Zur Erinnerung: λ-Kalkül

- Motivation \o/: minimale universelle Programmiersprache
- Lambda-Abstraktion immer geklammert: $(\lambda x.F)$
- Applikation von Termen ist linksassoziativ: EFG ist implizit geklammert als $(EF)G$
- Kurzschreibweise: $(\lambda xy.F)$ für $(\lambda x.(\lambda y.F))$
- Vor Ausführung einer β-Reduktion $(\lambda x.F)G$ müssen die freien Variablen in G und die gebundenen in F bestimmt werden.
- Sind die Mengen nicht disjunkt (d.h. $FV \cap GV \neq \emptyset$), müssen bei der α-Konversion Variablen umbenannt werden.
- β-Reduktion: In $(\lambda x.F)G$ werden alle Vorkommen der Variablennamen x in F durch G ersetzt und $\lambda x.$ wird entfernt.
- Die Applikation wird so lange wiederholt, bis keine Reduktion mehr möglich ist.
- Nicht für alle Terme existiert eine β-Normalform (vgl. Blatt 4, Übung 4 (b) (4))

Übung 4

t	$FV(t)$	$GV(t)$
$(\lambda x.xy)(\lambda y.y)$	$\{y\}$	$\{x, y\}$
$(\lambda x.(\lambda y.z(\lambda z.z(\lambda x.y))))$	$\{z\}$	$\{x, y, z\}$
$(\lambda x.(\lambda y.xz(yz)))(\lambda x.y(\lambda y.y))$	$\{y, z\}$	$\{x, y\}$

Übung 4

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.xz(yz))}_{GV=\{y\}})\underbrace{(\lambda x.y(\lambda y.y))}_{FV=\{y\}} \\
\Rightarrow_\alpha \; & (\lambda x.\underbrace{(\lambda y_1.xz(y_1 z))}_{GV=\{y_1\}})\underbrace{(\lambda x.y(\lambda y.y))}_{FV=\{y\}} \\
\Rightarrow_\beta \; & (\lambda y_1.(\lambda x.\underbrace{y(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\underbrace{z}_{FV=\{z\}}(y_1 z)) \\
\Rightarrow_\beta \; & (\lambda y_1.y(\lambda y.y)(y_1 z))
\end{aligned}
$$

Übung 4

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.(\lambda z.z))}_{GV=\{y,z\}})\quad \underbrace{x}_{FV=\{x\}}\quad (+y1) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda y.\ \underbrace{(\lambda z.z)}_{GV=\{z\}}\ )\ \underbrace{(+y1)}_{FV=\{y\}} \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda z.z)
\end{aligned}
$$

Übung 4

$$
\begin{aligned}
& (\lambda x.(\lambda y.x(\lambda z.yz)))(((\lambda x.\underbrace{(\lambda y.y)}_{GV=\{y\}})\underbrace{8}_{FV=\emptyset})(\lambda x.(\lambda y.y)x)) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x.(\lambda y.x(\lambda z.yz)))((\lambda y.y)(\lambda x.(\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\underbrace{x}_{FV=\{x\}})) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x.(\lambda y.x(\lambda z.yz)))((\lambda y.\underbrace{y}_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset}) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda x.\underbrace{(\lambda y.x(\lambda z.yz))}_{GV=\{y,z\}})\underbrace{(\lambda x.x)}_{FV=\emptyset} \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda y.(\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\underbrace{(\lambda z.yz)}_{FV=\{y\}}) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda y.(\lambda z.yz)) = (\lambda yz.yz)
\end{aligned}
$$

Übung 4

$$(\lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx)))((\lambda x.\underbrace{x}_{GV=\emptyset})\underbrace{(+15)}_{FV=\emptyset})$$

$$\Rightarrow_\beta \; (\lambda h.\underbrace{(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))}_{GV=\{x\}})\underbrace{(+15)}_{FV=\emptyset}$$

$$\Rightarrow_\beta \; (\lambda x.(+15)(xx))(\lambda x.(+15)(xx))$$

$$\Rightarrow_\beta \; (\lambda x.\underbrace{(+15)(xx)}_{GV=\{x\}})\underbrace{(\lambda x.(+15)(xx))}_{FV=\emptyset}$$

$$\Rightarrow_\beta \; (+15)((\lambda x.(+15)(xx))(\lambda x.(+15)(xx)))$$

$\Rightarrow_\beta$ ... (endlose Rekursion)

Übung 4

$$
\begin{aligned}
& (\lambda f.\,\underbrace{(\lambda a.(\lambda b.fab))}_{GV=\{a,b\}})\,\underbrace{(\lambda x.(\lambda y.x))}_{FV=\emptyset} \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda a.(\lambda b.(\lambda x.\ \underbrace{(\lambda y.x)}_{GV=\{y\}}\ )\quad \underbrace{a}_{FV=\{a\}}\quad b)) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda a.(\lambda b.(\lambda y.\ \underbrace{a}_{GV=\emptyset}\ )\quad \underbrace{b}_{FV=\{b\}}\quad)) \\
\Rightarrow_\beta\ & (\lambda a.(\lambda b.a)) = (\lambda ab.a)
\end{aligned}
$$