



# Vysoké učení technické v Brně

Fakulta informačních technologií

Diskrétní matematika

2018 / 2019

## Sada č. 1

| 1. člen skupiny:<br>Radim Lipka    | ID:<br>213479 | Úloha: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|------------------------------------|---------------|--------|---|---|---|---|---|----------|
| 2. člen skupiny:<br>Roman Ondráček | ID:<br>213535 |        |   |   |   |   |   |          |
| 3. člen skupiny:<br>Pavel Raur     | ID:<br>213490 |        |   |   |   |   |   |          |
| 4. člen skupiny:<br>David Reinhart | ID:<br>213160 |        |   |   |   |   |   |          |

# Domácí úloha 1

## Příklad č. 1

Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny  $X, Y, Z \subseteq U$  platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině  $U$ ):

$$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad (1)$$

Tvrzení (1) je pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} x \in \overline{X \cap Y} &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X} \vee x \in \overline{Y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{X} \cup \overline{Y} &\Rightarrow (x \in U \setminus X) \vee (x \in U \setminus Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in U \wedge x \notin X) \vee (x \in U \wedge x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge (x \notin X \vee x \notin Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \wedge x \notin (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in U \setminus (X \cap Y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \overline{X \cap Y} \end{aligned}$$

---

$$Y \setminus X = X \setminus Y \quad (2)$$

Tvrzení (2) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} X \setminus Y &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \\ Y \setminus X &\Rightarrow x \in Y \wedge x \notin X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3, 4\} \\ Y &= \{3, 4, 5, 6\} \\ Y \setminus X &\neq X \setminus Y \\ \{5, 6\} &\neq \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\overline{X \cup Y} \supseteq X \quad (3)$$

Tvrzení (3) není pravdivé, protože  $\overline{X \cup Y}$  je množina všeho, co nenáleží do  $X$  ani do  $Y$ .

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2\} \\ Y &= \{2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{1, 2, 3\} \\ \overline{X \cup Y} &= U \setminus \{1, 2, 3\} \\ U \setminus \{1, 2, 3\} &\not\supseteq \{1, 2\} \end{aligned}$$


---

$$(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y \quad (4)$$

Tvrzení (4) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2\} \\ Y &= \{2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &= (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \cap (\{2, 3\} \setminus \{1, 2\}) = \\ &= \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \\ &= \{3\} \\ (X \cup Y) \cap (Y \setminus X) &\neq Y \end{aligned}$$


---

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup Z \quad (5)$$

Tvrzení (5) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} X &= \{a, b, c, d\} \\ Y &= \{a, b, 1, 2\} \\ Z &= \{a, c, 1, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cap Z) &= \{a, b, c, d\} \setminus (\{a, b, 1, 2\} \cap \{a, c, 1, 3\}) = \\ &= \{a, b, c, d\} \setminus \{a, 1\} = \\ &= \{b, c, d\} \\ (X \setminus Y) \cup Z &= (\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b, 1, 2\}) \cup \{a, c, 1, 3\} = \\ &= \{c, d\} \cup \{a, c, 1, 3\} = \\ &= \{a, c, d, 1, 3\} \\ \{b, c, d\} &\neq \{a, c, d, 1, 3\} \\ X \setminus (Y \cap Z) &\neq (X \setminus Y) \cup Z \end{aligned}$$

## Příklad č. 2

Na množině  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  je dána relace  $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$ . Zapište relaci  $R$  výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci  $R^{-1}$ .

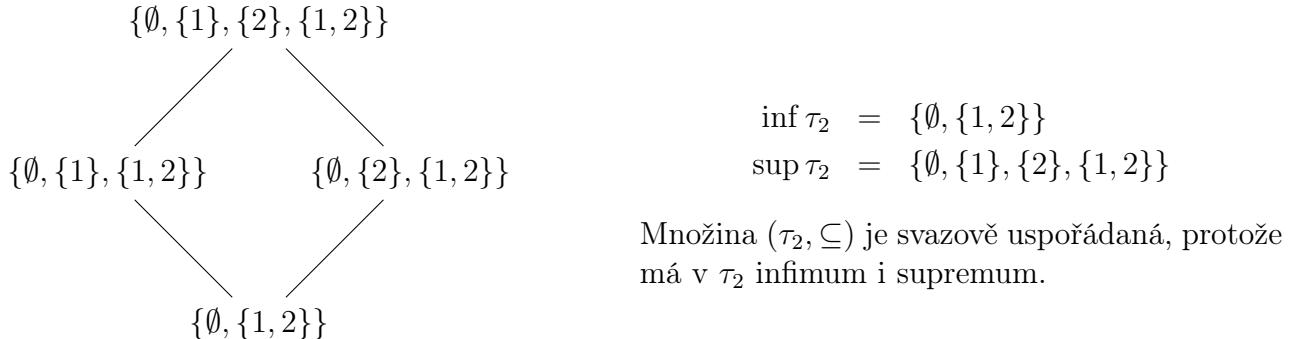
|   | x                                      | 1              | 2              | 3               | 4               | 5               | 6              | 7               | 8               |
|---|----------------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| y | $\begin{matrix} 4y \\ 3x \end{matrix}$ | 4              | 8              | 12              | 16              | 20              | 24             | 28              | 32              |
| 1 | 3                                      | $\frac{4}{3}$  | $\frac{8}{3}$  | 4               | $\frac{3}{16}$  | $\frac{20}{3}$  | 8              | $\frac{28}{3}$  | $\frac{32}{3}$  |
| 2 | 6                                      | $\frac{2}{3}$  | $\frac{4}{3}$  | 2               | $\frac{3}{8}$   | $\frac{10}{3}$  | 4              | $\frac{14}{3}$  | $\frac{16}{3}$  |
| 3 | 9                                      | $\frac{4}{9}$  | $\frac{8}{9}$  | $\frac{4}{3}$   | $\frac{9}{16}$  | $\frac{20}{9}$  | $\frac{24}{9}$ | $\frac{28}{9}$  | $\frac{32}{9}$  |
| 4 | 12                                     | $\frac{1}{3}$  | $\frac{12}{9}$ | 1               | $\frac{3}{4}$   | $\frac{5}{3}$   | 2              | $\frac{7}{3}$   | $\frac{8}{3}$   |
| 5 | 15                                     | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{3}$  | $\frac{4}{5}$   | $\frac{16}{15}$ | $\frac{5}{4}$   | $\frac{8}{5}$  | $\frac{28}{15}$ | $\frac{32}{15}$ |
| 6 | 18                                     | $\frac{2}{9}$  | $\frac{4}{9}$  | $\frac{2}{3}$   | $\frac{8}{9}$   | $\frac{10}{9}$  | $\frac{4}{3}$  | $\frac{14}{9}$  | $\frac{16}{9}$  |
| 7 | 21                                     | $\frac{4}{21}$ | $\frac{8}{21}$ | $\frac{12}{21}$ | $\frac{16}{21}$ | $\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{7}$  | $\frac{4}{3}$   | $\frac{32}{21}$ |
| 8 | 24                                     | $\frac{1}{6}$  | $\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{2}$   | $\frac{4}{6}$   | $\frac{5}{6}$   | 1              | $\frac{14}{12}$ | $\frac{4}{3}$   |

$$\begin{aligned}
 R &= \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 6), (8, 6)\} \\
 \text{Dom } R &= \{1, 2, 4, 8\} \\
 \text{Im } R &= \{3, 6\} \\
 R^{-1} &= \{(3, 1), (6, 1), (3, 2), (6, 2), (3, 4), (6, 4), (6, 8)\}
 \end{aligned}$$

### Příklad č. 3

Uvažujte množinu  $\tau_n$  všech topologií na množině o  $n = 2$  prvcích s uspořádáním inkluze. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je  $(\tau_2, \subseteq)$  svazově uspořádaná.

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2\} \\ 2^X &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\ \tau_n &= \{\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}\} \end{aligned}$$



### Příklad č. 4

Dokažte nebo vyvrátte protipříkladem pro libovolné dvě relace  $R_1, R_2$  na množině  $X$ :

$$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \quad (1)$$

Tvrzení (1) je pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} \rho(R_1 \cup R_2) &= R_1 \cup R_2 \cup \Delta X = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_2 \cup \Delta X) = \\ &= \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \end{aligned}$$


---

$$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \quad (2)$$

Tvrzení (2) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2)\} \\ R_2 &= \{(2, 1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \emptyset \\ \sigma(R_1) = \{(1, 2) \cup (2, 1)\} &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \sigma(R_2) &= \{(2, 1) \cup (1, 2)\} = \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \emptyset &\neq \{(1, 2), (2, 1)\} \\ \sigma(R_1 \cap R_2) &\neq \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2) \end{aligned}$$

$$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \quad (3)$$

Tvrzení (3) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \\ R_2 &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(1, 2), (2, 5), (5, 1), (1, 5), (2, 1), (5, 2)\} \\ \tau(R_1) \cap \tau(R_2) &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &= \{(1, 2)\} \\ \tau(R_1 \cap R_2) &\neq \tau(R_1) \cap \tau(R_2) \end{aligned}$$


---

$$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \quad (4)$$

Tvrzení (4) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 1)\} \\ R_2 &= \{(2, 3), (3, 2)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \\ \tau(R_2) &= \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ \\ R_1 \cup R_2 &= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\} \\ \tau(R_1 \cup R_2) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\} \\ \tau(R_1) \cup \tau(R_2) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ \tau(R_1 \cup R_2) &\neq \tau(R_1) \cup \tau(R_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1)) \quad (5)$$

Tvrzení (5) je pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} \sigma(\rho(R_1)) &= \sigma(R_1 \cup \Delta X) = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1 \cup \Delta X)^{-1} = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1^{-1} \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \sigma(R_1) \cup (\Delta X \cup \Delta X^{-1}) = \\ &= \rho(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$


---

$$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1)) \quad (6)$$

Tvrzení (6) není pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\} \\ \sigma(R_1) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \tau(\sigma(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\} \\ \sigma(\tau(R_1)) &\neq \tau(\sigma(R_1)) \end{aligned}$$


---

$$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1)) \quad (7)$$

Tvrzení (7) je pravdivé.

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2), (2, 3)\} \\ \tau(R_1) &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ \rho(R_1) &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\} \\ \tau(\rho(R_1)) &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 2), (1, 3)\} \\ \rho(\tau(R_1)) &= \tau(\rho(R_1)) \\ \rho(R_1 \circ R_2) &= (R_1 \circ R_2) \cup (\Delta X \circ \Delta X) = \\ &= (R_1 \cup \Delta X) \circ (R_2 \cup \Delta X) = \\ &= \tau(R_1 \cup \Delta X) = \\ &= \tau(\rho(R_1)) \end{aligned}$$

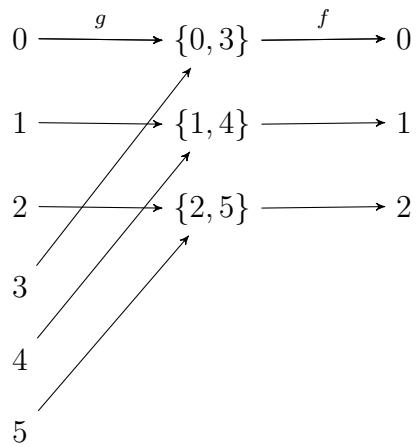
## Příklad č. 5

Položme  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $Y = \{0, 1, 2\}$ . Dále klademe  $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$ ,  $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \bmod 6$ ,  $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$ ,  $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \bmod 3$  pro všechna  $x_1, x_2 \in X$  a  $y_1, y_2 \in Y$ . Dokažte, že  $f : X \rightarrow Y$ , kde  $f(x) = x \bmod 3$  je morfismus algeber  $(X, \oplus, \odot)$  a  $(Y, \boxplus, \boxdot)$ . Nalezněte  $\text{Ker } f$  a sestrojte faktorovou algebru  $X/\text{Ker } f$ . Faktorizujte zobrazení  $f$  přes faktorovou algebru.

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ Y &= \{0, 1, 2\} \\ x_1 \oplus x_2 &:= (x_1 + x_2) \bmod 6 \\ x_1 \odot x_2 &:= (x_1 \cdot x_2) \bmod 6 \\ y_1 \boxplus y_2 &:= (y_1 + y_2) \bmod 3 \\ y_1 \boxdot y_2 &:= (y_1 \cdot y_2) \bmod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \oplus x_2) &= f(x_1) \boxplus f(x_2) \\ x_1 + x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \oplus x_2 &= r = 3v + s; v, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\ x_1 &= 3m + t; m, t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t + u &= 3q + v, \text{kde } q, v \in \mathbb{Z}; 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) \boxplus f(x_2) &= (t + u) \bmod 3 = v \\ x_1 + x_2 &= 6k + r = 6k + 3v + s = 3 \cdot (2k + v) + s \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 + x_2 &= 3m + 3p + 3q + v = 3 \cdot (m + p + q) + v \Rightarrow (x_1 + x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \oplus x_2) &= s = f(x_1) \boxplus f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1 \odot x_2) &= f(x_1) \boxdot f(x_2) \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r; k, r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 6 \\ x_1 \odot x_2 &= r = 3m + s; m, s \in \mathbb{Z}; 0 \leq s < 3 \\ x_1 &= 3n + t; n, t \in \mathbb{Z}, 0 \leq t < 3 \\ x_2 &= 3p + u; p, u \in \mathbb{Z}, 0 \leq u < 3 \\ f(x_1) &= t; f(x_2) = u \\ t \cdot u &= 3q + v; q, v \in \mathbb{Z}, 0 \leq v < 3 \\ f(x_1) \boxdot f(x_2) &= (t \cdot u) \bmod 3 = v \\ x_1 \cdot x_2 &= 6k + r = 6k + 3m + s = 3(2k + m) + s \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = s \\ x_1 \cdot x_2 &= 3n + 3p + 3q + v = 3(n + p + q) + v \Rightarrow (x_1 \cdot x_2) \bmod 3 = v \\ f(x_1 \odot x_2) &= s = f(x_1) \boxdot f(x_2) \end{aligned}$$



Obrázek 1:  $(X/\ker f, \oplus, \odot)$

$$\begin{aligned}
 \ker f &= f^{-1} \circ f = \\
 &= \{(x; y) \mid x, y \in X, f(x) = f(y)\} \\
 \varrho &= X/\ker f = \\
 &= \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\} \\
 [x] \bigoplus [y] &:= [x \oplus y] \\
 [x] \odot [y] &:= [x \odot y]
 \end{aligned}$$

| $\odot$    | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ |
| $\{1, 4\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
| $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{1, 4\}$ |

| $\oplus$   | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $\{0, 3\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
| $\{1, 4\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ |
| $\{2, 5\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ |

## Domácí úloha 2

### Příklad č. 6

Najděte všechny podgrupy  $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ . Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_6 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ a \oplus b &= (a + b) \bmod 6\end{aligned}$$

- Jednotkový prvek je 0.

- Inverzní prvek  $a \oplus a^{-1} = 0$ .

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 0        | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2        | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3        | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4        | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5        | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

$$\left. \begin{array}{l} 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 \\ 0 \oplus 2 = 2 \\ 0 \oplus 3 = 3 \\ 0 \oplus 4 = 4 \\ 0 \oplus 5 = 5 \end{array} \right\} = \mathbb{Z}_6$$

$$\begin{array}{llllllll} 0 \oplus 1 & = & 1 & & & & 0 \oplus 5 & = & 5 \\ 1 \oplus 1 & = & 2 & 0 \oplus 2 & = & 2 & 0 \oplus 4 & = & 4 \\ 0 \oplus 0 & = & 0 & 2 \oplus 1 & = & 3 & 2 \oplus 2 & = & 4 \\ & & & 3 \oplus 1 & = & 4 & 3 \oplus 3 & = & 0 \\ & & & 4 \oplus 1 & = & 5 & 4 \oplus 2 & = & 0 \\ & & & 5 \oplus 1 & = & 0 & 2 \oplus 4 & = & 0 \\ & & & & & & 4 \oplus 5 & = & 3 \\ & & & & & & 5 \oplus 5 & = & 4 \end{array}$$

$$T_1 = \{0\}$$

$$n \in N$$

$$T_2 = \mathbb{Z}_6 =$$

$$0 \oplus n \rightarrow 0$$

$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$1 \oplus n \rightarrow T_2$$

$$T_3 = \{0, 2, 4\}$$

Pokud vybereme dva prvky ze stejné cyklické grupy, tak vyjde něco, co bude patřit dané grupě.

$$T_4 = \{0, 3\}$$

$$T_5 = T_3$$

$$0 \oplus 3 = 3$$

$$T_6 = T_2$$

$$2 \oplus 3 = 5$$

2, 3

2 vygeneruje 0, 2, 4

3 vygeneruje 0, 3

$$4 \oplus 3 = 7$$

3, 4

3 vygeneruje 0, 3

$$T_5 = \{3, 5, 7\}$$

4 vygeneruje 0, 2, 4

## Levé třídy podle $T_3$

$$\begin{array}{lll}
 H := T_3 & x := 0 & x := 2 \\
 x \in \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & 0 \oplus T_3 = \{0, 2, 4\} = & 2 \oplus T_3 = \{0, 2, 4\} = \\
 x \oplus 3 = \{x \oplus k | k \in T_3\} = & = T_3 & = T_3 \\
 & = \{x \oplus 0, x \oplus 2, x \oplus 4\} & x := 1 & x := 3 \\
 \mathbb{Z}_6/T_3 = \{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\} & 1 \oplus T_3 = \{1, 3, 5\} & 3 \oplus T_3 = \{1, 3, 5\}
 \end{array}$$

## Pravé třídy podle $T_3$

$$[x] \bigoplus [y] = [x \oplus y]$$

$$T_3 \setminus \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6/T_3$$

| $\bigoplus$   | $\{0, 2, 4\}$ | $\{1, 3, 5\}$ |
|---------------|---------------|---------------|
| $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ |
| $\{1, 3, 5\}$ | $\{0, 2, 4\}$ | $\{0, 2, 4\}$ |

Pravý rozklad se rovná levému rozkladu.  
Pro grupu  $T_5$  vypadá rozklad stejně.

$$(X/\mathbb{Z}_6, \bigoplus)$$

## Levé třídy podle $T_4$

$$\begin{array}{lll}
 H := T_4 & x := 0 & x := 3 \\
 x \in \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & 0 \oplus T_4 = \{0, 3\} = T_4 & 3 \oplus T_4 = \{0, 3\} \\
 x \oplus 3 = \{x \oplus k | k \in T_4\} = & x := 1 & x := 1 \\
 & = \{x \oplus 0, x \oplus 3\} & 1 \oplus T_4 = \{1, 4\} & 4 \oplus T_4 = \{1, 4\} \\
 & & x := 2 & x := 2 \\
 & & 2 \oplus T_4 = \{0, 3\} = T_4 & 5 \oplus T_4 = \{2, 5\}
 \end{array}$$

$$[x] \bigoplus [y] = [x \oplus y]$$

| $\bigoplus$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
|-------------|------------|------------|------------|
| $\{0, 3\}$  | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ |
| $\{1, 4\}$  | $\{1, 4\}$ | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ |
| $\{2, 5\}$  | $\{2, 5\}$ | $\{0, 3\}$ | $\{1, 4\}$ |

$$(\mathbb{Z}_6/X, \bigoplus)$$

Podgrupy  $T_1, T_2, T_3, T_4$  a  $T_5$  jsou normální.

## Příklad č. 7

Najděte všechny distributivní svazy o 5 prvcích.

Svaz  $(X, \supseteq, \inf)$ ,  $X = \{A, B, C, D, E\}$

Svaz je modulární a distributivní.



## Příklad č. 8

V Booleově algebře  $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$  zjednodušte výrazy:

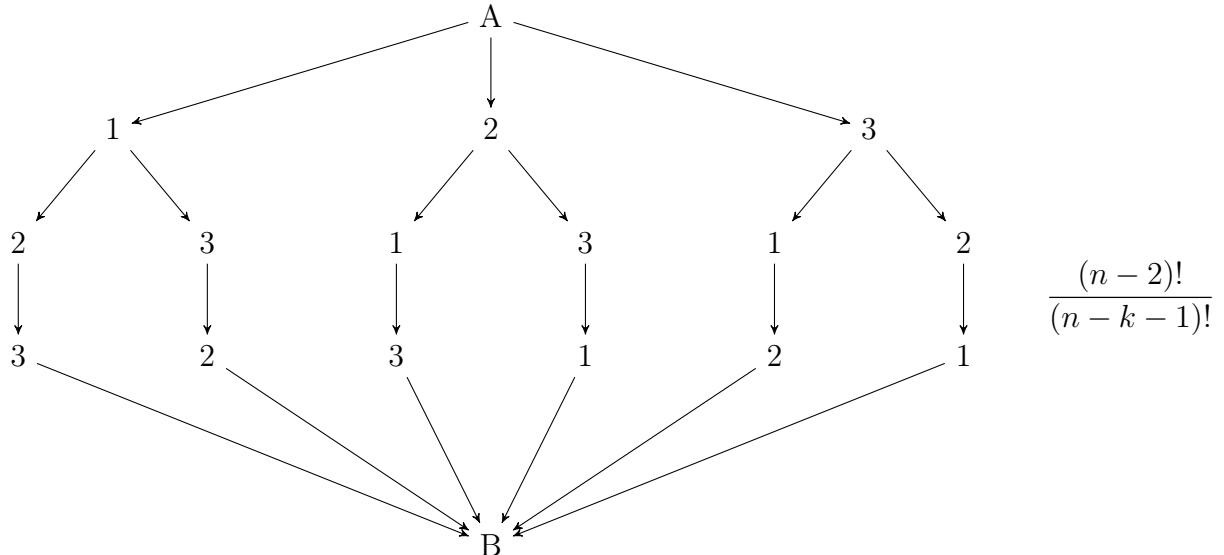
$$\begin{aligned}(a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) &= a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = \\ &= a \oplus b \oplus c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' &= (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x \oplus z) = \\ &= [\{x \odot (y \oplus z)\} \oplus x] \oplus z = \\ &= [x \oplus x] \oplus z = \\ &= x \oplus z\end{aligned}$$

$$(x' \oplus y')' = x \odot y$$

## Příklad č. 9

Buď  $G$  úplný graf o  $n$  vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu  $a$  a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu  $b$ . Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné  $k$ , kde  $1 \leq k < n$ .



Graf rozložíme na strom cest, které vedou z počátečního bodu (A) do koncového (B). Pak počet cest vedoucí z každého dalšího uzlu je o 1 menší, než počet cest vedoucí z předchozího uzlu. Takže můžeme zapsat že celkový počet cest vedoucí z uzlů je roven faktoriálu z celkového počtu uzlů bez dvou, počátečního a koncového.

Pokud cheme zjistit počet cest s určitou délkou, odebereme tu část faktoriálu kterou nepotřebujeme.

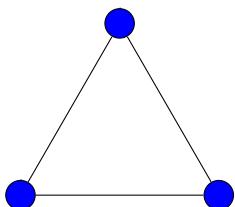
Tento vzorec můžeme zapsat jako:

$$\frac{(n-2)!}{((n-2)-(k-1))!}$$

kde  $n$  je celkový počet uzlů a  $k$  je počet hran v cestě.

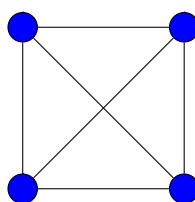
Po zjednodušení dostaneme vzorec:

$$\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}$$



Počet vrcholů  $n = 3$

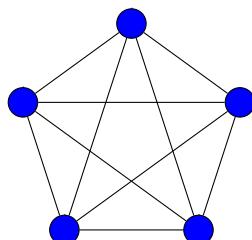
Počet cest délky  $k=2$  je 1



Počet vrcholů  $n = 4$

Počet cest délky  $k=2$  je 2

Počet cest délky  $k=3$  je 2



Počet vrcholů  $n = 5$

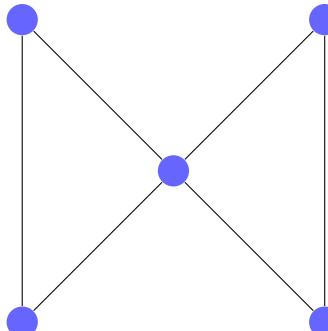
Počet cest délky  $k=2$  je 3

Počet cest délky  $k=3$  je 6

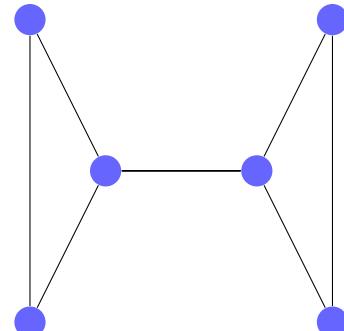
Počet cest délky  $k=4$  je 6

## Příklad č. 10

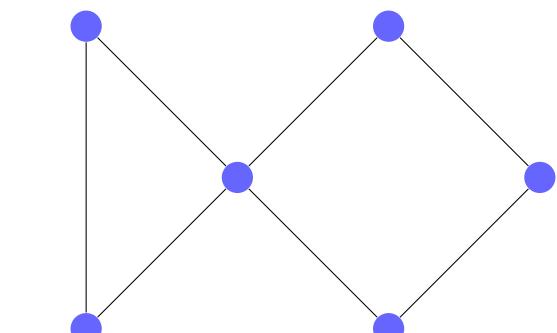
Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.



V grafu není hamiltonovská kružnice.  
Cesta je uzavřená a prochází všemi vrcholy.  
Nemá 6 vrcholů.



V grafu není hamiltonovská kružnice.  
Nelze zakreslit jedním uzavřeným tahem.  
Má 6 vrcholů.



V grafu není hamiltonovská kružnice.  
Cesta je uzavřená a prochází všemi vrcholy.  
Má 6 vrcholů.

## Domácí úloha 3

### Příklad č. 11

Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y - z &= -1 \\x + y - 2z &= 1 \\2x + 2y - 2z &= 3\end{aligned}$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Určete jejich vzájemnou polohu.

### Příklad č. 12

Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x + 2y + z - w &= 6 \\-x + 3y - z &= 8 \\3x - y + 2w &= -1\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right)$$

### Příklad č. 13

Jakoukoliv metodou nebo více metodami spočítejte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

### Příklad č. 14

Ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^4$  jsou dány vektory  $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a  $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Označme  $L_1 = \langle \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \rangle$  a  $L_2 = \langle \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\} \rangle$ . Najděte báze v prostorech  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_1 + L_2$  a  $L_1 \cap L_2$  a stanovte dimenze těchto prostorů.

$$\begin{aligned}
 (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### Příklad č. 15

Je dáno lineární zobrazení  $l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  předpisem

$$l \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_0 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Najděte jeho maticovou reprezentaci ve standardní bázi a určete bázi a dimenzi prostorů

**Ker**  $l$  a **Img**  $l$ .