



V351

Fourier-Analyse und Synthese

Pelle Ofenbach
pelle.ofenbach@udo.edu

Robert Appel
robert.appel@udo.edu

Durchführung: 29.11.16

Abgabe: 06.12.16

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Fouriesches Theorem	3
2	Durchführung	3
3	Auswertung	3
3.1	Brechnung der Fourier-Koeffizienten	3
3.1.1	Rechteckspannung	3
3.1.2	Dreickspannung	3
3.1.3	Nadelimpuls	5
3.2	Vergleich mit den experimentel erfassten Fourier-Koeffizienten	5
3.2.1	Rechteckspannung	5
3.2.2	Dreiecksspannung	6
3.2.3	Nadelimpuls	7
3.3	Zusammensetzung der Schwingungsformen aus ihren Komponenten	8
4	Diskussion	8

1 Theorie

1.1 Fouriesches Theorem

Sei $f(t)$ periodisch in t und stetig, so lässt sich f durch die sog. *Fourier-Reihe* darstellen, welche wie folgt festgelegt ist:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right) \quad (1)$$

Wobei T die Periodendauer bezeichnet und a_n gegeben ist durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt. \quad (2)$$

b_n ist analog durch

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad (3)$$

gegeben.

2 Durchführung

3 Auswertung

3.1 Brechnung der Fourier-Koeffizienten

3.1.1 Rechteckspannung

Für die Rechteckspannung ergibt sich dann die Fourier-Amplituden mit der Funktion:

$$b_n = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \quad (4)$$

Die Werte sind in Tabelle 1 dargestellt für $A = 1$.

3.1.2 Dreieckspannung

Die Fourier-Koeffizienten der Dreieckspannung lassen sich dann durch folgende Gleichung leicht brechnen:

$$b_n = -\frac{A}{n\pi} \quad (5)$$

Die Werte der Fourier-Koeffizienten finden sie in Tabelle 2 dargestellt für $A = 1$.

Tabelle 1: Fourier-Koeffizienten einer Rechteckspannung

Nr.	Fourier-Amplitude
1	$6.37 \cdot 10^{-1}$
2	0.00
3	$2.12 \cdot 10^{-1}$
4	0.00
5	$1.27 \cdot 10^{-1}$
6	0.00
7	$9.09 \cdot 10^{-2}$
8	0.00
9	$7.07 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2: Fourier-Koeffizienten einer Dreieckspannung

Nr.	Fourier-Amplitude
1	$-3.18 \cdot 10^{-1}$
2	$-1.59 \cdot 10^{-1}$
3	$-1.06 \cdot 10^{-1}$
4	$-7.96 \cdot 10^{-2}$
5	$-6.37 \cdot 10^{-2}$
6	$-5.31 \cdot 10^{-2}$
7	$-4.55 \cdot 10^{-2}$
8	$-3.98 \cdot 10^{-2}$
9	$-3.54 \cdot 10^{-2}$

3.1.3 Nadelimpuls

Die Fourier-Koeffizienten des Nadelimpuls werden durch die folgende Gleichung berechnet:

$$b_n = \frac{A}{n\pi} \sin\left(\frac{n2\pi}{k}\right) \quad (6)$$

Die Werte finden sie in Tabelle 3 für verschiedene Werte von k dargestellt mit $A = 1$.

Tabelle 3: Fourier-Koeffizienten eines Nadelimpulses

Nr.	Fourier-Amplitude	Nr.	Fourier-Amplitude
1	$1.87 \cdot 10^{-1}$	1	$2.00 \cdot 10^{-2}$
2	$1.51 \cdot 10^{-1}$	2	$1.99 \cdot 10^{-2}$
3	$1.01 \cdot 10^{-1}$	3	$1.99 \cdot 10^{-2}$
4	$4.68 \cdot 10^{-2}$	4	$1.98 \cdot 10^{-2}$
5	$7.80 \cdot 10^{-18}$	5	$1.97 \cdot 10^{-2}$
6	$-3.12 \cdot 10^{-2}$	6	$1.95 \cdot 10^{-2}$
7	$-4.32 \cdot 10^{-2}$	7	$1.94 \cdot 10^{-2}$
8	$-3.78 \cdot 10^{-2}$	8	$1.92 \cdot 10^{-2}$
9	$-2.08 \cdot 10^{-2}$	9	$1.90 \cdot 10^{-2}$
(a) mit $k = 10$		(b) mit $k = 100$	

Aus Tabelle 3a ist ersichtlich, dass sich für hohe Werte von k ein sog. Dirac-Kamm ergibt.

3.2 Vergleich mit den experimentel erfassten Fourier-Koeffizienten

3.2.1 Rechteckspannung

In Abbildung 1 sind die rechnerisch und experimentel ermittelten Fourier-Koeffizienten aufgetragen. Die experimentellen Größen wurden alle mit einem Fehler von 3% versehen, da sie von einem Oszilloskop abgelesen wurden. Die Amplitude A der berechneten Werte wurde hier mit 10 Volt angenähert. Dennoch ist zu beobachten, dass die Erwartungswerte nicht innerhalb der Fehlertoleranz liegen.

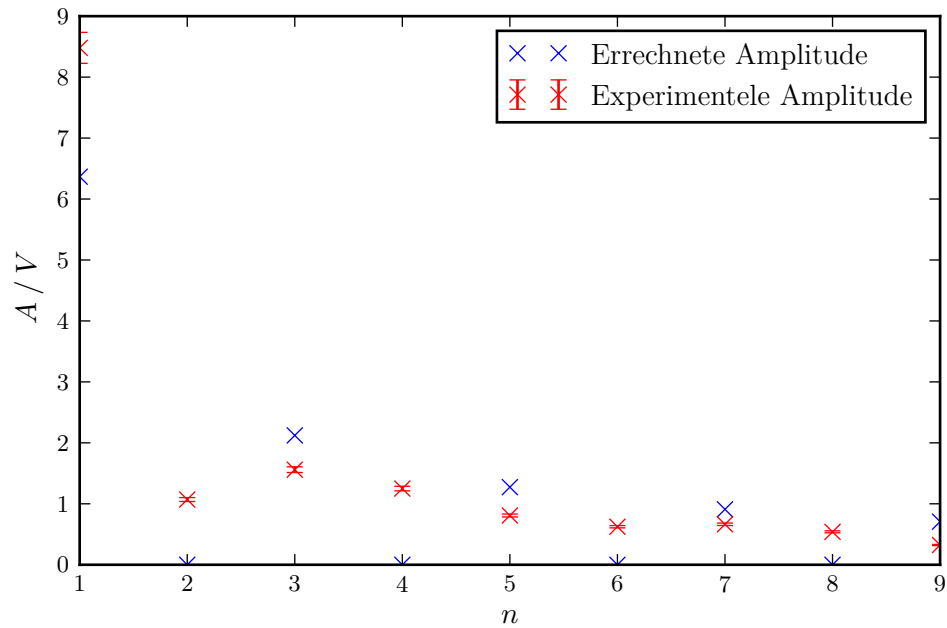


Abbildung 1: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden der Rechteckspannung

3.2.2 Dreiecksspannung

Auch hier wurden die rechnerisch und experimentel ermittelten Fourier-Koeffizienten in ein Diagramm eingetragen (s.Abb.2), wieder wurden die experimentellen Größen mit einem Fehler von 3% versehen und die Amplitude A mit 10 Volt angenommen. Zudem wurden die Erwartungswerte mit anderem Vorzeichen eingezeichnet, damit sich die Kurve den experimentellen Werten angleicht. Werden nur die Erwartungswerte mit anderem Vorzeichen und die experimentellen Werte verglichen ist zu sehen, dass hier die Werte nur am Anfang der Messreihe außerhalb der Fehlertoleranz liegen.

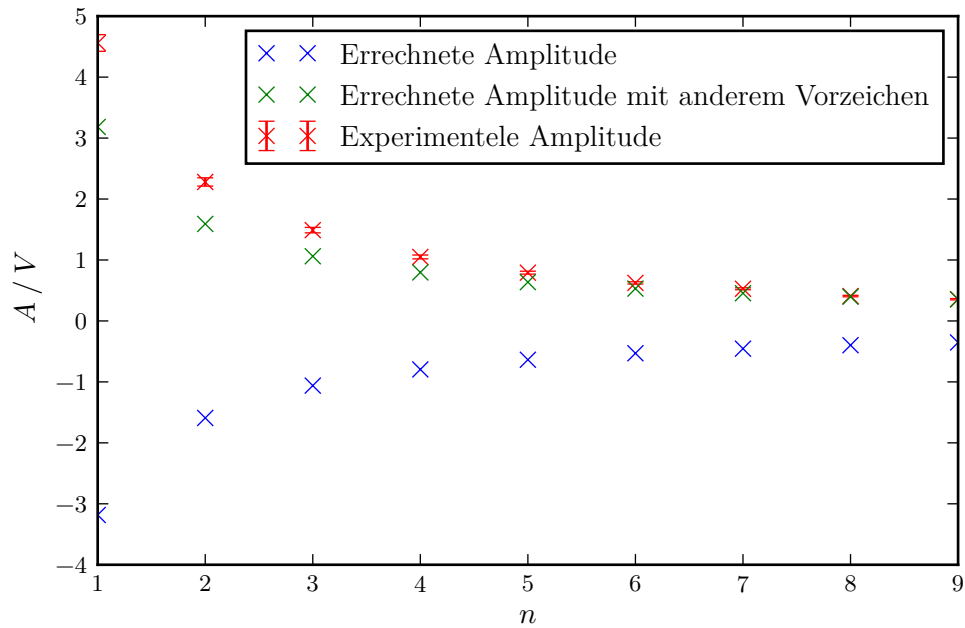


Abbildung 2: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden der Dreieckspannung

3.2.3 Nadelimpuls

Wie auch in den beiden Messreihen davor sind auch hier rechnerisch und experimentell ermittelte Fourier-Koeffizienten in Abbildung 3 eingezeichnet. Die experimentellen Größen wurden wieder mit einem Fehler von 3% versehen. Die Amplitude der rechnerischen Werte für $k = 10$ wurden wieder mit 10 Volt angenommen. Aber wie zu sehen ist passen die errechneten Werte für $k = 10$ nicht zu unseren experimentellen Werten. Die Amplitude A wurde für $k = 100$ mit 50 Volt angenommen. Hier sieht man sehr gut den sog. Dirac-Kamm der wiederum zu unseren experimentellen Werten passt.

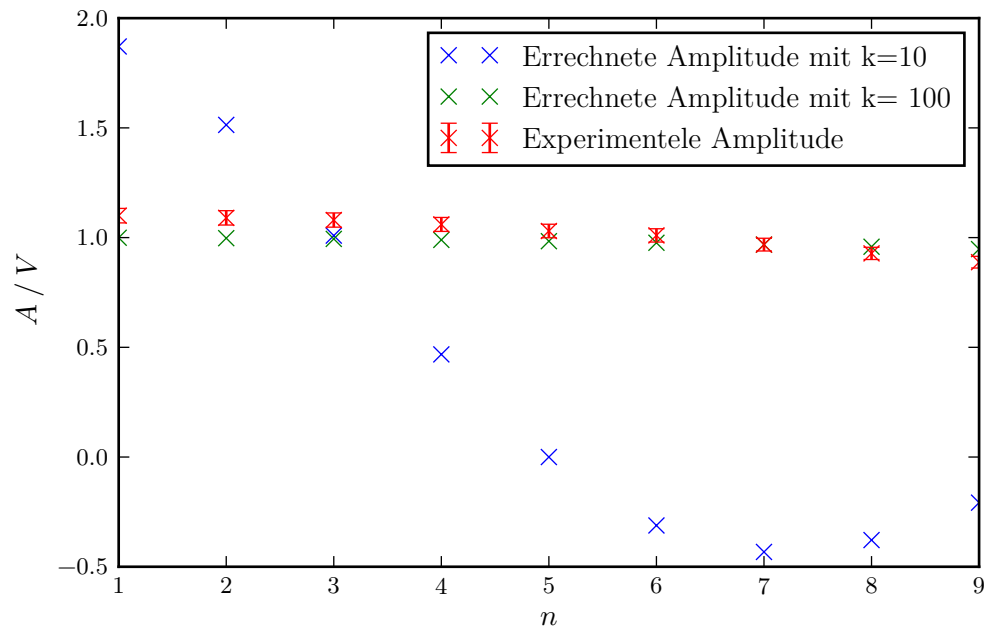


Abbildung 3: Rechnerische und experimentelle Fourier-Amplituden des Nadelimpulses

3.3 Zusammensetzung der Schwingungsformen aus ihren Komponenten

4 Diskussion