

Неделя 1. Практическое занятие

Множества, мультимножества, алгебра множеств

Разбор задач

Задание 1. При условии, что $A \subseteq B$, докажите:

- a) $A \cup B = B$,
- b) $A \cap B = A$,
- c) $A \div B = B \setminus A$.

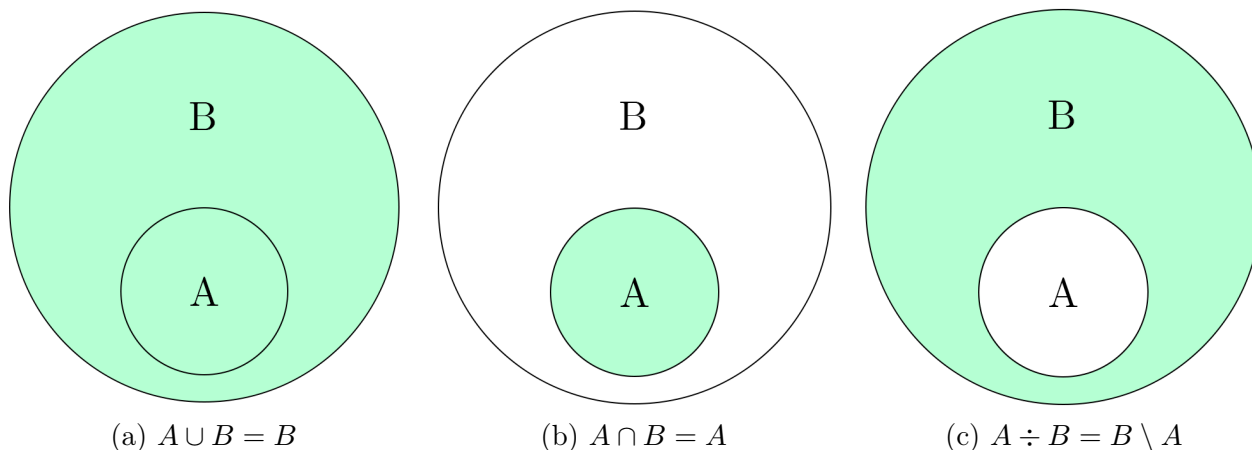
Решение. Опустим тривиальные случаи, когда одно (или оба) из множеств: A или B , — является пустым.

- a) Так как любой элемент, находящийся в A , находится и в B , то при объединении A с B , что равносильно $B \cup A$ (по свойству коммутативности), мы сначала возьмём все элементы из B , после чего добавим к ним ещё какие-то элементы из B (то есть, элементы из A), что, очевидно, даст нам в результате множество B . \square
- b) Рассуждая подобным образом: мы должны взять элементы, которые находятся в обоих множествах, то есть все элементы из A . \square
- c) По определению:

$$A \div B = \underbrace{(A \cup B)}_B \setminus \underbrace{(A \cap B)}_A = B \setminus A. \quad \square$$

Данное доказательство может быть проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера—Венна. И, хотя строгим математическим доказательством эту иллюстрацию назвать нельзя, доказанные равенства на её фоне могут показаться довольно очевидными.

Рис. 1: Иллюстрация доказательства диаграммами Эйлера—Венна



Задание 2. Доказать равенство:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (1)$$

Решение. Множества A и B равны тогда и только тогда, когда A — подмножество B , и B — подмножество A , то есть:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A. \quad (2)$$

Иными словами, для доказательства (1) нам достаточно показать, что

$$\underbrace{(\overline{A \cap B}) \subseteq (\bar{A} \cup \bar{B})}_{1.} \text{ и } \underbrace{(\bar{A} \cup \bar{B}) \subseteq (\overline{A \cap B})}_{2.}$$

1. Пусть $x \in \overline{A \cap B}$, тогда $x \in \mathbb{U} \setminus (A \cap B)$, а значит $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A \cap B$, следовательно

$$x \in \mathbb{U} \text{ и } x \notin A \text{ или } x \in \mathbb{U} \text{ и } x \notin B.$$

- Если $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A$, то $x \in \bar{A}$ и, следовательно, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Аналогично доказывается случай с $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin B$.

2. Пусть $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$, тогда, по определению операции объединения, $x \in \bar{A}$ или $x \in \bar{B}$.

- Если $x \in \bar{A}$, тогда $x \in \mathbb{U} \setminus A$, а значит $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A$. Если элемент не принадлежит какому-либо множеству C , то он не будет принадлежать и пересечению данного множества C с любым другим множеством, то есть $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$, а это значит, что если $x \in \mathbb{U} \setminus (A \cap B)$, то $x \in \overline{A \cap B}$.
- Аналогично доказывается случай с $x \in \bar{B}$. □

Задание 3. Известно, что натуральное число n принадлежит множеству D тогда и только тогда, когда количество его делителей чётно. То есть, например, числа 2, 3 и 5 принадлежат D , а 1 и 4 — нет. Дано множество P , которое является множеством простых чисел, и множество S :

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2^{1729}\}. \quad (3)$$

Определите, в каком из двух множеств: A и Z , — больше элементов (или, если в обоих множествах количество элементов одинаково, укажите это):

- $A = S \cap P, Z = S \cap (D \cap P);$
- $A = S \cap (P \div D), Z = S \cap (D \cup P);$
- $A = S \cap (P \div (D \setminus \mathbb{N})), Z = S \cap (D \cup P \cap D).$

Решение. Заметим, что $P \subseteq D$, так как любое простое число p имеет 2 делителя: 1 и p .

а) $P \subseteq D \Rightarrow D \cap P = P \Rightarrow A = B \Rightarrow$ количество элементов одинаково.

- б) Довольно очевидно, что $(P \div D) \subseteq (D \cup P)$ — это значит, что в B элементов не меньше, чем в A . Рассмотрим число 2, которое, конечно, не принадлежит $P \div D$, а значит, не принадлежит и A , но, с другой стороны, оно, естественно, принадлежит B , что говорит нам о том, что в B элементов больше, чем в A .
- с) Понятно, что $D \setminus \mathbb{N} = \emptyset$, нетрудно догадаться, что $P \div \emptyset = P$, то есть $A = S \cap P$. Заметим, что $D \cup P \cap D = D$, то есть $B = S \cap D$. Как уже было сказано ранее, $P \subseteq D$, причём число 6 принадлежит лишь одному из этих двух множеств — множеству D , другими словами, в B элементов больше, чем в A .

Ответ: а) Количество элементов одинаково. б, с) В B элементов больше.

Задание 4. Найдите наименьшее положительное значение параметра σ , при котором количество подмножеств множества $S \cap L$ будет равно 4^t , где t — натуральное число:

$$\begin{aligned} S &= \{n \in \mathbb{N} \mid n = 1 + 2 + 3 + \dots + k, \text{ где } k \text{ — некоторое натуральное число}\}, \\ L &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq \sigma\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение. Как известно, у множества из n элементов имеется 2^n подмножеств, то есть, нам нужно подобрать такое значение σ , что у множества $S \cap L$ будет $2t$ элементов ($2^{2t} = 4^t$).

Рассмотрим для начала, как выглядят элементы множеств S и L . Для L всё довольно просто:

$$L = \{1, 2, 3, \dots, \sigma\}. \quad (5)$$

Что же касается S , то тут нам нужно вспомнить формулу суммы арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (6)$$

То есть, множество S имеет вид:

$$S = \left\{1, 3, 6, 10, \dots, \frac{k(k+1)}{2}, \dots\right\}. \quad (7)$$

Понятно, что любое число из S находится и в L (если взять достаточно большое σ). То есть, нам нужно ограничить множество S таким образом, чтобы в нём осталось лишь $2t$ элементов. Судя по формуле (6), минимальным положительным значением σ будет $\frac{1}{2}(2t(2t+1))$.

Ответ: $\sigma = \frac{1}{2}(2t(2t+1))$.

Задание 5. Даны множества A и B :

$$A = \mathbb{Z} \div \left\{1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots\right\}, \quad B = \left\{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \dots\right\}. \quad (8)$$

Найдите $A \setminus B$.

Решение. Рассмотрим сначала последовательность чисел:

$$\left(1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots\right).$$

Стремится она, очевидно, к числу 2, однако само это число не содержит, следовательно, множество A может быть представлено следующим образом:

$$A = (\mathbb{Z} \setminus \{1\}) \cup \left\{1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots\right\}. \quad (9)$$

Множество B же содержит числа вида:

$$\frac{n}{100}, \text{ где } n — \text{целое неотрицательное число.} \quad (10)$$

Исключив из A элементы множества B , получим ответ.

Ответ: $A \setminus B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\} \cup \left\{1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, \dots\right\}.$

Задание 6. Докажите тождество:

$$\overline{A \cap B \cap C} = (A \cup B \cap A) \cup B \cup \left(\left(C \setminus (A \cap B \cap \overline{A \cap B \cap C}) \right) \cup C \right). \quad (11)$$

Решение. Чтобы доказать тождество, достаточно привести одну часть к другой, либо же упростить оба выражения и убедиться, что они идентичны. Воспользуемся вторым методом. Упростим сначала первое выражение, используя закон двойственности де Моргана, а так же свойство $\overline{\overline{A}} = A$:

$$\overline{A \cap B \cap C} = A \cup \overline{B \cap C} = A \cup B \cup C. \quad (12)$$

Осталось лишь привести второе выражение к виду (12). Рассмотрим второе выражение, выделив части (а) и (б):

$$\underbrace{(A \cup B \cap A)}_{(a)} \cup \underbrace{\left(\left(C \setminus (A \cap B \cap \overline{A \cap B \cap C}) \right) \cup C \right)}_{(b)}.$$

- (а) Заметим, что в выражении $A \cup B \cap A$ происходит объединение множества A с вложенным в него множеством $B \cap A$, что, разумеется, в результате даст множество A .
- (б) Здесь же неважно, что вычитается из множества C , так как далее происходит объединение с этим самым C , то есть, в итоге мы получаем C .

Таким образом, второе выражение упрощается до следующего:

$$A \cup B \cup C, \quad (13)$$

которое, как можно заметить, равно первому. □

Задание 7. Множество Q определено следующим образом:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1-x^2} \geq \sqrt[4]{1-x} \right\}. \quad (14)$$

Запишите множество Q в виде объединения точек/отрезков/интервалов.

Решение. По выражению (14) можно сказать, что множество Q представляет собой множество решений неравенства:

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt[4]{1-x}$$

относительно вещественной переменной x . Чтобы решить это неравенство, необходимо для начала найти множество допустимых значений x (ОДЗ). Как известно, функция $\sqrt[n]{x}$, где n — некоторое натуральное число, определена лишь при неотрицательном x . Значит, ОДЗ определяется как $[-1; 1] \cap (-\infty; 1] = [-1; 1]$. Теперь возведём обе части неравенства в четвёртую степень, после чего упростим его:

$$(1-x^2)^2 \geq 1-x \Leftrightarrow x(x^3-2x+1) \geq 0.$$

Найдём корни уравнения $x(x^3-2x+1) = 0$. Очевидно, что один из корней — 0. Как известно, многочлен с целыми коэффициентами имеет как минимум один целый корень, который делит свободный член (в данном случае, 1). Перебираем возможные делители (то есть, 1 и -1), получаем корень 1. То есть, получаем следующее уравнение:

$$x(x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

Решаем квадратное уравнение и получаем ещё 2 корня:

$$x_1 = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\approx -1.618}, \quad x_2 = \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\approx 0.618}.$$

Дальнейшее решение неравенства тривиально (можно, например, применить метод интервалов, не забыв при этом про ОДЗ), поэтому просто выпишем ответ.

Ответ: $Q = [0; \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})] \cup \{1\}$.

Задание 8. Верны ли следующие утверждения?

- a) $\{a, i, u, e, o\} = \{\{a, i, u, e, o\}\}$,
- b) $\{\{a\}, \{i\}, \{u\}, \{e\}, \{o\}\} = \{a, i, u, e, o\}$,
- c) $\{a, \{i, \{u, \{e, \{o\}\}\}\}\} = \{\{\{\{\{o\}, e\}, u\}, i\}, a\}$.

Решение.

- a) Разумеется, нет, так как первое множество содержит 5 элементов, а второе — 1 (оно содержит одно множество из пяти элементов).

- b) Опять же, нет, так как $\{a\}$ и a суть разные вещи. Первое есть ничто иное, как *множество*, содержащее некий элемент a , а второе — сам *элемент* a .
- c) А вот здесь уже другой случай — второе множество просто содержит элементы первого в другом порядке, но множество — не последовательность, то есть порядок элементов не имеет значения. То есть, множества равны.

$$\begin{aligned}
& \{\{\{\{\{o\}, e\}, u\}, i\}, a\} = \\
& = \{a, \{\{\{\{o\}, e\}, u\}, i\}\} = \\
& = \{a, \{i, \{\{\{o\}, e\}, u\}\}\} = \\
& = \{a, \{i, \{u, \{\{o\}, e\}\}\}\} = \\
& = \{a, \{i, \{u, \{e, \{o\}\}\}\}\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ответ: а, b) Нет. c) Да.

Задание 9. Даны множества A, B, C, \dots, Z :

$$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, b, c\}, \dots, Z = \{a, b, c, \dots, z\}. \tag{16}$$

Дано так же множество $\Omega = \{A, B, C, \dots, Z\}$. Для каждого из множеств: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, — сосчитайте количество подмножеств:

- $\Gamma_1 = A \cup B \cup C \cup \dots \cup Z$,
- $\Gamma_2 = A \div B \div C \div \dots \div Z$,
- $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup (\Omega \setminus \Gamma_1)$.

Решение.

- Понятно, что $A \subset B \subset C \subset \dots \subset Z$, поэтому объединение всех этих множеств даст нам Z . То есть, $\Gamma_1 = Z$, количество подмножеств равно 2^{26} (в английском алфавите 26 букв).
- Обобщим операцию симметричной разности (\div) на n множеств. Выпишем несколько первых результатов:

$$\begin{aligned}
A &= \{a\}, \\
A \div B &= \{b\}, \\
A \div B \div C &= \{a, c\}, \\
A \div B \div C \div D &= \{b, d\}, \\
A \div B \div C \div D \div E &= \{a, c, e\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Можно заметить, что каждый элемент появляется «через раз», то есть если мы применим операцию симметричной разности к n множествам, то определить, входит какой-либо элемент α в результат или нет можно следующим образом: если в сумме во всех n множествах он встретился нечётное количество раз, то мы включаем его в результат, иначе — нет.

Таким образом, следуя вышеуказанной логике и учитывая, что элемент a встречается нам 26 раз, b — 25, c — 24, ..., z — 1, получаем:

$$\Gamma_2 = \{b, d, f, h, j, l, n, p, r, t, v, x, z\}. \quad (18)$$

Количество подмножеств — 2^{13} .

- Ясно, что $\Omega \setminus \Gamma_1 = \Omega$, так как Ω состоит из множеств A, \dots, Z , а $\Gamma_1 = Z$ — из элементов a, \dots, z . Следуя той же логике, получаем:

$$\Gamma_3 = \{b, d, f, h, j, l, n, p, r, t, v, x, z, A, B, C, \dots, Z\}. \quad (19)$$

Количество подмножеств — 2^{39} .

Ответ: а) 2^{26} . б) 2^{13} . в) 2^{39} .

Задание 10. Дана функция $m(n)$ натуральной переменной n , которая равна мультимножеству, состоящему из нулей и единиц двоичной записи числа n . К примеру,

$$m(1_{10}) = \{1\}, m(2_{10}) = \{1, 0\}, m(10_{10}) = \{1, 0, 1, 0\}.$$

Существуют ли такие числа α и β , что

$$m(\alpha) = m(\beta), \alpha \neq \beta? \quad (20)$$

Если да, то для любого ли числа α можно найти такое β , что выполняется (20)? Если не для любого, то укажите все такие α , для которых не существует β , при котором выполняется (20).

Решение. Такие числа действительно существуют, к примеру:

$$\alpha = 5_{10} = 101_2, \beta = 6_{10} = 110_2, m(\alpha) = m(\beta) = \{1, 1, 0\}. \quad (21)$$

Объясняется это тем, что, как и в множествах, в мультимножествах порядок следования элементов не имеет значения.

Но не для любого α существует соответствующее β , например, для единицы такого β не существует, так как любое число, большее единицы, содержит либо один ноль, либо большее количество единиц в двоичной записи.

Единица — не единственное число, для которого не существует соответствующего β , подойдёт любое число, в двоичной записи которого нельзя переставить цифры таким образом, чтобы получилось другое число. Под такое описание подходят лишь числа следующего вида:

$$\begin{array}{llllll} 1_{10} = 1_2, & 3_{10} = 11_2, & 7_{10} = 111_2, & 15_{10} = 1111_2, & 31_{10} = 11111_2, & \dots \\ 2_{10} = 10_2, & 4_{10} = 100_2, & 8_{10} = 1000_2, & 16_{10} = 10000_2, & 32_{10} = 100000_2, & \dots \end{array} \quad (22)$$

Действительно, если в двоичной записи числа есть как минимум две единицы и ноль, то младшую единицу можно поменять местами с этим нулём, получив другое число.

Ответ: Существуют. Не для любого. $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31, 32, \dots\}$.

Контрольные вопросы

1. Отличается ли множество \emptyset от $\{\emptyset\}$? Если да, то чем?
 2. Какие условия для множеств A и B должны выполняться, чтобы следующие утверждения были верны?
 - a) $A \setminus B = A$,
 - b) $B \setminus A = \emptyset$,
 - c) $A \cap B = A \cup B$.
- Уточнение:** условия нужно указывать для каждого утверждения отдельно (не нужно указывать условия, при которых верны сразу все утверждения).
3. Может ли количество элементов множества A совпадать с количеством подмножеств A ?
 4. Множество — обобщение понятия мультимножества или же, наоборот, мультимножество — обобщение понятия множества?
 5. Если $A \cup B = B$, значит ли это, что $A \subseteq B$?
 6. Равны ли:
 - a) Множества $\{a, b, c\}$ и $\{b, c, a\}$?
 - b) Мультимножества $\{\alpha, \alpha, \beta\}$ и $\{\beta, \alpha, \alpha\}$?
 - c) Мультимножества $\{\alpha, \alpha\}$ и $\{\alpha\}$?
 7. Сколько подмножеств у множества \emptyset ?
 8. Если $A \div B \div C \div \dots \div Z = \emptyset$, значит ли это, что одно из множеств A, B, C, \dots, Z — пустое?
 9. Существует ли такой элемент α , что $\{\alpha\} = \{\{\alpha\}\}$? Если да, то какой?

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.
2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.