Zur Erinnerung: Prolog

- Prolog-Programme bestehen aus einer Datenbasis, deren Einträge **Fakten** und **Regeln** genannt werden.
- Der Nutzer formuliert **Anfragen**, auf die der Interpreter systematisch durch Nutzung dieser Fakten und Regeln eine Antwort findet.
- Ein Fakt besteht aus einem Prädikat und dessen Argumenten: `parent(berti,albert).`
- Eine Regel beschreibt die Abhängigkeit eines Fakts von einem oder mehreren anderen Fakten:
  `father(X,Y) :- parent(X,Y), male(X).`
  - Der Regeloperator `:-` ist dabei wie ein umgedrehter Implikationspfeil zu lesen.
  - Das Komma kann dabei als Und-Operator (und das Semikolon als Oder-Operator) verwendet werden.
  - Haben zwei Regeln die gleiche Konsequenz, folgt diese, wenn mindestens in einer Regel die Bedingung erfüllt ist.

Zur Erinnerung: Prolog

- Worin unterscheiden sich `ancestor(X,Y)` und `ancestor2(X,Y)`?

```
ancestor(X,Y) :- parent(X,Y).
ancestor(X,Y) :- parent(Z,Y), ancestor(X,Z).

ancestor2(X,Y) :- parent(X,Y).
ancestor2(X,Y) :- ancestor2(X,Z), parent(Z,Y).
```

- Spielt die Reihenfolge der Klauseln eine Rolle?
  - Aus logischer Sicht: Nein.
  - Für die Abarbeitung in Prolog: Ja. Führt man z.B. die Anfrage `?- ancestor2(berti,berti).` aus, erhält man den Fehler „Out of local stack". Die Ursache liegt darin, dass `ancestor2(X,Z).` permanent aufgerufen wird, was zum Überlauf führt.

- Regeln sollten also so aufgebaut werden, dass einfache Berechnungen zu Beginn stehen und rekursive Aufrufe zuletzt erfolgen, um Nicht-Terminierung und Speicherprobleme zu vermeiden.

Übung 1

Laut Aufgabenstellung sind nur alle SLD-Refutations anzugeben, also nur jene SLD-Derivations, die mit `?-.` enden. Hier aufgeführt sind jedoch auch die übrigen Fälle in grauer Schrift, um algorithmisch sicherzustellen, dass wirklich alle SLD-Refutations gefunden wurden.

	`?- pair(X, Y, [1,2,4,5]).`
{X=1, Y=2}	`?- 2 is 1 + 1.`
	`?- .`

$\Rightarrow$ X=1, Y=2

	`?- pair(X, Y, [1,2,4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [2,4,5]).`
{X=2, Y=4}	`?- 4 is 2 + 1.`

Übung 1

	`?- pair(X, Y, [1,2,4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [2,4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [4,5]).`
{X=4, Y=5}	`?- 5 is 4 + 1.`
	`?- .`

⇒ X=4, Y=5

	`?- pair(X, Y, [1,2,4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [2,4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [4,5]).`
	`?- pair(X, Y, [5]).`
	`?- pair(X, Y, []).`

Zusatzaufgabe 2 (a)

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x\ \underbrace{y.yx}_{GV=\{y\}})\ \underbrace{(\lambda x.xy)}_{FV=\{y\}}(\lambda x.x) \\
\Rightarrow_\alpha\ & (\lambda x\ \underbrace{y_1.y_1 x}_{GV=\{y_1\}})\ \underbrace{(\lambda x.xy)}_{FV=\{y\}}(\lambda x.x) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda y_1.\underbrace{y_1(\lambda x.xy)}_{GV=\{x\}})\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset} \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x.\ \underbrace{x}_{GV=\emptyset})\ \underbrace{(\lambda x.xy)}_{FV=\{y\}} \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x.xy)
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 2 (b)

$$\langle F \rangle = \Bigg(\lambda f\, x\, y. \langle \mathsf{ite} \rangle \Big(\langle \mathsf{iszero} \rangle \Big(\langle \mathsf{sub} \rangle\, x\, y \Big) \Big)$$

$$\Big(\langle \mathsf{ite} \rangle \Big(\langle \mathsf{iszero} \rangle (\langle \mathsf{sub} \rangle\, y\, x) \Big)$$

$$x$$

$$\Big(f\, (\langle \mathsf{pred} \rangle\, y)\, x \Big) \Big)$$

$$\Big(f\, \Big(\langle \mathsf{pred} \rangle\, x \Big)\, y \Big) \Bigg)$$

Zusatzaufgabe 2 (c)

$$
\begin{aligned}
&\langle Y\rangle\langle G\rangle = (\lambda z.((\lambda u.z(uu))(\lambda u.z(uu))))\langle G\rangle \\
\Rightarrow_\beta\ &((\lambda u.\langle G\rangle(uu))(\lambda u.\langle G\rangle(uu))) = \langle Y_G\rangle \\
\Rightarrow_\beta\ &\langle G\rangle((\lambda u.\langle G\rangle(uu))(\lambda u.\langle G\rangle(uu))) = \langle G\rangle\langle Y_G\rangle
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 2 (c)

$$
\begin{aligned}
& \langle Y\rangle\langle G\rangle\langle 1\rangle\langle 5\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 1\rangle\langle 5\rangle\langle 4\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathsf{ite}\rangle \underbrace{(\langle \mathsf{iszero}\rangle\langle 1\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle \mathsf{false}\rangle}\langle 5\rangle \\
& (\langle Y_G\rangle \underbrace{(\langle \mathsf{pred}\rangle\langle 1\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 0\rangle} \underbrace{(\langle \mathsf{mult}\rangle\langle 5\rangle\langle 4\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 20\rangle} \underbrace{(\langle \mathsf{pred}\rangle\langle 4\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle 3\rangle}) \\
\Rightarrow^* \; & \langle Y_G\rangle\langle 0\rangle\langle 20\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle G\rangle\langle Y_G\rangle\langle 0\rangle\langle 20\rangle\langle 3\rangle \\
\Rightarrow^* \; & \langle \mathsf{ite}\rangle \underbrace{(\langle \mathsf{iszero}\rangle\langle 0\rangle)}_{\Rightarrow^* \langle \mathsf{true}\rangle}\langle 20\rangle(\,\ldots\,) \\
\Rightarrow^* \; & \langle 20\rangle
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 1

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x_3, \sigma(\gamma(x_3), x_4, x_1), x_2) \\ \sigma(x_3, \sigma(x_1, x_3, x_2), \gamma(x_4)) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma(\gamma(x_3), x_4, x_1) \\ \sigma(x_1, x_3, x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{El.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(\gamma(x_3), x_4, x_1) \\ \sigma(x_1, x_3, x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\} \\
\overset{\text{Sub.}}{\Longrightarrow} &\left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 1

$$\left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{Sub.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{Dek.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{Sub.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\stackrel{\text{El.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 1

allgemeinster Unifikator:

$$x_1 \mapsto \gamma(x_3)$$
$$x_2 \mapsto \gamma(x_3)$$
$$x_3 \mapsto x_3$$
$$x_4 \mapsto x_3$$

weitere Unifikatoren:

$$x_1 \mapsto \gamma(\alpha)$$
$$x_2 \mapsto \gamma(\alpha)$$
$$x_3 \mapsto \alpha$$
$$x_4 \mapsto \alpha$$

$$x_1 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha))$$
$$x_2 \mapsto \gamma(\gamma(\alpha))$$
$$x_3 \mapsto \gamma(\alpha)$$
$$x_4 \mapsto \gamma(\alpha)$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 2

Wie bereits bekannt, können die Umformungsschritte auch in einer anderen Reihenfolge vorgenommen und aufeinanderfolgende Schritte gleicher Regelsorte zusammengefasst werden. Wenn zwei Terme unifizierbar sind, so ist der allgemeinste Unifikator (bis auf Variablenumbenennung) eindeutig bestimmt.

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x_3, \sigma(\gamma(x_3), x_4, x_1), x_2) \\ \sigma(x_3, \sigma(x_1, x_3, x_2), \gamma(x_4)) \end{pmatrix} \right\} \\
\xRightarrow{2 \cdot \text{Dek.}} &\left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\} \\
\xRightarrow{\text{El.}} &\left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 2

$$\overset{\text{Vert.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Sub.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Sub.}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} \right\}$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 3

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sigma(x_3, \sigma(\gamma(x_3), x_4, x_1), x_2) \\ \sigma(x_3, \sigma(x_1, x_3, x_2), \gamma(x_4)) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xRightarrow{2 \cdot \text{Dek.}} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xRightarrow{\text{El.}} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xRightarrow{\text{Sub.}} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

Zusatzaufgabe 3: Variante 3

$$\xrightarrow{\text{Sub.}} \left\{ \begin{pmatrix} \gamma(x_3) \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Dek.}} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Sub.}} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{El.}} \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ \gamma(x_4) \end{pmatrix} \right\}$$

Zusatzaufgabe 4 (a)

```
1:   READ 2;
2:   READ 3;
3:   LIT 0;
4:   STORE 1;
5:   LOAD 1;
6:   LOAD 3;
7:   LT;
8:   JMC 18;
9:   LOAD 1;
10:  LIT 1;
11:  ADD;
12:  STORE 1;
13:  LOAD 2;
14:  LOAD 2;
15:  MUL;
16:  STORE 2;
17:  JMP 5;
18:  WRITE 2;
```

Zusatzaufgabe 4 (b)

BZ	DK	HS	Inp	Out
$($ 1,	ε,	$[\,]$,	$0:1$,	$\varepsilon)$
$($ 2,	ε,	$[1/0]$,	1,	$\varepsilon)$
$($ 3,	ε,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 4,	0,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 5,	$1:0$,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 6,	$0:1:0$,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 7,	$1:0$,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 8,	0,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 5,	0,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 6,	$0:0$,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 7,	0,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 9,	ε,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$\varepsilon)$
$($ 10,	ε,	$[1/0, 2/1]$,	ε,	$1)$