Неделя 2. Практическое занятие
Отношения и функции
Разбор задач

> **Задание 1**. *Выпишите все элементы множества A.*
>
> *a)* $A = \{1,\, 2,\, 3\} \times \{a,\, b,\, c\}$.
>
> *b)* $A = (\mathbb{N} \cap [e^2;\ \pi^2]) \times \mathbb{R}^{42} \times (B \div B)$, *где B — некоторое множество.*
>
> *c)* $A = (X \times (Y \times Z)) \setminus ((X \times Y) \times Z)$, *где*
>
> $$X = \{1,\, 2,\, 3\},\ Y = \{\pi,\, e\},\ Z = \{0\}.$$

Решение.

a) Чтобы выписать все элементы декартового произведения $X \times Y$, можно следовать такому алгоритму: каждому элементу множества X сопоставить каждый элемент множества Y. Таким образом декартово произведение $\{1,\, 2,\, 3\} \times \{a,\, b,\, c\}$ даст нам следующие 9 векторов:

$$\begin{matrix} \langle 1,\, a\rangle, & \langle 1,\, b\rangle, & \langle 1,\, c\rangle, \\ \langle 2,\, a\rangle, & \langle 2,\, b\rangle, & \langle 2,\, c\rangle, \\ \langle 3,\, a\rangle, & \langle 3,\, b\rangle, & \langle 3,\, c\rangle. \end{matrix}$$

Заметим, что декартово произведение $\{a,\, b,\, c\} \times \{1,\, 2,\, 3\}$ дало бы нам те же самые векторы с переставленными элементами (то есть, к примеру, вектор $\langle 1,\, a\rangle$ превратился бы в $\langle a,\, 1\rangle$), а это, вообще говоря, уже другие векторы (порядок элементов в векторе имеет значение). Иными словами, *в общем случае* декартово произведение не коммутативно:

$$A \times B \neq B \times A. \tag{1}$$

b) Прежде чем что-то выписывать, заметим, что $B \div B = \varnothing$. Декартово произведение любого множества с пустым множеством даст нам пустое множество. Таким образом, мы получаем $A = \varnothing$.

c) Выпишем сначала векторы, получающиеся в результате $X \times (Y \times Z)$:

$$\begin{matrix} \langle 1,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, & \langle 2,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, & \langle 3,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, \\ \langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle, & \langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle, & \langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle. \end{matrix} \tag{2}$$

А теперь векторы, получающиеся в результате $(X \times Y) \times Z$:

$$\begin{matrix} \langle\langle 1,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 2,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 3,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, \\ \langle\langle 1,\, e\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 2,\, e\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 3,\, e\rangle,\, 0\rangle. \end{matrix} \tag{3}$$

Как можно заметить, хоть элементы векторов и совпадают, структуры они имеют разные. В первом случае мы имеем дело с векторами вида $\langle a,\, \langle b,\, c\rangle\rangle$, во втором же — с векторами вида $\langle\langle a,\, b\rangle\,,\, c\rangle$. Строго говоря, *в общем случае* декартово произведение не ассоциативно, то есть:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C). \tag{4}$$

Тем не менее, если в выражении $A \times B \times C$ нет скобок, его можно рассматривать как декартово произведение множеств:

$$A \times B \times C = \{\langle a,\, b,\, c\rangle \mid a \in A,\, b \in B,\, c \in C\}. \tag{5}$$

Однако в нашем примере скобки имеются, поэтому множества:

$$X \times (Y \times Z) \text{ и } (X \times Y) \times Z, \text{ —}$$

не имеют общих элементов, а это в свою очередь значит, что в ответе мы получим векторы из выражения (2).

Ответ:

a) $\langle 1,\, a\rangle\,,\, \langle 1,\, b\rangle\,,\, \langle 1,\, c\rangle\,,\; \langle 2,\, a\rangle\,,\, \langle 2,\, b\rangle\,,\, \langle 2,\, c\rangle\,,\; \langle 3,\, a\rangle\,,\, \langle 3,\, b\rangle\,,\, \langle 3,\, c\rangle$.

b) Нет элементов.

c) $\langle 1,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle$.

Задание 2. *Дано множество $\mathbb{B} = \{0,\, 1\}$. Для каждого натурального n найдите сумму количеств единиц в каждом из векторов множества $\mathbb{B}^n$. К примеру, при $n = 2$:*

$$\mathbb{B}^2 = \{\langle 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1\rangle\},$$

в сумме получаем 4 единицы.

Решение. Заметим, что общее количество нулей и единиц для конкретного n есть ничто иное, как $n \cdot 2^n$. Действительно, множество $\mathbb{B}^n$ содержит 2^n векторов, каждый из которых состоит из n элементов (нулей и единиц). К примеру, для $n = 3$ имеем (8 векторов по 3 элемента в каждом):

$$\underset{(1)}{\langle 0,\, 0,\, 0\rangle},\; \underset{(2)}{\langle 0,\, 0,\, 1\rangle},\; \underset{(3)}{\langle 0,\, 1,\, 0\rangle},\; \underset{(4)}{\langle 0,\, 1,\, 1\rangle},$$
$$\underset{(5)}{\langle 1,\, 0,\, 0\rangle},\; \underset{(6)}{\langle 1,\, 0,\, 1\rangle},\; \underset{(7)}{\langle 1,\, 1,\, 0\rangle},\; \underset{(8)}{\langle 1,\, 1,\, 1\rangle}.$$

Заметим, что в сумме для всех векторов количество нулей и единиц совпадает. И вправду, для $n = 1$ это очевидно, а для каждого последующего n мы получаем векторы путём добавления нуля и единицы к каждому текущему вектору, то есть, к примеру, из $\mathbb{B}^2$ получаем следующие векторы для $\mathbb{B}^3$:

$$\begin{gathered}
\langle 0,\, 0\rangle \to \langle 0,\, 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 0\rangle\,,\\
\langle 0,\, 1\rangle \to \langle 0,\, 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 1\rangle\,,\\
\langle 1,\, 0\rangle \to \langle 0,\, 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 0\rangle\,,\\
\langle 1,\, 1\rangle \to \langle 0,\, 1,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 1\rangle\,.
\end{gathered}$$

Значит, в результате мы получаем $n \cdot 2^{n-1}$ единиц.

Ответ: $n \cdot 2^{n-1}$.

Задание 3. *Даны множества A и B:*

$$A = B = \{\textit{камень}, \textit{ножницы}, \textit{бумага}\}.$$

Определим бинарное отношение R следующим образом:

$$R = \textit{«побеждает»}: \; aRb \iff a \textit{ побеждает } b.$$

То есть, к примеру, $\langle\textit{камень}, \textit{ножницы}\rangle \in R$, но $\langle\textit{камень}, \textit{бумага}\rangle \notin R$. Выпишите R в явном виде (множество векторов). Найдите:

$$\delta_R,\ \rho_R,\ R^{-1},\ -R,\ R(\{\textit{камень}, \textit{бумага}\}).$$

Решение. Выпишем R в явном виде:

$$R = \{\langle\text{камень}, \text{ножницы}\rangle, \langle\text{ножницы}, \text{бумага}\rangle, \langle\text{бумага}, \text{камень}\rangle\}.$$

Понятно, что $\delta_R = \rho_R = \{\text{камень}, \text{ножницы}, \text{бумага}\}$, так как для любого элемента $a \in A$ найдётся элемент $b \in A$ (напомним, что $A = B$) такой, что aRb.

Напомним, что обратное бинарное отношение к R есть ничто иное, как:

$$R^{-1} = \{\langle a, b\rangle \in A \times B \mid bRa\}. \tag{6}$$

Выпишем R^{-1}:

$$R^{-1} = \{\langle\text{ножницы}, \text{камень}\rangle, \langle\text{бумага}, \text{ножницы}\rangle, \langle\text{камень}, \text{бумага}\rangle\}.$$

Напомним, что дополнением к бинарному отношению R является:

$$-R = (A \times B) \setminus R. \tag{7}$$

Выпишем все векторы $-R$:

$$\begin{array}{lll} \langle\text{камень}, \text{бумага}\rangle, & \langle\text{ножницы}, \text{камень}\rangle, & \langle\text{бумага}, \text{ножницы}\rangle, \\ \langle\text{камень}, \text{камень}\rangle, & \langle\text{ножницы}, \text{ножницы}\rangle, & \langle\text{бумага}, \text{бумага}\rangle. \end{array}$$

Образом множества X относительно бинарного отношения R называется множество:

$$R(X) = \{b \in B \mid \exists\, a \in X : aRb\}. \tag{8}$$

Выпишем образ множества $\{\text{камень}, \text{бумага}\}$:

$$R(\{\text{камень}, \text{бумага}\}) = \{\langle\text{камень}, \text{ножницы}\rangle, \langle\text{бумага}, \text{камень}\rangle\}.$$

Задание 4. *Дано бинарное отношение* f*:*

$$f = \{\langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } |x| = y \text{ или } x \notin \mathbb{Q} \text{ и } |x| = -y\}. \tag{9}$$

Определите, является ли f *функцией. Если да, укажите* δ_f*,* ρ_f*,* f^{-1} *(при наличии); определите, является ли* f *инъекцией, сюръекцией, биекцией.*

Решение. Напомним, что **функцией** является такое бинарное отношение $f \in A \times B$, у которого $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$, а так же

$$\text{для всех } x \in \delta_f,\ y_1, y_2 \in \rho_f \text{ из } xfy_1 \text{ и } xfy_2 \text{ следует } y_1 = y_2. \tag{10}$$

Наше бинарное отношение и вправду является функцией, действительно, любой $x \in \mathbb{R}$ либо принадлежит $\mathbb{Q}$, либо не принадлежит, при этом что в первом, что во втором случае найдётся такой $y \in \mathbb{R}$, что $|x| = y$ или же $|x| = -y$. Это значит, что $\delta_f = A = \mathbb{R}$. Нет никаких сомнений, что $\rho_f \subseteq B = \mathbb{R}$.

Покажем, что выполняется (10). Пусть xfy_1 и xfy_2, тогда, если $x \in \mathbb{Q}$:

$$(|x| = y_1,\ |x| = y_2) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Если $x \notin \mathbb{Q}$:

$$(|x| = -y_1 \Leftrightarrow y_1 = -|x|,\ |x| = -y_2 \Leftrightarrow y_2 = -|x|) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Получается, f действительно является функцией. График её выглядит примерно следующим образом:

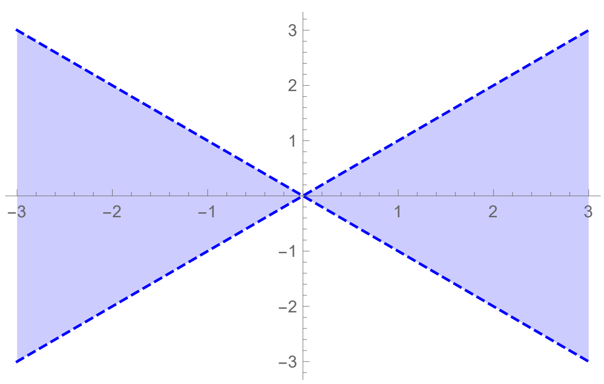

Рис. 1: График функции f

Может показаться, что область значений функции (ρ_f, синяя область на графике) равна $\mathbb{R}$, однако это не так — когда x является рациональным числом ($x \in \mathbb{Q}$), y принимает неотрицательные значения ($|x|$), в обратном же случае — отрицательные ($-|x|$). Иными словами, положительные значения функции рациональны, отрицательные же иррациональны. Получается

$$\rho_f = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid y < 0\}.$$

Это в свою очередь говорит о том, что сюръекцией функция f не является. Более того, не является она и инъекцией, так как при значениях $x = 1$ и $x = -1$ значения функции совпадают, что говорит о том, что обратной функции (f^{-1}) не существует. А значит, не является она и биекцией.

Может показаться очевидным, что обратной функции (f^{-1}) не существует, это действительно так. Тем не менее не всё так просто — если в (9) лишь слегка поменять условие, убрав модули у x, мы получим уже совершенно иную функцию, график которой визуально совпадает с графиком на Рис. 1, но, как ни странно, новая функция будет являться и инъекцией, и сюръекцией, и биекцией. А это значит, что у неё будет и обратная функция, которая, к тому же, будет равна исходной.

Ответ: f является функцией, $\delta_f = \mathbb{R}$, $\rho_f = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid y < 0\}$. Обратной функции не существует, не является ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией.

Задание 5. *Для заданной функции $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определите, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией.*

a) $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$. *Здесь под $[x]$ понимается взятие целой части числа x (то есть, к примеру,* $[5.999] = 5$, $[-98.1] = -98$*).*

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$. *Здесь под $\operatorname{sgn}(x)$ понимается функция знака (то есть, к примеру,* $\operatorname{sgn}(-7) = -1$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(1729) = 1$*).*

Решение.

a) Посмотрим на график функции $f(x)$:

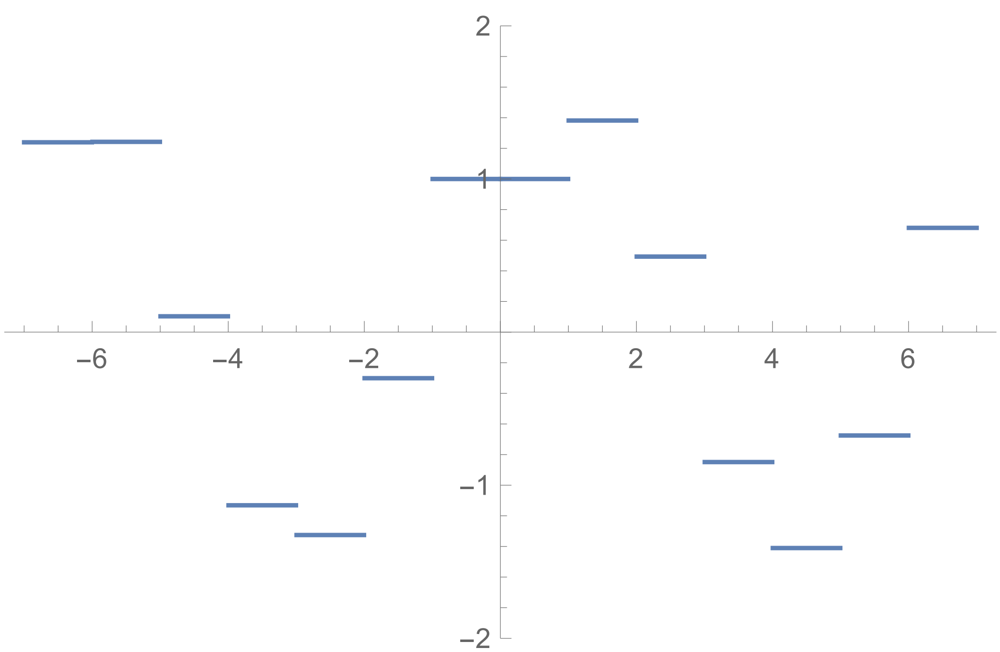

Рис. 2: График функции $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$

По графику видно, что функция ни инъекцией, ни сюръекцией не является. Действительно, если взять 2 различных x: 0 и 0.1, — мы получим одно и тоже значение функции, так как целые части аргументов равны:

$$[0] = [0.1] = 0 \Rightarrow \sin \underbrace{[0]}_{=0} + \cos \underbrace{[0]}_{=0} = \sin \underbrace{[0.1]}_{=0} + \cos \underbrace{[0.1]}_{=0}.$$

Поэтому функция $f(x)$ не является инъекцией. Сюръекцией она тоже не является, так как синус и косинус — ограниченные функции (сумма синуса и косинуса не может превышать число 2), то есть, область значений функции $f(x)$ не равна $\mathbb{R}$.

b) Посмотрим на график функции $f(x)$:

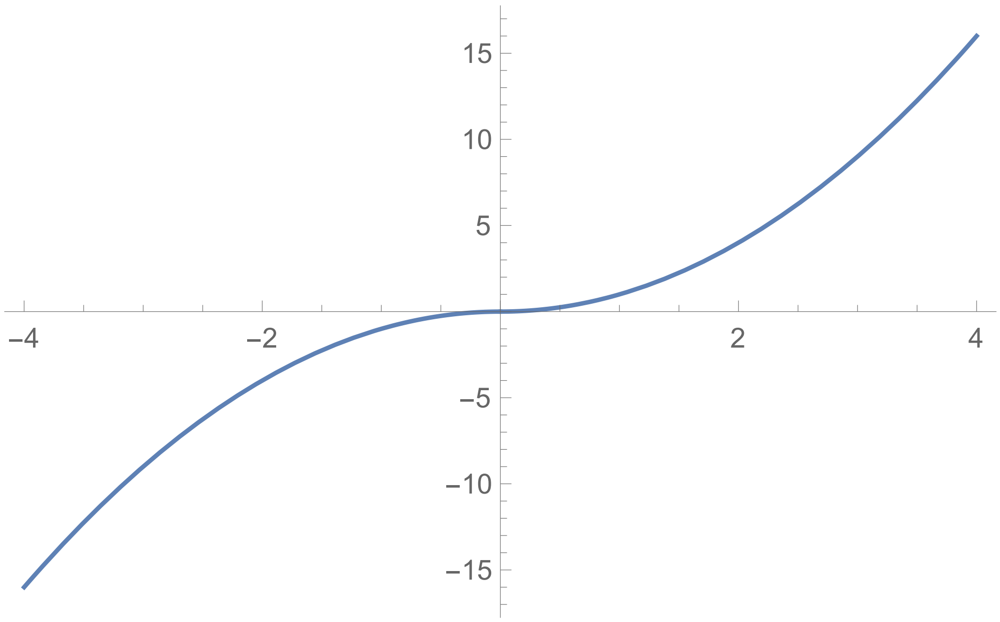

Рис. 3: График функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$

По графику, опять же, видно, что функция $f(x)$ является и инъекцией, и сюръекцией, а значит и биекцией. И правда, рассмотрим сначала интервал $x \in [0; \infty)$. Естественно, функция на нём инъективна:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow \text{ при } x_1 \neq x_2 \quad x_1^2 \neq x_2^2.$$

И, что довольно очевидно, область значений функции $f(x)$ на этом интервале есть ничто иное, как $[0; \infty)$. При $x \in (-\infty; 0]$ ситуация совершенно идентична, с той лишь разницей, что область значений функции равна $(-\infty; 0]$.

Итого, получаем следующее: функция инъективна при $x \in \mathbb{R}$, при этом область значений функции равна $\mathbb{R}$, иными словами, функция является сюръекцией, и биекцией (так как является и инъекцией, и сюръекцией).

Ответ:

a) Не является ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией.

b) Является и инъекцией, и сюръекцией, и биекцией.

Задание 6. *Задано бинарное отношение R:*

$$R = \{\langle x,\, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \textit{ входит в запись числа } y\}. \tag{11}$$

То есть, к примеру, $\langle 8,\, 128\rangle \in R$, $\langle 10,\, 1010\rangle \in R$, *но* $\langle 4,\, 123\rangle \notin R$, $\langle 0,\, 28\rangle \notin R$. *Определите, является ли отношение R: рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, эквивалентностью.*

Решение. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если для любого $a \in A$ выполняется aRa. Довольно очевидно, что любое число входит в собственную же запись, поэтому *R является рефлексивным.*

Иррефлексивным же отношение R называется, если при любом $a \in A$ не выполняется aRa, что, разумеется, не так, следовательно, *иррефлексивным отношение R не является.*

Бинарное отношение R называется **симметричным**, если:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \Rightarrow bRa.$$

Понятно, что наше *отношение симметричным не является.* Взять хотя бы, к примеру, такой вектор: $\langle 13,\, 1337\rangle \in R$, — если переставить местами его элементы, получим: $\langle 1337,\, 13\rangle \notin R$.

Антисимметричным является такое бинарное отношение R, что:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \text{ и } bRa \Rightarrow a = b.$$

Наше *отношение R является антисимметричным.* Действительно, пусть aRb и bRa, запишем цифры числа a как $a_1, \ldots, a_n$, цифры числа b — как $b_1, \ldots, b_n$ (в a и b одинаковое количество цифр по той причине, что число с бóльшим количеством цифр не может входить в число с меньшим количеством цифр), в таком случае a и b можно записать следующим образом:

$$a = \underbrace{b_1 \ldots b_n}_{b},\ \ b = \underbrace{a_1 \ldots a_n}_{a}.$$

Иными словами, $a = b$.

Бинарное отношение R называется **транзитивным**, если:

$$\text{для всех } a, b, c \in A \ aRb \text{ и } bRc \Rightarrow aRc.$$

Разумеется, наше *отношение является транзитивным*, так как если в записи числа c содержится b, в записи которого, в свою очередь, содержится a, то a содержится и в записи c. Для примера возьмём три числа:

$$a = 2,\ b = 124,\ \ c = 1248.$$

Рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение на A называется **эквивалентностью** на A. Наше отношение не является симметричным, а значит и *эквивалентностью оно не является.*

Ответ: R является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным. Не является иррефлексивным, симметричным, эквивалентностью.

> **Задание 7**. *Определите, является ли эквивалентностью бинарное отношение R. Если да, то опишите соответствующее фактор-множество.*
>
> *a)* $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a = b$ *или* $a^2 + b^2$ *— простое число*$\}$.
>
> *b)* $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b$ *— квадрат некоторого числа* $n \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

a) Довольно очевидно, что наше отношение является рефлексивным и симметричным (это понятно из условия «$a = b$» и ассоциативности сложения). Вопрос заключается в том, является ли оно транзитивным. Оказывается, не является — взять хотя бы такой пример:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 &= 5 && \text{— простое число,} \\ 2^2 + 3^2 &= 13 && \text{— простое число,} \\ 1^2 + 3^2 &= 10 && \text{— составное число.} \end{aligned}$$

А это значит, что и эквивалентностью R не является.

b) Рефлексивность данного отношения, опять же, очевидна (a^2 — всегда квадрат числа a, то есть, всегда выполняется aRa). То же касается и симметричности (объясняется это ассоциативностью умножения).

Проверим, является ли данное отношение транзитивным. Запишем числа a, b и c в виде бесконечного произведения простых чисел в некоторых целых степенях:

$$\begin{aligned} a &= 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4} \cdot \ldots, \\ b &= 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3} \cdot 7^{y_4} \cdot \ldots, \\ c &= 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3} \cdot 7^{z_4} \cdot \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, к примеру, как записать подобным образом числа 1 и 36 ($36 = 2^2 \cdot 3^2$):

$$1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot \ldots, \;\; 36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot \ldots$$

Заметим, что квадратом любого натурального числа n будет такое число, все степени в записи (12) которого будут чётными (так как возведение в квадрат числа n равносильно умножению на 2 степеней простых чисел).

Вспомним, что при умножении степени складываются. Предположим, что aRb и bRc, тогда получим:

$$\begin{array}{ccccl} (x_1 + y_1) & \text{и} & (y_1 + z_1) & \text{— чётные числа,} \\ (x_2 + y_2) & \text{и} & (y_2 + z_2) & \text{— чётные числа,} \\ (x_3 + y_3) & \text{и} & (y_3 + z_3) & \text{— чётные числа,} \\ (x_4 + y_4) & \text{и} & (y_4 + z_4) & \text{— чётные числа,} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

А теперь вспомним арифметику: если при сложении двух чисел p и q мы получили чётное число w, то числа p и q обязаны быть либо оба чётными, либо оба нечётными. Получается, числа x_k, y_k и z_k обязаны иметь одинаковую чётность при любом натуральном k, а это в то же время значит, что $x_k + z_k$ всегда будет чётным числом. Выходит, что наше отношение является транзитивным, а значит, является и эквивалентностью.

В таком случае, нам осталось лишь выписать соответствующее фактор-множество. Для начала напомним, что классом эквивалентности $a \in A$ по R называется множество a/R:

$$a/R = \{b \in B \mid bRa\}. \tag{13}$$

Фактор-множеством (обозначим его как F) же является множество всех классов эквивалентности. Понятно, что для любого числа a, если записать его как в выражении (12), a/R будет состоять из чисел, степени простых чисел у которых будут совпадать по кратности со степенями соответствующих простых чисел из a. Выходит, нам нужно просто перебрать все возможные кратности степеней. Таким образом мы получим следующие классы эквивалентности:

$$F_{i_1, i_2, i_3, \ldots} = \left\{2^{i_1 + 2k_1} \cdot 3^{i_2 + 2k_2} \cdot 5^{i_3 + 2k_3} \cdot \ldots \mid k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}_0\right\},$$

где каждое из i_n будет принимать значения 0 и 1 (что меняет кратность степени). Тогда фактор-множество F будет равно:

$$F = \{F_{i_1, i_2, i_3, \ldots} \mid i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,\, 1\}\}.$$

Ответ:

a) Не является эквивалентностью.

b) Является эквивалентностью. Фактор-множество (F):

$$F = \{F_{i_1, i_2, i_3, \ldots} \mid i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,\, 1\}\}, \text{ где}$$

$$F_{i_1, i_2, i_3, \ldots} = \left\{2^{i_1 + 2k_1} \cdot 3^{i_2 + 2k_2} \cdot 5^{i_3 + 2k_3} \cdot \ldots \mid k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Задание 8. *Дано бинарное отношение R. Укажите, является ли оно предпорядком, частичным порядком, линейным порядком, полным линейным порядком. Если является линейным порядком, укажите минимальный и максимальный элементы (при наличии).*

a) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \cos^2 a + \sin^2 b = 1\}$.

b) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0\}$.

Решение. Напомним следующие определения:

- Бинарное отношение R называется **предпорядком**, если оно рефлексивно и транзитивно.
- Предпорядок называется **частичным порядком**, если он антисимметричен.
- Частичный порядок называется **линейным**, если для любых элементов $a, b \in A$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$.
- Линейный порядок на множестве A называется **полным**, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент.

a) Ясно, что наше отношение является рефлексивным (ввиду основного тригонометрического тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), Покажем, что оно является и транзитивным. Пусть aRb и bRc, тогда:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 a + \sin^2 b = 1,\\
&\cos^2 b + \sin^2 c = 1,\\
&\cos^2 a + \sin^2 c =\\
= \; &(1 - \sin^2 b) + (1 - \cos^2 b) =\\
= \; &2 - (\cos^2 b + \sin^2 b) =\\
= \; &1.
\end{aligned}$$

Значит, из aRb и bRc следует aRc. Получается, что наше *отношение является предпорядком.* Тем не менее, антисимметричным R не является. Действительно, если для любого a взять $b = a + 2\pi$, то мы получим aRb и bRa, но в то же время $a \neq b$.

Итого, наше отношение не является ни частичным порядком, ни линейным порядком, ни полным линейным порядком.

b) Наше отношение, разумеется, является рефлексивным, т. к. выполняется $aRa \; \forall a \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sgn}(\underbrace{a - a}_{0}) + 1 = 1 \neq 0.$$

Является оно и транзитивным. Пусть aRb и bRc, тогда:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0 \;\Rightarrow a \geqslant b,\\
&\operatorname{sgn}(b - c) + 1 \neq 0 \;\Rightarrow b \geqslant c,\\
\Rightarrow \; &\operatorname{sgn}(a - c) + 1 \neq 0 \quad (\text{т. к. } a \geqslant b \geqslant c).
\end{aligned}$$

Это значит, что *отношение является предпорядком.*

Покажем, что наше отношение является антисимметричным. Пусть aRb и bRa:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0 \text{ и } \operatorname{sgn}(b - a) + 1 \neq 0 \Rightarrow\\
\Rightarrow \; &a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a \Rightarrow a = b.
\end{aligned}$$

А это значит, что наше *отношение является и частичным порядком.*

Понятно, что наше *отношение является так же и линейным порядком*, т. к. для любых a и b из $\mathbb{R}$ выполняется

$$\text{либо } \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0, \text{ либо } \operatorname{sgn}(b - a) + 1 \neq 0.$$

Тем не менее, *полным линейным порядком наше отношение не является*, потому что, к примеру, на подмножестве $(-\infty; 0)$ нет наименьшего элемента.

Ответ:

a) Является только предпорядком.

b) Является предпорядком, частичным порядком, линейным порядком, но полным линейным порядком не является.

> **Задание 9**. *Потрудитесь объяснить, почему данная сумма столь мала? Сэр, данное поместье принадлежит мне. Вы вели себя не по-джентльменски — пришлось Вас успокоить. Вы провели время на моём пне, с Вас причитается ровно* 1 000 *рублей, по какой же причине Вы предлагаете мне столь смехотворную сумму, неблагодарный Вы тип! Я Вас плохо слышу, невежа! Извольте покинуть сие место! Иначе придётся применить рукоприкладство!*

Решение. Всё, корабль, всё в артстайла! Минус Артстайл, Куронити убирает Артстайла, Гоблин ультует, забрать надо хоть кого-то, стенку ставит, ой-ой-ой какая хорошая стена у толстой скотины. Пытается что-то сделать, не убивает никого, Фобос ультует, никого не забирает. Здесь крипы Лоста пытаются что-то сделать, их тут же убивает Кунка! На торрент опять все, все четверо попадают на торрент, Денди уходит просто с ТП, забирают Лоста, забирают Фобоса, забирают Гоблака, можно ливать, это, блять, не игра, это просто пошли они нахуй, блять!

Ответ: Somebody once told me the world is gonna roll me I ain't the sharpest tool in the shed She was looking kind of dumb with her finger and her thumb In the shape of an «L» on her forehead...

Контрольные вопросы

1. При каких множествах A, B (и C) верно равенство?

   a) $A \times B = B \times A$.

   b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

2. Всегда ли можно построить биекцию между множествами

$$(A \times B) \times C \text{ и } A \times (B \times C)?$$

3. Может ли бинарное отношение совпадать со своим дополнением? С обратным отношением?

4. Может ли функция $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть биекцией, если на некоторых интервалах она убывающая, а на других — возрастающая?

5. Может ли функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ являться сюръекцией, не являясь при этом инъекцией?

6. Если A — множество из n элементов ($n \in \mathbb{N}$), а U — множество всех функций из A в A, то каких функций в U больше: инъективных или сюръективных? Или же, может быть, их одинаковое количество?

7. Возможна ли ситуация, когда для любого натурального n композиция из n каких-то функций f равна этой функции f?

$$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = f.$$

8. Может ли бинарное отношение одновременно являться симметричным и антисимметричным? Рефлексивным и иррефлексивным?

9. Можно ли построить линейный порядок на множестве $\mathbb{C}$?

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.

2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.