$2^{ème}$ année Sciences du Numérique - Contrôle "Performances de Réseaux"
Mai 2022 – durée 1H30 – André-Luc BEYLOT
(notes de cours, de TD, documents distribués et calculette autorisés
Les résultats vus en cours n'ont pas besoin d'être redémontrés)

Files d'attente à départs groupés

Les modèles de base de la théorie des files d'attente font l'hypothèse que les clients sont traités individuellement. Néanmoins dans de nombreux exemples : polling, réassemblage de paquets, systèmes multiporteuses, TDMA… ce modèle est mis à mal et l'on peut observer des départs groupés de clients. Nous allons traiter plusieurs de ces systèmes dans le présent examen. Dans tout l'examen, on considérera des arrivées de clients poissonniennes de taux λ et pas d'arrivées groupées.

I Départs groupés – Temps de service nuls

Le premier exemple correspond à un système de concaténation ou de réassemblage de paquets.
On considère un système dans lequel on regroupe les paquets par groupe de 3. Les deux premiers paquets qui arrivent ($3k$ et $3k+1$), attendent puis quand le $3^{ème}$ paquet arrive ($3k+2$), ils quittent tous les trois le système de façon instantanée.
Soit $N(t)$ le nombre de paquets dans le système à l'instant t.

1. Vérifier que le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu. Dessinez le graphe associé.
2. Déterminer les probabilités stationnaires des différents états. En déduire le nombre moyen de paquets en attente puis le temps moyen de réponse.
3. On peut retrouver ce résultat de façon très simple :
   a. Que vaut le temps de réponse des paquets ($3k+2$) ?
   b. A quoi correspond le temps de réponse des paquets ($3k+1$) ? En déduire sa valeur moyenne.
   c. A quoi correspond le temps de réponse des paquets $3k$? En déduire sa valeur moyenne.
   d. Retrouver le résultat de la question précédente.

II Départs groupés – Temps de service exponentiels

On se place sensiblement dans la même configuration que la précédente mais on va supposer cette fois que le temps de réassemblage/concaténation n'est plus nul. On va supposer cette durée exponentiellement distribuée de taux μ.
On note toujours $N(t)$ le nombre de paquets dans le système à l'instant t.

1. Vérifier que $\{N(t), t \geq 0\}$ est encore une chaîne de Markov à temps continu. Dessinez le graphe associé.
2. Est-ce un processus de naissance et de mort ?
3. Ecrire les équations de coupe. On ne demande pas la résolution du système linéaire (qui a donné lieu à un examen les années précédentes et qui passe par l'utilisation de la transformée en z).
4. Quelle est la condition de stabilité du système ? Raisonner PAR EXEMPLE sur le nombre moyen de clients qui arrivent pendant un service.

On note $\Pi = \left(\pi_0, \pi_1, \dots,\right)$ la distribution stationnaire quand le système est stable. On ne demande pas la forme explicite de cette distribution.

5. Déterminer le nombre moyen de clients dans la file en fonction de ces probabilités stationnaires puis le temps moyen de réponse $E(R)$ en fonction de ces probabilités stationnaires.
6. En se servant de la première partie, déterminer le temps moyen de réponse des clients $3k$, $3k+1$ et $3k+2$ en fonction de $E(R)$ et de λ.

III Polling/TDMA

Dans cette troisième partie, les clients arrivent dans une file et le système vient en vider régulièrement. De très nombreuses variantes de ces systèmes existent selon que l'on vient vider un, plusieurs ou tous les clients en attente. De la même façon, les scrutations successives peuvent donner lieu à de nombreux modèles.
Dans le présent exercice, on suppose que l'on vient scruter la file périodiquement avec une période constante T. Les départs seront comme dans la première partie instantanée.

On suppose tout d'abord que l'on peut vider jusqu'à vider jusqu'à concurrence de K paquets simultanément à chaque période de scrutation. On note encore $N(t)$ le nombre de paquets dans le système à l'instant *t*.

1. $\{N(t), t \geq 0\}$ constitue-t-il une chaîne de Markov à temps continu ? Justifiez votre réponse.
2. On se place désormais sur une étude de chaîne incluse, juste avant les scrutations. On note q_n le nombre de clients dans la file juste avant la nème scrutation. On note v_n le nombre de clients qui arrivent entre la scrutation (n-1) et la scrutation (n).
    a. Ecrire l'équation d'évolution de q_{n+1} en fonction q_n, v_{n+1}et K. Déterminer la loi de v_n
    b. Montrer que $(q_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov en temps discret. Tracer le graphe associé.
    c. En raisonnant sur le nombre moyen d'arrivée pendant une période, déterminez la condition de stabilité de la file.
3. On ne va terminer les calculs que dans le cas particulier K=1.
    a. Reprendre la question 2.a et constater que l'on obtient exactement une équation d'évolution d'une file M/G/1 dont on déterminera les paramètres.
    b. En déduire le nombre moyen de clients à ces instants particuliers d'observation $E[q]$ en fonction de $\rho = \lambda T$. Quelle est la condition de stabilité ?
    c. Qu'est-ce qui selon vous différencie cette file de la file M/G/1 identifiée ?
    d. Pour déterminer le nombre moyen de clients dans la file en régime permanent à un instant quelconque, il faut partir de $E[q]$ (nombre moyen de clients dans la file avant les départs) enlever le nombre moyen de départ $E[d]$ (temps de service nul) et ajouter le nombre moyen de clients (moyenne temporelle) arrivant depuis le début d'une période $E[a]$
        i. Quel est le nombre moyen de clients qui arrivent pendant une période ?
        ii. En déduire le nombre moyen de départs par période en régime permanent (système stable).
        iii. Les arrivées étant poissonniennes, les clients ont autant de chance d'arriver à n'importe quel instant. (Conditionné par le nombre d'arrivées, ces arrivées se répartissent uniformément sur la période – propriété admise qui a été démontrée dans un précédent examen). Combien un client qui arrive sur une période comptera-t-il sur la moyenne temporelle du nombre de clients dans la file sur la période considérée ?
        iv. En déduire le nombre moyen de clients dans la file en régime permanent en fonction de ρ
    e. Appliquer la loi de Little et déterminer le temps moyen de réponse.

Question bonus : Idée de preuve de la propriété admise dans la question 3.d.

On va simplement montrer que pour des arrivées poissonniennes, si l'on sait qu'il y a une arrivée et une seule sur un intervalle T, cette arrivée est uniformément répartie sur [0 T].

Pour ce faire on considère un processus de Poisson $\{K(t), t \geq 0\}$ de taux d'arrivée λ.

Soit F la fonction de répartition de la variable correspondant à la date de l'arrivée du client.

1. Justifier $F(t) = \Pr(K(t) = 1/K(T)=1)$
2. Comme cela revient au fait qu'il n'y a eu aucune arrivée entre t et T, terminer les calculs retrouver la fonction de répartition d'une loi uniforme sur [0 T]