Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technoligií
Diskrétní matematika
2018 / 2019

Sada č. 1

Radim Lipka (xlipka02)
Roman Ondráček (xondra58)
Pavel Raur (xraurp00)
David Reinhart (xreinh00)

Domácí úloha 1

Příklad č. 1

Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \tag{1}$$

Tvrzení (1) je pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
x \in \overline{X \cap Y} &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \overline{X} \vee x \in \overline{Y} \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in \overline{X} \cup \overline{Y} &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \overline{X \cap Y}
\end{aligned}$$

$$Y \setminus X = X \setminus Y \tag{2}$$

Tvrzení (2) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
X \setminus Y &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \\
Y \setminus X &\Rightarrow x \in Y \wedge x \notin X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= \{1, 2, 3, 4\} \\
Y &= \{3, 4, 5, 6\} \\
Y \setminus X &\neq X \setminus Y \\
\{5, 6\} &\neq \{1, 2\}
\end{aligned}$$

$$\overline{X \cup Y} \supseteq X \tag{3}$$

Tvrzení (3) není pravdivé, protože $\overline{X \cup Y}$ je množina všeho, co nenáleží do X ani do Y.
Důkaz:

$$\begin{aligned} X &= \{1,2\} \\ Y &= \{2,3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{1,2,3\} \\ \overline{X \cup Y} &= U \setminus \{1,2,3\} \\ U \setminus \{1,2,3\} &\not\supseteq \{1,2\} \end{aligned}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y \tag{4}$$

Tvrzení (4) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned} X &= \{1,2\} \\ Y &= \{2,3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &= (\{1,2\} \cup \{2,3\}) \cap (\{2,3\} \setminus \{1,2\}) = \\ &= \{1,2,3\} \cap \{3\} = \\ &= \{3\} \\ (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &\neq Y \end{aligned}$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (Z \setminus Y) \cup Z \tag{5}$$

Tvrzení (5) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned} X &= \{a,b,c,d\} \\ Y &= \{a,b,1,2\} \\ Z &= \{a,c,1,3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cap Z) &= (Z \setminus Y) \cup Z\{a,b,c,d\} \setminus (\{a,b,1,2\} \cap \{a,c,1,3\}) = \\ &= \{a,b,c,d\} \setminus \{a,1\} = \\ &= \{b,c,d\} \\ (Z \setminus Y) \cup Z &= (\{a,c,1,3\} \setminus \{a,b,1,2\}) \cup \{a,c,1,3\} \\ &= \{c,d\} \cup \{a,c,1,3\} = \\ &= \{a,c,d,1,3\} \\ \{b,c,d\} &\neq \{a,c,d,1,3\} \\ X \setminus (Y \cap Z) &\neq (Z \setminus Y) \cup Z \end{aligned}$$

Příklad č. 2

Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1}.

	x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4y / 3x	4	8	12	16	20	24	28	32
1	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{20}{3}$	8	$\frac{28}{3}$	$\frac{32}{3}$
2	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$
3	9	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{32}{9}$
4	12	$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{9}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
5	15	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{32}{15}$
6	18	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{16}{9}$
7	21	$\frac{4}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{21}$
8	24	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{14}{12}$	$\frac{4}{3}$

$$
\begin{aligned}
R &= \{(1,3),(1,6),(2,3),(2,6),(4,3),(4,6),(8,6)\} \\
Dom\ R &= \{1,2,4,8\} \\
Im\ R &= \{3,6\} \\
R^{-1} &= \{(3,1),(6,1),(3,2),(6,2),(3,4),(6,4),(6,8)\}
\end{aligned}
$$

Příklad č. 3

Uvažujte množinu τ_n všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je $(\tau_2, \subseteq)$ svazově uspořádaná.

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= (1,2) \\
2^X &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\
\tau_2 &= \{\{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\} \arrow[dr, dash] & & \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\} \arrow[dl, dash] \\
 & \{\emptyset, \{1,2\}\} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\inf \tau_2 &= \{\emptyset, \{1,2\}\} \\
\sup \tau_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}
\end{aligned}
$$

Množina $(\tau_2, \subseteq)$ je svazově uspořádaná, protože má v τ_2 infimum i supremum.

Příklad č. 4

Dokažte nebo vyvraťe protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na množině X:

$$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \tag{6}$$

Tvrzení (6) je pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned} \rho(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup \Delta X = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_2 \cup \Delta X) = \\ &= \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \tag{7}$$

Tvrzení (7) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,2)\} \\ R_2 &= \{(2,1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \emptyset \\ \sigma(R_1) = \{(1,2) \cup (2,1)\} &= \{(1,2),(2,1)\} \\ \sigma(R_2) &= \{(2,1) \cup (1,2)\} = \\ &= \{(1,2),(2,1)\} \\ \emptyset &\neq \{(1,2),(2,1)\} \\ \sigma(R_1 \cap R_2) &\neq \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \tag{8}$$

Tvrzení (8) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,2),(2,3),(3,1)\} \\ R_2 &= \{(1,2),(2,5),(5,1)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1,2),(2,3),(3,1),(1,3),(2,1),(3,2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(1,2),(2,5),(5,1),(1,5),(2,1),(5,2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1,2),(2,1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \{(1,2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1,2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &\neq \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \tag{9}$$

Tvrzení (9) je pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
\tau(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) = \\
&= (R_1 \circ R_1) \cup (R_2 \circ R_2) = \\
&= \tau(R_1) \cup \tau(R_2)
\end{aligned}$$

$$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1)) \tag{10}$$

Tvrzení (10) je pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau(R_1)) &= \sigma(R_1 \cup \Delta X) = \\
&= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1 \cup \Delta X)^{-1} = \\
&= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1^{-1} \cup \Delta X^{-1}) = \\
&= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\
&= \sigma(R_1) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\
&= \rho(\sigma(R_1))
\end{aligned}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1)) \tag{11}$$

Tvrzení (11) není pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,2),(2,3)\} \\
\tau(R_1) &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \\
\sigma(\tau(R_1)) &= \{(1,2),(2,3),(1,3),(2,1),(3,2),(3,1)\} \\
\sigma(R_1) &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(2,3),(1,2),(3,2),(1,3),(3,1)\} \\
\tau(\sigma(R_1)) &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(2,3),(1,2),(3,2),(1,3),(3,1)\} \\
\sigma(\tau(R_1)) &\neq \tau(\sigma(R_1))
\end{aligned}$$

$$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1)) \tag{12}$$

Tvrzení (12) je pravdivé.
Důkaz:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,2),(2,3)\} \\
\tau(R_1) &= \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \\
\rho(\tau(R_1)) &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(1,3)\} \\
\rho(R_1) &= \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,3)\} \\
\tau(\rho(R_1)) &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(1,2),(1,3)\} \\
\rho(\tau(R_1)) &= \tau(\rho(R_1))
\end{aligned}$$

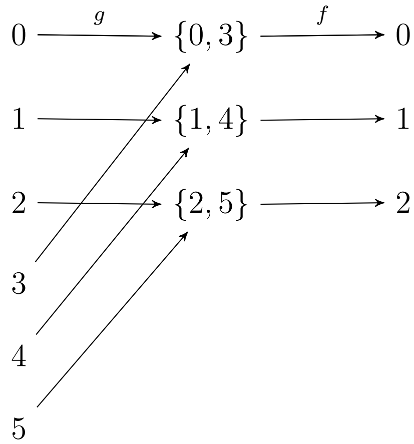
Příklad č. 5

Položme $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ a $Y = \{0,1,2\}$. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \mod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \mod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \mod 3$, $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \mod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f : X \to Y$, kde $f(x) = x \mod 3$ je morfismus algeber $(X, \oplus, \odot)$ a $(Y, \boxplus, \boxdot)$. Nalezněte Ker f a sestrojte faktorovou algebru $X/\text{Ker } f$. Faktorizujte zobrazení f přes faktorovou algebru.

$$\begin{aligned}
X &= \{0,1,2,3,4,5\} \\
Y &= \{0,1,2\} \\
x_1 \oplus x_2 &:= (x_1 + x_2) \mod 6 \\
x_1 \odot x_2 &:= (x_1 \cdot x_2) \mod 6 \\
y_1 \boxplus y_2 &:= (y_1 + y_2) \mod 3 \\
y_1 \boxdot y_2 &:= (y_1 \cdot y_2) \mod 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1 \oplus x_2) &= f(x_1) \boxplus f(x_2) \\
x_1 + x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\
x_1 \oplus x_2 &= r = 3v + s; v, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s \leq 3 \\
x_1 &= 3m + t; m, t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t < 3 \\
x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\
f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\
t + u &= 3q + v, \text{kde } q, v \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\
f(x_1) \boxplus f(x_2) &= (t + u) \mod 3 = v \\
x_1 + x_2 &= 6k + r = 6k + 3v + s = 3 \cdot (2k + v) + s \Rightarrow (x_1 + x_2) \mod 3 = s \\
x_1 + x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3 \cdot (m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 + x_2) \mod 3 = v \\
f(x_1 \oplus x_2) &= s = f(x_1) \boxplus f(x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1 \odot x_2) &= f(x_1) \boxdot f(x_2) \\
x_1 \cdot x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\
x_1 \odot x_2 &= r = 3m + s; m, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\
x_1 &= 3n + t; n, t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t < 3 \\
x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}, 0 \leq u < 3 \\
f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\
t \cdot u &= 3q + v; q, v \in \mathbb{Z}, 0 \leq v < 3 \\
f(x_1) \boxdot f(x_2) &= (t \cdot u) \mod 3 = v \\
x_1 \cdot x_2 &= 6k + r = 6k + 3n + s = 3(3k + n) + s \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \mod 3 = s \\
x_1 \cdot x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3(m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \mod 3 = v \\
f(x_1 \odot f(x_2)) &= s = f(x_1) \boxdot f(x_2)
\end{aligned}$$



Obrázek 1: $(X/\ker f, \bigoplus, \bigodot)$

$$\begin{aligned}
\ker f &= f^{-1} \circ f = \\
&= \{(x;y) \mid x, y \in X, f(x) = f(y)\} \\
\varrho &= X/\ker f = \\
&= \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\} \\
[x] \bigoplus [y] &:= [x \oplus y] \\
[x] \bigodot [y] &:= [x \odot y]
\end{aligned}$$

$\bigodot$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{0,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,3\}$
$\{1,4\}$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{2,5\}$	$\{0,3\}$	$\{2,5\}$	$\{1,4\}$

$\bigoplus$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{0,3\}$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$
$\{1,4\}$	$\{1,4\}$	$\{2,5\}$	$\{0,3\}$
$\{2,5\}$	$\{2,5\}$	$\{0,3\}$	$\{1,4\}$

Domácí úloha 2

Příklad č. 6

Najděte všechny podgrupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$. Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

Příklad č. 7

Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

Příklad č. 8

V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

$$(a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) = a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = a \oplus b \oplus c \tag{13}$$

$$(x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' \tag{14}$$

$$(x' \oplus y')' \tag{15}$$

Příklad č. 9

Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b. Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k, kde $1 \leq \ k < n$.

Příklad č. 10

Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.

Domácí úloha 3

Příklad č. 11

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete jejich vzájemnou polohu.

Příklad č. 12

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z - w &= 6 \\
-x + 3y - z &= 8 \\
3x - y + 2w &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right)
$$

Příklad č. 13

Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}
$$

Příklad č. 14

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Příklad č. 15

Je dáno lineární zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$
l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_{0+3x_3} \\ x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix}
$$

.

Najděte jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi a určete bázi a dimenzi prostorů **Ker** l a **Img** l.