

Übung 2 (a)

$$\begin{aligned}
 & (\lambda f \underbrace{x.f f x}_{GV=\{x\}}) (\underbrace{\lambda y.x}_{FV=\{x\}}) z \\
 \Rightarrow_{\alpha} & (\lambda f \underbrace{x_1.f f x_1}_{GV=\{x_1\}}) (\underbrace{\lambda y.x}_{FV=\{x\}}) z \\
 \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. (\lambda y. \underbrace{x}_{GV=\emptyset}) (\underbrace{\lambda y.x}_{FV=\{x\}}) x_1) z \\
 \Rightarrow_{\beta} & (\lambda x_1. \underbrace{xx_1}_{GV=\emptyset}) \underbrace{z}_{FV=\{z\}} \\
 \Rightarrow_{\beta} & xz
 \end{aligned}$$

Übung 2 (b)

$$\begin{aligned}\langle Y \rangle \langle F \rangle &= (\lambda z. ((\lambda u. z(uu))(\lambda u. z(uu)))) \langle F \rangle \\ \Rightarrow_{\beta} ((\lambda u. \langle F \rangle(uu))(\lambda u. \langle F \rangle(uu))) &= \langle Y_F \rangle \\ \Rightarrow_{\beta} \langle F \rangle((\lambda u. \langle F \rangle(uu))(\lambda u. \langle F \rangle(uu))) &= \langle F \rangle \langle Y_F \rangle\end{aligned}$$

Übung 2 (b)

$$\begin{aligned}
 & \langle Y \rangle \langle F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle (\underbrace{\langle \text{sub} \rangle \langle 6 \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 1 \rangle}) (\dots)) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\Rightarrow^* \langle \text{false} \rangle} \\
 & (\langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle (\underbrace{\langle \text{pred} \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 5 \rangle}) (\underbrace{\langle \text{succ} \rangle \langle 5 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle}) (\underbrace{\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 6 \rangle})))) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{succ} \rangle (\langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{succ} \rangle (\langle F \rangle \langle Y_F \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle) \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{succ} \rangle (\langle \text{ite} \rangle (\langle \text{iszero} \rangle (\underbrace{\langle \text{sub} \rangle \langle 5 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 0 \rangle}) (\underbrace{\langle \text{add} \rangle \langle 6 \rangle \langle 6 \rangle}_{\Rightarrow^* \langle 12 \rangle}) (\dots)))) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\Rightarrow^* \langle \text{true} \rangle} \\
 \Rightarrow^* & \langle \text{succ} \rangle \langle 12 \rangle \\
 \Rightarrow^* & \langle 13 \rangle
 \end{aligned}$$

Übung 2 (c)

$$\begin{aligned}\langle G \rangle = & \left(\lambda g x y. \langle \text{ite} \rangle \left(\langle \text{iszero} \rangle x \right) \right. \\ & \left(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle y) \right) \\ & \left(\langle \text{ite} \rangle \left(\langle \text{iszero} \rangle y \right) \right. \\ & \left(\langle \text{mult} \rangle \langle 2 \rangle (\langle \text{succ} \rangle x) \right) \\ & \left. \left. \left(\langle \text{add} \rangle \langle 4 \rangle (g (\langle \text{pred} \rangle x) (\langle \text{pred} \rangle y)) \right) \right) \right)\end{aligned}$$