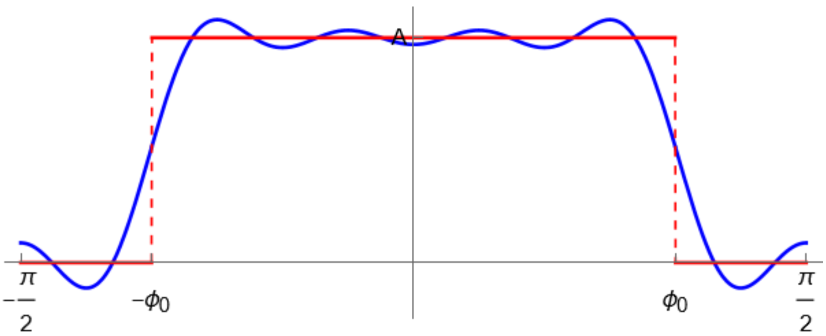
Версия 1: Аппроксимация по Фурье

Пусть A — высота прямоугольника, ϕ_0 — его угловая полуширина (см. рис.), тогда аппроксимация прямоугольной функции усечённым рядом Фурье (по косинусам, число слагаемых равно N; на рис. $N = 6$, $\phi_0 = \pi/3$) имеет вид

$$f(\phi) = \frac{2A}{\pi}\left(\phi_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\phi_0 n}{n} \cdot \cos 2\phi n\right).$$



Если «изотропная ДН» выражается функцией $f_{is}(\phi) \equiv 1$ (для всех углов $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), то условие нормировки $\pi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{is}^2(\phi)d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\phi)d\phi$ даёт возможность получить общее (хотя и несколько громоздкое) выражение для A, то есть по сути *оценить выигрыш в коэффициенте усиления за счёт уменьшения угловой ширины*. Как можно показать,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\phi)d\phi = \frac{2A^2}{\pi}\left(2\phi_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 2\phi_0 n}{n^2}\right) \Longrightarrow A = \frac{\pi/\sqrt{2}}{\sqrt{2\phi_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 2\phi_0 n}{n^2}}}.$$

Например, для $N = 6,\ \phi = \pi/3$ будет $A \approx 1.24$.

С учётом нормировки итоговое выражение принимает вид

$$f(\phi) = \sqrt{2} \cdot \frac{\phi_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\phi_0 n}{n} \cdot \cos 2\phi n}{\sqrt{2\phi_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 2\phi_0 n}{n^2}}} = \frac{\phi_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\phi_0 n}{n} \cdot \cos 2\phi n}{\sqrt{\phi_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - \cos 4\phi_0 n}{4n^2}}}.$$

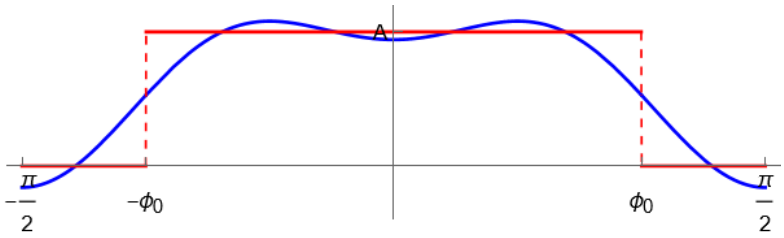
Подставляя разные N (чем больше, тем точнее форма прямоугольника) и ϕ_0, можно сразу получать конкретные формулы, а нормировочный коэффициент в знаменателе считать численно.

Каталог готовых (уже нормированных) формул по версии 1

Приведём некоторые конкретные расчётные выражения для $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$.

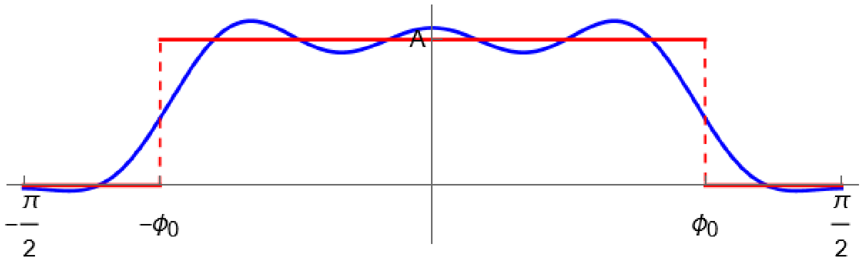
При $N = 2$: $A \approx 1.25548$,

$$f(\phi) = 0.836989 + 0.692184 \cos 2\phi - 0.346082 \cos 4\phi.$$



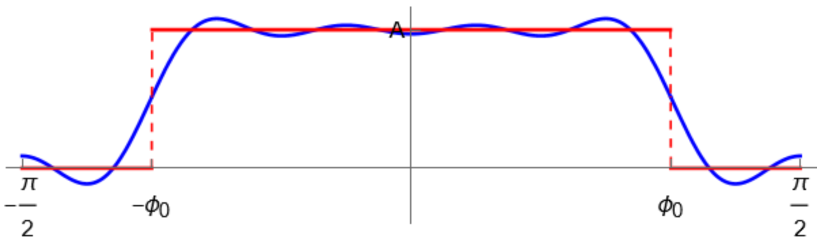
При $N = 4$: $A \approx 1.24619$,

$$f(\phi) = 0.830793 + 0.68706 \cos 2\phi - 0.34353 \cos 4\phi + 0.171765 \cos 8\phi.$$



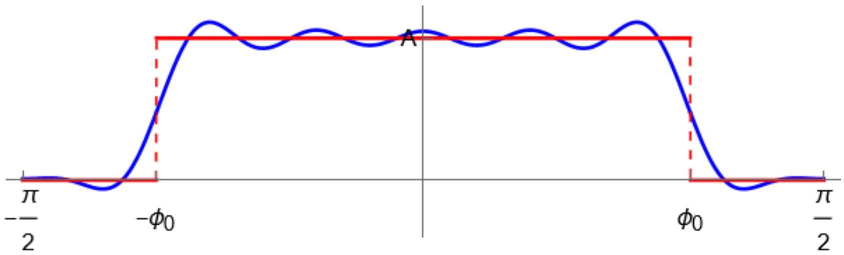
При $N = 5$: $A \approx 1.24035$,

$$f(\phi) = 0.826898 + 0.683839 \cos 2\phi - 0.34192 \cos 4\phi + 0.17096 \cos 8\phi - 0.136768 \cos 10\phi.$$



При $N = 7$: $A \approx 1.2374$,

$$f(\phi) = 0.824932 + 0.682214 \cos 2\phi - 0.341107 \cos 4\phi + 0.170553 \cos 8\phi - 0.136443 \cos 10\phi + 0.0974591 \cos 14\phi.$$



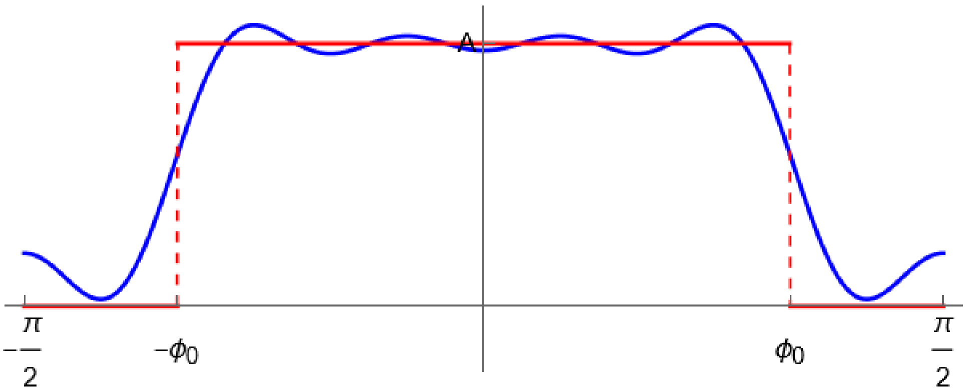
Версия 2: ряд Фурье + сдвиг

У обычной версии с рядом Фурье имеется одна особенность: отрицательные значения $f(\phi)$ в области «боковых лепестков» (то есть при $\phi > \phi_0$). Это можно рассмотреть как излучение в обратной фазе, или же попытаться модифицировать функцию так, чтобы отрицательных лепестков не стало. Для этого надо сдвинуть весь прямоугольник вверх на Δ (чтобы отрицательные минимумы поднялись хотя бы до уровня нуля) и затем уменьшить A на эту же величину Δ (чтобы «верхняя сторона прямоугольника осталась на месте»).

Функция при этом примет вид

$$f(\phi) = \frac{(2(A-\Delta)\phi_0 + \pi\Delta)^2}{\pi} + \frac{2(A-\Delta)^2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\phi_0 n}{n} \cdot \cos 2\phi n\,;$$

предыдущий график при $\Delta = 0.25$ выглядел бы так.



К сожалению, эта модификация существенно усложняет нормировку. Условие $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\phi)d\phi = \pi$ сохранится, если в вышеприведённой модифицированной формуле для f положить

$$A = A(N, \phi_0, \Delta) = \frac{-2\Delta\phi_0 + \sqrt{4\Delta^2\phi_0^2 + 2\alpha(1-\Delta^2)}}{2\alpha/\pi} + \Delta,$$

где

$$\alpha = \alpha(N, \phi_0) = 2\phi_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 2\phi_0 n}{n^2}.$$

Например, при $N = 6,\ \phi = \pi/3\,,\ \Delta = 0.25$ будет $A \approx 1.22$.

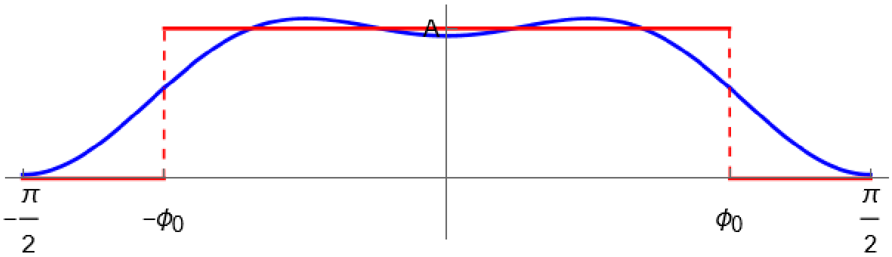
Величиной Δ отчасти регулируется «уровень боковых лепестков».

Каталог готовых (уже нормированных) формул по версии 2

Приведём некоторые конкретные расчётные выражения для $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$.

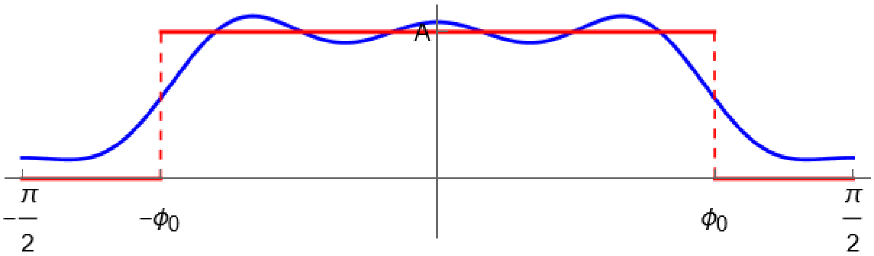
При $N = 2,\ \Delta = 0.2$: $A \approx 1.23097$,

$$f(\phi) = 0.891851 + 0.572156\cos 2\phi - 0.286078\cos 4\phi.$$



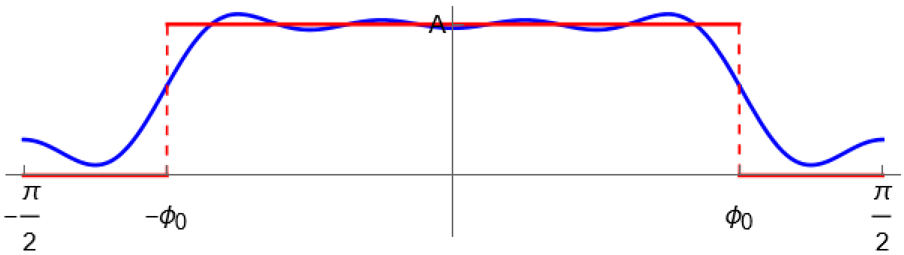
При $N = 4,\ \Delta = 0.2$: $A \approx 1.22523$,

$$f(\phi) = 0.887586 + 0.568629\cos 2\phi - 0.284315\cos 4\phi + 0.142157\cos 8\phi.$$



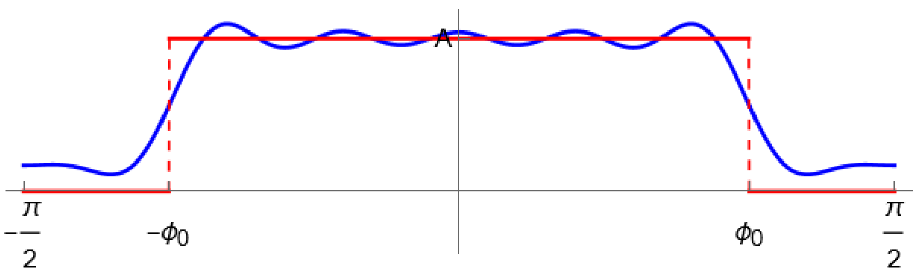
При $N = 5,\ \Delta = 0.2$: $A \approx 1.22162$,

$$f(\phi) = 0.88494 + 0.566407\cos 2\phi - 0.283204\cos 4\phi + 0.141602\cos 8\phi - 0.113281\cos 10\phi.$$



При $N = 7,\ \Delta = 0.2$: $A \approx 1.21979$,

$$f(\phi) = 0.883542 + 0.565284\cos 2\phi - 0.282642\cos 4\phi + 0.141321\cos 8\phi - 0.113057\cos 10\phi + 0.0807549\cos 14\phi.$$

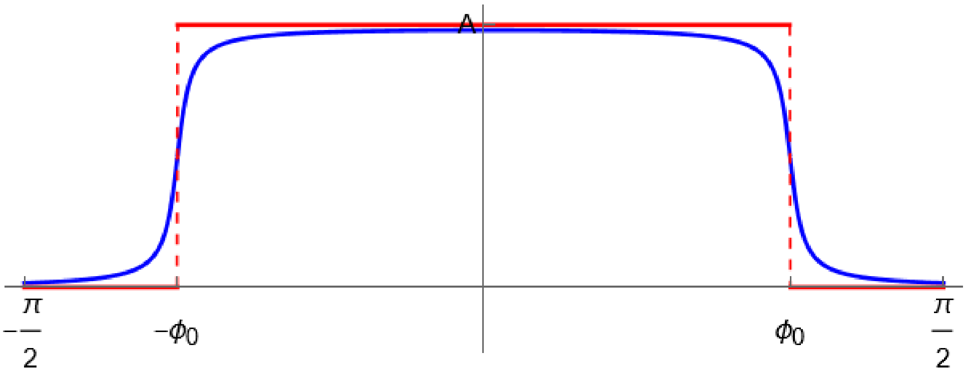


Версия 3: гладкая аппроксимация

Совершенно другая картина получится при использовании гладкой аппроксимации прямоугольной ступеньки. Например,

$$f(\phi) = \frac{A}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\Delta(\phi_0 - \phi)\right) + \operatorname{arctg}\left(\Delta(\phi_0 + \phi)\right)\right),$$

где параметр Δ определяет точность формы прямоугольника (на рис. $\Delta = 30$) по принципу «чем больше Δ, тем точнее».



Нормировочное условие на константу A в данном случае не выражается в элементарных функциях. Однако его несложно получить численным интегрированием в каждом конкретном случае. Например, для $\Delta = 30, \phi_0 = \frac{\pi}{3}$ получается

$$A = \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\operatorname{arctg}\left(\Delta(\phi_0 - \phi)\right) + \operatorname{arctg}\left(\Delta(\phi_0 + \phi)\right)\right)^2 d\phi \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1.284.$$