Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

WS 2014/15

IOS

Wolfgang Hümbs

Einführung in die Neuromathematik

Aufgabe 1

Zeichnen Sie eine behinderungsfreie und streng konservative Petri-Netz-Lösung des Erzeuger-Verbraucher-Problems.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

i) Ein Petri-Netz mit Zyklen ist immer unbeschränkt.

ii) Ein Petri-Netz das höchstens aus einer Stelle und einer Transition besteht, kann nicht unbeschränkt sein.

Aufgabe 3

Konstruieren Sie ein Petri-Netz mit einem Markensammler.

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)
Zeichnen Sie as Neuronale Netz mit

$$W_{21}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_{32}^{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$C_2^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe b)
Berechnen und zeichnen Sie dann das reduzierte Netz.

Aufgabe 5

Teilaufgabe a)
Zeigen Sie, dass man die erste Ableitung der Fermi-Funktion durch die Funktion selbst ausdrücken kann.
Teilaufgabe b)
Zeigen Sie, dass die Fermi-Funktion keine Extrema besitzt.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die spezielle, diskrete Signalenergie

i)

$$E_D = \int_{log(4)}^{log(5)} tanh(t)dt$$

sowie die spezielle Signalenergie

ii)

$$E = \int_{log(4)}^{log(5)} tanh^2(t)dt$$

Aufgabe 7

Teilaufgabe a)
Ein Neuron besitzt den Schwellenwert 10 und als Aktivierungfunktion soll die Fermi-Funktion verwendet werden, zusätzlich soll noch ein Enhancer mit dem Verstärkungsfaktor 12 nachgeschaltet werden.
Geben Sie eine Zeit t_A und einen Parameter T so an, dass der Aktivierungzustand des Neurons erreicht wird.

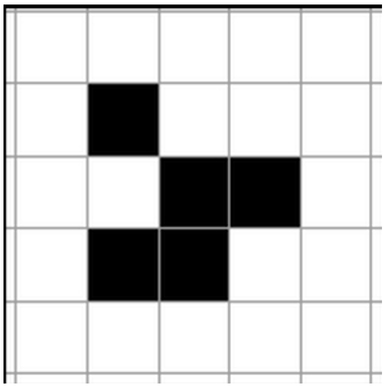
Teilaufgabe b)
Wäre der Aktivierungszustand des Neurons mit $S_{tanh}(t) = tanh(t)$ bezüglich des Zeitpunktes t_A früher oder später erreicht worden?

Aufgabe 8

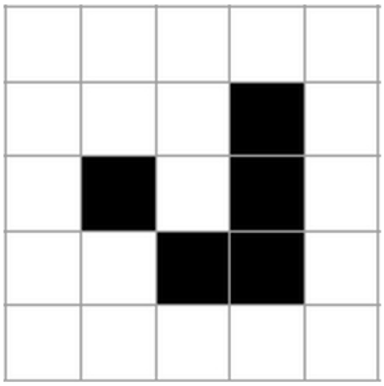
Die Aktivierung des Neurons n_1 sei $a_1 = 4$ und die Ausgabe von Neuron n_2 sei $o_2 = 9$.
Berechnen Sie die Veränderung des Verbindungsgewichtes von Neuron n_1 zum Neuron n_2 nach der Hebbschen Regel, wenn für die Lernrate $\eta = 3$ gilt.

Aufgabe 9

Gegeben sind folgende Anfangszustände von Conway's Game of Life :



Zeichnen Sie die nächsten Generationen.



Aufgabe 10

Teilaufgabe a)
Konstruieren Sie einen binären nicht präfixfreien Code bestehend aus vier Codewörtern, der aber eindeutig decodierbar ist.

Teilaufgabe b)
Überprüfen Sie dann, ob es einen präfixfreien Code mit vier Codewörtern der gleichen Codewortlänge wie in a) gibt.

Teilaufgabe c)
Begründen Sie, welcher Code i.d.R. schneller übertragen wird.

Aufgabe 11

Kodieren Sie das Wort N E U R O N mit dem
i) Huffman-Code
ii) Fano-Code
Die korrespondierenden Wahrscheinlichkeiten seien p(E) = 0.32, p(N) = 0.23, p(R) = 0.2, p(U) = 0.15 und p(O) = 0.1.

Aufgabe 12

Gegeben sei folgende boolesche Funktion:

$$f : B^3 \to B = \{0, 1\},$$

$$f(a, b, c) = ab \lor ac \lor bc.$$

Teilaufgabe a)
Geben Sie die Wahrheitstafeln an und zeichnen Sie die technische Realisierung.

Teilaufgabe b)
Wo wird diese Schaltung eingesetzt?

Teilaufgabe c)
Zeichnen Sie das äquivalente System nach McCulloch-Pitts.

Aufgabe 13

Gegeben Sie ein “Spike train“der Länge $N = 40$ und $N_1 = 25$.

Teilaufgabe a)
Wie viele konventionelle Kodierungsmöglichkeiten gibt es?

Teilaufgabe b)
Berechnen Sie die entsprechende Entropie.

Aufgabe 14

Eine gewisse Analogie zu den “Spike trains“besitzt der Fingercode(Biercode). Man hebt den rechten Arm in einer Gaststätte und bestellt mit den Fingern entsprechend eins, zwei, ..., oder fünf Bier.

Teilaufgabe a)
Auf wie viele Arten ist es möglich “zwei Bier“zu bestellen?

Teilaufgabe b)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Gast “drei Bier“bestellt, wenn er den rechten Arm hebt?

Aufgabe 15

Teilaufgabe a)
In einem stark vereinfachten Neuronenmodell werden die “Spike trains“dekodiert und via

$$S_{est}(t) = \sum_{i=1}^{n} K(t - t_i)$$

das geschätzte Signal aufzeichnet.
Skizzieren Sie S_{est} für $K = cos$, bzw. $K = tanh$ und $t_i = i$, $1 \leq i \leq 5$, $i \in \mathbb{N}$

Teilaufgabe b)
In einem erweiterten Modell seien die dekodierenden Filter K_i gegeben durch:
$K_1 = cos(t)$, $K_2 = tanh(t)$, $K_3 = cos(5t)$, $K_4 = cos(t)$, $K_5 = sin(3t)$.

Rekonstruieren Sie jetzt das Signal via $S_{est}(t) = \sum_{i=1}^{5} K_i(t - t_i)$.

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass im Hodgkin-Huxley-Modell das Membranpotential U nicht asymptotisch stabil ist, wenn man vereinfacht annimmt , dass der Gesamtmembran Strom größer Null und konstant ist.

Aufgabe 17

Überprüfen Sie, ob im FitzHugh-Nagumo-Modell konstante Lösungen möglich sind.

Aufgabe 18

Das Gleichgewichtspotential in einem Neuron ist gegeben durch die Nernst-Gleichung

$$E_{Ion} = \frac{RT}{ZF} ln \frac{[Ion]_{out}}{[Ion]_{in}}$$

Zeigen Sie, dass man die Nernst-Gleichung für Monovalenzen (d.h. $|z| = 1$) und bzgl. Körpertemperatur auch schreiben kann als

$$E_{Ion} \approx 62 \ log_{10} \frac{[Ion]_{out}}{[Ion]_{in}} [mV]$$

Aufgabe 19

Das typische Gleichgewichtspotential von Kalium, d.h. bzgl. $\mathbb{K}^+$ ist -90mV. Wie groß ist die Ionenkonzentration innerhalb der Nervenzelle, wenn $[Ion]_{out} = 5$mV gilt?

Aufgabe 20

Es befinden sich 1000 Quantenbits im Zustand $|x\rangle = \sqrt{\frac{5}{7}} |0\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}} |1\rangle$. Welches Ergebnis erwarten Sie, wenn Sie alle Quantenbits messen?

Aufgabe 21

Gegeben sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3i \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Schreiben Sie $\mathbf{v}$ in der Form: $|\mathbf{v}\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ und überprüfen Sie ob ein reiner Zustand vorliegt, wenn nicht, dann normieren Sie $\mathbf{v}$ bzw. $|\mathbf{v}\rangle$ entsprechend.

Aufgabe 22

Um welchen Quantenfehler handelt es sich, wenn man aus dem Zustand $v = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ den Fehler $v_F = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 2e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$ erhält?

Aufgabe 23

Untersuchen Sie ob das Gatter

$$g : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$$

$$(a,b,c) \to (\overline{a}, a \cdot b \bigoplus c, \overline{a} \cdot c \bigoplus b)$$

reversibel ist.

Aufgabe 24

Erklären Sie, warum nach Roger Penrose die fundamentalen Gesetze (der Physik) eventuell zeitasymmetrisch sind, d.h. die zeitsymmetrischen und emergenten Gesetze sind nur eine Näherung.

Aufgabe 25

Berechnen Sie das geometrische Mittel der Massen von unserer Sonne und einem Proton.
Reproduzieren Sie daraus die Argumentation von Martin Rees über Komplexität.

Aufgabe 26

Geben Sie die Klassifizierung der "Time instants"nach Rovelli an (Mengenstruktur, topologische Struktur, ...) und erläutern Sie kurz die Begriffe.

Aufgabe 27

Geben sie mit Erklärung mindestens sechs Zeitbegriffe an.

Aufgabe 28

Erläutern Sie die TTH-Hypothese nach Connes-Rovelli.

Aufgabe 29

Erläutern Sie die MUH-Hypothese nach Tegmark.

Aufgabe 30

Erläutern Sie die Begriffe
a)
The Law of Accelerating Returns
b)
Komplexitätsbremse

Reproduzieren Sie zu a) die entsprechenden Differenzialgleichungen nach Ray Kurzweil.