

Zusatzaufgabe 1 (a)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(\lambda z \ x. zx (\lambda y. yx))}_{GV=\{x,y\}} \underbrace{(\lambda y. zx)}_{FV=\{x,z\}} (\lambda z. z) \\
 \Rightarrow_{\alpha} & \underbrace{(\lambda z \ x_1. zx_1 (\lambda y. yx_1))}_{GV=\{x_1,y\}} \underbrace{(\lambda y. zx)}_{FV=\{x,z\}} (\lambda z. z) \\
 \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. (\lambda y. \underbrace{zx}_{GV=\emptyset}) \underbrace{x_1}_{FV=\{x_1\}} (\lambda y. yx_1)) (\lambda z. z) \\
 \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. \underbrace{zx (\lambda y. yx_1)}_{GV=\{y\}}) \underbrace{(\lambda z. z)}_{FV=\emptyset} \\
 \Rightarrow_{\beta} & zx (\lambda y. y (\lambda z. z))
 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 1 (b)

$$\langle F \rangle = \left(\lambda f x y. \langle \text{ite} \rangle \left(\langle \text{iszero} \rangle \left(\langle \text{pred} \rangle x \right) \right) \right. \\ \left. \left(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle y \right) \right. \\ \left. \left(\langle \text{add} \rangle y \left(\langle \text{mult} \rangle \left(\langle \text{succ} \rangle x \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left(f \left(\langle \text{pred} \rangle x \right) \left(\langle \text{add} \rangle x y \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$\langle f \rangle = \langle Y \rangle \langle F \rangle$$

Zusatzaufgabe 1 (c)

$$\begin{aligned}\langle Y \rangle \langle G \rangle &= (\lambda z. ((\lambda u. z(uu))(\lambda u. z(uu)))) \langle G \rangle \\ \Rightarrow_{\beta} ((\lambda u. \langle G \rangle(uu))(\lambda u. \langle G \rangle(uu))) &= \langle Y_G \rangle \\ \Rightarrow_{\beta} \langle G \rangle((\lambda u. \langle G \rangle(uu))(\lambda u. \langle G \rangle(uu))) &= \langle G \rangle \langle Y_G \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle Y \rangle \langle G \rangle \langle 3 \rangle \langle 0 \rangle \\ \Rightarrow^* \langle G \rangle \langle Y_G \rangle \langle 3 \rangle \langle 0 \rangle \\ \Rightarrow^* \langle \text{ite} \rangle (\underbrace{\langle \text{iszero} \rangle \langle 0 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle}) (\underbrace{\langle \text{succ} \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 4 \rangle}) (\dots) \\ \Rightarrow^* \langle 4 \rangle\end{aligned}$$