以下的每个魔法题目前面都有标注难度，难度的含义是相对于同类的魔法题目，并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略，因为这些图形都很简单，描述起来不会产生歧义。

1 初中魔法

1. (easy)$\triangle ABC$ 是等腰三角形，而且它可以被分成两个等腰三角形。则 $\triangle ABC$ 顶角的所有可能值是多少？
2. (easy) 现在有足够多的正五边形地砖和正十边形地砖，它们的边长都相等。请问能否用它们覆盖整个平面 (地砖之间不能有重叠)? 为什么？
3. (medium) 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，求证：$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$。(注：禁止使用相似三角形)。
4. (hard) 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB = AC, \angle A = 80°$。点 O 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle OBC = 10°, \angle OCA = 20°$。求 $\angle BAO$ 的度数。

2 高中魔法

1. (easy) 设 a, b, c 是实数，则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的条件为？
2. (easy) 设集合 $M = \{1, 2\}$，定义集合 $A = \{x \mid \forall a \in x, a \in M\}$。则集合 A 和 M 的关系为？
3. (medium) 求值：$\cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{6}{7}\pi$
4. (medium) 设椭圆 $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$，点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上。过点 P 分别引出两条斜率为 k_1, k_2 的直线，满足 $k_1 + k_2 = 0$。两条直线分别交椭圆于点 A 和 B。求证：AB 的斜率是定值。
5. (medium) 设定义在实数上的函数 f 满足 $f(f(x)) = x$ 恒成立，并且 f 是单调递增。求证：满足条件的 f 存在且唯一。
6. (hard) 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_{n+1} = a_n^2 + 2, a_0 = a$。求 a_n 的表达式。

3 大学魔法

1. (easy) 下列说法是否正确？如果正确请证明这个结论，如果不正确请举出反例。

   (a) 复值函数 $\sin(z)$ 是有界的。

(b) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，则有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$。

(c) 可导函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为凸函数当且仅当 $f'(x)$ 是单调递增的。

(d) 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则 A 可以分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。并且这个分解是唯一的。

(e) 在 $n\times n$ 矩阵构成的线性空间中，可逆矩阵所组成的集合是道路连通的。

2. (easy) 试构造出符合条件的函数或集合。

   (a) $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的两个偏导数处处存在，但 f 在 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处趋近于无穷，在其他点连续。

   (b) 可微多元函数 f 在某点 x_0 处，对于任意向量 v，$t=0$ 均为 $g(t)=f(x_0+tv)$ 的极小值点。但 $x=x_0$ 不是 f 的极小值点。

3. (easy) 设定义在 $(0,1)$ 的函数 f 满足 $\sup_{x,y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<M$，其中 $\alpha>1$，M 是一个有限的常数。求证 f 在 $(0,1)$ 上是常值。

4. (easy) 已知矩阵 A,B 均为半正定矩阵，求证 $\mathrm{tr}(AB)\geqslant 0$。

5. (medium) 设矩阵 A 的每个元素为 a_{ij}，对于任意的 i，满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$。求证：$A$ 是非奇异矩阵。

6. (medium) 设 X 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量，$f(x)$ 是凸函数。求证：$f(\mathbb{E}X)\leqslant\mathbb{E}f(X)$，其中 $\mathbb{E}(\cdot)$ 表示对随机变量求期望。

7. (medium) 设二元函数 $f(x,y)$ 是凸函数，C 是凸集。令 $g(x)=\inf_{y\in C} f(x,y)$，求证：$g(x)$ 为凸函数。

8. (hard) 设 Y_n 是一列独立同分布的随机变量，并且有 $\mathbb{E}|Y_1|>0$。定义 $S_n=Y_1+\cdots+Y_n$。设随机变量 $T=\inf\{n: |S_n|>1\}$（即 T 定义为第一个 n 使得 S_n 不在区间 $[-1,1]$ 内）并规定 $\inf\phi=\infty$。求证，存在正数 c 和 $0<r<1$，使得 $\mathbb{P}(T>n)\leqslant cr^n$ 对于任意的 n 恒成立。