Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technoligií

Diskrétní matematika

2018 / 2019

Sada č. 1

Radim Lipka (xlipka02)

Roman Ondráček (xondra58)

Pavel Raur (xraurp00)

David Reinhart (xreinh00)

Domácí úloha 1

Příklad č. 1

Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \tag{1}$$

Tvrzení (1) je pravdivé, protože rovnost je dána De Morganovým zákonem.

$$Y \setminus X = X \setminus Y \tag{2}$$

Tvrzení (2) není pravdivé, protože rozdíl množit není komutatitní.
Důkaz:

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\} \\ Y &= \{3, 4, 5, 6\} \\ Y \setminus X &\neq X \setminus Y \\ \{5, 6\} &\neq \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\overline{X \cup Y} \supseteq X \tag{3}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y \tag{4}$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (Z \setminus Y) \cup Z \tag{5}$$

Příklad č. 2

Na množině $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ je dána relace $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1}.

Příklad č. 3

Uvažujte množinu τ_n všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je $(\tau_2, \subseteq)$ svazově uspořádaná.

Příklad č. 4

Dokažte nebo vyvraťe protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na možibě X:

$$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \tag{6}$$

$$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \tag{7}$$

$$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \tag{8}$$

$$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1)) \tag{9}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1)) \tag{10}$$

$$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1)) \tag{11}$$

Příklad č. 5

Domácí úloha 2

Příklad č. 6

Najděte všechny podgrupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$. Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

Příklad č. 7

Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

Příklad č. 8

V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

$$(a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) = a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = a \oplus b \oplus c \tag{12}$$

$$(x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' \tag{13}$$

$$(x' \oplus y')' \tag{14}$$

Příklad č. 9

Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b. Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k, kde $1 \leq k < n$.

Příklad č. 10

Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.

Domácí úloha 3

Příklad č. 11

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete jejich vzájemnou polohu.

Příklad č. 12

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - w &= 6 \\ -x + 3y - z &= 8 \\ 3x - y + 2w &= -1 \end{aligned}$$

Příklad č. 13

Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Příklad č. 14

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Příklad č. 15

Je dáno lineární zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_{0+3x_3} \\ x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

.

Najděte jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi a určete bázi a dimenzi prostorů **Ker** l a **Img** l.