

# 凸解析学における漸近挙動

## Introduction of Asymptotic Cones

岩本 峻汰

新潟大学大学院自然科学研究科

March 14, 2023

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

## 前提条件 (Precondition)

今回扱うのは  $\mathbb{R}^n$  の実ベクトル空間とする。  
また、内積は以下のように定義する。

$$\text{For } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ and } y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

ノルムに関しては、 $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$  とする。

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

# 錐 (Cones)

- (1) 錐の定義
- (2) 錐の特徴付け（凸解析学で登場する様々な錐の紹介）

# 錐の定義 (1)

## 定義 2.1

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C \neq \emptyset$  とする。以下を満たすときに  $C$  は *cone* であるという。

$$\forall x \in C, t \geq 0, tx \in C.$$

## 錐の定義 (2)

### 命題 2.2

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C \neq \emptyset$  とする。このとき以下の命題は同値である。

- (a)  $C$  は凸錐である。
- (b)  $C$  は  $C + C \subset C$  を満たす錐である。



# 錐の特徴付け (1)

## 定義 2.3 (pointed)

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C$  は錐であるとする。以下を満たすときに  $C$  は *pointed* であるという。

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

## 錐の特徴付け (2)

### 定義 2.4 (polar cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C$  は錐であるとする。このとき  $C$  の極錐、 $C^*$  は以下のように定義する。

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

## 錐の特徴付け (3)

### 定義 2.5 (normal cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C$  は空でない凸集合とし、 $\bar{x} \in C$  とする。このとき  $C$  の  $\bar{x}$  での法錐、 $N_C(\bar{x})$  は以下のように定義する。

$$N_C(\bar{x}) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

## 錐の特徴付け (4)

### 定義 2.6 (tangent cone)

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C$  は空でない凸集合とし、 $\bar{x} \in \text{cl}C$  とする。このとき  $C$  の  $\bar{x}$  での接錐、 $T_C(\bar{x})$  は以下のように定義する。

$$T_C(\bar{x}) := \text{cl}\{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t > 0, \text{ with } \bar{x} + td \in C\}.$$

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)**
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

## 動機づけ (Motivation) (1)

漸近錐 (Asymptotic cones) の定義に入る前に、一般的な点列の収束について考える。

### 定義 3.1

ある点列  $\{x_k\}$  がある点  $x$  に収束するような部分列を持つ時にこの点  $x$  を点列  $\{x_k\}$  の収積点と呼ぶ。

### 命題 3.2

ある点列  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  がある点  $x$  への収束することと、その点列が有界で唯一つの収積点  $x$  を持つ、ということが同値である。

一般に、 $\mathbb{R}^n$  の実ベクトル空間である点への収束性を考える場合、その集合の有界性と唯一つの収積点を持つ、ということが必要である。

## 動機づけ (Motivation) (2)

### 注意

ここで点列が有界であることから、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、収束する部分列が存在することが言える。

## 動機づけ (Motivation) (2)

### 注意

ここで点列が有界であることから、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、収束する部分列が存在することが言える。

では、与えられた点列に有界性がない場合はどうすればいいのか？



## 動機づけ (Motivation) (3)

例:  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

# 漸近錐とは (Asymptotic Cones) (1)

漸近錐の定義に入る前に改めて収束性の定義をする。

## 定義 4.1

以下の条件を満たしている時、ある点列  $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$  が  $d \in \mathbb{R}^n$  に収束する、と定義する。

$$\exists \{t_k\}, \text{ with } t_k \rightarrow +\infty \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{t_k} = d \quad (2.1)$$

## 漸近錐とは (Asymptotic Cones) (2)

漸近錐の定義をする。

### 定義 4.2

$C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C \neq \emptyset$  とする。このとき  $C$  の Asymptotic cone、記号で  $C_\infty$ 、は点列  $\{x_k\} \subset C$  を用いて以下のように定義する。

$$C_\infty = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \rightarrow +\infty, \exists x_k \in C \text{ with } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{t_k} = d\}.$$

## 漸近錐とは (Asymptotic Cones) (3)

点列が有界な場合はどうなるのか？

### 命題 4.3

ある集合  $C \subset \mathbb{R}^n$  が有界であることと  $C_\infty = \{0\}$  であることは必要十分である。

# 目次

- ① 前提条件 (Precondition)
- ② 錐 (Cones)
- ③ 動機づけ (Motivation)
- ④ 漸近錐とは (Asymptotic Cones)
- ⑤ 今後の目標 (Next goals)

# 今後の目標 (Next goals)

- 漸近推の性質
- 漸近関数の性質
- 最適化問題との関係

これらを通して研究対象を絞っていく。

# 最後に

## 使用しているテキストの紹介

- Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities (A.Auslender and M.Teboulle [著])
- 凸解析学と最適化理論 (田中謙介 [著])