Corrigé examen performances de réseaux 2022

I Départs groupés – Temps de service nul

1. $\mathbb{P}(1 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t+dt) = \lambda dt + o(dt)$

   $\mathbb{P}(0 \text{ " }) = 1 - \lambda dt + o(dt)$

   $\mathbb{P}(N(t+dt) = k+1 \mid N(t) = k < 2) = \lambda dt + o(dt)$

   $\mathbb{P}(N(t+dt) = 0 \mid N(t) = 2) = \lambda dt + o(dt)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\lambda"] & 1 \arrow[r, "\lambda"] & 2 \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

2. $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{3}$ $\quad E(N) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$ $\quad E(W) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

3. a. Le paquet $3k+2$ n'attend pas il est instantanément servi.

   $E(W_2) = 0$

   b. Le paquet $3k+2$ attend l'arrivée du paquet $3k+2$ pour partir

   → attente = temps moyen entre deux arrivées $= \frac{1}{\lambda}$; $E(W_1) = \frac{1}{\lambda}$

   c. Le paquet $3k$ doit attendre $(3k+1)$ → $\frac{1}{\lambda}$ en moyenne $\qquad E(W_0) = \frac{2}{\lambda}$

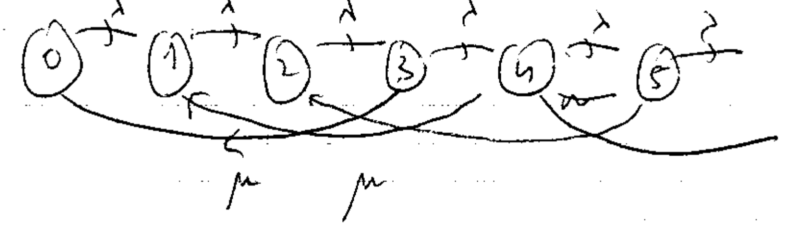
   puis $(3k+2)$ → $\frac{1}{\lambda}$ en plus en moyenne

   d. $E(W) = \frac{1}{3} E(W_0) + \frac{1}{3} (W_1) + \frac{1}{3} E(W_2) = \frac{1}{\lambda}$

II Départs groupés temps de service exponentiels de taux μ

1. $\mathbb{P}$ (1 arrivée entre t et $t+dt$) $= \lambda\, dt + o(dt)$

$\mathbb{P}$ (1 départ entre t et $t+dt$ $\mid N(t) = k \geq 3$) $= \mu\, dt + o(dt)$



2. Ce n'est pas un processus de naissance et de mort transition entre états non adjacents (départs groupés)

3. $$\lambda \pi_0 = \mu \pi_3$$
$$\lambda \pi_1 = \mu \pi_3 + \mu \pi_4$$
$$\lambda \pi_2 = \mu \pi_3 + \mu \pi_4 + \mu \pi_5$$
$$\lambda \pi_k = \mu \pi_{k+1} + \mu \pi_{k+2} + \mu \pi_{k+3} \qquad k \geq 2$$

4. Un service fait partir 3 clients à la fois.
Pour que le système soit stable il faut qu'il arrive moins de trois clients en moyenne pendant la durée d'un service

Temps moyen pour que trois clients arrivent $= \dfrac{3}{\lambda}$
Temps moyen de service $= \dfrac{1}{\mu}$
Il faut donc que $\dfrac{3}{\lambda} > \dfrac{1}{\mu} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{3\mu} < 1$

~~Ou~~ Nombre moyen de clients qui arrivent pendant la durée d'un service qui vaut x $= \lambda x$

$$\bar{A} = \int_{x=0}^{\infty} \lambda x \, \mu e^{-\mu x}\, dx = \lambda E(S) = \frac{\lambda}{\mu} < 3$$

5. $E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k$, $E(R) = \frac{E(N)}{\lambda}$

6. $E(R_1) = E(R)$; $E(R_2) = E(R) - \frac{1}{\lambda}$; $E(R_3) = E(R) + \frac{1}{\lambda}$

(en fait le raisonnement précédent s'applique sur les temps d'attente

$E(W_1) = E(W)$ avec $E(W_2) = E(W) - \frac{1}{\lambda}$, $E(W_3) = E(W) + \frac{1}{\lambda}$

$E(R_1) = E(S) + E(W) = E(R)$; ...

III Polling / TD 2 A

1. $(N(t), t \geq 0)$ n'est pas une chaîne de Markov à temps continu,

On peut prévoir les arrivées mais on ne sait pas où on est dans la période.

2.a. Si $q_n \leq K$ tous les clients vont être servis

$$q_{n+1} = v_{n+1}$$

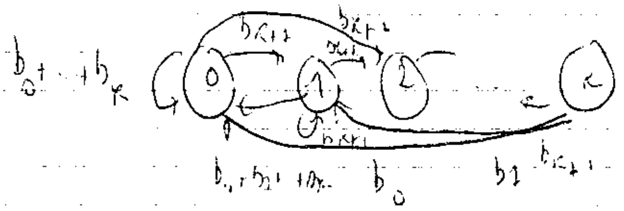
Si $q_n > K$ $(q_n - K)$ vont rester

$$q_{n+1} = (q_n - K) + v_{n+1}$$

$$q_{n+1} = (q_n - K)^+ + v_{n+1} \quad \text{où } X^+ = \max(X, 0)$$

b. $\mathbb{P}(v_n = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$ (nbr d'arrivées sur 1 période T)

c. Si q_n est connu, on connaît la loi de v_{n+1} $\Rightarrow$ on connaît q_{n+1}



c. Pour la stabilité il faut qu'il arrive en moyenne moins de K } $\underline{\lambda T < K}$
utilisateurs en 1 durée T
Nombre moyen d'arrivée $= \lambda T$

3. Pour $K = 1$

3.a L'équation d'évolution vaut $q_{n+1} = (q_n - \mathbb{1}_{\{q_n > 0\}}) + r_{n+1}$
qui est l'équation d'évolution d'1 file $M/G/1$
Pour les arrivées on a regardé les arrivées sur une période T
Donc c'est la même équation d'évolution que celle d'1 $M/D/1$
— taux d'arrivée $= \lambda$ — temps moyen de service $= T$

3.b $E(q) = E(q_{M/D/1}) = \rho + \dfrac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}$

$$\underline{E(q) = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}}$$

3.c Ce qui différencie c'est que si la file n'est pas vide après
l'instant de scrutation $(q_n > 1)$ alors effectivement pour le client
qui va se trouver en tête cela se comportera comme un temps de service T

En revanche pour le cas où $q_n = 0$ ou 1, le client est servi (ou pas) et
plus personne n'attend.
Quand le prochain client arrivera, il n'aura pas à attendre une durée
T pour être servi mais simplement la durée résiduelle avant la
prochaine scrutation.

3. a

i. $E(A) = \lambda T = \rho$

ii. En moyenne ~~[illegible]~~ autant de clients servis par période si le système est stable $(\rho < 1)$

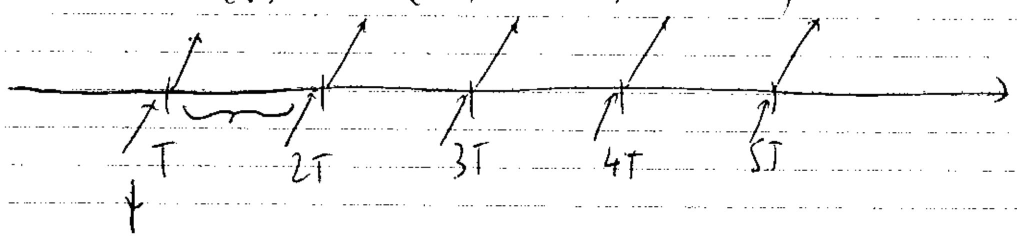
$E(d) = \rho$

iii. Répartition uniforme des clients arrivés pendant la période

En moyenne, ils comptent $\frac{1}{2}$

$E(n) = \frac{\rho}{2}$

iiii. $E(L) = E(q) + E(n) - E(d)$



$E(q) - E(d) + E(n)$ ... les instants d'observation sont de mesure nulle

$$E(L) = \cancel{\rho} + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} - \cancel{\rho} + \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}\left\{\frac{\rho}{1-\rho} + 1\right\}$$

$$E(L) = \frac{\rho}{2(1-\rho)}$$

3. c $\underline{E(R)} = \frac{E(L)}{\lambda} = \frac{1}{2\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \underline{\frac{1}{2(\mu-\lambda)}}$