

魔法定级

RyanBern

2017 年 4 月 2 日

说明

- 以下的每个魔法题目前面都有标注难度，难度的含义是相对于同类的魔法题目，并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略，因为这些图形都很简单，描述起来不会产生歧义。
- 定级时需要根据自己目前正在攻读的学位进行选择，但可以选择自己攻读学位以上的等级。本科/研究生都被归入“大学”一级。
- 不同级别需要的题目数量不同。初中为 3 道；高中为 6 道；大学为 9 道。题目中至多选择两道处于自己等级以下的题目（例如如果要定成“大学”等级，那么至多只能选择两道初中或者高中的题目）。
- 大学魔法的前两大题，每小问算半个题目。
- 定级时，考官会根据提交答案的次数，选择问题的难度以及解法是否酷来对定级进行调整。

1 初中魔法

1. (easy) 有 54 张纸牌，编号为 1 到 54，初始按照编号从小到大的顺序依次放好。现在扔掉第 1 张，然后将第 2 张放到最下面，扔掉第 3 张，将第 4 张放到最下面，如此往复，直到只剩下一张牌为止。问最后剩下编号为多少的牌？
2. (easy) 从正方体 8 个顶点中随机取三个点，则构成等腰三角形的概率为？
3. (medium) 对平面内的 $\triangle ABC$ ，存在同平面的点 P ，使得 $\triangle PAB, \triangle PAC, \triangle PBC$ 面积相等。这样的点 P 有多少个？
4. (medium) 求证： $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$ 。
5. (hard) 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC, \angle A = 80^\circ$ 。点 O 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle OBC = 10^\circ, \angle OCA = 20^\circ$ 。求 $\angle BAO$ 的度数。

2 高中魔法

1. (easy) 设 a, b, c 是实数, 则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的条件为?
2. (easy) 将四个半径为 1 的小球堆起来, 两两相切, 那么这个几何体的外切四面体的边长为?
3. (easy) 求证: $xy = 1$ 在某种直角坐标替换下能够变成 $u^2/a^2 - v^2/b^2 = 1$ 的形式。
4. (easy) 三角形三个顶点对应的复数为 z_1, z_2, z_3 , 并且有 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = 1 + 2i$, 则其面积和最长边的平方之比是?
5. (medium) 求值: $\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$
6. (medium) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$, 点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上。过点 P 分别引出两条斜率为 k_1, k_2 的直线, 满足 $k_1 + k_2 = 0$ 。两条直线分别交椭圆于点 A 和 B 。求证: AB 的斜率是定值。
7. (medium) 设定义在实数上的函数 f 满足 $f(f(x)) = x$ 恒成立, 并且 f 是单调递增。求证: 满足条件的 f 存在且唯一。
8. (hard) 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_{n+1} = a_n^2 - 2, a_0 = a$ 。求 a_n 的表达式。
9. (hard) 空间点集 $A_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3|x|^n + |8x|^n + |z|^n \leq 1\}$, 令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 A 表示的几何体的体积是?

3 大学魔法

1. (easy) 下列说法是否正确? 请证明或者证伪之。
 - (a) 复值函数 $\sin(z)$ 是有界的。
 - (b) 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导, 并且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 则有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。
 - (c) 可导函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为凸函数当且仅当 $f'(x)$ 是单调递增的。
 - (d) 一元函数列 f_n 一致收敛与 f , 并且 f_n 和 f 均是无穷次可导, 则 f'_n 也一致收敛于 f' 。
 - (e) 在 $n \times n$ 矩阵构成的线性空间中, 可逆矩阵所组成的集合是道路连通的。
2. (easy) 试构造出符合条件的函数或集合。
 - (a) $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上的两个偏导数处处存在, 但 f 在 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 处无界, 在其他点两个偏导数连续。

- (b) 可微多元函数 f 在某点 x_0 处, 对于任意向量 v , $t = 0$ 均为 $g(t) = f(x_0 + tv)$ 的极小值点。但 $x = x_0$ 不是 f 的极小值点。
- (c) 请构造 \mathbb{R}^2 上的子集 E , 使其满足存在 E 边界上的点 A , 使得对于任意 E 的内点 B , A 与 B 不是道路连通的。
3. (easy) 设定义在 $(0, 1)$ 的函数 f 满足 $\sup_{x,y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < M$, 其中 $\alpha > 1$, M 是一个有限的常数。求证 f 在 $(0, 1)$ 上是常值。
4. (easy) 求证 $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ 当且仅当 x, y 线性相关且 $x^T y \geq 0$ 。
5. (easy) 已知矩阵 A 正定, 矩阵 B 半正定, 求证 A, B 可以在同一个合同变换下对角化。
6. (medium) 设 n 元函数

$$f(x) = \max x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2$$

求 $f(x)$ 的一个最小值点。

7. (medium) 若 $\|A\| < 1$, 并且 $\|I\| = 1$, 其中 I 为单位阵, $\|\cdot\|$ 为任意矩阵范数。求证 $I - A$ 可逆并且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad (1)$$

8. (medium) 设二元函数 $f(x, y)$ 是凸函数, C 是凸集。令 $g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$, 求证: $g(x)$ 为凸函数。
9. (medium) 设矩阵 A 为循环矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_0 & \cdots & a_{N-2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

试给出一个快速求解方程 $Ax = b$ 的算法。

10. (hard) 设 Y_n 是一列独立同分布的随机变量, 并且有 $\mathbb{E}|Y_1| > 0$ 。定义 $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ 。设随机变量 $T = \inf\{n : |S_n| > 1\}$ (即 T 定义为第一个 n 使得 S_n 不在区间 $[-1, 1]$ 内) 并规定 $\inf \emptyset = \infty$ 。求证, 存在正数 c 和 $0 < r < 1$, 使得 $\mathbb{P}(T > n) \leq cr^n$ 对于任意的 n 恒成立。