



V351

Fourier-Analyse und Synthese

Pelle Ofenbach
pelle.ofenbach@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu

Durchführung: 29.11.16

Abgabe: 06.12.16

1 Theorie

1.1 Fouriersches Theorem

Sei $f(t)$ periodisch in t und stetig, so lässt sich f durch die sog. *Fourier-Reihe* darstellen, welche wie folgt festgelegt ist:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right) \quad (1)$$

Wobei T die Periodendauer bezeichnet und a_n gegeben ist durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt. \quad (2)$$

b_n ist analog durch

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad (3)$$

gegeben [1]. Die Bestimmung dieser Koeffizienten wird *Fourier-Analyse* genannt und liefert ein diskretes Spektrum für alle periodischen Funktionen.

1.2 Fourier-Transformation

Mittels Fourier-Transformation $f(t) \rightarrow g(v)$ kann man das gesamte Frequenzspektrum $g(v)$ von $f(t)$ auf einmal berechnen, bzw. aus diesem $f(t)$. Sie ist gegeben durch

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ivt) dt \quad (4)$$

bzw

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \exp(-ivt) dv. \quad (5)$$

Bei Messungen des Spektrums ist zu beachten, dass selbst ein perfekt periodisches Signal zu einem kontinuierlichen Spektrum führen wird, da nicht von $-\infty$ bis ∞ integriert wird, sondern lediglich über einen begrenzten Zeitraum. Dies führt außerdem zu bedeutungslosen Nebenmaxima.

2 Durchführung

2.1 Messung des Frequenzspektrums

Im ersten Teil des Versuchs wird das Frequenzspektrum $g(v)$ gemäß (4) bis zur 9. Oberwelle gemessen. Hierzu werden eine Rechteck- und eine Sägezahnspannung, sowie ein Nadelimpuls in ein digitales Oszilloskop eingespeißt, welches über die Einstellung *FFA*¹ selbstständig das Frequenzspektrum des Eingangssignals integriert. Hierbei ist zu beachten, die integrationsbedingten Nebenmaxima nicht mit abzulesen. Sie lassen sich an ihrem irregulären, willkürlichen Auftreten erkennen.

¹Fast-Filter-Amplifier

2.2 Fouriersynthese

Zur Fouriersynthese werden zuerst die nötigen Fourierkoeffizienten mit Hilfe der Formeln (2) & (3) berechnet. Nun werden an einem Oberwellengenerator 9 Oberwellen eingestellt und miteinander in Phase gebracht. Hierzu werden sie nacheinander mit der ersten zu Lissajous-Figuren überlagert. Anschließend wird ihre Amplitude möglichst exakt den berechneten Koeffizienten entsprechend eingestellt und alle Schwingungen werden addiert. Dies wird wie bereits in 2.1 für eine Rechteck- und eine Sägezahnspannung, sowie ein Nadelimpuls durchgeführt.

2.3 Untersuchte Funktionen

Die Rechteckspannung wurde mit der Funktion

$$R(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A, & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

approximiert. Mit der folgenden Funktion wurde die Sägezahnspannung approximiert:

$$S(t) = \frac{A}{T}t. \quad (7)$$

Dies Beschreibt den Verlauf innerhalb einer Periodendauer. der Nadelimpuls wurde bei der Brechnung beschrieben durch :

$$N(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{k} \\ 0, & \frac{T}{k} < t \leq T \end{cases} \quad (8)$$

3 Auswertung

3.1 Brechnung der Fourier-Koeffizienten

3.1.1 Rechteckspannung

Für die Rechteckspannung ergibt sich mit der Gleichung (3) und der Funktion (6) die Fourier-Amplituden mit der Fuktion:

$$b_n = \frac{A}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)). \quad (9)$$

Die Werte sind in Tabelle 1 der Einfachheit halber für $A = 1$ dargestellt.

Tabelle 1: Fourier-Koeffizienten einer Rechteckspannung

Nr.	Fourier-Amplitude
1	$6.37 \cdot 10^{-1}$
2	0.00
3	$2.12 \cdot 10^{-1}$
4	0.00
5	$1.27 \cdot 10^{-1}$
6	0.00
7	$9.09 \cdot 10^{-2}$
8	0.00
9	$7.07 \cdot 10^{-2}$

3.1.2 Sägezahnspannung

Die Fourier-Koeffizienten der Sägezahnspannung lassen sich mit Zurhilfenahme der Gleichung (3) und der Funktion (6) durch folgende Gleichung brechnen:

$$b_n = -\frac{A}{n\pi}. \quad (10)$$

Die Werte der Fourier-Koeffizienten finden Sie in Tabelle 2 dargestellt der Einfachheit halber wieder für $A = 1$.

Tabelle 2: Fourier-Koeffizienten einer Sägezahnspannung

Nr.	Fourier-Amplitude
1	$-3.18 \cdot 10^{-1}$
2	$-1.59 \cdot 10^{-1}$
3	$-1.06 \cdot 10^{-1}$
4	$-7.96 \cdot 10^{-2}$
5	$-6.37 \cdot 10^{-2}$
6	$-5.31 \cdot 10^{-2}$
7	$-4.55 \cdot 10^{-2}$
8	$-3.98 \cdot 10^{-2}$
9	$-3.54 \cdot 10^{-2}$

3.1.3 Nadelimpuls

Die Fourier-Koeffizienten des Nadelimpuls werden mit Zurhilfenahme der Gleichung (2) und der Funktion (6) durch die folgende Gleichung berechnet:

$$a_n = \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n2\pi}{k}\right) \quad (11)$$

Die Werte finden sie in Tabelle 3 für verschiedene Werte von k dargestellt wieder mit $A = 1$.

Tabelle 3: Fourier-Koeffizienten eines Nadelimpulses

Nr.	Fourier-Amplitude	Nr.	Fourier-Amplitude
1	$1.87 \cdot 10^{-1}$	1	$2.00 \cdot 10^{-2}$
2	$1.51 \cdot 10^{-1}$	2	$1.99 \cdot 10^{-2}$
3	$1.01 \cdot 10^{-1}$	3	$1.99 \cdot 10^{-2}$
4	$4.68 \cdot 10^{-2}$	4	$1.98 \cdot 10^{-2}$
5	$7.80 \cdot 10^{-18}$	5	$1.97 \cdot 10^{-2}$
6	$-3.12 \cdot 10^{-2}$	6	$1.95 \cdot 10^{-2}$
7	$-4.32 \cdot 10^{-2}$	7	$1.94 \cdot 10^{-2}$
8	$-3.78 \cdot 10^{-2}$	8	$1.92 \cdot 10^{-2}$
9	$-2.08 \cdot 10^{-2}$	9	$1.90 \cdot 10^{-2}$
(a) mit $k = 10$		(b) mit $k = 100$	

Aus Tabelle 3a ist ersichtlich, dass sich für hohe Werte von k ein sog. Dirac-Kamm ergibt.

3.2 Vergleich mit den experimentel erfassten Fourier-Koeffizienten

3.2.1 Rechteckspannung

In Abbildung 1 sind die rechnerisch und experimentel ermittelten Fourier-Koeffizienten aufgetragen. Die experimentellen Größen wurden alle mit einem Fehler von 3% versehen, da sie von einem Oszilloskop abgelesen wurden. Die Amplitude A der berechneten Werte wurde hier mit 10 Volt angenähert. Dennoch ist zu beobachten, dass die Erwartungswerte nicht innerhalb der Fehlertoleranz liegen.

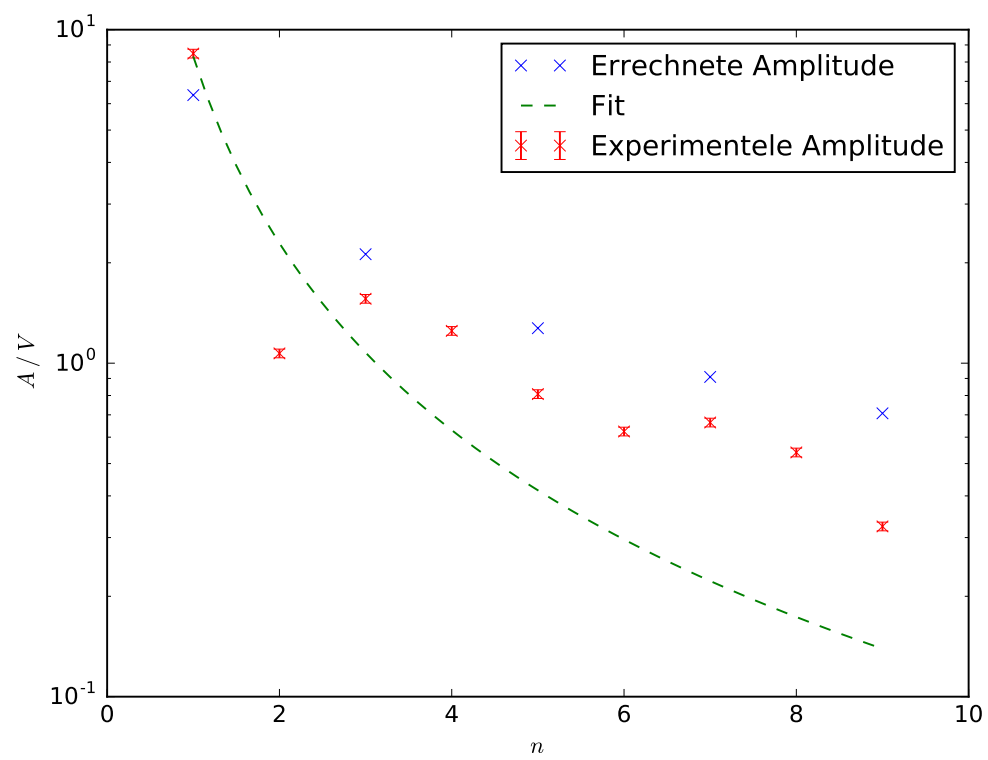


Abbildung 1: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden der Rechteckspannung

Der Fit wurde mit der Funktion (12) durchgeführt. Hier liegt a bei $8,3 \pm 0,6$ und b bei $1,86 \pm 0,27$

$$f(n, a, b) = a \frac{1}{n^b} \quad (12)$$

3.2.2 Sägezahnspannung

Auch hier wurden die rechnerisch und experimentel ermittelten Fourier-Koeffizienten in ein Diagramm eingetragen (s.Abb.2), wieder wurden die experimentellen Größen mit einem Fehler von 3% versehen und die Amplitude A mit 10 Volt angenommen. Zudem wurden die Erwartungswerte mit anderem Vorzeichen eingezeichnet, damit sich die Kurve den experimentellen Werten angleicht. Werden nur die Erwartungswerte mit anderem Vorzeichen und die experimentellen Werte verglichen ist zu sehen, dass hier die Werte nur am Anfang der Messreihe außerhalb der Fehlertoleranz liegen.

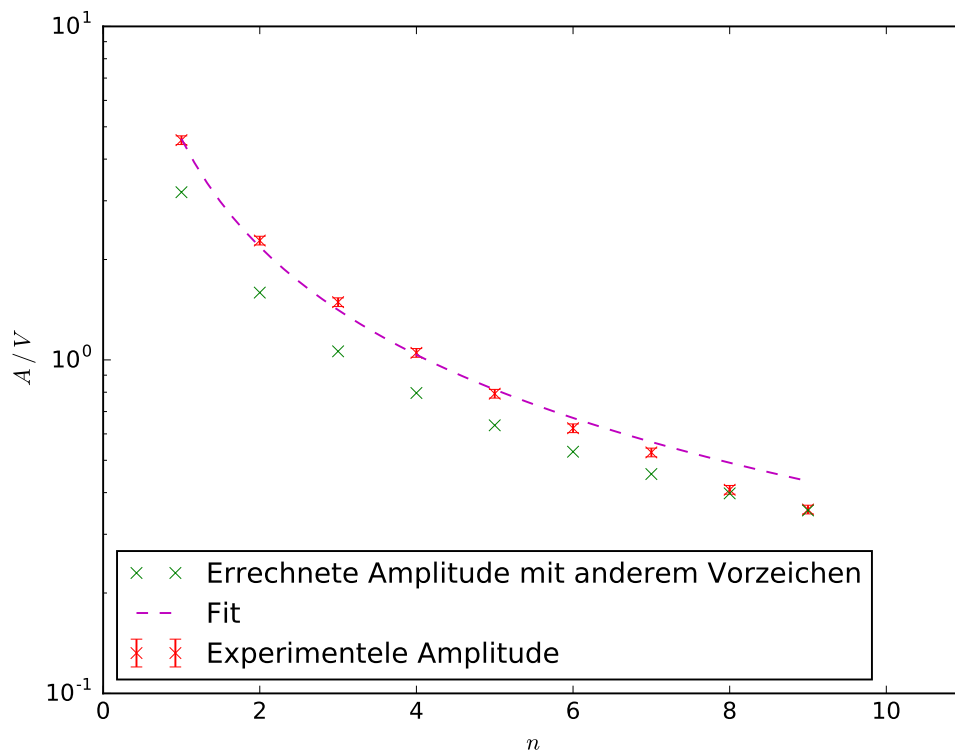


Abbildung 2: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden der Sägezahnspannung

Auch hier wurde der Fit mit der Formel (12) durchgeführt mit den Werten $a = 4,6 \pm 0,07$ und $b = 1,075 \pm 0,023$.

3.2.3 Nadelimpuls

Wie auch in den beiden Messreihen davor sind auch hier rechnerisch und experimentel ermittelte Fourier-Koeffizienten in Abbildung 3 eingezeichnet. Die experimentellen Größen wurden wieder mit einem Fehler von 3% versehen. Die Amplitude der rechnerischen Werte für $k = 10$ wurden wieder mit 10 Volt angenommen. Aber wie zu sehen ist passen die errechneten Werte für $k = 10$ nicht zu unseren experimentellen Werten. Die Amplitude A wurde für $k = 100$ mit 50 Volt angenommen. Hier sieht man sehr gut den sog. Dirac-Kamm der wiederum zu unseren experimentellen Werten passt.

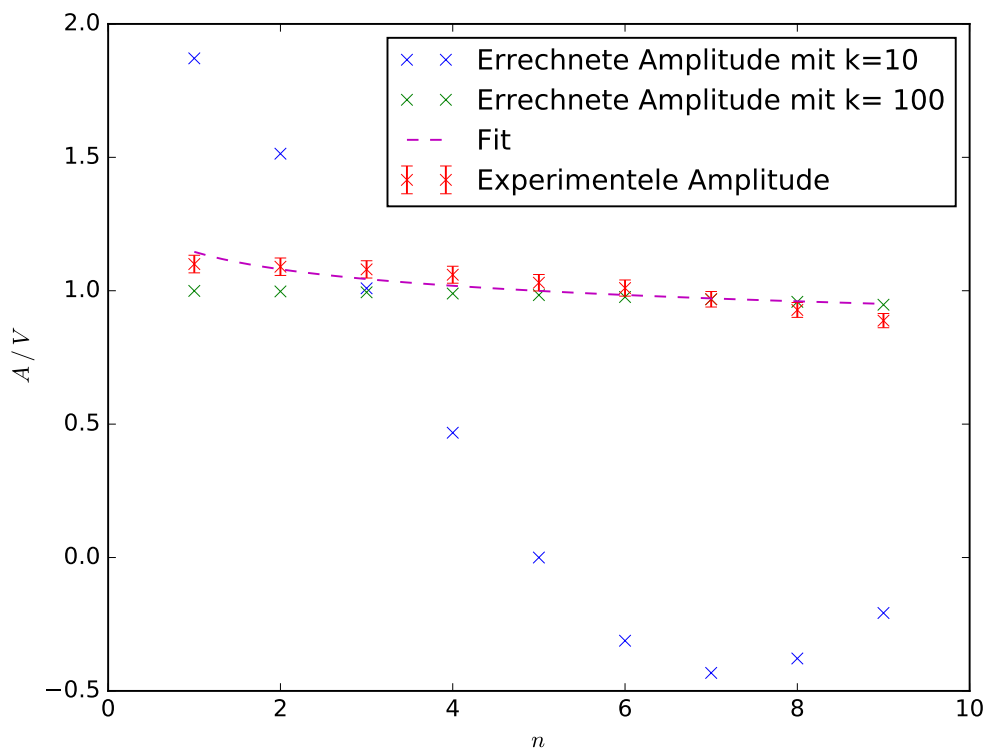


Abbildung 3: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden des Nadelimpulses

Der Fit hat die Werte $a = 1,146 \pm 0,033$ und $b = 0,085 \pm 0,019$ mit Formel (12).

3.3 Zusammensetzung der Schwingungsformen aus ihren Komponenten

3.3.1 Rechteckspannung

In der Abbildung 4 ist eine Rechteckspannung zu sehen, die wir mit unseren Fourier-Koeffizienten synthetisiert haben. Dafür das hier nur neun Oberschwingungen addiert wurden kann man die approximierte Rechteckspannung gut erkennen.

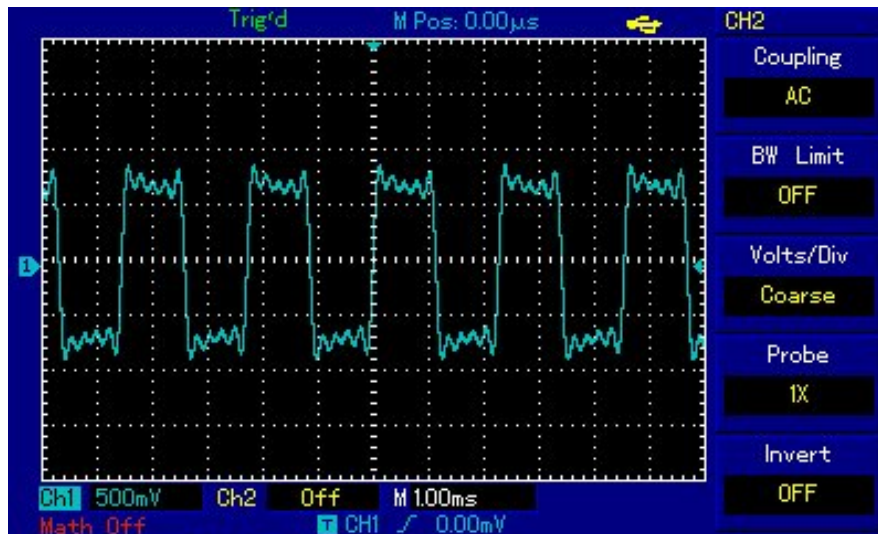


Abbildung 4: Synthetisierte Rechteckspannung in der neunten Oberschwingung

3.3.2 Sägezahnspannung

In der Abbildung 5 ist eine synthetisierte Sägezahnspannung zu sehen. Auch hier wurden wieder neun Oberschwingungen summiert. Die Sägezahnspannung ist gut zu erkennen.

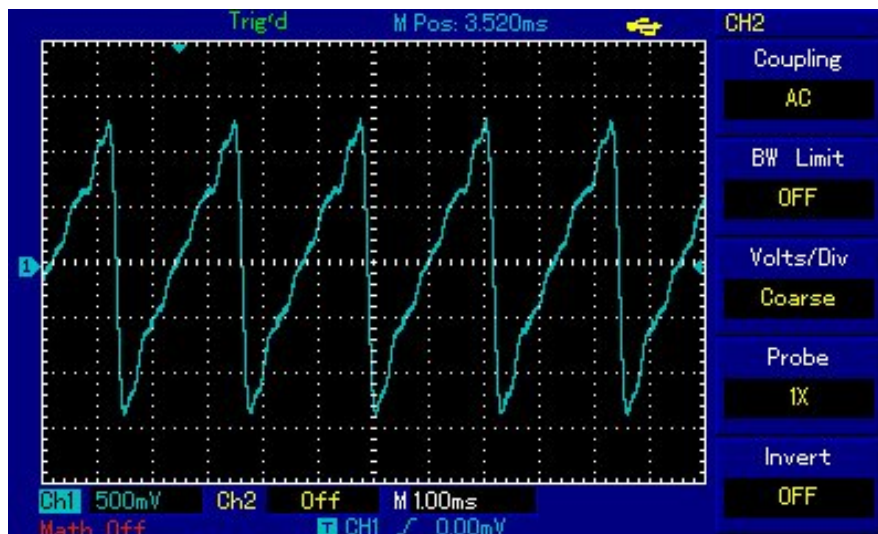


Abbildung 5: Synthetisierte Sägezahnspannung in der neunten Oberschwingung

3.3.3 Nadelimpuls

In der folgenden Abbildung 6 ist ein synthetisierter Nadelimpuls zu sehen. Wie bei den vorherigen Synthesen ist auch hier die Summe aller neun Oberschwingungen zu sehen.

Auffällig ist, dass es hier Nulldurchgänge gibt die es eigentlich nicht geben sollte.

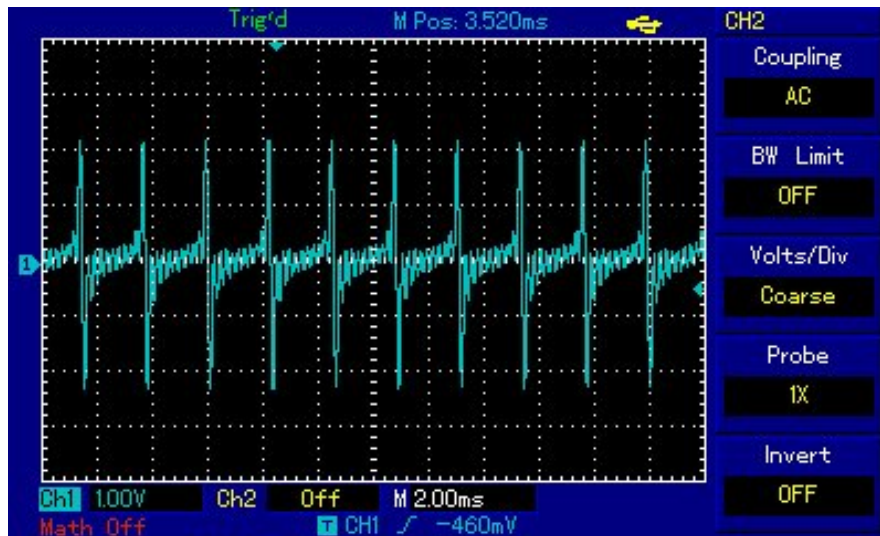


Abbildung 6: Synthetisierte Nadelimpuls in der neunten Oberschwingung

4 Diskussion

4.1 Zu 3.2

Die errechneten Werte sind sehr nah an den experimentel ermittelten Werten dran. Hier können die Abweichungen durch eine nicht eindeutig bestimmte Amplitude und systeminterne Widerstände und Messungenauigkeiten erklärt werden. Aber anscheinend ist ein Fit, durch die Werte die aus dem Experiment erhoben wurden, hier nicht gut mit der Funktion (12) zu realisieren.

Bei der Sägezahnspannung sind sowohl die errechneten Werte als auch die gemessenen Werte sehr nah beieinander. Hier lässt sich die Abweichung durch eine nicht eindeutig bestimmte Amplitude so wie systeminterne Widerstände und Messungenauigkeiten zu erklären. Auch der Fit ist hier sehr gelungen. Trotzdem ist aus der Abbildung 2 zu lesen, dass wir wohl einen Vorzeichenfehler bei unserer Berechnung hatten.

Der Nadelimpuls zeigt von den Dreien die besten Ergebnisse. Sowohl Fit als auch experimentele und errechnete Werte liegen sogar gut aufeinander. Auch hier sind die Abweichung zwischen gerechneten und gemessenen Werten durch eine nicht eindeutige Amplitude zu erklären. Zudem ist zu bemerken, dass die Approximation nur für große k gelingt.

4.2 Zu 3.3

Bei der synthetisierten Rechteck- und Sägezahnspannung können die Abweichungen dadurch erklärt werden, dass hier nur zehn Oberschwingungen summiert werden. Der

Nadelimpuls stellt sich als sehr schwer zu synthetisieren dar. Hier braucht man anscheinend wesentlich mehr Komponenten zur Synthese, da es sonst zur Nulldurchläufen kommt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr.351-Fourier-Analyse und Synthese*. 2014.