

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technologií

Diskrétní matematika

2018 / 2019

Sada č. 1

| | | | | | | | | |
|------------------------------------|---------------|--------|---|---|---|---|---|----------|
| 1. člen skupiny: Radim Lipka | ID: 213479 | Úloha: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| 2. člen skupiny: Roman Ondráček | ID: 213535 | | | | | | | |
| 3. člen skupiny: Pavel Raur | ID: 213490 | | | | | | | |
| 4. člen skupiny: David Reinhart | ID: 213160 | | | | | | | |

Domácí úloha 1

Příklad č. 1

Dokažte nebo vyvratte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad (1)$$

Tvrzení (??) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} x \in \overline{X \cap Y} &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X} \vee x \in \overline{Y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{X} \cup \overline{Y} &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X \cap Y} \end{aligned}$$

$$Y \setminus X = X \setminus Y \quad (2)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} X \setminus Y &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \\ Y \setminus X &\Rightarrow x \in Y \wedge x \notin X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\} \\ Y &= \{3, 4, 5, 6\} \\ Y \setminus X &\neq X \setminus Y \\ \{5, 6\} &\neq \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\overline{X \cup Y} \supseteq X \quad (3)$$

Tvrzení (??) není pravdivé, protože $\overline{X \cup Y}$ je množina všeho, co nenáleží do X ani do Y .

Důkaz:

$$X = \{1, 2\}$$

$$Y = \{2, 3\}$$

$$X \cup Y = \{1, 2, 3\}$$

$$\overline{X \cup Y} = U \setminus \{1, 2, 3\}$$

$$U \setminus \{1, 2, 3\} \not\supseteq \{1, 2\}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y \quad (4)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$X = \{1, 2\}$$

$$Y = \{2, 3\}$$

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &= (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap (\{2, 3\} \setminus \{1, 2\}) = \\ &= \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) \neq Y$$

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup Z \quad (5)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$X = \{a, b, c, d\}$$

$$Y = \{a, b, 1, 2\}$$

$$Z = \{a, c, 1, 3\}$$

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cap Z) &= \{a, b, c, d\} \setminus (\{a, b, 1, 2\} \cap \{a, c, 1, 3\}) = \\ &= \{a, b, c, d\} \setminus \{a, 1\} = \\ &= \{b, c, d\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X \setminus Y) \cup Z &= (\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b, 1, 2\}) \cup \{a, c, 1, 3\} = \\ &= \{c, d\} \cup \{a, c, 1, 3\} = \\ &= \{a, c, d, 1, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{b, c, d\} &\neq \{a, c, d, 1, 3\} \\ X \setminus (Y \cap Z) &\neq (X \setminus Y) \cup Z \end{aligned}$$

Příklad č. 2

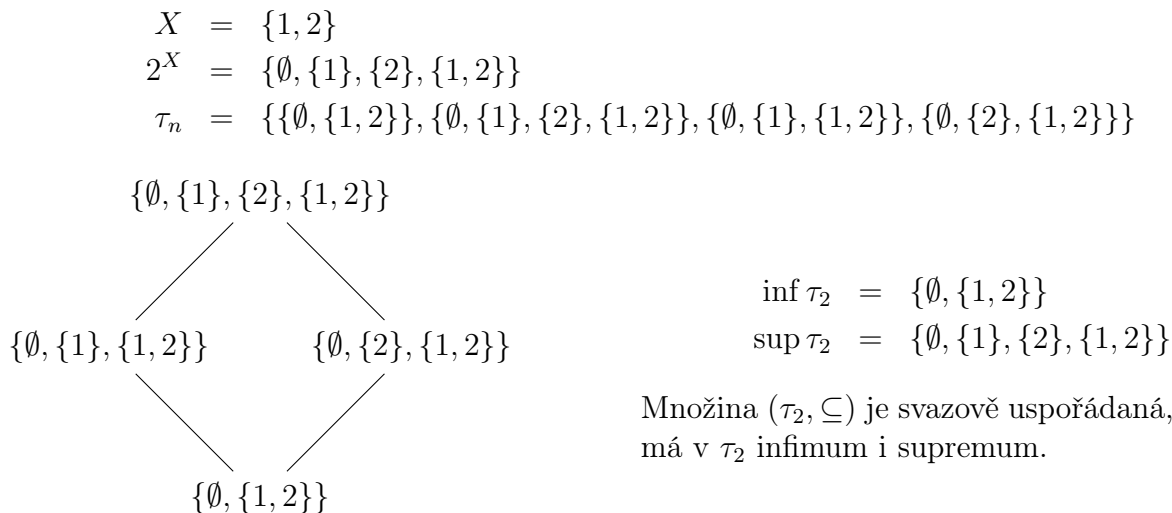
Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1} .

| | x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| y | $\begin{array}{c} 4y \\ 3x \end{array}$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
| 1 | 3 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 4 | $\frac{3}{16}$ | $\frac{20}{3}$ | 8 | $\frac{28}{3}$ | $\frac{32}{3}$ |
| 2 | 6 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 2 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{10}{3}$ | 4 | $\frac{14}{3}$ | $\frac{16}{3}$ |
| 3 | 9 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{20}{9}$ | $\frac{24}{9}$ | $\frac{28}{9}$ | $\frac{32}{9}$ |
| 4 | 12 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{12}{9}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{3}$ | 2 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{8}{3}$ |
| 5 | 15 | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{28}{15}$ | $\frac{32}{15}$ |
| 6 | 18 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{14}{9}$ | $\frac{16}{9}$ |
| 7 | 21 | $\frac{4}{21}$ | $\frac{8}{21}$ | $\frac{12}{21}$ | $\frac{16}{21}$ | $\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{32}{21}$ |
| 8 | 24 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | 1 | $\frac{14}{12}$ | $\frac{4}{3}$ |

$$\begin{aligned}
 R &= \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 6), (8, 6)\} \\
 \text{Dom } R &= \{1, 2, 4, 8\} \\
 \text{Im } R &= \{3, 6\} \\
 R^{-1} &= \{(3, 1), (6, 1), (3, 2), (6, 2), (3, 4), (6, 4), (6, 8)\}
 \end{aligned}$$

Příklad č. 3

Uvažujte množinu τ_n všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je (τ_2, \subseteq) svazově uspořádaná.



Příklad č. 4

Dokažte nebo vyvráťte protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na množině X :

$$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \quad (1)$$

Tvrzení (??) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
 \rho(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup \Delta X = \\
 &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_2 \cup \Delta X) = \\
 &= \rho(R_1) \cup \rho(R_2)
 \end{aligned}$$

$$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \quad (2)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \{(1, 2)\} \\
 R_2 &= \{(2, 1)\} \\
 R_1 \cap R_2 &= \emptyset \\
 \sigma(R_1) &= \{(1, 2) \cup (2, 1)\} = \{(1, 2), (2, 1)\} \\
 \sigma(R_2) &= \{(2, 1) \cup (1, 2)\} = \\
 &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\
 \emptyset &\neq \{(1, 2), (2, 1)\} \\
 \sigma(R_1 \cap R_2) &\neq \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)
 \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \quad (3)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \\ R_2 &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1), (1, 5), (2, 1), (5, 2)\} \\ \tau(R_1) \cap \tau(R_2) &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &\neq \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \quad (4)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ R_2 &= \{(2, 3), (3, 2)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ R_1 \cup R_2 &= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\} \\ \tau(R_1 \cup R_2) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\} \\ \tau(R_1) \cup \tau(R_2) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ \tau(R_1 \cup R_2) &\neq \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1)) \quad (5)$$

Tvrzení (??) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho(R_1)) &= \sigma(R_1 \cup \Delta X) = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1 \cup \Delta X)^{-1} = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1^{-1} \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \sigma(R_1) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \rho(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1)) \quad (6)$$

Tvrzení (??) není pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\} \\ \sigma(R_1) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \tau(\sigma(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &\neq \tau(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$

$$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1)) \quad (7)$$

Tvrzení (??) je pravdivé.

Důkaz:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(R_1) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\} \\ \tau(\rho(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 2), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \tau(\rho(R_1)) \\ \rho(R_1 \circ R_2) &= (R_1 \circ R_2) \cup (\Delta X \circ \Delta X) = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \circ (R_2 \cup \Delta X) = \\ &= \tau(R_1 \cup \Delta X) = \\ &= \tau(\rho(R_1)) \end{aligned}$$

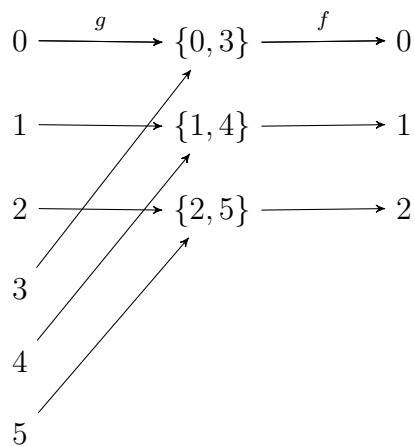
Příklad č. 5

Položme $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{0, 1, 2\}$. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \bmod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$, $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \bmod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f : X \rightarrow Y$, kde $f(x) = x \bmod 3$ je morfismus algeber (X, \oplus, \odot) a (Y, \boxplus, \boxdot) . Nalezněte $\text{Ker } f$ a sestrojte faktorovou algebru $X/\text{Ker } f$. Faktorizujte zobrazení f přes faktorovou algebru.

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ Y &= \{0, 1, 2\} \\ x_1 \oplus x_2 &:= (x_1 + x_2) \bmod 6 \\ x_1 \odot x_2 &:= (x_1 \cdot x_2) \bmod 6 \\ y_1 \boxplus y_2 &:= (y_1 + y_2) \bmod 3 \\ y_1 \boxdot y_2 &:= (y_1 \cdot y_2) \bmod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \oplus x_2) &= f(x_1) \boxplus f(x_2) \\ x_1 + x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \oplus x_2 &= r = 3v + s; v, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\ x_1 &= 3m + t; m, t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t + u &= 3q + v, \text{ kde } q, v \in \mathbb{Z}; 0 \leq v < 3 \\ f(x_1) \boxplus f(x_2) &= (t + u) \bmod 3 = v \\ x_1 + x_2 &= 6k + r = 6k + 3v + s = 3 \cdot (2k + v) + s \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 + x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3 \cdot (m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \oplus x_2) &= s = f(x_1) \boxplus f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \odot x_2) &= f(x_1) \boxdot f(x_2) \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \odot x_2 &= r = 3m + s; m, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\ x_1 &= 3n + t; n, t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t \cdot u &= 3q + v; q, v \in \mathbb{Z}; 0 \leq v < 3 \\ f(x_1) \boxdot f(x_2) &= (t \cdot u) \bmod 3 = v \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r = 6k + 3m + s = 3(2k + m) + s \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 \cdot x_2 &= 3n + 3p + 3q + v = 3(n + p + q) + v \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \odot x_2) &= s = f(x_1) \boxdot f(x_2) \end{aligned}$$



Obrázek 1: $(X/\ker f, \oplus, \odot)$

$$\begin{aligned}
 \ker f &= f^{-1} \circ f = \\
 &= \{(x; y) \mid x, y \in X, f(x) = f(y)\} \\
 \varrho &= X/\ker f = \\
 &= \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}
 \end{aligned}$$

$$[x] \oplus [y] := [x \oplus y]$$

$$[x] \odot [y] := [x \odot y]$$

| \odot | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | \oplus | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
| $\{1, 4\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ |
| $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ |

Domácí úloha 2

Příklad č. 6

Najděte všechny podgrupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) . Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_6 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ a \oplus b &= (a + b) \pmod{6}\end{aligned}$$

| \oplus | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

- Jednotkový prvek je 0.
- Inverzní prvek $a \oplus a^{-1} = 0$.

$$\left. \begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 0 \oplus 2 &= 2 \\ 0 \oplus 3 &= 3 \\ 0 \oplus 4 &= 4 \\ 0 \oplus 5 &= 5 \end{aligned} \right\} = \mathbb{Z}_6$$

$$\begin{array}{llllll} 0 \oplus 0 = 0 & \begin{array}{l} 0 \oplus 1 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 2 \\ 2 \oplus 1 = 3 \\ 3 \oplus 1 = 4 \\ 4 \oplus 1 = 5 \\ 5 \oplus 1 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \oplus 2 = 2 \\ 2 \oplus 2 = 4 \\ 4 \oplus 2 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \oplus 3 = 3 \\ 3 \oplus 3 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \oplus 4 = 4 \\ 4 \oplus 4 = 2 \\ 2 \oplus 4 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \oplus 5 = 5 \\ 1 \oplus 5 = 0 \\ 2 \oplus 5 = 1 \\ 3 \oplus 5 = 2 \\ 4 \oplus 5 = 3 \\ 5 \oplus 5 = 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{0\} \\ T_2 &= \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ T_3 &= \{0, 2, 4\} \\ T_4 &= \{0, 3\} \\ T_5 &= T_3 \\ T_6 &= T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &\in N \\ 0 \oplus n &\rightarrow 0 \\ 1 \oplus n &\rightarrow T_2 \end{aligned}$$

Pokud vybereme dva prvky ze stejné cyklické grupy, tak vyjde něco, co bude patřit dané grupě.

2, 3
2 vygeneruje 0, 2, 4
3 vygeneruje 0, 3

3, 4
3 vygeneruje 0, 3
4 vygeneruje 0, 2, 4

$$\begin{aligned} 0 \oplus 3 &= 3 \\ 2 \oplus 3 &= 5 \\ 4 \oplus 3 &= 7 \\ T_5 &= \{3, 5, 7\} \end{aligned}$$

Levé třídy podle T_3

$$\begin{array}{lll}
 H & := & T_3 \\
 x \in \mathbb{Z}_6 & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 x \oplus 3 & = & \{x \oplus k | k \in T_3\} = \\
 & = & \{x \oplus 0, x \oplus 2, x \oplus 4\} \\
 \mathbb{Z}_6/T_3 & = & \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 x & := & 0 \\
 0 \oplus T_3 & = & \{0, 2, 4\} = \\
 & = & T_3 \\
 x & := & 1 \\
 1 \oplus T_3 & = & \{1, 3, 5\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 x & := & 2 \\
 2 \oplus T_3 & = & \{0, 2, 4\} = \\
 & = & T_3 \\
 x & := & 3 \\
 3 \oplus T_3 & = & \{1, 3, 5\}
 \end{array}$$

Pravé třídy podle T_3

$$[x] \bigoplus [y] = [x \oplus y]$$

$$T_3 \backslash \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6/T_3$$

| \bigoplus | $\{0, 2, 4\}$ | $\{1, 3, 5\}$ |
|---------------|---------------|---------------|
| $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ |
| $\{1, 3, 5\}$ | $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ |

Pravý rozklad se rovná levému rozkladu.
Pro grupu T_5 vypadá rozklad stejně.

$$(X/\mathbb{Z}_6, \bigoplus)$$

Levé třídy podle T_4

$$\begin{array}{lll}
 H & := & T_4 \\
 x \in \mathbb{Z}_6 & = & \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 x \oplus 3 & = & \{x \oplus k | k \in T_4\} = \\
 & = & \{x \oplus 0, x \oplus 3\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 x & := & 0 \\
 0 \oplus T_4 & = & \{0, 3\} = T_4 \\
 x & := & 1 \\
 1 \oplus T_4 & = & \{1, 4\} \\
 x & := & 2 \\
 2 \oplus T_4 & = & \{0, 3\} = T_4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lll}
 x & := & 3 \\
 3 \oplus T_4 & = & \{0, 3\} \\
 x & := & 1 \\
 4 \oplus T_4 & = & \{1, 4\} \\
 x & := & 2 \\
 5 \oplus T_4 & = & \{2, 5\}
 \end{array}$$

$$[x] \bigoplus [y] = [x \oplus y]$$

| \bigoplus | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
|-------------|------------|------------|------------|
| $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
| $\{1, 4\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ |
| $\{2, 5\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ |

$$(\mathbb{Z}_6/X, \bigoplus)$$

Podgrupy T_1 , T_2 , T_3 , T_4 a T_5 jsou normální.

Příklad č. 7

Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

Svaz (X, \sup, \inf) , $X = \{A, B, C, D, E\}$

Svaz je modulární a distributivní.



Příklad č. 8

V Booleově algebre $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

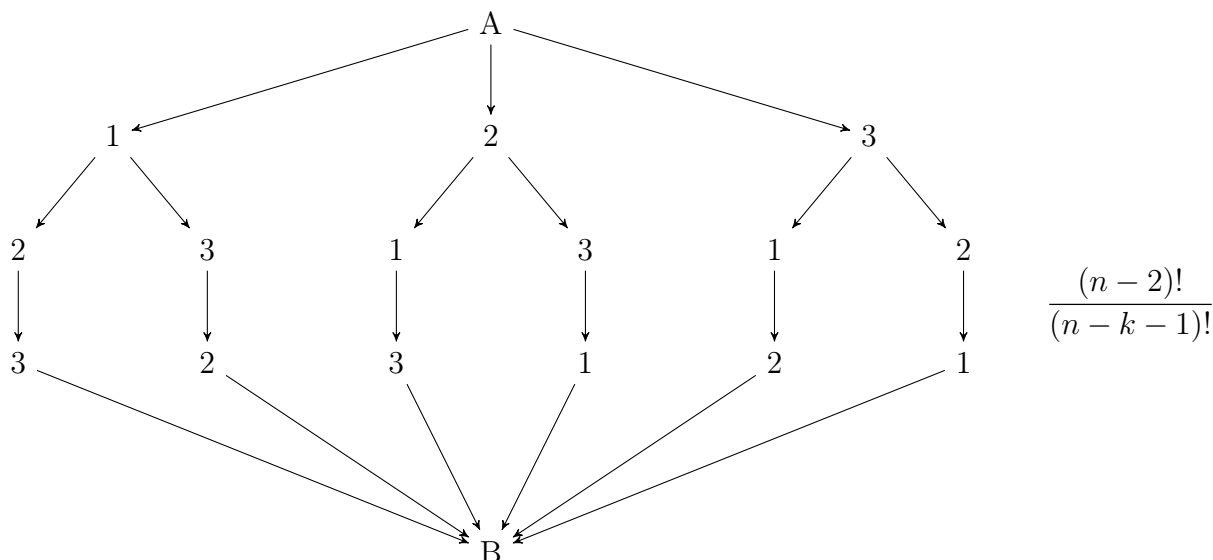
$$\begin{aligned}
 (a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) &= a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = \\
 &= a \oplus b \oplus c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' &= (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x \oplus z) = \\
 &= [\{x \odot (y \oplus z)\} \oplus x] \oplus z = \\
 &= [x \oplus x] \oplus z = \\
 &= x \oplus z
 \end{aligned}$$

$$(x' \oplus y')' = x \odot y$$

Příklad č. 9

Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b . Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k , kde $1 \leq k < n$.



Graf rozložíme na strom cest, které vedou z počátečního bodu (A) do koncového (B). Pak počet cest vedoucích z každého dalšího uzlu je o 1 menší, než počet cest vedoucích z předchozího uzlu. Takže můžeme zapsat, že celkový počet cest vedoucích z uzlů je roven faktoriálu z celkového počtu uzlů bez dvou, počátečního a koncového.

Pokud chceme zjistit počet cest s určitou délkou, odebereme tu část faktoriálu kterou nepotřebujeme.

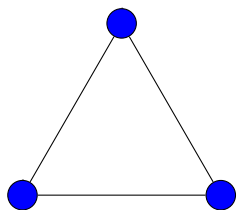
Tento vzorec můžeme zapsat jako:

$$\frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-1))!}$$

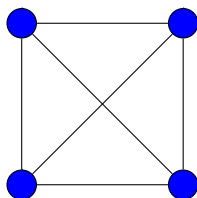
kde n je celkový počet uzlů a k je počet hran v cestě.

Po zjednodušení dostaneme vzorec:

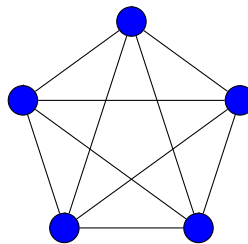
$$\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}$$



Počet vrcholů $n = 3$
Počet cest délky $k=2$ je 1



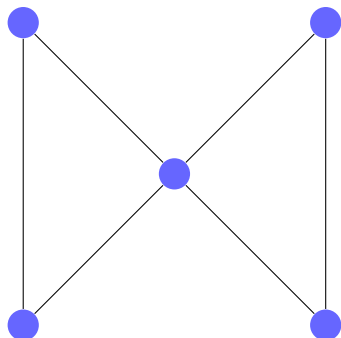
Počet vrcholů $n = 4$
Počet cest délky $k=2$ je 2
Počet cest délky $k=3$ je 2



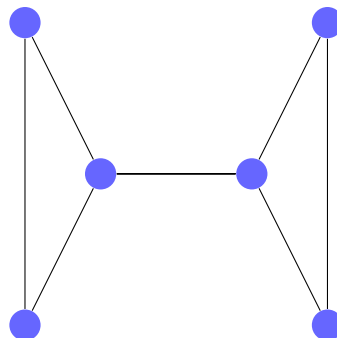
Počet vrcholů $n = 5$
Počet cest délky $k=2$ je 3
Počet cest délky $k=3$ je 6
Počet cest délky $k=4$ je 6

Příklad č. 10

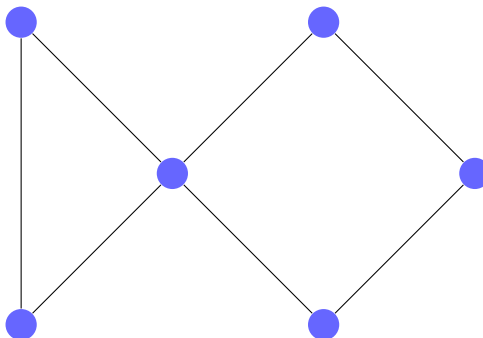
Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.



V grafu není hamiltonovská kružnice.
Cesta je uzavřená a prochází všemi vrcholy.
Nemá 6 vrcholů.



V grafu není hamiltonovská kružnice.
Nelze zakreslit jedním uzavřeným tahem.
Má 6 vrcholů.



V grafu není hamiltonovská kružnice.
Cesta je uzavřená a prochází všemi vrcholy.
Má 6 vrcholů.

Domácí úloha 3

Příklad č. 11

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y - z &= -1 \\x + y - 2z &= 1 \\2x + 2y - 2z &= 3\end{aligned}$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 . Určete jejich vzájemnou polohu.

Příklad č. 12

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x + 2y + z - w &= 6 \\-x + 3y - z &= 8 \\3x - y + 2w &= -1\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right)$$

Příklad č. 13

Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Příklad č. 14

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány vektory $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Označme $L_1 = \langle \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \rangle$ a $L_2 = \langle \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\} \rangle$. Najděte báze v prostorech L_1 , L_2 , $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$ a stanovte dimenze těchto prostorů.

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Příklad č. 15

Je dáno lineární zobrazení $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ předpisem

$$l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_0 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

.

Najděte jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi a určete bázi a dimenzi prostorů **Ker** l a **Img** l .