

Неделя 1. Домашнее задание

Множества, мультимножества, алгебра множеств

Задание 1. Даны множества A, B, C :

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 2017\}, B = \{2, 3, 4, \dots, 2018\}, C = \{3, 4, 5, \dots, 2019\}.$$

Упростите выражение:

$$(A \cup B) \div (A \cup C) \div (B \cup C). \quad (1)$$

Задание 2. Найдите пересечение множеств A и B :

$$A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cap \left\{ -\frac{256}{1}, \frac{256}{2}, -\frac{256}{4}, \frac{256}{8}, \dots \right\}, B = \mathbb{Z} \cup \left\{ -\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots \right\}. \quad (2)$$

Задание 3. Докажите тождество:

$$((A \cap A \cup A \cap C) \cap (B \cap (B \cup C))) \cap C = \overline{B \cup \bar{C} \cup \bar{A}}. \quad (3)$$

Задание 4. Найдите наименьшее положительное значение параметра λ , при котором количество подмножеств множества P будет равно 64.

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda \text{ делится на } n\}. \quad (4)$$

Задание 5. Множество A определено следующим образом:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \arcsin(x^2 - x - 1) = 0 \text{ или } \sqrt{\pi} - (x + 1)^2 > 0\}. \quad (5)$$

Запишите множество A в виде объединения точек/отрезков/интервалов.

Задание 6. Используя основные законы алгебры множеств, упростите следующее выражение:

$$\left(A \div \left(\overline{A \cup B} \right) \right) \cap ((A \cup B) \div (A \cap B)) \quad (6)$$

при условии, что множества A и B не пересекаются.

Задание 7. Даны множества X, Y и Z :

$$X = \{a, b, c, \dots, z\}, Y = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots, \{z\}\}, Z = \{\{a, b, c, \dots, z\}\}. \quad (7)$$

Найдите:

a) $X \cap Y \cap Z$,

b) $(X \cup Z) \setminus ((X \cup Y) \cap (Y \cup Z))$,

c) $X \div ((X \cup Y) \div (X \cup Y \cup Z))$.

Задание 8. Верно ли следующее утверждение?

$$(A \cup B \cup C \cup D) \div (A \cap B \cap C \cap D) = A \cup B \cup C \cup D \iff A \cap B \cap C \cap D = \emptyset. \quad (8)$$

Задание 9. Упростите выражение:

$$\overline{\overline{(A \div ((B \cup (B \cap C)) \cap \bar{B}))} \cap \overline{(B \cup C \cap B) \cup B} \cap \overline{(C \setminus \bar{C})}}. \quad (9)$$

Задание 10. Определите, тождественны ли следующие выражения:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \stackrel{?}{=} (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \setminus (A_1 \div A_2 \div \dots \div A_n) \quad (10)$$

для любого натурального n , большего единицы.

Задание 11. Даны множества P_1, \dots, P_n , где n — натуральное число. Множество P_k представляет собой множество всех натуральных степеней числа $2^{p(k)}$, где $p(k)$ — простое число под номером k . То есть:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(2^2)^1, (2^2)^2, (2^2)^3, (2^2)^4, \dots\}, \\ P_2 &= \{(2^3)^1, (2^3)^2, (2^3)^3, (2^3)^4, \dots\}, \\ P_3 &= \{(2^5)^1, (2^5)^2, (2^5)^3, (2^5)^4, \dots\}, \\ P_4 &= \{(2^7)^1, (2^7)^2, (2^7)^3, (2^7)^4, \dots\}, \\ &\text{и так далее.} \end{aligned} \quad (11)$$

Дано множество P :

$$P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_n. \quad (12)$$

Найдите наименьшее число, принадлежащее множеству P .

Задание 12. Упростите выражение:

$$\left(\overline{(A \cap B \cap C \cap D) \div (A \cup B \cup C \cup D)} \right) \cap ((A \cap B \cap C \cap D) \cap (A \cup B \cup C \cup D)). \quad (13)$$