漸近関数の半正定値計画問題への応用

F22A034C 岩本 崚汰

漸近関数は、最適化問題の解を求めるための有力なツールの一つである。この概念の起源は、1913 年の Steinitz にあり、その後、Stocker によって研究が進められた。その 20 年後、Bourbaki と Choquet によってさらに研究が進められ、1970 年、Rockafellar によって凸集合に対しての asymptotic cone を recession cone として定義された。同様に、asymptotic function も recession function として定義され、この理論の基礎となる理論がまとめられた。1999 年には、Auslender と Teboulle はこの漸近錐 (asymptotic cone) と漸近関数 (asymptotic function) の理論と応用を『Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities』でまとめた。この本に記述されているように、漸近関数の応用の一つとして、半正定値計画問題との関係が挙げられる。半正定値計画問題は、線形計画問題、2 次凸計画問題、二次錐計画問題の一般化であり、その応用は、組合せ最適化、グラフ理論、統計学、量子力学、機械学習など多岐にわたる。そのため、様々な問題に対して適応できることから近年注目を集めている。

はじめに、漸近錐と漸近関数の定義と簡単な性質を紹介する。

定義 1. $C \subset \mathbb{R}^n$、$C \neq \emptyset$ とする。このとき C の漸近錐 (Asymptotic cone)、記号で C_∞、は点列 $\{x_k\} \subset C$ を用いて以下のように定義する。

$$C_\infty = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists t_k \to +\infty, \exists x_k \in C \text{ with } \lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{t_k} = d \right\}.$$

命題 2. $C \subset \mathbb{R}^n$、$C \neq \emptyset$ とする。この時、以下が成り立つ。

1. C_∞ は閉凸錐
2. $(\mathrm{cl}\, C)_\infty = C_\infty$
3. C が錐ならば, $C_\infty = \mathrm{cl}\, C$

定義 3. proper な関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して, ただ一つの f に関する $f_\infty : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ を $\mathrm{epi}\, f_\infty = (\mathrm{epi}\, f)_\infty$ を満たすように定義する。この関数を f の漸近関数 (Asymptotic function) と呼ぶ。

命題 4. proper な関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して以下が成り立つ。

1. f_∞ は下半連続かつ positively homogeneous
2. $f_\infty(0) = 0$ または $f_\infty(0) = -\infty$

3. $f_\infty(0)=0$ ならば, f_∞ は proper
4. $(\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x)$, $\alpha>0$ とする。このとき、$(\alpha f)_\infty = \alpha f_\infty$

命題 5. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を proper かつ下半連続な凸関数とする。このとき、この漸近関数 f_∞ は positively homogeneous かつ proper で下半連続な凸関数であり、任意の $d\in\mathbb{R}^n$ に対して, 以下が成り立つ。

$$f_\infty(d) = \sup\{f(x+d)-f(x) \mid x\in \mathrm{dom}\, f\} \tag{1}$$

また、

$$f_\infty(d) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = \sup_{t>0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}, \forall x\in\mathrm{dom}\, f \tag{2}$$

次に半正定値計画問題への応用を考えるために、関数が symmetric であること、また spectrally defined であることを定義する。

定義 6. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ とする。このとき、f が symmetric であるとは、以下が成り立つことをいう。

$$\forall x\in\mathbb{R}^n \text{ and } P: n\times n \text{ の置換行列}, \quad f(Px)=f(x).$$

以下が symmetric な関数の例である。

1. $f(x)=\max_{1\le i\le n} x_i$ (or $\min_{1\le i\le n} x_i$),
2. $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i$ (or $\prod_{i=1}^n x_i$).

定義 7. 関数 $\Phi:\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が spectrally defined であるとは、以下を満たすような symmetric な関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が存在することをいう。

$$\Phi(X)=\Phi_f(X)\coloneqq f(\lambda(X)), \forall X\in\mathbb{S}^n$$

ただし、$\lambda(X)\coloneqq(\lambda_1(X),\cdots,\lambda_n(X))^T$ は X の固有値を非減少に並べたベクトルである。

定理 8 ([6, Lewis (1996)])**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は symmetric な関数とする。このとき、以下が成り立つ。

$${\Phi_f}^* = \Phi_{f^*}.$$

定理 9 ([9, Seeger (1997)])**.** $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は symmetric かつ proper で下半連続な凸関数とし、その spectrally defined な関数を Φ_f とする。このとき、以下が成り立つ。

$$(\Phi_f)_\infty = \Phi_{f_\infty}.$$

参考文献

[1] A. Auslender. Penalty and barrier methods: A unified framework. SIAM J. Optimization, 10 (1999), 211–230.

[2] A. Auslender and M. Teboulle. Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities, Springer monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] A. Beck and M. Teboulle. Smoothing and First Order Methods: A Unified Framework, SIAM J. Optim, 22 (2012), 557–580.

[4] A. Ben-Tal and M. Teboulle. A smoothing technique for nondifferentiable optimization problems. In Optimization, Fifth French-German Conference, Lecture Notes in Mathematics 1405, Springer-Verlag, New York (1989), 1–11.

[5] J.M. Borwein and A.S. Lewis. Convex Analysis and Nonlinear Optimization: Theory and Examples, Springer-Verlag, New York, 2000.

[6] A.S. Lewis. Convex Analysis on the Hermitian matrices. SIAM J. Optimization, 6 (1996), 164–177.

[7] R.T. Rockafellar. Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[8] R.T. Rockafellar and R.J.B Wets. Variational Analysis. Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] A. Seeger. Convex analysis of spectrally defined matrix functions. SIAM J. Optimization, 7 (1997), 679–696.