Неделя 2. Практическое занятие
Отношения и функции

Разбор задач

> **Задание 1**. *Выпишите все элементы множества A.*
>
> *a)* $A = \{1,\ 2,\ 3\} \times \{a,\ b,\ c\}$.
>
> *b)* $A = (\mathbb{N} \cap [e^2;\ \pi^2]) \times \mathbb{R}^{42} \times (B \div B)$, *где B — некоторое множество.*
>
> *c)* $A = (X \times (Y \times Z)) \setminus ((X \times Y) \times Z)$, *где*
>
> $$X = \{1,\ 2,\ 3\},\ Y = \{\pi,\ e\},\ Z = \{0\}.$$

Решение.

a) Чтобы выписать все элементы декартового произведения $X \times Y$, можно следовать такому алгоритму: каждому элементу множества X сопоставить каждый элемент множества Y. Таким образом получим следующие 9 векторов:

$$\begin{array}{ccc} \langle 1,\ a\rangle, & \langle 1,\ b\rangle, & \langle 1,\ c\rangle, \\ \langle 2,\ a\rangle, & \langle 2,\ b\rangle, & \langle 2,\ c\rangle, \\ \langle 3,\ a\rangle, & \langle 3,\ b\rangle, & \langle 3,\ c\rangle. \end{array}$$

Заметим, что декартово произведение $\{a,\ b,\ c\} \times \{1,\ 2,\ 3\}$ дало бы нам те же самые векторы с переставленными элементами (то есть, к примеру, вектор $\langle 1,\ a\rangle$ превратился бы в $\langle a,\ 1\rangle$), а это, вообще говоря, уже другие векторы (порядок элементов в векторе имеет значение). Иными словами, *в общем случае* декартово произведение не коммутативно:

$$A \times B \neq B \times A. \tag{1}$$

b) Прежде чем что-то выписывать, заметим, что $B \div B = \varnothing$. Декартово произведение любого множества с пустым множеством даст нам пустое множество. Таким образом, мы получаем $A = \varnothing$.

c) Выпишем сначала векторы, получающиеся в результате $X \times (Y \times Z)$:

$$\begin{array}{ccc} \langle 1,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, & \langle 2,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, & \langle 3,\ \langle \pi,\ 0\rangle\rangle, \\ \langle 1,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle, & \langle 2,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle, & \langle 3,\ \langle e,\ 0\rangle\rangle. \end{array} \tag{2}$$

А теперь векторы, получающиеся в результате $(X \times Y) \times Z$:

$$\begin{array}{ccc} \langle\langle 1,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, & \langle\langle 2,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, & \langle\langle 3,\ \pi\rangle,\ 0\rangle, \\ \langle\langle 1,\ e\rangle,\ 0\rangle, & \langle\langle 2,\ e\rangle,\ 0\rangle, & \langle\langle 3,\ e\rangle,\ 0\rangle. \end{array} \tag{3}$$

Как можно заметить, хоть элементы векторов и совпадают, структуры они имеют разные. В первом случае мы имеем дело с векторами вида $\langle a,\ \langle b,\ c\rangle\rangle$, во втором же — с векторами вида $\langle\langle a,\, b\rangle\,,\, c\rangle$. Строго говоря, *в общем случае* декартово произведение не ассоциативно, то есть:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C). \tag{4}$$

Тем не менее, если в выражении $A \times B \times C$ нет скобок, его можно рассматривать как декартово произведение множеств:

$$A \times B \times C = \{\langle a,\, b,\, c\rangle \mid a \in A,\, b \in B,\, c \in C\}. \tag{5}$$

Однако в нашем примере скобки имеются, поэтому множества:

$$X \times (Y \times Z) \text{ и } (X \times Y) \times Z, \text{—}$$

не имеют общих элементов, а это в свою очередь значит, что в ответе мы получим векторы из выражения (2).

Ответ:

a) $\langle 1,\, a\rangle\,,\, \langle 1,\, b\rangle\,,\, \langle 1,\, c\rangle\,,\; \langle 2,\, a\rangle\,,\, \langle 2,\, b\rangle\,,\, \langle 2,\, c\rangle\,,\; \langle 3,\, a\rangle\,,\, \langle 3,\, b\rangle\,,\, \langle 3,\, c\rangle.$

b) Нет элементов.

c) $\langle 1,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle \pi,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 1,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 2,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle\,,\langle 3,\, \langle e,\, 0\rangle\rangle.$

Задание 2. *Дано множество $\mathbb{B} = \{0,\, 1\}$. Для каждого натурального n найдите сумму количеств единиц в каждом из векторов множества $\mathbb{B}^n$. К примеру, при $n = 2$:*

$$\mathbb{B}^2 = \{\langle 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1\rangle\},$$

в сумме получаем 4 единицы.

Решение. Заметим, что общее количество нулей и единиц для конкретного n есть ничто иное, как $n \cdot 2^n$. Действительно, множество $\mathbb{B}^n$ содержит 2^n векторов, каждый из которых состоит из n элементов (нулей и единиц). К примеру, для $n = 3$ имеем (8 векторов по 3 элемента в каждом):

$$\underset{(1)}{\langle 0,\, 0,\, 0\rangle},\; \underset{(2)}{\langle 0,\, 0,\, 1\rangle},\; \underset{(3)}{\langle 0,\, 1,\, 0\rangle},\; \underset{(4)}{\langle 0,\, 1,\, 1\rangle},$$
$$\underset{(5)}{\langle 1,\, 0,\, 0\rangle},\; \underset{(6)}{\langle 1,\, 0,\, 1\rangle},\; \underset{(7)}{\langle 1,\, 1,\, 0\rangle},\; \underset{(8)}{\langle 1,\, 1,\, 1\rangle}.$$

Заметим, что в сумме для всех векторов количество нулей и единиц совпадает. И вправду, для $n = 1$ это очевидно, а для каждого последующего n мы получаем векторы путём добавления нуля и единицы к каждому текущему вектору, то есть, к примеру, из $\mathbb{B}^2$ получаем следующие векторы для $\mathbb{B}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle 0,\, 0\rangle &\to \langle 0,\, 0,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 0\rangle\,,\\
\langle 0,\, 1\rangle &\to \langle 0,\, 0,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 0,\, 1\rangle\,,\\
\langle 1,\, 0\rangle &\to \langle 0,\, 1,\, 0\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 0\rangle\,,\\
\langle 1,\, 1\rangle &\to \langle 0,\, 1,\, 1\rangle\,,\, \langle 1,\, 1,\, 1\rangle\,.
\end{aligned}$$

Значит, в результате мы получаем $n \cdot 2^{n-1}$ единиц.

Ответ: $n \cdot 2^{n-1}$.

Задание 3. *Даны множества A и B:*

$$A = B = \{\textit{камень},\ \textit{ножницы},\ \textit{бумага}\}.$$

Определим бинарное отношение R следующим образом:

$$R = \textit{побеждает}:\ aRb \iff a\ \textit{побеждает}\ b.$$

То есть, к примеру, $\langle$камень, ножницы$\rangle \in R$, но $\langle$камень, бумага$\rangle \notin R$. Выпишите R в явном виде (множество векторов). Найдите:

$$\delta_R,\ \rho_R,\ R^{-1},\ -R,\ R(\{\textit{камень},\ \textit{бумага}\}).$$

Решение. Выпишем R в явном виде:

$$R = \{\langle \text{камень}, \text{ножницы}\rangle,\ \langle \text{ножницы}, \text{бумага}\rangle,\ \langle \text{бумага}, \text{камень}\rangle\}.$$

Понятно, что $\delta_R = \rho_R = \{$камень, ножницы, бумага$\}$, так как для любого элемента $a \in A$ найдётся элемент $b \in A$ (напомним, что $A = B$) такой, что aRb.

Напомним, что обратное бинарное отношение к R есть ничто иное, как:

$$R^{-1} = \{\langle a, b\rangle \in A \times B \mid bRa\}. \tag{6}$$

Выпишем R^{-1}:

$$R^{-1} = \{\langle \text{ножницы}, \text{камень}\rangle,\ \langle \text{бумага}, \text{ножницы}\rangle,\ \langle \text{камень}, \text{бумага}\rangle\}.$$

Напомним, что дополнением к бинарному отношению R является:

$$-R = (A \times B) \setminus R. \tag{7}$$

Выпишем все векторы $-R$:

$$\begin{array}{lll} \langle \text{камень}, \text{бумага}\rangle, & \langle \text{ножницы}, \text{камень}\rangle, & \langle \text{бумага}, \text{ножницы}\rangle, \\ \langle \text{камень}, \text{камень}\rangle, & \langle \text{ножницы}, \text{ножницы}\rangle, & \langle \text{бумага}, \text{бумага}\rangle. \end{array}$$

Образом множества X относительно бинарного отношения R называется множество:

$$R(X) = \{b \in B \mid \exists\, a \in X : aRb\}. \tag{8}$$

Выпишем образ множества $\{$камень, бумага$\}$:

$$R(\{\text{камень}, \text{бумага}\}) = \{\langle \text{камень}, \text{ножницы}\rangle,\ \langle \text{бумага}, \text{камень}\rangle\}.$$

Задание 4. *Для заданной функции* $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *определите, является ли она инъекцией, сюръекцией, биекцией.*

a) $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$. *Здесь под* $[x]$ *понимается взятие целой части числа* x *(то есть, к примеру,* $[5.999] = 5,\ [-98.1] = -98$*).*

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2$. *Здесь под* $\operatorname{sgn}(x)$ *понимается функция знака (то есть, к примеру,* $\operatorname{sgn}(-7) = -1,\ \operatorname{sgn}(0) = 0,\ \operatorname{sgn}(1729) = 1$*).*

Решение.

a) Посмотрим на график функции $f(x)$:

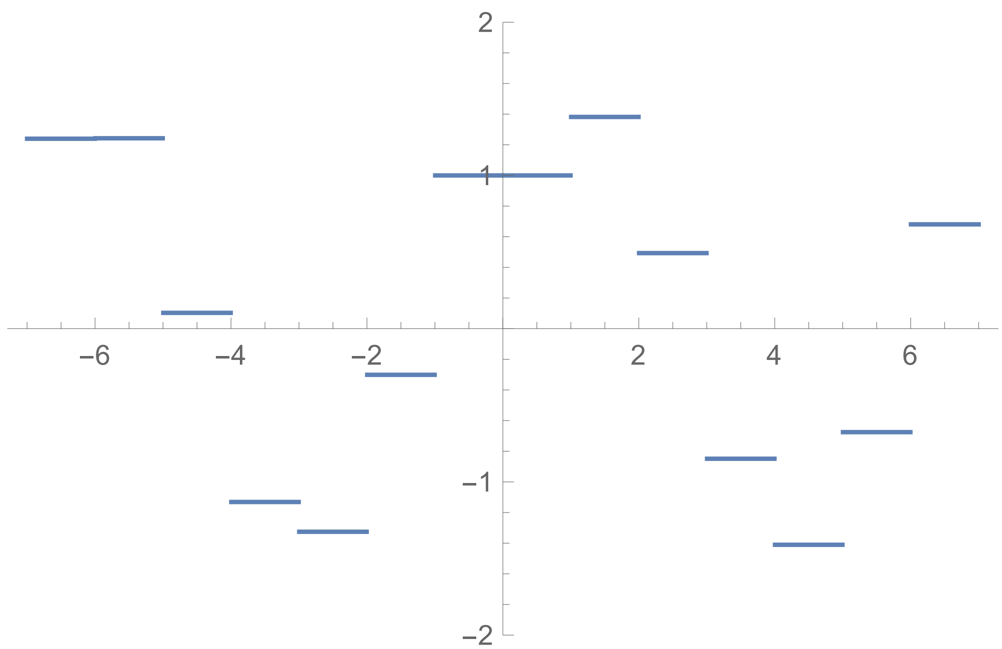

Рис. 1: График функции $f(x) = \sin[x] + \cos[x]$

По графику видно, что функция ни инъекцией, ни сюръекцией не является. Действительно, если взять 2 различных x: 0 и 0.1, — мы получим одно и тоже значение функции, так как целые части аргументов равны:

$$[0] = [0.1] = 0 \Rightarrow \sin\underbrace{[0]}_{=0} + \cos\underbrace{[0]}_{=0} = \sin\underbrace{[0.1]}_{=0} + \cos\underbrace{[0.1]}_{=0}.$$

Поэтому функция $f(x)$ не является инъекцией. Сюръекцией она тоже не является, так как синус и косинус — ограниченные функции (сумма синуса и косинуса не может превышать числа 2), то есть, область значений функции $f(x)$ не равна $\mathbb{R}$.

b) Посмотрим на график функции $f(x)$:

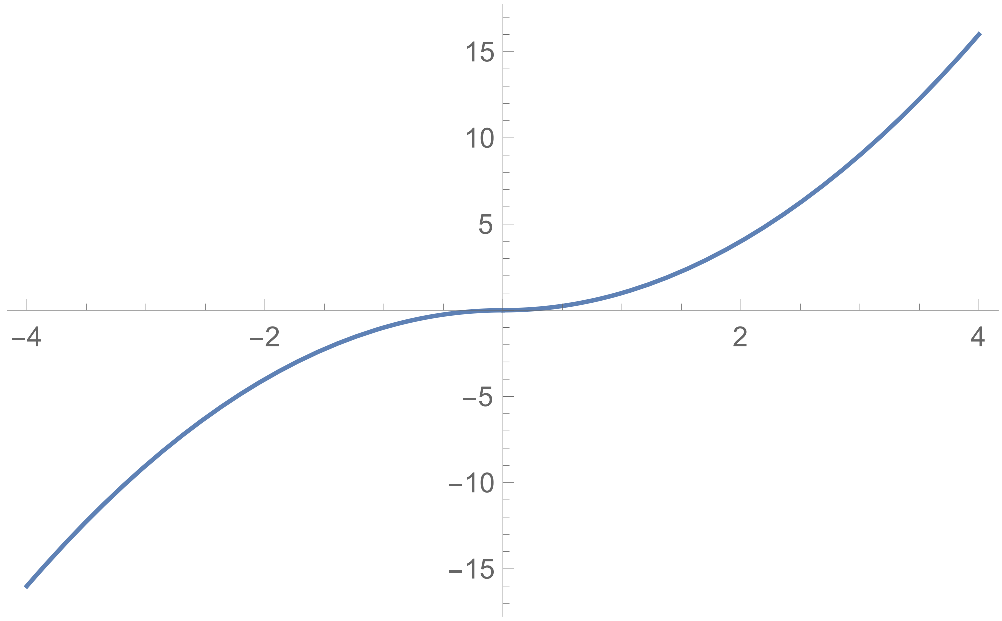

Рис. 2: График функции $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot x^2$

По графику, опять же, видно, что функция $f(x)$ является и инъекцией, и сюръекцией, а значит и биекцией. И правда, рассмотрим сначала интервал $x \in [0; \infty)$. Естественно, функция на нём инъективна:

$$x \geqslant 0 \Rightarrow \text{ при } x_1 \neq x_2 \quad x_1^2 \neq x_2^2.$$

И, что довольно очевидно, область значений функции $f(x)$ на этом интервале есть ничто иное, как $[0; \infty)$. При $x \in (-\infty; 0]$ ситуация совершенно идентична, с той лишь разницей, что область значений функции равна $(-\infty; 0]$.

Итого, получаем следующее: функция инъективна при $x \in \mathbb{R}$, при этом область значений функции равна $\mathbb{R}$, иными словами, функция является сюръекцией, и биекцией (так как является и инъекцией, и сюръекцией).

Ответ: a) Не является ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией. b) Является и инъекцией, и сюръекцией, и биекцией.

Задание 5. *Задано бинарное отношение R:*

$$R = \{\langle x,\, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ входит в запись числа } y\}. \tag{9}$$

То есть, к примеру, $\langle 8,\, 128\rangle \in R$, $\langle 10,\, 1010\rangle \in R$, но $\langle 4,\, 123\rangle \notin R$, $\langle 0,\, 28\rangle \notin R$. Определите, является ли отношение R: рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным, эквивалентностью.

Решение. Бинарное отношение R называется рефлексивным, если для любого $a \in A$ выполняется aRa. Довольно очевидно, что любое число входит в собственную же запись, поэтому R *является рефлексивным.*

Иррефлексивным же отношение R называется, если при любом $a \in A$ не выполняется aRa, что, разумеется, не так, следовательно, *иррефлексивным отношение R не является.*

Бинарное отношение R называется симметричным, если:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \Rightarrow bRa.$$

Понятно, что наше *отношение симметричным не является.* Взять хотя бы, к примеру, такой вектор: $\langle 13,\ 1337\rangle \in R$, — если переставить местами его элементы, получим: $\langle 1337,\ 13\rangle \notin R$.

Антисимметричным является такое бинарное отношение R, что:

$$\text{для всех } a, b \in A \ \ aRb \text{ и } bRa \Rightarrow a = b.$$

Наше *отношение R является антисимметричным.* Действительно, пусть aRb и bRa, запишем цифры числа a как $a_1, \ldots, a_n$, цифры числа b — как $b_1, \ldots, b_n$ (в a и b одинаковое количество цифр по той причине, что число с бóльшим количеством цифр не может входить в число с меньшим количеством цифр), в таком случае a и b можно записать следующим образом:

$$a = \underbrace{b_1 \ldots b_n}_{b},\ \ b = \underbrace{a_1 \ldots a_n}_{a}.$$

Иными словами, $a = b$.

Бинарное отношение R называется транзитивным, если:

$$\text{для всех } a, b, c \in A \ aRb \text{ и } bRc \Rightarrow aRc.$$

Разумеется, наше *отношение является транзитивным*, так как если в записи числа c содержится b, в записи которого, в свою очередь, содержится a, то a содержится и в записи c. Для примера возьмём три числа:

$$a = 2,\ b = 124,\ \ c = 01248.$$

Рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение на A называется эквивалентностью на A. Наше отношение не является симметричным, а значит и *эквивалентностью оно не является.*

Ответ: R является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным. Не является иррефлексивным, симметричным, эквивалентностью.

Контрольные вопросы

1. При каких множествах A, B и C верны равенства?

   a) $A \times B = B \times A$.

   b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

2. Может ли функция $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ быть биекцией, если на некоторых интервалах она убывающая, а на других — возрастающая?

3. Может ли бинарное отношение одновременно являться симметричным и антисимметричным? Рефлексивным и иррефлексивным?

Литература

1. Пак В. Г. «Сборник задач по дискретной математике. Теория Множеств. Комбинаторика», Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2008. — 118 с.

2. Куратовский К., Мостовский А. «Теория множеств», издательство «Мир» — М., 1970. — 416 с.