Неделя 2. Практическое занятие
Отношения и функции
Разбор задач

Задание 1. *Выпишите все элементы множества A.*

a) $A = \{1,\ 2,\ 3\} \times \{a,\ b,\ c\}$.

b) $A = (\mathbb{N} \cap [e^2;\ \pi^2]) \times \mathbb{R}^{42} \times (B \div B)$, *где B — некоторое множество.*

c) $A = (X \times (Y \times Z)) \setminus ((X \times Y) \times Z)$, *где*

$$X = \{1,\ 2,\ 3\},\ Y = \{\pi,\ e\},\ Z = \{0\}.$$

Решение.

a) Чтобы выписать все элементы декартового произведения $X \times Y$, можно следовать такому алгоритму: каждому элементу множества X сопоставить каждый элемент множества Y. Таким образом получим следующие 9 векторов:

$$\begin{aligned} &\langle 1,\ a\rangle, \quad \langle 1,\ b\rangle, \quad \langle 1,\ c\rangle, \\ &\langle 2,\ a\rangle, \quad \langle 2,\ b\rangle, \quad \langle 2,\ c\rangle, \\ &\langle 3,\ a\rangle, \quad \langle 3,\ b\rangle, \quad \langle 3,\ c\rangle. \end{aligned}$$

b) Прежде чем что-то выписывать, заметим, что $B \div B = \varnothing$. Декартово произведение любого множества с пустым множеством даст нам пустое множество. Таким образом, мы получаем $A = \varnothing$.

c) Выпишем сначала векторы, получающиеся в результате $X \times (Y \times Z)$:

$$\begin{aligned} &\langle 1,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, \quad \langle 2,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, \quad \langle 3,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, \\ &\langle 1,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle, \quad \langle 2,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle, \quad \langle 3,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

А теперь векторы, получающиеся в результате $(X \times Y) \times Z$:

$$\begin{aligned} &\langle\langle 1,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, \quad \langle\langle 2,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, \quad \langle\langle 3,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, \\ &\langle\langle 1,\ e\rangle,\ 0\rangle, \quad \langle\langle 2,\ e\rangle,\ 0\rangle, \quad \langle\langle 3,\ e\rangle,\ 0\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Как можно заметить, хоть элементы векторов и совпадают, структуры они имеют разные. В первом случае мы имеем дело с векторами вида $\langle a,\ \langle b,\ c\rangle\rangle$, во втором же — с векторами вида $\langle\langle a,\ b\rangle,\ c\rangle$. Строго говоря, в общем случае декартово произведение не ассоциативно, то есть:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C). \tag{3}$$

Тем не менее, если в выражении $A \times B \times C$ нет скобок, его можно рассматривать как декартово произведение множеств:

$$A \times B \times C = \{\langle a,\ b,\ c\rangle \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}. \tag{4}$$

В результате мы получаем лишь векторы из $X \times (Y \times Z)$.

Ответ:

a) $\langle 1,\, a\rangle,\, \langle 1,\, b\rangle,\, \langle 1,\, c\rangle,\, \langle 2,\, a\rangle,\, \langle 2,\, b\rangle,\, \langle 2,\, c\rangle,\, \langle 3,\, a\rangle,\, \langle 3,\, b\rangle,\, \langle 3,\, c\rangle.$

b) Нет элементов.

c) $\langle 1,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle,\, \langle 2,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle,\, \langle 3,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle,\, \langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle,\, \langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle,\, \langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle.$

Задание 2. *Дано множество $\mathbb{B} = \{0,\, 1\}$. Для каждого натурального n найдите сумму количеств единиц в каждом из векторов множества $\mathbb{B}^n$. К примеру, при $n = 2$:*

$$\mathbb{B}^2 = \{\langle 0,\, 0\rangle,\, \langle 0,\, 1\rangle,\, \langle 1,\, 0\rangle,\, \langle 1,\, 1\rangle\},$$

в сумме получаем 4 единицы.

Решение. Заметим, что общее количество нулей и единиц для конкретного n есть ничто иное, как $n \cdot 2^n$. Действительно, множество $\mathbb{B}^n$ содержит 2^n векторов, каждый из которых состоит из n элементов (нулей и единиц). К примеру, для $n = 3$ имеем (8 векторов по 3 элемента в каждом):

$$\underset{(1)}{\langle 0,\, 0,\, 0\rangle},\, \underset{(2)}{\langle 0,\, 0,\, 1\rangle},\, \underset{(3)}{\langle 0,\, 1,\, 0\rangle},\, \underset{(4)}{\langle 0,\, 1,\, 1\rangle},$$
$$\underset{(5)}{\langle 1,\, 0,\, 0\rangle},\, \underset{(6)}{\langle 1,\, 0,\, 1\rangle},\, \underset{(7)}{\langle 1,\, 1,\, 0\rangle},\, \underset{(8)}{\langle 1,\, 1,\, 1\rangle}.$$

Заметим, что в сумме для всех векторов количество нулей и единиц совпадает. И вправду, для $n = 1$ это очевидно, а для каждого последующего n мы получаем векторы путём добавления нуля и единицы к каждому текущему вектору, то есть, к примеру, из $\mathbb{B}^2$ получаем следующие векторы для $\mathbb{B}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle 0,\, 0\rangle &\to \langle 0,\, 0,\, 0\rangle,\, \langle 0,\, 0,\, 1\rangle,\\
\langle 0,\, 1\rangle &\to \langle 0,\, 1,\, 0\rangle,\, \langle 0,\, 1,\, 1\rangle,\\
\langle 1,\, 0\rangle &\to \langle 1,\, 0,\, 0\rangle,\, \langle 1,\, 0,\, 1\rangle,\\
\langle 1,\, 1\rangle &\to \langle 1,\, 1,\, 0\rangle,\, \langle 1,\, 1,\, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Значит, в результате мы получаем $n \cdot 2^{n-1}$ единиц.

Ответ: $n \cdot 2^{n-1}$.

Задание 3. *Задана функция f:*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\;\; f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \left([x]^2 + \{x\}^2\right), \tag{5}$$

Найдите область определения и множество значений функции f. Определите, является ли функция инъекцией, сюръекцией, биекцией.

Контрольные вопросы

1. При каких множествах A, B и C верны равенства?

a) $A \times B = B \times A$.

b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.

2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.