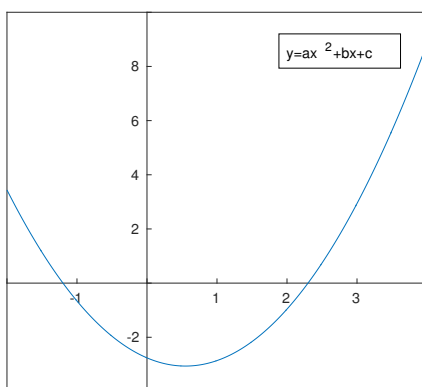


以下的每个魔法题目前面都有标注难度，难度的含义是相对于同类的魔法题目，并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略，因为这些图形都很简单，描述起来不会产生歧义。

## 1 初中魔法

1. (easy)  $\triangle ABC$  是等腰三角形，而且它可以被分成两个等腰三角形。则  $\triangle ABC$  顶角的所有可能值是多少？
2. (easy) 现在有足够多的正五边形地砖和正十边形地砖，它们的边长都相等。请问能否用它们覆盖整个平面（地砖之间不能有重叠）？为什么？
3. (medium) 在  $\triangle ABC$  中， $AD$  是  $\angle BAC$  的平分线，求证： $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ 。（注：禁止使用相似三角形）。
4. (medium) 设函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像如下图。则  $b^2 - 2ac$  和  $5a^2$  的大小关系为？并证明你的结论。



5. (hard) 设  $\triangle ABC$  是等腰三角形， $AB = AC$ ,  $\angle A = 80^\circ$ 。点  $O$  为  $\triangle ABC$  内部一点，且  $\angle OBC = 10^\circ$ ,  $\angle OCA = 20^\circ$ 。求  $\angle BAO$  的度数。

## 2 高中魔法

1. (easy) 设  $a, b, c$  是实数，则  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  的条件为？
2. (easy) 设集合  $M = \{1, 2\}$ ，定义集合  $A = \{x \mid \forall a \in x, a \in M\}$ 。则集合  $A$  和  $M$  的关系为？

3. (medium) 求值： $\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$
4. (medium) 设椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ , 点  $P(x_0, y_0)$  在椭圆上。过点  $P$  分别引出两条斜率为  $k_1, k_2$  的直线, 满足  $k_1 + k_2 = 0$ 。两条直线分别交椭圆于点  $A$  和  $B$ 。求证： $AB$  的斜率是定值。
5. (hard) 设数列  $\{a_n\}$  满足递推式  $a_{n+1} = a_n^2 + 2, a_0 = a$ 。求  $a_n$  的表达式。

### 3 大学魔法

1. (easy) 下列说法是否正确？如果正确请证明这个结论，如果不正确请举出反例。
  - (a) 设数列  $a_n \rightarrow 0, S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 则  $S_n$  一定有极限。
  - (b) 设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 并且有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 。
  - (c) 可导函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上为凸函数当且仅当  $f'(x)$  是单调递增的。
  - (d) 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 则  $A$  可以分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。并且这个分解是唯一的。
2. (easy) 已知矩阵  $A, B$  均为半正定矩阵, 求证  $\text{tr}(AB) \geq 0$ 。
3. (medium) 设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , 求证： $f(x) = kx$ , 其中  $k \in \mathbb{R}$  为一常数。
4. (medium) 设矩阵  $A$  的每个元素为  $a_{ij}$ , 对于任意的  $i$ , 满足  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ 。求证： $A$  是非奇异矩阵。
5. (medium) 设  $X$  为概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机变量,  $f(x)$  是凸函数。求证： $f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X)$ , 其中  $\mathbb{E}(\cdot)$  表示对随机变量求期望。
6. (medium) 设二元函数  $f(x, y)$  是凸函数,  $C$  是凸集。令  $g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$ , 求证： $g(x)$  为凸函数。