

Réponses du projet

2. Problème.

(a) Le problème associé à (3) admet la formulation variationnelle suivante

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{avec } a(u, v) := \int_{\Omega} \mu \nabla u^\top \nabla \bar{v} + u \bar{v} dx$$

$$\ell(v) := \int_{\Omega} f \bar{v} dx.$$

3. Second membre.

(b) f admet l'expression $f = u - \left(\mu \left(\frac{\partial^2 u_{ex}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{ex}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial u_{ex}}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)$.

4. Résolution.

(b) Solution numérique u_h et erreur associée $u_h - \Pi_h u_{ex}$ pour un maillage uniforme, avec $L_x = 10$, $L_y = 5$, $N_x = 150$ et $N_y = 75$.

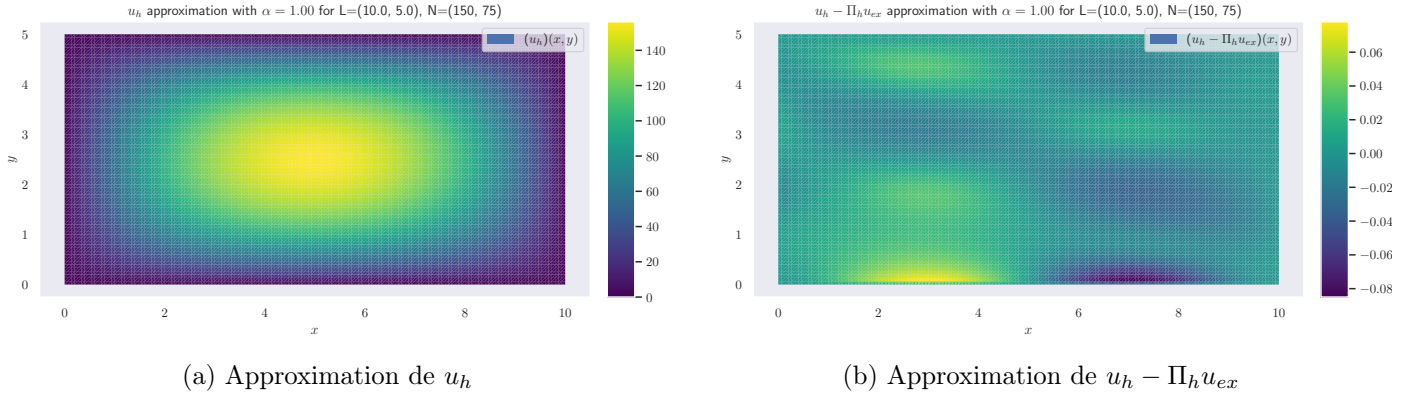


FIGURE 1 – Pour $\alpha = 1$

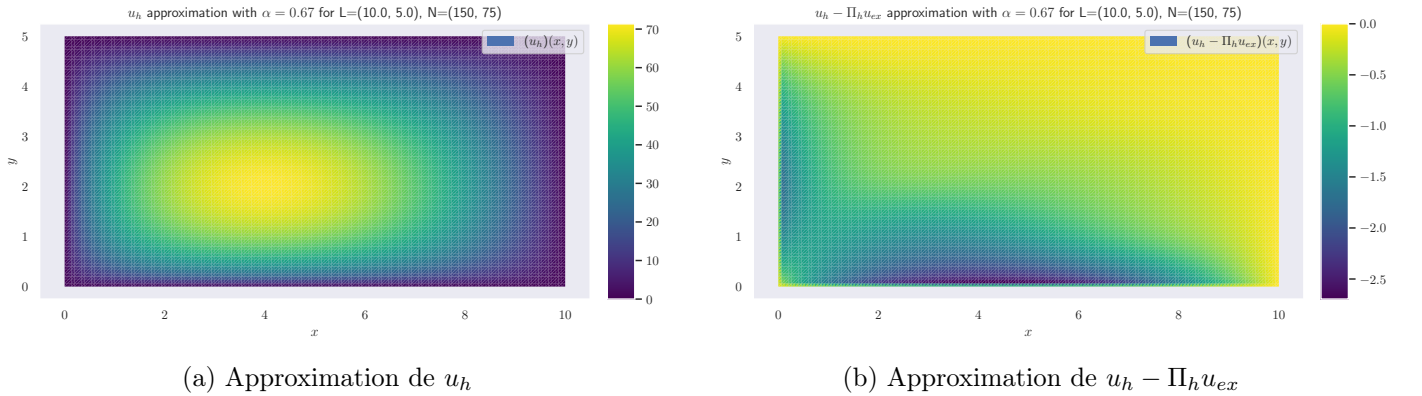
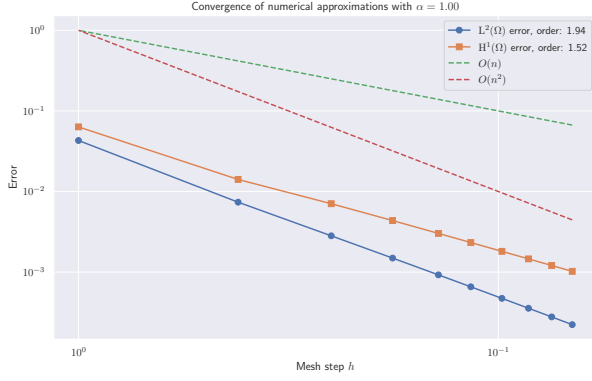
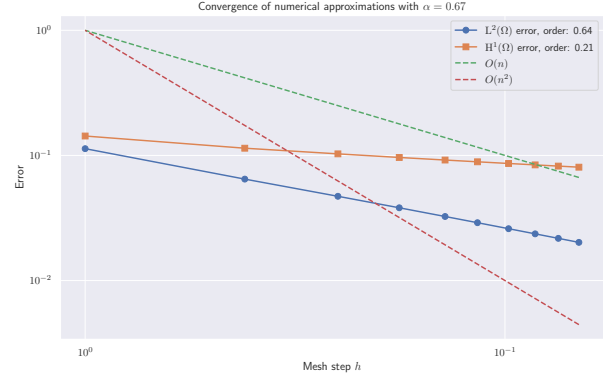


FIGURE 2 – Pour $\alpha = 2/3$

- (c) Pour un domaine identique à la question précédente et en faisant varier h , on obtient pour $\alpha = 1$ une convergence en $O(n^{1.5})$ en norme $L^2(\Omega)$ et $O(n^2)$ en norme $H^1(\Omega)$. En revanche, pour $\alpha = 2/3$ on obtient respectivement des convergences en $O(n^{0.6})$ et $O(n^{0.2})$.



(a) Erreur pour $\alpha = 1$



(b) Erreur pour $\alpha = 2/3$

FIGURE 3 – Convergence de l'erreur $\|u_h - \Pi_h u_{ex}\|_V / \|\Pi_h u_{ex}\|_V$, $V = L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$