以下的每个魔法题目前面都有标注难度，难度的含义是相对于同类的魔法题目，并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略，因为这些图形都很简单，描述起来不会产生歧义。

有些题目之前已经说过，故此略去解答。

1 初中魔法

1. (easy)$\triangle ABC$ 是等腰三角形，而且它可以被分成两个等腰三角形。则 $\triangle ABC$ 顶角的所有可能值是多少？

   解 $36°, 90°, 108°, 180°/7$.

2. (easy) 现在有足够多的正五边形地砖和正十边形地砖，它们的边长都相等。请问能否用它们覆盖整个平面（地砖之间不能有重叠）? 为什么？

   解 不能。不信你自己铺一下试试/w\

3. (medium) 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，求证：$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$。（注：禁止使用相似三角形）。

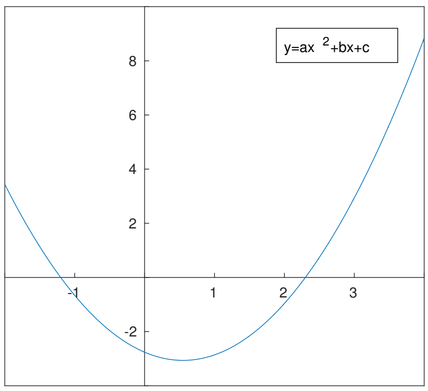
   解 过点 D 作 $DM \perp AB$，$DN \perp AC$。考虑 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的比值。

   $$\frac{AB \cdot DM}{AC \cdot DN} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{DC}$$

   $\because AD$ 为角平分线，$\therefore DM = DN$，上式左侧约去这两项即得结论。

4. (medium) 设函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如下图。则 $b^2 - 2ac$ 和 $5a^2$ 的大小关系为？并证明你的结论。

   解 从图中可知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个解 x_1, x_2.



由韦达定理，我们有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1 x_2 = c/a \end{cases}$$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$
再由图中可得 $x_1 < -1, x_2 > 2$，得 $\frac{b^2-2ac}{a^2} > 1^2 + 2^2 = 5$，因此

$$b^2 - 2ac > 5a^2$$

5. (hard) 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB = AC, \angle A = 80°$。点 O 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle OBC = 10°, \angle OCA = 20°$。求 $\angle BAO$ 的度数。
   解 略。请询问叶子姐姐和九姐姐。

2 高中魔法

1. (easy) 设 a, b, c 是实数，则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的条件为？
   解 使用因式分解即可。

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ =& (a+b)^3 - 3a^b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\ =& (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \\ =& (a+b+c)((a+b)^2 - c(a+b) + c^2) - 3ab(a+b+c) \\ =& (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab) \\ =& (a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)/2 \end{aligned}$$

   由以上分解式可知，上式为 0 的条件为 $a = b = c$ 或 $a + b + c = 0$

2. (easy) 设集合 $M = \{1, 2\}$，定义集合 $A = \{x \mid \forall a \in x, a \in M\}$。则集合 A 和 M 的关系为？
   解 由题目可知集合 A 是集合 M 所有子集构成的集合，因此 M 是 A 的一个元素。答案为 $M \in A$

3. (medium) 求值：$\cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{6}{7}\pi$

解　利用三角恒等变形，积化和差公式，裂项相消。

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi\\
=&\frac{\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi)}{\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2}{7}\pi+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4}{7}\pi+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6}{7}\pi}{\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&\frac{0-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\\
=&-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. (medium) 设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,a>b>0$，点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上。过点 P 分别引出两条斜率为 k_1,k_2 的直线，满足 $k_1+k_2=0$。两条直线分别交椭圆于点 A 和 B。求证：AB 的斜率是定值。

证明　利用椭圆的参数方程。

设 $A=(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$，$B=(a\cos\beta,b\sin\beta)$，$P=(a\cos\eta,b\sin\eta)$，其中可以认为 $x_0=a\cos\eta,y_0=b\sin\eta$

计算出两条线的斜率

$$\begin{cases}k_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\alpha-\sin\eta}{\cos\alpha-\cos\eta}\\ k_2=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\beta-\sin\eta}{\cos\beta-\cos\eta}\end{cases}$$

代入 $k_1+k_2=0$，我们有

$$\frac{\sin\alpha-\sin\eta}{\cos\alpha-\cos\eta}+\frac{\sin\beta-\sin\eta}{\cos\beta-\cos\eta}=0$$

对分子，分母使用和差化积公式，可得

$$\frac{\cos(\frac{\alpha+\eta}{2})\sin(\frac{\alpha-\eta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\eta}{2})\sin(\frac{\alpha-\eta}{2})}+\frac{\cos(\frac{\beta+\eta}{2})\sin(\frac{\beta-\eta}{2})}{\sin(\frac{\beta+\eta}{2})\sin(\frac{\beta-\eta}{2})}=0$$

以上可以等价写作

$$\cot(\frac{\alpha+\eta}{2})=-\cot(\frac{\beta+\eta}{2})$$

由三角函数诱导公式，可得

$$\frac{\alpha+\eta}{2}+\frac{\beta+\eta}{2}=k\pi$$

以上可以等价写作

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=k\pi-\eta$$

同时，计算直线 AB 的斜率，可知

$$k_{AB} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$$

再次使用和差化积公式，我们有

$$k_{AB} = \frac{b}{a} \cdot -\frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})} = -\frac{b}{a} \cdot \cot(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

代入 $\frac{\alpha+\beta}{2} = k\pi - \eta$，并注意到 $\cot\eta = \frac{bx_0}{ay_0}$，我们最终有

$$k_{AB} = -\frac{b}{a} \cdot \cot(\frac{\alpha+\beta}{2}) = -\frac{b}{a} \cdot \cot(k\pi - \eta) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

5. (hard) 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推式$a_{n+1} = a_n^2 - 2, a_0 = a$。求 a_n 的表达式。
解 原题目符号打错了。解题方法是对 a 进行讨论。

- $|a| = 2$，此时用归纳法证明 $a_n = 2, n > 0$
- $|a| < 2$，此时令 $a = 2\cos\eta$，使用归纳法证明 $a_n = 2\cos(2^n\eta)$
- $|a| > 2$，此时令 $a = x_0 + 1/x_0$，使用归纳法证明 $a_n = x_0^{2^n} + 1/x_0^{2^n}$

细节从略。

3 大学魔法

1. (easy) 下列说法是否正确？如果正确请证明这个结论，如果不正确请举出反例。

(a) 设数列 $a_n \to 0$，$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$，则 S_n 一定有极限。
错误 反例为 $a_n = 1/n$

(b) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。
错误 导数 $f'(x)$ 在无穷处可能没有极限。反例为 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$。

(c) 可导函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为凸函数当且仅当 $f'(x)$ 是单调递增的。
正确 这是凸函数的一个判定定理。
必要性 由凸函数性质，对于任意的 x, y

$$\begin{cases} f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \\ f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \end{cases}$$

两式相加，可得

$$0 \leq (f'(x) - f'(y))(x-y)$$

这说明 $f'(x)$ 单调递增。

充分性 由凸函数判定定理，对于任意 $x_1 < x_2 < x_3$，如果以下有关斜率的不等式成立

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

那么 $f(x)$ 为凸函数。

而根据 Lagrange 中值定理和 $f'(x)$ 的单调性，这是显然的。

(d) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则 A 可以分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。并且这个分解是唯一的。

正确 这是矩阵的一种直和分解。

存在性 考虑恒等式 $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$，令 $B = \frac{A+A^T}{2}, C = \frac{A-A^T}{2}$, 则显然 B 对称，C 反对称。

唯一性 设 $A = B_1 + C_1 = B_2 + C_2$，其中 B_1, B_2 对称，C_1, C_2 反对称。我们有

$$B_1 - B_2 = C_2 - C_1$$

注意到等式左边是对称矩阵，等式右边是反对称矩阵。一个矩阵既是对称又是反对称，它只能是零矩阵。因此 $B_1 = B_2, C_1 = C_2$。

2. (easy) 已知矩阵 A, B 均为半正定矩阵，求证 $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$。

证明 略。使用特征值分解与 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 的可交换性。

3. (medium) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$，求证：$f(x) = kx$，其中 $k \in \mathbb{R}$ 为一常数。

证明 设 $k = f(1)$ 下面分为几个部分证明。仅提供思路，细节请自己完成。

(a) $f(x) = kx$ 对所有 $x \in \mathbb{N}$ 成立，使用归纳法，这是显然的。此外你可能需要推导 $f(x)$ 的奇偶性。

(b) $f(x) = kx$ 对所有 $x \in \mathbb{Q}$ 成立，需要使用 (a) 中的结论。

(c) $f(x) = kx$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立，需要使用 (b) 中的结论，以及使用有理数逼近实数。最重要的，需要函数的连续性。

4. (medium) 设矩阵 A 的每个元素为 a_{ij}，对于任意的 i，满足 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ji}|$。求证：$A$ 是非奇异矩阵。

证明 使用 Gershgorin 圆盘定理即可。

设 λ 为矩阵任意特征值，则由 Gershgorin 定理，有 $|\lambda - a_{ii}| < \sum_{j\neq i} |a_{ji}|$。这里 i 是某一个下标。但是由条件 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ji}|$ 可得此时 λ 不可能为 0。所以 A 没有零特征值，故而非奇异。

5. (medium) 设 X 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，$f(x)$ 是凸函数。求证：$f(\mathbb{E}X) \leqslant \mathbb{E}f(X)$，其中 $\mathbb{E}(\cdot)$ 表示对随机变量求期望。

   证明 https://en.wikipedia.org/wiki/Jensen's_inequality

6. (medium) 设二元函数 $f(x,y)$ 是凸函数，C 是凸集。令 $g(x) = \inf_{y\in C} f(x,y)$，求证：$g(x)$ 为凸函数。

   证明 利用凸函数定义即可。

   对于任意 x_1, x_2，任取 $\varepsilon > 0$，存在 $y_1, y_2 \in C$，使得 $f(x_i, y_i) \leqslant g(x_i) + \varepsilon$，$i = 1, 2$。因此考虑 $\lambda \in (0,1)$，验证凸函数定义：

$$
\begin{aligned}
&g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \inf_{y\in C} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \\
\leqslant & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\
\leqslant & \lambda f(x_1, y_1) + (1-\lambda) f(x_2, y_2) \\
\leqslant & \lambda(g(x_1) + \varepsilon) + (1-\lambda)(g(x_2) + \varepsilon) \\
= & \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

   由 ϵ 的任意性，我们就得到了 $g(x)$ 的凸性。