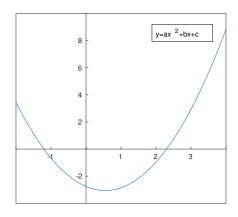
以下的每个魔法题目前面都有标注难度,难度的含义是相对于同类的魔法题目,并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略,因为这些图形都很简单,描述起来不会产生歧义。

1 初中魔法

- 1. $(easy) \triangle ABC$ 是等腰三角形,而且它可以被分成两个等腰三角形。则 $\triangle ABC$ 顶角的 所有可能值是多少?
- 2. (easy) 现在有足够多的正五边形地砖和正十边形地砖,它们的边长都相等。请问能否用它们覆盖整个平面(地砖之间不能有重叠)?为什么?
- 3. (medium) 在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,求证: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ 。(注:禁止使用相似三角形)。
- 4. (medium) 设函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如下图。则 $b^2 2ac$ 和 $5a^2$ 的大小关系为? 并证明你的结论。



5. (hard) 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $AB = AC, \angle A = 80^{\circ}$ 。点 O 为 $\triangle ABC$ 内部一点,且 $\angle OBC = 10^{\circ}, \angle OCA = 20^{\circ}$ 。求 $\angle BAO$ 的度数。

2 高中魔法

- 1. (easy) 设 a, b, c 是实数,则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的条件为?
- 2. (easy) 设集合 $M=\{1,2\}$,定义集合 $A=\{x\mid \forall a\in x, a\in M\}$ 。则集合 A 和 M 的关系为?

- 3. (medium) 求值: $\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$
- 4. (medium) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$, 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上。过点 P 分别引出两条斜率为 k_1, k_2 的直线,满足 $k_1 + k_2 = 0$ 。两条直线分别交椭圆于点 A 和 B。求证:AB 的斜率是定值。
- 5. (hard) 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_{n+1} = a_n^2 + 2, a_0 = a$ 。求 a_n 的表达式。

3 大学魔法

- 1. (easy) 下列说法是否正确?如果正确请证明这个结论,如果不正确请举出反例。
 - (a) 设数列 $a_n \to 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 则 S_n 一定有极限。
 - (b) 设函数 f(x) 在 \mathbb{R} 上可导,并且有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$,则有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 。
 - (c) 可导函数 f(x) 在 \mathbb{R} 上为凸函数当且仅当 f'(x) 是单调递增的。
 - (d) 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,则 A 可以分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。并且这个分解是唯一的。
- 2. (easy) 已知矩阵 A, B 均为半正定矩阵,求证 $tr(AB) \ge 0$ 。
- 3. (medium) 设连续函数 f(x) 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, 求证:f(x) = kx, 其中 $k \in \mathbb{R}$ 为一常数。
- 4. (medium) 设矩阵 A 的每个元素为 a_{ij} ,对于任意的 i,满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ 。求证: A 是非奇异矩阵。
- 5. (medium) 设 X 为概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的随机变量, f(x) 是凸函数。求证: $f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X)$, 其中 $\mathbb{E}(\cdot)$ 表示对随机变量求期望。
- 6. (medium) 设二元函数 f(x,y) 是凸函数,C 是凸集。令 $g(x)=\inf_{y\in C}f(x,y)$,求证: g(x) 为凸函数。