Неделя 1. Домашнее задание
Множества, мультимножества, алгебра множеств

Задание 1. *Даны множества A, B, C:*

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2017\},\ B = \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 2018\},\ C = \{3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 2019\}.$$

Упростите выражение:

$$(A \cup B) \div (A \cup C) \div (B \cup C). \tag{1}$$

Задание 2. *Найдите пересечение множеств A и B:*

$$A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cap \left\{-\frac{256}{1}, \frac{256}{2}, -\frac{256}{4}, \frac{256}{8}, \ldots\right\},\ B = \mathbb{Z} \cup \left\{-\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right\}. \tag{2}$$

Задание 3. *Задана функция $M(w)$, аргументом которой является слово русского языка. Результатом её является мультимножество из букв данного слова (регистр букв имеет значение, т. е. «Ф» и «ф» — разные элементы). К примеру,*

$$M(\textit{Математика}) = \{\textit{М, а, т, е, м, а, т, и, к, а}\}. \tag{3}$$

Определите, равны ли мультимножества:

a) M(Бар) и M(Раб).

b) M(синус) и M(косинус).

c) M(марка) и M(карма).

d) M(МаТематИкА) и M(маТеМАтИка).

Задание 4. *Найдите наименьшее положительное значение параметра λ, при котором количество подмножеств множества P будет равно 64.*

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda \text{ делится на } n\}. \tag{4}$$

Задание 5. *Множество A определено следующим образом:*

$$A = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin\big(x^2 - x - 1\big) = 0 \text{ \textit{или} } \sqrt{\pi} - (x+1)^2 > 0\big\}. \tag{5}$$

Запишите множество A в виде объединения точек/отрезков/интервалов.

Задание 6. *Используя основные законы алгебры множеств, упростите следующее выражение:*

$$\Big(A \div \Big(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}\Big)\Big) \cap ((A \cup B) \div (A \cap B)) \tag{6}$$

при условии, что множества A и B не пересекаются.

Задание 7. *Даны множества X, Y и Z:*

$$X = \{a,\, b,\, c,\, \ldots,\, z\},\ \ Y = \{\{a\},\, \{b\},\, \{c\},\, \ldots,\, \{z\}\},\ \ Z = \{\{a,\, b,\, c,\, \ldots,\, z\}\}. \tag{7}$$

Найдите:

a) $X \cap Y \cap Z$,

b) $(X \cup Z) \setminus ((X \cup Y) \cap (Y \cup Z))$,

c) $X \div ((X \cup Y) \div (X \cup Y \cup Z))$.

Задание 8. *Верно ли следующее утверждение?*

$$(A \cup B \cup C \cup D) \div (A \cap B \cap C \cap D) = A \cup B \cup C \cup D \iff A \cap B \cap C \cap D = \varnothing. \tag{8}$$

Задание 9. *Упростите выражение:*

$$\overline{\overline{\big(A \div \big((B \cup (B \cap C)) \cap \bar{B}\big)\big)} \cap \overline{((B \cup C \cap B) \cup B)} \cap \overline{\big(C \setminus \bar{C}\big)}}. \tag{9}$$

Задание 10. *Определите, тождественны ли следующие выражения:*

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \stackrel{?}{=} (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \setminus (A_1 \div A_2 \div \ldots \div A_n) \tag{10}$$

для любого натурального n, большего единицы.

Задание 11. *Даны множества $P_1, \ldots, P_n$, где n — натуральное число. Множество P_k представляет собой множество всех натуральных степеней числа $2^{p(k)}$, где $p(k)$ — простое число под номером k. То есть:*

$$\begin{aligned}
&P_1 = \{(2^2)^1,\ (2^2)^2,\ (2^2)^3,\ (2^2)^4,\ \ldots\},\\
&P_2 = \{(2^3)^1,\ (2^3)^2,\ (2^3)^3,\ (2^3)^4,\ \ldots\},\\
&P_3 = \{(2^5)^1,\ (2^5)^2,\ (2^5)^3,\ (2^5)^4,\ \ldots\},\\
&P_4 = \{(2^7)^1,\ (2^7)^2,\ (2^7)^3,\ (2^7)^4,\ \ldots\},\\
&\text{и так далее.}
\end{aligned} \tag{11}$$

Дано множество P:

$$P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_n. \tag{12}$$

Найдите наименьшее число, принадлежащее множеству P.

Задание 12. *Дано единичное множество $\mathfrak{J}$, которое является множеством решений уравнения:*

$$\cos x = \sin x. \tag{13}$$

Даны так же множества A_1 и A_2:

$$A_1 = \left\{-\frac{3\pi}{4}\right\},\ A_2 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}. \tag{14}$$

Выпишите все конституенты, укажите, являются ли множества A_1 и A_2 независимыми.