technische universität
dortmund

**V355**

# Gekoppelte Schwingkreise


Pelle Ofenbach
pelle.ofenbach@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu


Durchführung: 22.11.16

Abgabe: 29.11.16


TU Dortmund – Fakultät Physik

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Theorie

## 1.1 Schwingungsgleichung für kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Betrachtet werden hier zwei gleiche elektrische Schwingkreise, die die Induktivität L und Kapazität C enthalten, sie sind durch einen Kopplungswiderstand $C_k$ gekoppelt. Die Anwendung der Kirchhoffschen Knotenregel auf Punkt A liefer die Beziehung:

$$I_k = I_1 - I_2 \tag{1}$$

Durch Anweung der Kirchhoffschen Maschenregel erhält man, für die Maschen 1 und 2, die Beziehungen:

$$U_{1_C} + U_{1_L} + U_K = 0 \tag{2}$$

und

$$U_{2_C} + U_{2L} + U_K = 0 \tag{3}$$

Mit den Beziehungen:

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_1 dt$$

und

$$U_L = L\dot{I}$$

Durch die Verwendung dieser Beziehungen, Formel (1) und Differentation nach der Zeit ergeben sich folgende Differentialgleichungen.

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \tag{4}$$

und

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C} I_2 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \tag{5}$$

Nun wird die Summe und die Differenz der Einzelströme als Variablen eingeführt. Durch Subtraktion und Addition von (4) und (5) erhält man dann folgende Gleichungen.

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{6}$$

und

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)(I_1 - I_2) = 0 \tag{7}$$

Die Lösung von (6) ist die Gleichung einer harmonischen Schwingung.

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0}) cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{8}$$

Die Schwingungsfrequenz

$$\nu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{9}$$

ist gleich der eines Einzeloszillators. Daraus ist ersichtlich, dass die Amplitude mit $I_{1_0}+I_{2_0}$ gegeben ist. Entsprechendes gilt für die Differentialgleichung (7).

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0})cos\left(\frac{t}{\left(L\left(\frac{1}{C}+\frac{2}{C_k}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{10}$$

Hier ist die Frequenz:

$$\nu_- = \frac{1}{2\pi\left(L\left(\frac{1}{C}+\frac{2}{C_k}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

Durch Addition und Subtraktion von den Differentialgleichungen (8) und (10) erhält man für die Variablen $I_1$ und $I_2$ folgende Gleichungen.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})cos(2\pi\nu_+ t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})cos(2\pi\nu_- t) \tag{12}$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})cos(2\pi\nu_+ t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})cos(2\pi\nu_- t) \tag{13}$$

Nun können drei Fälle betrachtet werden.

1. Beide Schwingkreise haben die selbe Phase und Amplitude. Also gilt $I_{1_0} = I_{2_0}$, dann schwingen beide Schwingkreise mit der Frequent $\nu_+$. Die Ströme $I_1$ und $I_2$ kompensieren sich also ständig, folglich liegt am Koppelkondensator $C_k$ nie eine Spannung an.

2. Die Schwingkreise haben wieder die selbe Amplitude aber sind gegenphasig ($I_{1_0} = -I_{2_0}$). Nun schwingen beide Schwinkreise gegenphasig mit der Frequenz $\nu_-$. Diese Fälle werden als Fundermentalschwingungen bezeichnet.

3. Nun soll Schwingkreis 1 eine Amplitude ungeleich Null haben und sich der Schwingkreis 2 in Ruhe befinden zum Zeitpunkt $t = 0$ ($I_{1_0} \neq 0, I_{2_0} = 0$). Dann folgt aus den Gleichungen (12) und (13):

$$I_1(t) = I_{1_0}cos\left(\frac{(\omega_+ + \omega_-)t}{2}\right)cos\left(\frac{(\omega_+ - \omega_-)t}{2}\right) \tag{14}$$

$$I_2(t) = I_{1_0}sin\left(\frac{(\omega_+ + \omega_-)t}{2}\right)sin\left(\frac{(\omega_+ - \omega_-)t}{2}\right) \tag{15}$$

Angenommen die Frequenzen $\nu_+$ und $\nu_-$ wären fast gleich , also $C_k >> C$ , dann gilt:

$$\frac{(\omega_+ + \omega_-)}{2} \approx \omega_+ \tag{16}$$

$$\omega_- - \omega_+ << \omega_+ \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (15) und (14) ist ersichtlich, dass die Schwingkreise mit der Frequenz $\frac{(\nu_{+}+\nu_{-})}{2}$ schwingen. Die Amplitude ändert sich dabei periodisch mit der Frequenz $\nu_{-} - \nu_{+}$ und nimmt dabei Werte von Null bis $I_{1_0}$ an. Diese Schwingung wird Schwebung genannt. Hier schwingt die Energie periodisch zwischen den jeweiligen Schwingkreisen. Die Periode $T^*$ ist dabei duch folgendne Zusammenhang gegeben.

$$\frac{(\omega_{-} - \omega_{+})T^*}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

### 1.2 Berechnung des Stromes in einem Schwingkreis in Abhänigkeit von der Frequenz

## 2 Durchführung

## 3 Auswertung

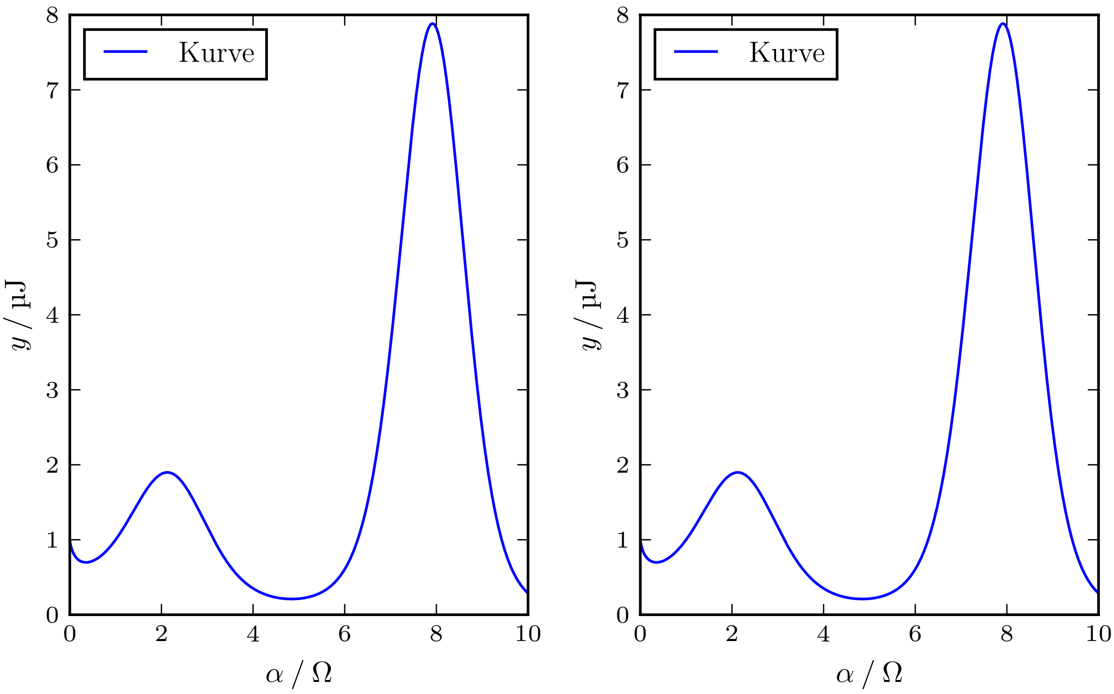


**Abbildung 1:** Plot.

## 4 Diskussion