



V355

Gekoppelte Schwingkreise

Pelle Ofenbach
pelle.ofenbach@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu

Durchführung: 22.11.16

Abgabe: 29.11.16

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Schwingungsgleichung für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise	3
1.2	Berechnung des Stromes in einem Schwingkreis in Abhängigkeit von der Frequenz	6
2	Durchführung	8
2.1	Justierung	8
2.2	Messprogramm	9
2.2.1	Schwingungs- und Schwebungsfrequenz	9
2.2.2	Fundermentalschwingungen in Abhängigkeit von C_K bestimmt mit Lissajous-Figuren	9
2.2.3	Fundermentalschwingungen in Abhängigkeit von C_K bestimmt mit Sweep-Methode	9
3	Auswertung	10
3.1	Geräte-Daten	10
3.2	Justierung	10
3.3	Frequenzverhältnisse bei einer Schwebung	10
3.4	Messung von v_+ und v_- mittels Lissajous-Figuren	12
3.5	Ermittlung von v_+ und v_- mittels Sweep-Verfahren	13
4	Diskussion	15
4.1	Frequenzverhältnisse bei einer Schwebung	15
4.2	Messung von v_+ und v_- mittels Lissajous-Figuren	15
4.3	Messung von v_+ und v_- mittels Sweep-Verfahren	15
	Literatur	15

1 Theorie

1.1 Schwingungsgleichung für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Betrachtet werden hier zwei gleiche elektrische Schwingkreise (s. Abb. 1), die die Induktivität L und Kapazität C enthalten, sie sind durch einen Kopplungswiderstand C_k gekoppelt. Die Anwendung der Kirchhoffschen Knotenregel auf Punkt A liefert die Beziehung:

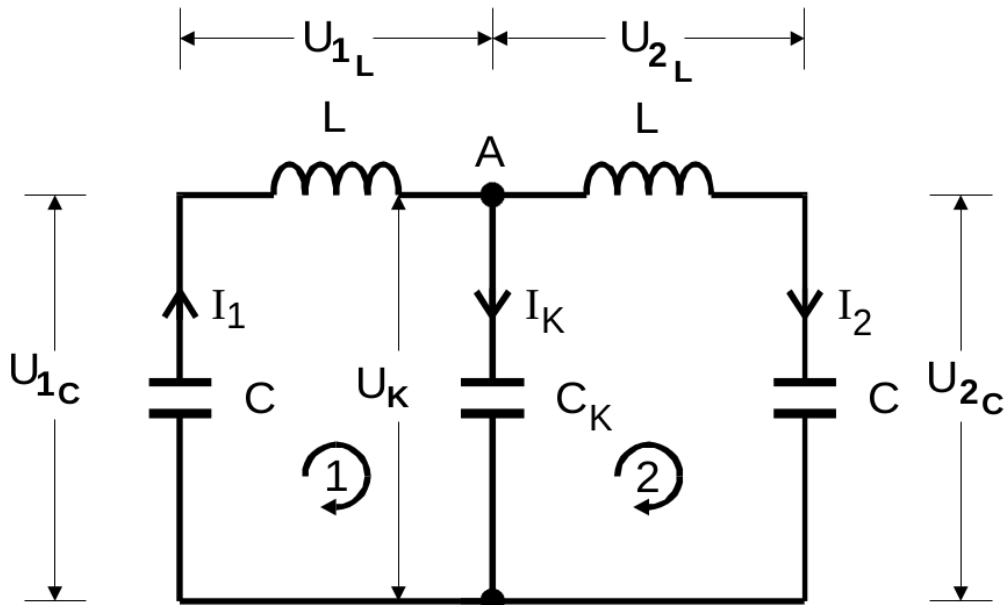


Abbildung 1: Schaltung zweier gekoppelter Schwingkreise

$$I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Durch Anweung der Kirchhoffschen Maschenregel erhält man, für die Maschen 1 und 2, die Beziehungen:

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

und

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Mit den Beziehungen:

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_1 dt$$

und

$$U_L = L \dot{I}$$

Durch die Verwendung dieser Beziehungen, Formel (1) und Differentiation nach der Zeit ergeben sich folgende Differentialgleichungen.

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

und

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \quad (5)$$

Nun wird die Summe und die Differenz der Einzelströme als Variablen eingeführt. Durch Subtraktion und Addition von (4) und (5) erhält man dann folgende Gleichungen.

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

und

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (7)$$

Die Lösung von (6) ist die Gleichung einer harmonischen Schwingung.

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0})\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (8)$$

Die Schwingungsfrequenz

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (9)$$

ist gleich der eines Einzelschwingers. Daraus ist ersichtlich, dass die Amplitude mit $I_{1_0} + I_{2_0}$ gegeben ist. Entsprechendes gilt für die Differentialgleichung (7).

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0})\cos\left(\frac{t}{\left(L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (10)$$

Hier ist die Frequenz:

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\left(L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Durch Addition und Subtraktion von den Differentialgleichungen (8) und (10) erhält man für die Variablen I_1 und I_2 folgende Gleichungen.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})\cos(2\pi\nu_+t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})\cos(2\pi\nu_-t) \quad (12)$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})\cos(2\pi\nu_+t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})\cos(2\pi\nu_-t) \quad (13)$$

Nun können drei Fälle betrachtet werden.

1. Beide Schwingkreise haben die selbe Phase und Amplitude. Also gilt $I_{1_0} = I_{2_0}$, dann schwingen beide Schwingkreise mit der Frequenz ν_+ . Die Ströme I_1 und I_2 kompensieren sich also ständig, folglich liegt am Koppelkondensator C_k nie eine Spannung an.
2. Die Schwingkreise haben wieder die selbe Amplitude aber sind gegenphasig ($I_{1_0} = -I_{2_0}$). Nun schwingen beide Schwingkreise gegenphasig mit der Frequenz ν_- . Diese Fälle werden als Fundamentalschwingungen bezeichnet.
3. Nun soll Schwingkreis 1 eine Amplitude ungleich Null haben und sich der Schwingkreis 2 in Ruhe befinden zum Zeitpunkt $t = 0$ ($I_{1_0} \neq 0, I_{2_0} = 0$). Dann folgt aus den Gleichungen (12) und (13):

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos\left(\frac{(\omega_+ + \omega_-)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_+ - \omega_-)t}{2}\right) \quad (14)$$

$$I_2(t) = I_{1_0} \sin\left(\frac{(\omega_+ + \omega_-)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(\omega_+ - \omega_-)t}{2}\right) \quad (15)$$

Angenommen die Frequenzen ν_+ und ν_- wären fast gleich, also $C_k \gg C$, dann gilt:

$$\frac{(\omega_+ + \omega_-)}{2} \approx \omega_+ \quad (16)$$

$$\omega_- - \omega_+ \ll \omega_+ \quad (17)$$

Aus den Gleichungen (15) und (14) ist ersichtlich, dass die Schwingkreise mit der Frequenz $\frac{(\nu_+ + \nu_-)}{2}$ schwingen. Die Amplitude ändert sich dabei periodisch mit der Frequenz $\nu_- - \nu_+$ und nimmt dabei Werte von Null bis I_{1_0} an. Diese Schwingung wird Schwebung genannt (s. Abb.2). Hier schwingt die Energie periodisch zwischen den jeweiligen Schwingkreisen. Die Periode T^* ist dabei durch folgenden Zusammenhang gegeben.

$$\frac{(\omega_- - \omega_+)T^*}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

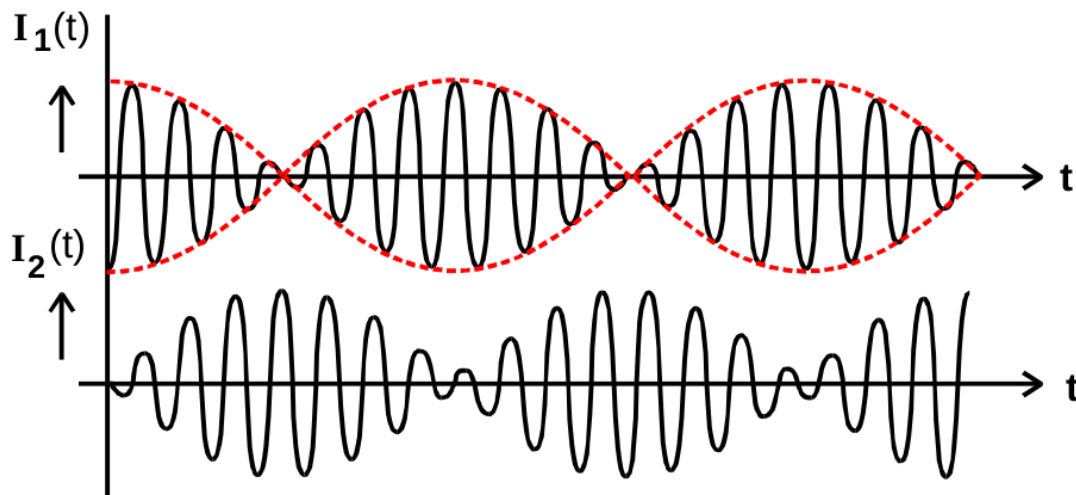


Abbildung 2: Die Zeitabhängigen Ströme in den Schwingkreisen im Fall der Schwebung

1.2 Berechnung des Stromes in einem Schwingkreis in Abhängigkeit von der Frequenz

Im Folgendem werden Schwingkreise betrachtet, die durch eine Sinusspannung zum schwingen angeregt werden. Alle Berechnungen werden am Beispiel der Schaltung 3 gezeigt. Sämtliche Verluste werden durch ohmische Widerstände R dargestellt. Dann

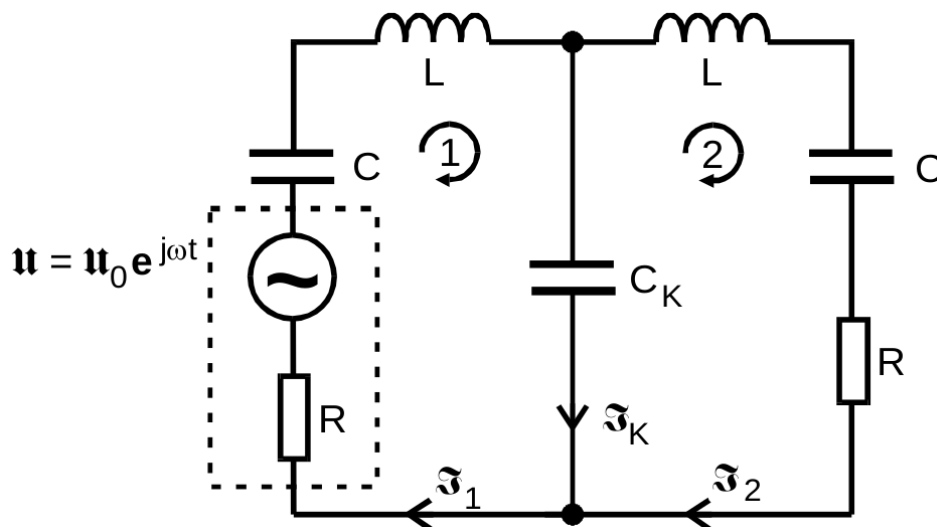


Abbildung 3: Gekoppelte Schwingkreise mit eingebautem Sinusgenerator

folgt nach Kirchhofscher Maschenregel für den Kreis

1.

$$(z_C + z_L + z_{C_R} + z_R)I_1 - z_{C_K}I_2 = U \quad (19)$$

und

2.

$$(z_C + z_L + z_{C_R} + z_R)I_2 - z_{C_K}I_1 = 0 \quad (20)$$

mit

$$\begin{aligned} z_C &= -i \frac{1}{\omega C} & z_L &= i\omega L \\ z_{C_K} &= -i \frac{1}{\omega C_K} & z_C &= R \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen erhält man dann für den Betrag von I_2 :

$$|I_2| = |U| \frac{1}{\left(4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} =: |U| \cdot |\mathfrak{L}| \quad (21)$$

mit

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)$$

Durch Gleichung (21) ist ersichtlich, dass für ω gegen Null, sowie gegen Unendlich gegen Null geht. Dazwischen liegen die Fundermentalfrequenzen ω_{\pm} für die $|\mathfrak{J}|$ ein Maximum durchläuft. Durch einsetzen der der Gleichungen (9) und (11) in die Gleichung (21) folgt für $|\mathfrak{J}|$:

$$|\mathfrak{J}(\omega_+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (22)$$

und

$$|\mathfrak{J}(\omega_-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}} \quad (23)$$

Nährungsweise gilt dann:

$$|\mathfrak{J}(\omega_+)| \approx |\mathfrak{J}(\omega_-)| \approx \frac{1}{2R}$$

Durch die Unabhängigkeit der Frequenz ν_+ fließt dabei praktisch kein Strom durch die Kopplung, somit können beide Schwingkreise als einer angenommen werden. Dieser Schwingkreis hat dann die Induktivität $L_{ges} = 2L$ und die Kapazität $C_{ges} = \frac{1}{2}C$. Bei der Frequenz ν_- fließt ein maximaler Strom durch die Kopplung. Somit findet bei beiden Frequenzen kein periodischer Energieaustausch statt.

Die theoretische Grundlage dieses Versuches wurde größtenteils aus der Quelle [1] entnommen.

2 Durchführung

2.1 Justierung

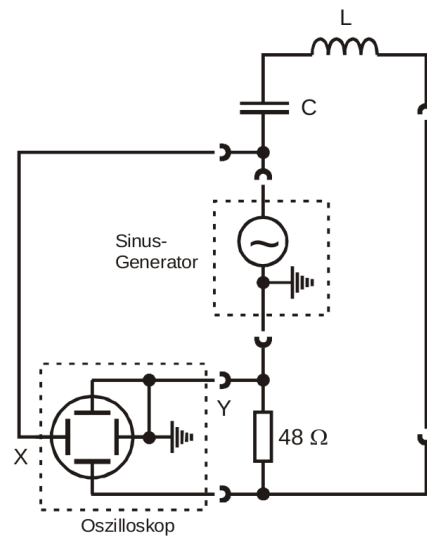


Abbildung 4: Schaltung zur Bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises

Zu aller erst wird die Schaltung aus Abbildung 4 aufgebaut und die Resonanzfrequenz gemessen, die ungefähr beim Strommaximum liegt. Die Feinabstimmung erfolgt dann durch Lissajous-Figuren, die verschwinden im Falle der Resonanz. Zunächst wird noch eine Schaltung wie in Abb. 4 aufgebaut, jedoch mit dem abstimmbaren Schwingkreis. In diesem wird die Resonanzfrequenz auf den gemessenen Wert angeglichen.

2.2 Messprogramm

2.2.1 Schwingungs- und Schwebungsfrequenz

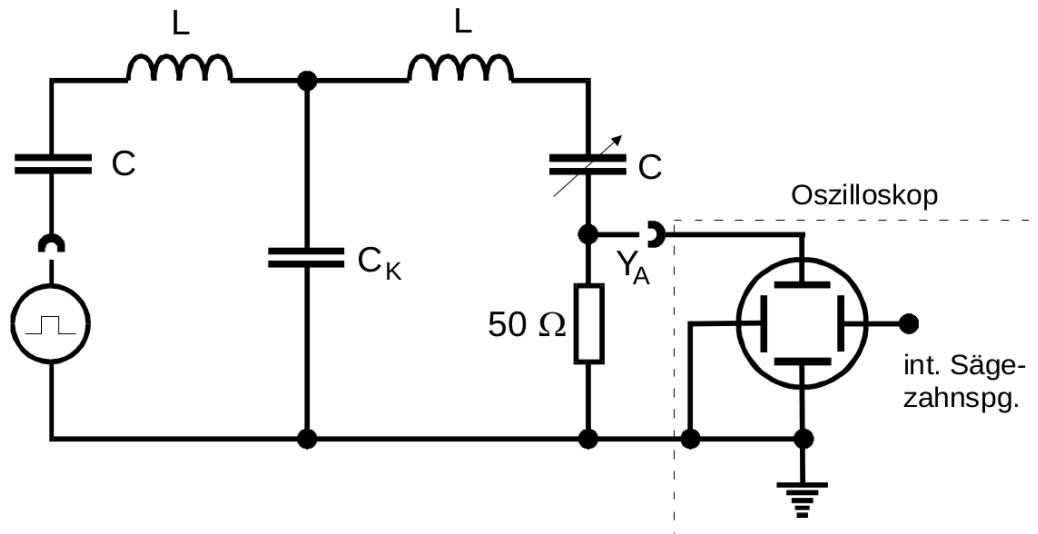


Abbildung 5: Schaltung zur Untersuchung von zwei gekoppelten Schwingkreisen

Nun wird die Schaltung aus Abbildung 5 aufgebaut. Der linke Schwingkreis wird mit einem Nadelimpuls oder einer Rechteckspannung angeregt. Auf dem Oszilloskop lassen sich dann das Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz ablesen. Hierzu werden die Schwingungsmaxima innerhalb der Schwebungsperiode gezählt. Das Verhältnis der Frequenzen wird für jede Variation von C_K mit $2 \leq C_K \leq 12nF$ gemessen.

2.2.2 Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit von C_K bestimmt mit Lissajous-Figuren

In diesem Teil des Versuches wird der Nadelimpuls bzw. die Rechteckspannung aus Abb. 5 durch ein Sinussignal ersetzt. Nun wird wieder C_K variiert und für jeden Wert ν_+ und ν_- bestimmt. Die Lissajous-Figuren helfen hier die Frequenzen zu finden bei denen die Phase Null oder π ist.

2.2.3 Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit von C_K bestimmt mit Sweep-Methode

Jetzt wird die Sinusspannung mit einem Sweep versehen. Dieser lässt die Sinusspannung in einem einstellbarem Zeitintervall von einer bestimmten Frequenz auf eine andere ansteigen. Auf dem Oszilloskop kann man dann den Anfang und das Ende des Sweeps beobachten bei korrekter Einstellung kann man dort die Resonanzpeaks beobachten. Dabei misst man die Zeitintervalle vom Anfang des Sweeps zu einem der Resonanzpeaks.

Auch bei diesem Teil des Versuches werden alle Werte abhängig vom Koppelkondensators C_K bestimmt.

3 Auswertung

3.1 Geräte-Daten

Schaltung 1:

$$C_1 = 0,8015nF C_{sp,1} = 0,037nF L_1 = 32,351mH$$

Schaltung 2:

$$C_2 = 0,7932nF C_{sp,2} = 0,028nF L_2 = 23,954mH$$

Wobei C_{sp} die Kapazität der Spule darstellt.

3.2 Justierung

Als grobe Näherung der Frequenz v_+ wurden $35,21Hz$ gemessen.

3.3 Frequenzverhältnisse bei einer Schwebung

Diese Messreihe wurde bei einer Generatorfrequenz von ca. $600Hz$ durchgeführt. Die gezählten Verhältnisse der Frequenzen lassen sich Tabelle 2 entnehmen. Da die Grenzen der Schwebung nicht immer eindeutig ab zu lesen sind, wird eine Abweichung von ± 1 veranschlagt. Graphisch ergibt sich so Abb. ??, wobei $\omega_{\pm} = v_{+} \pm v_{-}$ gilt und C_k mit 3% Abweichung behaftet ist.

Tabelle 1: gemessene Frequenzverhältnisse

C_k/nF	Peaks pro Schwebung
$1.20 \cdot 10^1$	$1.70 \cdot 10^1$
9.99	$1.40 \cdot 10^1$
8.18	$1.30 \cdot 10^1$
6.86	$1.00 \cdot 10^1$
4.74	9.00
2.86	5.00
2.19	4.00

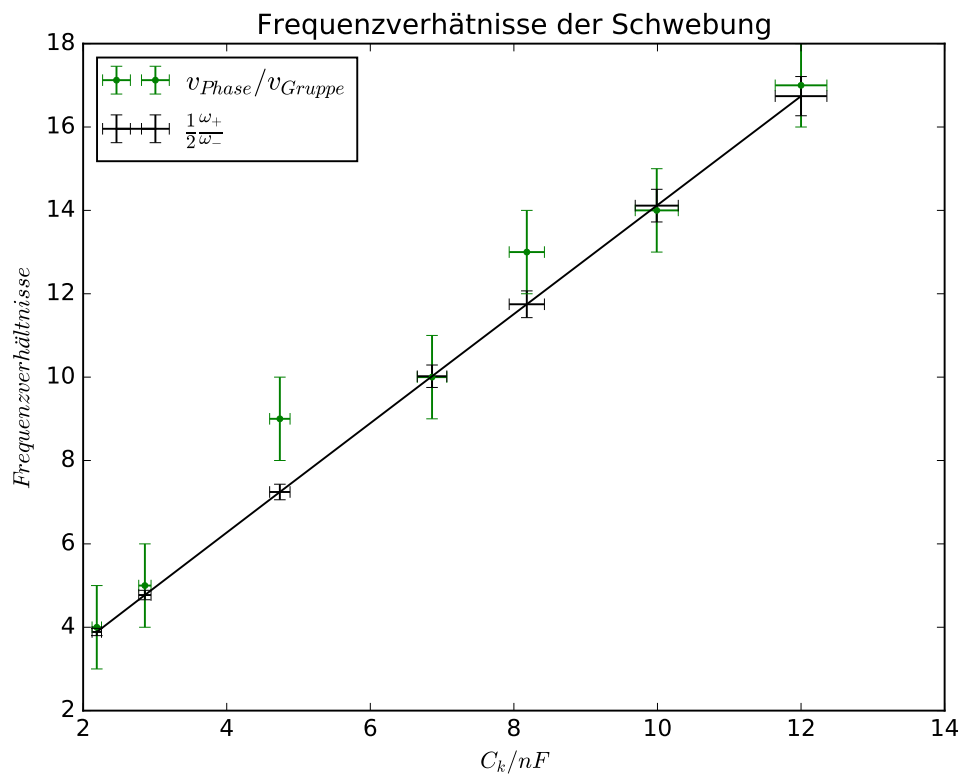


Abbildung 6: gezählte Peaks pro Schwebung aufgetragen gegen C_K .

3.4 Messung von v_+ und v_- mittels Lissajous-Figuren

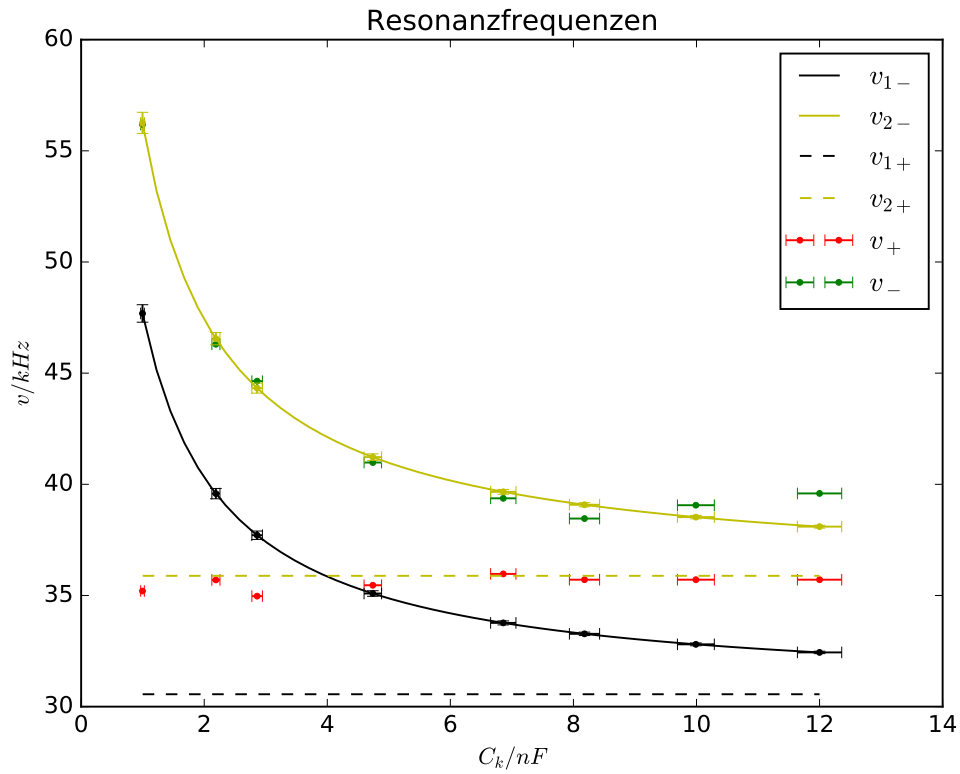


Abbildung 7: v_+ und v_- aufgetragen gegen C_K .

Die in diesem Schritt aufgenommenen Werte werden in Abb.7 mit errechneten Kurven v_{1-} und v_{2-} für Schaltung 1 und 2. Offensichtlich wurde Schaltung 1 für die Messungen verwendet, weshalb fortan ausschließlich diese Schaltung betrachtet wird.

Tabelle 2: gemessene Resonanzfrequenzen

C_k/nF	$\frac{v_+}{kHz}$	$\frac{v_-}{kHz}$
$9.97 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^1$	$4.63 \cdot 10^1$
2.19	$3.57 \cdot 10^1$	$5.62 \cdot 10^1$
2.86	$3.50 \cdot 10^1$	$4.46 \cdot 10^1$
4.74	$3.55 \cdot 10^1$	$4.10 \cdot 10^1$
6.86	$3.60 \cdot 10^1$	$3.94 \cdot 10^1$
8.18	$3.57 \cdot 10^1$	$3.85 \cdot 10^1$
9.99	$3.57 \cdot 10^1$	$3.91 \cdot 10^1$
$1.20 \cdot 10^1$	$3.57 \cdot 10^1$	$3.96 \cdot 10^1$

3.5 Ermittlung von v_+ und v_- mittels Sweap-Verfahren

Da beim Sweap-Verfahren die Frequenzen nicht direkt gemessen werden, sondern nur zeitliche Abstände (zu entnehmen aus Tabelle 4) müssen diese zunächst umgerechnet werden. Hierzu wird folgende Formel verwendet:

$$f(t) = (f_{Ende} - f_{Anfang}) \frac{t}{1s} + f_{Anfang} \quad (24)$$

Bei der Messung sind $f_{Anfang} = 3,165kHz$ und $f_{Ende} = 83,33kHz$ gewählt.

Tabelle 3: gemessene Frequenzverhältnisse

C_k/nF	$\frac{\Delta t}{ms}$	$\frac{\Delta t}{ms}$
$9.97 \cdot 10^{-1}$	$4.00 \cdot 10^2$	$6.48 \cdot 10^2$
2.19	$4.08 \cdot 10^2$	$5.36 \cdot 10^2$
2.86	$4.00 \cdot 10^2$	$5.04 \cdot 10^2$
4.74	$4.08 \cdot 10^2$	$4.64 \cdot 10^2$
6.86	$4.00 \cdot 10^2$	$4.40 \cdot 10^2$
8.18	$4.00 \cdot 10^2$	$4.40 \cdot 10^2$
9.99	$4.08 \cdot 10^2$	$4.32 \cdot 10^2$
$1.20 \cdot 10^1$	$3.92 \cdot 10^2$	$4.16 \cdot 10^2$

Tabelle 4: gemessene Frequenzverhältnisse

C_k/nF	$\frac{v_+}{kHz}$	$\frac{v_-}{kHz}$
$9.97 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^1$	$5.51 \cdot 10^1$
2.19	$3.59 \cdot 10^1$	$4.61 \cdot 10^1$
2.86	$3.52 \cdot 10^1$	$4.36 \cdot 10^1$
4.74	$3.59 \cdot 10^1$	$4.04 \cdot 10^1$
6.86	$3.52 \cdot 10^1$	$3.84 \cdot 10^1$
8.18	$3.52 \cdot 10^1$	$3.84 \cdot 10^1$
9.99	$3.59 \cdot 10^1$	$3.78 \cdot 10^1$
$1.20 \cdot 10^1$	$3.46 \cdot 10^1$	$3.65 \cdot 10^1$

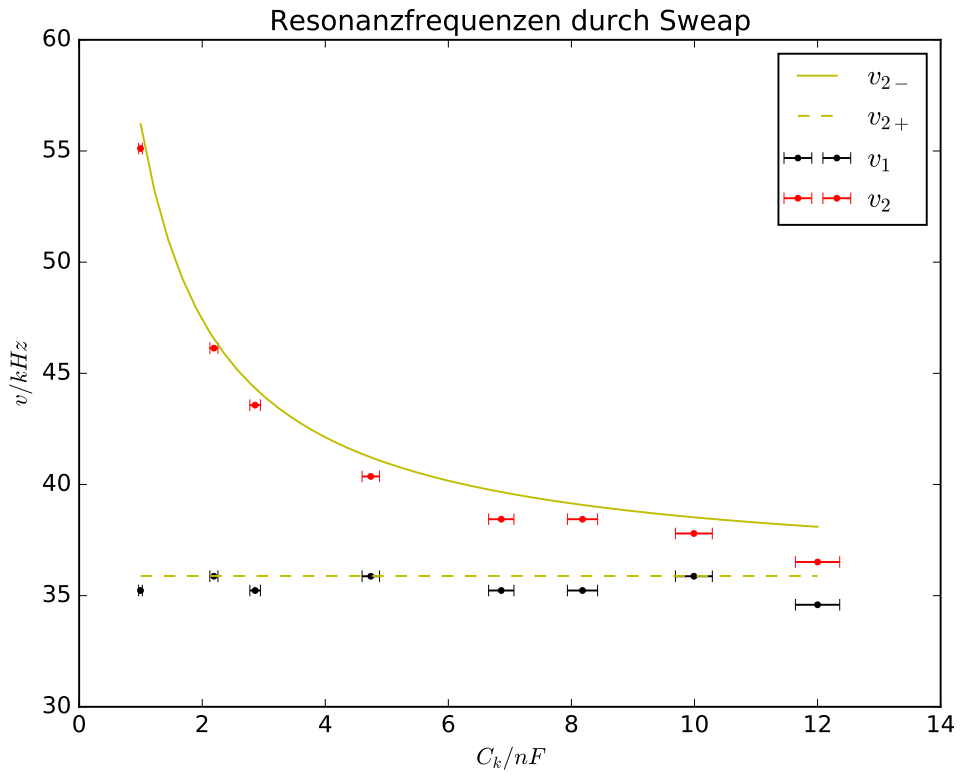


Abbildung 8: v_+ und v_- aufgetragen gegen C_K .

4 Diskussion

4.1 Frequenzverhältnisse bei einer Schwebung

Auffällig sind die starken Abweichungen zu den Erwartungswerten beim $4.74nF$ sowie beim $8.18nF$ Koppelkondensator, wobei letzterer noch durch den veranschlagten Fehler von ± 1 noch akzeptiert werden kann. Die verbleibenden Werte entsprechen vollständig den Erwartungen. Weiterhin ist in Betracht zu ziehen, dass die Abstimmung beider Schwingkreise nur begrenzt exakt ist.

4.2 Messung von v_+ und v_- mittels Lissajous-Figuren

Im niederkapazitiven Bereich des Koppelkondensator fallen die Messungen von v_- sehr präzise aus, während bei v_+ in diesem Bereich die größten Abweichungen auftreten. Bei höherkapazitiven Koppelkondensatoren nimmt die Exaktheit der Messwerte für v_+ stark zu, dafür weicht v_- zunehmend stark von den erwarteten Werten ab. Dies kann durch die hier nicht betrachteten, weil unbekannten Ungenauigkeiten der übrigen Bauteile liegen. Ein weiteres Problem besteht in der Erdung der Schaltung 2, welche nicht zuverlässig funktioniert und daher die Schärfe der Lissajous-Figuren begrenzt.

4.3 Messung von v_+ und v_- mittels Sweap-Verfahren

Dieses Verfahren war deutlich schneller als die Erfassung der Grundschrwingungen mittels Lissajous-Figuren, wenn die nötigen Einstellungen am sweap-Generator getroffen sind. Es eignet sich somit gut, wenn für viele Kondensatoren die Grundschrwingungen grob bestimmt werden sollen. Abb. 8 lässt sich jedoch klar entnehmen, dass die Messreihe stärker von den Theoriewerten abweicht als die in Abb. 7 dargestellte erste Messreihe. Augenscheinlich fallen alle Messwerte geringer aus und ihre Präzision nimmt mit steigender Kapazität ab. Letzteres liegt daran, dass der am Oszilloskop auftretende Graph mit stärkerer Kopplung zunehmend gestaucht wird und so die Ablesegenauigkeit rapide abnimmt. Dies kann durch Nachjustierung des Generators behoben werden, hierdurch entfällt jedoch der zeitliche Vorteil dieses Verfahrens.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr.355-Gekoppelte Schwingkreise*. 2014.