Неделя 1. Практическое занятие
Множества, мультимножества, алгебра множеств
Разбор задач

> **Задание 1**. *При условии, что $A \subseteq B$, докажите:*
>
> *a)* $A \cup B = B$,
>
> *b)* $A \cap B = A$,
>
> *c)* $A \div B = B \setminus A$.

Решение. Опустим тривиальные случаи, когда одно (или оба) из множеств: A или B, — является пустым.

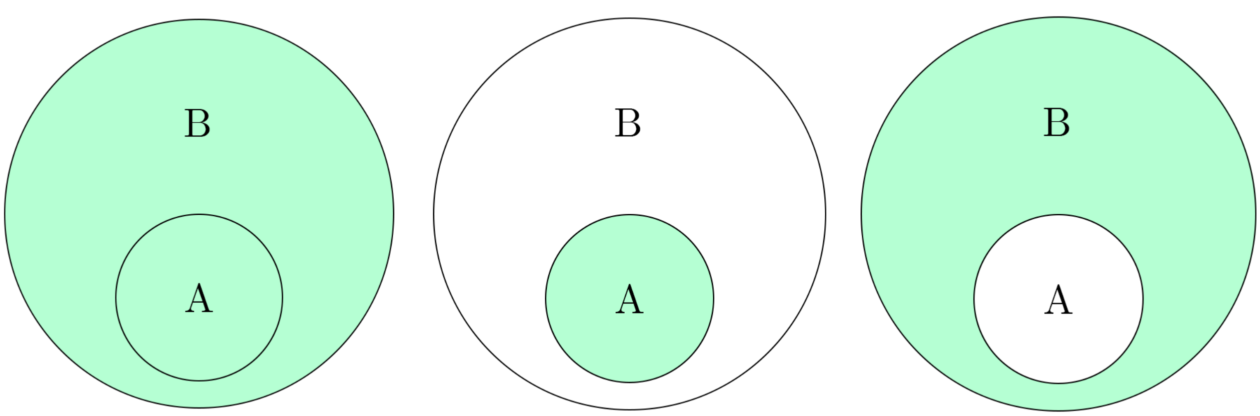
a) Так как любой элемент, находящийся в A, находится и в B, то при объединении A с B, что равносильно $B \cup A$ (по свойству коммутативности), мы сначала возьмём все элементы из B, после чего добавим к ним ещё какие-то элементы из B (то есть, элементы из A), что, очевидно, даст нам в результате множество B. $\square$

b) Рассуждая подобным образом: мы должны взять элементы, которые находятся в обоих множествах, то есть все элементы из A. $\square$

c) По определению:
$$A \div B = \underbrace{(A \cup B)}_{B} \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{A} = B \setminus A. \quad \square$$

Данное доказательство может быть проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера—Венна. И, хотя строгим математическим доказательством эту иллюстрацию назвать нельзя, доказанные равенства на её фоне могут показаться довольно очевидными.

Рис. 1: Иллюстрация доказательства диаграммами Эйлера—Венна



(a) $A \cup B = B$ (b) $A \cap B = A$ (c) $A \div B = B \setminus A$

Задание 2. *Доказать равенство:*

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \tag{1}$$

Решение. Множества A и B равны тогда и только тогда, когда A — подмножество B, и B — подмножество A, то есть:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A. \tag{2}$$

Иными словами, для доказательства (1) нам достаточно показать, что

$$\underbrace{\left(\overline{A \cap B}\right) \subseteq \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right)}_{1.} \text{ и } \underbrace{\left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) \subseteq \left(\overline{A \cap B}\right)}_{2.}.$$

1. Пусть $x \in \overline{A \cap B}$, тогда $x \in \mathbb{U} \setminus (A \cap B)$, а значит $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A \cap B$, следовательно

$$x \in \mathbb{U} \text{ и } x \notin A \text{ или } x \in \mathbb{U} \text{ и } x \notin B.$$

   - Если $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A$, то $x \in \bar{A}$ и, следовательно, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
   - Аналогично доказывается случай с $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin B$.

2. Пусть $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$, тогда, по определению операции объединения, $x \in \bar{A}$ или $x \in \bar{B}$.

   - Если $x \in \bar{A}$, тогда $x \in \mathbb{U} \setminus A$, а значит $x \in \mathbb{U}$ и $x \notin A$. Если элемент не принадлежит какому-либо множеству C, то он не будет принадлежать и пересечению данного множества C с любым другим множеством, то есть $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B$, а это значит, что если $x \in \mathbb{U} \setminus (A \cap B)$, то $x \in \overline{A \cap B}$.
   - Аналогично доказывается случай с $x \in \bar{B}$. $\square$

Задание 3. *Известно, что натуральное число n принадлежит множеству D тогда и только тогда, когда количество его делителей чётно. То есть, например, числа 2, 3 и 5 принадлежат D, а 1 и 4 — нет. Дано множество P, которое является множеством простых чисел, и множество S:*

$$S = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 2^{1729}\right\}. \tag{3}$$

Определите, в каком из двух множеств: A и Z, — больше элементов (или, если в обоих множествах количество элементов одинаково, укажите это):

a) $A = S \cap P$, $Z = S \cap (D \cap P)$;

b) $A = S \cap (P \div D)$, $Z = S \cap (D \cup P)$;

c) $A = S \cap (P \div (D \setminus \mathbb{N}))$, $Z = S \cap (D \cup P \cap D)$.

Решение. Заметим, что $P \subseteq D$, так как любое простое число p имеет 2 делителя: 1 и p.

a) $P \subseteq D \Rightarrow D \cap P = P \Rightarrow A = B \Rightarrow$ количество элементов одинаково.

b) Довольно очевидно, что $(P \div D) \subseteq (D \cup P)$ — это значит, что в B элементов не меньше, чем в A. Рассмотрим число 2, которое, конечно, не принадлежит $P \div D$, а значит, не принадлежит и A, но, с другой стороны, оно, естественно, принадлежит B, что говорит нам о том, что в B элементов больше, чем в A.

c) Понятно, что $D \setminus \mathbb{N} = \varnothing$, нетрудно догадаться, что $P \div \varnothing = P$, то есть $A = S \cap P$. Заметим, что $D \cup P \cap D = D$, то есть $B = S \cap D$. Как уже было сказано ранее, $P \subseteq D$, причём число 6 принадлежит лишь одному из этих двух множеств — множеству D, другими словами, в B элементов больше, чем в A.

Ответ: a) Количество элементов одинаково. b, c) В B элементов больше.

Задание 4. *Найдите наименьшее положительное значение параметра σ, при котором количество подмножеств множества $S \cap L$ будет равно 4^t, где t — натуральное число:*

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 1 + 2 + 3 + \ldots + k, \text{ где } k \text{ — некоторое натуральное число}\},$$
$$L = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant \sigma\}. \tag{4}$$

Решение. Как известно, у множества из n элементов имеется 2^n подмножеств, то есть, нам нужно подобрать такое значение σ, что у множества $S \cap L$ будет $2t$ элементов $(2^{2t} = 4^t)$.

Рассмотрим для начала, как выглядят элементы множеств S и L. Для L всё довольно просто:

$$L = \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, \sigma\}. \tag{5}$$

Что же касается S, то тут нам нужно вспомнить формулу суммы арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{6}$$

То есть, множество S имеет вид:

$$S = \left\{1,\, 3,\, 6,\, 10,\, \ldots,\, \frac{k(k+1)}{2},\, \ldots\right\}. \tag{7}$$

Понятно, что любое число из S находится и в L (если взять достаточно большое σ). То есть, нам нужно ограничить множество S таким образом, чтобы в нём осталось лишь $2t$ элементов. Судя по формуле (6), минимальным положительным значением σ будет $\frac{1}{2}(2t(2t+1))$.

Ответ: $\sigma = \frac{1}{2}(2t(2t+1))$.

Задание 5. *Даны множества A и B:*

$$A = \mathbb{Z} \div \left\{1,\, 1 + \frac{1}{2},\, 1 + \frac{3}{4},\, 1 + \frac{7}{8},\, \ldots\right\},\ B = \left\{0,\, \frac{1}{100},\, \frac{2}{100},\, \frac{3}{100},\, \ldots\right\}. \tag{8}$$

Найдите $A \setminus B$.

Решение. Рассмотрим сначала последовательность чисел:

$$\left(1,\, 1+\frac{1}{2},\, 1+\frac{3}{4},\, 1+\frac{7}{8},\, \ldots\right).$$

Стремится она, очевидно, к числу 2, однако само это число не содержит, следовательно, множество A может быть представлено следующим образом:

$$A = (\mathbb{Z} \setminus \{1\}) \cup \left\{1+\frac{1}{2},\, 1+\frac{3}{4},\, 1+\frac{7}{8},\, \ldots\right\}. \tag{9}$$

Множество B же содержит числа вида:

$$\frac{n}{100},\ \text{ где } n \text{ — целое неотрицательное число.} \tag{10}$$

Исключив из A элементы множества B, получим ответ.

Ответ: $A \setminus B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\} \cup \left\{1+\frac{1}{2},\, 1+\frac{3}{4},\, 1+\frac{7}{8},\, \ldots\right\}$.

Задание 6. *Докажите тождество:*

$$\overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}} = (A \cup B \cap A) \cup B \cup \left(\left(C \setminus \left(A \cap B \cap \overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}}\right)\right) \cup C\right). \tag{11}$$

Решение. Чтобы доказать тождество, достаточно привести одну часть к другой, либо же упростить оба выражения и убедиться, что они идентичны. Воспользуемся вторым методом. Упростим сначала первое выражение, использовав закон двойственности де Моргана, а так же свойство $\bar{\bar{A}} = A$:

$$\overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}} = A \cup \overline{\bar{B} \cap \bar{C}} = A \cup B \cup C. \tag{12}$$

Осталось лишь привести второе выражение к виду (12). Рассмотрим второе выражение, выделив части (a) и (b):

$$\underbrace{(A \cup B \cap A)}_{(a)} \cup B \cup \underbrace{\left(\left(C \setminus \left(A \cap B \cap \overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}}\right)\right) \cup C\right)}_{(b)}.$$

(a) Заметим, что в выражении $A \cup B \cap A$ происходит объединение множества A с вложенным в него множеством $B \cap A$, что, разумеется, в результате даст множество A.

(b) Здесь же неважно, что вычитается из множества C, так как далее происходит объединение с этим самым C, то есть, в итоге мы получаем C.

Таким образом, второе выражение упрощается до следующего:

$$A \cup B \cup C, \tag{13}$$

которое, как можно заметить, равно первому. □

Задание 7. *Множество Q определено следующим образом:*

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{1-x^2} \geqslant \sqrt[4]{1-x}\right\}. \tag{14}$$

Запишите множество Q в виде объединения точек/отрезков/интервалов.

Решение. По выражению (14) можно сказать, что множество Q представляет собой множество решений неравенства:

$$\sqrt{1-x^2} \geqslant \sqrt[4]{1-x}$$

относительно вещественной переменной x. Чтобы решить это неравенство, необходимо для начала найти множество допустимых значений x (ОДЗ). Как известно, функция $\sqrt[2n]{x}$, где n — некоторое натуральное число, определена лишь при неотрицательном x. Значит, ОДЗ определяется как $[-1;\ 1] \cap (-\infty;\ 1] = [-1;\ 1]$. Теперь возведём обе части неравенства в четвёртую степень, после чего упростим его:

$$(1-x^2)^2 \geqslant 1-x \Leftrightarrow x(x^3-2x+1) \geqslant 0.$$

Найдём корни уравнения $x(x^3-2x+1) = 0$. Очевидно, что один из корней — 0. Как известно, многочлен с целыми коэффициентами имеет как минимум один целый корень, который делит свободный член (в данном случае, 1). Перебираем возможные делители (то есть, 1 и -1), получаем корень 1. То есть, получаем следующее уравнение:

$$x(x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

Решаем квадратное уравнение и получаем ещё 2 корня:

$$x_1 = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\approx -1.618},\ x_2 = \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\approx 0.618}.$$

Дальнейшее решение неравенства тривиально (можно, например, применить метод интервалов, не забыв при этом про ОДЗ), поэтому просто выпишем ответ.

Ответ: $Q = \left[0;\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right] \cup \{1\}$.

Задание 8. *Верны ли следующие утверждения?*

a) $\{a,\ i,\ u,\ e,\ o\} = \{\{a,\ i,\ u,\ e,\ o\}\}$,

b) $\{\{a\},\ \{i\},\ \{u\},\ \{e\},\ \{o\}\} = \{a,\ i,\ u,\ e,\ o\}$,

c) $\{a,\ \{i,\ \{u,\ \{e,\ \{o\}\}\}\}\} = \{\{\{\{\{o\},\ e\},\ u\},\ i\},\ a\}$.

Решение.

a) Разумеется, нет, так как первое множество содержит 5 элементов, а второе — 1 (оно содержит одно множество из пяти элементов).

b) Опять же, нет, так как $\{a\}$ и a суть разные вещи. Первое есть ничто иное, как *множество*, содержащее некий элемент a, а второе — сам *элемент* a.

c) А вот здесь уже другой случай — второе множество просто содержит элементы первого в другом порядке, но множество — не последовательность, то есть порядок элементов не имеет значения. То есть, множества равны.

$$\begin{aligned} & \{\{\{\{\{o\}, e\}, u\}, i\}, a\} = \\ = \; & \{a, \{\{\{\{o\}, e\}, u\}, i\}\} = \\ = \; & \{a, \{i, \{\{\{o\}, e\}, u\}\}\} = \\ = \; & \{a, \{i, \{u, \{\{o\}, e\}\}\}\} = \\ = \; & \{a, \{i, \{u, \{e, \{o\}\}\}\}\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ответ: a, b) Нет. c) Да.

Задание 9. *Даны множества A, B, C, …, Z:*

$$A = \{a\},\ B = \{a, b\},\ C = \{a, b, c\},\ \ldots,\ Z = \{a, b, c, \ldots, z\}. \tag{16}$$

Дано так же множество $\Omega = \{A, B, C, \ldots, Z\}$. Для каждого из множеств: Γ_1, Γ_2, Γ_3, — сосчитайте количество подмножеств:

- $\Gamma_1 = A \cup B \cup C \cup \ldots \cup Z$,
- $\Gamma_2 = A \div B \div C \div \ldots \div Z$,
- $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup (\Omega \setminus \Gamma_1)$.

Решение.

- Понятно, что $A \subset B \subset C \subset \ldots \subset Z$, поэтому объединение всех этих множеств даст нам Z. То есть, $\Gamma_1 = Z$, количество подмножеств равно 2^{26} (в английском алфавите 26 букв).

- Обобщим операцию симметричной разности ($\div$) на n множеств. Выпишем несколько первых результатов:

$$\begin{aligned} A &= \{a\}, \\ A \div B &= \{b\}, \\ A \div B \div C &= \{a, c\}, \\ A \div B \div C \div D &= \{b, d\}, \\ A \div B \div C \div D \div E &= \{a, c, e\}. \end{aligned} \tag{17}$$

  Можно заметить, что каждый элемент появляется «через раз», то есть если мы применяем операцию симметричной разности к n множествам, то определить, входит какой-либо элемент α в результат или нет можно следующим образом: если в сумме во всех n множествах он встретился нечётное количество раз, то мы включаем его в результат, иначе — нет.

Таким образом, следуя вышеуказанной логике и учитывая, что элемент a встречается нам 26 раз, b — 25, c — 24, …, z — 1, получаем:

$$\Gamma_2 = \{b,\ d,\ f,\ h,\ j,\ l,\ n,\ p,\ r,\ t,\ v,\ x,\ z\}. \tag{18}$$

Количество подмножеств — 2^{13}.

- Ясно, что $\Omega \setminus \Gamma_1 = \Omega$, так как Ω состоит из множеств $A, \ldots, Z$, а $\Gamma_1 = Z$ — из элементов $a, \ldots, z$. Следуя той же логике, получаем:

$$\Gamma_3 = \{b,\ d,\ f,\ h,\ j,\ l,\ n,\ p,\ r,\ t,\ v,\ x,\ z,\ A,\ B,\ C,\ \ldots,\ Z\}. \tag{19}$$

Количество подмножеств — 2^{39}.

Ответ: a) 2^{26}. b) 2^{13}. c) 2^{39}.

Задание 10. *Дана функция $m(n)$ натуральной переменной n, которая равна мультимножеству, состоящему из нулей и единиц двоичной записи числа n. К примеру,*

$$m(1_{10}) = \{1\},\ m(2_{10}) = \{1,\ 0\},\ m(10_{10}) = \{1,\ 0,\ 1,\ 0\}.$$

Существуют ли такие числа α и β, что

$$m(\alpha) = m(\beta),\ \alpha \neq \beta? \tag{20}$$

Если да, то для любого ли числа α можно найти такое β, что выполняется (20)*? Если не для любого, то укажите все такие α, для которых не существует β, при котором выполняется* (20).

Решение. Такие числа действительно существуют, к примеру:

$$\alpha = 5_{10} = 101_2,\ \beta = 6_{10} = 110_2,\ m(\alpha) = m(\beta) = \{1,\ 1,\ 0\}. \tag{21}$$

Объясняется это тем, что, как и в множествах, в мультимножествах порядок следования элементов не имеет значения.

Но не для любого α существует соответствующее β, например, для единицы такого β не существует, так как любое число, большее единицы, содержит либо один ноль, либо большее количество единиц в двоичной записи.

Единица — не единственное число, для которого не существует соответствующего β, подойдёт любое число, в двоичной записи которого нельзя переставить цифры таким образом, чтобы получилось другое число. Под такое описание подходят лишь числа следующего вида:

$$\begin{array}{llllll} 1_{10} = 1_2, & 3_{10} = 11_2, & 7_{10} = 111_2, & 15_{10} = 1111_2, & 31_{10} = 11111_2, & \ldots \\ 2_{10} = 10_2, & 4_{10} = 100_2, & 8_{10} = 1000_2, & 16_{10} = 10000_2, & 32_{10} = 100000_2, & \ldots \end{array} \tag{22}$$

Действительно, если в двоичной записи числа есть как минимум две единицы и ноль, то младшую единицу можно поменять местами с этим нулём, получив другое число.

Ответ: Существуют. Не для любого. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 15,\ 16,\ 31,\ 32,\ \ldots\}$.

Контрольные вопросы

1. Отличается ли множество $\varnothing$ от $\{\varnothing\}$? Если да, то чем?

2. Какие условия для множеств A и B должны выполняться, чтобы следующие утверждения были верны?

   a) $A \setminus B = A$,

   b) $B \setminus A = \varnothing$,

   c) $A \cap B = A \cup B$.

   Уточнение: условия нужно указывать для каждого утверждения отдельно (не нужно указывать условия, при которых верны сразу все утверждения).

3. Может ли количество элементов множества A совпадать с количеством подмножеств A?

4. Множество — обобщение понятия мультимножества или же, наоборот, мультимножество — обобщение понятия множества?

5. Если $A \cup B = B$, значит ли это, что $A \subseteq B$?

6. Равны ли:

   a) Множества $\{a,\ b,\ c\}$ и $\{b,\ c,\ a\}$?

   b) Мультимножества $\{\alpha,\ \alpha,\ \beta\}$ и $\{\beta,\ \alpha,\ \alpha\}$?

   c) Мультимножества $\{\alpha,\ \alpha\}$ и $\{\alpha\}$?

7. Сколько подмножеств у множества $\varnothing$?

8. Если $A \div B \div C \div \ldots \div Z = \varnothing$, значит ли это, что одно из множеств $A,\ B,\ C,\ \ldots,\ Z$ — пустое?

9. Существует ли такой элемент α, что $\{\alpha\} = \{\{\alpha\}\}$? Если да, то какой?

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.

2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.