



Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technologií

Diskrétní matematika

2018 / 2019

Sada č. 1

Radim Lipka (xlipka02)

Roman Ondráček (xondra58)

Pavel Raur (xraurp00)

David Reinhart (xreinh00)

Domácí úloha 1

Příklad č. 1

Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad (1)$$

Tvrzení (1) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} x \in \overline{X \cap Y} &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow x \in \overline{X} \vee x \in \overline{Y} \Rightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{X \cup Y} &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow x \in \overline{X \cap Y} \end{aligned}$$

$$Y \setminus X = X \setminus Y \quad (2)$$

Tvrzení (2) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} X \setminus Y &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \\ Y \setminus X &\Rightarrow x \in Y \wedge x \notin X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\} \\ Y &= \{3, 4, 5, 6\} \\ Y \setminus X &\neq X \setminus Y \\ \{5, 6\} &\neq \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\overline{X \cup Y} \supseteq X \quad (3)$$

Tvrzení (3) není pravdivé, protože $\overline{X \cup Y}$ je množina všeho, co nenáleží do X ani do Y .

Důkaz:

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2\} \\ Y &= \{2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{1, 2, 3\} \\ \overline{X \cup Y} &= U \setminus \{1, 2, 3\} \\ U \setminus \{1, 2, 3\} &\not\supseteq \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y \quad (4)$$

Tvrzení (4) není pravdivé.

Důkaz:

$$X = \{1, 2\}$$

$$Y = \{2, 3\}$$

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &= (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap (\{2, 3\} \setminus \{1, 2\}) = \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \{3\} \\ (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &\neq Y \end{aligned}$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (Z \setminus Y) \cup Z \quad (5)$$

Tvrzení (5) není pravdivé.

Důkaz:

$$X = \{a, b, c, d\}$$

$$Y = \{a, b, 1, 2\}$$

$$Z = \{a, c, 1, 3\}$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (Z \setminus Y) \cup Z$$

$$\{a, b, c, d\} \setminus (\{a, b, 1, 2\} \cap \{a, c, 1, 3\}) = \{a, b, c, d\} \setminus \{a, 1\} = \{b, c, d\}$$

$$(Z \setminus Y) \cup Z = (\{a, c, 1, 3\} \setminus \{a, b, 1, 2\}) \cup \{a, c, 1, 3\} = \{c, d\} \cup \{a, c, 1, 3\} = \{a, c, d, 1, 3\}$$

$$\{b, c, d\} \neq \{a, c, d, 1, 3\} \Rightarrow X \setminus (Y \cap Z) \neq (Z \setminus Y) \cup Z$$

Příklad č. 2

Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1} .

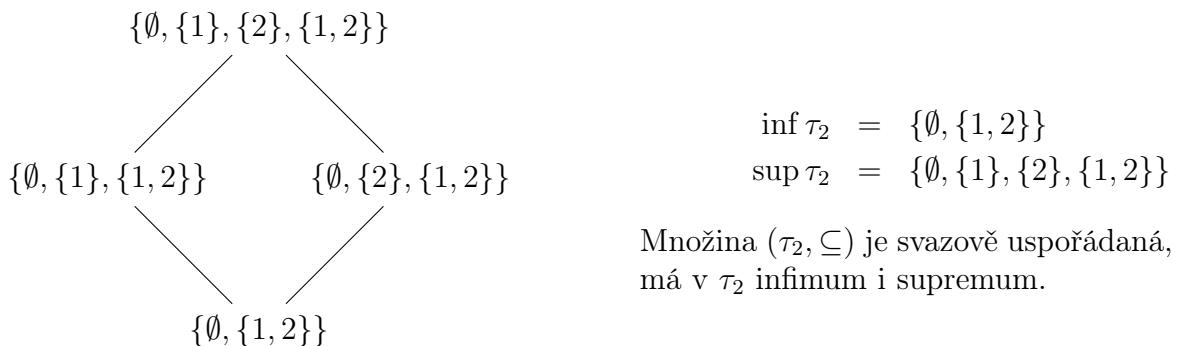
	x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	$\begin{matrix} 4y \\ 3x \end{matrix}$	4	8	12	16	20	24	28	32
1	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	4	$\frac{3}{16}$	$\frac{20}{3}$	8	$\frac{28}{3}$	$\frac{32}{3}$
2	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$
3	9	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{32}{9}$
4	12	$\frac{1}{3}$	$\frac{12}{9}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
5	15	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{32}{15}$
6	18	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{16}{9}$
7	21	$\frac{4}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{21}$
8	24	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{14}{12}$	$\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}
 R &= \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 6), (8, 6)\} \\
 \text{Dom } R &= \{1, 2, 4, 8\} \\
 \text{Im } R &= \{3, 6\} \\
 R^{-1} &= \{(3, 1), (6, 1), (3, 2), (6, 2), (3, 4), (6, 4), (6, 8)\}
 \end{aligned}$$

Příklad č. 3

Uvažujte množinu τ_n všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluze. Na kreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je (τ_2, \subseteq) svazově uspořádaná.

$$\begin{aligned}
 \tau_n &= (1, 2) \\
 2^X &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\
 \tau_2 &= \{\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \inf \tau_2 &= \{\emptyset, \{1, 2\}\} \\
 \sup \tau_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}
 \end{aligned}$$

Množina (τ_2, \subseteq) je svazově uspořádaná, protože má v τ_2 infimum i supremum.

Příklad č. 4

Dokažte nebo vyvrátě protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na množině X :

$$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \quad (6)$$

Tvrzení (6) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \rho(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup \Delta X = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_2 \cup \Delta X) = \\ &= \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \quad (7)$$

Tvrzení (7) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2)\} \\ R_2 &= \{(2, 1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \emptyset \\ \sigma(R_1) = \{(1, 2) \cup (2, 1)\} &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \sigma(R_2) &= \{(2, 1) \cup (1, 2)\} = \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \emptyset &\neq \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \sigma(R_1 \cap R_2) &\neq \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \quad (8)$$

Tvrzení (8) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \\ R_2 &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1), (1, 5), (2, 1), (5, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &\neq \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \quad (9)$$

Tvrzení (9) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \tau(R_1 \cup R_2) &= (R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) = \\ &= (R_1 \circ R_1) \cup (R_2 \circ R_2) = \\ &= \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1)) \quad (10)$$

Tvrzení (10) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau(R_1)) &= \sigma(R_1 \cup \Delta X) = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1 \cup \Delta X)^{-1} = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1^{-1} \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \sigma(R_1) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \rho(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1)) \quad (11)$$

Tvrzení (11) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\} \\ \sigma(R_1) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \tau(\sigma(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &\neq \tau(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$

$$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1)) \quad (12)$$

Tvrzení (12) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(R_1) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\} \\ \tau(\rho(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 2), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \tau(\rho(R_1)) \end{aligned}$$

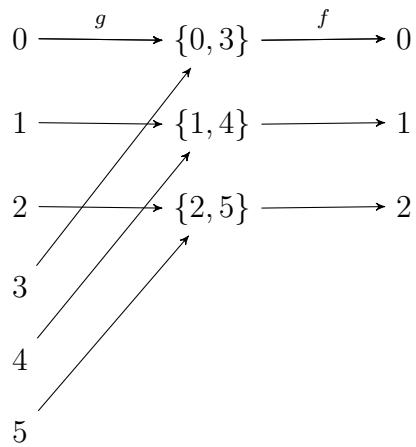
Příklad č. 5

Položme $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{0, 1, 2\}$. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \bmod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$, $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \bmod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f : X \rightarrow Y$, kde $f(x) = x \bmod 3$ je morfismus algeber (X, \oplus, \odot) a (Y, \boxplus, \boxdot) . Nalezněte $\text{Ker } f$ a sestrojte faktorovou algebru $X/\text{Ker } f$. Faktorizujte zobrazení f přes faktorovou algebru.

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ Y &= \{0, 1, 2\} \\ x_1 \oplus x_2 &:= (x_1 + x_2) \bmod 6 \\ x_1 \odot x_2 &:= (x_1 \cdot x_2) \bmod 6 \\ y_1 \boxplus y_2 &:= (y_1 + y_2) \bmod 3 \\ y_1 \boxdot y_2 &:= (y_1 \cdot y_2) \bmod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \oplus x_2) &= f(x_1) \boxplus f(x_2) \\ x_1 + x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \oplus x_2 &= r = 3v + s; v, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s \leq 3 \\ x_1 &= 3m + t; m, t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t + u &= 3q + v, \text{kde } q, v \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) \boxplus f(x_2) &= (t + u) \bmod 3 = v \\ x_1 + x_2 &= 6k + r = 6k + 3v + s = 3 \cdot (2k + v) + s \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 + x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3 \cdot (m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \oplus x_2) &= s = f(x_1) \boxplus f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \odot x_2) &= f(x_1) \boxdot f(x_2) \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \odot x_2 &= r = 3m + s; m, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\ x_1 &= 3n + t; n, t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}, 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t \cdot u &= 3q + v; q, v \in \mathbb{Z}, 0 \leq v < 3 \\ f(x_1) \boxdot f(x_2) &= (t \cdot u) \bmod 3 = v \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r = 6k + 3n + s = 3(3k + n) + s \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 \cdot x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3(m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \odot f(x_2)) &= s = f(x_1) \boxdot f(x_2) \end{aligned}$$



Obrázek 1: $(X/\ker f, \oplus, \odot)$

$$\begin{aligned}
 \ker f &= f^{-1} \circ f = \\
 &= \{(x; y) \mid x, y \in X, f(x) = f(y)\} \\
 \varrho &= X/\ker f = \\
 &= \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\} \\
 [x] \bigoplus [y] &:= [x \oplus y] \\
 [x] \odot [y] &:= [x \odot y]
 \end{aligned}$$

\odot	$\{0, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$
$\{0, 3\}$	$\{0, 3\}$	$\{0, 3\}$	$\{0, 3\}$
$\{1, 4\}$	$\{0, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$
$\{2, 5\}$	$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$

\oplus	$\{0, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$
$\{0, 3\}$	$\{0, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$
$\{1, 4\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 5\}$	$\{0, 3\}$
$\{2, 5\}$	$\{2, 5\}$	$\{0, 3\}$	$\{1, 4\}$

Domácí úloha 2

Příklad č. 6

Najděte všechny podgrupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) . Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

Příklad č. 7

Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

Příklad č. 8

V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

$$(a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) = a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = a \oplus b \oplus c \quad (13)$$

$$(x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' \quad (14)$$

$$(x' \oplus y')' \quad (15)$$

Příklad č. 9

Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b . Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k , kde $1 \leq k < n$.

Příklad č. 10

Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.

Domácí úloha 3

Příklad č. 11

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 . Určete jejich vzájemnou polohu.

Příklad č. 12

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$x + 2y + z - w = 6$$

$$-x + 3y - z = 8$$

$$3x - y + 2w = -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right)$$

Příklad č. 13

Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Příklad č. 14

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány vektory $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad č. 15

Je dáno lineární zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ předpisem

$$l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_0 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Najděte jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi a určete bázi a dimenzi prostorů $\text{Ker } l$ a $\text{Img } l$.