# 魔法定级

RyanBern

2017 年 3 月 20 日

**说明**

- 以下的每个魔法题目前面都有标注难度，难度的含义是相对于同类的魔法题目，并不是绝对的难度。题目中涉及到的几何图形均省略，因为这些图形都很简单，描述起来不会产生歧义。
- 定级时需要根据自己目前正在攻读的学位进行选择，但可以选择自己攻读学位以上的等级。本科/研究生都被归入“大学”一级。
- 不同级别需要的题目数量不同。初中为 3 道；高中为 6 道；大学为 9 道。题目中至多选择两道处于自己等级以下的题目（例如如果要定成“大学”等级，那么至多只能选择两道初中或者高中的题目）。
- 大学魔法的前两大题，每小问算半个题目。
- 定级时，考官会根据提交答案的次数，选择问题的难度以及解法是否醋来对定级进行调整。

## 1 初中魔法

1. (easy) 有 54 张纸牌，编号为 1 到 54，初始按照编号从小到大的顺序依次放好。现在扔掉第 1 张，然后将第 2 张放到最下面，扔掉第 3 张，将第 4 张放到最下面，如此往复，直到只剩下一张牌为止。问最后剩下编号为多少的牌？
2. (easy) 从正方体 8 个顶点中随机取三个点，则构成等腰三角形的概率为？
3. (medium) 对平面内的 $\triangle ABC$，存在同平面的点 $P$，使得 $\triangle PAB, \triangle PAC, \triangle PBC$ 面积相等。这样的点 $P$ 有多少个？
4. (medium) 求证：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$。
5. (hard) 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC, \angle A=80^\circ$。点 $O$ 为 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\angle OBC=10^\circ, \angle OCA=20^\circ$。求 $\angle BAO$ 的度数。

## 2 高中魔法

1. (easy) 设 $a, b, c$ 是实数，则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 的条件为？
2. (easy) 将四个半径为 1 的小球堆起来，两两相切，那么这个几何体的外切四面体的边长为？
3. (easy) 求证：$xy = 1$ 在某种直角坐标替换下能够变成 $u^2/a^2 - v^2/b^2 = 1$ 的形式。
4. (easy) 三角形三个顶点对应的复数为 $z_1, z_2, z_3$，并且有 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = 1 + 2i$，则其面积和最长边的平方之比是？
5. (medium) 求值：$\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi$
6. (medium) 设椭圆 $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$，点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上。过点 $P$ 分别引出两条斜率为 $k_1, k_2$ 的直线，满足 $k_1 + k_2 = 0$。两条直线分别交椭圆于点 $A$ 和 $B$。求证：$AB$ 的斜率是定值。
7. (medium) 设定义在实数上的函数 $f$ 满足 $f(f(x)) = x$ 恒成立，并且 $f$ 是单调递增。求证：满足条件的 $f$ 存在且唯一。
8. (hard) 设数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_{n+1} = a_n^2 - 2, a_0 = a$。求 $a_n$ 的表达式。
9. (hard) 空间点集 $A_n - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3|x|^n + |8x|^n + |z| * n \leqslant 1\}$，令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则 $A$ 表示的几何体的体积是？

## 3 大学魔法

1. (easy) 下列说法是否正确？如果正确请证明这个结论，如果不正确请举出反例。
   (a) 复值函数 $\sin(z)$ 是有界的。
   (b) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，并且有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。
   (c) 可导函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为凸函数当且仅当 $f'(x)$ 是单调递增的。
   (d) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则 $A$ 可以分解为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。并且这个分解是唯一的。
   (e) 在 $n \times n$ 矩阵构成的线性空间中，可逆矩阵所组成的集合是道路连通的。
2. (easy) 试构造出符合条件的函数或集合。
   (a) $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的两个偏导数处处存在，但 $f$ 在 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 处趋近于无穷，在其他点连续。

(b) 可微多元函数 $f$ 在某点 $x_0$ 处，对于任意向量 $v$，$t=0$ 均为 $g(t)=f(x_0+tv)$ 的极小值点。但 $x=x_0$ 不是 $f$ 的极小值点。

(c) 请构造 $\mathbb{R}^2$ 上的子集 $E$，使其满足存在 $E$ 边界上的点 $A$，使得对于任意 $E$ 的内点 $B$，$A$ 与 $B$ 不是道路连通的。

3. (easy) 设定义在 $(0,1)$ 的函数 $f$ 满足 $\sup_{x,y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<M$，其中 $\alpha>1$，$M$ 是一个有限的常数。求证 $f$ 在 $(0,1)$ 上是常值。

4. (easy) 求证 $\|x+y\|_2=\|x\|_2+\|y\|_2$ 当且仅当 $x,y$ 线性相关且 $x^Ty\geqslant 0$。

5. (easy) 已知矩阵 $A$ 正定，矩阵 $B$ 半正定，求证 $A,B$ 可以在同一个合同变换下对角化。

6. (medium) 设矩阵 $A$ 的每个元素为 $a_{ij}$，对于任意的 $i$，满足 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$。求证：$A$ 是非奇异矩阵。

7. (medium) 若 $\|A\|<1$，并且 $\|I\|=1$，其中 $I$ 为单位阵，$\|\cdot\|$ 为任意矩阵范数。求证 $I-A$ 可逆并且
$$\|(I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|A\|} \tag{1}$$

8. (medium) 设二元函数 $f(x,y)$ 是凸函数，$C$ 是凸集。令 $g(x)=\inf_{y\in C}f(x,y)$，求证：$g(x)$ 为凸函数。

9. (medium) 设矩阵 $A$ 为循环矩阵，即
$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_0 & \cdots & a_{N-2} \end{pmatrix} \tag{2}$$
试给出一个快速求解方程 $Ax=b$ 的算法。

10. (hard) 设 $Y_n$ 是一列独立同分布的随机变量, 并且有 $\mathbb{E}|Y_1|>0$。定义 $S_n=Y_1+\cdots+Y_n$。设随机变量 $T=\inf\{n:\ |S_n|>1\}$ ( 即 $T$ 定义为第一个 $n$ 使得 $S_n$ 不在区间 $[-1,1]$ 内 ) 并规定 $\inf\phi=\infty$。求证，存在正数 $c$ 和 $0<r<1$，使得 $\mathbb{P}(T>n)\leqslant cr^n$ 对于任意的 $n$ 恒成立。