Fleming-Viot 的中心极限定理 具有硬杀伤的粒子系统1

Fr´ed´eric C´erou2
INRIA Rennes & IRMAR,法国
frederic.cerou@inria.fr

Bernard Delyon
Universit´e Rennes 1 & IRMAR,法国
bernard.delyon@univ-rennes1.fr

Arnaud Guyader
Universit´e Pierre et Marie Curie & CERMICS, France
arnaud.guyader@upmc.fr

Mathias Rousset INRIA
Rennes & IRMAR,法国
mathias.rousset@inria.fr

抽象的

Fleming-Viot 类型的粒子系统代表了一种近似马尔可夫过程分布的经典方法,假设它在最终确定性时间仍然存在。在这种情况下,每个粒子根据基本马尔可夫过程的规律独立演化,直到被杀死,然后瞬间分支到另一个随机选择的粒子上。虽然最近在几篇文章中研究了该算法在大种群限制中的一致性,但我们在这里的目的是在非常一般的假设下证明中心极限定理。为此,我们只假设粒子系统不会在有限时间内爆炸,并且跳跃和杀死时间是无原子分布的。特别是,这包括具有硬杀伤的椭圆扩散的情况。

索引词 - 序列蒙特卡罗,交互粒子系统,
带杀戮的进程

2010年数学学科分类:82C22、82C80、65C05、60J25、
60K35、60K37

1这项工作得到了法国国家研究机构的部分支持,授予 ANR-14-CE23-0012 和欧洲研究委员会根据欧洲联盟第七框架计划 (FP/2007-2013)/ERC 资助协议编号614492。

2通讯作者。

内容

1 简介

令 $X = (X_t)_{t>0}$表示在状态空间中演化的马尔可夫过程形式 $F \cup \{\partial\}$,其中$\partial \notin F$ 是一个吸收状态。 X 在 F 中演化直到它到达∂ ,然后永远被困在那里。让我们也表示τ_∂ 相关的消杀时间,这意味着

$$\tau_\partial := \inf\{t > 0, X_t = \partial\}。$$

给定一个确定性的最终时间 $T > 0$,我们对X_T的分布都感兴趣,因为它在时间 T 仍未被杀死,表示为

$$\eta_T := \mathcal{L}(X_T | \tau_\partial > T),$$

并且在这个事件的概率中,即

$$p_T := P(\tau_\partial > T),$$

假设$p_T > 0$。不失一般性,我们将假设 $P(X_0 = \partial) = 0$ 和$p_0 = 1$,因此$\eta_0 = L(X_0)$。让我们强调,在本文中,T 是固定的和有限的。

近似这些数量的粗略蒙特卡罗方法包括:

- 模拟 N iid 随机变量,目前也称为粒子
工作,

$$X^1_0, \ldots, X^N_0 \overset{独立同居}{\sim} \eta_0,$$

- 让它们根据底层过程 X 的动态独立发展,

- 并最终考虑估算器

$$\hat{\eta}^N_{吨} := \frac{P^N_{我=1} 1_{西_吨} \in F \quad \delta_{Xi_吨}}{磷^N_{我=1} 1_{西_吨} \in F} \qquad 和 \qquad \hat{p}^N_{吨} := \frac{P^N_{我=1} 1_{西_吨} \in F}{N},$$

约定 0/0 = 0。

很容易看出,这些估计量与大 T 无关,通常在 $T \gg E[\tau_\partial]$ 时,因为那时必须面对一个罕见的事件估计问题。
解决此问题的一种可能方法是通过 Fleming-Viot 类型的粒子系统 [2, 12] 来近似所涉及的数量。在下面将详述的假设 (A) 和 (B) 下,对于任意数量的粒子 $N > 2$,以下过程是明确定义的:

定义 1.1(Fleming-Viot 粒子系统)。 Fleming-Viot 粒子系统 $(X^1 \ldots X^N_t)_{t\in[0,T]}$是具有由以下规则集定义的状态空间 $\dot{F}^N$ 的马尔可夫过程。

- 初始化:考虑 N iid 粒子

$$X^1_0, \ldots, X^N_0 \overset{iid}{\sim} \eta_0, \tag{1.1}$$

- 进化和杀戮:每个粒子根据底层马尔可夫过程 X 的规律独立进化,直到其中一个达到 ∂(或到达最后时间 T),

- 分支（或重生,或分裂）:被杀死的粒子取自∂ ,并立即给出（N-1)个其他粒子之一的状态（随机均匀选择），

- 以此类推,直到最后时间 T。

最后,我们考虑估计器

$$\eta^{\tilde{n}}_{吨} := \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{我=1}^{\tilde{n}} \delta X^{i}_{吨} \qquad 和 \qquad 磷^{氮}_{吨} := 1 - \frac{1}{\tilde{n}}^{NNT},$$

其中 NNT是直到最后时间 T 的粒子系统的分支总数。换句话说， NT是直到最后时间 T 的每个粒子的经验平均分支数：

$$新台币 := \frac{1}{\tilde{n}} 卡\{分支次6\ T\}。$$

在非常一般的假设下,Villemonais [12] 证明了当 N 到T时,p) 在概率上收敛到pT ,并且在规律上收敛到ηT 。在 [3] 中,我们进一步向无穷大前进了一步,即建立了 η 和 p 的中心极限结果。为此,我们提出了两个假设。第一个是 T 时刻杀死的所谓“有界 carr´e du champ”假设和与底层马尔可夫过程的规律有关的定义被杀的有界强度。第二个是所谓的“有界 carr´e du

过程。

本文的目的是概括 [3] 中给出的 η 在可以说是最小假设下的中心极限结果。特别是,它包括椭圆扩散过程在到达给定域的边界时被杀死的情况。后一种情况在文献中通常被称为“硬杀” ,[3]没有涵盖这种情

本文的其余部分安排如下。第 2 节详细介绍了我们的假设,揭示了本文的主要结果,并说明了硬杀进程的可能应用上下文。第 3 节专门用于证明中心极限定理,而第 4 节收集了一些技术成果。

2 主要结果

2.1 符号和假设

对于任何有界 $\phi : F \to \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, T]$,我们考虑未归一化
措施

$$\gamma_t(\phi) := p_t\eta_t(\phi) = E[\phi(X_t)1_{t<\tau_\partial}],\text{其中}$$

X_0 $\eta_0 = \gamma_0$。请注意,对于任何 $t \in [0, T]$,有$p_t = P(\tau_\partial > t) = \gamma_t(1_F)$,并通过假设回忆$p_0 = 1$。然后由下式给出相关的经验近似值

$$\gamma^{N}_{t} := p^{N}_{T}\eta^{N}_{t}。$$

注意$\gamma^{N}_{0} = \eta^{N}_{0}$.

为简单起见,我们假设 F 是某个参考波兰空间的可测量子集,并且对于每个初始条件,X 是 $F \cup \{\partial\}$ 中的 càdlàg 过程,满足时间齐次马尔可夫性质,∂ 是吸收状态。它的概率转移记为 Q,这意味着对于任何有界可测函数 $\phi : F \to \mathbb{R}$,任何 $x \in F$ 和任何 $t > 0$,都定义了一个半群算子 $(Q_t)_{t>0}$,由

$$Q_t\phi(x) := E[\phi(X_t)|X_0 = x]。$$

按照惯例,在上面,定义在 F 上的测试函数 ϕ 通过设置 $\phi(\partial) = 0$ 在 $F \cup \{\partial\}$ 上扩展。因此,对于所有 $t > 0$,我们有$Q_t\phi(\partial) = 0$。这等效地定义F 上的亚马尔可夫半群也表示为 $(Q_t)_{t>0}$。

此外,对于 F 上的任何概率分布 μ 和任何有界可测函数 $\phi : F \to \mathbb{R}$,标准符号$V_\mu(\phi)$ 表示当 Y 根据 μ 分布时随机变量 $\phi(Y)$ 的方差,即

$$V_\mu(\phi) := V(\phi(Y)) = E[\phi(Y)^2] - E[\phi(Y)]^2 = \mu(\phi^2) - \mu(\phi)^2.$$

现在可以详细说明我们的基本假设。第一个旨在确保两个不同的粒子不会同时跳跃或分支。

假设(A)。这个假设有两个部分:

(i) 对于任何初始条件 $x \in F$,càdlàg Markov 过程 $t \mapsto X_t \in F \cup \{\partial\}$ 的跳跃时间具有无原子分布:

$$P(X_{t-} \neq X_t |X_0 = x) = 0 \qquad \forall t > 0。$$

(ii) 在 F 上存在一个有界可测实值函数空间 D,它至少包含指示函数1_F并且对于任何 $\phi \in D$,映射 $(x, t) \mapsto Q_t(\phi)(x)$ 在 $F \times R_+$上是连续的。 ,

备注 2.1。请注意,假设 (A) 中的条件 (i) 和 (ii) 都暗示对于任何初始条件 $x \in F$,杀伤时间 τ_∂在 $[0, +\infty)$ 中具有无原子分布。实际上,对于 (i),如果 $t = \tau_\partial$那么显然$X_{t-} \neq X_t$并且我们得出结论,该事件在任何确定性时间 t 以 0 的概率发生。等效地,在 (ii) 中取 $\phi = 1_F$意味着 $t \mapsto P(\tau_\partial > t|X_0 = x)$ 是连续的。请注意, $\tau_\partial = +\infty$ 可能具有正概率。

备注 2.2。在第 3.2 节中,我们提出了假设 (A) 的一个较弱但不太实用的版本,称为假设 (A)。引理 3.1 确保 (A) 蕴含 (A)。正如将要解释的,本文的所有结果实际上都是在假设（A)下获得的。

我们的第二个假设确保粒子系统始终存在。

假设（B）。定义 1.1 的粒子系统在 $P(N_T < +\infty) = 1$ 的意义上是良好定义的。

以下基本结果将很有用。

引理 2.3。在假设 (A) 的条件 (i) 或 (ii) 下,非递增映射 $t \mapsto p_t = P(\tau_\partial > t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的且严格为正的。在假设（B)下,非递增跳跃过程 $t \mapsto p$ 在 $[0, T]$ 上严格为正。
ñ
吨

证明。如备注 2.1 所述,假设 (A)(i) 和 (A)(ii) 都确保了 $t \mapsto P(\tau_\partial > t|X_0 = x)$ 对于所有 $x \in F$ 的连续性。并且连续性结果现在来自$p_t = P(\tau_\partial > t) = \int P(\tau_\partial > t|X_0 = x)\eta_0(dx)$。假设 (A)(i) 下的证明类似。此外,请回想一下,假设p_T严格为正。 p 的定义清楚地满足了随后的断言

ñ
吨。 □

备注 2.4。我们将在引理 3.7 中看到,在假设 (A) 和 (B) 下,一个有 E[pitive.
ñ
吨] = pT ,这尤其意味着pT确实是严格 pos

2.2 主要结果

我们保留第 1 节的符号。特别是,$(X^1_t, \ldots, X^N_t)_{t>0}$表示 Fleming-Viot粒子系统。

定义 2.5。对于任何 $n \in \{1, . . . , N\}$ 和任何 $k > 0$,我们用$\tau_{n,k}$表示粒子 n 的第 k 个分支时间,约定$\tau_{n,0} = 0$。此外,对于任何 $j > 0$,我们用τ_j表示第 j 个整个粒子系统的分支时间,约定$\tau_0 = 0$。

因此,过程 $N^n_t := \sum_{k>1} 1_{\tau_{n,k} 6 t}$和

$$N_t := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} N^n_t = \frac{1}{N} \sum_{j>1} 1_{\tau_j 6 t}$$

是 c`adl`ag 计数过程,分别对应于时间 t 之前粒子 n 的分支数,以及时间 t 之前整个粒子系统的每个粒子的分支总数。

如前所述,我们可以将与粒子系统相关的经验测度定义为 η ,在时间 t 过程仍未被杀死,记为 p,未归一化的经验测度定义为 $\gamma^N_t := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{X^n_t}$,而概率的估计:= (1 - $\frac{1}{N})^{神经网络}$,
$p^N_t := p^N_t \eta^N_t$。

正如将在命题 3.13 中回顾并已被 Villemonais 在 [12] 中注意到的那样,它们的大 N 限制分别为
$\eta_t(\phi) := E[\phi(X_t)|X_t 6= \partial]$, $p_t := P(X_t 6= \partial)$ 和$\gamma_t(\phi) := E[\phi(X_t)1_{X_t 6=\partial}]$。

我们显然有$\eta_t(\phi) = \gamma_t(\phi)/\gamma_t(1_F) = \gamma_t(\phi)/p_t$和$\gamma_t(\phi) = \eta_0(Q_t\phi)$。

我们现在可以揭示本文的主要结果。像往常一样,$N (m, \sigma^2)$ 表示正态分布,之前均值为 m,方差为 σ,$V_\eta(\phi)$ 表示 φ 相对于分布 η 的方差。 2.如前所述

定理 2.6。让我们用 D 表示关于满足假设 (A) 的条件 (ii) 的空间 D的范数 $k\cdot k_\infty$ 的闭包。然后,在假设 (A) 和 (B) 下,对于 D 中的任何 φ,一个具有分布收敛性

$$\sqrt{N} \left(\gamma^N_T (\phi) - \gamma_T (\phi)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N (0, \sigma^2_T (\phi)),$$

其中 $\sigma^2_T (\phi)$ 定义为

$$\sigma^2_T (\phi) := p^2_T V_{\eta_T} (\phi) - p^2_T \ln(p_T) \eta_T (\phi)^2 - 2 \int_0^T V_{\eta_t} (Q^{T-t} (\phi))p_t dp_t \text{。}$$

由于假设$1_F \in D$,并且$\gamma_T (1_F) = p_T$,因此 η 的 CLT 通过考虑分解直接应用该结果 ^N_T 然后是一个

$$\sqrt{N} \left(\eta^N_T (\phi) - \eta_T (\phi)\right) = \frac{1}{\gamma^N_T (1_F)} \sqrt{N} \gamma^N_T \left(- \eta_T ( )\right) - \gamma_T \left(- \eta_T ( )\right) ,$$

以及 $\gamma^N_T (1_F)$ 在概率上收敛到$p_T = \gamma_T (1_F)$。

推论 2.7。在假设 (A) 和 (B) 下,对于 D 中的任何 φ,一个具有分布收敛性

$$\sqrt{N}\,\eta^{ñ}_{吨}(\phi) - \eta_T(\phi) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N\left(0, \sigma^2_{吨}(\phi - \eta_T(\phi))/p^2_{吨}\right)。$$

除了,

$$\sqrt{N}\,p^{ñ}_{吨} - p_T \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, \sigma^2),$$

在哪里

$$\sigma^2 := \sigma^2_{吨}(1_F) = -p^2_{吨} \ln(p_T) - 2\int_0^{吨} V\eta_t(Q^{T-t}(1_F))p_t dp_t。$$

备注 2.8（非独立初始条件）。从命题 3.13 的证明中的步骤 (i) 和命题 3.24 的 (a) 部分的证明可以清楚地看出,当对初始条件 (1.1) 的独立同分布假设放宽时,定理 2.6 和推论 2.7 仍然成立并替换为以下一组条件:(i)初始粒子系统（$X^1_0, \ldots, X^N_0$)是可交换的,(ii)其经验分布 $\eta^{ñ}_0 = \gamma^N_0$ 满足

$$E\left[\eta^{ñ}_0(Q^{吨}(\phi)) - \eta_0(Q^{吨}(\phi))\right]^2 \leq c\,\frac{\|\phi\|^2_\infty}{ñ},$$

对于某个常数 c > 0,并且 (iii) 满足以下 CLT:对于任何 φ ∈ D,

$$\sqrt{N}\,\eta^{ñ}_0(Q^{吨}(\phi)) - \eta_0(Q^{吨}(\phi)) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, V\eta_0(Q^{吨}(\phi)))。$$

在继续证明定理 2.6 之前,让我们举一个应用例子。

2.3 示例:有硬障碍物的 Feller 过程

我们将在本节中展示我们的 CLT 将如何应用于基于 Feller 进程的 Fleming-Viot 粒子系统,该进程在遇到硬障碍时被杀死。据我们所知,这是“硬杀”案例中的第一个CLT结果。

然而,有一组论文研究了硬杀伤情况,其中Xt是 R 的有界域中的扩散过程,当它到达域边界时被杀死。在其他问题中,当 N 趋于无穷时,经验测量的收敛性在 [1,4,5,9]。这种情况也包含在[2]的一般收敛结果中。

令 t 7→ Xet为局部紧致波兰空间 E 中的 Feller 过程,令 F 为边界为 $\partial F = \overline{F} \setminus F$ 的有界开域。令 τ∂为

$E \setminus F$ 的击球时间,并设置$X_t = \tilde{X}$ 对于 $t < \tau_\partial$。如果 $\phi \in D$,我们通过设置 $\phi(\partial) = 0$ 来考虑将连续和有界函数 $D = C_b(F)$ 扩展为 $F \cup \{\partial\}$。注意$1_F \in D$。

检查假设 (A) 的困难在于映射 $(x, t) \mapsto Q_t(\phi)(x)$ 相对于 t 的连续性,因为在

$$Q_t\phi(x) = E[\phi(X_t)1_{t<\tau_\partial} | X_0 = x]。$$

但是,我们有以下一般结果:

题 2.9。假设F是开的,即进程有以下两个条件: Xe 是 Feller,命

(i) 对于所有 $x \in F$ 且所有 $t > 0$,$P(\tilde{X}_t \in \partial F|\tilde{X}_0 = x) = 0$。

(ii) 对于所有 $x \in \partial F$,$P(\tau_\partial > 0|\tilde{X}_0 = x) = 0$。

然后假设 (A) 满足 $D = C_b(F)$。

证明在附录 4.1 中给出。使用后者,我们可以证明规则椭圆扩散的假设(A)。

提案 2.10。假设 F 在 R 边界 ∂F 中是开放的且有界的,并且扩散 Xe ^{d} 光滑具有平滑且均匀的椭圆系数。那么假设(A)成立。

证明。这是命题 2.9 的直接应用。首先,Xe 是 Feller 过程的事实可以在例如 [4] 第 8 章定理 1.6 中找到。接下来,点 (i) 显然是正确的,因为椭圆扩散的第一次通过 ∂F 的时间具有相对于勒贝格测度的密度。

最后,点 (ii) 也得到满足,因为通过椭圆扩散从其边界进入光滑域内部的时间为 0。例如,可以通过将 Ito 公式应用于定义域的光滑水平函数来证明这一经典事实,然后是布朗运动的迭代对数定律。

□

假设 (B) 并非源自经典结果。例如,在 [6] 中证明了规则扩散和平滑边界。请注意,在后者中,作者给出了一组关于非爆炸的一般充分假设,其中一些在 [12] 中得到了进一步概括。在平滑域的简单情况下,即将到来的结果正是 [6] 中第 2.1 节的定理 1。

提案 2.11。假设 F 在 R 边界 ∂F 中是开放的且有界的,并且扩散 Xe 具有平滑且 ^{d} 光滑均匀的椭圆系数。然后满足假设（B）。

综上所述,我们得出结论,如果 F 在 R 中是开放的且有界且具有平滑边界∂F,并且如果扩散 Xe 具 ^{d} 有平滑且均匀的椭圆系数,则可以应用本文的 CLT 类型结果。

3 证明

3.1 概述

证明的关键对象是 c`adl`ag 鞅

$$t \mapsto \gamma^{\tilde{n}}_{吨}(Q) := \gamma^{\tilde{n}}_{吨} 问^{T-t}(\phi),$$

固定参数 T 和 φ 是隐含的,以简化符号。和γ0 = η0,

请注意,由于 $\gamma^{\tilde{n}}_0 = \eta_0^{\tilde{n}}$

$$\gamma_{吨}(\phi) - \gamma T(\phi) = \gamma^{\tilde{n}}_{吨}(Q) - \gamma^{\tilde{n}}_0(Q) + \eta^{\tilde{n}}_0(问^{吨}(\phi)) - \eta 0(Q^{吨}(\phi))$$

是后一个鞅的最终值,根据初始条件添加第二项。请注意,第二项满足极限中的 (Q)

假设 CLT。我们将处理 γ 的分布 $^{\tilde{n}}_{吨}$
N → ∞ 通过使用连续时间鞅的中心极限定理,即定理 3.22。但是,这需要几个中间步骤,主要用于计算二次变分 N[γ

$^{\tilde{n}}$ (Q), γN (Q)]t 。

不幸的是,显示这种二次变化的收敛性并不容易。具体来说,这比在 [3] 中要困难得多,由于所谓的 “carr e-du-champ”和 “软杀伤”假设,我们可以将可预测的二次变化写成与 Lebesgue 测量的积分时间,有界被积函数。然后我们可以很容易地显示被积函数的逐点收敛并应用支配收敛。在这里我们不能这样做。相反,关键思想是替换二次变化,使得 N[γ 是

通过一个适应的增加过程,我当地鞅。最后,i 的$^{\tilde{n}}_{吨}$ $^{\tilde{n}}$ (Q), γN (Q)]t - i $^{\tilde{n}}_{吨}$
收敛需要通过部分公式进行一些适当的时间积分,以及 p 到pt $^{\tilde{n}}$ 在时间上的一致收敛。

$^{\tilde{n}}_{吨}$

在接下来的文章中,我们将广泛使用随机微积分来计算 c`adl`ag semimartingales,如 [10] 第二章或 [7] 中所述。

3.2 跳跃的适定性和非同时性

在其余部分,我们采用标准符号 $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$并且为了简化符号,我们将表示 $l = 1, 2,$

$$N\gamma_{t-} \quad 问^l \quad N := \gamma\, t \qquad 问^{T-t}\ (\phi) \quad ^l \ . \tag{3.1}$$

首先,让我们固定 T 和 φ,并表示对于每个 $1 6 n 6 N$ 和任何 $t \in [0, T]$,

$$大号^n_吨 := 问^{T-t}(\phi)(X^n_吨), \qquad L_T := \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} 大号^n_{t,}$$

其中,为了简化符号,再次省略了参数 T 和 φ。我们从以下技术假设开始,这是对分支和跳跃时间的非同时性的最低要求。特别是,条件 (i) 表明单个粒子在每个分支时间分支,使得 Fleming-Viot 分支规则定义明确。

假设(A)。在 F 上存在一个有界可测实值函数空间 D,它至少包含指示函数1F并且对于任何 $\phi \in D$,$t 7\to L^n_吨$是 c`adl`ag 对于每个 $1 6 n 6 N$, 和:

(i) 在每个分支时间只有一个粒子被杀死:如果 $m 6= n$,那么
对于任何 $j, k > 1$, $\tau_{m,j} 6= \tau_{n,k}$几乎可以肯定。

(ii) 进程 $L^m_吨$从不同时跳转:如果 $m 6= n$,则和 $L^n_吨$

$$P(\exists t > 0, \Delta L^m_吨 \Delta L^n_吨 6= 0) = 0。$$

(iii) 过程 $L^n_吨$永远不会在另一个粒子的分支时间跳跃:如果 $m 6= n$,则

$$P(\exists j > 0, \Delta L^n_{\tau_{m,j}} 6 = 0) = 0。$$

如附录 4.3 节所示,事实证明 (A) 蕴含 (A)。这在以下引理中说明。

引理 3.1。在假设 (A) 下,粒子系统满足假设 (A) 并具有相同的 D 组测试函数。

然后,在假设 (A) 或 (A) 下,很容易将 (Q2)的跳跃设置为上限。确实,有一个
$\overset{\gamma}{-}_吨$ (Q) 和 $\gamma^{\tilde{n}}_吨$

$$|\gamma^{\tilde{n}}_吨 (问)| = |p^{\tilde{n}}_吨\ L_T | 6 |L_t | = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} 大号^n_{t,}$$

并且由于 L n和 L m的跳跃不重合,我们推断

$$|\Delta\gamma_t^{\tilde{n}}(Q)| \text{最多} 6 \frac{1}{N} \text{个}_{16n6N} |\Delta L_t^n| = \text{最大值}\frac{1}{N}_{16n6N} \Delta Q^{T-t}(\ )(X^n_t)\ 6\ \frac{2k\quad k\infty}{\tilde{n}}.$$

相同的推理适用于$|\Delta\gamma^{\tilde{n}}$ (Q2)|,因此得到以下结果。

2k k∞推论 3.2。在假设 (A) 下,有 $|\Delta\gamma_t(Q)|\ 6\ N\ k\phi k\ 2\infty$ (Q2)| 6 $\tilde{n}$ ——— 以及
作为$|\Delta\gamma^{\tilde{n}}$ $\overline{\tilde{n}}$。

论文的其余部分主要致力于以下结果的证明。我们记得 D 是 D 关于范数 k · k∞ 的闭包。

提案 3.3。在假设 (A) 和 (B) 下,对于 D 中的任何 φ,有

$$\sqrt{N}\,\gamma^{\tilde{n}}(\phi) - \gamma_T(\phi) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, \sigma^2(\phi)),$$

在哪里

$$\sigma^2(\phi) = p^2 T V\eta_T(\phi) - p^2 \ln(p_T)\,\eta_T(\phi)^2 - 2\int_0 V\eta_t(Q^{T-t}(\phi))p_t dp_t\,.$$

由于引理 3.1,后者产生了定理 2.6。

3.3 鞅分解

本节将建立在 [12] 的鞅表示的基础上。
我们将过程 t 7→ γ 分解为粒子 n 在分支 k 和 $\tilde{n}$ (Q) 的鞅贡献
k + 1 之间的马尔可夫演化,将表示为 t 7→ Mn,k和第 k 个的鞅贡献

粒子 n 的分支,记为 t 7→ Mn,k .

备注 3.4。在整篇论文中,所有局部鞅对于停止时间序列 $(\tau_j)_{j>1}$ 而言都是局部的。根据需要,这个停止时间序列通过假设 (B) 几乎可以肯定地满足$\lim_{j\to\infty}\tau_j > T$。

回想一下,我们已经为每个 1 6 n 6 N 和任何 t ∈ [0, T], L n :=
QT -t (φ)(Xn) 和Lt := $\frac{1}{\tilde{n}}\ \sum_{n=1}^{N}$ 升t, 以便

$$\gamma_t^{\tilde{n}}(Q) = \gamma_t(Q^{\tilde{n}\ T-t}(\phi)) = p^{\tilde{n}}\ \text{中尉}$$

如果 Xet是根据基本马尔可夫过程的动态演化的任何粒子,对于(并且仅对于)t < τ ∂ ,那么仍然正确的是

QT -t ( )(Xet)1t<τ ∂是鞅。因此，对于任何 $n \in \{1, \ldots, N\}$ 和任何 $k > 1$，Doob 的可选采样定理确保通过构造粒子系统，

$$米^{n,k}_{吨} := 1_{t<\tau_{n,k}} L^n_{吨} - L^n_{\tau_{n,k-1}} 1_{t>\tau_{n,k-1}} = \begin{cases} 0 & 如果\ t < \tau_{n,k-1} \\ 大号^n_{吨} - L^n_{\tau_{n,k-1}} & 如果\tau_{n,k-1} 6\ t < \tau_{n,k} \\ -L^n_{\tau_{n,k-1}} & 如果\tau_{n,k} 6\ t \end{cases} \tag{3.2}$$

是有界鞅。因此，在假设 (B) 下，过程

$$锰_{吨} := X\infty_{k=1} 锰,k_{吨} = L^n_{吨} - X_{06\tau_{n,k}6t} L^n_{\tau_{n,k}}, \tag{3.3}$$

$$吨:= \sqrt{N} \frac{1}{=} \overset{ñ}{\underset{n=1}{X}} 锰_t, \tag{3.4}$$

是当地的鞅。

对于任何 $n \in \{1, \ldots, N\}$ 和任何 $k > 1$，我们也考虑这个过程

$$锰,k_{吨} := 1 - \frac{1}{ñ} L^n_{\tau_{n,k}} - \frac{1}{N-1} X_{m6=n} L^{米}_{\tau_{n,k}} 1_{t>\tau_{n,k}} = L^n_{\tau_{n,k}} - L\tau_{n,k} 1_{t>\tau_{n,k}}, \tag{3.5}$$

根据引理 4.6，它是一个常数鞅，在 $t = \tau_{n,k}$处有一次跳跃，并且明显地以 2 kφk∞ 为界。那么，在假设（B)下，

流程

$$锰_{吨} := X\infty_{k=1} 锰,k_{吨} = X_{06\tau_{n,k}6t} L^n_{\tau_{n,k}} - L\tau_{n,k},$$

$$吨:= \sqrt{N} \frac{1}{=} \overset{ñ}{\underset{n=1}{X}} 锰_t,$$

也是当地的鞅。回忆符号

$$N\ n_{吨} := X_{k>1} 1_{\tau_{n,k}6t}$$

对于粒子 n 在时间 t 之前的分支数和

$$Nt := \frac{1}{ñ} \overset{ñ}{\underset{n=1}{X}} N\ n_{吨} = \frac{1}{ñ} X_{j>1} 1_{\tau_j 6t}$$

时间 t 之前每个粒子的分支总数,(3.2) 和 (3.5) 分别意味着对于每个 1 6 n 6 N

$$dM_n = dL^n - 大号^n\, dn \tag{3.6}$$

$$锰 = L^n - L_t\, dN\, n_t, \tag{3.7}$$

所以总和产生

$$dM_t + dM_t = \sqrt{N}(\overline{dL_t} - L_t\, dN_t)。 \tag{3.8}$$

让我们强调一下,在上述等式中, $L_t = L_{t+}$,因为过程Lt是右连续的。

备注 3.5。根据定义,当k > 1时,鞅Mn的跳跃包含在 L n的跳跃集合和分支时间τn,k集合的并集中。Mn 的跳跃包含在分支时间的集合中τn,k for k > 1。因此,假设(A)能同时发生,对于m 6=n,Mn也是如此。

以下规则将在整篇论文中很有用。

引理 3.6。回想一下 $p^{\tilde{n}} = (1 - \frac{1}{\tilde{n}})^{神经网络}$, 它认为

$$dp_N = -p^{\tilde{n}}_{t-}\, dN_t。 \tag{3.9}$$

证明。一个有 Δp 而 $^{\tilde{n}} = (1- \frac{1}{\tilde{n}})$ NNt−(1− $\frac{1}{\tilde{n}}$) $^{NNt-1}$ = (1− for t = $\frac{1}{\tilde{n}}$ NNt-1 1 -) $\frac{1}{\tilde{n}}$ − 1 ΔNt = $\frac{1}{\tilde{n}}$ τj , j > 1. 因此结果。 □

即将到来的结果证明了过程 t 7→ γ 大风并详细说明了它的分解。 $^{\tilde{n}}$ (Q) 确实是马丁

引理 3.7。我们有分解

$$\gamma^{\tilde{n}} (Q) = \gamma^{\tilde{n}}_0 (问) + \frac{1}{\sqrt{新西兰}} \int_0 磷_{u-}^{氮} (dM_u + dM_u)。 \tag{3.10}$$

证明。回顾 p 部分积分 $^{\tilde{n}}$ 是一个分段常数的过程,很明显

$$\gamma^{\tilde{n}} (Q) = p^{\tilde{n}} L_t = \gamma^{\tilde{n}}_0 (Q) + Z_0\, 磷_{u-}^{氮}\, u\, , dL_u + L_u dp_N$$

我们强调,在上面的等式中,最后一个被积函数确实是Lu = Lu+ 。此外,由（3.9）,我们被引导到

$$N\gamma_{t-} (Q) - \gamma^{\tilde{n}}_0 (Q) = Z_0\, 磷_{u-}^{氮} (dL_u - L_u dN_u)。$$

结果是 (3.8) 的直接结果。 □

备注 3.8。由于γT ( ) = γ0(QT),这意味着无偏性 E γ
$\tilde{n}$ 吨 (ϕ) = γT (ϕ) 对于所有 N > 2。特别是,情况 ϕ = 1F给出
EP $\tilde{n}$ 吨 (ϕ) = pT > 0。

3.4 二次变分估计

值得注意的事实是 2N 鞅 {Mn tt }16n,m6N是 mu ,Mm tually正交的。我们首先提醒读者,如果两个局部鞅是正交的。

引理 3.9。在假设 (A) 和 (B) 下, N2局部鞅 {Mn t }16n,m6N是相互正交的。此外，,mm

$$[\text{毫米}] = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} [\text{锰},\text{锰}] \text{吨。}$$

正交性意味着过程 [M,M] 表示 是局部鞅,并且

$$\text{在} := \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} [\text{锰}, \text{锰}]_t,$$

A 的过程 [M, M] 跳跃由 − At也是局部鞅。除此之外

$$k \quad k \, \Delta At \leqslant \frac{\infty^2}{\tilde{n}} \cdot \tag{3.11}$$

证明。通过假设 (A)（另见备注 3.5）,对于 n 6= m,分段常数鞅Mn和Mm不会同时变化,因此[Mn ,Mm] = 0 并且两个鞅更是如此正交。

同理,对于n 6= m,鞅Mn和Mm不会同时变化,因此[Mn , Mm] = 0 并且两个鞅更何况是正交的。

此外,由于Mn是纯跳跃鞅,我们有Mn的定义

$$d\,[\text{锰}, \text{锰}] = \Delta Mn\, dMn = \text{-L } t\text{-}^{n} \text{ 锰}_t,$$

它定义了一个鞅,因此Mn和Mn是正交的。

接下来,我们声称乘积MmMn是鞅,暗示 或 thogonality。实际上,对于给定的 s ∈ [0, T],让我们定义σi := (τi ∧ T) ∨ s [s, T] 中最接近第 i 个分支时间的停止时间。对于任何 i > 1，以Fσi－1为条件，(Mn 1t<σi)t>0和 (Mm 1t<σi)t>0是独立构造的，因此

嗯嗯嗯 锰 σ我 .

此外，由于鞅Mm和Mn不同时跳跃，它产生Mm σiMn σi

=毫米σiMn σ +毫米 锰使 -毫米 σ我 锰 σ我 ,

E[Mm σiMn σi |Fσ -] = E[Mn σ (毫米-毫米 σ我) +毫米 σ我 (锰 一锰 σ我) +毫米 σ我 锰 σ我 |Fσ -]

=毫米 σ我 锰 σ我 ,

并结合这些方程给出

E毫米σiMn σi .

通过迭代 i > 1 并考虑σ0 = s 和limi→+∞ σi = T，我们得到

E [毫米吨 锰 吨 | Fs] =毫米 s 锰 , _

这显示了声称的结果。

对于最后一点，假设 (A) 保证

$$\Delta A_t = \frac{1}{\tilde{n}} \max_{16n6N} \Delta[M_n, 锰]_t = \frac{1}{\tilde{n}} \max_{16n6N} (\Delta M_n)^2,$$

并且指示的结果现在是 (3.2) 和 (3.3) 的直接结果。 □

与 (3.1) 相同，我们在即将到来的引理中使用每个 t ∈ [0, T] 的符号，

$$V\eta N (Q) := V\eta N (问^t (\phi)) = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} (L\eta)^2 - \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} 大号^n \,!\, ^2 . \tag{3.12}$$

引理 3.10。一个有

$$d [M,M] 6\ 4k\phi k^2 \infty dNt。\tag{3.13}$$

此外，存在一个分段常数局部鞅 Mft和一个分段常数过程Rt，两者在分支时间都有跳跃，使得

$$d [M,M] = V\eta N (Q)dNt + dRt + \frac{1}{N} 分米英尺 \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{3.14}$$

以下估计

$$|\Delta R_t| 6 \frac{14 k\phi k^2_\infty}{\tilde{n}}. \tag{3.15}$$

Fσi－1 = Mm σi－1Mn σi－1

证明。考虑引理 3.9 中的正交性，并考虑鞅Mn,k是分段常数，在时间τn,k有一次跳跃，我们有

$$[\text{毫米}]_{\text{吨}} = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{锰}_{,k}\ {}_{\tau n,k}{}^{2}\ 1t>\tau n,k\ 。$$

这意味着 (3.13) 因为|Mn,k $_{\tau n,k}$ | = |L n $_{\tau n,k}$ − Lτn,k | 6 2kϕk∞。这个方程也意味着 (3.14) 成立

$$\text{多米尼加} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} \text{锰}_{,k}\ {}_{\tau n,k}{}^{2} - E\, hMn,k\ \tau n,k{}^{2}\ F\tau - n,k\ i\ 1t>\tau n,k$$

$$Rt := \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} E\, hMn,k\ \tau n,k{}^{2}\ F\tau - n,k\ i - V\eta N_{\tau\, n,k}\ (Q)\ 1t>\tau n,k\ 。$$

一方面，引理 4.6 确保 Mft是 ac`adl`ag 局部鞅。

另一方面，通过假设（A ），我们有 L $^{l}_{\tau n,k}$ = L $^{l}_{\tau\, n,k}$ 对于所有 l 6= n，

使得 (3.5)通过构建分支规则变 $_{\tau n,k}$ = p1 - $\frac{1}{\tilde{n}}$ L n$_{\tau n,k}$ - $\frac{1}{N-1}$ 磷 $_{Ll6=n}$ $^{l}_{\tau\, n,k}$.然后，为Mn,k ，给定Fτ -在 (L m $_{\tau n,k}$)m6=n,产生 $_{n,k}$, L n$_{\tau n,k}$ 被统一绘制

$$E\, hMn,k\ \tau n,k{}^{2}\ F\tau - n,k\text{我} = \frac{1}{N} \sum_{m6=n} 1 - \frac{1}{\tilde{n}}{}^{2}\ \text{大号}^{*}_{\tau\, n,k} - \frac{1}{N} \sum_{l6=n} \text{大号}^{l}_{\tau} - n,k!2\ 。$$

如果我们暂时将没有粒子 n 的经验分布表示为

$$\eta^{(n)}_{\text{吨}} := \frac{1}{N-1} \sum_{m6=n} \delta Xm_{\text{吨}}\ ,$$

我们现在可以使用符号 (3.12) 将后者重新表述为

$$E\, hMn,k\ \tau n,k{}^{2}\ F\tau - n,k\text{我} = 1 - \frac{1}{\tilde{n}}{}^{2}\ \text{五}_{\eta^{(n)}_{\tau\, n,k}}\ (\text{问})\ 。$$

换句话说，我们有

$$Rt = \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{\tilde{n}}{}^{2}\ \text{五}_{\eta^{(n)}_{\tau\, n,k}}\ (Q) - V\eta N_{\tau\, n,k}\ (\text{问})\ !\ 1t>\tau n,k\ 。$$

对于最后一条语句,请注意对于两个概率测量 μ 和 ν,总变化距离为 kμ - νktv以及对于任何测试函数 f,

$$|V\mu(f) - V\nu(f)| 6 |(\mu - \nu)(f^2)| + |(\mu - \nu)(f)(\mu + \nu)(f)| 6\ 6k\mu - \nu ktvkfk^2_\infty$$

因此,对于任何 n 和 k,

$$\Delta R\tau n,k\ 6\ 1 - \frac{1}{\tilde n}^2 V(n)\eta_{\tau_{n,k}} (Q) - V\eta N_{\tau_{n,k}} (Q) + 1 - 1 - \frac{1}{\tilde n}^2 V\eta N_{\tau_{n,k}} (问)$$

$$6\ 6\ 1 - \frac{1}{\tilde n}^2 (N - 1)(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{\tilde n}) + \frac{1}{\tilde n} k\phi k^2_\infty + \frac{2}{\tilde n} k\phi k^2_\infty$$

$$6\ \frac{14\ k\phi k^2_\infty}{\tilde n}. \qquad \square$$

备注 3.11。前面证明的一个副产品是下面的等式,它将在下面的定义 3.15 中有用。

$$\frac{1}{\tilde n} Rt + Z_0^{吨} V\eta N_{s-} (Q)dNs = 1 - \frac{1}{\tilde n}^2 \frac{1}{\tilde n} X_{n=1}^{\tilde n} Z_0^{吨} 五\eta^{(n)}_{s-} (Q)\ dN_s\ . \qquad (3.16)$$

下一个引理是分析中非常重要的一步。它通过引理 3.7 中定义的增加过程 t 7→ At与t (Q2) 将局部鞅 t 7→ Mt - 给定的二次变化与鞅附加项联系起来。这将产生对At的估计。请注意,过程 t 7→ γ 的想法受到以下事实的启发:根据二次变分的定义,对于任何马尔可夫 X,过程 t 7→ t(Q)(Xt)等于鞅的二次变分t 7→ QT −t ( )(Xt)直到一个鞅添加剂

2

学期。

引理 3.12。存在一个局部鞅 (Me t)t>0使得

$$d\gamma N_{吨}(问^2) = p^{\tilde n}_{t-} dAt + \frac{1}{\sqrt{N}} p^N_{t-} dMe_{吨}. \qquad (3.17)$$

特别是,这意味着

$$EZ_0^{吨} p^{\tilde n}_{s-} dAs = E\gamma^{\tilde n}_{吨}(问^2) - \gamma^{\tilde n}_0(问^2)\ 6\ k\phi k^2_\infty\ . \qquad (3.18)$$

此外,我们有

$$EZ_0^{吨} 磷^{氮}_{u-} d[我,我]u\ 6\ 5k\ k^4_\infty, \qquad (3.19)$$

也

$$|\Delta Me\ u|\ 6 \sqrt{\frac{5k\ k^2_\infty}{\tilde n}}. \qquad (3.20)$$

证明。微分γ $\tilde{t}(Q2) := p^{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{N} (L\,nt)^2$ 产量

$$d\gamma_t^N(Q^2) = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} p_{t-}^{\tilde{n}}\, d(L\,nt)^2 + (L\,nt)^2\, dp^N$$

由于 $dp^N = -p_{t-}^N dNt$，一个得到

$$d\gamma^N(问^2) = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} p_{t-}^{\tilde{n}} \; d(L\,n)^2 - (L\,n)^2 dNt\,。 \tag{3.21}$$

接下来我们声称

$$d(Ln)^2 - (L\,n^2\, dN\,n = d[Mn, 锰]t + 2L_{t-}^n 锰\; 吨。 \tag{3.22}$$

首先，由 (3.6) 知道 dMn通过二次变 $n = dL\,n - L\,n\, dN_t$， 这样我们就可以计算分的双线性

$$d[锰, 锰]t = d[L\,n, 大号n]t + L^{n\,2} dn - 2d\,h\,ZL^{n\,dN\,n}, 大号我$$

$$= d[L\,n, 大号n]t + L^{n\,2} dN\,n - 2(\Delta L\,nt)\,L^n\,dn$$

$$= d[L\,n, 大号n]t + L^n\; 2L_{t-}^n - 大号^n\; dn\, 吨。$$

然后，通过 dL n dN n = dMn + L n再次使用 (3.6) t， 它产生

$$d(Ln)^2 = 2L_{t-}^n dL^n + d[L\,n, 大号n]t$$

$$= 2L_{t-}^n 锰 + 2L_{t-}^n 大号^n dn + d[Mn, 锰]t - L^n\; 2L_{t-}^n - 大号^n\; dn,$$

这立即简化为 (3.22)。

将 (3.21) 和 (3.22) 放在一起，考虑引理 3.9 中的定义 [Mn , Mn]，并回顾 N := A := $\frac{1}{\tilde{n}}$ 磷$_n$ 我们得到 $\frac{1}{\tilde{n}}$ 磷$_n$ N n,

$$d\gamma_t^N(Q^2) = p_{t-}^{\tilde{n}} dAt + \frac{p_{t-}^{\tilde{n}}}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} (L\,nt)^2 (dN\,n - dNt) + 2L_{t-}^n 锰$$

$$= p_{t-}^N dAt + \frac{p_{t-}^N}{\tilde{n}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} (L\,n)^2 - \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{米=1}^{\tilde{n}} (长米)^2\; dn + 2L_{t-}^n dMn吨,\quad \#$$

我们看到 (3.17) 满足

$$dMe = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\tilde{n}} {}^n dn + 2L_{t-}^n 锰\; t, \tag{3.23}$$

ñ

n 2 2 2

米=1

0 s t >0

米

s− n

0 s t > 0, Z 0 s t >0

16n,m6N

n n 2 n

s− s s t−

τn,k

2

t−

ñ

ñ ñ 2 ñ 2

u− u− u− t− 锰]u

0 n=1 0 0

4 ñ 2 ñ

u− u−

0 0

4 1 j−1 2 ñ 2 ñ 2

∞ χ∞ ñ 0

j=1

4

2

∞

t>0 t− t>0

□

2 - 估计 3.5 升

γ rect 的收敛结果是先 $\tilde{n}_{吨}$ (ϕ) 到γT (ϕ) 当 N 趋于无穷时现在是 di 前结果的结果。 Villemonais 在 [12] 中已经注意到了这种估计。

提案 3.13。对于任何 $\phi \in D$,我们有

$$\gamma \quad \tilde{n} \; T(\phi) - \gamma T(\phi) \quad 2 \quad 6 \; \frac{6 \, k\phi k^2_\infty}{\tilde{n}}.$$

证明。由于引理 3.7 和γT ( ) = $\gamma 0$(QT) 的事实,我们有正交分解

$$\gamma^{\tilde{n}}_{吨} (\phi) - \gamma T (\phi) = \frac{1}{\sqrt{新西兰}} \; 0 \; 吨 \; p \, t- \; N \; dMt + \frac{1}{\sqrt{新西兰}} \; 0 \; 吨 \; p \, t- \; N \; dMt + \gamma \; \tilde{n} \; 0 \; (Q \, T \quad) - \gamma 0 (Q \, T \quad),$$

并且很容易将每个项对总方差的个人贡献设置为上限。 (i) 初始条件。由于$\gamma 0 = \eta 0$和 γ

$\tilde{n}$ 0 = η N 0, 我们有

$$\gamma \; \tilde{n} \; 0 \; (Q \, T \quad) - \gamma 0 (Q \, T \quad) \; 2 \; = \frac{1}{\tilde{n}} V\eta 0 \, (Q \; 吨 (\phi)(X)) \; 6 \; \frac{1}{\tilde{n}} \; 千斤 \; 吨 (\phi) k^2_\infty \; 6 \; \frac{1}{\tilde{n}} \; k\phi k^2_\infty。$$

(ii) M 项。使用 It^o 的等距和 (3.13),我们得到

$$E \quad Z \; 0 \; 吨 \; 氮 \; 磷 \, t- \; dMt \quad 2 \; \# = EZ \; 0 \; 吨 \; 氮 \; 磷 \, t- \; 2 \; d[M,M]t$$

$$6 \; 4k\phi k^2_\infty \frac{1}{\tilde{n}} \; X\infty \; j=1 \quad 1 - \frac{1}{\tilde{n}} \; 2(j-1) \; 6 \; 4k \quad k^2_\infty。$$

(iii) M 项。以同样的方式,应用 It^o 的等距和 (3.17),我们得到

$$E \quad Z \; 0 \; 吨 \; p \, t- \; N \; dMt \quad 2 \; \# = EZ \; 0 \; 吨 \; p \, t- \; N \; 2 \; d[M, M]t$$

$$6易 \; 0 \; 吨 \; 氮 \; 磷 \, t- \; dAt = E \, \gamma \; \tilde{n} \; 吨 \; (问) \; 2 \; 6 \; k\phi k^2_\infty。$$

□

特别是,命题 3.13 暗示对于 D 中的任何 ϕ,γ $\tilde{n}$ 当 N 趋于无穷时, (ϕ) 以概率收敛到$\gamma t(\phi)$。由于我们假设1F属于 D,所以概率估计 p pt是概率。下一小节提供了更强的结果。 $\tilde{n}$ t达到其确定性目标

3.6 pt的时间统一估计

在本节中,我们利用命题 3.13 的时间边际收敛证明$\sup_{t\in[0,T]} |p^{ñ}_{吨} - p_t|$在概率上收敛到 0。回想一下,根据假设 (A) 或 (A),映射 $t \mapsto p_t$是连续的(引理 2.3。因此,证明仅使用该论证和 $t \mapsto p^{ñ}_{吨}$ 的单调性。人们只能将其视为类似 Dini 的结果。

引理 3.14。一个有

$$\sup_{t\in[0,T]} |p^N_t - p_t| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0.$$

证明。由于根据引理 2.3,映射 $t \mapsto p_t$在 $[0, T]$ 上是连续的,因此它是一致连续的。因此,对于任何 $\varepsilon > 0$,存在一个细分 $\{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_J = T\}$,使得对于$[t_{j-1}, t_j]$中的任何 $1 \leqslant j \leqslant J$ 和任何 t ,一个有

$$最大值(|p_t - p_{t_{j-1}}|, |p_t - p_{t_j}|)$$

因此,由于 $t \mapsto p^{ñ}_{吨}$ $\leqslant \varepsilon$。正在减少,很容易看出

$$|p^{ñ}_{吨} -点| \leqslant 最大值(p^{ñ}_{t_{j-1}} - p_t, p_t - p^{ñ}_{t_j}) \leqslant \varepsilon + \max(|p^{ñ}_{t_{j-1}} - p_{t_{j-1}}|, |p^{ñ}_{t_j} -点|)。$$

因此,在概率为 1 的情况下,一致地在 $t \in [0, T]$ 中,我们得到

$$|p^{ñ}_{吨} -点| \leqslant \varepsilon + 最大值_{0\leqslant j\leqslant J} |p^{ñ}_{t_j} -点|。$$

在命题 3.13 中取 $\phi = 1_F$和 $T = t_j$确保

$$最大_{0\leqslant j\leqslant J} |p^{ñ}_{t_j} -点| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0。$$

因此,当 $N \to +\infty$ 时,我们有$P(\sup_{t\in[0,T]} |p^{ñ}_t - p_t| > 2\varepsilon) \leqslant P(\max_{0\leqslant j\leqslant J} |p^{ñ}_{t_j} - p_{t_j}| > \varepsilon) \to 0$。由于 ε 是任意的,我们得到了想要的结果。 □

3.7 二次变分的近似

正如稍后将变得清楚的那样,以下过程表示 N_γ 的有用近似 $^{ñ}(Q), \gamma N(Q)$ $_{吨}$.

定义 3.15。对于给定的每个 $\phi \in D$ 和 $T > 0$,我们为 $t \in [0, T]$ 定义 c`adl`ag 增加过程

$$^{牛顿}_{--} := \int_0^{吨} (p^{ñ}_{u-})^2 dA_u - \int_0^{吨} V_\eta N_{u-}(Q) p^{ñ}_{u-} dp^N_{你} + \frac{1}{新西兰} \sum_0^{吨} (p^{ñ}_{u-})^2 鲁。 \tag{3.24}$$

这个过程正在增加的事实来自 (3.16) 和 dpN = -p 这产生了替代公式 $\tilde{n}_{t-}$ dNt,

$$-V\eta N_{t-}(Q)p^{\tilde{n}}_{t-}\,dpN + \frac{1}{\tilde{n}}\ 磷^{氮}_{t-}{}^{2}\,dRt = p^{\tilde{n}}_{t-}\,\frac{2\,(1-1/N)^{2}}{\tilde{n}}\sum_{n=1}^{\tilde{n}} 五\ \eta^{(n)}_{t-}(Q)\,dN$$

其中没有粒子 n 的经验分布用 η 表示 $(n) := \frac{1}{N-1}$ 磷 $_{m6=n}$ $\delta X m$.

我的估计 $\tilde{n}$ 实际上比估计 N γ 更容易 $\tilde{n}$ (Q), γN (Q) 和这两个增加的过程等于一个鞅项。

引理 3.16。过程 t 7 → N γ 大风。 $\tilde{n}$ (Q), γN (Q) -我 $\tilde{n}$ 是当地的马丁

证明。从 (3.10) 和引理 3.9,我们知道

$$\gamma^{\tilde{n}}(Q),\ \gamma N(Q) - Z_0\ 磷^{氮}_{u-}{}^{2}\,dAu - Z_0\ 磷^{氮}_{u-}{}^{2}\,d\,[M,M]u \quad (3.25)$$

是局部鞅。结果是 (3.14) 的直接结果。 □

下一步只是重新制定 i $\tilde{n}$ 通过部件集成。

引理 3.17。递增过程 i $\tilde{n}$ 可以分解为

$$尼_{-} = p\ t\gamma^{N}\ N\ 问^{2} - \gamma 0^{N}\ 问^{2} + \gamma^{N}\ (问)^{2}\ 磷^{\tilde{n}} - 2Z_0\ \gamma_{-u-}\ (问)dpN$$
$$+\, mN + \ell^{\tilde{n}} + O\ \frac{1}{\tilde{n}}\ ,$$

在哪里

$$锰 := -\frac{1}{\sqrt{新西兰}}\ p^{\tilde{n}}_{u-}\ 2分贝_{你}$$

是局部鞅,并且

$$\ell^{N} := -Z_0\ 磷^{\tilde{n}}_{u-}\ \gamma^{\tilde{n}}_{你}\ (问)^{2}.$$

证明。从 (3.24) 开始,我们应用引理 3.12 得到

$$牛顿_{--} = Z_0\ p^{\tilde{n}}_{u-}\ d\gamma N_{你}\ 问^{2} - Z_0\ V\eta N_{u-}(Q)p^{\tilde{n}}_{u-}\ dpN_{你} + mN + \frac{1}{新西兰}\ p^{\tilde{n}}_{u-}{}^{2}\ 鲁。$$

使用（3.15），我们被引导到

$$Z_0 \quad \text{磷}_{u-}^{\text{氮}} \quad {}^2 dRu \leqslant \frac{14k\phi k_\infty^2}{\tilde{n}} \sum_{\text{我}=0}^{\infty} (1 - \tfrac{1}{\tilde{n}})^{2i} \leqslant 7k\phi k_\infty^2,$$

我们现在声称，第一次按时间积分（IBP)产生

$$Z_0 \quad \text{磷}_{u-}^{\text{氮}} \; d\gamma N \quad \text{问}^2 = -Z_0 \quad \frac{\gamma}{-u-} \quad Q2 + dpN \quad \tilde{n} \quad \text{问}^2 \quad \tilde{n}_{p-\gamma 0 \text{吨}} \quad N \quad \text{问}^2 + O \quad \frac{1}{\tilde{n}} \quad .$$

事实上，假设 (A) 意味着 $|\Delta\gamma$ $\tilde{n}_{\tau j}$ (Q2)| $\leqslant$ 2 $k\phi k_\infty^2$ /N 使 Con
引理 4.7 的第 (i) 条满足 z 因此被应用。 $\tilde{n} = \gamma \quad t^N$ (Q2) 和 IBP 规则 (4.3) 可以

接下来，注意到

$$Z_0 \quad V\eta N_{u-} \; (Q)p_{u-}^{\tilde{n}} \; dpN = Z_0 \quad \gamma_{u-}^{\tilde{n}} \quad \text{问}2 \; dpN - Z_0 \quad \gamma_{u-}^{\tilde{n}} \quad (\text{问})^2 \quad p_{u-}^{\tilde{n}} \quad -1 \; dpN,$$

第二个时间 IBP 收益率

$$Z_0 \quad \frac{\gamma}{-u-} \quad (\text{问})^2 \quad \text{磷}_{u-}^{\text{氮}} \quad -1 \; dpN = Z_0 \quad \frac{\gamma}{-u-} \quad (\text{问})^2 d \text{ 日志 } p^{\tilde{n}} + O(\frac{1}{\tilde{n}})$$

$$(Q) = N\gamma \; t \quad {}^2 \text{磷} \; \tilde{n} - Z_0 \quad \text{磷} \; \tilde{n}_{u-} \; d\gamma \tilde{u} \; (Q) \quad {}^2 \; 1 + O(\frac{1}{\tilde{n}})$$

实际上，假设 (A) 还意味着，对于 N > 2，

$$|\gamma_{\tau j}^{\tilde{n}} \; (\text{问})| \leqslant 2 \; k\phi k_\infty (1 - 1/N) \; j \text{和} |\Delta\gamma \quad \tilde{n}_{\tau j} \; (\text{问})| \leqslant \frac{6 \; k\phi k_\infty}{\tilde{n}} (1 - 1/N) \quad {}^{j-1} \; .$$

因此，引理 4.7 的条件 (ii) 和 (iii) 得到满足，因此我们可以连续应用引理 4.7 的规则 $Nzt = \gamma \quad \tilde{n} \quad (\text{问})^2$，(4.4) 和 (4.5)。最后，将所有估计值放在一起会得到预期的结果。

□

引理 3.18。一个有 E mN ^{2} = O(1/N) 以及 E ℓ $\tilde{n}$ = O 1/ $\sqrt{N}$。

证明。第一个断言与 (3.19) 一起是 Ito 等距鞅的直接结果。对于第二个，Ito 的公式产生

$$\ell^N := -2 Z_0 \quad \text{磷} \; \tilde{n}_{u-} \; \gamma_{N u-(Q) d\gamma N u} \quad (Q) - Z_0 \quad \text{磷} \; \tilde{n}_{u-} \; \gamma \quad \tilde{n} \; (Q), \gamma N (Q) \quad .$$

所以，

$$E\,\ell^{\tilde n}_{吨} \leqslant 2E\int_0^{吨} 磷^{\tilde n}_{u-}\gamma^{\tilde n}_{u-}(Q)\,d\gamma^N_{你}(Q) + E\int_0^{吨} |磷^{\tilde n}_{u-}|\,d\gamma^{\tilde n}(Q), \gamma^N(Q)_{你}.$$

然后,Cauchy-Schwarz 不等式和 It^o 等距提供

$$E\,\ell^{\tilde n}_{吨} \leqslant 2\,EZ_0^{吨} 磷^{\tilde n}_{u-}\gamma_{u-}(问)^2\,\gamma^{\tilde n}(Q), \gamma^N(Q)_{你}{}^{1/2}$$
$$+ EZ_0^{吨} |磷^{\tilde n}_{u-}|\,d\gamma^{\tilde n}(Q), \gamma^N(Q)_{你}.$$

由于 $p^2|\ln p| \leqslant 1$ 对于任何 $p \in (0, 1]$,我们有

$$磷^{\tilde n}_{u-}\gamma_{u-}(问)^2 = \ln p^{\tilde n}_{u-} \times p^N_{u-}\eta_{u-}(问)^2 \leqslant |磷^{\tilde n}_{u-}| \times k\phi k^2_\infty。$$

因此,如果我们表示

$$c(N) := EZ_0^{吨} 磷^{\tilde n}_{u-}\,\gamma^{\tilde n}(Q), \gamma^N(Q)_{你},$$

它来了

$$E\,\ell^{\tilde n}_{吨} \leqslant 2k\phi k_\infty\, p\overline{c(N)} + c(N)。$$

接下来,引理 3.7 的基本分解得到 $d\gamma^{\tilde n}(Q), \gamma^N(Q)_{吨} = \frac{1}{\tilde n}\,p^{\tilde n}_{t-}{}^2\,[毫米]_{吨} + \frac{1}{\tilde n}\,p^{\tilde n}_{t-}{}^2\,[M,M]$ 允 $_t$, 使得正交性 3.9 许我们将 c(N) 重新表述为

$$c(N) = \frac{1}{\tilde n} EZ_0^{吨} 磷^{\tilde n}_{u-}\,磷^{氮}_{u-}{}^2\,(dAu + d\,[M,M]u).$$

利用 $p|\ln p| \leqslant 1$ 与 (3.13) 一起,得到

$$c(N) \leqslant \frac{1}{\tilde n} EZ_0^{吨} p^{\tilde n}_{t-}\,dAt + \frac{4}{N2} k\phi k^2_\infty \sum_{j>1} (1 - \tfrac{1}{\tilde n})^j,$$

所以 (3.18) 给出 $c(N) \leqslant \frac{5}{\tilde n} k\phi k^2_\infty$ 并且证明是完整的。 □

3.8 渐近方差和收敛

对于即将进行的计算,我们记得

$$ptV\eta t\,Q^{T-t}(\phi) = \gamma t\,Q^{T-t}(\phi)^2\;(\gamma T(\phi))^{-1}_t Q - p^{T-t}(\phi)^2$$
$$= \gamma t\,Q^{T-t}(\phi)^2\;{}_{-pt}^{-1}$$
$$= \gamma t\,Q^2 - p^{-1}_{吨}(\gamma T(\phi))2。$$

渐近方差公式将表示如下：

定义 3.19。对于任何 $t \in [0, T]$ 和任何 $\phi \in D$,让我们定义

$$它(\phi) := pt\gamma t(Q^2) - \gamma 0(Q^2) + [\gamma t(Q)]2 \ln pt - 2 \int_0 \gamma u Q^2 \, dpu。 \quad (3.26)$$

我们的下一个目的是证明它（φ)对应于感兴趣的渐近方差,正如引理 3.17 所建议的那样。

提案 3.20。对于任何 $t \in [0, T]$,有

$$\tilde{n} \xrightarrow[N\to\infty]{P} 它（\phi）。$$

证明。通过引理 3.17 和关系γt QT -t ( ) = γt(Q) = γT ( ),我们可以写出

$$尼 \; N - it(\phi) = \tilde{p}\, t\gamma \; 问^2 - pt\gamma t\, Q^2 \;{}_{-\gamma 0}\; {}^N 问^2 - \gamma 0\, Q^2$$

$$+ \gamma \; \tilde{t}(Q)^2 磷 \; \tilde{n} - \gamma t(Q)^2 \ln pt + mN + \ell \; \tilde{n} + O(1/N)$$

$$- 2 \int_0 \gamma^{\tilde{n}}_u u-(Q2)dpN - \int_0 \gamma u(Q^2)dpu 。$$

显然,根据命题 3.13 和引理 3.18,边界项和其余项的概率均趋于 0。所以我们只需要证明

$$\int_0 \gamma^{\tilde{n}}_{u-} （问^2)dpN\,u - \int_0 \gamma u(Q^2)dpu = 一个^{\tilde{n}} + b^{\tilde{n}}$$

也变为 0,我们已经定义了

$$吨 := \int_0 \gamma_{u-}(Q^2)d(p^{\tilde{n}}_你 - 普) \qquad 和 \qquad 铌 := \int_0 \gamma_{u-} （问^2) - \gamma u(Q^2)分部。$$

b 的收敛 $\tilde{n} \xrightarrow{磷} 0$ 是命题 3.13 的直接结果。这

理 4.7 的部分规则 (4.3)要更多关注。分部证明使我们能够将第一项重写为 kφk∞ /N,通过引

$$吨 = - \int_0 (\tilde{p} - pu)\, d\, \gamma N_你 （问^2) + \gamma\, \tilde{n} （问^2)(p^{\tilde{n}} - pt) + O(1/N),$$

使用 p 项的边界变为 0。对于积分项,方程 (3.17)导致(Q^2) 是有界的,根据命题 3.13,我们

$$\int_0 (\tilde{p} - pu)\, d\, \gamma N_你 （问^2) = \int_0 (\tilde{p} - pu)p^{\tilde{n}}_{u-}\, dAu + \frac{1}{\sqrt{新西兰}} \int_0 (\tilde{p} - pu)p^{\tilde{n}}_{u-}\, dMe_你。$$

(3.27)

因为 A 是一个递增的过程,所以

$$Z_0^{吨} (\tilde{p}_{u-}^{ñ} - pu)p_{u-}^{ñ} dAu 6支持|p_{你}^{ñ}{}_{u-} - 普| \times Z_0^{吨} 氮_{磷u-} dAu 。 \quad (3.28)$$

根据引理 3.14 和 (3.17),上项的概率变为 0,

$$EZ_0^{吨} 氮_{磷u-} dAu = E γ_{吨}^{ñ} (问)^2 6 kφk^2_{\infty}。$$

所以 (3.28) 的右手边是oP(1) 与OP(1) 的乘积,OP(1) 是经典的oP(1)（参见例如 [11],定理 7.15,对于这个的一般版本结果）,并且（3.27)的第一项的概率为零。

对于 (3.27) 中的第二项,只需注意 p 等距和 (3.19) 产生 $^{ñ}_{u-}$ - pu p $^{N}_{u-}$ 6 1,所以It^o

$$EZ_0^{吨} (\tilde{p}_{u-}^{ñ} - pu)p_{u-}^{ñ} dMe_{你}^2 = EZ_0^{吨} (\tilde{p}_{u-}^{ñ} -普)^2 p_{u-}^{ñ} 2天[我, 我]u 6 5k k^4_{\infty}$$

和一个 $^{ñ}_{吨}$ 概率也趋于零。 □

3.9 渐近方差的另一种表述

为了检索定理 2.6 的表达式,可以将最终时间 T 的方差简化如下。

引理 3.21。定义

$$^2σT (φ) := Vη0 Q^{吨} (φ) + iT (φ),$$

与(3.26) 中的iT (φ) 类似,则

$$^2σT (φ) = p^2_T VηT (φ) - p^2_T ln(pT) ηT (φ)^2 - 2 Z_0^{吨} Vηt (Q^{T -t} (φ))ptdpt 。 \quad (3.29)$$

证明。由于γT (Q2) = γT (φ^2),

$$iT = pT γT (φ^2) - γ0(Q^2) + γT (φ)^2 ln pT - 2 Z_0^{吨} γt Q^2 目录\_ \quad (3.30)$$

此外,根据定义,

$$p^{-1}_{t\,γt\,Q}{}^2 = ηt(Q^{T -t} (φ)^2) = Vηt (Q^{T -t} (φ)) + p^{-2}_{吨} γt(Q^{T -t} (φ))2 。 \quad (3.31)$$

回想一下γt(QT -t (ϕ)) = γT (ϕ),因此将后一个恒等式报告到 (3.31),然后将 (3.31) 报告到 (3.30) 给出

$$iT = pT\ \gamma T\ (\phi^2) - \gamma 0(Q^2) - \gamma T\ (\phi)^2\ \ln pT - 2 Z_0^{吨} V\eta t\ (Q^{T-t}\ (\phi))ptdpt\ 。$$

同理， pT γT ((γT ( ))2 , 2) = p 2 TVηT (ϕ)+γT (ϕ) 2 和Vη0 QT (ϕ) = γ0(Q2)- 因此得到结果。 □

3.10 鞅中心极限定理

以下结果是对 [4] 中的定理 1.4 第 339 页的改编,以适应我们的具体情况。主要区别在于初始条件。

定理 3.22。在过滤的概率空间上,让 t 7→ z 由 N > 1 索引的 c`adl`ag 局 $\tilde{n}_{吨}$ 表示一个序列部鞅。此外,假设

(一) $z_0^{\tilde{n}} \xrightarrow[N\to+\infty]{D}$ μ0,其中μ0是 R 上的给定概率。

(ii) 一个有limN→+∞ E[supt∈[0,T] Δz $\tilde{n}_{吨}$ 2] = 0。

(iii) 对于每个 N,存在一个递增的 c`adl`ag 过程 t 7→ i 是一个局部鞅。 $\tilde{n}_{吨}$ 这样 t 7→ z - z t 0 $\tilde{n}$ N 2 - 我 $N_{吨}$

(iv) 过程 t 7→ i $\tilde{n}_{吨}$ 满足limN→+∞ E supt∈[0,T] Δi $\tilde{n}_{吨}$ = 0。

(v) 存在一个连续且递增的确定性函数 t 7→ it使得对于所有 t ∈ [0, T],

$$\to \tilde{n}_{吨}\ \xrightarrow[N\to+\infty]{P} 它。$$

然后 (z t)$\tilde{n}$ t∈[0,T]规律地收敛（在 Skorokhod 拓扑下)到(Zt)t∈[0,T] ,其中Z0 μ0和 (Zt − Z0)t∈[0,T]是一个高斯过程,与Z0 无关,具有独立的增量和方差函数it 。

证明。首先,我们注意到 [4] 中条件 (b) 的定理 1.4 正是 z = 0 和μ0 = δ0 的特殊情况下的当前结果。另见 [7] 的第 7 章第 5 节,其中再次将一般初始条件的情况留给读者。 $\tilde{n}_0$

其次,固定 ψ ∈ Cb(R),并考虑由下式定义的 P-绝对连续概率

$$P\psi = \frac{1}{E\ \psi(zN_0)}\ e^{\psi(zN_0)}\ P。$$

对于任何 ψ,我们声称在具有相同过滤的Pψ下,对于 t 7→ z,本定理的所有假设都成立
ñ - z 0 N 而不是 t 7→ z ñ 吨。

实际上,首先要说明的是,由于 ψ 是有界的,并且由于初始 σ 场上的概率 P 没有被修改,所以 P 下的鞅性质仍然保持在Pψ 下。因此,过程 t 7→ z 是Pψ 下的局部鞅,具有相同的局部化停止时间。由于 ψ 是有界的,因此满足跳跃 (ii) 的上限。此外,过程 ñ N仍然是局部鞅,并且 (iii) 因为 ψ 是有界的,所以满足跳跃 (iv) 的上限。最后,由于 ψ 是有界的,概率收敛与 ψ 无关,因此 (v) 得到验证。

t 7→ z - z t 0 ñ N 2

因此,在每个有界 ψ 的Pψ下,过程 t 7→ z 在 Skorokhod 拓扑下收敛到 ñ - z 0 N 一个高斯 (Mt)t∈[0,T] ,鞅初始值M0 = 0 和方差函数it 。

最后,令 F 为 c`adl`ag 路径的 Skorokhod 空间上的连续函数,ψ 为连续有界测试函数。使用前面的推理和假设 (i),我们有

埃赫 ψ(zN 0)F(z N - z 0 , N t > 0) i = Eψ F(z ñ - z 0 , N t > 0) E he ψ(zN 0)我

→ N→+∞ E [F(Mt , t > 0)] μ0(e ψ)。

由于 F 和 ψ 是任意的,后一个限制对应于 (z 的弱收敛,其中Z0 μ0和(Mt)t>0是独立的。这正是所需的结果。 ñ)t>0朝向Zt := Z0 + Mt ,

□

备注 3.23。换句话说,极限高斯过程(Zt)t∈[0,T]是随机微分方程的解

$$Z0 \quad μ0$$
$$dZt = \sqrt{it}\, dW t$$

其中(Wt)t∈[0,T]是标准布朗运动。

提案 3.24。在假设 (B) 下,对于满足假设 (A) 的任何有界 ϕ,鞅 (z t)06t6T的序列定义为 ñ

$$_{--}^{Nzt} = \sqrt{N}\, γ t (\tilde{Q} \quad T - t \quad (ϕ)) - γ0(Q \quad T - t \quad (ϕ))$$

在规律上收敛于具有独立增量的高斯过程(Zt)t∈[0,T] ,初始分布 N (0, Vη0 (QT ( ))) 和方差函数 σ t ( ) = Vη0 (QT ( ))) + it(ϕ),其中it(ϕ) 由 (3.26) 定义。 2

证明。我们只需要检查定理 3.22 的假设是否在我们的框架中得到满足。在继续之前,让我们提醒一下,由于 φ 属于 D,它必然是有界的。

(i) 回想一下 $(X^1_0, \ldots, X^N_0)$ 符合η0 = γ0 定律,因此很明显

$$\text{零} = \sqrt{N}\,\gamma^{\tilde{n}}_0(\text{问}(\phi)) - \gamma_0(Q^{\text{吨}}(\phi)) \xrightarrow[N\to+\infty]{D} N(0, V_{\eta_0}(Q^{\text{吨}}(\phi)))。$$

(ii) 这是推论 3.2 的一个简单结果。

(iii) 这是引理 3.16 的目的。

(iv) 根据定义 3.15,我们有

$$\tilde{n} = Z_0 \; p^{\tilde{n}}_{u-}{}^2 \, dA_u - Z_0 \; V_{\eta N_{u-}}(Q) p^{\tilde{n}}_{u-} \, dp^N + \frac{1}{\text{新西兰}} \; p^{\tilde{n}}_{u-}{}^2 \text{钌},$$

以便

$$\Delta i^{\tilde{n}} \leqslant \Delta A_t + \|\phi\|^2_\infty |\Delta p^{\tilde{n}}| + \frac{1}{\tilde{n}} |\Delta R_t|。$$

仍有待观察 $|\Delta p^{\tilde{n}}_t| \leqslant 1/N$ 并应用 (3.11) 和 (3.15) 中给出的界限来推导出

$$\text{支持}_{0\leqslant t\leqslant T} \; \Delta i^{\tilde{n}} \leqslant \frac{2\|\phi\|^2_\infty}{\tilde{n}} + \frac{14\|\phi\|^2_\infty}{N^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0。$$

(v) 最后一点 也是最重要的一点 正是命题 3.20。

□

让我们在下面的讨论中假设假设(B)得到满足。
如果我们在最后一次边缘化,我们得到,对于满足假设 (A) 的任何有界 φ,

$$\sqrt{N}\,\gamma^{\tilde{n}}_T(\phi) - \gamma_T(\phi) \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, \sigma^2_T(\phi))。$$

事实上,我们可以将这个结果扩展到 D 的k · k∞-闭包 $\overline{D}$ 中的任何函数 φ,从而建立命题 3.3,进而建立定理 2.6。

引理 3.25。在假设 (A) 和 (B) 下,对于任何 $\phi \in \overline{D}$,我们有

$$\gamma^{\tilde{n}}_{\text{吨}}(\phi) - \gamma_T(\phi)^2 \leqslant \frac{18\,\|\phi\|^2_\infty}{\tilde{n}}.$$

证明。对于 D 中的任何 φ,考虑 D 中的序列(φn)相对于上范数收敛到 φ。特别是, (k nk∞)变为 k k∞。由于|γT (f)| 6 kfk∞和 |γ $^{\tilde n}_{吨}$ (f)| 6 kfk∞,我们有

$$\gamma \tilde T(\phi) - \gamma T(\phi)^2 \; 6\; 3\,\gamma \tilde T(\phi - \phi n)^2 \quad \tilde n\; T(\phi n) - \gamma T(\phi n) + \gamma^2 + \gamma T(\phi n - \phi)^2$$
$$\tilde n\; T(\phi n) - \gamma T(\phi n)\; 6\; 3\,\gamma^2 + 6k\phi - \phi nk^2_\infty。$$

现在,命题 3.13 暗示

$$\gamma \quad {}^{\tilde n}_{吨}(\phi) - \gamma T(\phi)^2 \quad 6 \quad \frac{18\, k\phi nk^2_\infty}{\tilde n} + 6k\phi - \phi nk^2_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{18\, k\phi k^2_\infty}{\tilde n}.$$

□

因为 (A) 由引理 3.1 蕴含 (A),所以下一个结果正好是定理 2.6。

推论 3.26。在假设 (A) 和 (B) 下,对于任何 φ ∈ D,有

$$\sqrt{N}\,\gamma \quad \tilde T(\phi) - \gamma T(\phi) \quad \xrightarrow[N\to\infty]{D} N(0, \sigma 2T(\phi))。$$

证明。我们将使用渐近方差的简化版本（3.29）。
让我们用 Φ 表示任何有界 Lipschitz 函数,G 是一个中心高斯变量,方差为 σ $^2_{吨}$(φ) 对于任意函数 φ ∈ D。

对于任何 ε > 0,我们可以在 D 中找到 ε ,使得 k − εk∞ 6 ε。我们还可以假设γT (ε) = γT ( )。请注意,我们也可以选择φε使得 (φ)| 6ε 。确实,通过支配收敛很容易检查 |σ$^2_{吨}$(φε) - σ $^2_2$
即 φ 7→ σ $_{吨}$(φ) 对于范数 k · k∞是连续的。因此,让我们表示
Gε方差为 σ 的居中高斯变量 $^2_{吨}$(φε)。

那么我们可以写

$$|E[\Phi(\sqrt{N}(\gamma \quad \tilde T(\phi) - \gamma T(\phi))] - E[\Phi(G)]|$$
$$6\; E[|\Phi(\sqrt{N}(\gamma \quad {}^{\tilde n}_{吨}(\quad) - \gamma T(\quad))) - \Phi(\sqrt{N}(\gamma^{\tilde n}_{吨}(\phi\varepsilon) - \gamma T(\phi)))|]$$
$$+ |E[\Phi(\sqrt{N}(\gamma \quad \tilde T(\phi\varepsilon) - \gamma T(\phi)))] - E[\Phi(G\varepsilon)]| + |$$
$$E[\Phi(G\varepsilon)] - E[\Phi(G)]|。$$

对于第一项,根据引理 3.25,Jensen 不等式并记住γT (− ε) = 0,我们有

$$E|\Phi(\sqrt{N}(\gamma \quad \tilde T(\quad) - \gamma T(\quad))) - \Phi(\sqrt{N}(\gamma \tilde T(\phi\varepsilon) - \gamma T(\phi)))|\; 6\; 3\sqrt{2}k\Phi kLipk \quad - \quad \varepsilon k\infty。$$

因此,对于任何给定的 δ > 0,我们可以选择 ε,使得第一项小于 δ。显然,同样的性质也适用于第三任期。除了,

因为ϕε在 D 中,对于足够大的 N,第二项也可以通过推论 3.24 小于 δ。由于该结果适用于任何有界 Lipschitz 函数 Φ,因此我们使用 Portmanteau 定理得出结论。

□

备注 3.27。这个推论在实践中特别有用:要获得与任何可观察的 ϕ 相关的 CLT,检查假设 (A) 或 (A) 以获得适当的正则化函数就足够了。

4 附录

4.1 Feller 过程的初步介绍

在本节中,我们回顾 Feller 过程的定义和一些属性（参见例如 [8] 的第 17 节）。

定义 4.1。令 E 是一个局部紧致波兰空间。令C0(E) 表示在无穷远处消失的连续函数空间。 E 中的一个 c`adl`ag 时间齐次过程是 Feller 当且仅当它的每个概率转移都将C0(E) 映射到它自己。形式上:对于所有的 ϕ ∈ C0(E) 和 t > 0,z 7→ E[ϕ(Zt)|Z0 = z] ∈ C0(E),其中(Zt)t>0表示用任意给定构造的马尔可夫过程初始条件Z0 = z ∈ E。

Feller 工艺享有许多有用的标准特性,包括: (i) 相关的自然过滤 F 6 t) 是正确连续的; （二）; (iii) Z 与 准左连续。准左连续性的表征如下 ([7],命题 2.26) :如果(τn)n>1是任何 : σ(Zt , 0 6 t 增加的停止时间序列,则在事件 Z 相对于 F 是强马尔可夫 {limn τn < +∞} 上,有 limn Zτn = Zlimn 尊重 F τn 。请注意,采用确定性序列意味着准左连续过程永远不会在确定性时间跳跃。

我们将需要与所谓的 Skorokhod J1拓扑相关的 Feller 过程的稍微不那么标准的属性,如以下命题中所定义。

命题 4.2（J1拓扑）。令 d 为 E 的波兰拓扑的度量。令DE表示从R+到 E 的 c`adl`ag 映射空间。在DE上有一个波兰拓扑,称为 Skorokhod J1拓扑,其特征在于以下属性: limn (z nt)t>0 = (zt)t>0在DE中当且仅当存在一个序列 (λ n)n>0增加的R+到自身的一对一映射使得对于每个 t0 > 0

酩酊大醉_ dz λn(t) , zt = limn sup |λ n (t) - t| = 0。

Z 06t6t0 n Z Z 06t6t0

如果 Z 是 Feller,则$(Z_t)_{t>0} \in (D_E, J_1)$的分布关于其初始条件$Z_0 = z$ 是连续的。这在以下引理中详细说明。

引理 4.3。令D_E表示具有 Skorokhod J_1拓扑的 càdlàg 轨迹空间,令 $(Z^z_s)_{s>0}$表示初始条件$Z_0 = z$ 的 Feller 过程。具有分布收敛性的映射 $z \mapsto L(Z^z_t)_{t>0}$定义从 E 到概率 D_E是连续的。

证明。令 $(z_n)_{n>0}$是一系列初始条件,其中 $\lim_n z_n = z$ 。然后,通过 [8] 中表示 $Z^n := Z^{z_n}$ orem 和 在当前上下文中是平凡的) 以及 $Z \mapsto Z$,过程序列 $((Z^n_t)_{t>0})_{n>0}$在 Skorokhod 空间 (D_E, J_1) 中收敛。

□

然后,我们回顾一下 Skorokhod J_1拓扑的击球时间的上下连续性。

引理 4.4。令 $B \subset E$, $(z_t)_{t>0} \in D_E$,并定义$t_B(z) := \inf\{t > 0, z_t \in \overline{B}\}$, 以及$t_{\overline{B}}(z) := \inf\{t > 0, z_{t-} \in \overline{B}$ 或$z_t \in \overline{B}\}$。考虑(D_E, J_1)中的收敛序列$\lim_n (z^n_t)_{t>0} = (z_t)_{t>0}$ 。那么t_B在(D_E, J_1)中是上连续的:

$$\text{限制}_n \; t_B(z^n) \leqslant t_B(z),$$

并且$t_{\overline{B}}$在(D_E, J_1)中较低连续:

$$t_{\overline{B}}(z) \leqslant \text{限制} \inf_n t_{\overline{B}}(z^n)。$$

证明。对于上连续性,不失一般性,我们可以假设$t_B(z) < +\infty$。通过$(z_t)_{t>0}$的右连续性和t_B的定义,对于任意足够小的 $\varepsilon > 0$, $z_{t_B(z)+\varepsilon} \in B$ 。根据 Skorokhod 拓扑的定义,有一个收敛序列 $\lim_n t_n = t_B(z) + \varepsilon$ in $= z_{t_B(z)+\varepsilon} \in B$ 。因此,由于 B 是开的,对于任何 n 个大的 R +使得 $\lim_n z^n_{t_n} \in B$ 使得$t_B(z^n) \leqslant t_n$。结果遵循足够的极限,$n \to +\infty$,然后 $\varepsilon \to 0$,ε 是任意的。

关于较低的连续性,设置$t_0 := \lim\inf_n t_{\overline{B}}(z^n)$,我们假设它是有限的而不失一般性。根据击球时间泛函 $t_{\overline{B}}$ 的定义,我们可以构造一个序列$(t_n)_{n>1}$,这样,直到提取,(i) $t_n \leqslant t_0+1$,(ii) $\lim_n t_n = t_0$,和 (iii) $\lim_n d(z^n_{t_n}, \overline{B}) = 0$ 其中 d 表示波兰空间 E 的距离。另一方面,通过J_1收敛定义中的时间均匀性 $(z^n)_{t>0} \to (z_t)_{t>0}$,集合 $\{z^n_t, t \leqslant t_0 + 1, n > 0\}$ 是有界的。因此,通过紧致性,存在 $(t_n)_{n>1}$ 满足 $n \to$ 的子序列,其

J1拓扑中的收敛意味着提取的极限 b 必然属于 {zt - , zt0 },这意味着zt - ∈ B 或zt0 ∈ B。根据tB 的定义,这意味着tB(z) 6 t0。

□

我们可以总结出在命题 2.9 的证明中有用的关键属性。

引理 4.5。设 B 是 E 的子集,Z 是 Feller 过程,z ∈ E 是给定的初始条件。表示 τ B := inf{t > 0, Zt− ∈ B 或Zt ∈ B} ∈ [0, +∞] 以及τB := inf{t > 0, Zt ∈ B } ∈ [0, +∞]。此外,假设

$$P(\bar{\tau}B = \tau B|Z0 = z) = 1。 \quad (4.1)$$

时,τB ∈ [0, +∞] 在 P(. |Z0 = zn) 下的分布收敛于其在 P(. |Z0 = z) 下的分布。此外,如果 P(τB < +∞|Z0 = z) > 0,则(ZτB , τB)在 P(. |Z0 = z τB < +∞) 下的分布在 n → ∞ 时收敛于其在 P 下的分

n ,

证明。使用引理 4.3 和 Skorokhod 嵌入参数,我们可以构造具有初始条件 (z n)n> 0 的过程序列 (Z nt)t>0 ,使得 limn Z n通过 Z 导出 (J1)几乎肯定。我们声称 (i) limn τ 和 (ii) $\tau^n_Z = \tau B$,

τ^n_Z = ZτB在事件 {τB < +∞} 上,可以得出结论

一方面,引理 4.4 与 (4.1) 一起直接蕴含 (i)。

另一方面,让我们处理事件 {τB < +∞}。 Skorokhod 拓扑的定义意味着包含在{Zτ∞累积点中的序列 (Z n化点也包含在 B 中。我们现在声称通过 Z 的准左连续性和假设(4.1), Zτ - ∈ B ⇒ Zτ -这反过来从上面的讨论中暗示了上面的 limn Z n (ii)。事实上,定义Bk,这些 d(x, B) < 1/k},通过假设 (4.1)具有构造 = τB . 然后 limk τBk = τ B这也等于 τ B准左连续性意味着 limk ZτBk = Zlimk而Zτ - = ZτB , ∈ B因此要求的结果获得,limk ZτBk = Zτ - τ^n_Z = ZτB ,因此证明

□

命题 2.9 的证明。 Feller 属性经典地暗示 t 7→ Xe 的准左连续性,因此对于所有跳跃时间（可能除外τ∂)的假设 (A) 的条件 (i)。

让 (x n , tn) 是一个在 F × [0, T] 中收敛到 (x, t) ∈ F × [0, T] 的序列。我们声称

$$\lim_n E_{x_n} h \phi(Xe_{t_n}) 1_{\tau^n_\partial > t_n} i = E_x h \phi(Xe_t) 1_{\tau_\partial > t} i , \quad (4.2)$$

这将确保假设 (A) 的条件 (ii)。

首先,我们声称Px(τ∂ = t) = 0。事实上,由于 Xe 是 Feller 因此准左连续,它不能在给定的 t > 0 处跳跃,因此 {τ∂ = t} = {τ∂ = t 和Xet = Xet− }。因此 {τ∂ = t} 蕴含 Xet ∈ ∂F,它在命题 2.9 中的条件 (i) 下概率为零。

其次,我们声称

$$Px(\bar{\tau}_\partial = \tau_\partial) = 1。$$

其中 τ ∂̄ := inf{t, Xet− ∈ E \ F 或 Xet ∈ E \ F} < τ∂。事实上,通过 Feller 过程的强马尔可夫性质,足以证明PXeτ∂ (τ∂ > 0) = 0,这只是命题 2.9 中条件 (ii) 的结果。 −

最后,根据引理 4.3,Skorokhod 嵌入论证表明,我们可以假设(DE, J1)中几乎肯定收敛 limn Xen = Xe 。
由于 Xe 是 Feller 因此准左连续, limn Xen = Xet 。为了获得 (4.2),= τ∂。这从引理 4.5 得出,
n ∂ 只是它仍然表明 limn τ 取 B = E \ F。

−

□

4.2 停止时间和鞅

引理 4.6。令 τ 是过滤后的概率空间上的停止时间,而 U 是可积且Fτ可测量的随机变量,使得 E [U|Fτ−] = 0。
那么过程t 7→ U1t>τ是ac`adl`ag martingale。

证明。让 t > s 给定。首先说明1t>τ = 1s>τ + 1s<τ1t>τ 。那么根据Fτ的定义, U1s>τ是Fs 可测量的,因此

$$E [U1_{t>\tau} |F_s] = U1_{s>\tau} + E [U1_{t>\tau} |F_s] 1_{s<\tau} 。$$

接下来,根据Fτ−的定义,使得 , E [U1t>τ |Fs] 1s<τ和1t>τ是Fτ− - 可测量的,

$$E [U1_{t>\tau} |F_s] 1_{s<\tau} = E [E [U|F_{\tau-}] 1_{t>\tau} |F_s] 1_{s<\tau} = 0。$$

结果如下。 □

4.3 引理 3.1 的证明:(A) ⇒ (A)

假设 (A)的以下明显弱化是引理 3.1 证明中所需的原始条件。

(1) 对于任意初始条件 $x \in F$,杀死时间有一个无原子分布报应,也就是

$$P(\tau_\partial = t | X_0 = x) = 0 \qquad \forall t > 0。$$

(2) 在 F 上存在一个有界可测实值函数空间 D,它至少包含指示函数1F并且使得对于任何 $\phi \in D$,对于任何初始条件 $x \in F$,c`adl 的跳跃`ag 版本的鞅 $t \mapsto Q_{t_0-t}(\phi)(X_t)$具有无原子分布:

$$P\left(\Delta Q_{t_0-t}(\phi)(X_t) \neq 0 | X_0 = x\right) = 0 \quad \forall 0 \leq t \leq t_0。$$

我们现在的目标是证明上述条件 (1) 和 (2) 隐含假设 (A)。在整个证明过程中,让 $1 \leq m \neq n \leq N$ 和 j, $k \geq 0$ 为整数。我们记得,按照惯例, $\tau_{n,0} = \tau_{m,0} = 0$。 (i) 证明$P(\tau_{n,k+1} = \tau_{m,j+1} \,\&\, \tau_{m,j} \leq \tau_{n,k}) = 0$就足够了,因为在 j 上取此类事件的可数并集,$k \geq 0$ 和 $1 \leq m \neq n \leq N$ 将产生结果。有条件地在$F_{\tau_{n,k}}$和$\{\tau_{m,j} \leq \tau_{n,k}\}$ 上,两个分支时间$\tau_{n,k+1}$和$\tau_{m,j+1}$是独立的。此外,假设 (1) 意味着在$F_{\tau_{n,k}}$的条件下,$\tau_{n,k+1}$具有无原子分布。

我们推断

$$P(\tau_{n,k+1} = \tau_{m,j+1} \,\&\, \tau_{m,j} \leq \tau_{n,k} | F_{\tau_{n,k}}) = 0。$$

(ii) 根据 [7] 中的命题 1.3,我们可以定义一个停止时间$\sigma_{m,a}$的可数序列,其中 $a \geq 1$ 在$\tau_{m,j} \vee \tau_{n,k} \leq t \leq \tau_{m,j+1}$时耗尽 L^m的跳跃1.在$F_{\tau_{n,k}}$和$\{\tau_{m,j} \leq \tau_{n,k}\}$ 上,两个过程 $(L^n_t)_{t<\tau_{n,k+1}}$和独立的。此外,假设是 (2) $i^m = Q_{T-t}$有条件地满足 $F_{\tau_{n,k}}$, $L^n(\phi)(X^n)_{\tau_{n,k} \leq t<\tau_{n,k+1}}$具有无原子分布的跳跃。因此,对于每个 $a \geq 1$,

$$P\left(\Delta L^n_{\sigma_{m,a}} \neq 0 \,\&\, \tau_{m,j} \leq \tau_{n,k} \,\middle|\, F_{\tau_{n,k}}\right) = 0。$$

在 $a \geq 1$,j、$k \geq 0$ 和 $1 \leq m \neq n \leq N$上对此类事件进行可数并集得到结果。 (iii) 可以应用与 (ii) 相同的推理,用$\tau_{m,j+1}$代替$\sigma_{m,a}$。

4.4 积分规则

请记住 p 1/N) j−1 = $\tilde{n}$ = (1 - 1/N) 神经网络,所以 p $\tilde{n}_0$ = 1. 回想一下$P\infty$ j=1(1 - N。

引理 4.7。假设 $N > 2$。令 $t \mapsto z$ 为 ac`adl`ag 半鞅,c > 0 为确定性常数,并考虑以下条件,满足任何分支时间τj , j > 1:

(i) $|\Delta z^{\tilde{n}}_{\tau_j}| \leq c/N$, (ii) $|z^{\tilde{n}}_{\tau_j^-}| \leq c(1 - 1/N)^j$, (iii) $|\Delta z^{\tilde{n}}_{\tau_j}| \leq c(1 - 1/N)^j/N$。

如果 (i) 成立,则有

$$\int_0^{t} \frac{1}{p^{\tilde{n}}_{s-}} dz^N_s = p z^{\tilde{n}}_t{}^N - z_0^N - \int_0^t z_{s-}^N dp^N_s + O(1/N)。 \tag{4.3}$$

如果 (ii) 成立,则有

$$\int_0^t z_{s-}^N \frac{1}{p^{\tilde{n}}_{s-}} dp^N_s = \int_0^t z_{s-}^N d \ln p^{\tilde{n}}_s + O(1/N)。 \tag{4.4}$$

最后,如果 (iii) 成立,则有

$$\int_0^t z_{s-}^N d \ln p^{\tilde{n}}_s = z_t^N \ln p^{\tilde{n}}_t - \int_0^t \ln p^{\tilde{n}}_{s-} dz^N_s + O(1/N)。 \tag{4.5}$$

在上述所有方程中,O 符号仅取决于确定性常数 c。

证明。方程 (4.3)来自定义二次变化的分部积分公式

$$p^{\tilde{n}}_t z_t^N - p^{\tilde{n}}_0 z_0^N = \int_0^t z_{s-}^N dp^N_s + \int_0^t p^{\tilde{n}}_{s-} dz^N_s + [p^{\tilde{n}}, z^N]_t,$$

以及 $\Delta p^{\tilde{n}}_{\tau_j} = -(1 - 1/N)^{j-1}/N$ 对于所有 $j > 1$ 使得

$$[p^{\tilde{n}}, z^N]_t = \sum_{j>1} \Delta p^{\tilde{n}}_{\tau_j} \Delta z^{\tilde{n}}_{\tau_j} = O(1/N)。$$

对于 (4.4),请注意对于任何跳跃时间τj , j > 1,一个有 p),这意味着 $p^{\tilde{n}}_{\tau_j^-}{}^{-1} \Delta p^{\tilde{n}}_{\tau_j} = -\frac{1}{\tilde{n}}$ 以及 $\Delta \ln p^{\tilde{n}}_{\tau_j} =$ 日志 $(1 - \frac{1}{\tilde{n}}$

$$\int_0^t z_{s-}^N \frac{1}{p^{\tilde{n}}_{s-}} dp^N_s - d \ln p^{\tilde{n}}_s \leq \sum_j |z^{\tilde{n}}_{\tau_j^-}| \left|日志(1 - \frac{1}{\tilde{n}}) + \frac{1}{\tilde{n}}\right| = O(1/N)。$$

与 (4.3) 类似,等式 (4.5) 只是分部积分公式,此时

$$[\ln p^{\tilde{n}}, z^N]_t = \sum_{j>1} \Delta \ln p^{\tilde{n}}_{\tau_j} \Delta z_{\tau_j}^N = 日志(1 - \frac{1}{\tilde{n}}) \sum_j \Delta z_{\tau_j}^N = O(1/N)。 \quad \square$$

参考

[1] M. Bieniek、K. Burdzy 和 S. Finch。 Fleming-Viot 粒子模型的不灭绝。概率。理论相关领域,153（1-2）:293–332,2012。

[2] K. Burdzy、R. Holyst、D. Ingerman 和 P. March。 Fleming-Viot 型模型中的构型转变和拉普拉斯特征函数的概率解释。物理学杂志 A:数学与综合,29(11):2633, 1996。

[3] F. C erou、B. Delyon、A. Guyader 和 M. Rousset。 Fleming-Viot 粒子系统的中心极限定理。 ArXiv 电子版,2016 年。

[4] SN Ethier 和 TG Kurtz。马尔可夫过程。约翰威利父子公司,纽约,1986 年。

[5] I. Grigorescu 和 M. Kang。 Fleming-Viot 型系统的流体动力学极限。随机过程。申请,110（1）:111-143,2004。

[6] I. Grigorescu 和 M. Kang。用于催化支化过程的永生粒子。概率。理论相关领域,153（1-2）:333–361,2012。

[7] J. Jacod 和 AN Shiryaev。随机过程的极限定理,第 288 卷。Springer-Verlag,柏林,第二版,2003 年。

[8] O.卡伦伯格。现代概率的基础。概率及其应用程序。斯普林格纽约,2002 年。

[9] J.-U.卢布斯。一个静止的 Fleming-Viot 型布朗粒子系统。数学。 Z., 263(3):541–581, 2009。

[10] 体育保护者。随机积分和微分方程,随机建模和应用概率的第 21 卷。 Springer-Verlag,柏林,第二版,2005 年。

[11] MJ雪佛兰。统计理论。施普林格统计系列。施普林格出版社,纽约,1995 年。

[12] D.维勒莫奈。条件不被杀死的马尔可夫过程分布的一般近似方法。 ESAIM 概率。统计,18:441–467,2014。