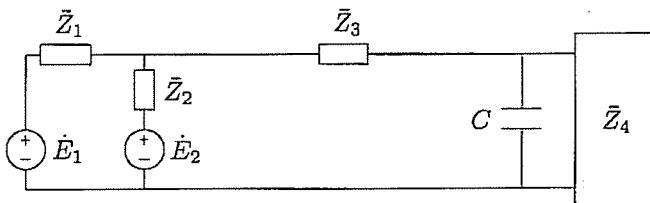


Figura 3.16.1: Circuito esercizio 3.16

Dal momento che non sono richieste grandezze (tensioni o correnti) relativi ai generatori o alle impedenze \bar{Z}_1 e \bar{Z}_2 la procedura migliore è quella di utilizzare l'equivalente di Thevenin al fine di semplificare il circuito come riportato in figura 3.16.2. In questo modo il circuito è costituito da una sola maglia senza la necessità di dover lavorare con un sistema di equazioni.

Il calcolo dell'equivalente di Thevenin è immediato, dal momento che nell'anello costituito dai due generatori e dalle due impedenze non circola corrente (i due generatori si annullano), pertanto abbiamo

$$\dot{E}_{th} = \dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 1kV \\ \bar{Z}_{th} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = (0.27 + j0.35)\Omega \quad (3.16.1)$$

Si procede ora con il calcolo dell'impedenza equivalente del carico \bar{Z}_4 a partire dai dati di targa:

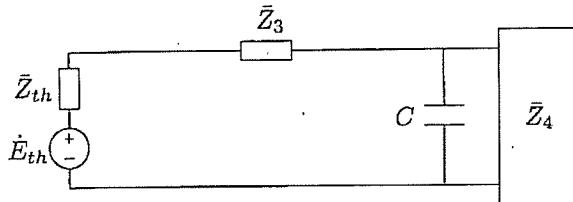


Figura 3.16.2: Circuito con equivalente di Thevenin dei due generatori

$$\bar{Z}_l = \frac{V_n^2 \cos \phi_n}{P_n} (\cos \phi_n + j \sin \phi_n) = (5.63 + j4.96) \Omega \quad (3.16.2)$$

È possibile ora calcolare la tensione ai capi del carico con un semplice partitore di tensione

$$\dot{V}_4 = \frac{\dot{E}_{th}}{(\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)} \bar{Z}_4 = (832.83 + j18.91) V = 832.05 e^{j1.30^\circ} \quad (3.16.3)$$

Dobbiamo ora procedere al rifasamento del carico; per il calcolo della capacità con cui effettuare il rifasamento totale possiamo utilizzare sia il valore dell'impedenza che i dati di targa (entrambi noti)

$$C = \frac{L_4}{Z_4^2} = \frac{P_n \tan \phi_n}{\omega V_n^2} = 2.81 \cdot 10^{-4} F \quad (3.16.4)$$

di conseguenza il carico equivalente risultante (parallelo fra \bar{Z}_4 e C) è ora puramente resistivo di valore

$$R_4^r = \frac{Z_4^2}{R_4} = \frac{V_n^2}{P_n} = 10 \Omega \quad (3.16.5)$$

Ripetendo nuovamente i calcoli riportati nell'equazione (3.16.3) con R_4^r al posto di \bar{Z}_4 si ottiene

$$\dot{V}_4^{rif} = (882.40 - j66.26) V = 884.88 e^{-j4.29^\circ} \quad (3.16.6)$$

Come era logico aspettarsi dopo il rifasamento la tensione sul carico assume un valore maggiore a causa della minore corrente in linea.

3.17 Il circuito in figura lavora a regime sinusoidale ad una frequenza di 50Hz . Si conosce il valore efficace della tensione V_{ab} fra i terminali quando l'interruttore è aperto. Determinare il valore efficace della corrente a regime sinusoidale che percorre l'interruttore quando si trova in posizione chiusa.

$$V_{ab} = 400\text{V}$$

$$R = 4\Omega$$

$$C = 1\text{mF}$$

$$\alpha = 2$$

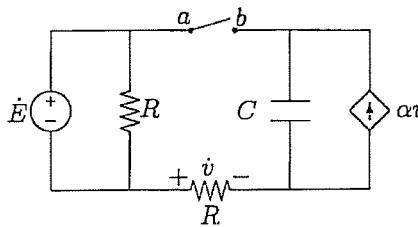


Figura 3.17.1: Circuito esercizio 3.17

Del circuito rappresentato in figura non si conosce il valore del generatore di tensione, però si conosce il valore efficace della tensione ai capi dell'interruttore aperto, ossia in sostanza il valore della tensione a vuoto fra i terminali $a - b$. Se pensiamo di rappresentare il circuito in questione attraverso un equivalente di Thevenin visto dai terminali $a - b$ è sufficiente trovare l'impedenza equivalente di Thevenin \bar{Z}_{th} per la quale non è richiesta la conoscenza del generatore. Il calcolo di \bar{Z}_{th} si può pertanto effettuare ponendo un generatore di corrente di prova fra i terminali $a - b$ come indicato in figura 3.17.2 in cui $\dot{I}_p = \dot{I}_p - \alpha \dot{v}$ e $\dot{v} = R \dot{I}_p$.

Abbiamo pertanto

$$\dot{V}_p = R \dot{I}_p + \frac{1}{j\omega C} (\dot{I}_p - \alpha \dot{v}) \quad (3.17.1)$$

da cui

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p} = R - \frac{j}{\omega C} (1 - \alpha R) = (4.00 + 22.29)\Omega \quad (3.17.2)$$

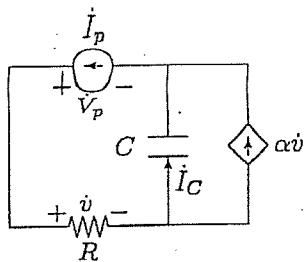


Figura 3.17.2: Circuito per il calcolo della \bar{Z}_{th}

Di conseguenza il valore efficace della corrente è dato da

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{th}} = 17.66A \quad (3.17.3)$$

3.18 Il circuito in figura si trova a regime sinusoidale ad una pulsazione $\omega = 2000 \text{ rad/s}$; determinare:

- le potenze attive e reattive erogate dal generatore di corrente;
- le potenze attive dissipate globalmente sui resistori del circuito;
- l'energia elettromagnetica media immagazzinata negli elementi reattivi.

$$\dot{E} = 220e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \dot{I} = 10e^{j\frac{\pi}{4}} \quad R = 10\Omega \quad C = 0.1\text{mF} \quad L_1 = 2.5\text{mH} \quad L_2 = 1\text{mH}$$

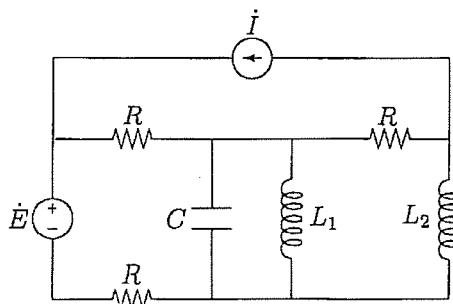


Figura 3.18.1: Circuito esercizio 3.18

È possibile notare che alla pulsazione di funzionamento del circuito ($\omega = 2000$) l'induttore L_1 ed il condensatore C risuonano dal momento che $1/\sqrt{LC} = 2000$, pertanto il parallelo LC si comporta come un circuito aperto, semplificando notevolmente il circuito come riportato in figura 3.18.2 in cui sono anche indicate le correnti di anello.

L'unica equazione da scrivere è quindi

$$\dot{E} = (3R + j\omega L_2)\dot{I}_1 + 2R\dot{I} \quad (3.18.1)$$

da cui

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E} - 2R\dot{I}}{3R + j\omega L_2} = (-0.19 - j9.89)\text{A} \quad (3.18.2)$$

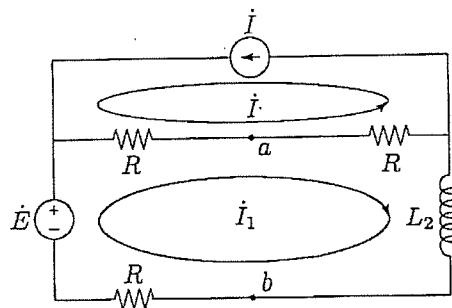


Figura 3.18.2: Indicazione degli anelli

La tensione sul generatore di corrente vale conseguentemente

$$\dot{V}_I = 2R(j + \dot{I}_1) = (137.67 - j56.32)V \quad (3.18.3)$$

da cui le potenze attive e reattive vengono valutate attraverso la potenza complessa

$$P_I + jQ_I = \dot{V}_I \cdot \dot{I}^* = 575.22 - j1371.70 \quad (3.18.4)$$

Per il calcolo delle potenze attive dissipate sui resistori complessivamente possono utilizzare il teorema di Boucherot, pertanto viene calcolata la potenza attiva erogata dal generatore di tensione e sommata alla P_I

$$P_E + jQ_E = \dot{E} \cdot \dot{I}_1^* = 1508.80 + j1567.30 \quad (3.18.5)$$

$$P_R = P_E + P_I = 2.08 kW$$

Anche se il parallelo risonante è agli effetti esterni un circuito aperto gli elementi sono attraversati da correnti (uguali ed opposte). Per la valutazione dell'energia occorre calcolare la tensione sul condensatore e la corrente negli induttori. La tensione ai capi del parallelo è esprimibile come

$$\dot{V}_{ab} = \dot{V}_C = -R(j + \dot{I}_1) + \dot{E} - R\dot{I}_1 = (88.61 - j28.53)V \quad (3.18.6)$$

da cui si ricava

$$i_{L1} = \frac{\dot{V}_{ab}}{j\omega L_1} = (-5.71 - j17.72)A \quad (3.18.7)$$

Le due grandezze appena calcolate consentono di valutare le energie medie immagazzinate in C ed L_1 (che sono coincidenti in quanto alla risonanza) ed L_2

$$\begin{aligned}W_{L_1} &= \frac{1}{2} L_1 I_{L_1}^2 = 0.43 J \\W_C &= \frac{1}{2} C V_C^2 = 0.43 J \\W_{L_2} &= \frac{1}{2} L_2 I_{L_2}^2 = 0.05 J\end{aligned}\tag{3.18.8}$$

3.19 Il circuito in figura lavora a regime sinusoidale ad una frequenza di 50 Hz. Sono noti i valori dei componenti del circuito ed il valore efficace della corrente \dot{I}_1 . Calcolare il valore efficace della corrente \dot{I} erogata dal generatore e le potenze attive e reattive da esso erogate.

$$\begin{array}{lll} I_1 = 2 \text{ A} & R_1 = 10 \Omega & R_2 = 5 \Omega \\ R = 4 \Omega & C_2 = 1 \text{ mF} & L_3 = 10 \text{ mH} \\ & & R_3 = 2 \Omega \end{array}$$

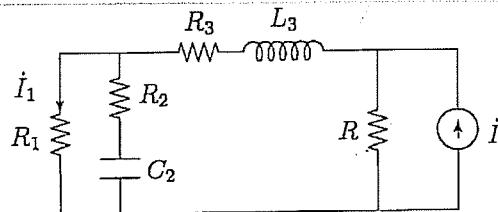


Figura 3.19.1: Circuito esercizio 3.19

È necessario prendere un riferimento per le fasi delle grandezze e la scelta più immediata è quella di considerare la corrente \dot{I}_1 a fase nulla. Possiamo pertanto calcolare la tensione ai capi del parallelo attraverso la legge di Ohm

$$\dot{V} = R_1 \dot{I}_1 = 20 \text{ V} \quad (3.19.1)$$

e conseguentemente la corrente \dot{I}_2 che attraversa la serie $R_2 - C_2$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = (2.85 + j1.81) \text{ A} \quad (3.19.2)$$

È ora possibile calcolare la corrente \dot{I}_3 che circola nel ramo $R_3 - L_3$ e la tensione ai capi del generatore di corrente semplicemente applicando i principi di Kirchhoff

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (4.85 + j1.81) \text{ A} \\ \dot{V}_I &= \dot{V} + (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 = (24.00 + j18.84) \text{ V} \end{aligned} \quad (3.19.3)$$

Nota ora la tensione ai capi del generatore di corrente possiamo calcolare la corrente totale da esso erogata

$$I = I_3 + \frac{\dot{V}_I}{R} = (10.84 + j6.52)A \quad (3.19.4)$$

da cui, attraverso l'utilizzo della potenza complessa, le potenze attive e reattive da esso erogate

$$P = \Re\{\dot{V}_I \dot{I}^*\} = 383.18W \quad Q = \Im\{\dot{V}_I \dot{I}^*\} = 47.79VAR \quad (3.19.5)$$

3.20 Il circuito racchiuso dal quadrato ed indicato con A contiene generatori indipendenti, pilotati ed elementi circuitali lineari. Sul circuito vengono effettuate due prove: a) viene misurata la corrente i erogata su una resistenza nota R ; b) il circuito viene alimentato da un generatore di corrente j e viene misurata la potenza attiva e reattiva da questo erogate. Determinare l'equivalente di Thevenin del circuito A.

$$i = 16.9e^{-j22.62^\circ} \text{ A} \quad j = 4 \text{ A} \quad P = 910 \text{ W} \quad Q = 80 \text{ VAR} \quad R = 10 \Omega$$

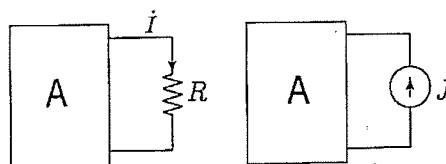


Figura 3.20.1: Circuito esercizio 3.20

Dal momento che viene chiesto l'equivalente di Thevenin del circuito "A", in figura 3.20.2 sono riportate le due prove con disegnati in maniera esplicita il generatore e l'impedenza di Thevenin.

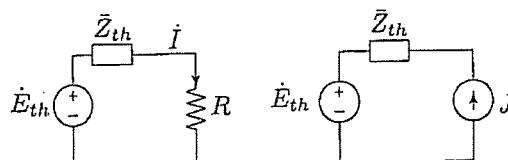


Figura 3.20.2: Rappresentazione dei circuiti con l'equivalente di Thevenin

Dalla seconda prova è possibile calcolare la tensione \dot{V} ai capi del generatore di corrente attraverso la conoscenza delle potenze attive e reattive da esso

erogate

$$\phi = \arctan \frac{Q}{P} = 0.0877 \quad (3.20.1)$$

$$\dot{V} = \frac{P}{j \cos \phi} (\cos \phi + j \sin \phi) = (227.50 + j 20.00) \Omega \quad (3.20.2)$$

È ora possibile scrivere due equazioni con la KVL ai due circuiti

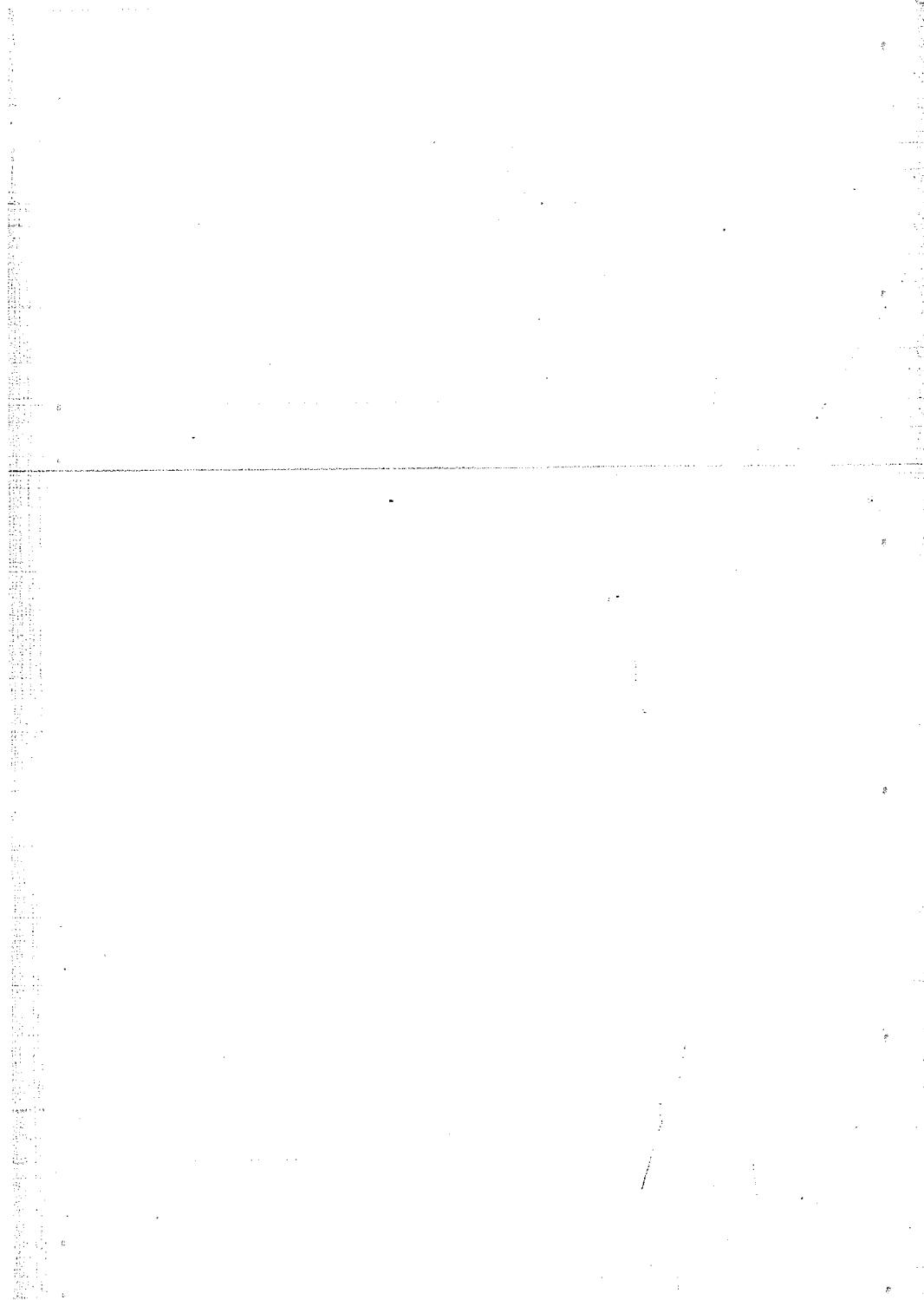
$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{E}_{th} + \bar{Z}_{th} \dot{I} \\ \dot{E}_{th} &= (\bar{Z}_{th} + R) \dot{I}\end{aligned} \quad (3.20.3)$$

Sottraendo la seconda di (3.20.3) dalla prima possiamo direttamente ricavare il valore di \bar{Z}_{th}

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\dot{V} - R \dot{I}}{\dot{I} + \dot{I}} = (2.00 + j 5.00) \Omega \quad (3.20.4)$$

da cui si ricava la tensione del generatore di Thevenin con

$$\dot{E}_{th} = (\bar{Z}_{th} + R) \dot{I} = 220.00 V \quad (3.20.5)$$



4 Soluzione di circuiti a regime sinusoidale con presenza di circuiti magnetici

27
The author wishes to thank Dr. J. R. G. Williams for his help in the preparation of this paper.

28
The author wishes to thank Dr. J. R. G. Williams for his help in the preparation of this paper.

4.1 Determinare l'energia media immagazzinata nel circuito magnetico e la potenza dissipata sulla resistenza R . Con l ed s si intende rispettivamente la lunghezza e la sezione di ogni lato del circuito magnetico.

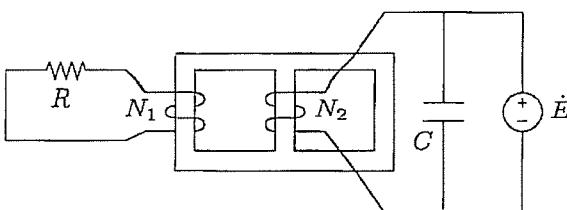


Figura 4.1.1: Circuito esercizio 4.1

$$\mu_r = 100$$

$$R = 2\Omega$$

$$C = 1\mu F$$

$$N_1 = 50$$

$$N_2 = 100$$

$$l = 40\text{cm}$$

$$s = 20\text{cm}^2$$

$$E(t) = 100 \sin(1000t)$$

Per procedere all'analisi del circuito elettrico è necessario calcolare inizialmente i valori delle auto e mutue induttanze con cui rappresentare gli effetti del circuito magnetico. Si studia pertanto il circuito magnetico facendo agire separatamente i generatori di f.m.m.. Per il calcolo dei coefficienti si scelgono (arbitrariamente) i versi delle correnti I_1 ed I_2 entranti dal terminale alto delle bobine. La polarità dei generatori di f.m.m. viene determinata di conseguenza.

4.1.1 Calcolo di L_1 , L_2 ed M

Dal momento che $L_1 = \Phi_1^c/I_1$ e che $\Phi_1^c = N_1\Phi_1$ con $\Phi_1 = N_1/\mathfrak{R}_{eq1}$ si procede con il calcolo di \mathfrak{R}_{eq1} ossia la riluttanza vista dal generatore 1 (circuito in figura 4.1.2).

La riluttanza di ogni lato del circuito magnetico è

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 1.59 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Wb}} \quad (4.1.1)$$

$$R_{eq1} = 3R + 3R//R = 3R + \frac{3}{4}R = \frac{15}{4}R = 5.97 \frac{A}{Wb} \quad (4.1.2)$$

conseguentemente

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_{eq1}} = 4.19 \cdot 10^{-4} H \quad (4.1.3)$$

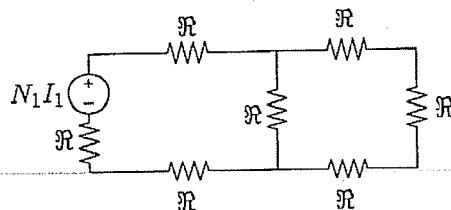


Figura 4.1.2: Calcolo di L_1

Analogamente, secondo il circuito di figura 4.1.3, si calcola

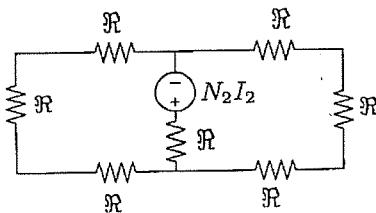


Figura 4.1.3: Calcolo di L_2 ed M

$$R_{eq2} = R + 3R//3R = R + \frac{3}{4}R = \frac{5}{2}R = 3.98 \cdot 10^6 \frac{A}{Wb} \quad (4.1.4)$$

conseguentemente

$$\Phi_2 = \frac{N_2 I_2}{R_{eq2}} \quad (4.1.5)$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_{eq2}} = 2.5 \cdot 10^{-3} H \quad (4.1.6)$$

Per quanto riguarda il calcolo di M , sappiamo che esso può essere calcolato come $\Phi_{2,1}^c / I_1 = \Phi_{1,2}^c / I_2$. Data la maggiore simmetria del circuito di figura

4.1.3, utilizzeremo la seconda strada. Il flusso $\Phi_{1,2}$, ossia il flusso prodotto dall'avvolgimento 2 che attraversa l'avvolgimento 1, lo si calcola utilizzando il partitore di flusso (partitore di corrente); in questo caso il flusso Φ_2 si riparte fra i due rami in parallelo di uguale riluttanza $3\mathfrak{R}$, pertanto $\Phi_{1,2} = \Phi_2/2$ e

$$M = \frac{\Phi_{1,2}^c}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_2}{2 I_2} = \frac{N_1 N_2}{5 \mathfrak{R}} = 6.28 \cdot 10^{-4} H \quad (4.1.7)$$

Il segno di M è da calcolarsi controllando se i flussi prodotti dai due generatori di f.m.m. sono concordi o discordi. Con le convenzioni scelte i flussi sono concordi pertanto $M > 0$.

4.1.2 Soluzione del circuito

È ora possibile disegnare il circuito elettrico corrispondente, riportato in figura 4.1.4.

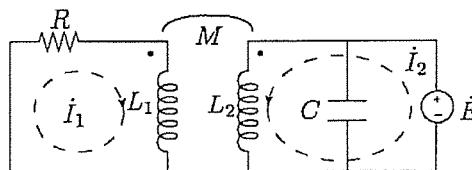


Figura 4.1.4: Circuito elettrico risultante

Per il calcolo dell'energia elettromagnetica media immagazzinata del circuito magnetico, è necessario calcolare le correnti circolanti nelle bobine; pertanto si possono scegliere le due maglie riportate in figura, dove la presenza del condensatore C può essere trascurata in quanto in parallelo ad un generatore ideale di tensione e perché non è richiesto il calcolo di nessuna grandezza da esso influenzata. Le equazioni sono

$$\begin{aligned} 0 &= (R + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{E} &= j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Risolvendo per \dot{I}_2 dalla prima equazione otteniamo

$$\dot{I}_2 = -\frac{R + j\omega L_1}{j\omega M} \dot{I}_1 \quad (4.1.9)$$

che sostituita nella seconda equazione permette di ottenere

$$I_1 = \frac{\dot{E}}{\left[-\frac{L_2}{M}R + j\omega \left(M - \frac{L_1 L_2}{M} \right) \right]} \quad (4.1.10)$$

da cui, sostituendo i dati del problema, ed esprimendo $\dot{E} = 100/\sqrt{2}$ si ottiene

$$I_1 = -8.69 + j1.14 = 8.76e^{-j1.72^\circ} A \quad I_2 = -2.17 + j28.42 = 28.50e^{-j94.37^\circ} A \quad (4.1.11)$$

È possibile ora calcolare l'energia elettromagnetica media immagazzinata nel circuito magnetico e la potenza attiva dissipata sulla resistenza con le seguenti relazioni

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \cos \phi_{12} = 1.07 J \quad (4.1.12)$$

$$P = RI_1^2 = 153.62 W \quad (4.1.13)$$

con $\phi_{12} = 78.17^\circ$ l'angolo compreso fra i fasori delle correnti I_1 ed I_2 .

4.2 Nel seguente circuito funzionante a regime sinusoidale determinare il valore di N_2 affinché la tensione V sia il più vicino possibile al valore di 10V. Determinare inoltre: l'energia elettromagnetica media immagazzinata negli elementi reattivi del circuito, il flusso magnetico presente nella colonna di destra del circuito magnetico e l'andamento temporale di $v(t)$. Con l ed s si indicano rispettivamente la lunghezza e la sezione di ogni lato del circuito magnetico.

$$\begin{array}{lll} l = 50\text{cm} & s = 25\text{cm}^2 & \mu_r = 50 \cdot 10^3 \\ C = 100\mu\text{F} & L = 1\text{mH} & R = 2\Omega \\ N_1 = 100 & I = 2\text{A} & f = 50\text{Hz} \end{array}$$

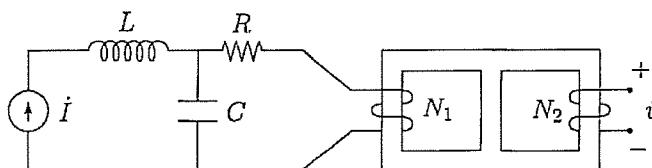


Figura 4.2.1: Circuito esercizio 4.2

4.2.1 Calcolo di L_1 , L_2 ed M

Dal momento che $L_1 = \Phi_1^c / I_1$ e che $\Phi_1^c = N_1 \Phi_1$ con $\Phi_1 = N_1 I_1 / \mathfrak{R}_{eq1}$ si procede con il calcolo di \mathfrak{R}_{eq1} ossia la riluttanza vista dal generatore 1 (circuito in figura 4.2.2), in cui abbiamo supposto le correnti di prova entranti dal terminale in alto degli avvolgimenti del circuito magnetico.

La riluttanza di ogni lato del circuito magnetico è

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 3.13 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{Wb}} \quad (4.2.1)$$

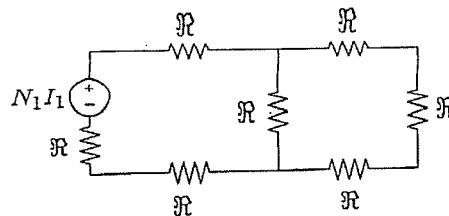


Figura 4.2.2: Calcolo di L_1

$$R_{eq1} = 3R + 3R/R = 3R + \frac{3}{4}R = \frac{15}{4}R \quad (4.2.2)$$

consequently

$$L_1 = N_1^2 / R_{eq1} = 0.84 H \quad (4.2.3)$$

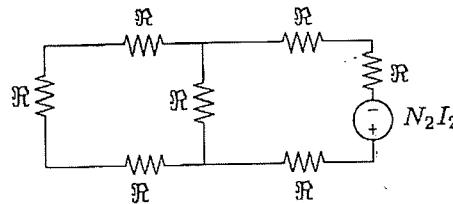


Figura 4.2.3: Calcolo di L_2

Per quanto riguarda il calcolo di M , sappiamo che esso può essere calcolato come $\Phi_{2,1}^c / I_1 = \Phi_{1,2}^c / I_2$. Riferendosi al circuito di figura 4.2.2 abbiamo che con un partitore

$$\Phi_{2,1} = \Phi_1 \frac{R}{R+3R} = \frac{N_1 I_1}{\frac{15}{4}R} \frac{R}{R+3R} = \frac{N_1 I_1}{15R} \quad (4.2.4)$$

da cui

$$M = \frac{N_1 N_2}{15R} = k N_2 = 2.1 \cdot 10^{-3} N_2 H \quad (4.2.5)$$

Il segno di M è da calcolarsi controllando se i flussi prodotti dai due generatori di f.m.m. sono concordi o discordi. Con le convenzioni scelte i flussi sono concordi pertanto $M > 0$. È conveniente esprimere nell'equazione (4.2.5) il coefficiente di mutua induzione in funzione di N_2 , che è una delle incognite del problema.

4.2.2 Risoluzione del circuito

La risoluzione del circuito è elementare, in quanto l'induttore di destra è aperto e non è attraversato da corrente, quindi la corrente circola solo nella parte a sinistra del circuito. È possibile pertanto calcolare la corrente \dot{I}_1 che attraversa l'induttore L_1 utilizzando un partitore di corrente

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}} = (-0.28 - j.0024) A \quad (4.2.6)$$

da cui è possibile calcolare direttamente il valore della tensione sull'avvolgimento secondario

$$\dot{V} = j\omega M \dot{I}_1 = j\omega k N_2 \dot{I}_1 = (0.0016 - i0.181) N_2 = 0.181 e^{-j89.50^\circ} N_2 \quad (4.2.7)$$

dalla quale imponendo che $V = 10$ si ricava che $N_2 = 55$, da cui abbiamo che $v(t) = 99.55 \cos(314t - 89.50)$ (con la convenzione della parte reale).

Proseguiamo ora con il calcolo delle energie elettromagnetiche medie immagazzinate negli elementi del circuito

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 = 2.00 mJ \quad (4.2.8)$$

$$\dot{V}_C = \dot{I}_1 (R + j\omega L_1) = 0.08 - j72.42 = 72.42 e^{-j89.49^\circ} V \quad (4.2.9)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = 0.26 J \quad (4.2.10)$$

$$W_{L1} = \frac{1}{2} L I_1^2 = 0.03 J \quad (4.2.11)$$

$$\Phi_2 = \frac{N_1 I_1}{15 \mathfrak{R}} = 5.76 \cdot 10^{-4} Wb \quad (4.2.12)$$

4.3 Il circuito magnetico riportato in figura ha tre avvolgimenti; calcolare la corrente I erogata dal generatore di corrente in modo tale che la tensione indotta sull'avvolgimento di N_3 spire sia pari a 0. Calcolare inoltre, in questa condizione, le potenze erogate dai generatori di corrente e di tensione. Con l ed s si indicano rispettivamente la lunghezza e la sezione di ogni lato del circuito magnetico. Il circuito lavora alla frequenza di $f = 50\text{Hz}$.

$$\begin{array}{lll} l = 0.1\text{m} & s = 100\text{cm}^2 & \mu_r = 5 \cdot 10^3 \\ N_1 = 100 & N_2 = 500 & N_3 = 1000 \\ R = 10\Omega & & \dot{E} = 230e^{j\pi/6} \end{array}$$

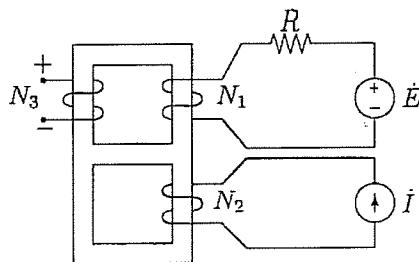


Figura 4.3.1: Circuito esercizio 4.3

La soluzione del circuito in figura passa dalla valutazione dei coefficienti di auto e mutua induzione. Il circuito elettrico equivalente è riportato in figura 4.3.2, dove sono indicate le tre induttanze ed i tre coefficienti di mutua induzione ($M_{1,2}$, $M_{2,3}$ ed $M_{1,3}$) con i rispettivi contrassegni, per i quali si è già scelto il verso della corrente entrante verso l'alto (scelta arbitraria).

L'esercizio è risolvibile in due modi diversi:

- sapendo che l'induttore L_3 non è percorso da corrente, ma è solo sede di tensione indotta, possiamo non calcolare i valori di L_3 e le rispettive $M_{1,3}$ ed $M_{2,3}$ e lavorare con i flussi (metodo 1).

- calcolare anche i coefficienti $M_{1,3}$ ed $M_{2,3}$ e procedere alla valutazione della grandezza incognita solo dal circuito elettrico (metodo 2).

Per completezza si procede alla soluzione con entrambi i metodi.

4.3.1 Soluzione con il metodo 1

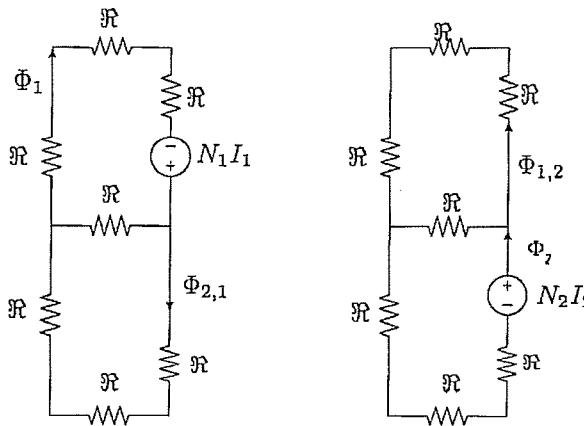


Figura 4.3.2: Circuiti per il calcolo di L_1 , L_2 ed $M_{1,2}$

Calcolo di L_1 , L_2 ed $M_{1,2}$. Dal momento che $L_1 = \Phi_1^c / I_1$ e che $\Phi_1^c = N_1 \Phi_1$ con $\Phi_1 = N_1 I_1 / \mathfrak{R}_{eq1}$ si procede con il calcolo di \mathfrak{R}_{eq1} ossia la riluttanza vista dal generatore 1 (circuito in figura 4.3.3 sinistra), in cui abbiamo supposto le correnti di prova entranti dal terminale in alto degli avvolgimenti del circuito magnetico.

La riluttanza di ogni lato del circuito magnetico è

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 1.59 \cdot 10^3 \frac{A}{Wb} \quad (4.3.1)$$

$$\mathfrak{R}_{eq1} = 3\mathfrak{R} + 3\mathfrak{R} / \mathfrak{R} = 3\mathfrak{R} + \frac{3}{4}\mathfrak{R} = \frac{15}{4}\mathfrak{R} = 5.97 \cdot 10^3 \frac{A}{Wb} \quad (4.3.2)$$

conseguentemente

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\frac{15}{4}\mathfrak{R}} \quad (4.3.3)$$

$$L_1 = N_1^2 / \mathfrak{R}_{eq1} = 1.68 H \quad (4.3.4)$$

Osservando il circuito di figura 4.3.3 di destra, notiamo che è simmetrico rispetto al circuito di sinistra, pertanto $\mathfrak{R}_{eq2} = \mathfrak{R}_{eq1}$ e

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq2}} = 41.88 H \quad (4.3.5)$$

Per quanto riguarda il calcolo di $M_{1,2}$, sappiamo che esso può essere calcolato come $\Phi_{2,1}^c / I_1 = \Phi_{1,2}^c / I_2$. Riferendosi al circuito di destra abbiamo che con un partitore

$$\Phi_{1,2} = \Phi_2 \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R} + 3\mathfrak{R}} = \frac{N_2 I_2}{\frac{15}{4}\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R} + 3\mathfrak{R}} = \frac{N_2 I_2}{15\mathfrak{R}} \quad (4.3.6)$$

da cui

$$M_{1,2} = \frac{N_1 N_2}{15\mathfrak{R}} = 2.09 H \quad (4.3.7)$$

Il segno di $M_{1,2}$ è da calcolarsi controllando se i flussi prodotti dai due generatori di f.m.m. sono concordi o discordi. Con le convenzioni scelte i flussi sono discordi pertanto $M < 0$.

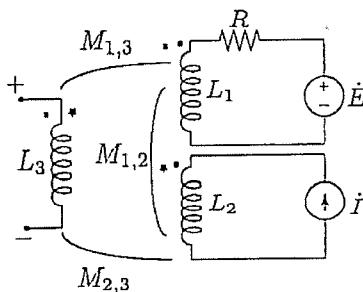


Figura 4.3.3: Circuito elettrico equivalente

Calcolo della corrente I . A questo punto è possibile studiare il circuito elettrico rappresentato in figura 4.3.3, in cui non passando corrente in L_3 si scrivono solo le equazioni alle due maglie chiuse; in particolare la maglia con il generatore di corrente funziona a corrente imposta, quindi l'equazione da scrivere è di fatto una sola.

$$\dot{E} = (R + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M_{1,2} \dot{I} \quad (4.3.8)$$

Le incognite nell'equazione (4.3.8) sono due, ma la seconda equazione è data dal fatto che la tensione indotta sull'avvolgimento 3 deve essere nulla. Questo si traduce nell'informazione che il flusso che attraversa l'avvolgimento N_3 è nullo; guardando la figura 4.3.2 il flusso nell'avvolgimento 3 è dato (applicando la sovrapposizione degli effetti, dal momento che ha senso sfruttare i risultati già ottenuti invece di studiare nuovamente il circuito magnetico) da $\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_{1,2}$, da cui possiamo scrivere

$$0 = \frac{N_1 \dot{I}_1}{\frac{15}{4} \Re} - \frac{N_2 \dot{I}}{15 \Re} \quad (4.3.9)$$

da cui

$$\dot{I}_1 = \frac{N_2}{4N_1} \dot{I} \quad (4.3.10)$$

Sostituendo (4.3.10) in (4.3.8) otteniamo il valore di \dot{I} richiesto

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\frac{RN_2}{4N_1} + j\omega L_1 \frac{N_2}{4N_1} + j\omega M_{1,2}} = 15.93 + i9.20 = 18.40 e^{j30^\circ} A \quad (4.3.11)$$

e di conseguenza il valore di \dot{I}_1

$$\dot{I}_1 = 19.92 + j11.50 A = 23.00 e^{j30^\circ} \quad (4.3.12)$$

È possibile ora calcolare

$$\dot{V}_I = j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M_{1,2} \dot{I}_1 = -1.13 \cdot 10^5 + j1.96 \cdot 10^5 = 2.27 \cdot 10^5 e^{j120^\circ} \quad (4.3.13)$$

da cui, utilizzando le potenze complesse

$$\begin{aligned} P_I &= \Re[\dot{V}_I \cdot \dot{I}^*] = 0 W \\ P_E &= \Re[\dot{E} \cdot \dot{I}_1^*] = 5.29 \cdot 10^3 W \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

4.3.2 Soluzione con il metodo 2

Calcolo di L_1 , L_2 , $M_{1,2}$, $M_{2,3}$ ed $M_{1,3}$. Per poter calcolare la corrente \dot{I} senza passare nuovamente attraverso lo studio del circuito magnetico è necessario calcolare tutte le costanti suddette, ossia oltre alle L_1 , L_2 ed $M_{1,2}$ (già

calcolate in precedenza quindi non verrà ripetuto il calcolo), dobbiamo calcolare anche i valori di $M_{2,3}$ ed $M_{1,3}$. Per fare ciò è necessario nuovamente considerare il circuito di figura 4.3.3 e ragionare nel seguente modo:

$$M_{1,3} = \frac{\Phi_{3,1}^c}{I_1} = -N_3 \frac{\Phi_1}{I_1} = -\frac{N_3 N_1}{\frac{15}{4} R} \quad (4.3.15)$$

$$M_{2,3} = \frac{\Phi_{3,2}^c}{I_2} = N_3 \frac{\Phi_{1,2}}{I_2} = \frac{N_3 N_2}{15 R} \quad (4.3.16)$$

A questo punto possiamo imporre l'uguaglianza a zero della tensione sull'avvolgimento 3

$$\dot{V}_3 = 0 = j\omega M_{1,3} \dot{I}_1 + j\omega M_{2,3} \dot{I} \quad (4.3.17)$$

da cui sostituendo i valori precedentemente calcolati e semplificando si ottiene

$$-4N_1 \dot{I}_1 + N_2 \dot{I} = 0 \quad (4.3.18)$$

che coincide con l'equazione (4.3.10). A questo punto il resto della procedura coincide con la soluzione precedente.

Il fatto che la potenza attiva erogata dal generatore di corrente sia nulla, e che la corrente erogata dal generatore di tensione sia equivalente al rapporto \dot{E}/R deriva dal fatto che, imponendo il flusso nullo nella parte alta del circuito magnetico, non ho tensione ai capi di L_1 e di conseguenza non ho scambio di potenza (attiva o reattiva) fra i due avvolgimenti. Questa considerazione poteva permettere la risoluzione dell'esercizio in maniera ancora più semplice: viene calcolato immediatamente il valore di

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R} \quad (4.3.19)$$

ed

$$\dot{I} = \frac{4N_1}{N_2} \dot{I}_1 \quad (4.3.20)$$

dalla equazione (4.3.10). A questo punto si poteva procedere con il calcolo delle potenze richieste.

4.4 Nel circuito in figura, a regime sinusoidale, si determini la potenza attiva erogata dal generatore di corrente ed i flussi nelle tre colonne del circuito magnetico. Con l ed s si indicano rispettivamente la lunghezza e la sezione di ogni lato del circuito magnetico.

$$l = 0.2 \text{ m}$$

$$s = 150 \text{ cm}^2$$

$$\mu_r = 5000$$

$$N_1 = 200$$

$$N_2 = 1000$$

$$R = 10 \Omega$$

$$C = 1 \text{ mF}$$

$$I(t) = \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$$

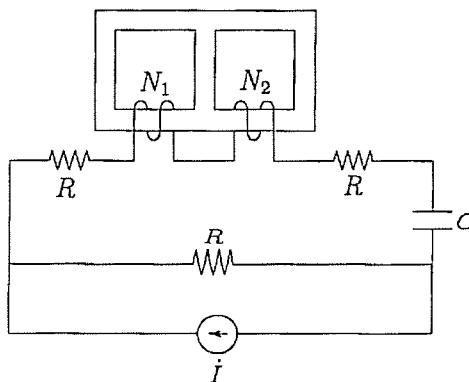


Figura 4.4.1: Circuito esercizio 4.4

Come accade in ogni circuito elettrico in cui sono presenti degli elementi magnetici è necessario prima calcolare i valori delle auto e mutue induttanze in modo da poter poi studiare il circuito con i soli parametri elettrici. In questo caso è inoltre chiesta la valutazione dei flussi, pertanto si dovrà utilizzare il circuito magnetico anche in questa seconda fase. I circuiti sono disegnati nelle figure 4.4.2 e 4.4.3, dove nel circuito elettrico è anche indicato il verso della corrente incognita I_1 .

I versi dei generatori di f.m.m. sono presi con le correnti entranti dai terminali esterni degli avvolgimenti, in modo da avere una mutua induttanza $M > 0$.

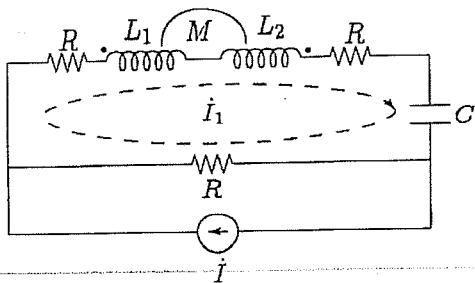


Figura 4.4.2: Circuito elettrico

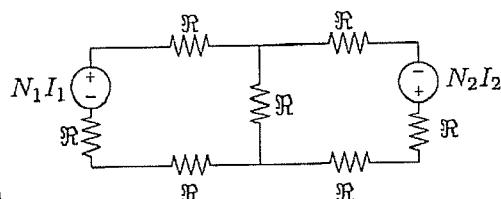


Figura 4.4.3: Circuito magnetico



Il calcolo delle auto e mutue induttanze si compie in modo analogo agli esercizi precedenti, quindi vengono riportati solo i risultati:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 2.12 \cdot 10^3 \frac{A}{Wb} \\ \mathfrak{R}_{eq} &= \frac{15}{4} \mathfrak{R} = 7.96 \cdot 10^3 \frac{A}{Wb} \\ L_1 &= \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{eq}} = 5.03 H \\ L_2 &= \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq}} = 125.66 H \\ M &= \frac{N_1 N_2}{15 \mathfrak{R}} = 6.28 H\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

Scrivendo l'equazione all'unico anello del circuito si può ottenere direttamente il fasore della corrente \dot{I}_1 , considerando $\dot{I} = 1e^{j\frac{\pi}{6}}$

$$\dot{I}_1 = \frac{R \dot{I}}{3R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) - \frac{j}{\omega C}} = (1.35 - j2.33) \cdot 10^{-4} A. \quad (4.4.2)$$

Per calcolare la potenza erogata dal generatore di corrente è necessario conoscere la tensione ai suoi capi, ossia

$$\dot{V}_I = R(\dot{I} - \dot{I}_1) = (8.66 + j5.00) V \quad (4.4.3)$$

ed attraverso la potenza complessa $P = 0.5 * \Re(\dot{V}\dot{I}^*) = 5W$.

Per quanto riguarda il calcolo dei flussi nelle tre colonne del circuito magnetico dobbiamo necessariamente ritornare all'analisi del circuito di Figura 4.4.4 in cui il verso ed il valore del generatore di f.m.m. di destra riflette la reale intensità e verso della corrente e sono indicati i versi dei flussi che vogliamo calcolare.

È possibile effettuare un'analisi agli anelli oppure ragionare con il principio di sovrapposizione degli effetti. Seguiamo questa seconda strada con la notazione standard.

Possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= \dot{\Phi}_{1,1} - \dot{\Phi}_{1,2} \\ \dot{\Phi}_2 &= \dot{\Phi}_{2,2} - \dot{\Phi}_{2,1} \\ \dot{\Phi}_3 &= \dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_2\end{aligned}\quad (4.4.4)$$

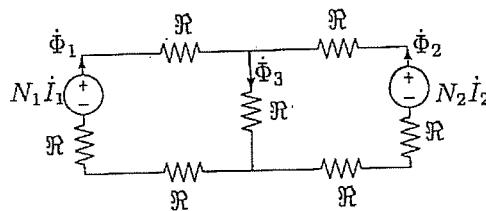


Figura 4.4.4: Circuito magnetico risultante

Seguendo il procedimento effettuato per il calcolo delle induttanze abbiamo
(data la simmetria del circuito)

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{1,1} &= \frac{N_1 \dot{I}_1}{\Re_{eq}} = (3.39 - j5.87) \mu Wb \\ \dot{\Phi}_{2,2} &= \frac{N_2 \dot{I}_1}{\Re_{eq}} = (16.97 - j29.33) \mu Wb \\ \dot{\Phi}_{1,2} &= \frac{\dot{\Phi}_{2,2}}{4} = (4.24 - j7.33) \mu Wb \\ \dot{\Phi}_{2,1} &= \frac{\dot{\Phi}_{1,1}}{4} = (0.85 - j0.15) \mu Wb\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

da cui, sostituendo in (4.4.4) otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1 &= (-0.85 + j0.15) \mu Wb \\ \dot{\Phi}_2 &= (16.12 - j27.86) \mu Wb \\ \dot{\Phi}_3 &= (15.27 - j26.40) \mu Wb\end{aligned}\tag{4.4.6}$$

4.5 Nel circuito in figura calcolare l'impedenza vista dai terminali a-b (alla frequenza di 50 Hz) e calcolare l'energia elettromagnetica media immagazzinata nel circuito magnetico qualora ai terminali a-b sia collegato un generatore di corrente sinusoidale di ampiezza 1A (efficace) e frequenza 50 Hz.

$$R = 1\Omega \quad C = 1mF \quad \alpha = 2 \quad N_1 = 100 \quad N_2 = 20 \\ d_1 = 20cm \quad d_2 = 40cm \quad h = 20cm \quad \mu_r = 1000 \quad S = 10cm^2$$

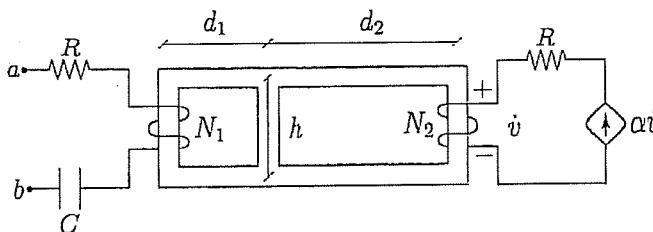


Figura 4.5.1: Circuito esercizio 4.5

Per procedere all'analisi del circuito elettrico è necessario calcolare inizialmente i valori delle auto e mutue induttanze con cui rappresentare gli effetti del circuito magnetico. Si studia pertanto il circuito magnetico facendo agire separatamente i generatori di f.m.m.. Per il calcolo dei coefficienti si scelgono (arbitrariamente) i versi delle correnti I_1 ed I_2 entranti dal terminale alto delle bobine. La polarità dei generatori di f.m.m. viene determinata di conseguenza.

4.5.1 Calcolo di L_1 , L_2 ed M

Dal momento che $L_1 = \Phi_1^c / I_1$ e che $\Phi_1^c = N_1 \Phi_1$ con $\Phi_1 = N_1 / \mathcal{R}_{eq1}$ si procede con il calcolo di \mathcal{R}_{eq1} ossia la riluttanza vista dal generatore 1 (circuito in figura 4.5.2).

La riluttanza elementare del circuito magnetico è

$$\mathcal{R} = \frac{d_1}{\mu_0 \mu_r S} = 1.59 \cdot 10^5 \frac{A}{Wb} \quad (4.5.1)$$

$$\mathfrak{R}_{eq1} = 3\mathfrak{R} + 5\mathfrak{R}/2\mathfrak{R} = 3\mathfrak{R} + \frac{5}{6}\mathfrak{R} = \frac{23}{6}\mathfrak{R} = 6.10 \cdot 10^5 \frac{A}{Wb} \quad (4.5.2)$$

conseguentemente

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{eq1}} = 0.0164 H \quad (4.5.3)$$

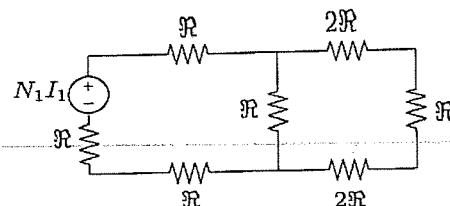


Figura 4.5.2: Calcolo di L_1

Analogamente, secondo il circuito di figura 4.5.3, si calcola

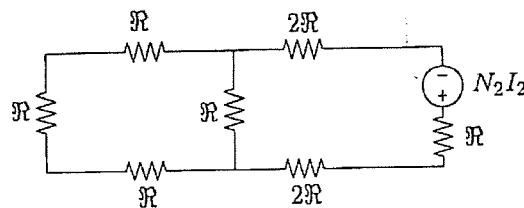


Figura 4.5.3: Calcolo di L_2 ed M

$$\mathfrak{R}_{eq2} = 5\mathfrak{R} + \mathfrak{R}/3\mathfrak{R} = 5\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{R} = \frac{16}{3}\mathfrak{R} = 9.15 \cdot 10^5 \frac{A}{Wb} \quad (4.5.4)$$

conseguentemente

$$\Phi_2 = \frac{N_2 I_2}{\mathfrak{R}_{eq2}} \quad (4.5.5)$$

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{eq2}} = 4.37 \cdot 10^{-4} H \quad (4.5.6)$$

Per quanto riguarda il calcolo di M , sappiamo che esso può essere calcolato come $\Phi_{2,1}^c / I_1 = \Phi_{1,2}^c / I_2$. Il flusso $\Phi_{1,2}$, ossia il flusso prodotto dall'avvolgimento 2 che investe l'avvolgimento 1, lo calcoliamo utilizzando il partitore di flusso (partitore di corrente); in questo caso il flusso Φ_2 si riparte fra i due rami in parallelo di riluttanze $3\mathfrak{R}$ ed \mathfrak{R} , pertanto $\Phi_{1,2} = \Phi_2 \frac{1}{7}\mathfrak{R}$ e

$$M = \frac{\Phi_{1,2}^c}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} = \frac{N_1 N_2}{23\mathfrak{R}} = 5.46 \cdot 10^{-4} H \quad (4.5.7)$$

Il segno di M è da calcolarsi controllando se i flussi prodotti dai due generatori di *f.m.m.* sono concordi o discordi. Con le convenzioni scelte i flussi sono concordi pertanto $M > 0$.

4.5.2 Soluzione del circuito

È ora possibile disegnare il circuito elettrico corrispondente, riportato in figura 4.5.4, dove è anche riportato il generatore di prova i_p ed i versi delle correnti di anello scelte per il calcolo dell'impedenza vista.

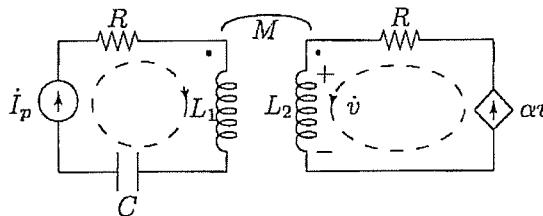


Figura 4.5.4: Circuito elettrico risultante

È necessario calcolare la tensione \dot{V}_p ai capi del generatore di tensione, che può essere calcolata semplicemente scrivendo la KVL all'anello di sinistra tenendo conto delle cadute di tensione dovute all'accoppiamento mutuo ed al valore della tensione pilota v .

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= \left(R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 \right) i_p + j\omega M \alpha v \\ v &= j\omega L_2 \alpha v + j\omega M i_p \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

da cui si ricava

$$\dot{V}_p = \left(R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 \right) i_p - \frac{\alpha \omega^2 M^2}{1 - j\omega L_2 \alpha} i_p \quad (4.5.9)$$

e di conseguenza

$$\tilde{Z}_{eq} = \frac{\dot{V}_p}{\dot{I}_p} = \left(R - \frac{j}{\omega C} + j\omega L_1 \right) - \frac{\alpha\omega^2 M^2}{1 - j\omega L_2 \alpha} = (0.95 + j1.95)\Omega \quad (4.5.10)$$

Per calcolare l'energia elettromagnetica media immagazzinata nel circuito magnetico alimentato dal generatore di corrente dato è utile sfruttare quanto già fatto in precedenza. Nota ora la corrente $\dot{I}_1 = 1$ che circola nell'induttore L_1 è necessario trovare la corrente che circola nell'induttore L_2 , che non è altro che $\alpha \dot{v}$ ricavabile dalla eq. (4.5.8), ossia

$$\dot{I}_2 = \alpha \dot{v} = \alpha \frac{j\omega M}{1 - j\omega L_2 \alpha} \dot{I}_1 = (-0.088 + j0.32)A \quad (4.5.11)$$

da cui

$$W = \frac{1}{2} L_1 \dot{I}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{I}_2^2 + M \dot{I}_1 \dot{I}_2 \cos \phi_{12} = 0.0082J \quad (4.5.12)$$

4.6 Nel circuito in figura a regime sinusoidale ($f = 50\text{Hz}$), calcolare la potenza attiva erogata dal generatore indipendente e l'energia elettromagnetica media immagazzinata nel condensatore. I parametri dei circuiti magnetici sono i seguenti: $l = 40\text{cm}$, $S = 25\text{cm}^2$, $\mu_r = 5000$.

$$I = 2e^{j0^\circ} \quad \alpha = 5 \quad R = 5\Omega \quad C = 1\text{mF} \quad N_1 = 10 \quad N_2 = 100$$

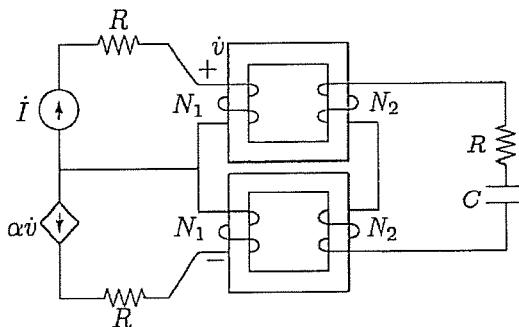


Figura 4.6.1: Circuito esercizio 4.6

4.6.1 Calcolo di L_1 , L_2 ed M

La riluttanza di ogni lato del circuito magnetico è

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 2.55 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Wb}} \quad (4.6.1)$$

da cui si ottiene semplicemente

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1^2}{4\mathfrak{R}} = 9.82 \cdot 10^{-4} \text{H} \\ L_2 &= \frac{N_2^2}{4\mathfrak{R}} = 9.82 \cdot 10^{-2} \text{H} \\ M &= \frac{N_1 N_2}{4\mathfrak{R}} = 9.80 \cdot 10^{-3} \text{H} \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

avendo preso come riferimenti quelli indicati in figura 4.6.2.

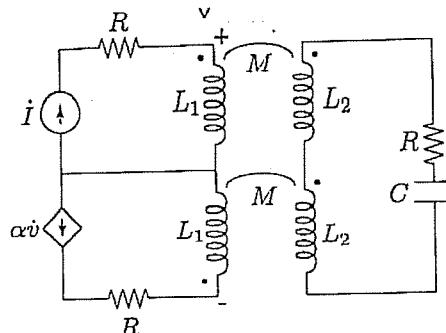


Figura 4.6.2: Circuito equivalente elettrico

4.6.2 Soluzione del circuito

Il circuito è costituito da tre anelli, di cui due a corrente impressa, quindi è necessario solo scrivere l'equazione all'anello di destra. I versi della corrente di anello incognita j è preso (per convenienza) entrante nei contrassegni delle induttanze, in modo da avere tutte cadute positive. L'equazione (4.6.3) riporta la KVL al suddetto anello e l'espressione della tensione pilota \dot{v} .

$$0 = \left(R - \frac{j}{\omega C} + 2j\omega L_2 \right) j + j\omega M i + j\omega M \alpha \dot{v}$$

$$\dot{v} = j\omega L_1 i - j\omega L_1 \alpha \dot{v} + j\omega M j - j\omega M i$$
(4.6.3)

da cui si ricava direttamente il valore della tensione pilota

$$\dot{v} = - \frac{j\omega L_1 i}{1 + j\omega L_1 \alpha} = (0.28 + j0.18) V$$
(4.6.4)

che, sostituito nella prima di (4.6.3), fornisce direttamente il valore della corrente incognita $j = -(0.17 + j0.06) A$.

Le grandezze necessarie per calcolare le quantità richieste sono la tensione sul generatore di corrente e la tensione sul condensatore.

$$\begin{aligned}\dot{V}_I &= (R + j\omega L_1) \dot{I} + j\omega M \dot{J} = (10.19 + j0.08)V \\ \dot{V}_C &= -\frac{j}{\omega C} \dot{J} = (-0.2 + j0.55)V\end{aligned}\tag{4.6.5}$$

da cui si ottengono direttamente la potenza attiva erogata dal generatore $P_I = 20.39W$ e l'energia immagazzinata nel condensatore $W_C = 1.74 \cdot 10^{-4}J$.

4.7 Il circuito in figura lavora a regime sinusoidale ad una frequenza di 50Hz . Oltre ai parametri degli elementi circuituali si considerino noti anche la lunghezza l e la sezione S di ogni lato del circuito magnetico e la permeabilità magnetica relativa μ_r del materiale ferromagnetico di cui questo è composto. Calcolare il valore efficace del campo di induzione magnetica B nel circuito magnetico e l'energia media in esso immagazzinata.

$$\begin{array}{llllll} \dot{E} = 100V & i = 0.5A & R = 2\Omega & C = 20\mu F & L = 10mH & \alpha = 1 \\ N_1 = 200 & N_2 = 400 & l = 60cm & S = 100cm^2 & \mu_r = 6000 & \end{array}$$

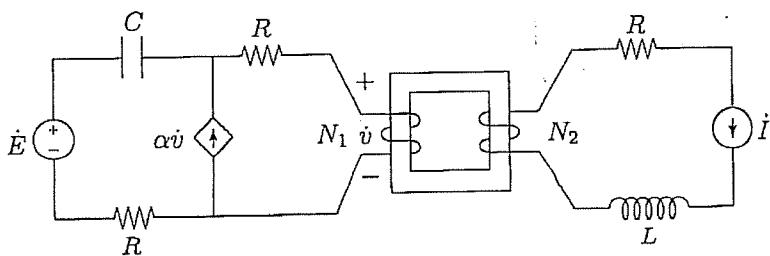


Figura 4.7.1: Circuito esercizio 4.7

4.7.1 Calcolo di L_1 , L_2 ed M

La riluttanza di ogni lato del circuito magnetico è

$$R_s = \frac{l}{\mu_0 \mu_r s} = 7.96 \cdot 10^3 \frac{A}{Wb} \quad (4.7.1)$$

da cui si ottiene semplicemente

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1^2}{4\Re} = 1.26H \\ L_2 &= \frac{N_2^2}{4\Re} = 5.03H \\ M &= \frac{N_1 N_2}{4\Re} = 2.51H \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

con $M > 0$ dal momento che sono stati scelti i versi entranti delle correnti in corrispondenza dei contrassegni indicati in figura 4.7.2

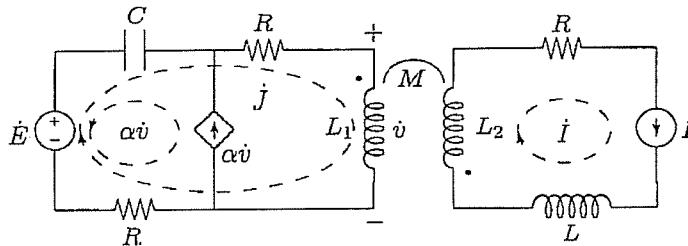


Figura 4.7.2: Circuito equivalente elettrico

4.7.2 Calcolo delle grandezze richieste.

Il circuito riportato in figura 4.7.2 mostra anche i versi delle correnti di maglia scelti per la scrittura delle equazioni. Dal momento che sono presenti solo due generatori di corrente è possibile scrivere una sola equazione più la grandezza pilota

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \left(2R + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C} \right) j - \alpha \dot{v} \left(R - \frac{j}{\omega C} \right) + j\omega M j \\ \dot{v} &= j\omega L_1 j + j\omega M j \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo il valore della corrente incognita

$$j = \frac{\dot{E} + i \left[j\omega M \alpha \left(R - \frac{j}{\omega C} \right) - j\omega M \right]}{\left[2R + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C} - j\alpha \omega L_1 \left(R - \frac{j}{\omega C} \right) \right]} = -1.00A \quad (4.7.4)$$

Una volta calcolate le due correnti è possibile calcolare il flusso totale nel circuito magnetico come

$$\Phi = \frac{|N_1 j + N_2 i|}{4\Re} = 1.90 \cdot 10^{-5} e^{j22.64} Wb \quad (4.7.5)$$

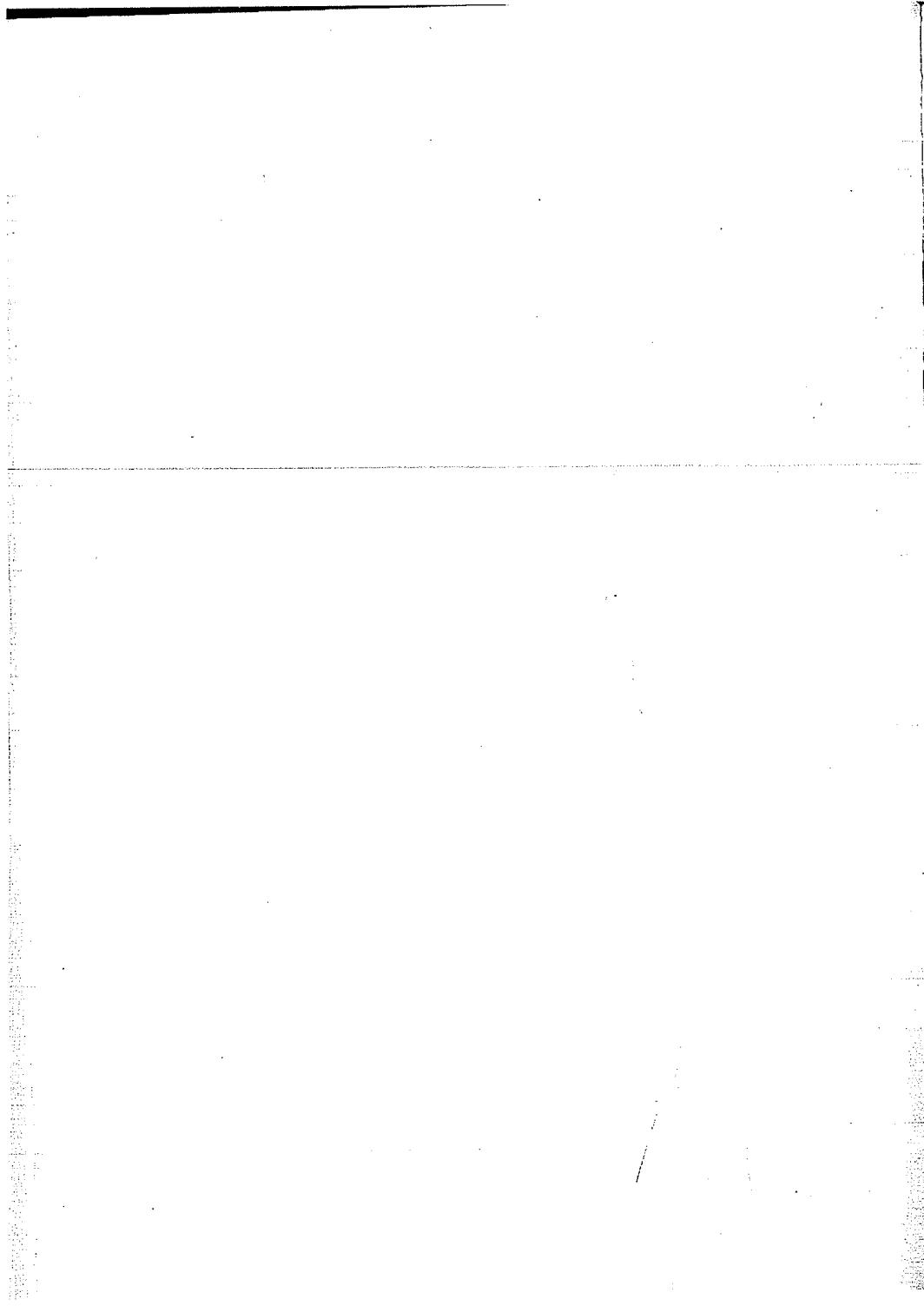
e conseguentemente il valore efficace di B come

$$B = \frac{\Phi}{S} = 1.9 \cdot 10^{-3} T \quad (4.7.6)$$

Per il calcolo dell'energia media immagazzinata nel circuito magnetico si può procedere attraverso la conoscenza delle due correnti e del valore dei parametri di auto e mutua induttanza, oppure attraverso il valore appena calcolato di B e le dimensioni del circuito

$$W = \frac{1}{2} L_1 j^2 + \frac{1}{2} L_2 i^2 + M j I \cos \phi_{IJ} = 4 l S \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} = 5.76 \mu J \quad (4.7.7)$$

5 Soluzione di circuiti a regime periodico non sinusoidale



5.1 Il circuito in figura è alimentato da un generatore di tensione periodico i cui spettri di ampiezza e di fase sono riportati in figura (già espressi in valore efficace ed funzione della pulsazione ω). Trovare l'andamento temporale della corrente $i(t)$ e la potenza dissipata su R_1 .

$$C_1 = 1mF \quad C_2 = C_3 = 0,25mF \quad L_1 = 25mH \quad L_2 = 25mH \\ L_3 = 1mH \quad R_1 = 1\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad \omega_0 = 200rad/s$$

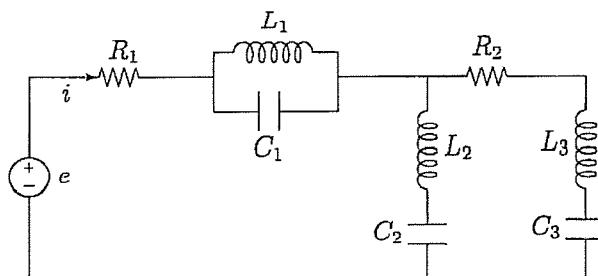


Figura 5.1.1: Circuito esercizio 5.1

Il circuito in questione è alimentato da un generatore periodico non sinusoidale, pertanto si deve procedere utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti facendo agire separatamente i generatori a frequenza diversa. Dal momento che è richiesto il valore della corrente $i(t)$ e la potenza erogata su R_1 , è possibile trovare l'impedenza equivalente vista dal generatore, e poi calcolare le grandezze richieste di conseguenza, sul circuito ad una sola maglia. Per semplificare i calcoli è tuttavia possibile verificare se esistono delle risonanze, che potrebbero portare a semplificazioni del circuito. La pulsazione di risonanza di un circuito LC (sia serie che parallelo) è data da $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, è pertanto opportuno verificare il valore della pulsazione per ognuno dei rami contenenti delle coppie LC . Abbiamo $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}} = 200rad/s = \omega_0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}} = 400rad/s = 2\omega_0$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{L_3 C_3}} = 2000rad/s$, pertanto possiamo ottenere delle semplificazioni nel calcolo delle grandezze richieste a due delle tre frequenze alle quali il circuito è alimentato.

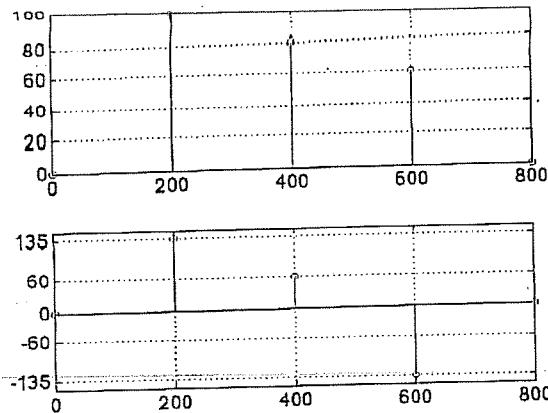


Figura 5.1.2: Spettri di ampiezza e di fase

5.1.1 Calcolo alla pulsazione $\omega = \omega_0$

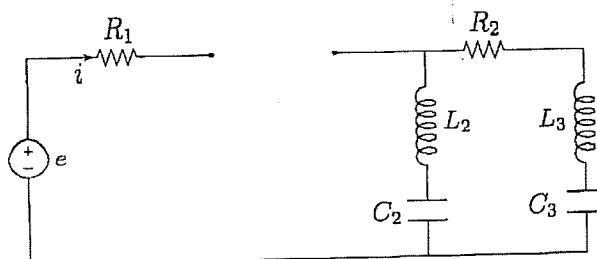


Figura 5.1.3: Circuito per $\omega = \omega_0$

Come mostrato in figura 5.1.3 la risonanza parallela fra gli elementi C_1 e L_1 si trasforma in un circuito aperto pertanto $i_{\omega_0} = 0A$.

5.1.2 Calcolo alla pulsazione $\omega = 2\omega_0$

Come mostrato in figura 5.1.4 la risonanza serie fra gli elementi C_2 e L_2 si trasforma in un corto circuito, pertanto possiamo indicare con \tilde{Z}_p l'impedenza risultante parallelo

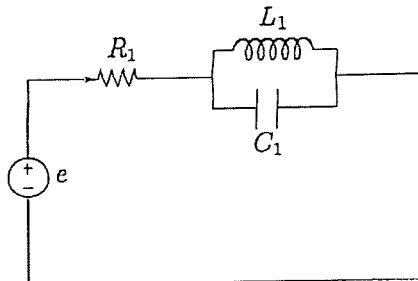


Figura 5.1.4: Circuito per $\omega = 2\omega_0$

$$\bar{Z}_p = \frac{\frac{j\omega L_1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} = -\frac{10}{3} j\Omega \quad (5.1.1)$$

pertanto indicando con $\dot{E}_{2\omega_0} = 80e^{j\pi/3} V$ il fasore della tensione alla pulsazione $2\omega_0$, si ha

$$\dot{i}_{2\omega_0} = \frac{\dot{E}_{2\omega_0}}{R_1 + \bar{Z}_p} = -15.77 + j16.73 = 22.99e^{j133.30^\circ} A \quad (5.1.2)$$

5.1.3 Calcolo alla pulsazione $\omega = 3\omega_0$

Per questo particolare valore di pulsazione non esistono risonanze, quindi il circuito deve essere valutato senza apportare nessuna semplificazione, ci si riferisce pertanto al circuito di figura 5.1.1. Ancora una volta possiamo calcolare effettuare le connessioni serie - parallelo

$$\bar{Z}_{p1} = \frac{\frac{j\omega L_1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} = -j1.88\Omega \quad (5.1.3)$$

$$\bar{Z}_{p2} = \frac{\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\left(R_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right)}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_2 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = (15.20 - j8.89)\Omega \quad (5.1.4)$$

pertanto indicando con $\dot{E}_{3\omega_0} = 60e^{-j3\pi/4} V$ il fasore della tensione alla pulsazione $3\omega_0$, si ottiene

$$\dot{i}_{3\omega_0} = \frac{\dot{E}_{3\omega_0}}{R_1 + \bar{Z}_{p2} + \bar{Z}_{p3}} = -0.61 - j3.03 = 3.08e^{-j101.39^\circ} A \quad (5.1.5)$$

5.1.4 Calcolo finale della potenza e della corrente

Trattandosi di correnti a frequenza diversa, sommare i fasori non ha alcun significato fisico, pertanto la corrente totale $i(t)$ deve essere calcolata sommando gli andamenti temporali delle tre correnti presentemente calcolate. Non essendo dato noto il riferimento scelto nell'indicazione degli spettri di fase e di ampiezza si sceglie la funzione \sin , pertanto

$$i(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_1) + B \sin(2\omega_0 t + \phi_2) + \sin(3\omega_0 t + \phi_3) A \quad (5.1.6)$$

ossia, con i valori precedentemente calcolati

$$i(t) = 22.99 \sin(400t + 133.3^\circ) + 3.08 \sin(600t - 101.39^\circ) A \quad (5.1.7)$$

Allo stesso modo per calcolare la potenza dissipata sulla resistenza R_1 è necessario operare in modo diverso rispetto a quando si lavora con i circuiti a regime periodico sinusoidale, quindi dobbiamo sommare le potenze a frequenza diversa.

$$P = R_1 (I_{\omega_0}^2 + I_{2\omega_0}^2 + I_{3\omega_0}^2) = 537.96 W \quad (5.1.8)$$

5.2 Nel seguente circuito calcolare: la potenza attiva erogata dal generatore I, la potenza attiva erogata dal generatore E, la potenza dissipata sulla resistenza R_2 e la corrente $i(t)$.

$$R_1 = 1\Omega$$

$$R_2 = 10\Omega$$

$$R_3 = 1\Omega$$

$$L_1 = 5mH$$

$$L_2 = 4mH$$

$$C = 1\mu F$$

$$i(t) = \sin(314t + \frac{\pi}{3})$$

$$E(t) = 100\cos(2000t + \frac{\pi}{4})$$

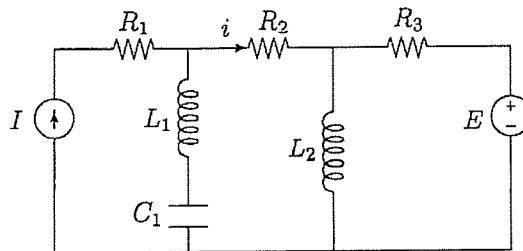


Figura 5.2.1: Circuito esercizio 5.2

Trattandosi di due generatori a frequenze diverse è necessario procedere con la sovrapposizione degli effetti. Non è inoltre possibile semplificare il circuito in seguito ad eventuali risonanze, in quanto L_1 e C_1 hanno una frequenza di risonanza diversa da quelle dei generatori.

5.2.1 Valutazione delle grandezze per $\omega = 314$

Per $\omega = 314$ esiste solo il generatore di corrente, mentre quello di tensione viene disattivato. Pertanto il circuito da analizzare è quello riportato in figura 5.2.2.

indicando con \bar{Z}_1 la serie fra L_1 e C_1 e con \bar{Z} il parallelo fra R_3 e L_2

$$\bar{Z}_1 = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} = -j3.18k\Omega \quad \bar{Z} = \frac{R_3 j\omega L_2}{R_3 + j\omega L_2} = (0.61 + j0.49)\Omega \quad (5.2.1)$$

abbiamo, considerando $\bar{I} = 1e^{j\frac{\pi}{3}}$

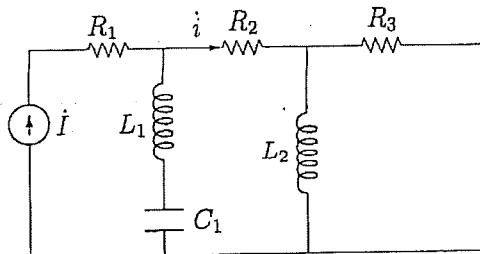


Figura 5.2.2: Circuito per $\omega = 314$

$$I_{R_2}^{314} = I \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z} + R_2} = 0.50 + j0.86 = 1e^{j59.81^\circ} A \quad (5.2.2)$$

e la tensione ai capi del generatore di corrente

$$\dot{V}_I = I \left(R_1 + \frac{\bar{Z}_1 (R_2 + \bar{Z})}{\bar{Z}_1 + \bar{Z} + R_2} \right) = 5.42 + j10.29 = 11.62e^{j62.23^\circ} V \quad (5.2.3)$$

5.2.2 Valutazione delle grandezze per $\omega = 2000$

Per $\omega = 2000$ esiste solo il generatore di tensione, mentre quello di corrente viene disattivato. Pertanto il circuito da analizzare è quello riportato in figura 5.2.3.

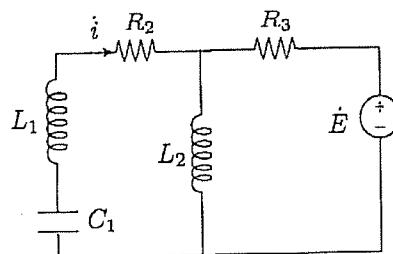


Figura 5.2.3: Circuito per $\omega = 2000$

Indicando con \bar{Z}_a la serie fra R_2 , L_1 e C_1

$$\bar{Z}_a = R_2 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} = (10.00 - j492.00)\Omega \quad (5.2.4)$$

possiamo indicare con Z_b l'impedenza parallelo fra \bar{Z}_a e L_2

$$\bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_a j\omega L_2}{\bar{Z}_a + j\omega L_2} = (0.0027 + j8.13)\Omega \quad (5.2.5)$$

abbiamo, considerando $\dot{E} = 100e^{j(\frac{\pi}{4} + \frac{\epsilon}{2})}$, la corrente erogata dal generatore

$$i_E = \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_b + R_3} = 7.51 + j9.62 = 12.20e^{j52.03^\circ} A \quad (5.2.6)$$

e

$$i_{R_2}^{2000} = -i_E \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_a} = 0.13 + j0.16 = 0.20e^{j50.84^\circ} A \quad (5.2.7)$$

5.2.3 Calcolo delle grandezze richieste

Le potenze a regime periodico non sinusoidale si ottengono sommando le potenze ad ogni singola frequenza, pertanto per i generatori (che lavorano ad una sola frequenza) abbiamo

$$P_I = \frac{1}{2} \Re\{\dot{V}_I i^*\} = 5.81 W \quad (5.2.8)$$

$$P_E = \frac{1}{2} \Re\{\dot{E} i_E^*\} = 74.68 W \quad (5.2.9)$$

mentre per la potenza dissipata su R_2 , essendo caratterizzata da una corrente ad entrambe le frequenze abbiamo

$$P_{R_2} = R_2 \frac{1}{2} \left(I_{R_2}^{2000} \right)^2 + R_2 \frac{1}{2} \left(I_{R_2}^{314} \right)^2 = 5.20 W \quad (5.2.10)$$

mentre l'andamento nel tempo di $i(t)$ è dato dalla somma degli andamenti del tempo delle correnti precedentemente calcolate, ossia

$$i(t) = \sin(314t + 59.81^\circ) + 0.20 \sin(2000t + 50.84^\circ) A \quad (5.2.11)$$

5.3 Nel circuito in figura calcolare la potenza assorbita dalla resistenza R_1 , la potenza attiva, reattiva e l'andamento temporale della corrente erogate dal generatore di tensione e l'energia immagazzinata in L_2 .

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 1\Omega$$

$$C = 200\mu F$$

$$L_1 = 2mH$$

$$L_2 = 5mH$$

$$E(t) = 2 \sin(1000t) + \cos\left(2000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

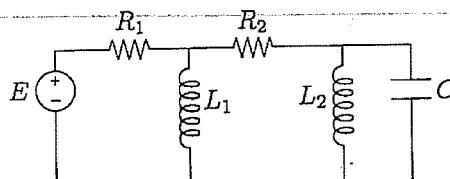


Figura 5.3.1: Circuito esercizio 5.3

Il generatore che alimenta il circuito fornisce una tensione composta da due armoniche. Dobbiamo pertanto studiare il circuito facendo agire prima una armonica e poi l'altra, e gestire i risultati in modo opportuno al fine di poter trovare le grandezze richieste.

5.3.1 Valutazione delle grandezze per $\omega = \omega_1 = 1000$.

Tutte le grandezze richieste necessitano la conoscenza della corrente erogata dal generatore di tensione. Osservando la pulsazione di risonanza del parallelo $L - C_2$, vediamo che $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = 1000 \text{ rad/s}$ ossia il parallelo alla pulsazione $\omega = \omega_1$ si comporta da circuito aperto (figura 5.3.2).

Indicando il fasore del generatore $\dot{E}_{\omega_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (tenendo quindi conto del valore efficace), possiamo calcolare immediatamente

$$\dot{I}_{\omega_1} = \frac{\dot{E}_{\omega_1}}{R_1 + j\omega_1 L_1} = 0.14 - j0.03 = 0.14 e^{-j11.31^\circ} A \quad (5.3.1)$$

Per il calcolo dell'energia immagazzinata in L_2 occorre calcolare la corrente che la attraversa. Anche se siamo nel caso di risonanza parallelo (ossia equiva-

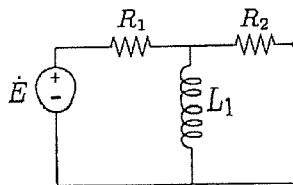


Figura 5.3.2: Circuito per $\omega = \omega_1$

lente ad un circuito aperto) la corrente in questione non è nulla. Per calcolarla possiamo sfruttare la conoscenza della tensione ai capi di L_1

$$\dot{V}_{L_1, \omega_1} = j\omega_1 L_1 \dot{I}_{\omega_1} \quad \dot{I}_{L_1, \omega_1} = \frac{\dot{V}_{L_1, \omega_1}}{j\omega_1 L_2} = 0.05 - j0.01 = 0.06 e^{-j11.31} A \quad (5.3.2)$$

5.3.2 Valutazione delle grandezze per $\omega = \omega_2 = 2000$.

Indicando il fasore relativo a questa pulsazione $\dot{E}_{\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}}$ e calcolando la \dot{Z}_{eq} l'impedenza vista dal generatore di tensione

$$\dot{Z}_s = R_2 + \frac{L_2/C}{j\omega_2 L_2 - \frac{j}{\omega C}} = (1.00 - j3.33)\Omega \quad \dot{Z}_{eq} = R_1 + \frac{j\omega_2 L_1 \dot{Z}_s}{j\omega_2 L_1 + \dot{Z}_s} = (10.30 + j4.82)\Omega \quad (5.3.3)$$

da cui ricaviamo che

$$\dot{I}_{\omega_2} = \frac{\dot{E}_{\omega_2}}{\dot{Z}_{eq}} = 0.059 + j0.02 = 0.06 e^{j19.94} A \quad (5.3.4)$$

Il calcolo della \dot{I}_{L_2, ω_2} si può effettuare lavorando con i partitori di corrente.

$$\dot{I}_{L_2, \omega_2} = \dot{I}_{\omega_2} \left(\frac{j\omega_2 L_1}{j\omega_2 L_1 + \dot{Z}_s} \right) \left(\frac{\frac{1}{j\omega_2 C}}{j\omega_2 L_2 + \frac{1}{j\omega_2 C}} \right) = 0.06 + j0.02 = 0.07 e^{-j103.75} A \quad (5.3.5)$$

5.3.3 Calcolo delle grandezze richieste.

Trattandosi di correnti a frequenza diversa si devono adottare le conoscenze relative al regime periodico non sinusoidale: le correnti devono essere som-

mate nel tempo (e non nel dominio dei fasori) ed il calcolo delle potenze deve essere effettuato sommando le potenze alle diverse frequenze, così come quello delle energie immagazzinate.

Abbiamo dunque

$$P_{R_1} = R_1(I_{\omega_1}^2 + I_{\omega_2}^2) = 0.231 W \quad (5.3.6)$$

$$P_E = \Re\{\dot{E}_{\omega_1}\dot{I}_{\omega_1}^*\} + \Re\{\dot{E}_{\omega_2}\dot{I}_{\omega_2}^*\} = 0.232 W \quad (5.3.7)$$

$$Q_E = \Im\{\dot{E}_{\omega_1}\dot{I}_{\omega_1}^*\} + \Im\{\dot{E}_{\omega_2}\dot{I}_{\omega_2}^*\} = 0.057 VAR \quad (5.3.8)$$

$$W_{L_2} = \frac{1}{2}L_2(I_{L_2,\omega_1}^2 + I_{L_2,\omega_2}^2) = 1.96 \cdot 10^{-5} J \quad (5.3.9)$$

e l'andamento temporale della corrente

$$I(t) = 0.14 \sin(1000t - 11.31^\circ) + 0.06 \cos(2000t + 19.94^\circ) \quad (5.3.10)$$

5.4 Il circuito in figura è alimentato da un generatore di tensione periodico non sinusoidale, di periodo $T = 20ms$. Determinare la potenza attiva dissipata su R_1 e l'andamento temporale della tensione su L . Lo sviluppo in serie di Fourier (riferimento coseno) della tensione ed i valori dei componenti del circuito sono i seguenti. Si considerino solo le prime tre armoniche ($n = 1, 2, 3$).

$$E(n) = \frac{100}{n^2} \quad \phi(n) = (-1)^n \frac{\pi}{4} \quad R_1 = 1\Omega \quad L = \frac{1}{\pi} mH \quad C = \frac{25}{\pi} mF$$

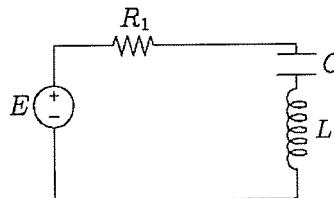


Figura 5.4.1: Circuito esercizio 5.4

Il circuito in figura è alimentato da un generatore periodico non sinusoidale, pertanto è necessario precedere utilizzando la sovrapposizione degli effetti applicata alle singole armoniche. La pulsazione fondamentale ($n = 1$) si calcola semplicemente conoscendo il periodo della forma d'onda originaria, pertanto $\omega_0 = 2\pi f = 100\pi$. Di seguito sono quindi riportati i valori dei fasori e delle pulsazioni per le tre armoniche

$$\dot{E}_1 = 100e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega_1 = \omega_0 = 100\pi$$

$$\dot{E}_2 = 25e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega_2 = 2\omega_0 = 200\pi$$

$$\dot{E}_3 = 11.11e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega_3 = 3\omega_0 = 300\pi$$

Si può inoltre verificare che la pulsazione di risonanza $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ della serie induttore - condensatore assume il valore $\omega_r = 200\pi$, coincidente con la seconda armonica.

Le correnti che scorrono nell'unica maglia del circuito sono pertanto

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j\omega_1 L - \frac{j}{\omega_1 C}} = 95.78 e^{-j28.3^\circ} A \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_2}{R_1} = 25.00 e^{j45.0^\circ} A \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_3}{R_1 + j\omega_3 L - \frac{j}{\omega_3 C}} = 10.96 e^{-j54.5^\circ} A \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

da cui è immediatamente possibile calcolare la potenza media dissipata dalla resistenza come

$$P = \frac{1}{2} R_1 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) = 4.96 kW \quad (5.4.2)$$

I fasori delle tensioni sull'induttore si calcolano direttamente conoscendo le correnti

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= j\omega_1 L \dot{I}_1 = 9.58 e^{j61.7^\circ} V \\ \dot{V}_2 &= j\omega_2 L \dot{I}_2 = 5.00 e^{j135.0^\circ} V \\ \dot{V}_3 &= j\omega_3 L \dot{I}_3 = 3.29 e^{j35.53^\circ} V \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

da cui si ottiene l'andamento della tensione nel tempo

$$v(t) = 8.58 \cos(100\pi t + 61.7^\circ) + 5.00 \cos(200\pi t + 135.0^\circ) + 3.29 \cos(300\pi t + 35.53^\circ) \quad (5.4.4)$$

5.5 Nel circuito in figura a regime calcolare l'andamento temporale della corrente erogata dal generatore di tensione E , la potenza erogata dallo stesso generatore di tensione E e la potenza attiva assorbita dal resistore R_1 .

$$E(t) = 100\cos(100t) \quad J_1(t) = 40\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) \quad J_2(t) = 60\cos\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R_1 = R = 2\Omega \quad L = 20mH \quad C = 2.5mF$$

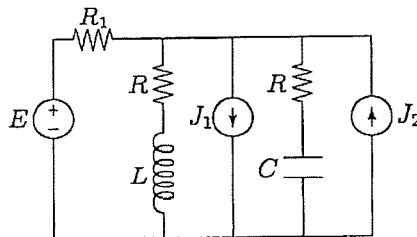


Figura 5.5.1: Circuito esercizio 5.5

Il circuito è alimentato da generatori a frequenza diversa, è necessario pertanto procedere utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti facendo agire separatamente i generatori isofrequenziali.

5.5.1 Valutazione delle grandezze per $\omega_1 = 100$

Alla pulsazione $\omega_1 = 100$ il circuito da studiare è riportato in figura 5.5.2, dove i fasori dei generatori valgono rispettivamente (riferimento seno) $\dot{E} = j100$ e $\dot{J}_1 = 40e^{j\frac{\pi}{4}}$. Si indica inoltre con \tilde{Z}_p l'impedenza risultante dei due rami in parallelo calcolata alla pulsazione ω_1

$$\tilde{Z}_p = \frac{(R + j\omega_1 L)(R - \frac{j}{\omega_1 C})}{2R + j\omega_1 L - \frac{j}{\omega_1 C}} = (2.80 + j040)\Omega \quad (5.5.1)$$

Scrivendo l'equazione all'unico anello avente come corrente incognita i_E^1 ottieniamo

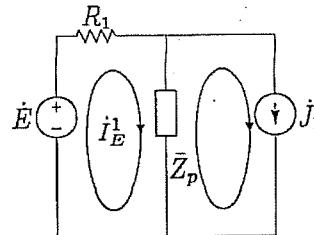


Figura 5.5.2: Circuito alla pulsazione $\omega_1 = 100$

$$\begin{aligned}\dot{E} &= (R_1 + \bar{Z}_p) j_E^1 - \bar{Z}_p j_1 \\ j_E^1 &= \frac{\dot{E} + \bar{Z}_p j_1}{R_1 + \bar{Z}_p} = (17.33 + j38.25) A\end{aligned}\quad (5.5.2)$$

5.5.2 Valutazione delle grandezze per $\omega_2 = 200$

Alla pulsazione $\omega_2 = 200$ il circuito da studiare è riportato in figura 5.5.3, dove il fasore del generatore di corrente vale $j_2 = 60e^{j\frac{\pi}{4}}$ (riferimento coseno). Si indica inoltre con \bar{Z}_p l'impedenza risultante dei due rami in parallelo calcolata alla pulsazione ω_2

$$\bar{Z}_p = \frac{(R + j\omega_2 L) \left(R - \frac{j}{\omega_2 C} \right)}{2R + j\omega_2 L - \frac{j}{\omega_2 C}} = (2.80 - j040) \Omega \quad (5.5.3)$$

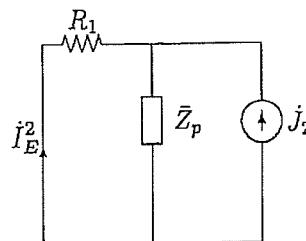


Figura 5.5.3: Circuito alla pulsazione $\omega_2 = 200$

La corrente j_E^2 si può calcolare attraverso un semplice partitore di corrente

$$I_E^2 = -\frac{\bar{Z}_p}{R + \bar{Z}_p} = (23.41 - j26.33) A \quad (5.5.4)$$

5.5.3 Calcolo delle grandezze richieste

La potenza assorbita dal resistore R_1 si calcola sommando le due potenze

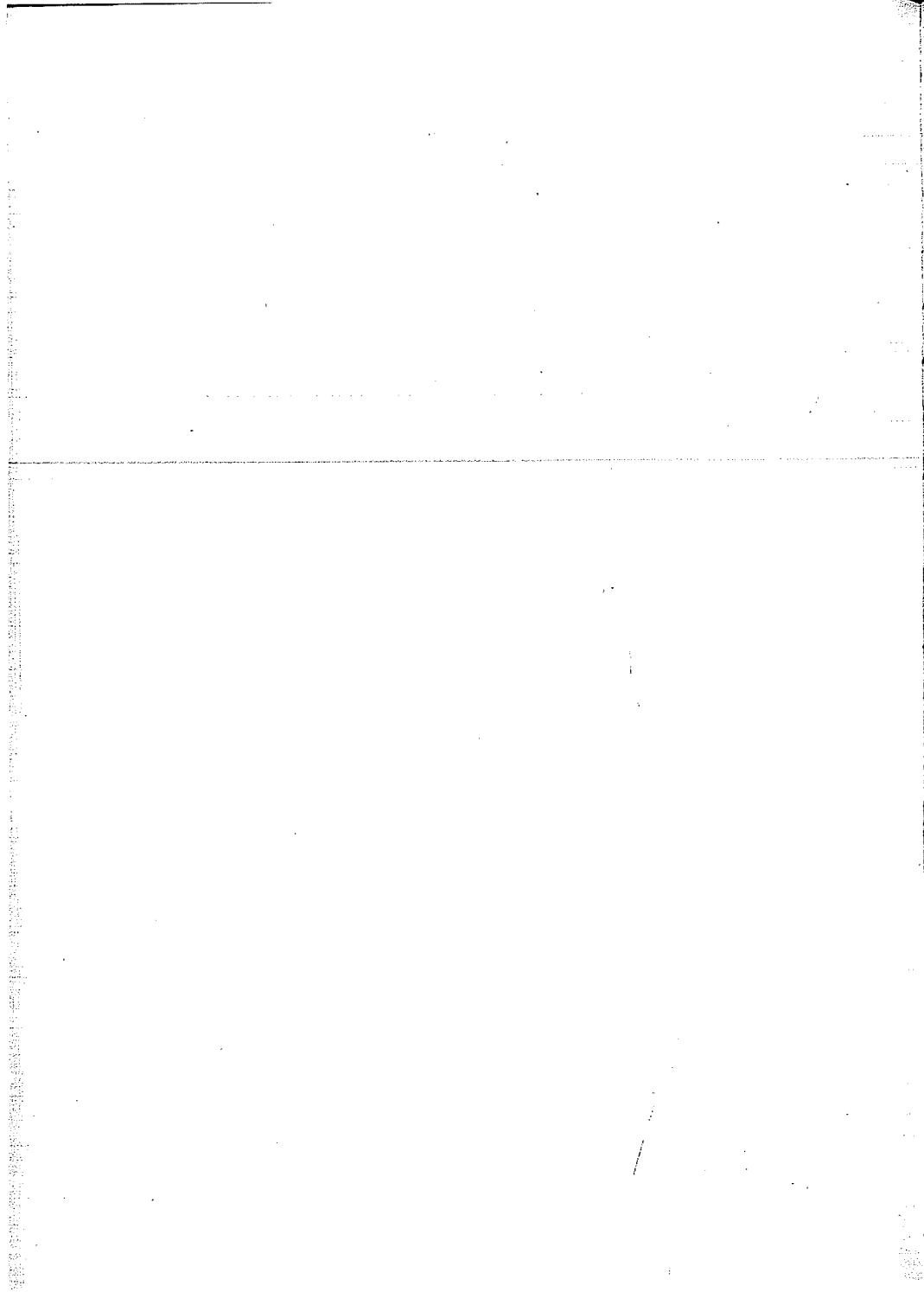
$$P_{R_1} = \frac{1}{2} [R_1 (I_E^1)^2 + R_1 (I_E^2)^2] = 3.00 kW \quad (5.5.5)$$

mentre la potenza erogata dal generatore \dot{E} si calcola attraverso l'utilizzo della potenza complessa (in cui è presente solo il contributo relativo alla pulsazione ω_1)

$$P_E = \Re \left(\frac{1}{2} \dot{E} \cdot (I_E^1)^* \right) = 1.91 kW \quad (5.5.6)$$

L'andamento temporale della corrente erogata dal generatore di tensione lo si ottiene sommando le espressioni temporali relative alle correnti ricavate in (5.5.2) ed (5.5.4) che risulta

$$i_E(t) = 41.99 \sin(100t + 65.62^\circ) + 35.23 \cos(200t - 48.37^\circ) A \quad (5.5.7)$$



6 Valutazione della risposta in frequenza e diagrammi di Bode

6.1 Disegnare i diagrammi di Bode relativi alla risposta in frequenza \dot{V}_o/\dot{V}_i del circuito rappresentato in figura.

$$R = 0.5\Omega$$

$$C = 10\mu F$$

$$L = 1mH$$

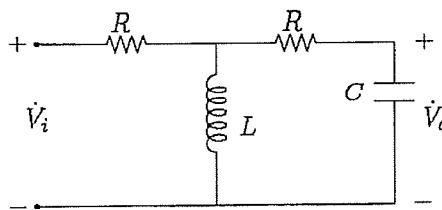


Figura 6.1.1: Circuito esercizio 6.1

Per non ricorrere alla soluzione letterale di un sistema 2×2 , si effettua la scelta di trovare l'equivalente di Thevenin della parte sinistra del circuito, e di utilizzare tale risultato calcolando la \dot{V}_o attraverso l'utilizzo di un partitore di tensione. Osservando la figura 6.1.2, possiamo semplicemente scrivere che

$$\dot{V}_{th} = \dot{V}_i \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \quad \bar{Z}_{th} = R + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \quad (6.1.1)$$

Ragionando ora sul secondo circuito della figura 6.1.2, si ottiene

$$\dot{V}_o = \dot{V}_{th} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + \bar{Z}_{th}} = \frac{\dot{V}_{th}}{1 + \bar{Z}_{th} j\omega C} \quad (6.1.2)$$

da cui, svolgendo alcuni calcoli

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \frac{\dot{V}_{th} j\omega L}{(R + j\omega L) \left(1 + j\omega RC + j\omega C \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \right)} = \\ &= \frac{\dot{V}_{th} j\omega L}{(R + j\omega L)(1 + j\omega RC) - \omega^2 RLC} \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

da cui si ottiene che

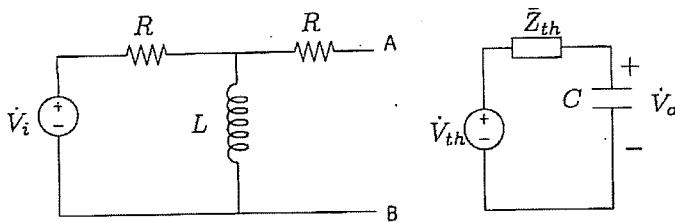


Figura 6.1.2: Calcolo equivalente di Thevenin

$$\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega(L + R^2C) - 2\omega^2RLC} = \frac{L}{R} \frac{j\omega}{1 + j\omega \left(\frac{L+R^2C}{R} \right) + 2(j\omega)^2LC} \quad (6.1.4)$$

La risposta in frequenza così ottenuta ha uno zero nell'origine ed una coppia di poli. Inserendo i valori dati in (6.1.4) otteniamo

$$\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{j\omega}{1 + j\omega \cdot 2 \cdot 10^{-3} + (j\omega)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \quad (6.1.5)$$

Studiando il denominatore, verifichiamo che le radici del polinomio di secondo grado sono reali, e pari a $\omega_1 = -9.9749 \cdot 10^4$ e $\omega_2 = -0.0501 \cdot 10^4$.

Il diagramma di Bode che ne consegue è riportato in figura 6.1.3:

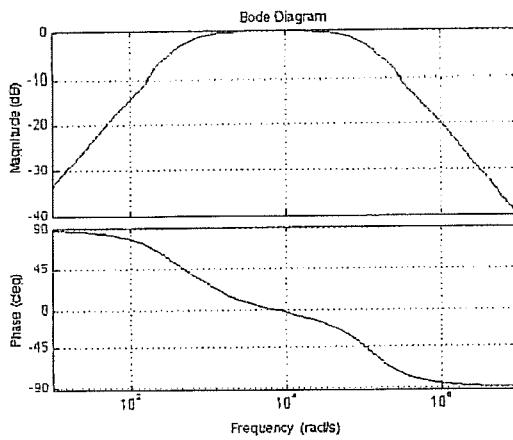


Figura 6.1.3: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase

6.2 Disegnare il diagramma di Bode del seguente circuito relativamente alla risposta in frequenza \dot{V}_o/\dot{V}_i . Trovare inoltre l'andamento temporale della tensione $V_x(t)$ ai capi dell'induttore L_1 quando il circuito è alimentato da una tensione sinusoidale $\dot{V}_i(t) = 10 \sin(314t + \pi/4)$.

$$L_1 = 10 \text{ mH} \\ R = 2\Omega$$

$$L_2 = 8 \text{ mH} \\ M = 6 \text{ mH} \\ C = 1 \mu\text{F}$$

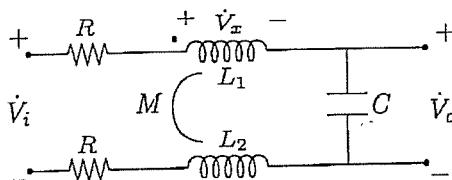


Figura 6.2.1: Circuito Esercizio 6.2

Per il calcolo della risposta in frequenza è sufficiente scrivere l'equazione all'unica maglia del circuito

$$\dot{V}_i = \left(2R + j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M + \frac{1}{j\omega C} \right) \dot{I} \quad (6.2.1)$$

da cui si ricava l'espressione della risposta in frequenza

$$\dot{V}_o = \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = \frac{\dot{V}_i}{2Rj\omega C + -\omega^2(L_1 + L_2)C + 2\omega^2MC + 1} \quad (6.2.2)$$

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{1}{(j\omega)^2(L_1 + L_2 - 2M)C + j\omega 2RC + 1} \quad (6.2.3)$$

Le radici del denominatore sono complesse coniugate, di valori $\lambda_{1,2} = -333.33 \pm j235.70$, a cui corrisponde quindi una pulsazione di taglio $\omega_n = 408.25 \text{ rad/s}$ ed uno smorzamento $\xi = 0.82$.

Il diagramma di Bode corrispondente è riportato in figura 6.2.2.

Utilizzando i risultati già noti per semplificare i calcoli, possiamo calcolare la tensione ai capi dell'induttore L_1 nel seguente modo:

$$\dot{V}_o = \tilde{H}(314) \cdot 10 e^{j\pi/4} = (0.23 - j0.72) V \quad (6.2.4)$$

da cui

$$\dot{I} = j\omega C \dot{V}_o = (0.23 + j0.07) A \quad (6.2.5)$$

Possiamo ora calcolare la tensione ai capi dell'induttore

$$\dot{V}_x = j\omega(L_1 - M)\dot{I} = -0.09 + j0.28 = 0.30 e^{j108.01^\circ} V \quad (6.2.6)$$

e la relativa espressione temporale

$$V_x(t) = 0.30 \sin(314t + 108.01) V \quad (6.2.7)$$

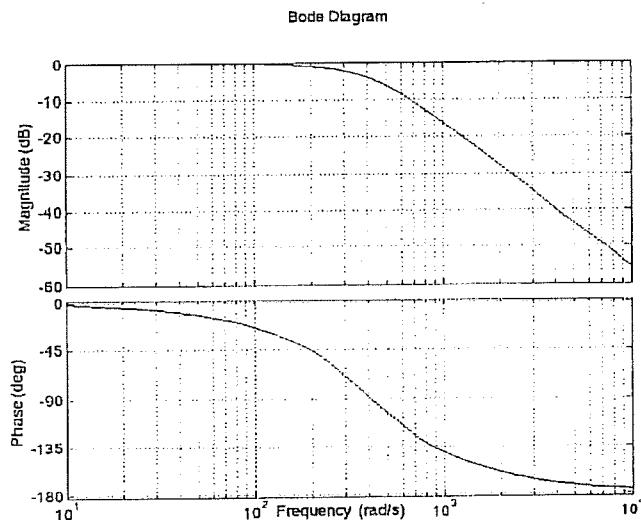


Figura 6.2.2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase

6.3 Disegnare i diagrammi di Bode della risposta in frequenza $\dot{V}_{out}/\dot{V}_{in}$, e determinare l'andamento di $V_{out}(t)$ quando il circuito è alimentato da una tensione $V_{in}(t) = 100 \sin(2000t)$

$$R = 1\Omega \quad L = 50mH \quad C = 1mF \quad \alpha = 4$$

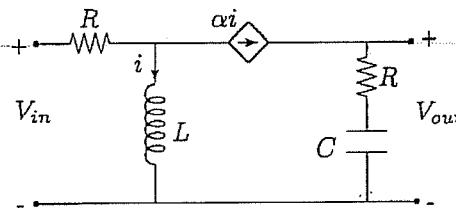


Figura 6.3.1: Circuito esercizio 6.3

È necessario alimentare il circuito con un generatore di tensione \dot{V}_{in} e calcolare conseguentemente il rapporto $\dot{V}_{out}/\dot{V}_{in}$; in figura 6.3.2 è riportato il circuito con l'indicazione degli anelli (di cui uno a corrente impressa) a cui scrivere le equazioni. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \dot{V}_{in} &= (R + j\omega L)\dot{I}_1 - j\omega L\alpha i \\ i &= \dot{I}_1 - \alpha i \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Ricavando i dalla seconda equazione di (6.3.1) e sostituendo nella prima si ottiene

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{in}}{R + j\omega L - j\omega L \frac{\alpha}{1+\alpha}} \tag{6.3.2}$$

Abbiamo inoltre l'espressione della tensione in uscita:

$$\dot{V}_{out} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \dot{I}_1 \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \tag{6.3.3}$$

Sostituendo (6.3.2) in (6.3.3) otteniamo la risposta in frequenza del circuito

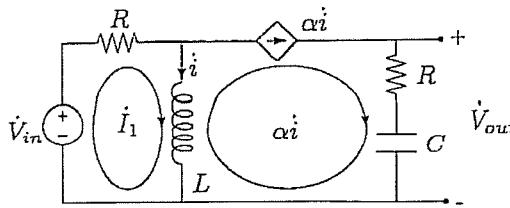


Figura 6.3.2: Calcolo della risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{jR\omega C + 1}{j\omega [RC + j\omega LC(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha})]} \quad (6.3.4)$$

ossia

$$H(j\omega) = 800 \frac{1 + j\omega \cdot 10^{-3}}{j\omega(1 + j\omega \cdot 10^{-2})} \quad (6.3.5)$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati in figura 6.3.3.

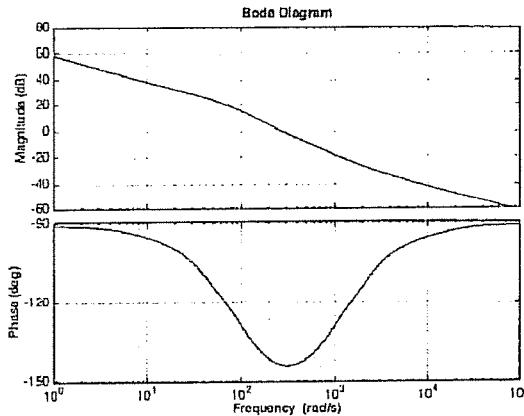
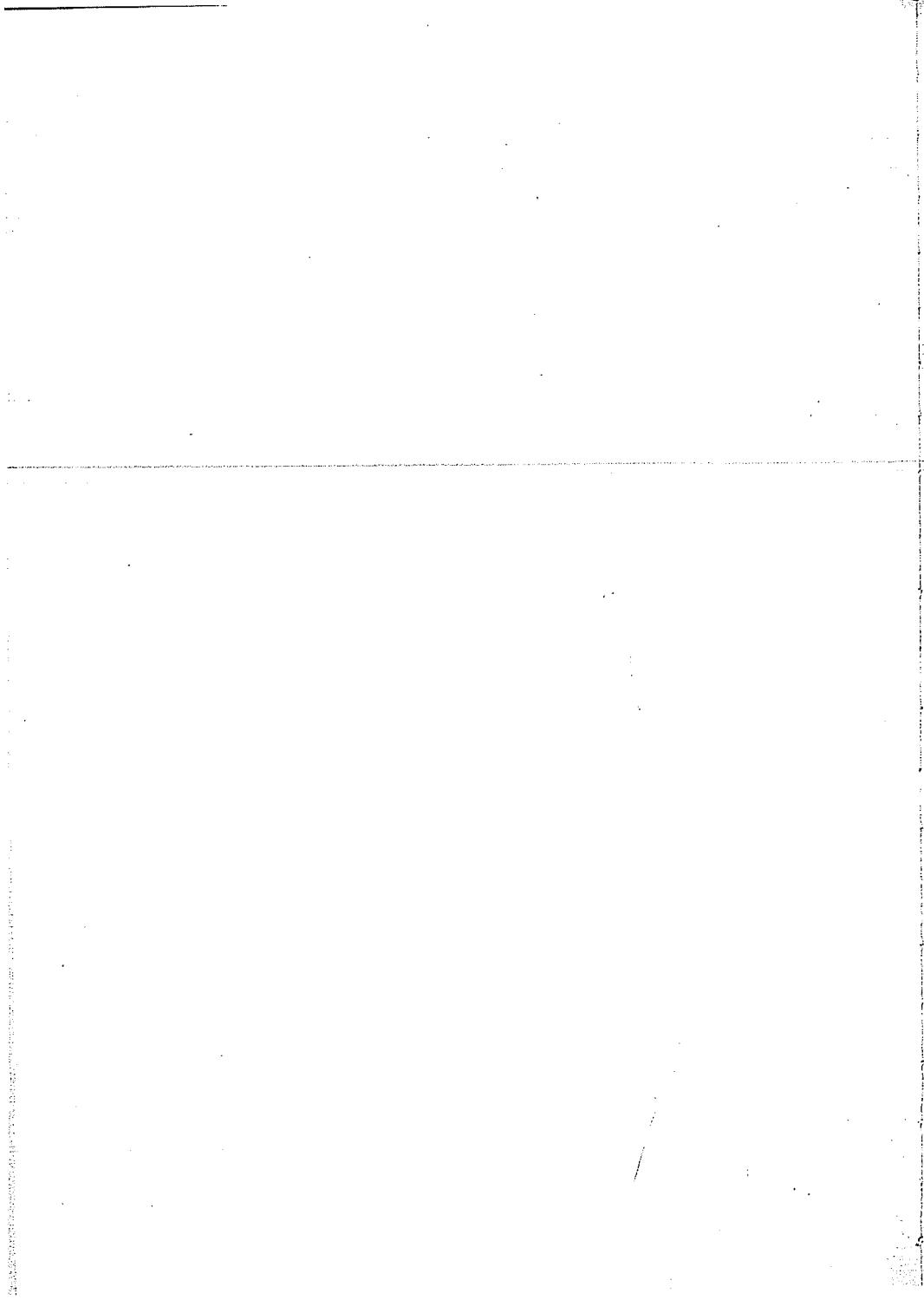


Figura 6.3.3: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase

Per il calcolo dell'andamento di $V_{out}(t)$ in presenza dell'alimentazione è a questo punto sufficiente valutare $H(j\omega)$ alla pulsazione $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ e, trattandosi di un sistema lineare, sappiamo che l'uscita sarà

$$V_{out}(t) = 100|H(j\omega)| \sin(2000t + \angle H(j\omega)) = 4.47 \sin(2000t - 113.70^\circ) \quad (6.3.6)$$

7 Soluzione di circuiti trifasi



7.1 Nel seguente circuito trifase calcolare la corrente erogata dal generatore relativo alla fase 1. Effettuare poi un rifasamento totale del carico di cui sono noti i dati di targa, indicare il valore della capacità necessario e calcolare nuovamente la stessa corrente a rifasamento avvenuto. I generatori lavorano ad una frequenza di 50Hz .

$$\dot{E}_a = V_n e^{j0^\circ} \text{V}$$

$$\dot{E}_b = V_n e^{j120^\circ} \text{V}$$

$$\dot{E}_c = V_n e^{j240^\circ} \text{V}$$

$$\bar{Z}_L = (2+j)\Omega$$

$$\bar{Z}_S = 300\Omega$$

$$\bar{Z}_T = 200\Omega$$

$$V_n = 30\text{kV}$$

$$P_n = 100\text{MW}$$

$$\cos\phi = 0.7$$

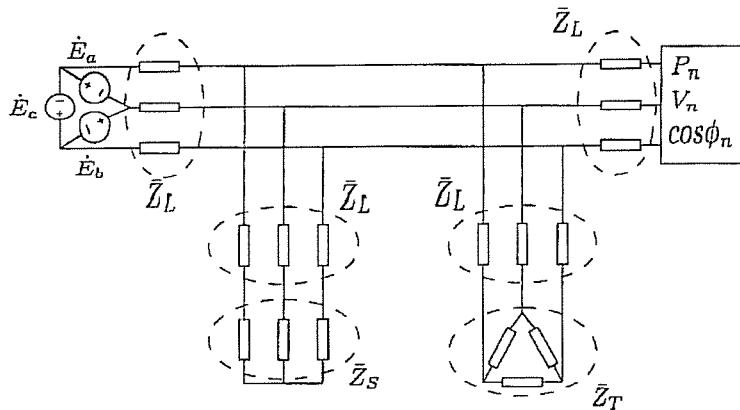


Figura 7.1.1: Circuito esercizio 7.1

Trattandosi di un sistema simmetrico ed equilibrato, è possibile risolvere semplicemente il problema studiando il circuito equivalente monofase, riportato in figura 7.1.2 dove abbiamo preventivamente trasformato il carico a triangolo nel suo equivalente a stella di impedenza $\frac{\bar{Z}_T}{3}$, calcolato il fasore della tensione di fase $\dot{E}_1 = \frac{V_n}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ}$ e calcolato l'impedenza equivalente del carico di cui sono noti i dati di targa:

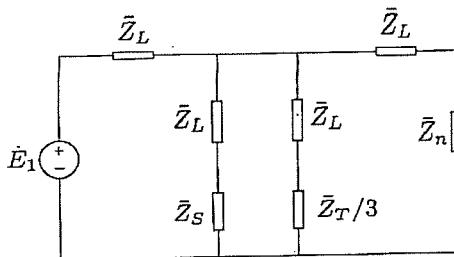


Figura 7.1.2: Circuito equivalente monofase

$$\bar{Z}_n = \frac{V_n^2 \cos \phi_n}{P_n} \left(\cos \phi_n + j \sqrt{1 - \cos^2 \phi_n} \right) = (4.41 + j4.50) \Omega \quad (7.1.1)$$

Dal momento che è richiesto solo il calcolo della corrente erogata dal generatore, la cosa più semplice da fare è quella di calcolare l'impedenza equivalente vista dal generatore.

$$\bar{Z}_{S1} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_S = (302 + j) \Omega$$

$$Z_{S2} = \bar{Z}_L + \frac{\bar{Z}_T}{3} = (68.67 + j) \Omega \quad (7.1.2)$$

$$\bar{Z}_{S3} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_H = (6.41 + j5.50) \Omega$$

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_L + \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_{S1}} + \frac{1}{\bar{Z}_{S2}} + \frac{1}{\bar{Z}_{S3}}} = (8.13 + j5.40) \Omega \quad (7.1.3)$$

pertanto si ottiene

$$I_1 = \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_{eq}} = 1772.03 - j111.11 = 1775.51 e^{-j3.59^\circ} A \quad (7.1.4)$$

Per effettuare il rifasamento come sappiamo occorre mettere in parallelo al carico \bar{Z}_n un condensatore di una opportuna capacità C . La capacità in questione, per effettuare un rifasamento completo, deve essere di valore

$$C = \frac{L_n}{Z_n^2} = \frac{L_n}{R_n^2 + X_n^2} = 3.61 \cdot 10^{-4} F \quad (7.1.5)$$

dove $L_n = X_n/314$. Con questo valore di capacità, il carico risultante è puramente resistivo, ed ha una resistenza di valore

$$R = \frac{R_n^2 + X_n^2}{R_n} = 9\Omega \quad (7.1.6)$$

che deve essere inserita al posto di Z_n nella equazione (7.1.2). Questo porta ad un nuovo valore dell'impedenza equivalente $\tilde{Z}_{eq} = (11.20 + j1.72)\Omega$ ed al nuovo valore della corrente erogata dal generatore della fase 1 $\dot{I}_1 = 1424.30 - j554.86 = 1528.57e^{-j21.28^\circ} A$. Il nuovo valore di corrente è minore del valore pre-rifasamento, come è corretto aspettarsi e la componente reattiva è diminuita.

7.2 Per il circuito trifase simmetrico ed equilibrato rappresentato in figura calcolare: le potenze attive effettivamente assorbite dai due carichi di cui sono noti i dati di targa e le potenze attive erogate dai generatori.

$$\begin{array}{lll} \dot{E}_1 = 220V & \bar{Z}_L = (0.1 + j)\Omega & \bar{Z}_a = (10 + j2)\Omega \\ P_{n1} = 50kW & V_{n1} = 380V & \cos\phi_{n1} = 0.8 \\ P_{n2} = 10kW & V_{n2} = 380V & \cos\phi_{n2} = 0.9 \end{array}$$

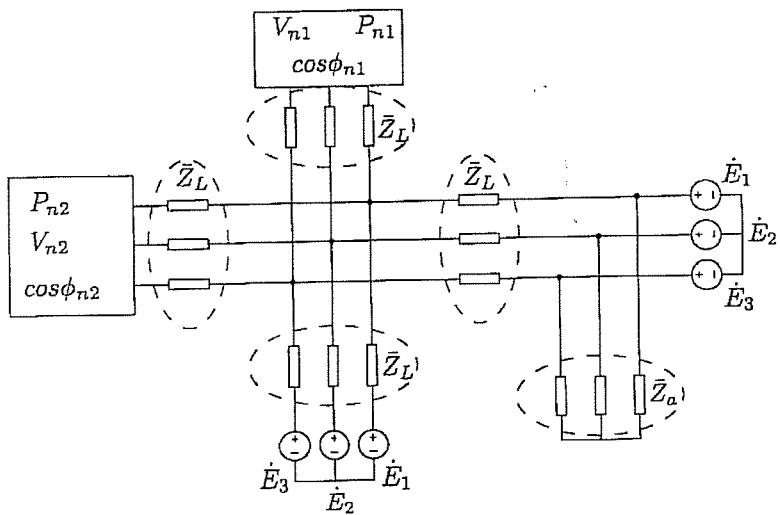


Figura 7.2.1: Circuito Esercizio 7.2

Trattandosi di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è possibile ricorrere all'utilizzo del circuito monofase equivalente. In questo particolare caso l'unico passaggio intermedio da compiere è il calcolo delle impedanze equivalenti a stella relative ai due carichi di cui sono noti i dati di targa:

$$\bar{Z}_{n1} = \frac{V_{n1}^2 \cos \phi_{n1}}{P_{n1}} \left(\cos \phi_{n1} + j \sqrt{1 - \cos^2 \phi_{n1}} \right) = (1.85 + j1.39) \Omega \quad (7.2.1)$$

$$\bar{Z}_{n2} = \frac{V_{n2}^2 \cos \phi_{n2}}{P_{n2}} \left(\cos \phi_{n2} + j \sqrt{1 - \cos^2 \phi_{n2}} \right) = (11.70 + j5.66) \Omega \quad (7.2.2)$$

Il circuito monofase equivalente è riportato in figura 7.2.2, dove è già riportata l'indicazione dei nodi da utilizzare per la scrittura delle equazioni con il metodo delle tensioni ai nodi, in questo caso il più adatto in quanto consente di scrivere una sola equazione.

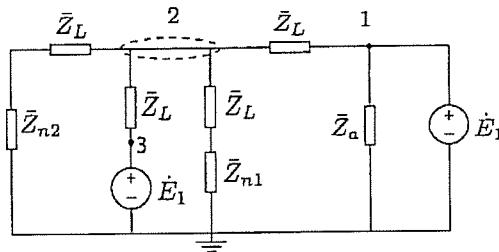


Figura 7.2.2: Circuito monofase equivalente

$$0 = \dot{V}_2 \left(\frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n1}} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n2}} \right) - 2 \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_L} \quad (7.2.3)$$

da cui

$$\dot{V}_2 = \frac{2 \dot{E}_1}{\bar{Z}_L} \left(\frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n1}} + \frac{1}{\bar{Z}_L} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n2}} \right)^{-1} = 188.05 - j19.56 = 189.07 e^{-j5.94^\circ} V \quad (7.2.4)$$

Possiamo a questo punto calcolare tutte le correnti che sono necessarie per il calcolo delle potenze richieste; in particolare le correnti assorbite dai due carichi

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n1}} = 33.69 - j51.30 = 61.37 e^{-j55.71^\circ} A \quad (7.2.5)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_{n2}} = 11.37 - j8.08 = 13.95 e^{-j35.40^\circ} A \quad (7.2.6)$$

e le correnti erogate dai due generatori

$$I_a = \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}_2}{\bar{Z}_L} = 22.53 - j29.69 = 37.27 e^{-j52.80^\circ} A \quad (7.2.7)$$

$$I_b = \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}_2}{\bar{Z}_L} + \frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_a} = 43.69 - j33.92 = 55.31 e^{-j37.03^\circ} A \quad (7.2.8)$$

Utilizzando il teorema di Boucherot è possibile calcolare le potenze assorbite dai carichi

$$P_1 = 3R_{n1} I_1^2 = 20.89 kW \quad (7.2.9)$$

$$P_2 = 3R_{n2} I_2^2 = 6.83 kW \quad (7.2.10)$$

e le potenze effettivamente erogate dai generatori

$$P_{E1}^a = 3\Re\{\dot{E}_1 I_a^*\} = 14.87 kW \quad (7.2.11)$$

$$P_{E1}^b = 3\Re\{\dot{E}_1 I_b^*\} = 28.83 kW \quad (7.2.12)$$

7.3 Nel seguente circuito trifase simmetrico ed equilibrato calcolare la potenza attiva e reattiva erogate dal generatore \dot{E}_a . Effettuare poi il rifasamento totale del carico C_1 , indicando la capacità necessaria, e calcolare nuovamente le potenze erogate da \dot{E}_a .

$$\dot{E}_a = 9 \text{kV}$$

$$f = 50 \text{Hz}$$

$$P_{n1} = 500 \text{kW}$$

$$P_{n2} = 300 \text{kW}$$

$$P_{n3} = 600 \text{kW}$$

$$\dot{E}_b = 9 \text{kV}$$

$$\bar{Z}_s = 100 \Omega$$

$$V_{n1} = 15 \text{kV}$$

$$V_{n2} = 15 \text{kV}$$

$$V_{n3} = 15 \text{kV}$$

$$\bar{Z}_l = (0.01 + j0.2 \cdot 10^{-3}) \Omega$$

$$\bar{Z}_t = 50 \Omega$$

$$\cos\phi_{n1} = 0.45$$

$$\cos\phi_{n2} = 0.98$$

$$\cos\phi_{n3} = 1$$

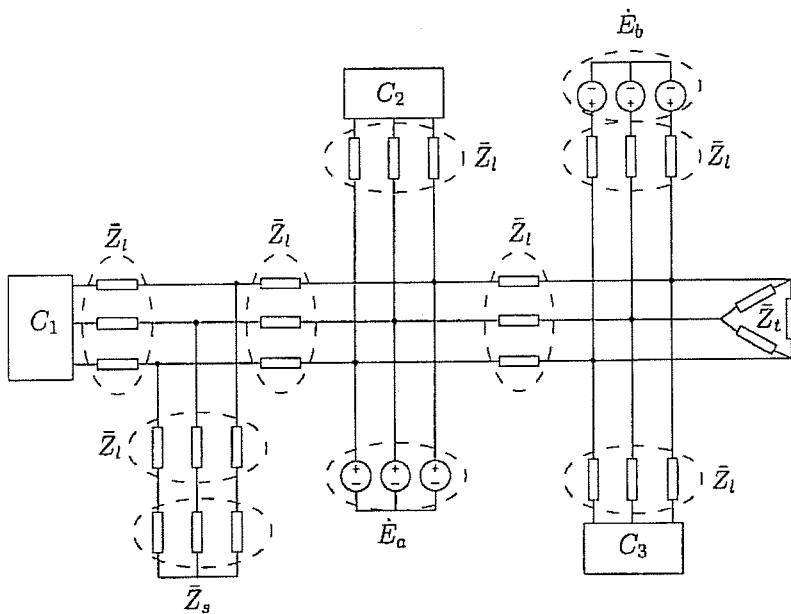


Figura 7.3.1: Circuito esercizio 7.3

È chiaramente necessario studiare il circuito equivalente monofase per poter calcolare la corrente erogata dal generatore di tensione \dot{E}_a e di conseguenza le potenze. Si procede al calcolo delle impedenze equivalenti a stella dei carichi di cui sono noti i dati di targa.

$$\bar{Z}_1 = \frac{V_{n1}^2 \cos\phi_{n1}}{P_{n1}} \left(\cos\phi_{n1} + j\sqrt{1 - \cos^2\phi_{n1}} \right) = (91.13 + j180.84)\Omega \quad (7.3.1)$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{V_{n2}^2 \cos\phi_{n2}}{P_{n2}} \left(\cos\phi_{n2} + j\sqrt{1 - \cos^2\phi_{n2}} \right) = (720.3 + j146.26)\Omega \quad (7.3.2)$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{V_{n3}^2 \cos\phi_{n3}}{P_{n3}} \left(\cos\phi_{n3} + j\sqrt{1 - \cos^2\phi_{n3}} \right) = 375\Omega \quad (7.3.3)$$

In questo modo tutte le impedenze del circuito monofase equivalente riportato in figura 7.3.2 sono note.

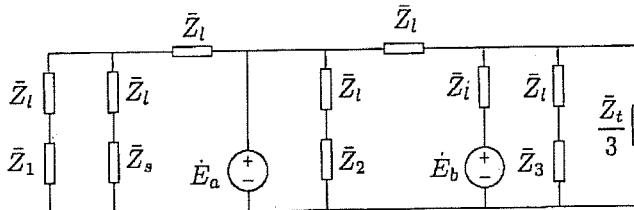


Figura 7.3.2: Circuito monofase equivalente

È possibile calcolare la corrente erogata dal generatore \dot{E}_a semplificando il circuito monofase con l'osservazione che il generatore ideale di tensione può essere sdoppiato dando origine ai tre circuiti indipendenti riportati in figura 7.3.3. La corrente totale erogata dal generatore sarà quindi data dalla somma delle tre correnti erogate dal generatore nei tre circuiti.

Analisi del circuito 1. La corrente erogata nel circuito 1, \dot{I}_a^1 , si calcola direttamente calcolando l'impedenza equivalente vista dal generatore

$$\dot{I}_a^1 = \frac{\dot{E}_a}{\bar{Z}_l + \frac{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_s)(\bar{Z}_l + \bar{Z}_1)}{2\bar{Z}_l + \bar{Z}_s + \bar{Z}_1}} = (109.99 - j39.68) = 116.92e^{-j19.84^\circ} A \quad (7.3.4)$$

Analisi del circuito 2. La corrente erogata nel circuito 2 è

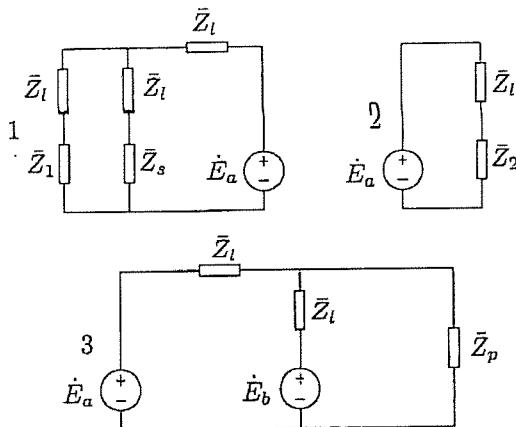


Figura 7.3.3: Suddivisione nei tre sottocircuiti

$$i_a^2 = \frac{\dot{E}_a}{\bar{Z}_l + \bar{Z}_2} = (12.00 - j2.44) = 12.24 e^{-j11.40^\circ} A \quad (7.3.5)$$

Analisi del circuito 3. La corrente erogata dal generatore \dot{E}_a nel circuito 3 (dove $\bar{Z}_p = \frac{(\bar{Z}_l + \bar{Z}_3)\bar{Z}_l/3}{\bar{Z}_l + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_l/3}$) è calcolabile sia con il metodo degli anelli che con la sovrapposizione degli effetti. Applicando quest'ultima procedura otteniamo

$$i_a^3 = \frac{\dot{E}_a}{\bar{Z}_l + \frac{\bar{Z}_l \bar{Z}_p}{\bar{Z}_l + \bar{Z}_p}} - \frac{\dot{E}_b}{\bar{Z}_l + \frac{\bar{Z}_l \bar{Z}_p}{\bar{Z}_l + \bar{Z}_p}} \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_l + \bar{Z}_p} = (281.91 - j1.77 \cdot 10^{-3}) = 281.91 A \quad (7.3.6)$$

Sommando le tre correnti abbiamo

$$\dot{I}_a = i_a^1 + i_a^2 + i_a^3 = (403.89 - j42.11) = 406.08 e^{-j5.95^\circ} A \quad (7.3.7)$$

da cui è possibile calcolare le potenze erogate dal generatore direttamente con l'utilizzo della potenza complessa

$$P + jQ = 3\dot{E}_a \dot{I}_a^* = 1.09 \cdot 10^7 + j1.14 \cdot 10^6 \quad (7.3.8)$$

Dobbiamo ora rifasare il carico C_1 ; sappiamo che nel caso di rifasamento completo la capacità da utilizzare ha valore

$$C = \frac{X_1 / \omega}{R_1^2 + X_1^2} = 1.4 \cdot 10^{-5} F \quad (7.3.9)$$

e che la nuova impedenza equivalente del carico \bar{Z}_1^{rif} , puramente resistiva, ha valore

$$\bar{Z}_1^{rif} = \frac{R_1^2 + X_1^2}{R_1} = 450 \Omega \quad (7.3.10)$$

Per calcolare la nuova corrente erogata dal generatore \dot{E}_a dobbiamo nuovamente analizzare i tre sottocircuiti: solo la corrente i_a^1 cambia, quindi possiamo calcolarla utilizzando nuovamente la 7.3.4, dove al posto dell'impedenza \bar{Z}_1 inseriamo l'impedenza \bar{Z}_1^{rif} .

Abbiamo quindi

$$i_a^1 = 109.98 - j4.58 \cdot 10^{-4} = 109.98 A \quad \dot{i}_a = 403.89 - j2.44 = 403.90 e^{-j0.35^\circ} A \quad (7.3.11)$$

e la nuova potenza erogata

$$P + jQ = 3\dot{E}_a \dot{i}_a^1 = 1.09 \cdot 10^7 + j6.59 \cdot 10^4 \quad (7.3.12)$$

ossia una potenza attiva sostanzialmente invariata ed una potenza reattiva ridotta.

7.4 Il circuito trifase in figura è alimentato da un generatore trifase simmetrico a terna diretta, che alimenta un carico squilibrato caratterizzato dalle tre impedanze \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 e \bar{Z}_3 . Determinare la potenza attiva assorbita dal suddetto carico e la potenza dissipata sulla resistenza R.

$$\dot{E}_1 = 20 \text{ kV} \quad \bar{Z}_L = (0.5 + 0.1j) \Omega \quad \bar{Z}_1 = (1 + j) \Omega \\ \bar{Z}_2 = (0.5 - j) \Omega \quad \bar{Z}_3 = 0.5j \quad R = 2 \Omega$$

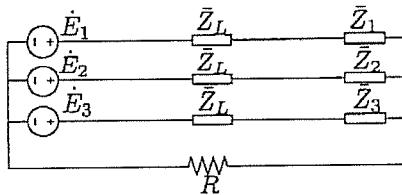


Figura 7.4.1: Circuito esercizio 7.4

Non trattandosi di un circuito simmetrico ed equilibrato non è possibile utilizzare l'equivalente monofase per il calcolo delle grandezze in gioco. Si può quindi procedere con il metodo agli anelli o ai nodi; in questo caso la via più rapida è il metodo delle tensioni ai nodi, sotto forma del teorema di Millmann. È possibile calcolare direttamente la tensione \dot{V} ai capi dei due centri stella (come polo negativo si considera il centro stella dei generatori, data la loro polarità)

$$\dot{V} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_2} + \frac{\dot{E}_3}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_3} + \frac{1}{R}} = (7.54 + j3.99) V \quad (7.4.1)$$

da cui si ricavano direttamente le tre correnti

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_1} = (4.13 - j5.69) A \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{V}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_2} = (0.90 - j20.50) A \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_3 - \dot{V}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_3} = (-1.27 + j28.18) A \\ \dot{I}_4 &= \frac{\dot{V}}{R} = (3.77 + j1.99) A \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

e le tre potenze

$$\begin{aligned} P &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 259.91 W \\ Q &= X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 = 26.44 VAR \\ P_r &= R I_4^2 = 36.40 W \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

7.5 Nel circuito trifase in figura le due terne dei generatori sono dirette; determinare la potenza effettivamente assorbita dal carico di cui sono noti i dati di targa e la potenza complessiva erogata dalle due terne di generatori. Effettuare poi un rifasamento totale del carico e determinare nuovamente le grandezze di cui sopra.

$$\dot{E}_1 = 1kV \quad \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = 1\Omega \quad P_n = 1MW \quad V_n = 1.7kV \quad S_n = 1.5MVA$$

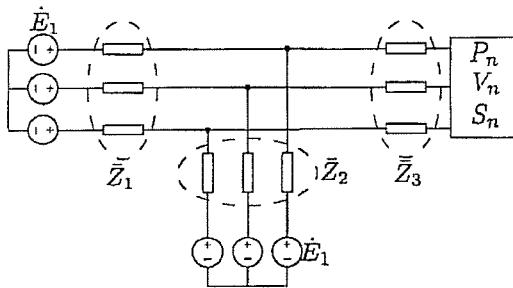


Figura 7.5.1: Circuito esercizio 7.5

Trattandosi di un circuito simmetrico ed equilibrato è possibile studiare il circuito monofase equivalente relativo ad una fase. Come primo passo quindi si trova la terna di impedenze relativa al carico di cui sono noti i dati di targa

$$Q_n = \sqrt{S_n^2 - P_n^2} = 1.12MVAR \quad (7.5.1)$$

$$\cos\phi_n = \cos\left(\arctan\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)\right) = 0.67 \quad (7.5.2)$$

$$\bar{Z}_n = \frac{V_n^2 \cos\phi_n}{P_n} \left(\cos\phi_n + j\sqrt{1 - \cos^2\phi_n} \right) = (1.28 + j1.44)\Omega \quad (7.5.3)$$

A questo punto è necessario operare sul circuito monofase equivalente mostrato in Figura 7.5.2 in cui è indicato il nodo di riferimento e l'unica tensione incognita \dot{V} nel caso di applicazione del metodo delle tensioni ai nodi.

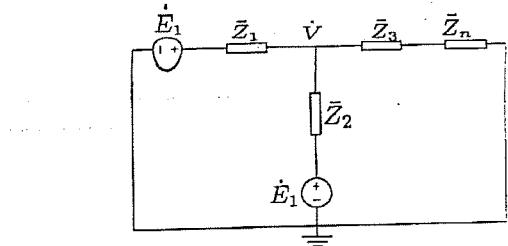


Figura 7.5.2: Circuito monofase equivalente

L'unica equazione da scrivere risulta pertanto

$$0 = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_n} \right) - \frac{E_1}{Z_1} - \frac{E_1}{Z_2} \quad (7.5.4)$$

da cui, risolvendo, si ottiene

$$V = (858.16 + j73.15) V = 861.27 e^{j4.87^\circ} \quad (7.5.5)$$

Questo consente di calcolare le correnti erogate dai generatori (che sono coincidenti data l'uguaglianza delle impedenze) e la corrente assorbita dal carico come

$$I_E = \frac{E_1 - V}{Z_1} = (141.84 - j73.15) A = 159.59 e^{-j27.28^\circ} A \quad (7.5.6)$$

$$I_L = \frac{V}{Z_3 + Z_n} = (283.68 - j146.31) A = 319.19 e^{-j27.28^\circ} A \quad (7.5.7)$$

Ogni terna di generatori pertanto erogherà le seguenti potenze attive e reattive

$$P = 3\Re\{E_1 I_E^*\} = 425.52 kW \quad (7.5.8)$$

$$Q = 3\Im\{E_1 I_E^*\} = 219.46 kVAR \quad (7.5.9)$$

e la potenza assorbita dal carico è

$$P_L = 3\Re\{\bar{Z}_n\} I_L^2 = 392.50 kW \quad (7.5.10)$$

$$Q_L = 3\Im\{\bar{Z}_n\} I_L^2 = 438.92 kVAR \quad (7.5.11)$$

Quando viene effettuato il rifasamento completo il carico equivalente è una resistenza. Dal momento che non è chiesto il valore della capacità di rifasamento, la strada più immediata consiste nel calcolare la nuova \bar{Z}_n secondo l'equazione (7.5.3) considerando $Q_n = 0$. Si ottiene quindi un valore di $\bar{Z}_n^r = 2.89\Omega$.

Si ripetono a questo punto gli stessi calcoli con le equazioni (7.5.4) e (7.5.6) che rimangono inalterate (eccetto che per il nuovo valore dell'impedenza di carico) e si ottengono i seguenti valori per quanto riguarda i generatori

$$\dot{V}^r = 886.10V \quad (7.5.12)$$

$$\dot{I}_E^r = \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}^r}{\bar{Z}_1} = 113.90A \quad (7.5.13)$$

$$P = 3 * \Re\{\dot{E}_1 \dot{I}_E^{r*}\} = 341.69kW \quad (7.5.14)$$

$$Q = 3 * \Im\{\dot{E}_1 \dot{I}_E^{r*}\} = 0VAR \quad (7.5.15)$$

ed i seguenti per quanto riguarda il carico

$$\dot{I}_L^r = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_n^r} = 227.79A \quad (7.5.16)$$

$$P_L = 3\Re\{\bar{Z}_n\} I_L^2 = 449.87kW \quad (7.5.17)$$

Si noti come i valori di tensione e corrente siano più bassi ed in fase e che la potenza reattiva sia nulla (trattandosi infatti di circuito puramente resistivo).

7.6 Il circuito in figura, operante a regime sinusoidale, è caratterizzato da una terna diretta di generatori trifase (di cui è dato il generatore relativo alla fase 1) e 4 terne di impedenze equilibrate. Sono inoltre presenti un generatore di corrente \dot{I} ed una resistenza R . Determinare la potenza attiva e reattiva erogata da ciascun generatore e la potenza attiva complessivamente assorbita dalle impedenze \bar{Z}_2 .

$$\dot{E} = 200e^{j0^\circ} \quad \dot{I} = 1e^{j0^\circ} \quad \bar{Z}_1 = \bar{Z}_4 = (1+j)\Omega \quad \bar{Z}_2 = (1-j)\Omega \quad \bar{Z}_3 = 1\Omega \quad R = 2\Omega$$

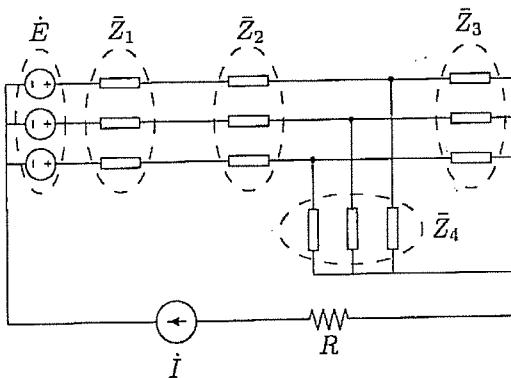


Figura 7.6.1: Circuito esercizio 7.6

La prima semplificazione da compiere è il parallelo fra le impedenze \bar{Z}_3 e \bar{Z}_4 che dà come risultato l'impedenza $\bar{Z}_5 = (0.6 + j0.2)\Omega$. A questo punto è possibile risolvere il circuito in due modi distinti: applicando il metodo degli anelli (scrivendo due le equazioni a due anelli considerando il terzo caratterizzato dalla presenza del generatore di corrente) oppure applicando la sovrapposizione degli effetti, che risulta in un sistema trifase bilanciato ed un circuito con partitore di corrente. Il secondo metodo consente di non risolvere alcun sistema, è pertanto preferibile.

Quando agisce la terna di generatori di tensione otteniamo un sistema trifase bilanciato a tre fili, risolvibile attraverso l'equivalente monofase. Chiamando $\tilde{Z}_S = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_3 = (2.6 + j0.2)\Omega$ l'impedenza serie di ogni fase otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1}{\tilde{Z}_S} = 76.70 e^{-j4.40^\circ} A \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi} = 76.70 e^{-j124.40^\circ} A \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi} = 76.70 e^{j115.60^\circ} A\end{aligned}\quad (7.6.1)$$

e la tensione fra i centri stella dei generatori e delle impedenze \tilde{Z}_S è, come noto, nulla. È pertanto nulla anche la tensione ai capi del generatore di corrente. Quando agisce il solo generatore di corrente, questa si riparte nelle tre fasi (caratterizzate da impedenza uguale) in tre parti uguali, mentre la tensione ai capi del generatore di corrente è pari a

$$\dot{V}_I = \dot{I} \left(\frac{\tilde{Z}_S}{3} + R \right) = (2.87 + j0.07) V \quad (7.6.2)$$

Per il calcolo della potenza attiva complessivamente assorbita dal carico \tilde{Z}_2 è necessario conoscere le tre correnti che attraversano le tre impedenze; abbiamo pertanto

$$P_{\tilde{Z}_2} = R_2 \left| \dot{I}_1 + \frac{\dot{I}}{3} \right|^2 + R_2 \left| \dot{I}_2 + \frac{\dot{I}}{3} \right|^2 + R_2 \left| \dot{I}_3 + \frac{\dot{I}}{3} \right|^2 = 17.65 kW \quad (7.6.3)$$

Il calcolo delle potenze attive e reattive erogate da ciascun generatore indipendente lo si effettua utilizzando la potenza complessa con i valori TOTALI di tensione e di corrente di ogni generatore

$$\begin{aligned}P_{E_1} + jQ_{E_1} &= \tilde{S}_1 = \dot{E}_1 \left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{I}}{3} \right)^* = (15.36 + j1.18) \cdot 10^3 \\ P_{E_2} + jQ_{E_2} &= \tilde{S}_2 = \dot{E}_2 \left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{I}}{3} \right)^* = (15.26 + j1.11) \cdot 10^3 \\ P_{E_3} + jQ_{E_3} &= \tilde{S}_3 = \dot{E}_3 \left(\dot{I}_3 + \frac{\dot{I}}{3} \right)^* = (15.26 + j1.23) \cdot 10^3 \\ P_I + jQ_I &= \tilde{S}_4 = \dot{V}_I \dot{I}^* = 2.87 + j0.07\end{aligned}\quad (7.6.4)$$

7.7 Il sistema trifase rappresentato in figura è caratterizzato da due terne di generatori a sequenza diretta ($f = 50\text{ Hz}$) che impongono una tensione di fase il cui valore efficace è pari ad E . I due carichi C_1 e C_2 vengono riascati completamente: calcolare la differenza fra i valori efficaci della tensione di linea ai capi del carico C_1 fra prima e dopo il riasamento, e le potenze reattive erogate dai generatori prima e dopo il riasamento.

$$E = 600\text{ V} \quad R = 50\Omega \quad \bar{Z}_1 = (1+j)\Omega \quad \bar{Z}_2 = (1+2j)\Omega \quad \bar{Z}_3 = (2+j)\Omega$$

$$P_{n1} = 10\text{ kW} \quad V_{n1} = 1\text{ kV} \quad \cos\phi_{n1} = 0.5$$

$$P_{n2} = 6\text{ kW} \quad V_{n2} = 1\text{ kV} \quad \cos\phi_{n2} = 0.6$$

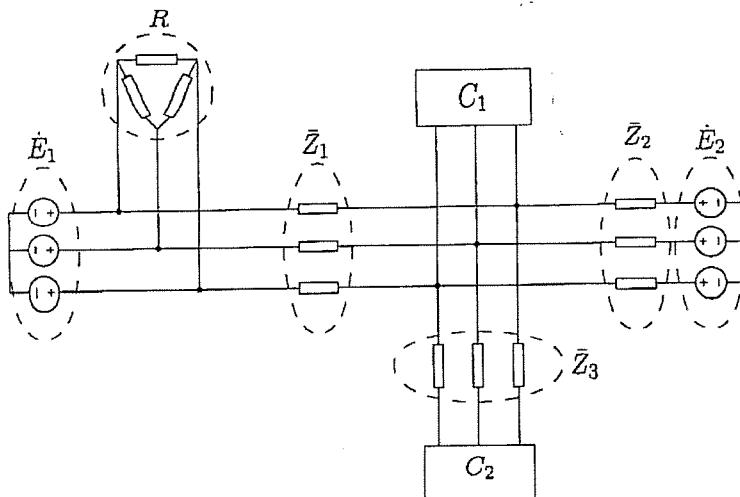


Figura 7.7.1: Circuito esercizio 7.7

Si deve procedere al calcolo delle impedenze equivalenti a stella dei carichi di cui sono noti i dati di targa

$$\bar{Z}_{C1} = \frac{V_{n1}^2 \cos \phi_{n1}}{P_{n1}} \left(\cos \phi_{n1} + j \sqrt{1 - \cos^2 \phi_{n1}} \right) = (25.00 + j43.30) \Omega \quad (7.7.1)$$

$$\bar{Z}_{C2} = \frac{V_{n2}^2 \cos \phi_{n2}}{P_{n2}} \left(\cos \phi_{n2} + j \sqrt{1 - \cos^2 \phi_{n2}} \right) = (60.00 + j80.00) \Omega \quad (7.7.2)$$

dopodiché è possibile lavorare sul circuito equivalente monofase (rappresentato in figura 7.7.2) dove non è stata riportata la resistenza in parallelo al generatore \dot{E}_1 dal momento che non influisce né sulla tensione ai capi del carico C_1 né sul calcolo delle potenze reattive erogate dai generatori (teorema di Boucherot).

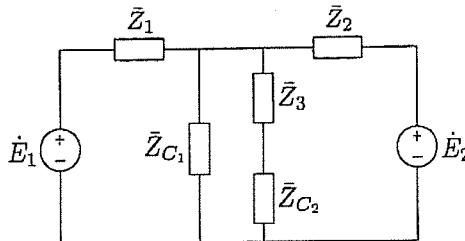


Figura 7.7.2: Circuito monofase equivalente

Il calcolo della tensione \dot{V} ai capi del carico C_1 si può calcolare immediatamente attraverso il teorema di Millmann

$$\dot{V} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{E}_2}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_{C1}} + \frac{1}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_{C2}} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} = (584.81 + j1.41) V \quad (7.7.3)$$

Le correnti erogate dai due generatori di tensione valgono

$$\begin{aligned} \dot{I}_{E_1} &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{V}}{\bar{Z}_1} = (6.89 - j8.30) A \\ \dot{I}_{E_2} &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{V}}{\bar{Z}_2} = (2.48 - j6.36) A \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

da cui è possibile calcolare le potenze reattive erogate dai due generatori

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3\Im(\dot{E}_1 \cdot \dot{I}_{E_1}^*) = 14.94 \text{ kVAR} \\ Q_2 &= 3\Im(\dot{E}_2 \cdot \dot{I}_{E_2}^*) = 11.45 \text{ kVAR} \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

Dovendo rifasare completamente i carichi è possibile calcolare in maniera diretta le nuove impedenze equivalenti come

$$\bar{Z}_{n1}^r = \frac{V_{n1}^2}{P_{n1}} = 100.00 \Omega \quad (7.7.6)$$

$$\bar{Z}_{n2}^r = \frac{V_{n2}^2}{P_{n2}} = 166.67 \Omega \quad (7.7.7)$$

e riapplicare l'equazione (7.7.3) con i nuovi valori appena calcolati ottenendo

$$\dot{V}^r = (594.81e - j6.49)V \quad (7.7.8)$$

da cui è possibile calcolare la differenza fra i valori efficaci fra le tensioni concatenate come

$$\Delta V = \sqrt{3}(V^r - V) = 17.39V \quad (7.7.9)$$

Come era lecito aspettarsi la tensione dopo il rifasamento aumenta.

Per quanto riguarda le potenze reattive erogate dopo il rifasamento dai due generatori possiamo riutilizzare le equazioni (7.7.4) e (7.7.5) con il nuovo valore di tensione

$$\begin{aligned} \dot{I}_{E_1}^r &= \frac{\dot{E} - \dot{V}^r}{\bar{Z}_1} = (5.84 + j0.65)A \\ \dot{I}_{E_2}^r &= \frac{\dot{E} - \dot{V}^r}{\bar{Z}_2} = (3.63 - j0.78)A \end{aligned} \quad (7.7.10)$$

da cui è possibile calcolare le potenze reattive erogate dai due generatori.

$$\begin{aligned} Q_1 &= 3\Im(\dot{E}_1 \cdot \dot{I}_{E_1}^{r*}) = -1.17 \text{ kVAR} \\ Q_2 &= 3\Im(\dot{E}_2 \cdot \dot{I}_{E_2}^{r*}) = 1.40 \text{ kVAR} \end{aligned} \quad (7.7.11)$$

Anche in questo caso è evidente come le potenze reattive erogate dai generatori sono diminuite.

