Неделя 2. Практическое занятие
Отношения и функции

Разбор задач

Задание 1. *Выпишите все элементы множества A.*

a) $A = \{1,\, 2,\, 3\} \times \{a,\, b,\, c\}$.

b) $A = (\mathbb{N} \cap [e^2;\ \pi^2]) \times \mathbb{R}^{42} \times (B \div B)$, *где B — некоторое множество.*

c) $A = (X \times (Y \times Z)) \setminus ((X \times Y) \times Z)$, *где*

$$X = \{1,\, 2,\, 3\},\ Y = \{\pi,\, e\},\ Z = \{0\}.$$

Решение.

a) Чтобы выписать все элементы декартового произведения $X \times Y$, можно следовать такому алгоритму: каждому элементу множества X сопоставить каждый элемент множества Y. Таким образом декартово произведение $\{1,\, 2,\, 3\} \times \{a,\, b,\, c\}$ даст нам следующие 9 векторов:

$$\begin{matrix} \langle 1,\, a\rangle, & \langle 1,\, b\rangle, & \langle 1,\, c\rangle, \\ \langle 2,\, a\rangle, & \langle 2,\, b\rangle, & \langle 2,\, c\rangle, \\ \langle 3,\, a\rangle, & \langle 3,\, b\rangle, & \langle 3,\, c\rangle. \end{matrix}$$

Заметим, что декартово произведение $\{a,\, b,\, c\} \times \{1,\, 2,\, 3\}$ дало бы нам те же самые векторы с переставленными элементами (то есть, к примеру, вектор $\langle 1,\, a\rangle$ превратился бы в $\langle a,\, 1\rangle$), а это, вообще говоря, уже другие векторы (порядок элементов в векторе имеет значение). Иными словами, *в общем случае* декартово произведение не коммутативно:

$$A \times B \neq B \times A. \tag{1}$$

b) Прежде чем что-то выписывать, заметим, что $B \div B = \varnothing$. Декартово произведение любого множества с пустым множеством даст нам пустое множество. Таким образом, мы получаем $A = \varnothing$.

c) Выпишем сначала векторы, получающиеся в результате $X \times (Y \times Z)$:

$$\begin{matrix} \langle 1,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, & \langle 2,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, & \langle 3,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle, \\ \langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle, & \langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle, & \langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle. \end{matrix} \tag{2}$$

А теперь векторы, получающиеся в результате $(X \times Y) \times Z$:

$$\begin{matrix} \langle\langle 1,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 2,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 3,\, \pi\rangle,\, 0\rangle, \\ \langle\langle 1,\, e\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 2,\, e\rangle,\, 0\rangle, & \langle\langle 3,\, e\rangle,\, 0\rangle. \end{matrix} \tag{3}$$

Как можно заметить, хоть элементы векторов и совпадают, структуры они имеют разные. В первом случае мы имеем дело с векторами вида $\langle a,\, \langle b,\, c\rangle\rangle$, во втором же — с векторами вида $\langle\langle a,\, b\rangle\,,\, c\rangle$. Строго говоря, *в общем случае* декартово произведение не ассоциативно, то есть:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C). \tag{4}$$

Тем не менее, если в выражении $A \times B \times C$ нет скобок, его можно рассматривать как декартово произведение множеств:

$$A \times B \times C = \{\langle a,\, b,\, c\rangle \mid a \in A,\, b \in B,\, c \in C\}. \tag{5}$$

Однако в нашем примере скобки имеются, поэтому множества:

$$X \times (Y \times Z) \text{ и } (X \times Y) \times Z, \text{ —}$$

не имеют общих элементов, а это в свою очередь значит, что в ответе мы получим векторы из выражения (2).

Ответ:

a) $\langle 1,\, a\rangle\,,\, \langle 1,\, b\rangle\,,\, \langle 1,\, c\rangle\,,\, \langle 2,\, a\rangle\,,\, \langle 2,\, b\rangle\,,\, \langle 2,\, c\rangle\,,\, \langle 3,\, a\rangle\,,\, \langle 3,\, b\rangle\,,\, \langle 3,\, c\rangle$.

b) Нет элементов.

c) $\langle 1,\, \langle\pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle\pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle\pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle$.

Задание 2. *Дано множество $\mathbb{B} = \{0,\, 1\}$. Для каждого натурального n найдите сумму количеств единиц в каждом из векторов множества $\mathbb{B}^n$. К примеру, при $n = 2$:*

$$\mathbb{B}^2 = \{\langle 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1\rangle\},$$

в сумме получаем 4 единицы.

Решение. Заметим, что общее количество нулей и единиц для конкретного n есть ничто иное, как $n \cdot 2^n$. Действительно, множество $\mathbb{B}^n$ содержит 2^n векторов, каждый из которых состоит из n элементов (нулей и единиц). К примеру, для $n = 3$ имеем (8 векторов по 3 элемента в каждом):

$$\underset{(1)}{\langle 0,\, 0,\, 0\rangle},\, \underset{(2)}{\langle 0,\, 0,\, 1\rangle},\, \underset{(3)}{\langle 0,\, 1,\, 0\rangle},\, \underset{(4)}{\langle 0,\, 1,\, 1\rangle},$$
$$\underset{(5)}{\langle 1,\, 0,\, 0\rangle},\, \underset{(6)}{\langle 1,\, 0,\, 1\rangle},\, \underset{(7)}{\langle 1,\, 1,\, 0\rangle},\, \underset{(8)}{\langle 1,\, 1,\, 1\rangle}.$$

Заметим, что в сумме для всех векторов количество нулей и единиц совпадает. И вправду, для $n = 1$ это очевидно, а для каждого последующего n мы получаем векторы путём добавления нуля и единицы к каждому текущему вектору, то есть, к примеру, из $\mathbb{B}^2$ получаем следующие векторы для $\mathbb{B}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle 0,\, 0\rangle &\to \langle 0,\, 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 0\rangle\,,\\
\langle 0,\, 1\rangle &\to \langle 0,\, 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 1\rangle\,,\\
\langle 1,\, 0\rangle &\to \langle 0,\, 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 0\rangle\,,\\
\langle 1,\, 1\rangle &\to \langle 0,\, 1,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 1\rangle\,.
\end{aligned}$$

Значит, в результате мы получаем $n \cdot 2^{n-1}$ единиц.

Ответ: $n \cdot 2^{n-1}$.

Задание 3. *Даны множества A и B:*

$$A = B = \{\textit{камень},\ \textit{ножницы},\ \textit{бумага}\}.$$

Определим бинарное отношение R следующим образом:

$$R = \text{«}\textit{побеждает}\text{»}:\ aRb \iff a \text{ \textit{побеждает} } b.$$

То есть, к примеру, $\langle\textit{камень},\ \textit{ножницы}\rangle \in R$, но $\langle\textit{камень},\ \textit{бумага}\rangle \notin R$. Выпишите R в явном виде (множество векторов). Найдите:

$$\delta_R,\ \rho_R,\ R^{-1},\ -R,\ R(\{\textit{камень},\ \textit{бумага}\}).$$

Решение. Выпишем R в явном виде:

$$R = \{\langle\text{камень},\ \text{ножницы}\rangle,\ \langle\text{ножницы},\ \text{бумага}\rangle,\ \langle\text{бумага},\ \text{камень}\rangle\}.$$

Понятно, что $\delta_R = \rho_R = \{\text{камень},\ \text{ножницы},\ \text{бумага}\}$, так как для любого элемента $a \in A$ найдётся элемент $b \in A$ (напомним, что $A = B$) такой, что aRb.

Напомним, что обратное бинарное отношение к R есть ничто иное, как:

$$R^{-1} = \{\langle a,\ b\rangle \in A \times B \mid bRa\}. \tag{6}$$

Выпишем R^{-1}:

$$R^{-1} = \{\langle\text{ножницы},\ \text{камень}\rangle,\ \langle\text{бумага},\ \text{ножницы}\rangle,\ \langle\text{камень},\ \text{бумага}\rangle\}.$$

Напомним, что дополнением к бинарному отношению R является:

$$-R = (A \times B) \setminus R. \tag{7}$$

Выпишем все векторы $-R$:

$$\begin{array}{lll} \langle\text{камень},\ \text{бумага}\rangle, & \langle\text{ножницы},\ \text{камень}\rangle, & \langle\text{бумага},\ \text{ножницы}\rangle, \\ \langle\text{камень},\ \text{камень}\rangle, & \langle\text{ножницы},\ \text{ножницы}\rangle, & \langle\text{бумага},\ \text{бумага}\rangle. \end{array}$$

Образом множества X относительно бинарного отношения R называется множество:

$$R(X) = \{b \in B \mid \exists\, a \in X : aRb\}. \tag{8}$$

Выпишем образ множества $\{\text{камень},\ \text{бумага}\}$:

$$R(\{\text{камень},\ \text{бумага}\}) = \{\langle\text{камень},\ \text{ножницы}\rangle,\ \langle\text{бумага},\ \text{камень}\rangle\}.$$

Задание 4. *Дано бинарное отношение f:*

$$f = \{\langle x,\, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } |x| = y \text{ или } x \notin \mathbb{Q} \text{ и } |x| = -y\}. \tag{9}$$

Определите, является ли f функцией. Если да, укажите δ_f, ρ_f, f^{-1} (при наличии); определите, является ли f инъекцией, сюръекцией, биекцией.

Решение. Напомним, что **функцией** является такое бинарное отношение $f \in A \times B$, у которого $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$, а так же

$$\text{для всех } x \in \delta_f,\ y_1, y_2 \in \rho_f \text{ из } xfy_1 \text{ и } xfy_2 \text{ следует } y_1 = y_2. \tag{10}$$

Наше бинарное отношение и вправду является функцией, действительно, любой $x \in \mathbb{R}$ либо принадлежит $\mathbb{Q}$, либо не принадлежит, при этом что в первом, что во втором случае найдётся такой $y \in \mathbb{R}$, что $|x| = y$ или же $|x| = -y$. Это значит, что $\delta_f = A = \mathbb{R}$. Нет никаких сомнений, что $\rho_f \subseteq B = \mathbb{R}$.

Покажем, что выполняется (10). Пусть xfy_1 и xfy_2, тогда, если $x \in \mathbb{Q}$:

$$(|x| = y_1,\ |x| = y_2) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Если $x \notin \mathbb{Q}$:

$$(|x| = -y_1 \Leftrightarrow y_1 = -|x|,\ |x| = -y_2 \Leftrightarrow y_2 = -|x|) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Получается, f действительно является функцией. График её выглядит примерно следующим образом:

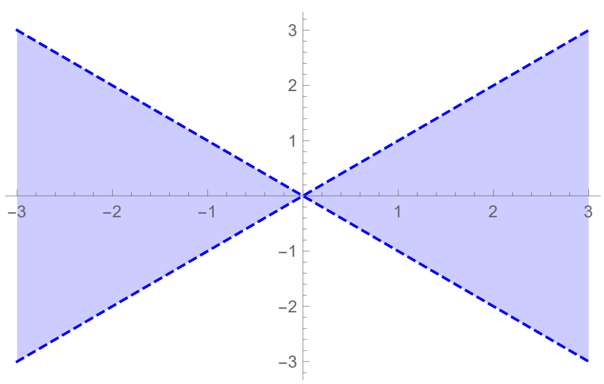

Рис. 1: График функции f

Может показаться, что область значений функции (ρ_f, синяя область на графике) равна $\mathbb{R}$, однако это не так — когда x является рациональным числом ($x \in \mathbb{Q}$), y принимает неотрицательные значения ($|x|$), в обратном же случае — отрицательные ($-|x|$). Иными словами, положительные значения функции рациональны, отрицательные же иррациональны. Получается

$$\rho_f = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid y < 0\}.$$

Это в свою очередь говорит о том, что сюръекцией функция f не является. Более того, не является она и инъекцией, так как при значениях $x = 1$ и $x = -1$ значения функции совпадают, что говорит о том, что обратной функции (f^{-1}) не существует. А значит, не является она и биекцией.

Может показаться очевидным, что обратной функции (f^{-1}) не существует, это действительно так. Тем не менее не всё так просто — если в (9) лишь слегка поменять условие, убрав модули у x, мы получим уже совершенно иную функцию, график которой визуально совпадает с графиком на Рис. 1, но, как ни странно, новая функция будет являться и инъекцией, и сюръекцией, и биекцией. А это значит, что у неё будет и обратная функция, которая, к тому же, будет равна исходной.

Ответ: f является функцией, $\delta_f = \mathbb{R}$, $\rho_f = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geqslant 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid y < 0\}$. Обратной функции не существует, не является ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией.

Задание 5. *Для заданной функции $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определите, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией.*

a) $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$. *Здесь под $[x]$ понимается взятие целой части числа x (то есть, к примеру, $[5.999] = 5$, $[-98.1] = -98$).*

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$. *Здесь под $\operatorname{sgn}(x)$ понимается функция знака (то есть, к примеру, $\operatorname{sgn}(-7) = -1$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(1729) = 1$).*

Решение.

а) Посмотрим на график функции $f(x)$:

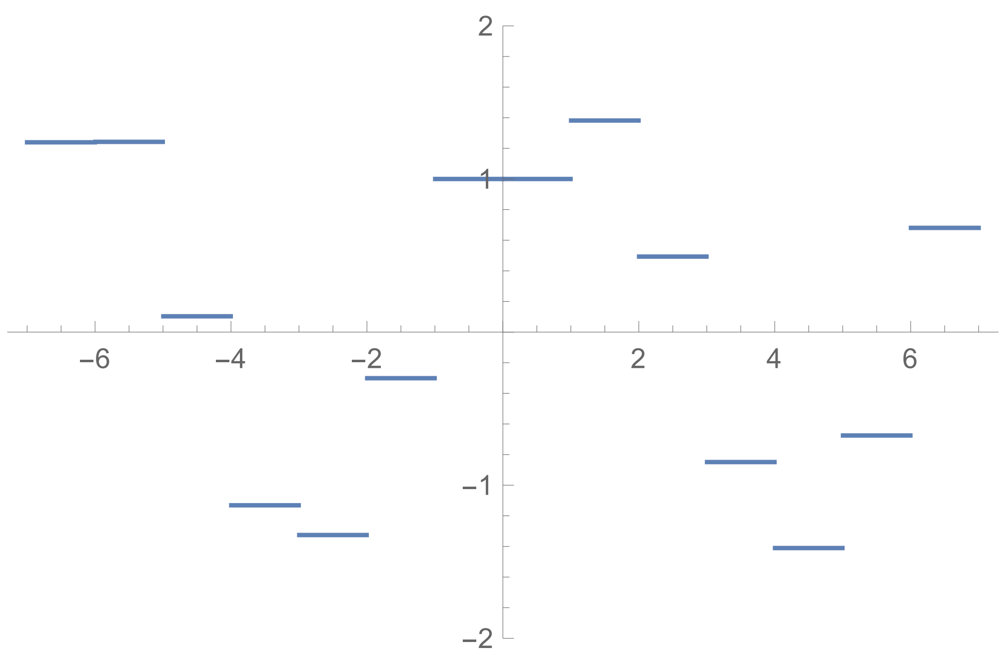

Рис. 2: График функции $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$

По графику видно, что функция ни инъекцией, ни сюръекцией не является. Действительно, если взять 2 различных x: 0 и 0.1, — мы получим одно и тоже значение функции, так как целые части аргументов равны:

$$[0] = [0.1] = 0 \Rightarrow \sin\underbrace{[0]}_{=0} + \cos\underbrace{[0]}_{=0} = \sin\underbrace{[0.1]}_{=0} + \cos\underbrace{[0.1]}_{=0}.$$

Поэтому функция $f(x)$ не является инъекцией. Сюръекцией она тоже не является, так как синус и косинус — ограниченные функции (сумма синуса и косинуса не может превышать число 2), то есть, область значений функции $f(x)$ не равна $\mathbb{R}$.

b) Посмотрим на график функции $f(x)$:

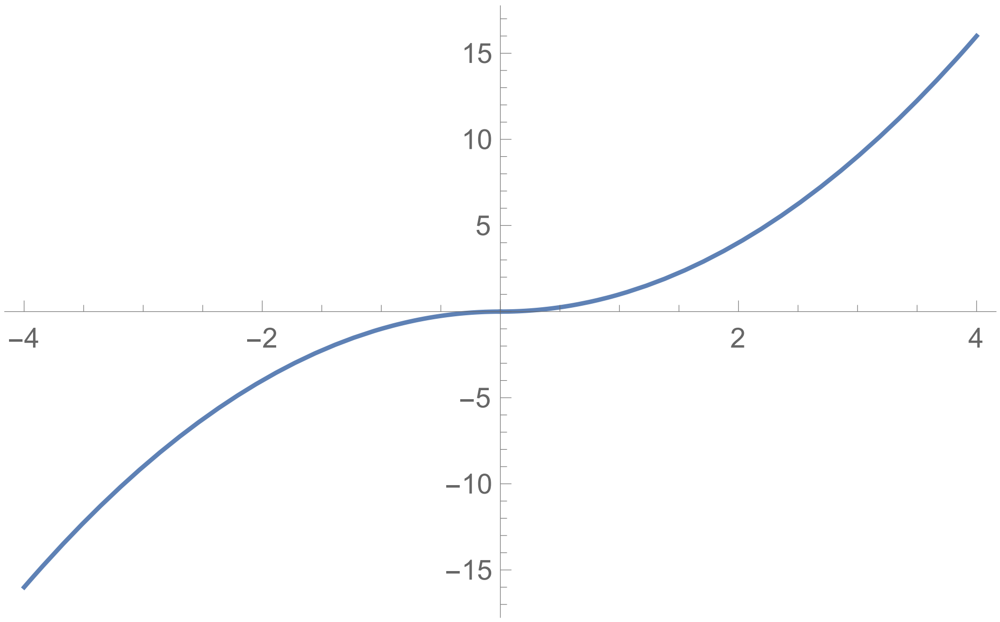

Рис. 3: График функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$

По графику, опять же, видно, что функция $f(x)$ является и инъекцией, и сюръекцией, а значит и биекцией. И правда, рассмотрим сначала интервал $x \in [0; \infty)$. Естественно, функция на нём инъективна:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow \text{ при } x_1 \neq x_2 \quad x_1^2 \neq x_2^2.$$

И, что довольно очевидно, область значений функции $f(x)$ на этом интервале есть ничто иное, как $[0; \infty)$. При $x \in (-\infty; 0]$ ситуация совершенно идентична, с той лишь разницей, что область значений функции равна $(-\infty; 0]$.

Итого, получаем следующее: функция инъективна при $x \in \mathbb{R}$, при этом область значений функции равна $\mathbb{R}$, иными словами, функция является сюръекцией, и биекцией (так как является и инъекцией, и сюръекцией).

Ответ:

a) Не является ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией.

b) Является и инъекцией, и сюръекцией, и биекцией.

Задание 6. *Задано бинарное отношение R:*

$$R = \{\langle x,\, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ входит в запись числа } y\}. \tag{11}$$

То есть, к примеру, $\langle 8,\, 128\rangle \in R$, $\langle 10,\, 1010\rangle \in R$, но $\langle 4,\, 123\rangle \notin R$, $\langle 0,\, 28\rangle \notin R$. Определите, является ли отношение R: рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, эквивалентностью.

Решение. Бинарное отношение R называется **рефлексивным**, если для любого $a \in A$ выполняется aRa. Довольно очевидно, что любое число входит в собственную же запись, поэтому *R является рефлексивным.*

Иррефлексивным же отношение R называется, если при любом $a \in A$ не выполняется aRa, что, разумеется, не так, следовательно, *иррефлексивным отношение R не является.*

Бинарное отношение R называется **симметричным**, если:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \Rightarrow bRa.$$

Понятно, что наше *отношение симметричным не является.* Взять хотя бы, к примеру, такой вектор: $\langle 13,\, 1337\rangle \in R$, — если переставить местами его элементы, получим: $\langle 1337,\, 13\rangle \notin R$.

Антисимметричным является такое бинарное отношение R, что:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \text{ и } bRa \Rightarrow a = b.$$

Наше *отношение R является антисимметричным.* Действительно, пусть aRb и bRa, запишем цифры числа a как $a_1, \ldots, a_n$, цифры числа b — как $b_1, \ldots, b_n$ (в a и b одинаковое количество цифр по той причине, что число с бо́льшим количеством цифр не может входить в число с меньшим количеством цифр), в таком случае a и b можно записать следующим образом:

$$a = \underbrace{b_1 \ldots b_n}_{b},\ b = \underbrace{a_1 \ldots a_n}_{a}.$$

Иными словами, $a = b$.

Бинарное отношение R называется **транзитивным**, если:

$$\text{для всех } a, b, c \in A \ aRb \text{ и } bRc \Rightarrow aRc.$$

Разумеется, наше *отношение является транзитивным*, так как если в записи числа c содержится b, в записи которого, в свою очередь, содержится a, то a содержится и в записи c. Для примера возьмём три числа:

$$a = 2,\ b = 124,\ c = 1248.$$

Рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение на A называется **эквивалентностью** на A. Наше отношение не является симметричным, а значит и *эквивалентностью оно не является.*

Ответ: R является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным. Не является иррефлексивным, симметричным, эквивалентностью.

Задание 7. *Определите, является ли эквивалентностью бинарное отношение R. Если да, то опишите соответствующее фактор-множество.*

a) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a = b$ *или* $a^2 + b^2$ — *простое число*$\}$.

b) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a \cdot b$ — *квадрат некоторого числа* $n \in \mathbb{N}\}$.

Решение.

a) Довольно очевидно, что наше отношение является рефлексивным и симметричным (это понятно из условия «$a = b$» и ассоциативности сложения). Вопрос заключается в том, является ли оно транзитивным. Оказывается, не является — взять хотя бы такой пример:

$$\begin{array}{rcll} 1^2 + 2^2 & = & 5 & \text{— простое число,} \\ 2^2 + 3^2 & = & 13 & \text{— простое число,} \\ 1^2 + 3^2 & = & 10 & \text{— составное число.} \end{array}$$

А это значит, что и эквивалентностью R не является.

b) Рефлексивность данного отношения, опять же, очевидна (a^2 — всегда квадрат числа a, то есть, всегда выполняется aRa). То же касается и симметричности (объясняется это ассоциативностью умножения).

Проверим, является ли данное отношение транзитивным. Запишем числа a, b и c в виде бесконечного произведения простых чисел в некоторых целых степенях:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot 7^{x_4} \cdot \ldots, \\ b & = & 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3} \cdot 7^{y_4} \cdot \ldots, \\ c & = & 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3} \cdot 7^{z_4} \cdot \ldots \end{array} \tag{12}$$

Покажем, к примеру, как записать подобным образом числа 1 и 36 ($36 = 2^2 \cdot 3^2$):

$$1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot \ldots,\ \ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot \ldots$$

Заметим, что квадратом любого натурального числа n будет такое число, все степени в записи (12) которого будут чётными (так как возведение в квадрат числа n равносильно умножению на 2 степеней простых чисел).

Вспомним, что при умножении степени складываются. Предположим, что aRb и bRc, тогда получим:

$$\begin{array}{ccll} (x_1 + y_1) & \text{и} & (y_1 + z_1) & \text{— чётные числа,} \\ (x_2 + y_2) & \text{и} & (y_2 + z_2) & \text{— чётные числа,} \\ (x_3 + y_3) & \text{и} & (y_3 + z_3) & \text{— чётные числа,} \\ (x_4 + y_4) & \text{и} & (y_4 + z_4) & \text{— чётные числа,} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

А теперь вспомним арифметику: если при сложении двух чисел p и q мы получили чётное число w, то числа p и q обязаны быть либо оба чётными, либо оба нечётными. Получается, числа x_k, y_k и z_k обязаны иметь одинаковую чётность при любом натуральном k, а это в то же время значит, что $x_k + z_k$ всегда будет чётным числом. Выходит, что наше отношение является транзитивным, а значит, является и эквивалентностью.

В таком случае, нам осталось лишь выписать соответствующее фактор-множество. Для начала напомним, что классом эквивалентности $a \in A$ по R называется множество a/R:

$$a/R = \{b \in B \mid bRa\}. \tag{13}$$

Фактор-множеством (обозначим его как F) же является множество всех классов эквивалентности. Понятно, что для любого числа a, если записать его как в выражении (12), a/R будет состоять из чисел, степени простых чисел у которых будут совпадать по кратности со степенями соответствующих простых чисел из a. Выходит, нам нужно просто перебрать все возможные кратности степеней. Таким образом мы получим следующие классы эквивалентности:

$$F_{i_1,i_2,i_3,\dots} = \left\{2^{i_1+2k_1} \cdot 3^{i_2+2k_2} \cdot 5^{i_3+2k_3} \cdot \ldots \mid k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}_0\right\},$$

где каждое из i_n будет принимать значения 0 и 1 (что меняет кратность степени). Тогда фактор-множество F будет равно:

$$F = \{F_{i_1,i_2,i_3,\dots} \mid i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,\, 1\}\}.$$

Ответ:

a) Не является эквивалентностью.

b) Является эквивалентностью. Фактор-множество (F):

$$F = \{F_{i_1,i_2,i_3,\dots} \mid i_1, i_2, i_3, \ldots \in \{0,\, 1\}\}, \text{ где}$$

$$F_{i_1,i_2,i_3,\dots} = \left\{2^{i_1+2k_1} \cdot 3^{i_2+2k_2} \cdot 5^{i_3+2k_3} \cdot \ldots \mid k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Задание 8. *Дано бинарное отношение R. Укажите, является ли оно предпорядком, частичным порядком, линейным порядком, полным линейным порядком. Если является линейным порядком, укажите минимальный и максимальный элементы (при наличии).*

a) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \cos^2 a + \sin^2 b = 1\}$.

b) $R = \{\langle a,\, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0\}$.

Решение. Напомним следующие определения:

- Бинарное отношение R называется **предпорядком**, если оно рефлексивно и транзитивно.
- Предпорядок называется **частичным порядком**, если он антисимметричен.
- Частичный порядок называется **линейным**, если для любых элементов $a, b \in A$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$.
- Линейный порядок на множестве A называется **полным**, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент.

a) Ясно, что наше отношение является рефлексивным (ввиду основного тригонометрического тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), Покажем, что оно является и транзитивным. Пусть aRb и bRc, тогда:

$$\begin{aligned} & \cos^2 a + \sin^2 b = 1, \\ & \cos^2 b + \sin^2 c = 1, \\ & \cos^2 a + \sin^2 c = \\ = \; & (1 - \sin^2 b) + (1 - \cos^2 b) = \\ = \; & 2 - (\cos^2 b + \sin^2 b) = \\ = \; & 1. \end{aligned}$$

Значит, из aRb и bRc следует aRc. Получается, что наше *отношение является предпорядком.* Тем не менее, антисимметричным R не является. Действительно, если для любого a взять $b = a + 2\pi$, то мы получим aRb и bRa, но в то же время $a \neq b$.

Итого, наше отношение не является ни частичным порядком, ни линейным порядком, ни полным линейным порядком.

b) Наше отношение, разумеется, является рефлексивным, т. к. выполняется $aRa \ \forall a \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sgn}(\underbrace{a - a}_{0}) + 1 = 1 \neq 0.$$

Является оно и транзитивным. Пусть aRb и bRc, тогда:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow a \geqslant b, \\ & \operatorname{sgn}(b - c) + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow b \geqslant c, \\ \Rightarrow \; & \operatorname{sgn}(a - c) + 1 \neq 0 \quad (\text{т. к. } a \geqslant b \geqslant c). \end{aligned}$$

Это значит, что *отношение является предпорядком.*

Покажем, что наше отношение является антисимметричным. Пусть aRb и bRa:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0 \text{ и } \operatorname{sgn}(b - a) + 1 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \; & a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

А это значит, что наше *отношение является и частичным порядком.*

Понятно, что наше *отношение является так же и линейным порядком*, т. к. для любых a и b из $\mathbb{R}$ выполняется

$$\text{либо } \operatorname{sgn}(a - b) + 1 \neq 0, \text{ либо } \operatorname{sgn}(b - a) + 1 \neq 0.$$

Тем не менее, *полным линейным порядком наше отношение не является*, потому что, к примеру, на подмножестве $(-\infty; 0)$ нет наименьшего элемента.

Ответ:

a) Является только предпорядком.

b) Является предпорядком, частичным порядком, линейным порядком, но полным линейным порядком не является.

Контрольные вопросы

1. При каких множествах A, B (и C) верно равенство?

   a) $A \times B = B \times A$.

   b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

2. Всегда ли можно построить биекцию между множествами

$$(A \times B) \times C \text{ и } A \times (B \times C)?$$

3. Может ли бинарное отношение совпадать со своим дополнением? С обратным отношением?

4. Может ли функция $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть биекцией, если на некоторых интервалах она убывающая, а на других — возрастающая?

5. Может ли функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ являться сюръекцией, не являясь при этом инъекцией?

6. Если A — множество из n элементов ($n \in \mathbb{N}$), а U — множество всех функций из A в A, то каких функций в U больше: инъективных или сюръективных? Или же, может быть, их одинаковое количество?

7. Возможна ли ситуация, когда для любого натурального n композиция из n каких-то функций f равна этой функции f?

$$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = f.$$

8. Может ли бинарное отношение одновременно являться симметричным и антисимметричным? Рефлексивным и иррефлексивным?

9. Можно ли построить линейный порядок на множестве $\mathbb{C}$?

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.

2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.