Évaluation de Performance

André-Luc Beylot

Mis en page par :
Adrien Chevallereau
Dino Gurnari

Collaborateurs :
Cédric Cazanove
Valentin Lebrun
Maxence Péricat
Hugo Suzanne

Département Sciences du Numérique
Deuxième année - Architecture, Systèmes et Réseaux
2021-2022

Chapitre 1 : Chaînes de Markov à temps discret

Processus stochastique Un processus stochastique $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à temps discret et à espace d'états discret E sera dit chaine de Markov à temps discret si

$$\forall (i_1, ..., i_n) \in E^{n+1},\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n; ...; X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$$

Définition : Une CMTD sera dite homogène si

$$\forall (i,j) \in E^2,\ \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X_{n+k+1} = j \mid X_{n+k} = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$$

p_{ij} est dite probabilité de transition de i à j et $P = (p_{ij})$ est dite matrice de transition

Propriété : La matrice P est stochastique. Elle admet 1 comme valeur propre et les valeurs propres sont dans le disque unité $(\rho_i) \leq 1$

Représentation d'une CMTD homogène

- Par sa matrice de transition P (voir exemple plus bas)
- Par un graphe orienté valué :
  - sommets $\equiv$ E
  - $arc(i,j)$ existera $p_{ij} > 0$
  - $valeur(i,j) \longrightarrow p(i,j) = p_{ij}$

Évolution d'une CMTD homogène

$\Pi_j^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j)$ la probabilité d'être dans l'état j à n
On note : $\Pi^{(n)} = (\Pi_1^{(n)},\ ..., \Pi_j^{(n)},\ ...)$ la distribution à n
$\boxed{\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} P}$ (1)
On utilise la formule des probabilité totale
$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

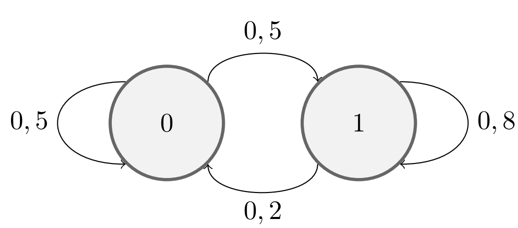
Par récurrence immédiate $\Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} P^n$

Régime permanent

$\exists ? \lim_{n \to +\infty} \Pi_j^{(n)} = \Pi_j$
$\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_j, ...)$ distribution stationnaire

Remarque : Π sera solution de $\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \Pi(I - P) = 0 \\ ||\Pi||_1 = 1 = \sum_{i \in E} \Pi_i \end{cases}$ Le système linéaire est lié.

Exemple :



$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad \text{Donc} \quad \begin{cases} \Pi_0 = 0,5\Pi_0 + 0,2\Pi_1 \\ \Pi_1 = 0,5\Pi_0 + 0,8\Pi_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \Pi_0 = \frac{2}{7} \\ \Pi_1 = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Propriété (des états) d'une CMTD

Irréductibilité : Une CMTD homogène sera dite irréductible si le graphe associé est fortement connexe.
Pour vérifier si un graphe est fortement convexe, on utilise l'algo de <u>fermeture transitive</u>.

$$M = \left(m_{ij}\right) \quad \begin{matrix} m_{ij} = 1 \text{ si } p_{ij} > 0 \\ m_{ij} = 0 \text{ si } p_{ij} = 0 \end{matrix}$$

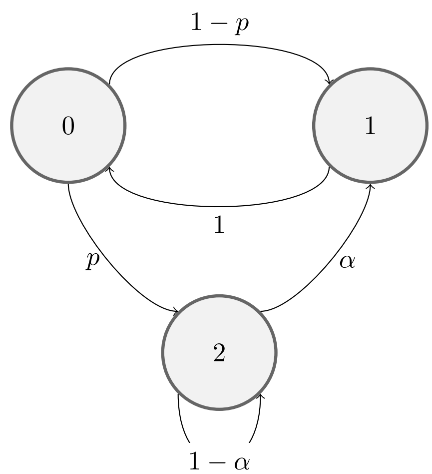
$$M^2 = \left(m_{ij}^{(2)}\right)$$

$$S^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} M^j$$

Problème : Complexité algorithmique et ne s'applique qu'à des graphes comportant un nombre fini d'états.
Dans la pratique, on saura par construction du modèle si le graphe associéà la CMTD est fortement convexe ou pas.

Périodicité : On appelle périodicité d'un état j d'une CMTD homogène k_j = PGCD (longueur des cycle relatif à j)
$k_j = 1,\ j$ est dit apériodique
$k_j > 1,\ j$ est dit périodique de période k_j
Si tout les état sont périodiques de même période, la chaine est dite périodique. Si tout les états sont apériodiques elle est dite apériodique.

Exemple :



$$\begin{matrix} 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Pour que le graphe soit fortement connexe il faut que $p \neq 0,\ \alpha \neq 0$
Cette condition est suffisante, on trouve alors des chemins à partir de n'importe quel sommet du graphe vers n'importe quel autre.
En considérant $p > 0,\ \alpha > 0$, on regarde la périodicité de l'état "2" dans le cas où :

- $\alpha \neq 1$: 2-2 cycle de longueur 1 $\Longrightarrow$ "2" est apériodique
- $\alpha = 1$ 2-1-0-2 cycle de longueur 3 mais si $p \neq 1$ alors 2-1-0-1-0-2 qui est un cycle de longueur 5 $\Longrightarrow$ "2" est apériodique.

États récurrents et transitoires : Pour un état d'un CMTD homogène, on note :

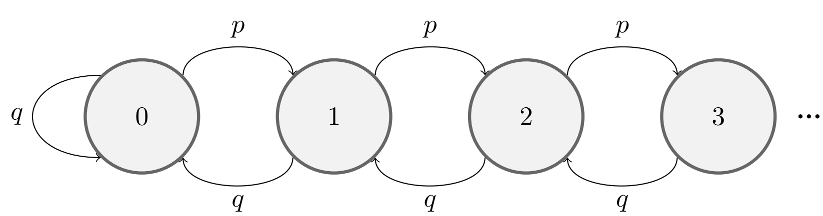
$$f_j^{(k)} = \mathbb{P}(X_{n+k} = j,\ X_{n+k-1} \neq j, ...,\ X_{n+1} \neq j \mid X_{n+1} = j)$$
$$f_j = \sum_{k=1}^{+\infty} f_j^{(k)}$$

Si $f_j = 1$, l'état j est dit *récurrent*.
$f_j < 1$, l'état j est dit *transitoire*.

États récurrents nuls et états récurrents non nuls : Pour un état récurrent d'un CMTD homogène, on note $M_j = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_j^{(k)}$ le temps moyen du 1^{er} retour en j.

Si $M_j < +\infty$, l'état j est dit *récurrent non nul*.
$M_j \to +\infty$, l'état j est dit *récurrent nul*.

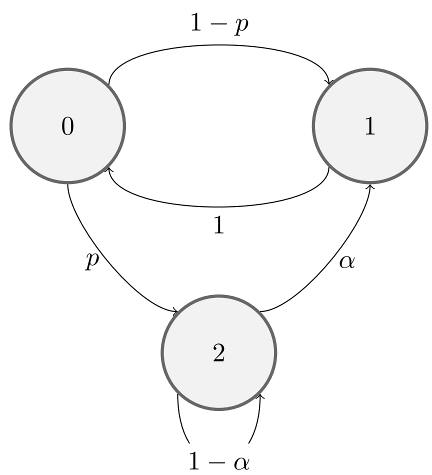
Exemple :



$$\begin{cases} p + q = 1 \\ 0 \leq p \leq 1 \ (0 \leq q \leq 1) \end{cases}$$

Si p = 0 ou p = 1 chaine non irréductible.
$p < q$ $(p < 0,5)$ les états sont récurrents non nuls.
$p = q$ $(p = 0,5)$ les états sont récurrents nuls.
$p > q$ $(p > 0,5)$ les états sont transitoires.

Exemple fil rouge :



$$f_1^{(1)} = 0$$
$$f_1^{(2)} = 1 - p$$
$$f_1^{(3)} = p\alpha$$
$$f_1^{(4)} = p(1-\alpha)\alpha$$
$$f_1^{(k+3)} = p(1-\alpha)^k\alpha$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (1-p) + p\alpha\{1 + (1-\alpha) + ... + (1-\alpha)^k + ...\} \\ &= (1-p) + \frac{p\alpha}{\alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons que "p" est récurrent.
De plus :

$$M_1 = (1-p) + p\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(1-\alpha)^k + 2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\alpha)^k \right\}$$

Or

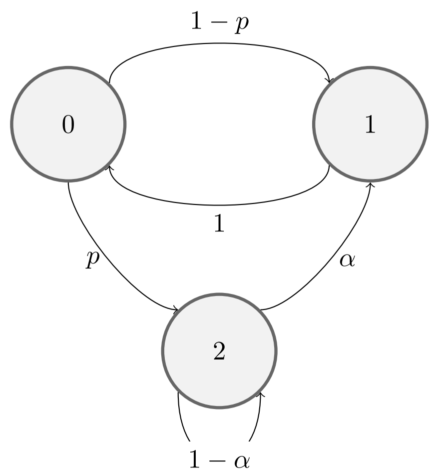
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\beta^k &= \frac{d}{d\beta}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^{k+1} + 1\right) \\ &= \frac{d}{d\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^k \\ &= \frac{d}{d\beta}\frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{(1-\beta)^2} \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons que $\boxed{M_1 = 2 + \frac{p}{\alpha}}$.

Propriété admise : Les états d'un CMTD homogène et irréductibles sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tous périodiques de même période} \\ \text{ou} \\ \text{tous apériodiques.} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tous récurrents nuls,} \\ \text{tous récurrents non nuls} \\ \text{ou} \\ \text{tous transitoires} \end{array} \right.$$

Illustration périodicité : Chaîne irréductible, il existe un chemin de i à j C_{ij} et un chemin de j à i C_{ji}
Soit C_i un cycle quelconque autour de i (multiple de k_i)



$$C_{ji}\|C_{ij} \text{ cycle autour de j} \Rightarrow |C_{ji}| + |C_{ij}| \text{ multiple de } k_j$$
$$C_{ji}\|C_i\|C_{ij} \text{ cycle autour de j} \Rightarrow |C_{ji}| + |C_i| + |C_{ij}| \text{ multiple de } k_j$$
$$\longrightarrow |C_j| \text{ multiple de } k_j \text{ donc } k_i \text{ multiple de } k_j$$

De façon symétrique k_j multiple de $k_i \Longrightarrow \boxed{k_i = k_j}$

Propriété (admise) : Les états d'un CMTD irréductible qui comporte un nombre fini d'états sont tous récurrents non nuls.

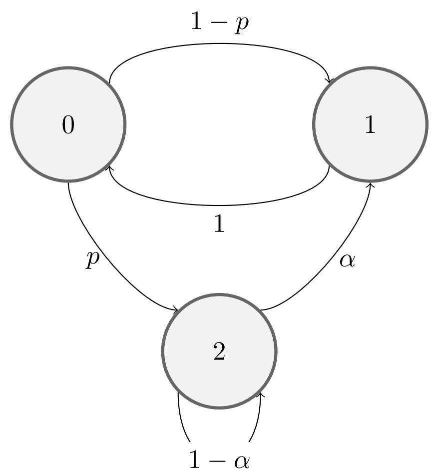
Définition : Un état d'un CMTD homogène irréductible récurrent non nul et apériodique est dit ergodique. Si tous les états sont ergodiques, la chaîne est erodique.

Théorème (admis) : Pour une chaîne, il y a convergence quand $n \to +\infty$ des Π_n vers des quantités > 0 indépendamment de $\Pi^{(0)}$, Π est la solution positive de $\left\{\begin{array}{l}\Pi P = \Pi \\ |\Pi| = 1\end{array}\right.$ $, \Pi_j = \dfrac{1}{M_j}$. Dans tous les cas n la chaîne est irréductible il y a convergence des $\Pi_j^{(n)}$, mais si apériodiquement les états sont récurrents, nuls ou transitifs $\Pi_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Corrolaire : Une chaine irréductible et apériodique telle que $\left\{\begin{array}{c}\Pi P = \Pi \\ |\Pi| = 1\end{array}\right.$ admet une solution strictement positive est ergodique.

Autre conséquence : Une chaine irréductible et apériodique qui comporte un nombre fini d'état est ergodique

Retour à l'exemple :



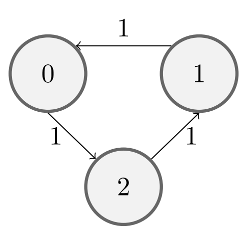
$0 < p\alpha < 1$ car iréductible et apériodique
Elle est alors ergodique

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ |\Pi| = 1 \end{cases} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Pi_0 = \Pi_1 \\ \Pi_1 = (1-p)\Pi_0 = \alpha\Pi_2 \\ \Pi_2 = p\Pi_0 + (1-\alpha)\Pi_2 \\ \Pi_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases} \quad \text{Donc} \begin{cases} \Pi_0 = \Pi_1 = \dfrac{\alpha}{2\alpha + p} \\ \Pi_2 = \dfrac{p}{2\alpha + p} \end{cases}$$

Ainsi $M_1 = 2 + \frac{p}{\alpha} = \frac{1}{\Pi_1}$

Problèmes posés par la périodicité



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- irréductible
- $M_0 = M_1 = M_2 = 3$, les états sont récurrent non nuls
- $\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ |\Pi| = 1 \end{cases}$ et $\Pi_1 + \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{3}$

$P_k^{(n)}$ = proportion de temps passé dans l'état k au bout de n unité de temps (en partant de l'état 0)

$$\begin{array}{lll}
P^{(1)} = (1,0,0) & P^{(4)} = (\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}) & \qquad \Pi^{(0)} = (\Pi_0^{(0)},\Pi_1^{(0)},\Pi_2^{(0)}) = \Pi^{(3)} = \Pi^{(3k)} \\
P^{(2)} = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) & P^{(5)} = (\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}) & \qquad \Pi^{(1)} = (\Pi_1^{(0)},\Pi_2^{(0)},\Pi_0^{(0)}) = \Pi^{(4)} = \Pi^{(3k+1)} \\
P^{(3)} = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & P^{(6)} = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) & \qquad \Pi^{(2)} = (\Pi_2^{(0)},\Pi_0^{(0)},\Pi_1^{(0)}) = \Pi^{(5)} = \Pi^{(3k+2)}
\end{array}$$

$\Pi^{(n)}$ ne converge pas quand $n \to +\infty$.

Ainsi la chaine n'est pas ergodique et $\Pi_j^{(n)} = P(X_n = j)$

Chapitre 2 : Chaine de Markov à temps continu

Définition : Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ à temps continu et à espace d'état discret E sera dit Chaine de Markov à temps continu si :
$\forall (t_1, ..., t_n, t)\ t_1 < t_2 < ... < t_n < t\ \forall (i_1, ..., i_n, j) \in E^{(n+1)}$

$$\mathbb{P}(X_t = j | X_{t_n} = i_n, ..., X_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(X_t = j | X_{t_n} = i)$$

Définition : Une CMTC sera dite homogène si $\forall (s, t, n) \in \mathbb{R}_+^3\ s < t$, $\forall n > 0$ et $\forall (i, j) \in E^2$

$$\mathbb{P}(X_{t+n} = j | X_{s+u} = i) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i) = p_{ij}(t - s)$$

$p_{ij}(t) =$ probabilité de transition de i à j pour une durée t
$P(t) = (p_{ij}(t))$ matrice de transition sur une duréent

Evolution d'une CMTC homogène :

$\Pi_j(t) = \mathbb{P}(X_t = j)$
$\Pi(t) = (\Pi_1(t), ..., \Pi_j(t), ...)$
Soit $\Pi(0)$ la distribution à t = 0
$\Pi(t) = \Pi(0)P(t)$
$\Pi(t+h) = \Pi(t)P(h)$

$$\frac{\Pi(t+h) - \Pi(t)}{h} = \Pi(t)\left(\frac{P(h) - I}{h}\right)$$

$$\Pi'(t) = \Pi(t) \lim_{h \to 0} \left(\frac{P(h) - I}{h}\right)$$

$Q = \lim_{h \to 0} \dfrac{P(h) - I}{h}$ générateur infinitésimal

$i \neq j, q_{ij} = \lim_{h \to 0} \dfrac{p_{ij}(h)}{h}$

Taux de translation de i à j

$q_{ii} = \lim_{h \to 0} \dfrac{p_{ii} - 1}{h}$

$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(h)$

$\Rightarrow q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{j \in E} q_{ij} = 0, \text{ la matrice Q admet 0 comme valeur propre}$$

Représentation d'une CMTC :

- par son générateur infinitésimal Q
- par un graphe orienté valué :
  - sommets = E
  - (i,j) arc du graphe si $q_{ij} > 0$
  - le poids associé est q_{ij}

Exemple :

Schéma

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Régime permanent :

$$\exists ? \lim_{t \to +\infty} \Pi_j(t) = \Pi_j, \Pi = (\Pi_1, ..., \Pi_j, ...) \text{ et } \Pi'(t) = \Pi(t)Q$$

s'il y a convergence alors : $\rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 0 & = MQ \\ \|\Pi\| & = 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -\lambda\Pi_0 + \mu\Pi_1 & = 0 \\ \lambda\Pi_0 - \mu\Pi_1 & = 0 \\ \Pi_0 + \Pi_1 & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \Pi_0 & = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} \\ \Pi_1 & = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{array} \right.$

Classification des états des CMTC

Définition : Si le graphe associé est fortement connexe, la chaîne est dite irréductible.

Définition : Pour un état d'une CMTC, on note $F_j(t) = \mathbb{P}(\text{le } 1^{\text{er}} \text{ retour ait lieu avant t})$
Si $\lim_{t \to +\infty} F_j(t)$ $= 1$, j est dit récurent
< 1, j est dit transitoire

Définition : Pour l'état récurent on défini :

$$M_j = \int_{t=0}^{+\infty} t dF_j(t)$$

Si $M_j < +\infty$, j est dit récurrent normal
Si $M_j \rightarrow +\infty$, j est dit réccurent nul

Exemple :

$$\lambda > 0, \mu > 0 \rightarrow \text{irredutible}$$

Schéma

Propriété (admise) : Les état d'une CMTC irréductible sont soit :

- tous récurrent non nuls
- tous récurrent nuls
- tous transitoires

Propriété (admise) : Les état d'une CMTC irréductible qui comporte un nombre fini d'états sont tous récurrents non nul

Définition : Un état récurrent non nul d'une CMTC irréductible est dit ergodique. Si tous les états sont ergodiques la chaîne est ergodique.

Théorème (admis) : Pour une CMTC ergodique, il y a convergence $\Pi_j(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \Pi_j$,
Π solution positive de $\left\{ \begin{array}{l} \Pi Q = 0 \\ |\Pi| = 1 \end{array} \right. , \ \forall \ \Pi(0)$
Dans tous les cas, si la chaine est irréductible, il y a convergence des $\Pi_j(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$, mais si les états sont récurrents nuls ou transitoires. $\Pi_j(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Corollaire : Pour une CMTC irréductible si $\left\{ \begin{array}{l} \Pi Q = 0 \\ |\Pi| = 1 \end{array} \right.$ admet une solution > 0, la chaine est ergodique.

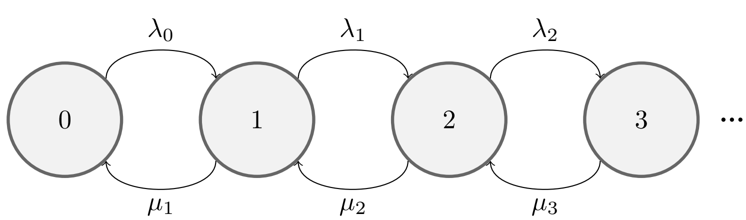
Evolution d'une CMTC entre t et t+dt

$$\begin{aligned}
\Pi'(t) &= \Pi(t)Q \\
\Pi_j(t+dt) &= \Pi_j(t) + \Pi'_j(t)dt + o(dt) \\
&= \Pi_j(t) + \sum_{i\in E} \Pi_i(t) q_{ij} dt + o(dt) \\
&= (1 + q_{jj}dt)\Pi_j(t) + \sum_{i\neq j} q_{ij}dt\ \Pi_i(t) + o(dt)
\end{aligned}$$

Dans la pratique, pour montrer qu'un processus stockastique est une CMTC, on vérifie que la seule connaissance de l'état du processus à t permet de déterminer son évolution entre t et t+dt

Exemple

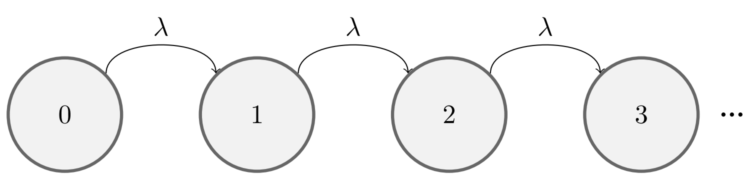
Exemple 1 : Les processus de naissance et de mort
C'est une CMTC telle que :
$q_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$



$q_{i,i+1} = \lambda_i$ taux de naissance dans l'état i
$q_{i,i-1} = \mu_i$ taux de mort dans l'état i

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & & \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Processus de Poisson
Le processus de Poisson, c'est un processus de naissance pur à taux de naissance constant λ
C'est un processus de comptage, on compte les naissances à partir de t=0, $\Pi(0) = (1, 0, ..., 0)$



$\lambda > 0$; ce processus n'est pas ergodique. On regarde le régime transitoire $\Pi_j(t) = P(X_t = j)$ il y a eu j naissance entre 0 et t

$$
\begin{aligned}
\Pi_0(t+dt) &= \Pi_0(t)(1-\lambda dt)+o(dt)\\
\Pi_0'(t) &= \lambda\Pi_0(t)\\
\Pi_1(t+dt) &= \Pi_0(t)\lambda dt+\Pi_1(t)(1-\lambda dt)+o(dt)\\
\Pi_1'(t) &= \lambda\Pi_0(t)-\lambda\Pi_1(t)\\
\Pi_k(t+dt) &= \Pi_{k-1}(t)\lambda dt+\Pi_k(t)(1-\lambda dt)+o(dt)\\
\Pi_{k'}(t) &= \lambda\Pi_{k-1}(t)-\lambda\Pi_k(t)
\end{aligned}
$$

On a : $\left\{\begin{array}{l}\Pi_0(t)=Ke^{-\lambda t}\\ \Pi_0(0)=1\\ \Pi_0(t)=e^{-\lambda t}\end{array}\right. \implies K=1$

Donc $\Pi_1(t)=K(t)e^{-\lambda t}$

Et $e^{-\lambda t}K'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

Donc $K'(t)=\lambda \implies \left\{\begin{array}{l}K(t)=\lambda t+c\\ K(0)=0\end{array}\right. \implies K(t)=\lambda t$

Ainsi, $\begin{array}{l}\Pi_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}\\ \Pi_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\end{array}$

Donc $\Pi(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t)$ et

$E(\Pi(t))=\lambda t$

$Var(\Pi(t))=\lambda t$

Durées entre les naissances $\widetilde{E_1}$: temps avant la première naissance

schéma ! ! !

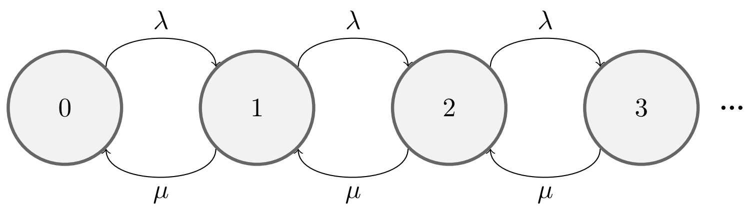
$$\mathbb{P}(\widetilde{t_1}>t)=\mathbb{P}(X(t)=0)=e^{-\lambda t}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\widetilde{t_1}}(t) &= 1-e^{-\lambda t}\\
f_{\widetilde{t_1}}(t) &= \lambda e^{-\delta t}\\
\widetilde{t_1} &\sim e^{-\lambda}\\
E(\widetilde{t_1}) &= \frac{1}{\lambda}\\
var(\widetilde{t_1}) &= \frac{1}{\lambda^2}\\
C^2_{\widetilde{t_1}} &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\widetilde{t_2}>t+x|X(t)>1) &= P(X(t+x)=1|X(t)=1)\\
&= P(X(x)=0|X(0)=0)\\
&= P(X(x)=0)\\
&= e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

Temps entre naissances suit une loi exponentielle de paramètre λ

Exemple 3 :



Chaine irréductible et $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & ... \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \Pi Q = 0 \\ |\Pi| = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda \Pi_0 + \mu \Pi_1 = 0 \\ \lambda \Pi_0 - (\lambda+\mu)\Pi_1 + \mu \Pi_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda \Pi_{k-1} - (\lambda+\mu)\Pi_k + \mu \Pi_{k+1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \Pi_k = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_0 \\ \Pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \Pi_0 \\ \vdots \\ \Pi_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu}\Pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \Pi_0 \\ \vdots \\ \Pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + ...\right) = 1 \end{cases}$$

La série converge ssi $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

Ainsi

$$\Pi_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad \Pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad \lambda < \mu$$

Méthode des coupes : Soit une CMTC ergodique à espace d'état E
$\forall\, C$ une coupe dans le graphe :
$C = (E_1, E_2), \quad E_1 \cup E_2 = E$
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$\sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_2} \Pi_i q_{ij} = \sum_{i \in E_1} \sum_{j \in E_2} \Pi_j q_{ji}$$

Remarque : L'écriture $\Pi Q = 0$ est une méthode de coupe

$$\begin{aligned} \forall i \in E, \qquad\qquad & \sum_{j \in E} \Pi_j q_{ji} = 0 \\ q_{ii}\Pi_i + & \sum_{j \neq i} \Pi_j q_{ji} = 0 \\ -\sum_{j \neq i} q_{ij}\Pi_i + & \sum_{j \neq i} \Pi_j q_{ji} = 0 \\ & \sum_{j \neq i} \Pi_j q_{ji} = \sum_{j \neq i} \Pi_i q_{ij} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \{\{i\}, E \backslash \{i\}\}$$

$$
\begin{aligned}
\forall i \in E_1, \qquad \qquad & \sum_{j\in E} \Pi_j q_{ji} = 0 \\
& \sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E} \Pi_j q_{ji} = 0 \\
\sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E_2} \Pi_j q_{ji} + & \sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E_1} \Pi_j q_{ji} = 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E_1} \Pi_j q_{ji} &= \sum_{j\in E_1}\sum_{i\in E_1} \Pi_i q_{ij} \\
&= \sum_{i\in E_1} \Pi_i \sum_{j\in E_1} q_{ij}
\end{aligned}
$$

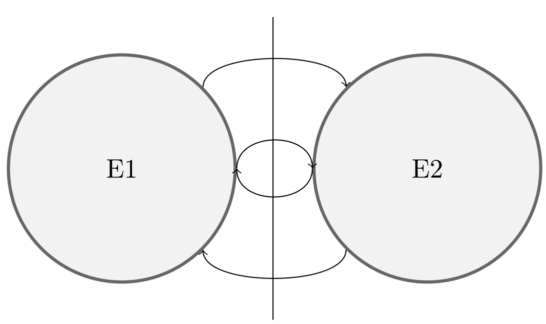
et

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in E_1} q_{ij} &= q_{ii} + \sum_{\substack{j \in E_1 \\ j \neq i}} q_{ij} \\
&= -\sum_{j\neq i} q_{ij} + \sum_{\substack{j \in E_1 \\ j \neq i}} q_{ij} \\
&= -\sum_{j\in E_2} q_{ij}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E_2} \Pi_i q_{ij} = \sum_{i\in E_2}\sum_{j\in E_2} \Pi_j q_{ji}
$$

Application de la méthode des coupes :
Schéma :



$\lambda\Pi_0 = \mu\Pi_1$
$\lambda\Pi_1 = \mu\Pi_2$
...
$\lambda\Pi_{k-1} = \mu\Pi_k$
...

Chapitre 3 : Files d'attentes simples

Définition : Une file d'attente simple est composé d'un flux de clients qui demandent un certain service rendu par un certain nombre de guichets (ou serveurs) mais qui suite à des restrictions sur le nombre de serveurs ou le type de service demandé sont amenés à attendre.
On suppose qu'un client n'ait servi que par un seul serveur à la fois et qu'un serveur n'ait au plus qu'un client à la fois

Notation de Kendall des files d'attentes A/B/n/F/K/N
A : loi des arrivées des clients

- M : Poisson (Memory / em)
- D : Constante (déterministe)
- G : Générale

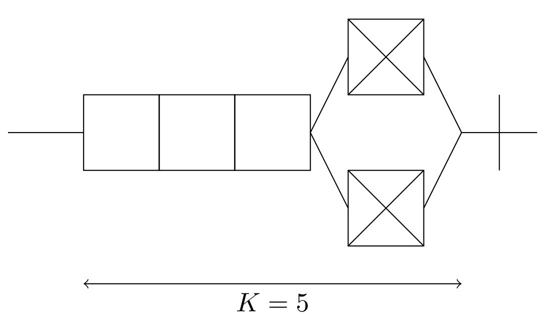
B : loi de la durée des services

- M : Exponentielle
- D : Constante (déterministe)
- G : Générale

n : nombre de serveurs
Ces 3 paramètres sont obligatoires
F : technique d'ordonnancement

- FCFS : First Come First Served (appelée parfois à tord FIFO)
  C'est la valeur par défaut
- LCFS : Last Come First Served
- Priority Queweing
- Round Robin
- Early Deadline First
- Quantum
- Processus Sharing PS (Quantum $\to 0$)

K : capacité de la file, par défaut ∞

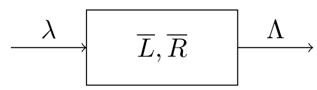


N : taille de la population. Par défaut ∞. C'est le nombre de clients qui peuvent être ammenés à venir dans la file

exemple de limitation :
Cellule d'un réseau mobile
N : nombre d'utilisateur dans la cellule
Commutateur téléphonique
Contrôle de flux

Analyse Opérationnelle :

La loi de Little

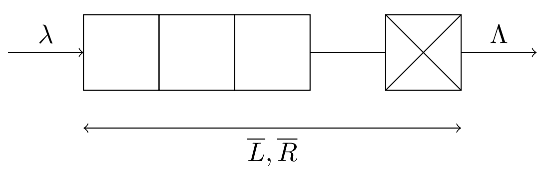


λ : débit d'arrivée des requêtes
Λ : débit de sortie des requêtes
$\overline{\mathrm{L}}$: nombre moyen de requêtes dans le système
$\overline{\mathrm{R}}$: temps moyen de réponses

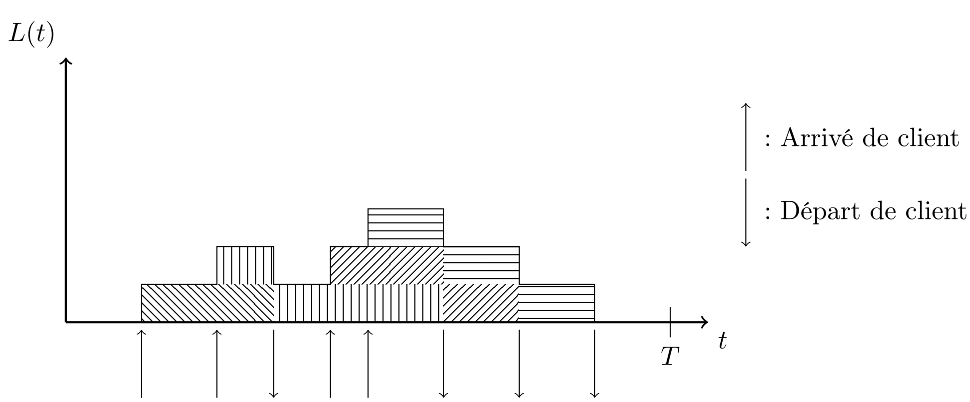
Loi de little : Sous des hypothèses très générales de stabilité (par exemple d'ergodicité). Le système se vide régulièrement

$\boxed{\overline{\mathrm{L}} = \Lambda \overline{\mathrm{R}}}$

Illustration :



$L(t)$ = nombre de clients dans la file à t
$L(0) = L(T) = 0$



$\overline{\mathrm{L}_T}$ = nombre moyen de clients entre 0 et T
$\overline{\mathrm{R}_T}$ = nombre moyen de réponse des clients traités entre 0 et T
M_{T} = nombre de clients servis entre 0 et T

Λ_T = débit de sortie entre 0 et T
$\Lambda_T = \frac{M_T}{T}$
$\overline{\mathrm{L}_T} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} L(t)dt$
r_i = temps de réponse des clients i

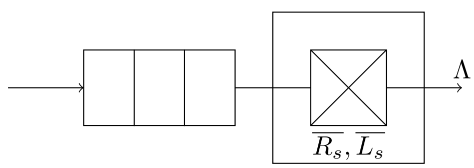
$$\int_{t=0}^{T} L(t)dt = \sum_{i=1}^{M_T} r_i$$

$$\overline{R_T} = \frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{M_T} r_i = \frac{1}{M_T}\int_{t=i}^{T} L(t)dt$$

$$\overline{L_T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{M_T} r_i = \frac{M_T}{T}\frac{1}{M_T}\sum_{i=1}^{M_T} r_i$$

$$\boxed{\overline{L_T} = \Lambda_T \overline{R_T}}$$

Théorème de Chang-Lavenberg : Application de la loi de Little au service d'une file simple.



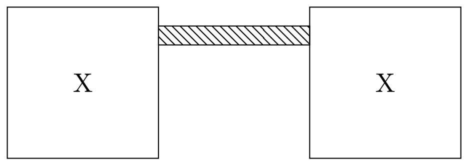
U : taux d'occupation du serveur

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{L}_S} &= \Lambda\overline{\mathrm{S}} \\ \overline{\mathrm{L}_S} &= 1.U + 0.(1-U) \\ \overline{\mathrm{L}_S} &= U \\ U &= \Lambda\overline{\mathrm{S}} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Lambda \leq \frac{1}{\overline{\mathrm{S}}}}$

Le débit de sortie ne peut pas être supérieur à l'inverse du temps moyen de service. Cela permet par exemple de déterminer des goulot d'étranglement

Modèles de base pour les réseaux à commutation de paquets



File M/M/1

- Arrivées de paquets Poissonnienne λ
- Temps de service exponentiel de trame μ
- Capacité ∞
- FCFS (First Come First Service)
- Taille de la population ∞
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E(S)$ charge de la file

Critères de performances :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nombre moyen de paquets dans la file}\\ \text{Le temps moyen de réponse}\end{array}\right\}\text{en régime permanent.}$$

L(t), le nombre de paquets dans la file à $t(L(t), t \geq 0)$ est une CMTC du type processus de naissance et de mort

Arrivées de paquets

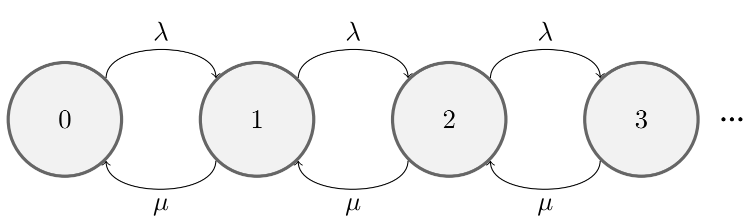
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t+dt) &= \lambda dt + o(dt)\\
\mathbb{P}(0 \text{ arrivée entre } t \text{ et } t+dt) &= 1 - \lambda dt + o(dt)\\
\mathbb{P}(> 1 \text{ arrivées entre } t \text{ et } t+dt) &= o(dt)
\end{aligned}$$

Fins de service, départ de paquet

$\mathbb{P}$(1 service en cours à t, se termine entre t et t+dt) $= \mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(1 service en cours à t ne se termine pas entre t et t+dt) $= 1 - \mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(0 départ entre t et t+dt $|L(t) = k > 0) = 1 - \mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(1 départ entre t et t+dt $|L(t) = k > 0) = \mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(plus d'un départ entre t et t+dt$|L(t) = k > 0) = o(dt)$
$\mathbb{P}(L(t+dt) = k-1|L(t) = k > 0) = (\mu dt + o(dt))(1 - \lambda dt + o(dt))\mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}(L(t+dt) = k+1|L(t) = k > 0) = (\lambda dt + o(dt))(1 - \mu dt + o(t))\mu dt + o(dt)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L(t+dt) = k|L(t) = k) &= (1 - \lambda dt + o(dt))(1 - \mu dt + o(dt)) + (\lambda dt + o(dt))(\mu dt + o(dt))\\
&= 1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt)
\end{aligned}$$

La seule connaissance de L(t) permet de connaitre l'évolution entre t et t+dt et entre t et t+dt, au plus un seul départ et/ou une seule arrivée
$\Rightarrow (L(t), t \geq 0)$ CMTC de type processus de naissance et de mort



$\lambda > 0 \quad \mu > 0$ Ergodique ssi $\lambda < \mu$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \\
\Pi_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^k \left(1 - \rho\right) \\
E(L) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\Pi_k \\
&= (1-\rho) \sum_{k=1}^{+\infty} k\rho^k \\
&= (1-\rho)\rho \sum_{k=1}^{+\infty} k\rho^{k-1} \\
&= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(L) = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

$E(L) = \Lambda E(R)$

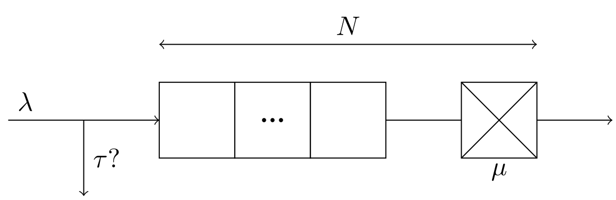
$$\left.\begin{aligned}
U &= \Lambda E(S) = \frac{\Lambda}{\mu} \\
U &= 1 - \Pi_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Lambda = \lambda$$

$E(L) = \lambda E(R)$

$$E(R) = \frac{1}{\lambda} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\boxed{E(R) = \frac{1}{\mu - \lambda}}$$

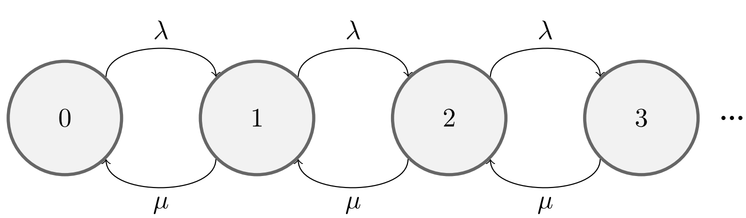
File M/M/1/N



$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$\lambda > 0, \quad \mu > 0$

$(L(t), t \geq 0)$ CMTC de type processus de naissance et de mort



$$
\begin{cases}
\text{Chaine ergodique} & \\
\lambda\Pi_0 = \mu\Pi_1 & \Pi_1 = \rho\Pi_0 \\
\lambda\Pi_1 = \mu\Pi_2 & \Pi_2 = \rho\Pi_1 = \rho^2\Pi_0 \\
\vdots & \\
\lambda\Pi_{N-1} = \mu\Pi_N & \Pi_N == \rho^N\Pi_0 \\
\sum_{k=0}^{+\infty}\Pi_k = 1 & \Pi_0 = (1+\rho+...+\rho^N) = 1
\end{cases}
$$

$$
\rho \neq 1 : \ \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}; \quad \Pi_k = \rho^k\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}
$$

$$
\rho = 1 : \ \Pi_0 = ... = \Pi_N = \frac{1}{N+1}
$$

Probabilité qu'il y ait une perte si il y a un client qui arrive et que la file soit pleine.

PASTA : Poisson Arrivals See Time Averages :

$$
\begin{aligned}
\tau = \Pi_N = \ & \rho^N\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\
& = \frac{1}{N+1} & \text{si } \rho = 1
\end{aligned}
$$

<u>Preuve :</u>

$$
\begin{aligned}
X &= \lambda\Pi_N \\
\tau &= \frac{X}{\lambda} = \Pi_N \\
\Lambda &= \mu(1-\Pi_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{\lambda-\Lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\Lambda}{\lambda} \\
\tau &= 1 - \frac{\mu}{\lambda}(1-\Pi_0) = 1 - \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}\right) \\
&= 1 - \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}} \\
&= \frac{\rho^N-\rho^{N-1}}{1-\rho^{N+1}}
\end{aligned}
$$

Donc
$$
\begin{aligned}
\tau(\rho, N) &= \rho^N\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\
&= \frac{1}{N+1} & \text{si } \rho = 1
\end{aligned}
$$

fonction croissante de ρ

fonction décroissante de N

$$
\lim_{\substack{N\to\infty \\ \rho=1}} \tau(\rho, n) = 0
$$

$$
\lim_{\substack{N\to\infty \\ \rho<1}} \tau(\rho, N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\rho-1}{\rho - \frac{1}{\rho^N}} = \frac{\rho-1}{\rho}
$$

Dimensionnent : $\rho, \tau^*, \quad \rho < 1$

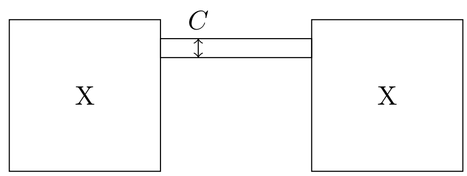
$\tau(\rho, N) = \rho^N \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \leq \tau^*$

$x = \rho^N$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\frac{x(1-\rho)}{1-x\rho} &\leq \tau^* \\
x(1-\rho) &\leq \tau^*(1-x\rho) \\
x(1-\rho+\rho\tau^*) &\leq \tau^* \\
\rho^N = x &\leq \frac{\tau^*}{1-\rho+\rho\tau^*} \\
N\log\rho &\leq \log\tau^* - \log(1-\rho+\rho\tau^*) \\
N &\geq \frac{\log\tau^* - \log(1-\rho+\rho\tau^*)}{\log\rho} \text{ car } \rho < 1 \text{ donc } \log\rho < 0 \\
N^* &= \frac{\log\tau^* - \log(1-\rho+\rho\tau^*)}{\log\rho}
\end{aligned}
$$

Modèle de base pour des réseaux à commutations de circuits



Arrivées Poissonnienne de taux λ
Durée de communication exponentielle de taux μ

M/M/C/C

L(t) = nombre d'appels en cours à t
(L(t), t $\geq$ 0) est une CMTC de type processus de naissance et de mort

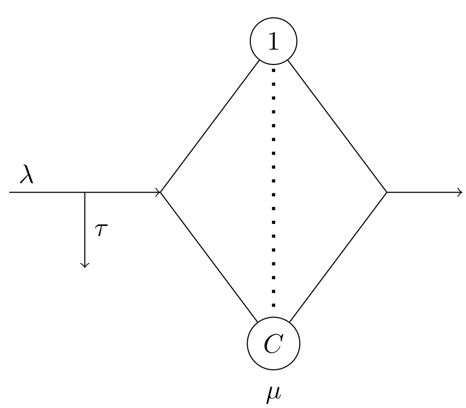
Arrivées d'appels :
$\mathbb{P}$(1 arrivée entre t et t+dt) $= \lambda dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(0 arrivée entre t et t+dt) $= 1 - \lambda dt + o(dt)$

Fins d'appel :
$\mathbb{P}$(1 appel en cours se termine entre t et t + dt) $= \mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(1 appel en cours à t ne se terminant pas entre t + dt) $= 1 - \mu dt + o(dt)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{1 fin d'appel entre t et t+dt} \mid \text{L(t)} = \lambda > 0) &= \binom{k}{1}(\mu dt + o(dt))(1 - \mu dt + o(dt)) \\ &= k\mu dt + o(dt) \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$(0 fin d'appel entre t et t+dt $\mid L(t) = \lambda > 0) = (1 - \mu dt + o(dt))^k = 1 - k\mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(2 fin d'appel entre t et t+dt $\mid L(t) = \lambda > 2) = \binom{k}{2}(\mu dt + o(dt))^2(1 - \mu dt + o(dt))^{k-2} = o(dt)$

(L(t), t $\geq$ 0) CMTC de type processus de naissance et de mort



$\lambda > 0 \qquad \mu > 0$, chaine ergodique

$\rho = \dfrac{\lambda}{\rho} = \lambda E(S)$ charge en Erlang
Ce qui importe, c'est la relation entre ρ et C

$$\rho_N = \frac{\rho}{C} \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \Pi_0 = \mu \Pi_1 & \Pi_1 = \rho \Pi_0 \\ \lambda \Pi_1 = \mu \Pi_2 & \Pi_2 = \rho \Pi_1 = \rho^2 \Pi_0 \\ \vdots & \\ \lambda \Pi_{C-1} = C\mu \Pi_C & \Pi = \dfrac{\rho}{C} \Pi_{C-1} = \dfrac{\rho^C}{C!} \Pi_0 \\ \sum\limits_{k=0}^{C} \Pi_k = 1 & \Pi_0 (1 + \rho + ... + \dfrac{\rho^C}{C!} = 1 \end{array} \right.$$

Donc

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{C} \dfrac{\rho^j}{j!}}; \quad \Pi_k = \frac{\rho^k}{k!} \Pi_0, \ C \leq k \leq 0$$

$$\boxed{\tau = \Pi_C = \frac{\dfrac{\rho^C}{C!}}{\sum\limits_{k=0}^{C} \dfrac{\rho^k}{k!}} \qquad \text{1}^{\text{re}} \text{ formule d'Erlang, Erlang-B, 1917}}$$

$$\begin{aligned} X &= \lambda \Pi_C \\ \tau &= \frac{X}{\lambda} = \Pi_C \\ \Lambda &= \sum_{k=0}^{C} k \mu \Pi_k = \mu E(L) \\ E(L) &= \sum_{k=0}^{C} k \Pi_k = \sum_{k=0}^{C} k \frac{\rho^k}{k!} \Pi_0 = \sum_{k=1}^{C} \frac{\rho^k}{(k-1)!} \Pi_0 = \rho \sum_{k=1}^{C} \frac{\rho^k - 1}{(k-1)!} \Pi_0 = \rho \sum_{k=0}^{C-1} \frac{\rho^k}{k!} \Pi_0 = \rho \sum_{k=0}^{C-1} \Pi_k \\ E(L) &= \rho (1 - \Pi_0) \\ \Lambda &= \mu E(L) = \mu \frac{\lambda}{\mu} (1 - \Pi_0) \\ \tau &= 1 - \frac{\Lambda}{\lambda} = 1 - (1 - \Pi_0) = \Pi_C \\ E(R) &= \tfrac{E(L)}{\Lambda} = \frac{1}{\mu} = E(S) \end{aligned}$$

E(R) = E(W) + E(S)
E(W) : temps moyen d'attente
E(S) : temps mouen de service
M/M/C/C $\rightarrow$ E(W) = 0

$$\boxed{E(R) = E(S) = \frac{1}{\mu}}$$

Files M/M/C/C/N, C < N

schéma ! !

N(t) = nb de communication en cours à t
(N(t), t $\geq$ 0) est une CMTC de type processus de naissance et de mort

Départ :
$\mathbb{P}$(1 fin de communication entre t et t +dt $|N(t) = k) = k\mu dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(0 fin de communication entre t et t +dt $|N(t) = k) = 1 - k\mu dt + o(dt)$

Arrivée :
$\mathbb{P}$(1 arrivée entre t et t +dt $|N(t) = k) = (N-k)\lambda dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(0 arrivée entre t et t +dt $|N(t) = k) = 1 - (N-k)\lambda dt + o(dt)$

schéma ! !

chaine ergodique et $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$\Pi_1 = N\rho\Pi_0$
$\Pi_2 = \dfrac{N-1}{2}\rho\Pi_1 = \dfrac{N(N-1)}{2}\rho^2\Pi_0$
$\Pi_C = \dfrac{N-C+1}{C}\rho\Pi_{C-1} = \binom{N}{C}\rho^C\Pi_0$
$\Pi_0\left(1 + N\rho, ..., \binom{N}{C}\rho^C\right) = 1$

$$\boxed{\Pi_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{C}\binom{N}{k}\rho^k}, \quad \Pi_j = \binom{N}{j}\rho^j\Pi_0}$$

$\Lambda_0 = \sum\limits_{k=0}^{C}(N-k)\lambda\Pi_k$
$X = (N-C)\lambda\Pi_C$
$\tau = \dfrac{X}{\Lambda_0} = \dfrac{(N-C)\lambda\binom{N}{C}\rho^C\pi_0}{\sum\limits_{k=0}^{C}(N-k)X\binom{N}{k}\rho^k\Pi_0}$
$(N-k)\binom{N}{k} = (N-k)\dfrac{N!}{(N-k)!k!} = \dfrac{N!}{(N-1-k)!k!} = N\dfrac{(N-1)!}{(N-1-k)!k!} = N\binom{N-1}{k}$
$\tau = \dfrac{N\binom{N-1}{C}\rho^C}{\sum\limits_{k=0}^{C}N\binom{N-1}{k}\rho^k} = \dfrac{\binom{N-1}{C}\rho^C}{\sum\limits_{k=0}^{C}\binom{N-1}{k}\rho^k}$

$$\boxed{\tau = \Pi_C^{(N-1)} < \Pi_C^{(N)}}$$

Chapitre 4 : Etude de la file M/G/1

Schéma !

$\rho = \lambda E(S)$ le charge
$E(S) < +\infty$
$E(S^2) < +\infty$
b : Densité de probabilité du temps de service

critères de performance
Temps de réponse E(R)
Nombre moyen de client E(L)

L(t) nombre de client dans la file à l'instant t
Et donc (L(t), t $\geq$ 0) est-il une chaine de Markov à temps continu ?

Arrivées :
$\mathbb{P}$(1 arrivée entre t et t+dt) = $\lambda dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(0 arrivée entre t et t+dt) = $1 - \lambda dt + o(dt)$

Départ :
$\mathbb{P}$(1 client en service à t termine son service entre t et t+ dt) =??
On n'en sait rien car on n'a pas la connaissance à t de la durée résiduelle de service $\alpha(t)$; s_i le temps de service du client i

Schéma !

$(L(t), \alpha(t), t \geq 0)$ est un processus markowien
$(\alpha(t), t \geq 0)$ à espace d'états continu les calculs sont assez long donc étude seulement à des intants particuliers (Méthode de la chaine incluse) comme par exemple aux instants d'arrivée et de départ des clients
Les instants les plus simples sont les instant de départ des clients car $\alpha(t) = 0$

Représentativité de ces instants d'observation
$A_k(t) = \mathbb{P}$(1 client arrivant à t trouve k clients dans la file) $\underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} a_k$
$D_k() = \mathbb{P}$(1 client partant à t laisse k clients dans la file) $\underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} d_k$
$\Pi_k(t) = \mathbb{P}\left(L(t) = k\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \Pi_k$

Propriété 1 (admise) : PASTA

$$\forall k, \forall t, \quad A_k(t) = \Pi_k(t) \Rightarrow a_k = \Pi_k$$

Propriété 2 (admise) : Si le système évolue par pas de ± 1 (on interdit les arrivées et les départs groupés

$$\forall k, a_k = d_k (\text{si les limites existent})$$

Illustration :

Schéma ! !

#	arrivées	départs
1	0	1
2	1	2
3	1	1
4	2	0

$$a_k^T = d_k^T \quad \forall k \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} a_k = d_k \quad \forall k$$

Conclusion : Si les limites existent alors :

$$a_k = d_k = \Pi_k \quad \forall k$$

Étude aux instants de départs :
q_n = nombre de clients dans la file quand le client n part
v_n = nombre de clients qui arrivent pendant le service du client n

Montrons que $(q_n, n \in \mathbb{N})$ est une CMTD

- si $q_n = 0, \quad q_{n+1} = v_{n+1}$ (personne dans la file dans directement servi donc à la sortie il y a dans la file seulement ceux qui sont arrivés entre temps)
- si $q_n > 0, \quad q_{n+1} = q_n - 1 + v_{n+1}$ (attentes donc a la sortie du paquet suivant, il y a en plus les paquets qui étaient déjà en attentes moins le paquet servi)

Donc $\boxed{q_{n+1} = q_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}} + v_{n+1}}$

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(v_n = k) &= \int_{\alpha=0}^{+\infty} \mathbb{P}(v_n = k | s_n = x) b(x) dx \\ &= \int_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x) dx \\ &= b_k\end{aligned}$$

Ainsi $(q_n, n \in \mathbb{N})$ CMTD

SCHÉMA !

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

Loin d'un processus de naissance et de mort

Équation de coupe :

$$\begin{cases} (1-b_0)d_0 = b_0 d_1 \\ (1-b_0-b_1)d_0 + (1-b_0-b_1)d_1 = b_0 d_2 \\ \vdots \\ (1-b_0 ... - b_k)(d_0 + d_1 + ... + d_{k-1} = b_0 d_k \end{cases}$$

On va juste déterminer les valeurs moyennes ie $\sum_{k=0}^{+\infty} k d_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \Pi_k$

$q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{q}$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{v}$
$q_{n+1} = q_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}} + v_{n+1}$

Donc

$$\begin{aligned}
&E(q_{n+1}) = E(q_n) - E\left(\mathbb{1}_{\{q_n>0\}}\right) + E(v_{n+1})\\
&E\left(\mathbb{1}_{\{q_n>0\}}\right) = \mathbb{P}(\tilde{q}>0) = 1-d_0 = 1-\Pi_0 = U = \Lambda E(S)\\
&E(v_1) = \int_{x=0}^{+\infty} E(v_n|s_n=x)b(x)dx = \lambda\int_{x=0}^{+\infty} xb(x)dx = \lambda E(S)\\
&\Rightarrow \Lambda = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_{\{\tilde{q}>0\}}) &= E(\tilde{v}) = \rho < 1\\
q_{n+1}^2 &= (q_n - \mathbb{1}_{q_n>0\}} + v_{n+1})^2\\
&= q_n^2 + \mathbb{1}_{q_n>0\}} + v_{n+1}^2 - 2q_n\cancel{\mathbb{1}_{q_n>0\}}} + 2q_nv_{n+1} - 2\mathbb{1}_{q_n>0\}}v_{n+1}\\
E(q_{n+1}^2) &= E(q_n^2) + E(\mathbb{1}_{q_n>0\}}) + E(v_{n+1}^2) - 2E(q_n) + 2E(q_n)E(v_{n+1}) - 2E(\mathbb{1}_{q_n>0\}})E(v_{n+1})\\
&\downarrow n\to+\infty\\
\cancel{E(\tilde{q}^2)} &= \cancel{E(\tilde{q}^2)} + E(\mathbb{1}_{\{\tilde{q}>0\}}) + E(\tilde{v}^2) - 2E(\tilde{q}) + 2E(\tilde{q})E(\tilde{v}) - E(\mathbb{1}_{\{\tilde{q}>0\}})2E(\tilde{v})\\
2E(\tilde{q})(1-\rho) &= 2\rho - 2\rho^2 + E(\tilde{v}^2) - E(\tilde{v})
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(\tilde{q}) = \rho + \frac{E(\tilde{v}^2)-E(\tilde{v})}{2(1-\rho)}} \text{ Formule de Pollaczel-Kinchin}$$

$$\begin{aligned}
E\left(v_n(v_n-1)\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\int_{x=0}^{=\infty}\frac{(dx)^k}{k!}e^{-\lambda x}b(x)dx\\
&= \int_{x=0}^{=\infty} e^{-\lambda x}b(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{(dx)^k}{k!}\right)dx\\
&= \int_{x=0}^{=\infty} e^{-\lambda x}b(x)(\lambda x)^2e^{+\lambda x}dx\\
&= \int_{x=0}^{=\infty} \lambda^2x^2b(x)dx\\
&= \lambda^2E(S^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(L) = E(\tilde{q}) = \rho + \frac{\lambda^2E(S^2)}{2(1-\rho}} \text{ formule de P-K}$$

$$C_S^2 = \frac{Var(s)}{E(S)^2} = \frac{E(S^2)}{E(S)^2} - 1 \quad \boxed{E(S) = \rho + \frac{\rho^2(1+C_S^2)}{2(1-\rho}}$$

Pour ρ donné c'est minimal quand Var(S) = 0 c'est à dire tous les paquet ont la même taille

$$E(L_{M/D/1}) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(2-\rho}{2(1-\rho)}$$
$$E(L_{M/M/1}) = \rho + \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si $\rho = \lambda E(S) < 1$
$E(L) = \rho + \dfrac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho} = \rho + \dfrac{\rho^2(1+C_S^2)}{2(1-\rho}$
$E(R) = \dfrac{E(L)}{\Lambda} = \dfrac{E(L}{\lambda}$
$E(R_{M/G/1}) = E(S) + \dfrac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho}(E(S) = E(R) + E(W))$

Pour un λ donné, le temps moyen de réponse est minimal quand var(S) = 0.
Pour obtenir les moments d'ordre supérieur, on élève l'équation d'évolution $q_{n+1} = q_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}} + v_{n+1}$ à la puissance 3,4...
On peut aussi passer par les transformées

$$z^{q_n+1} = z^{q_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}} + v_{n+1}}$$

$$E(z^{q_n+1}) = E(z^{q_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}}})E(z^{v_{n+1}})$$
$$E(z^{\tilde{q}_n+1}) = E(z^{\tilde{q}_n - \mathbb{1}_{\{q_n>0\}}})E(z^{\tilde{v}_{n+1}})$$
$$Q(z) = H(z)v(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\tilde{q} = k)z^k$$

Autre méthode
X_n = temps d'attente du client n
β_n = nombre de client quand n arrive
s_i = temps de service du client i
θ_n = temps résiduel de service quand n arrive

$$W_n = \theta_n + \sum_{n-\beta_n}^{n-1} s_i$$

Donc

$$E(W_n) = E(\theta_n) + E(\beta_n)E(S)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(W) = E(\theta) + E(L_W)E(S)$$

$E(\theta)$ = temps moyen résiduel de service
$E(L_W)$ = nombre moyen de clien en attente en régime permanant
$E(L_W) = \Lambda_W E(W) = \lambda E(W)$
$E(W) = \dfrac{E(\theta)}{1-\rho}$

Schéma ! ! !

M_T = nombre de client servi entre 0 et T

$\overline{\theta_T} = \frac{1}{T}\int\limits_{T=0}^{T} \alpha(t)dt = \frac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{M_T}\frac{s_i^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{M_T}{T}\frac{1}{M_T}\sum\limits_{i=1}^{M_T} s_i^2$

$E(\theta) = \frac{1}{2}\lambda E(S^2)$

$\boxed{E(W) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}}$

Chapitre 5 : Réseau de files d'attentes

Définition : Un réseau de files d'attentes est composé d'un certain nombre (K) de file d'attentes simples et de clients qui circulent entre ces files selon un certain algorithme de routage (déterministe, probabiliste, adaptatif...) On suppose qu'un client n'est que dans 1 seule file à la fois et que les transmissions entre les files instantanée.
On distingue les réseaux de files d'attentes ouverts dans lesquels des clients entrant, circulent et portent des réseaux de files d'attente fermés dans lesquels un nombre constant de client est présent dans le réseau.

Exemple de réseau ouvert : Les réseaux de Jackson

Définition : Un réseau de K files d'attentes ouvert sera dit réseau de Jackson

- arrivées poissonniennes de taux λ
- chacun des K-files
  - 1 serveur FCFS de capacité ∞
  - services exponentiels de taux μ_j
- routage probabiliste

μ_j = probabilité pour qu'en sortant de la file i, on aille vers la file j
$P_i(p_{ij})$ = matrice de routage sans stockastique
$P_{i\o}$ = probabilité pour qu'en sortant de la file i, on quitte le réseau de file d'attente
$P_{\o i}$ = probabilité pour qu'en sortant dans le réseau de file d'attente on aille vers la file i
$\Phi_0 = (P_{\o 1}, ..., P_{\o K})$

Flux dans les réseau de Jackson

λ_i = début d'arrivée dans la file i
Λ_i = débit de la sortie de la file i
e_i = nombre moyen de passage d'un client par la file i

SCHÉMA ! ! !

$\lambda_i = \lambda P_{\o i} + \sum_{j=1}^{K} \Lambda_j P_{ij}$
Si le réso est stable alors : $\Lambda_j = \lambda_j \forall j$

$$\begin{aligned} \lambda_i = & \lambda P_{\o i} + \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_{ji} \\ = & \lambda e_i \\ \text{et } e_i = & P_{\o i} + \sum_{j=1}^{K} e_j p_{ji} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} e = & (e_1, ..., e_K) \\ e = & q_0 + eP \\ e(I-P) = & q_0 \\ e = & e = q_0(I-P)^{-1} \end{aligned}$$

La matrice (I-P) sera irréversible si le graphe d'accessibilité construit à partir des files d'attente, la sortie réseau permet, à partir de toute file, d'atteindre la sortie

SCHÉMA ! ! !

$q_0 = (1), \quad P = (p), \quad e = q_e + eP$
$e_1 = 1 + e_1 p \Longrightarrow e_1 = \frac{1}{1-p}, p \neq 1$

Etude des réseau de Jackson

$L_i(t) =$ nombre de clients dans la file i à l'instant t
$(L_i(t), \quad t \geq 0)$ est-il une CMTC ?

Arrivée de l'extérieur : $\mathbb{P}$(1 arrive de l'extérieur vers la file : entre t et t + dt) $= \lambda p_{\o i} dt + o(dt)$
$\mathbb{P}$(1fin de services dans la file i entre t et t + dt$|i(t) = n_i > 0) = \mu_i dt + o(dt)$

Malheureusement, on ne sait pas déterminer la probabilité d'arrivée des autres files.
$((L_1(t), ..., L_j(t), ..., L_K(t)), t > 0)$ CMTC
$\mathbb{P}(L_1(t+dt), .., L_i(t+dt) = n_i + 1, ..., L_j(t+dt) = n_j - 1, ...L_K(t+dt) | L_1(t) = n_1, ..., L_i(t) = n_i, L_j(t) = n_j, ...) = \mu_j p_{ji} dt + o(dt)$

$$\begin{aligned}
n &= (n_1, ..., n_K) \text{ a de nombreux voisins} \\
n_{i^+} &= (n_1, ..., n_i + 1, ..., n_K) \\
n_{i^-} &= (n_1, ..., n_i - 1, ..., n_K) \\
n_{i^+j^-} &= (n_1, ..., n_i + 1, n_j - 1, ..., n_K)
\end{aligned}$$

Théorème de Jackson : Dans un réseau de Jackson, si $\forall 1 \leq j \leq K, p_j = \frac{\lambda e_j}{\mu_j} < 1$ alors :

$$\Pi_n = \prod_{j=1}^{K} (1 - \rho_j) \rho_j^{n_j}$$

On dit que cette solution est à forme produit. Et

$$\sum_{n1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_K=0}^{\infty} \Pi_n = 1$$

Idée de preuve : $\Pi Q = 0$

Équation de Chapman Kolmogorov :

$$\Pi_n(\lambda + j \sum_{j=1}^{K} \mu_j \mathbb{1}_{\{n_j > 0\}}) = \sum_{j=1}^{K} \mu_j p_{j\o} \Pi_{n_{j^+}} + \sum_{j=1}^{K} \lambda p_{\o j} \mathbb{1}_{\{n_j > 0\}} \Pi_{n_{j^-}} + \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \mu_i p_{ij} \mathbb{1}_{\{n_j > 0\}} \Pi_{n_{i^+j^-}}$$

$$(0) \quad \lambda \Pi_n =^? \sum_{j=1}^{K} \mu_j p_{j\o} \Pi_{n_{j^+}}$$

$$\cancel{\lambda} =^? \sum_{j=1}^{K} \cancel{\mu_j} p_{j\o} \frac{\cancel{\lambda} e_j}{\cancel{\mu_j}}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{K} p_{j\o} e_j$$

Et

$$e_i = p_{\o i} + \sum_{j=1}^{K} e_j p_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^{K} e_i = 1 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} e_j p_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^{K} e_i = 1 + \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K} e_i p_{ij} = 1 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} e_i p_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{K} e_i (1 - \sum_{j=1}^{K} p_{ij}) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{K} e_i p_{i\o} = 1$$

$$(1) - (K) \qquad \Pi_n \mu_j \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} =^? \lambda p_{\o j} \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} \Pi_{n_{j-}} + \sum_{i=1}^{K} \mu_i p_{ij} \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} \Pi_{n_{i+j-}}$$

si $n_j = 0$ alors $\o = \o$

si $n_j > 0$ alors

$$\Pi_n \mu_j = \lambda p_{\o j} \Pi_{n_{j-}} + \sum_{i=1}^{K} \mu_i p_{ij} \Pi_{n_{i+j-}}$$

Donc

$$\cancel{\mu_j} =^? \cancel{\lambda} p_{\o j} \frac{\cancel{\mu_j}}{\cancel{\lambda} e_j} + \sum_{i=1}^{K} \cancel{\mu_i} p_{ij} \frac{\cancel{\lambda} e_i}{\cancel{\mu_i}} \frac{\cancel{\mu_j}}{\lambda e_j}$$

$$e_j = p_{\o j} + \sum_{i=1}^{K} p_{ij} e_i$$

Corollaire : Dans une réseau de Jackson, chaque file se comporte comme une file M/M/1 de taux d'arrivé $\lambda_i = \lambda e_i$ et de taux de service μ_i

$$\text{Si } \rho_i = \frac{\lambda e_i}{\mu_i} < 1, \text{ alors } E(L_i) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i};\ E(R_i) = \frac{1}{\mu_i - \lambda e_j}$$

Et

$$E(L) = \sum_{i=1}^{K} E(L_i) = \sum_{i=1}^{K} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

$$E(R) = \frac{E(L)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{K} E(R_i) = \sum_{i=1}^{K} e_i \frac{1}{\mu_i - \lambda e_i}$$

Retour à l'exemple :

schéma !

$$\rho_1 = \frac{\lambda e_1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(1-p)} < 1$$

$$E(L_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu(1-p)}}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu(1-p)}}$$

$$E(L) = E(L_1)$$

$$E(R_1) = \frac{1}{\mu - \dfrac{\lambda}{1-p}}$$

$$E(R) = \frac{1}{\mu(1-p) - \lambda} = e_1 E(R_1)$$

Réseau de Jackson fermé

Définition : Un réseau de K file d'attentes fermé et comportant M clients sera dit réseau de Jackson fermé si pour chaque file : 1 serveur, temps de service exponentiel de taux μ_j, FCFS, capacité ∞ (au moins M) et un routage probabiliste. On note :
p_{ij} = probabilité pour que sortant de la file i un client aille vers la file j.
$P = (p_{ij})$ est une matrice stochastique
e_j = nombre moyen de passage d'un client par la file j.

$$e_j = \sum_{i=1}^{K} e_i p_{ij}$$
$$e = eP; \quad e(I-P) = 0 \quad \text{système lié}$$

Le nombre moyen de passage pourront avoir des valeurs relatives

- à une portion de temps T
- à un point de passage

SCHEMA

$N_j(t)$ = nombre de clients dans la file j à t.

$(N_j(t), t \geq 0)$ est-il une CMTC ?
$\mathbb{P}(1 \text{ départ de j entre t et dt} \mid N_j(t) = n_j > 0) = \mu_j dt + o(dt)$

En revanche on ne sait pas prédire les arrivées des autres files entre t et t + dt.
$\mathbb{P}(N_1(t+dt) = n_1, ..., N_j(t+dt) = n_j + 1, ..., N_i(t+dt) = n_i - 1 | N_1(t) = n_1, ..., N_i(t) = n_i > 0, ..., N_K(t) = n_K) = \mu_i dt p_{ij} + o(dt)$

$$\Omega = \left\{ (n_1, ..., n_K | n_j > 0, \ \sum_{j=1}^{K} m_j = M \right\}$$
$$|\Omega| = \binom{M+K-1}{M}$$

Théorème de Gordon et Newell Dans un réseau de Jackson fermé

$$\Pi(n) = G \prod_{j=1}^{K} \left(\frac{e_j^*}{\mu_j} \right)^{n_j}$$

e_j^* = nombre moyen de passage par la file j entre 2 passages en un point d'observation
G constante de normalisation / $\sum\limits_{n \in \Omega} \Pi(n) = 1$
C'est une solution à forme produit.

$n = (n_1, ..., n_j, ..., n_i, ..., n_K)$
$n_{i^+j^-} = (n_1, ..., n_j - 1, ..., n_i + 1, ..., n_K)$

$$\Pi(n)(\sum_{j=1}^{K} \mu_j \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} \mu_i p_{ij} \Pi(n_{i^+j^-})$$

$$(1) - (K) \qquad \Pi(n) \mu_j \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} =^? \sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} \mu_i p_{ij} \Pi(n_{i^+j^-})$$

$n_j = 0 \Longrightarrow 0 = 0$
$n_j > 0 \Longrightarrow \mu_j =^? \sum\limits_{i=1}^{K} \mu_i p_{ij} \dfrac{c_i^K}{\mu_i} \dfrac{\mu_j}{e_j^*}$
$e_j^* = \sum\limits_{i=0}^{K} =^? p_{ij} e_i^*$

Algorithme :

- on choisi un point d'observation
- déterminer les e_j^*
- on dénombre les états
- determiner G
- choisir la file j, $U_j = \sum\limits_{\substack{n \in \Omega \\ n_j > 0}} \Pi(n)$
- On applique Chang Lavenbug à la file j
  $U_j = \Lambda_j E(S_j) = \lambda^* e_j^* E(S_j)$
  $\lambda^* = \dfrac{U_j}{e_j^* E(S_j)} \leftarrow$ débit au point d'observation
- $E(R) = \dfrac{M}{\Lambda} \leftarrow$ entre deux passages au point d'observation

Réseau de Jackson Alors :
$(\lambda, P, q_0, \mu_j) \overset{\text{th de Jackson}}{\longrightarrow} E(L) \overset{\text{Loi de little}}{\longrightarrow} E(R)$

Réseau de Jackson fermé Alors :
$(\lambda, P, q_0, \mu_j) \overset{\text{th de Gordon et Newell}}{\longrightarrow} \lambda^* \overset{\text{Loi de little}}{\longrightarrow} E(R^*)$

Exemple :

schéma !

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e_1 = & \frac{1}{6}e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2 = & \frac{1}{2}e_1 \\ e_3 = & \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Donc } e_2^* = 1 \;\; e_1^* = 2 \;\; e_3^* = \frac{2}{3}$$

Donc $\frac{e_2^*}{\mu_2} = 1 \;\; \frac{e_1^*}{\mu_1} = 2 \;\; \frac{e_3^*}{\mu_3} = \frac{2}{3}$

$\Pi(2\ 0\ 0) = G2^2 1^0 1^0 = 4G = \frac{4}{11}$
$\Pi(1\ 1\ 0) = G2^1 1^1 1^0 = 2G = \frac{2}{11}$
$\Pi(1\ 0\ 1) = G2^1 1^0 1^1 = 2G = \frac{2}{11}$
$\Pi(0\ 2\ 0) = G2^0 1^2 1^0 = G = \frac{1}{11}$
$\Pi(0\ 1\ 1) = G = \frac{1}{11}$
$\Pi(0\ 0\ 2) = G = \frac{1}{11}$

Je choisi la file 2
$U_2 = \frac{4}{11}$
$U_2 = \lambda_2 E(S_2) = \lambda^* e_2^* E(S_2) = \frac{\lambda^* e_2^*}{\mu_2}$
$\lambda^* = \frac{U_2 \mu_2}{e_2^*} = \frac{4}{11}$
$E(R^*) = \frac{M}{\lambda^*} = \frac{11}{2}$

En choisissant la file 1 :
$U_2 = \frac{8}{11}$
$\lambda^* = \frac{U_1 \mu_1}{e_1^*} = \frac{4}{11}$

En changeant de point d'observation et en plaçant dans le rebouclage :
$e_1^* = 6 \rightarrow e_2^* = 3 \; e_3^* = 2$
On obtient la même distribution stationnaire : $U_2 = \frac{4}{11} \; \lambda^* = \frac{U_2 \mu_2}{e_2^*} = \frac{4}{33} \; E(R^*) = \frac{33}{2}$

Mean Value Analysis

Théorème de Sevcik-Mitrami dans un réseau de Jackson fermé, le nombre moyen de clients à un instant d'arrivée dans la file j en régime permanent est égal au nombre moyen de client dans la file j en régime permanent pour un réseau qui comprend (M-1) clients
$\overline{Q_j}(M)$ = nombre moyen de clients dans la file j en régime permanent à un instant d'arrivée
$\overline{L_j}(M)$ = nombre moyen de clients dans la file j en régime permanent

$\overline{Q_j}(M) = \overline{L_j}(M-1)$
$\overline{R_j}(M) =$ temps moyen de réponse de la file j
$\overline{S_j}(M) =$ temps moyen de service de la file j
$\overline{R_j}(M) = \overline{Q_j}(M)\overline{S_j} + \overline{S_j}$
$\overline{R_j}(M) = \overline{S_j}(\overline{L_j}(M-1) + 1)$

Récurrence MVA On a :

```
pour j de 1 à K faire
    L_j(ø) ← 0;
fin
pour i de 1 à M faire
    pour j de 1 à K faire
        e*_j R_j(i) ← e*_j S_j (1 + L_j(i − 1));
    fin
    R(i) = Σ_{j=1}^{K} e*_j R_j(i);
    λ*(i) = i / R_j(i) (loi de Little);
    pour j de 1 à K faire
        L_j(i) = λ*(i) e*_j R_j(i);
    fin
fin
```

$$\textbf{pour } j \textit{ de 1 à } K \textbf{ faire}: \quad \overline{L_j}(\emptyset) \leftarrow 0;$$

$$\textbf{pour } i \textit{ de 1 à } M \textbf{ faire}: \quad e_j^*\overline{R_j}(i) \leftarrow e_j^*\overline{S_j}\left(1 + \overline{L_j}(i-1)\right); \quad \overline{R}(i) = \sum_{j=1}^{K} e_j^*\overline{R_j}(i); \quad \lambda^*(i) = \frac{i}{\overline{R_j}(i)} \text{ (loi de Little)}; \quad \overline{L_j}(i) = \lambda^*(i)e_j^*\overline{R_j}(i);$$

Schéma ! !

K	1	2
$e_1^*\overline{R_1}$	$\frac{e_1^*}{\mu_1}\left(1 + \overline{L_1}(0)\right) = 2 * 1 = 2$	$2 * \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$
$e_2^*\overline{R_2}$	$\frac{e_2^*}{\mu_2}\left(1 + \overline{L_2}(0)\right) = 1 * 1 = 1$	$1 * \left(1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{5}\right)$
$e_3^*\overline{R_3}$	$\frac{e_3^*}{\mu_3}\left(1 + \overline{L_3}(0)\right) = 1 * 1 = 1$	$1 * \left(1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{5}\right)$
$\overline{R}$	4	$\frac{11}{2}$
λ^*	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{\frac{11}{2}} = \frac{4}{11}$
$\overline{L_1}$	$\frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{11} * 3 = \frac{12}{11}$
$\overline{L_2}$	$\frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{11} * \frac{5}{4} = \frac{5}{11}$
$\overline{L_3}$	$\frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{11} * \frac{5}{4} = \frac{5}{11}$

Cette récurrence s'applique aussi pour les files à délais qui sont des files avec une infinité de serveurs pour lesquelles il n'y a pas d'attente $\overline{R_j}(M) = \overline{S_j}$