凸解析学における漸近挙動

Introduction of Asymptotic Cones

岩本 崚汰

新潟大学大学院自然科学研究科

March 14, 2023

目次

目次

前提条件 (Precondition)

今回扱うのは $\mathbb{R}^n$ の実ベクトル空間とする。
また、内積は以下のように定義する。

$$\text{For } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ and } y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

ノルムに関しては、$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ とする。

目次

錐 (Cones)

(1) 錐の定義

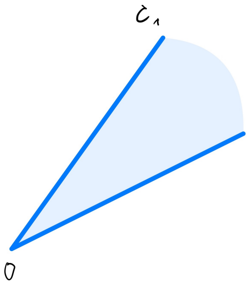
(2) 錐の特徴付け（凸解析学で登場する様々な錐の紹介）

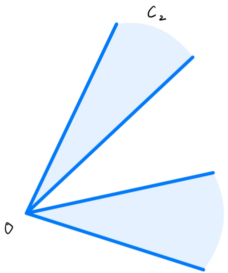
錐の定義 (1)

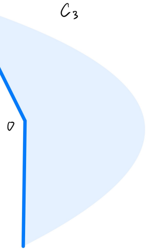
定義 2.1

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \varnothing$ とする。以下を満たすときに C は錐であるという。

$$\forall x \in C, t \geq 0, tx \in C.$$



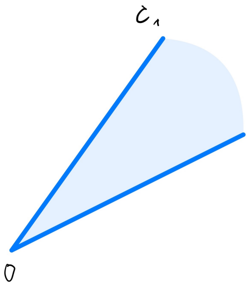


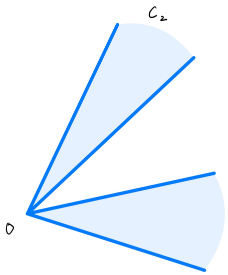


錐の定義 (2)

命題 2.2

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \varnothing$ とする。このとき以下の命題は同値である。
(a) C は凸錐である。
(b) C は $C + C \subset C$ を満たす錐である。



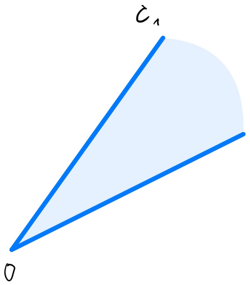


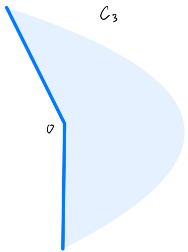
錐の特徴付け (1)

定義 2.3 (pointed)

$C \subset \mathbb{R}^n$, C は錐であるとする。以下を満たすときに C は *pointed* であるという。

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$



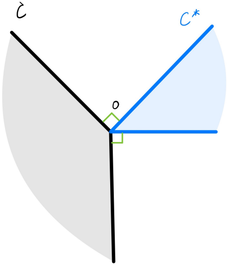


錐の特徴付け (2)

定義 2.4 (polar cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$, C は錐であるとする。（基本的には錐でなくて良い）このとき C の極錐、C^* は以下のように定義する。

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

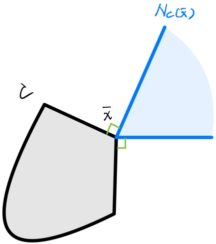


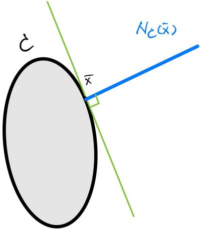
錐の特徴付け (3)

定義 2.5 (normal cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$, C は空でない凸集合（凸でなくて良い）とし、$\bar{x} \in C$ とする。このとき C の $\bar{x}$ での法錐、$N_C(\bar{x})$ は以下のように定義する。

$$N_C(\bar{x}) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$



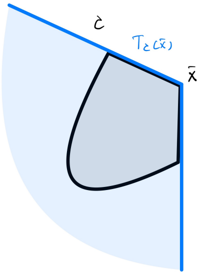


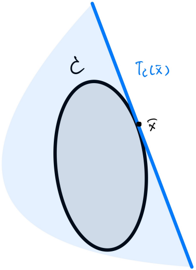
錐の特徴付け (4)

定義 2.6 (tangent cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$, C は空でない凸集合（凸でなくて良い）とし、$\bar{x} \in \mathrm{cl}C$ とする。このとき C の $\bar{x}$ での接錐、$T_C(\bar{x})$ は以下のように定義する。

$$T_C(\bar{x}) := \mathrm{cl}\{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t > 0,\ with\ \bar{x} + td \in C\}.$$





目次

動機づけ (Motivation) (1)

漸近錐 (Asymptotic cones) の定義に入る前に、一般的な点列の収束について考える。

定義 3.1

ある点列 $\{x_k\}$ がある点 x に収束するような部分列を持つ時にこの点 x を点列 $\{x_k\}$ の収積点と呼ぶ。

命題 3.2

ある点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ がある点 x への収束することと、その点列が有界で唯一つの収積点 x を持つ、ということが同値である。

一般に、$\mathbb{R}^n$ の実ベクトル空間である点への収束性を考える場合、その集合の有界性と唯一つの収積点を持つ、ということが必要である。

動機づけ (Motivation) (2)

注意

ここで点列が有界であることから、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、収束する部分列が存在することが言える。

動機づけ (Motivation) (2)

注意

ここで点列が有界であることから、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、収束する部分列が存在することが言える。

では、与えられた点列に有界性がない場合はどうすればいいのか？

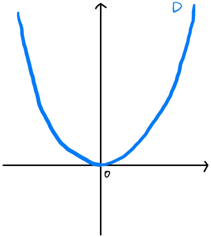
動機づけ (Motivation) (2)

注意

ここで点列が有界であることから、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、収束する部分列が存在することが言える。

では、与えられた点列に有界性がない場合はどうすればいいのか？

例: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$



目次

漸近錐とは (Asymptotic Cones) (1)

漸近錐の定義に入る前に改めて収束性の定義をする。

定義 4.1

以下の条件を満たしている時、ある点列 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ が $d \in \mathbb{R}^n$ に収束する、と定義する。

$$\exists \{t_k\}, with\, t_k \to +\infty \; s.t. \; \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d$$

漸近錐とは (Asymptotic Cones) (2)

漸近錐の定義をする。

定義 4.2

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \varnothing$ とする。このとき C の Asymptotic cone、記号で C_∞ 、は点列 $\{x_k\} \subset C$ を用いて以下のように定義する。

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \to +\infty, \exists x_k \in C \; with \; \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d\}.$$

例: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

漸近錐とは (Asymptotic Cones) (2)

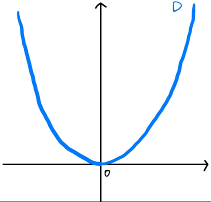
漸近錐の定義をする。

定義 4.2

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \varnothing$ とする。このとき C の Asymptotic cone、記号で C_∞ 、は点列 $\{x_k\} \subset C$ を用いて以下のように定義する。

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \to +\infty, \exists x_k \in C \; with \; \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = d\}.$$

例: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$



漸近錐とは (Asymptotic Cones) (2)

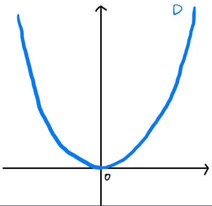
漸近錐の定義をする。

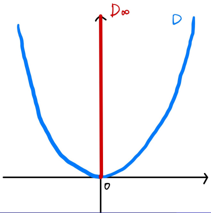
定義 4.2

$C \subset \mathbb{R}^n$, $C \neq \varnothing$ とする。このとき C の Asymptotic cone、記号で C_∞ 、は点列 $\{x_k\} \subset C$ を用いて以下のように定義する。

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \to +\infty, \exists x_k \in C \; with \; \lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{t_k} = d\}.$$

例: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$





漸近錐とは (Asymptotic Cones) (3)

点列が有界な場合はどうなるのか？

命題 4.3

ある集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ が有界であることと $C_\infty = \{0\}$ であることは必要十分である。

目次

今後の目標 (Next goals)

- 漸近錐の性質
- 漸近関数の性質
- 最適化問題との関係

これらを通して研究対象を絞っていく。

最後に

使用しているテキストの紹介

- Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities (A.Auslender and M.Teboulle [著])
- 凸解析学と最適化理論 (田中謙輔 [著])