V103

Biegung elastischer Stäbe

Pelle Ofenbach
pelle.ofenbach@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu

Durchführung: 06.12.16

Abgabe: 13.12.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuches ist, dass Elastizitätsmodul verschiedener Metalle und Legierungen zu messen.

2 Theorie

Wirken Spannungen auf eine Oberfläche eines Körpers, so können Änderungen an Gestalt und Volumen enstehen. Dabei werden die Komponenten der Spannungen die senkrecht zur Oberfläche stehen als Normalspannung σ oder Druck und die parallelen als Tangential-oder Schubspannung bezeichnet. Ist nun die relative Änderung $\Delta \mathrm{L}/\mathrm{L}$ hinreichend klein, wobei L eine lineare Körperdimension ist, so gibt das Hooksche Gesetz den Zusammenhang:

$$\sigma = \mathrm{E}\frac{\Delta \mathrm{L}}{\mathrm{L}}. \tag{1}$$

E bezeichnet dabei das Elastizitätsmodul.

2.1 Biegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

Ist ein Stab, der Länge L, an einer Seite eingespannt und es wirkt eine Kraft F auf einen Querschnitt Q des Stabes der den Abstand x von seiner Einspannung hat, wie in Abbildung 1, dann übt diese ein Drehmoment aus. Dieses Drehmoment lenkt den Querschnitt Q aus seiner ursprünglichen vertikalen Lage aus. Dabei wird die obere Schicht des Stabes gedehnt und die untere gestaucht. Da es sich bei dem Stab um ein elastischen Körper handelt, tretten im inneren des Stabes Spannungen auf, die der Auslenkung D(x) entgegenwirken.

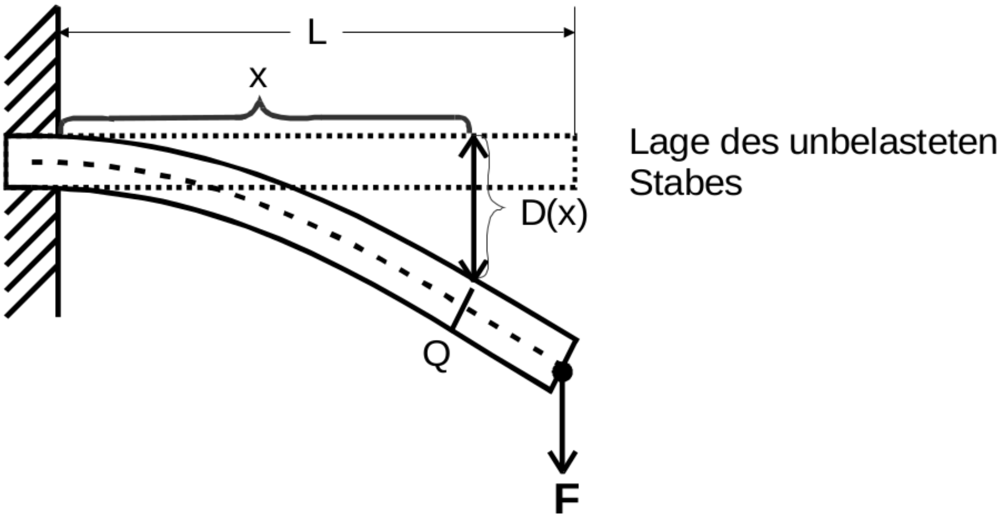

Abbildung 1: Biegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung aus Quelle [1]

Dazwischen gibt es eine Fläche, in der keine Spannungen auftretten und ihre ursprüngliche Länge behält, diese wird neutrale Faser gennant und ist in Abb.1 als gestrichelte Linie innerhalb des Stabes eingezeichnet. Daraus ergibt sich dann für die Auslenkung

$$\mathrm{D(x)} = \frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{EI}}\left(\mathrm{Lx}^2 - \frac{\mathrm{x}^3}{3}\right) \text{ für } 0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{L}. \tag{2}$$

I in Gleichung (2), bezeichnet dabei das Flächenträgheitsmoment, dies ist definiert durch:

$$I := \int_{\mathrm{Q}} \mathrm{y}^2 \mathrm{dq(y)}. \tag{3}$$

Dabei ist y definiert als der Abstand des Flächenelemntes dq von der neutralen Faser.

2.2 Biegung eines homogenen Stabes bei beidseitiger Auflage

Nun wird ein Stab an beiden Enden aufgelgt und in der Stabmitte durch eine Kraft F durchgebogen, wie in Abbildung2 zusehen. Hier wirkt die Kraft F mit Hebelarm x am Querschnitt Q.

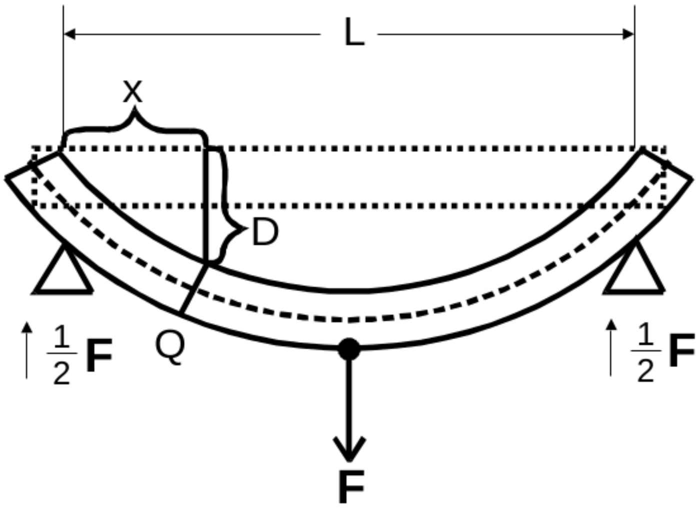

Abbildung 2: Biegung eines elastischen Stabes bei zweiseitiger Auflage entnommen aus Quelle [1]

Dann ergibt sich für die Auslenkung:

$$\mathrm{D(x)} = \frac{\mathrm{F}}{48\mathrm{EI}}\left(3\mathrm{L}^2\mathrm{x} - 4\mathrm{x}^3\right) \text{ für } 0 \leq \mathrm{x} \leq \frac{\mathrm{L}}{2}. \tag{4}$$

Für die rechte Stabhälfte mit D(L)=0 gilt dann:

$$\mathrm{D(x)} = \frac{\mathrm{F}}{48\mathrm{EI}}\left(4\mathrm{x}^3 - 12\mathrm{L}\mathrm{x}^2 + 9\mathrm{L}^2\mathrm{x} - \mathrm{L}^3\right) \text{ für } \frac{\mathrm{L}}{2} \leq x \leq L. \tag{5}$$

Auch hier ist bei beiden Gleichungen ((4)&(5)) I das Flächenträgheitsmoment aus Gleichung (3).

3 Aufbau

Der Aufbau für die Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung 4.1 ist in Abbildung 3 wiedergegeben. Der Versuchsaufbau unterscheidet sich für die Biegung eines elastischen Stabes bei beidseitiger Auflage 4.2 nur dahingehend, dass der Stab im Punkt A und B (s. Abb.3) aufliegt, anstatt nur in Punkt A.

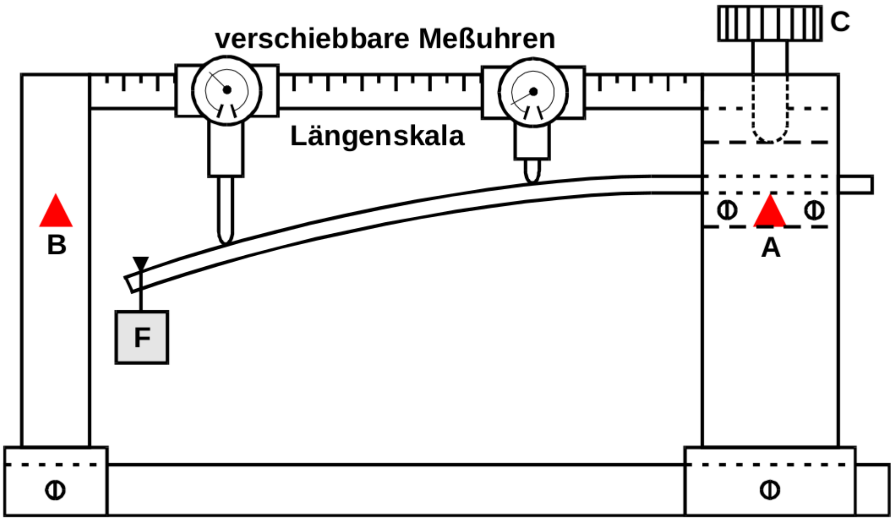

Abbildung 3: Darstellung der Versuchsapperatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe aus Quelle [1]

4 Durchführung

4.1 Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung

Der Stab wird zur erst in die Versuchsapperatur, wie in Abb.3, mit der Spannvorrichtung C eingespannt. Dann wird eine Messreihe ohne Belastung aufgenommen. Dabei wird der Stab nur mit einer Tastuhr abgelaufen. Die Werte werden dann als Referenzwerte $\mathrm{D_0(x)}$ genommen. Danach wird eine Messreihe $\mathrm{D_M(x)}$ mit Gewichtung aufgenommen. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass die maximale Durchbiegung zwischen 3mm un d 7mm liegt. Für die aufgenommenen Werte gilt dann:

$$\mathrm{D(x) = D_M(x) - D_0(x)} \tag{6}$$

Dieser Teil des Versuches wurde mit einem rundem und einem eckigen Stab durchgeführt.

4.2 Biegung eines Stabes bei beidseitiger Auflage

Der Versuchsaufbau wird, wie im Aufbau 3 geschildert wurde, aufgebaut. Die Versuchsdurchführung ist hier sehr analog zum Teil4.1. Auch hier wird eine Messreihe $\mathrm{D_0(x)}$ zur Referenz und eine mit Gewichtung $\mathrm{D_M(x)}$ aufgenommen. Auch hier besteht der Zusammenhang aus Gleichung (6). Der Unterschied besteht darin, dass nun mit beiden Tastuhren gemessen wird. Eine läuft den Stab von Punkt A bis zur Mitte und die andere vom Punkt B bis zur Mitte ab. Dieser Teil des Versuches wurde mit dem rundem Stab von Teil 4.1 durchgeführt.

4.3 Verwendete Stäbe

Es wurden ein Stab mit rundem Querschnitt sowie einer mit quadratischem Querschnitt verwendet. Für den Runden wird von nun an der Index r verwendet, für den eckigen q. Für den runden Stab gelten folgende Werte:

$$m_r = 379.2g$$
$$l_r = 57.5cm$$
$$d = 10mm$$

wobei m die Masse, l die Länge und d den Durchmesser bezeichnet. Für den eckigen Stab bezeichnet a die Kantenlänge und seine Abmessungen sind entsprechend:

$$m_q = 502.4g$$
$$l_q = 60cm$$
$$a = 10mm$$

5 Auswertung

5.1 Bestimmung des Materials der Stäbe

Mit den aus 4.3 bekannten Abmessungen ergeben sich die Dichten ρ der Stäbe mittels

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Al} \tag{7}$$

und

$$A_r = \pi r^2 \tag{8}$$

bzw

$$A_q = a^2 \tag{9}$$

zu $\rho_r = 8397 \frac{kg}{m^3}$ bzw. $\rho_q = 8373 \frac{kg}{m^3}$. Messing CuZnPb3 beispielsweise besitzt eine Dichte von $\rho_{Messing} = 8.47 \cdot 10^9 \frac{kg}{m^3}$ und einem Elastizitätsmodul von $E_{Messing} = 9.7 \cdot 10^1 0 Nm^2$ [2]. Es wird somit von Messingstäben ausgegangen und als vergleichender Theoriewert $E_{Messing}$ hinzugezogen. Auf qualitativen Vergleich wird jedoch verzichtet, da Messing als Legierung je nach Ausführung enorme Unterschiede in seiner Beschaffenheit aufweisen kann.

5.2 Einseitige Einspannung

Tabelle 1: Auslenkung des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

x/cm	D_o/mm	D_m/mm	$\Delta D/mm$
3.000	0.000	0.050	0.050
4.000	0.000	0.042	0.042
5.000	0.048	0.056	0.009
6.000	0.055	0.110	0.055
7.000	0.065	0.168	0.103
8.000	0.100	0.225	0.125
9.000	0.155	0.291	0.136
10.000	0.180	0.355	0.175
11.000	0.218	0.420	0.202
12.000	0.278	0.490	0.212
13.000	0.318	0.582	0.264
14.000	0.330	0.660	0.330
15.000	0.370	0.710	0.340
16.000	0.425	0.800	0.375
17.000	0.490	0.900	0.410
18.000	0.600	1.040	0.440
19.000	0.690	1.165	0.475
20.000	0.735	1.268	0.533
21.000	0.810	1.381	0.571
22.000	0.928	1.550	0.622
23.000	1.000	1.705	0.705
24.000	1.070	1.785	0.715
25.000	1.130	1.920	0.790
26.000	1.238	2.250	1.012
27.000	1.315	2.170	0.855
28.000	1.385	2.270	0.885
29.000	1.450	2.400	0.950
30.000	1.540	2.555	1.015
31.000	1.623	2.750	1.127
32.000	1.450	2.825	1.375
33.000	1.792	2.960	1.168
34.000	1.860	3.085	1.225
35.000	1.918	3.250	1.332
36.000	2.010	3.360	1.350
37.000	2.060	3.500	1.440
38.000	2.085	3.620	1.535
39.000	2.190	3.785	1.595
40.000	2.270	3.905	1.635
41.000	2.350	4.045	1.695
42.000	2.635	4.175	1.540
43.000	2.540	4.340	1.800
44.000	2.625	4.550	1.925
45.000	2.735	4.630	1.895
46.000	2.820	4.835	2.015
47.000	2.910	5.020	2.110
48.000	2.985	5.185	2.200
49.000	3.120	5.290	2.170

Tabelle 2: Auslenkung des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

x/cm	D_o/mm	D_m/mm	$\Delta D/mm$
3.000	0.000	0.020	0.020
5.000	−0.040	−0.020	0.020
7.000	−0.070	0.080	0.150
9.000	−0.055	0.190	0.245
11.000	−0.010	0.330	0.340
13.000	0.020	0.515	0.495
15.000	0.060	0.668	0.608
17.000	0.120	0.912	0.792
19.000	0.295	1.270	0.975
21.000	0.430	1.580	1.150
23.000	0.570	1.900	1.330
25.000	0.683	2.205	1.522
27.000	0.795	2.555	1.760
29.000	0.920	2.915	1.995
31.000	1.070	3.310	2.240
33.000	1.235	3.715	2.480
35.000	1.388	4.125	2.737
37.000	1.495	4.510	3.015
39.000	1.705	4.975	3.270
41.000	1.880	5.420	3.540
43.000	2.010	5.880	3.870
45.000	2.170	6.310	4.140
47.000	2.365	6.820	4.455
49.000	2.595	7.250	4.655

Für den runden Stab wurde eine Belastungsmasse von $m_1 = 238.9g$ gewählt, für den eckigen $m_2 = 767.5g$. Ihre Auslenkungen sind in den Tabellen 1 und **??** aufgelistet. Hierbei bezeichnet x die Position auf dem Stab (Einspannung bei $x = 0$). D_0 die Auslenkung im unbelasteten Zustand, D_m die Auslenkung im belasteten Zustand und $\mathit{\Delta} D$ ihre Differenzen, also die Auslenkung durch die Belastung. Graphisch dargestellt sind die Werte in Abb.4 bzw. Abb.6.

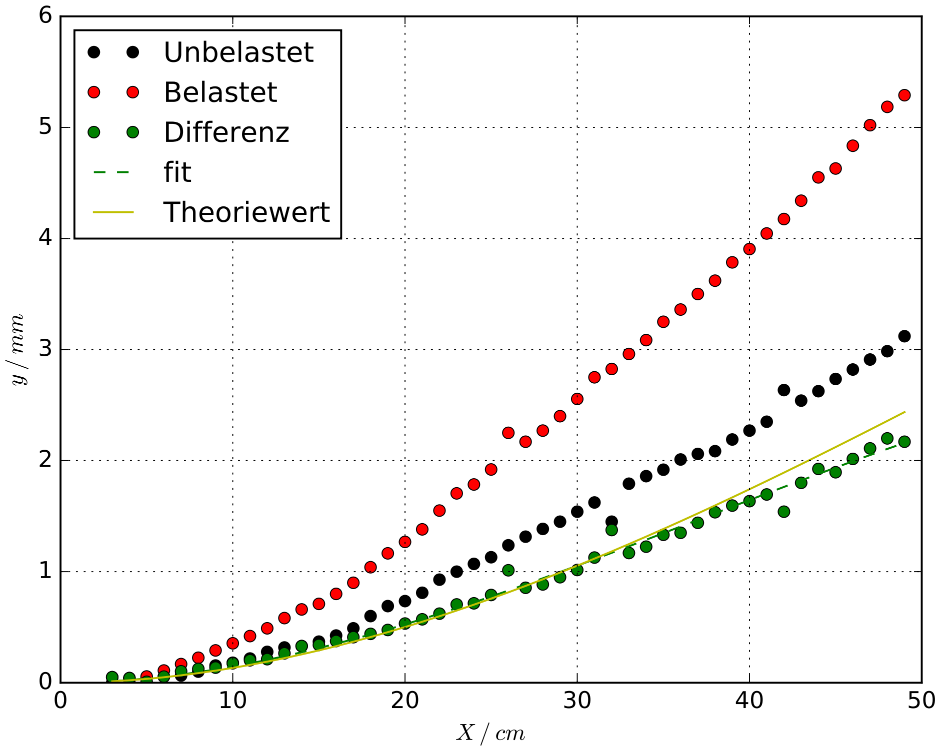

Abbildung 4: Auslenkung des runden Stabes, verglichen mit dem Theoriewert

Die Flächenträgheitsmomente der Stäbe ergeben sich über (3) zu

$$I_r = \frac{\pi}{64} d^4 = 4.9e - 10m^4 \tag{10}$$

bzw.

$$I_q = \frac{a^4}{12} = 8.3e - 10m^4 \tag{11}$$

Mittels dieser Flächenträgheitsmomente und der Auslenkung der Stäbe lässt sich durch (2) der Elastizitätsmodul bestimmen (Tabellen 3 und 4). Hierraus ergeben sich im Mittel

$$E_r = (9.76e9 \pm 4.3e9)\,\frac{N}{m^2}$$

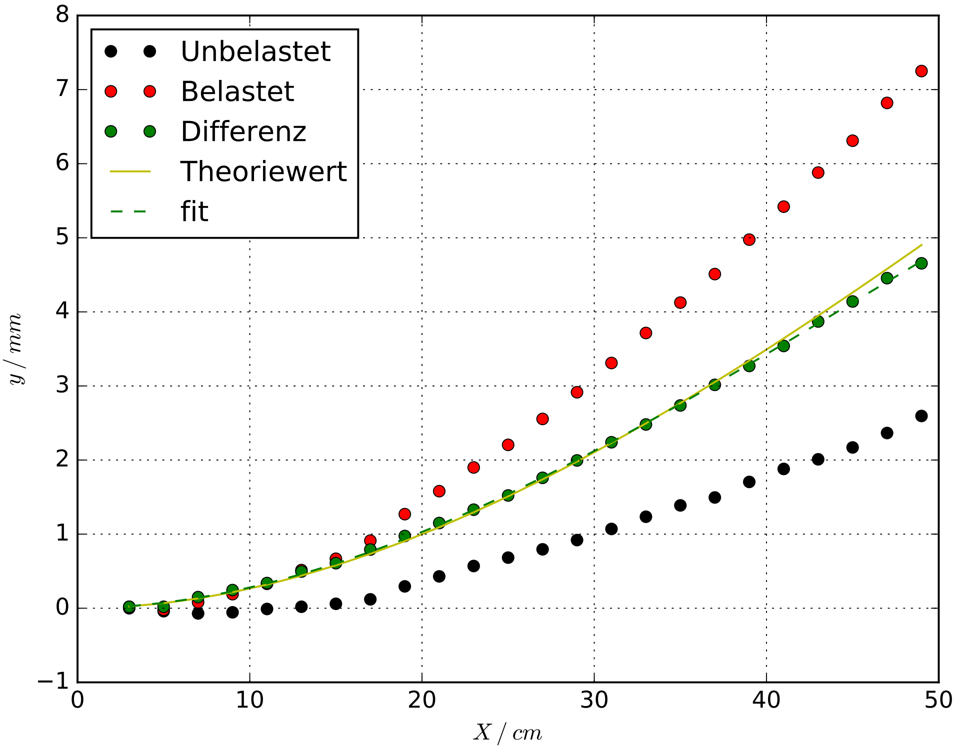

Abbildung 5: Auslenkung des eckigen Stabes, verglichen mit dem Theoriewert

und

$$E_q = (1.35e10 \pm 6.1e9)\,\frac{N}{m^2}.$$

5.3 Beidseitige Auflage

In diesem Versuchsteil ist die Belastung $m_3 = 4722.5g$. Die Auslenkungen des Stabes sind Tabelle **??** zu entnehmen. Die Berrechnung von E_r erfolgt diesmal durch (4) ($x < 27cm$) und (**??**) ($x > 27cm$). Ihre Ergebnisse lassen sich Tabelle 6 entnehmen. Hierbei ergibt sich der mittlere Elastizitätsmodul der beiden Seiten links ($x < 27cm$) und rechts ($x > 27cm$) zu

$$E_{links} = (1.07e10 \pm 8e8)\,\frac{N}{m^2}$$

und

$$E_{rechts} = (1.587e10 \pm 6e7)\,\frac{N}{m^2}$$

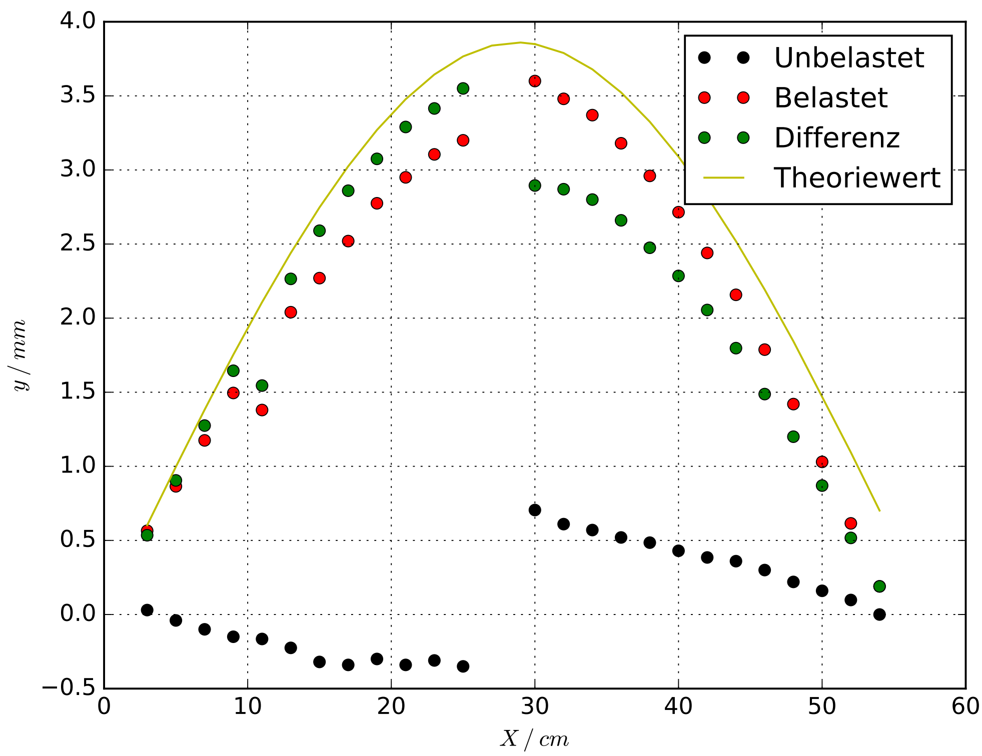

Abbildung 6: Auslenkung des runden Stabes bei beidseitiger Auflage, verglichen mit dem Theoriewert

Tabelle 3: E_r berechnet aus x

x/cm	$E_r/\frac{N}{m^2}$
3.00	$2.43 \cdot 10^7$
4.00	$5.12 \cdot 10^7$
5.00	$3.84 \cdot 10^8$
6.00	$8.69 \cdot 10^7$
7.00	$6.28 \cdot 10^7$
8.00	$6.71 \cdot 10^7$
9.00	$7.76 \cdot 10^7$
10.00	$7.40 \cdot 10^7$
11.00	$7.71 \cdot 10^7$
12.00	$8.69 \cdot 10^7$
13.00	$8.12 \cdot 10^7$
14.00	$7.50 \cdot 10^7$
15.00	$8.31 \cdot 10^7$
16.00	$8.52 \cdot 10^7$
17.00	$8.74 \cdot 10^7$
18.00	$9.07 \cdot 10^7$
19.00	$9.30 \cdot 10^7$
20.00	$9.12 \cdot 10^7$
21.00	$9.33 \cdot 10^7$
22.00	$9.34 \cdot 10^7$
23.00	$8.94 \cdot 10^7$
24.00	$9.54 \cdot 10^7$
25.00	$9.30 \cdot 10^7$
26.00	$7.80 \cdot 10^7$
27.00	$9.89 \cdot 10^7$
28.00	$1.02 \cdot 10^8$
29.00	$1.01 \cdot 10^8$
30.00	$1.01 \cdot 10^8$
31.00	$9.62 \cdot 10^7$
32.00	$8.34 \cdot 10^7$
33.00	$1.04 \cdot 10^8$
34.00	$1.04 \cdot 10^8$
35.00	$1.01 \cdot 10^8$
36.00	$1.04 \cdot 10^8$
37.00	$1.03 \cdot 10^8$
38.00	$1.01 \cdot 10^8$
39.00	$1.01 \cdot 10^8$
40.00	$1.03 \cdot 10^8$
41.00	$1.04 \cdot 10^8$
42.00	$1.19 \cdot 10^8$
43.00	$1.06 \cdot 10^8$
44.00	$1.03 \cdot 10^8$
45.00	$1.09 \cdot 10^8$
46.00	$1.06 \cdot 10^8$
47.00	$1.05 \cdot 10^8$
48.00	$1.04 \cdot 10^8$
49.00	$1.09 \cdot 10^8$

Tabelle 4: E_q berechnet aus x

x/cm	$E_q/\frac{N}{m^2}$
3.00	$1.20 \cdot 10^8$
5.00	$3.31 \cdot 10^8$
7.00	$8.54 \cdot 10^7$
9.00	$8.55 \cdot 10^7$
11.00	$9.09 \cdot 10^7$
13.00	$8.62 \cdot 10^7$
15.00	$9.23 \cdot 10^7$
17.00	$8.99 \cdot 10^7$
19.00	$9.01 \cdot 10^7$
21.00	$9.22 \cdot 10^7$
23.00	$9.44 \cdot 10^7$
25.00	$9.62 \cdot 10^7$
27.00	$9.58 \cdot 10^7$
29.00	$9.62 \cdot 10^7$
31.00	$9.66 \cdot 10^7$
33.00	$9.76 \cdot 10^7$
35.00	$9.81 \cdot 10^7$
37.00	$9.82 \cdot 10^7$
39.00	$9.92 \cdot 10^7$
41.00	$9.98 \cdot 10^7$
43.00	$9.90 \cdot 10^7$
45.00	$9.98 \cdot 10^7$
47.00	$9.97 \cdot 10^7$
49.00	$1.02 \cdot 10^8$

Tabelle 5: Auslenkung des beidseitig aufgelegten runden Stabes

x/cm	D_0/mm	D_m/mm	$\Delta D/mm$
3.00	0.03	0.56	0.53
5.00	−0.04	0.86	0.91
7.00	−0.10	1.18	1.28
9.00	−0.15	1.50	1.65
11.00	−0.17	1.38	1.54
13.00	−0.23	2.04	2.27
15.00	−0.32	2.27	2.59
17.00	−0.34	2.52	2.86
19.00	−0.30	2.77	3.07
21.00	−0.34	2.95	3.29
23.00	−0.31	3.10	3.42
25.00	−0.35	3.20	3.55
30.00	0.70	3.60	2.90
32.00	0.61	3.48	2.87
34.00	0.57	3.37	2.80
36.00	0.52	3.18	2.66
38.00	0.48	2.96	2.48
40.00	0.43	2.71	2.28
42.00	0.39	2.44	2.05
44.00	0.36	2.16	1.80
46.00	0.30	1.79	1.49
48.00	0.22	1.42	1.20
50.00	0.16	1.03	0.87
52.00	0.98	0.61	0.52
54.00	0.00	0.19	0.19

Tabelle 6: E_r berechnet aus x

x/cm	$E_r/\frac{N}{m^2}$
3.00	$1.09 \cdot 10^8$
5.00	$1.07 \cdot 10^8$
7.00	$1.05 \cdot 10^8$
9.00	$1.03 \cdot 10^8$
11.00	$1.32 \cdot 10^8$
13.00	$1.04 \cdot 10^8$
15.00	$1.03 \cdot 10^8$
17.00	$1.03 \cdot 10^8$
19.00	$1.03 \cdot 10^8$
21.00	$1.03 \cdot 10^8$
23.00	$1.04 \cdot 10^8$
25.00	$1.03 \cdot 10^8$
30.00	$1.29 \cdot 10^8$
32.00	$1.28 \cdot 10^8$
34.00	$1.27 \cdot 10^8$
36.00	$1.28 \cdot 10^8$
38.00	$1.30 \cdot 10^8$
40.00	$1.31 \cdot 10^8$
42.00	$1.33 \cdot 10^8$
44.00	$1.36 \cdot 10^8$
46.00	$1.43 \cdot 10^8$
48.00	$1.49 \cdot 10^8$
50.00	$1.65 \cdot 10^8$
52.00	$2.05 \cdot 10^8$
54.00	$3.58 \cdot 10^8$

6 Diskussion

6.1 Einseitige Einspannung

Da die Dichten beider Stäbe $\left(\rho_r = 8397\frac{kg}{m^3}, \rho_q = 8373\frac{kg}{m^3}\right)$ nur um $24\frac{kg}{m^3}$, also ca. 0.29% voneinander abweichen, kann ohne weitere Bedenken von identischen Materialien ausgegangen werden. Dementsprechend sollten die Elastizitätsmodule ebenfalls identisch sein. tatsächlich ergibt sich zwischen dem Elastizitätsmodul des runden und des eckigen Stabes eine Differenz von $\Delta E = (3.74e9 \pm 10.4e9)\,\frac{N}{m^2} \approx (38 \pm 77)\%$ was eine starke Abweichung der beiden Elastizitätsmodule darstellt. Allerdings sind bereits die Messunsicherheiten von E (44% bzw. 45) enorm, was vor allem an den nicht ordnungsgemäß befestigten und somit wackelnden Messuhren liegen dürfte. Die fehlende Mutter an der Halterung der Uhren an der Messschiene sorgte für eine Toleranz der Auslenkung von ca $\pm 3mm$, welche durch vorsichtige Handhabung nur bedingt ausgeglichen werden kann.

6.2 Beidseitige Auflage

In dieser Messreihe fällt vor allem der Unterschied in den Auslenkungen der beiden Seiten auf ($0.655mm$ zwischen $x = 25cm$ und $x = 30cm$), welche bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls des runden Stabes für die linke und rechte Seite zu eine Differenz von $\Delta E \approx (51.7e8 \pm 9.5e8)\,\frac{N}{m^2}$. Die Messung dieser Werte liefert allerdings erstaunlich präzise Ergebnisse, betrachtet man die Seiten einzeln (links ca 7.5% Abweichung, rechts sogar nur 0.38%), was vermuten lässt, dass diese Art der Messung deutlich genauer ist, jedoch ein systematischer Fehler in Form einer festen Differenz zwischen beiden Messuhren vorliegt.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch Nr.103 - Biegung elastischer Stäbe.* 2014.

[2] Deutsches Kupferinstitut. *CuZn39Pb3.* 2016.