Матлог. Решения ДЗ

Междуструйники из бухтильни

12 февраля 2022 г.

Содержание

Домашняя работа №1

Задача 2.d

Доказать $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$.

Доказательство. По теореме о дедукции $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A \Leftrightarrow A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A$

1. $A \,\&\, B$ (Гипотеза)
2. $B \to A \to B \,\&\, A$ (сх. акс. 3)
3. $A \,\&\, B \to B$ (сх. акс. 5)
4. B (М. Р. 1 3)
5. $A \to B \,\&\, A$ (М. Р. 2 4)
6. $A \,\&\, B \to A$ (сх. акс. 4)
7. A (М. Р. 1 6)
8. $B \,\&\, A$ (М. Р. 5 7)

Доказательство без теоремы о дедукции предоставляется на рассмотрение пытливому читателю. (DK3!8)

Задача 2.e

Доказать $\vdash A \to \neg\neg A$.

Доказательство. По теореме о дедукции $\vdash A \to \neg\neg A \Leftrightarrow A \vdash \neg\neg A$.

1. A (Гипотеза)
2. $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$ (сх. акс. 9)
3. $A \to (\neg A \to A)$ (сх. акс. 1)
4. $\neg A \to A$ (М. Р. 1 3)
5. $(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$ (М. Р. 2 4)
6. $\neg A \to (\neg A \to \neg A)$ (сх. акс. 1)
7. $(\neg A \to (\neg A \to \neg A)) \to (\neg A \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A)$ (сх. акс. 2)
8. $(\neg A \to (\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to (\neg A \to \neg A)$ (М. Р. 6 7)
9. $\neg A \to ((\neg A \to \neg A) \to \neg A)$ (сх. акс. 1)
10. $\neg A \to \neg A$ (М. Р. 8 9)
11. $\neg\neg A$ (М. Р. 5 10)

(DK3!8)

Задача 3.a

Доказать: $\neg A, B \vdash \neg(A \,\&\, B)$
Доказательство.

1. $\neg A$
2. B
3. $A \,\&\, B \to A$ (сх. акс. 4)
4. $\neg A \to (A \,\&\, B \to \neg A)$ (сх. акс. 1)
5. $A \,\&\, B \to \neg A$ (М. Р. 4, 1)

6. $(A \& B \to A) \to (A \& B \to \neg A) \to \neg(A \& B)$ (сх. акс. 9)
7. $(A \& B \to \neg A) \to \neg(A \& B)$ (M. P. 3, 6)
8. $\neg(A \& B)$ (M. P. 7, 5)

(микротян)

Задача 3.b

Доказать: $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
Доказательство.

1. A (Гипотеза)
2. $\neg B$ (Гипотеза)
3. $A \& B \to B$ (сх. акс. 5)
4. $\neg B \to (A \& B \to \neg B)$ (сх. акс. 1)
5. $A \& B \to \neg B$ (M. P. 4, 2)
6. $(A \& B \to B) \to (A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ (сх. акс. 9)
7. $(A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ (M. P. 3, 6)
8. $\neg(A \& B)$ (M. P. 7, 5)

(DK3!8 (спизжено у микротян))

Задача 3.c

Доказать: $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
Доказательство.

1. $\neg A$ (Гипотеза)
2. $\neg B$ (Гипотеза)
3. $A \& B \to B$ (сх. акс. 5)
4. $\neg B \to (A \& B \to \neg B)$ (сх. акс. 1)
5. $A \& B \to \neg B$ (M. P. 4, 2)
6. $(A \& B \to B) \to (A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ (сх. акс. 9)
7. $(A \& B \to \neg B) \to \neg(A \& B)$ (M. P. 3, 6)
8. $\neg(A \& B)$ (M. P. 7, 5)

(DK3!8 (спизжено у микротян))

Задача 3.d

Доказать: $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

Доказательство.

1. $\neg A, \neg B \vdash (A \to B) \to (B \to B) \to ((A \vee B) \to B)$ (сх. акс. 8)
2. $\neg A, \neg B \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (закон обратной контрапозиции)
3. $\neg A, \neg B \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (сх. акс. 1)
4. $\neg A, \neg B \vdash \neg B \to \neg A$ (M. P. гипотезы и 3)
5. $\neg A, \neg B \vdash A \to B$ (M. P. 2 4)
6. $\neg A, \neg B \vdash (B \to B) \to ((A \vee B) \to B)$ (M. P. 1 5)

7. $\neg A, \neg B \vdash B \to B$ (закон тождества)
8. $\neg A, \neg B \vdash (A \lor B) \to B$ (М. Р. 6 7)
9. $\neg A, \neg B \vdash \neg B \to \neg(A \lor B)$ (закон контрапозиции для 8)
10. $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \lor B)$ (М. Р. гипотезы и 9)

(DK3!8)

Задача 3.e

Доказать $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$.

Доказательство.

1. $A, \neg B \vdash ((A \to B) \to B) \to ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$ (сх. акс. 9)
2. $A, \neg B \vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to B)$ (сх. акс. 2)
3. $A, \neg B \vdash A \to ((A \to B) \to A)$ (сх. акс. 1)
4. $A, \neg B \vdash (A \to B) \to A$ (М. Р. гипотезы и 3)
5. $A, \neg B \vdash ((A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to B)$ (М. Р. 2 4)
6. $A, \neg B \vdash (A \to B) \to (A \to B)$ (закон тождественности)
7. $A, \neg B \vdash (A \to B) \to B$ (М. Р. 5 6)
8. $A, \neg B \vdash ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$ (М. Р. 1 7)
9. $A, \neg B \vdash \neg B \to ((A \to B) \to \neg B)$ (сх. акс. 1)
10. $A, \neg B \vdash (A \to B) \to \neg B$ (М. Р. гипотезы и 9)
11. $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$ (М. Р. 8 10)

(DK3!8)

Задача 3.f

Доказать: $\neg A, B \vdash A \to B$
Доказательство.

1. $\neg A$
2. B
3. $B \to (A \to B)$ (сх. акс. 1)
4. $A \to B$ (М. Р. 3, 2)

(микротян)

Задача 3.g

Доказать: $\neg A, \neg B \vdash A \to B$

Доказательство.

1. $\neg A, \neg B, A \vdash (\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ (сх. акс. 9)
2. $\neg A, \neg B, A \vdash A \to (\neg B \to A)$ (сх. акс. 1)
3. $\neg A, \neg B, A \vdash \neg B \to A$ (М. Р. гипотезы и 2)
4. $\neg A, \neg B, A \vdash (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$ (М. Р. 1 3)
5. $\neg A, \neg B, A \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (сх. акс. 1)

6. $\neg A, \neg B, A \vdash \neg B \to \neg A$ (М. Р. гипотезы и 5)

7. $\neg A, \neg B, A \vdash \neg\neg B$ (М. Р. 4 6)

8. $\neg A, \neg B, A \vdash \neg\neg B \to B$ (сх. акс. 10)

9. $\neg A, \neg B, A \vdash B$ (М. Р. 7 8)

10. $\neg A, \neg B \vdash A \to B$ (теорема о дедукции для 9)

(DK3!8)

Задача 3.h

Доказать: $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
Доказательство.

1. $A \to B$ (гипотеза)
2. $B \to C$ (гипотеза)
3. A (гипотеза)
4. B (М.Р. 1, 3)
5. C (М.Р. 2, 4)

Теперь, пользуясь теоремой о дедукции, получаем $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.
Снова по теореме о дедукции: $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$.
И ещё раз: $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
(Жабка)

Задача 3.i

Доказать: $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$
Контрпример. Хз, можно ли так (DK3!8: я вбил эту хуйню в прогу, она сказала что высказывание кринж):
// TODO: кажется нельзя, нужно подумать как в 3g
Подставим $A = 0, B = 0, C = 1$.

1. $\vdash (0 \to 0) \to (0 \to 1) \to (1 \to 0)$
2. $\vdash 1 \to 1 \to 0$
3. $\vdash 1 \to 0$ - Bro you just posted cringe

(Жабка)

Задача 3.j

Доказать: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
Доказательство. Докажем $A \to B, \neg B \vdash \neg A$, потом применим дважды теорему о дедукции

1. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ (сх. акс. 9)
2. $A \to B$ (допущение)
3. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (МР 2, 1)
4. $\neg B \to (A \to \neg B)$ (сх. акс. 1)
5. $\neg B$ (допущение)
6. $A \to \neg B$ (МР 5, 4)
7. $\neg A$ (МР 6, 3)

(Настя, копипаста с конспекта)

Задача 4.a

Доказать $\vdash A \lor \neg A$.

Доказательство v.2.

1. Покажем $\vdash \neg(A \lor \neg A) \to \neg A$:
   (a) $A \to A \lor \neg A$ (сх. акс. 6)
   (b) *вставьте сюда доказательство таски 3j*
   (c) $(A \to A \lor \neg A) \to (\neg(A \lor \neg A) \to \neg A)$
   (d) $\neg(A \lor \neg A) \to \neg A$ (MP (c), (a))
2. Покажем $\vdash \neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A$:
   (a) $\neg A \to A \lor \neg A$
   (b) *вставьте сюда доказательство таски 3j*
   (c) $(\neg A \to A \lor \neg A) \to (\neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A)$
   (d) $\neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A$ (MP (c), (a))
3. (a) $\neg(A \lor \neg A) \to \neg A$ (по 1 пункту)
   (b) $\neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A$ (по 2 пункту)
   (c) $(\neg(A \lor \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A) \to (\neg\neg(A \lor \neg A))$ (сх. акс. 9)
   (d) $(\neg(A \lor \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \lor \neg A)$ (MP a, c)
   (e) $\neg\neg(A \lor \neg A)$ (MP b, d)
   (f) $\neg\neg(A \lor \neg A) \to (A \lor \neg A)$ (сх. акс. 10)
   (g) $A \lor \neg A$ (MP e, f)

   (тоже Настя и тоже копипаста)

Задача 4.b

Доказать $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \lor \neg B)$.

Доказательство.

1. $A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B \to A$ (сх. акс. 4)
2. $A \,\&\, B \vdash A$ (М. Р. гипотезы и 1)
3. $A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B \to B$ (сх. акс. 5)
4. $A \,\&\, B \vdash B$ (М. Р. гипотезы и 3)
5. $A \,\&\, B \vdash (\neg A \to \neg B) \to (\neg B \to \neg B) \to ((\neg A \lor \neg B) \to \neg B)$ (сх. акс. 8)
6. $A \,\&\, B \vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ (закон контрапозиции)
7. $A \,\&\, B \vdash A \to (B \to A)$ (сх. акс. 1)
8. $A \,\&\, B \vdash B \to A$ (М. Р. 2 7)
9. $A \,\&\, B \vdash \neg A \to \neg B$ (М. Р. 6 8)
10. $A \,\&\, B \vdash (\neg B \to \neg B) \to ((\neg A \lor \neg B) \to \neg B)$ (М. Р. 5 9)
11. $A \,\&\, B \vdash \neg B \to \neg B$ (закон тождества)
12. $A \,\&\, B \vdash (\neg A \lor \neg B) \to \neg B$ (М. Р. 10 11)
13. $A \,\&\, B \vdash \neg\neg B \to \neg(\neg A \lor \neg B)$ (закон контрапозиции для 12)
14. $A \,\&\, B \vdash B \to \neg\neg B$ (закон добавления двойного отрицания)
15. $A \,\&\, B \vdash \neg\neg B$ (М. Р. 4 14)
16. $A \,\&\, B \vdash \neg(\neg A \lor \neg B)$ (М. Р. 13 15)
17. $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \lor \neg B)$ (теорема о дедукции для 16)

(DK3!8)

Задача 4.c

Доказать $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$.

Доказательство.

1. $\vdash A \to (A \vee B)$ (сх. акс. 6)
2. $\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A$ (закон контрапозиции для 1)
3. $\vdash B \to (A \vee B)$ (сх. акс. 7)
4. $\vdash \neg(A \vee B) \to \neg B$ (закон контрапозиции для 3)
5. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ (теорема о дедукции для 2)
6. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ (теорема о дедукции для 4)
7. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \to \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$ (сх. акс. 3)
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$ (М. Р. 5 7)
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \,\&\, \neg B$ (М. Р. 6 8)
10. $\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \,\&\, \neg B$ (теорема о дедукции для 9)
11. $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to \neg\neg(A \vee B)$ (закон контрапозиции для 10)
12. $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B)$ (теорема о дедукции для 11)
13. $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B) \to A \vee B$ (сх. акс. 10)
14. $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash A \vee B$ (М. Р. 12 13)
15. $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$ (теорема о дедукции для 14)

(распарсил и решил DK3!8)

Задача 4.d

Доказать: $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
Доказательство. По теореме о дедукции $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B \Leftrightarrow A \,\&\, B \vdash A \vee B$.

1. $A \,\&\, B$ (Гипотеза)
2. $A \,\&\, B \to A$ (a 4)
3. A (MP 1, 2)
4. $A \to A \vee B$ (a 6)
5. $A \vee B$ (MP 3, 4)

(микротян)

Задача 4.e

Доказать $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.

Доказательство.

1. $(A \to B), \neg A \vdash \neg((A \to B) \to A)$ (см. задача 3e)
2. $\neg A, A \vdash A \to \neg A \to A \,\&\, \neg A$ (сх. акс. 3)
3. $\neg A, A \vdash \neg A \to A \,\&\, \neg A$ (М. Р. гипотезы и 2)
4. $\neg A, A \vdash A \,\&\, \neg A$ (М. Р. гипотезы и 3)
5. $A \,\&\, \neg A \vdash A \,\&\, \neg A \to A$ (сх. акс. 4)
6. $A \,\&\, \neg A \vdash A \,\&\, \neg A \to \neg A$ (сх. акс. 5)

7. $A \,\&\, \neg A \vdash A$ (М. Р. гипотезы и 5)
8. $A \,\&\, \neg A \vdash \neg A$ (М. Р. гипотезы и 6)
9. $A \,\&\, \neg A \vdash B$ (см. задача 2j)
10. $\neg A, A \vdash B$ (из 4 следует выводимость $A \,\&\, \neg A$)
11. $\neg A \vdash A \to B$ (теорема о дедукции для 10)
12. $\neg A \vdash \neg((A \to B) \to A)$ (из 11 следует выводимость $(A \to B)$ для п. 1)
13. $\vdash \neg A \to \neg((A \to B) \to A)$ (теорема о дедукции для 12)
14. $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ (закон обратной контрапозиции для 13)

(DK3!8)

Задача 5

Даны высказывания α и β, причем $\vdash \alpha \to \beta$. Укажите способ построения такого выражения γ, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$.

1. $\vdash \alpha \to \beta$ (дано)
2. $\alpha \vdash \beta$ (теорема о дедукции для 1)
3. $\alpha \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \,\&\, \beta$ (сх. акс. 3)
4. $\alpha \vdash \beta \to \alpha \,\&\, \beta$ (М. Р. гипотезы и 3)
5. $\alpha \vdash \alpha \,\&\, \beta$ (М. Р. 2 4)
6. $\vdash \alpha \to \alpha \,\&\, \beta$ (теорема о дедукции для 5)
7. $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta$ (сх. акс. 5)

Получили, что при $\vdash \alpha \to \beta$ выводимо $\vdash \alpha \to \alpha \,\&\, \beta$ и $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta$. Таким образом, $\gamma \equiv \alpha \,\&\, \beta$. (DK3!8)

Задача 6

Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Доказательство. По теореме о дедукции получаем $\vdash \alpha \to \beta$ и $\vdash \neg\alpha \to \beta$. Запишем вывод β:

1. (Вывод $\alpha \to \beta$ без последней строчки)
2. $\alpha \to \beta$
3. (Вывод $\neg\alpha \to \beta$ без последней строчки)
4. $\neg\alpha \to \beta$
5. (Вывод $\alpha \vee \neg\alpha$ без последней строчки)
6. $\alpha \vee \neg\alpha$
7. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta)$ (сх. акс. 8)
8. $(\neg\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta)$ (М. Р. 2 7)
9. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta$ (М. Р. 4 8)
10. β (М. Р. 6 9)

(DK3!8)

Домашняя работа №2

Задача 1

Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.

Доказательство. Так как α следует из Γ, то существует доказательство $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_n \equiv \alpha$. Каждое из этих высказываний может быть аксиомой, получаться по правилу *Modus Ponens* или гипотезой из списка Γ. Докажем методом математической индукции по количеству высказываний.

1. *База* $k = 0$: нет ни одного высказывания $\Rightarrow$ утверждение верно.
2. *Индукционный переход*: пусть для некоторого k высказывания $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ являются тавтологиями. Рассмотрим высказывание α_{k+1}. Выберем некоторую оценку $x_1, \ldots, x_n$ пропозициональных переменных $P_1, \ldots, P_n$, входящих в высказывания $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ такую, что любая гипотеза из списка Γ истинна. Возможны 3 случая.
   (a) α_{k+1} — аксиома. Так как все аксиомы являются тавтологиями, то при любой оценке $x_1, \ldots, x_n$ α_{k+1} будет истинно.
   (b) α_{k+1} получается по правилу *Modus Ponens* из высказываний α_p и α_q, причем $\alpha_q \equiv \alpha_p \to \alpha_{k+1}$. Тогда $[\![\alpha_p]\!]^{P_1:=x_1 \ldots P_n:=x_n} = \texttt{И}$ и $[\![\alpha_p \to \alpha_{k+1}]\!]^{P_1:=x_1 \ldots P_n:=x_n} = \texttt{И}$. Из истинности этих высказываний неизбежно следует истинность α_{k+1} на некоторой оценке $x_1, \ldots x_n$.
   (c) $\alpha_{k+1} \in \Gamma$: истинность α_{k+1} очевидна из построения.

В ходе доказательства в индукционном переходе мы сослались на существование оценки пропозициональных переменных, при которой все высказывания из Γ истинны. Если ее не существует, то $\Gamma \models \alpha$ все еще имеет смысл, так как по определению следования противоречий не возникает.
(DK3!8)

Задача 2

Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.
Определение. Будем называть множество высказываний Γ выполнимым, если существует оценка пропозициональных переменных, при которой все высказывания из Γ истинны. В противном случае будем называть невыполнимым.

Докажем несколько лемм.

Лемма 1. Если Γ выполнимо, то Γ непротиворечиво.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть Γ противоречиво. Тогда справедливо $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$ для любого α. По обобщенной теореме о корректности можно записать $\Gamma \models \alpha$ и $\Gamma \models \neg\alpha$. Так как Γ выполнимо, то существует оценка пропозициональных переменных, при которой все высказывания из Γ истинны. Получается, что на одной и той же оценке $\alpha = \texttt{И}$ и $\neg\alpha = \texttt{И}$, что, безусловно, является противоречием. Значит, Γ непротиворечиво.

Определение. Будем называть непротиворечивое множество Δ полным, если для любого высказывания α справедливо либо $\alpha \in \Delta$, либо $\neg\alpha \in \Delta$.

Лемма 2. Всякое непротиворечивое множество Γ можно дополнить до полного непротиворечивого множества Δ.

Доказательство. Любая формула α является конечной цепочкой символов, при счетном алфавите общее число формул будет также счетно. Значит, формулы можно пронумеровать. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma$. Будем строить индуктивно следующее множество:

$$\Gamma_k = \begin{cases} \Gamma_{k-1} \cup \{\alpha_k\}, & \text{если } \Gamma_{k-1} \cup \{\alpha_k\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_{k-1} \cup \{\neg\alpha_k\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда искомое $\Delta = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$. Покажем, что для любого k, Γ_k непротиворечиво. Докажем по индукции. База индукции очевидна из посылки леммы. Индукционный переход: пусть для всех $i < k$ верно, что Γ_i непротиворечиво. Рассмотрим Γ_k. Предположим, что оно противоречиво. Тогда по построению противоречивы $\Gamma_{k-1} \cup \{\alpha_k\}$ и $\Gamma_{k-1} \cup \{\neg\alpha_k\}$, а значит, что $\Gamma_{k-1} \vdash \neg\alpha_k$ и $\Gamma_{k-1} \vdash \neg\neg\alpha_k$. Получается, что Γ_{k-1} противоречиво, что противоречит непротиворечивости Γ_{k-1} (пиздец, язык сломаешь).

Доказательство непротиворечивости Δ осуществляется также методом от противного. Действительно, если $\Delta \vdash \alpha$ и $\Delta \vdash \neg\alpha$, то существуют конечные выводы этих высказываний. По построению Δ найдется такое k, что эти выводы содержатся в Γ_k. Значит, Γ_k противоречиво, чего быть не может.

Полнота Δ очевидна.

Лемма 3. Полное непротиворечивое множество Δ выполнимо.

Доказательство. Рассмотрим множество пропозициональных переменных. Построим выполняющий набор следующим образом: если $\Delta \vdash P_i$, то $x_i = \texttt{И}$, иначе $x_i = \texttt{Л}$. Пусть нашлось высказывание $\alpha \in \Delta$, которое на построенном наборе ложно. Тогда по вспомогательной лемме из доказательства теоремы о полноте $_{[x_1]}P_1 \ldots {}_{[x_n]}P_n \vdash \neg\alpha \Rightarrow \Delta \vdash \neg\alpha$. Получается, что Δ противоречиво, что не может быть правдой. Значит, Δ выполнимо.

Из предыдущих лемм можно сделать вывод, что Γ выполнимо тогда и только тогда, когда Γ непротиворечиво.

Лемма 4. $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ невыполнимо.

Доказательство. Пусть $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ выполнимо. Тогда существует оценка, такая что все высказывания из Γ истинны и $\neg\alpha$ истинно. Так как $\Gamma \models \alpha$, то на той же самой оценке α истинно. Получили противоречие. Значит, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ невыполнимо.

Теперь, наконец-то, можно доказать то, что нас просили. Пусть $\Gamma \models \alpha$, тогда $\Gamma \cup \neg\alpha$ невыполнимо $\Rightarrow$ противоречиво. Покажем $\Gamma \vdash \alpha$:

1. $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$ (противоречивость множества)
2. $\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta$ (противоречивость множества)
3. $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \beta$ (теорема о дедукции для 1)
4. $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta$ (теорема о дедукции для 2)
5. $\Gamma \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha$ (сх. акс. 9)
6. $\Gamma \vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\neg\alpha$ (М. Р. 3 и 5)
7. $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$ (М. Р. 4 и 6)
8. $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ (сх. акс. 10)
9. $\Gamma \vdash \alpha$ (М. Р. 7 и 8)

Что и требовалось доказать.
(DK3!8)

Задача 3b

Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее: $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \to A$
Доказательство.

1. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash (A \to A) \to (\neg A \to A) \to (A \vee \neg A \to A)$ (сх. акс. 8)
2. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A \to A$ (закон тождества)
3. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash (\neg A \to A) \to (A \vee \neg A \to A)$ (М. Р. 1 и 2)
4. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash (\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ (сх. акс. 2)
5. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ (сх. акс. 1)

6. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg A$ (MP гипотезы и 5)

7. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash (\neg A \to \neg\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ (MP 4, 6)

8. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg A \to A$ (сх. акс. 10)

9. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash \neg A \to A$ (MP 7, 8)

10. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A \vee \neg A \to A$ (MP 3, 9)

11. $A \vee \neg A, \neg\neg A \vdash A$ (MP гипотезы и 10)

12. $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \to A$ (теорема о дедукции для 11)

(микротян, соптимайзил DK3!8)

Задача 4

(a) Пусть $X = (0, 4)$, $A = (1, 3)$. Тогда:

- $[\![\neg A]\!] = (X \setminus A)^\circ = \{(0, 1] \cup [3, 4)\}^\circ = (0, 1) \cup (3, 4)$;
- $[\![\neg\neg A]\!] = (X \setminus \{(0, 1) \cup (3, 4)\})^\circ = (1, 3)$;
- $[\![\neg A \vee \neg\neg A]\!] = \{(0, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)\} \neq X$.

(b) Пусть $X = (0, 2)$, $A = (0, 1) \cup (1, 2)$, $B = \emptyset$. Тогда:

- $[\![A \to B]\!] = ((X \setminus A) \cup B)^\circ = \{1\}^\circ = \emptyset$;
- $[\![(A \to B) \to A]\!] = ((X \setminus \emptyset) \cup A)^\circ = X$;
- $[\![(((A \to B) \to A) \to A)]\!] = ((X \setminus X) \cup A)^\circ = (\emptyset \cup A)^\circ = A \neq X$.

(c) Пусть $X = (0, 2)$, $A = (0, 1) \cup (1, 2)$. Тогда:

- $[\![\neg A]\!] = (X \setminus A)^\circ = \{1\}^\circ = \emptyset$;
- $[\![\neg\neg A]\!] = (X \setminus \emptyset)^\circ = X$;
- $[\![\neg\neg A \to A]\!] = ((X \setminus X) \cup A)^\circ = (\emptyset \cup A)^\circ = A \neq X$.

(d) Пусть $X = (0, 4)^2$. Возьмём $B = X \setminus \{(2, t) \cup (t, 2)\}$, $t \in (0, 4)$. То есть B — X без прямых $x = 2$ и $y = 2$. Возьмём $A = B((2, 2), 1)$ (открытый шар с центром в $(2, 2)$ радиуса 1). Тогда:

- $[\![B \vee \neg B]\!] = (B \cup (X \setminus B)^\circ)^\circ = B$;
- $[\![A \to (B \vee \neg B)]\!] = ((X \setminus A) \cup B)^\circ = X \setminus \{(2, t) \cup (t, 2)\}$, $t \in [1, 3]$;
- $[\![\neg A \to (B \vee \neg B)]\!] = ((X \setminus (X \setminus A)^\circ) \cup B)^\circ = X \setminus \{(2, t) \cup (t, 2)\}$, $t \in (0, 1] \cup [3, 4)$;
- $[\![(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))]\!] = X \setminus \{(2, 1), (2, 3), (1, 2), (3, 2)\}$.

(e) Пусть $X = (0, 4)^2$. Возьмём $C = B((2, 2), 1)$ (открытый шар с центром в $(2, 2)$ радиуса 1). Возьмём $A = (\{(x, y) \mid x \in (0, 4), y > 2\} \setminus C)^\circ$ (внутренность верхней половины квадрата без шара C). Возьмём $B = (\{(x, y) \mid x \in (0, 4), y < 2\} \setminus C)^\circ$ (внутренность нижней половины квадрата без шара C). Тогда:

- $[\![A \to B]\!] = ((X \setminus A) \cup B)^\circ = (X \setminus A)^\circ$;
- $[\![B \to C]\!] = ((X \setminus B) \cup C)^\circ = (X \setminus B)^\circ$;
- $[\![C \to A]\!] = ((X \setminus C) \cup A)^\circ = (X \setminus C)^\circ$;
- $[\![(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)]\!] = X \setminus \{(1, 2), (3, 2)\}$;

(семен stepavly степанов)

Задача 5

Можно ли, имея $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$ доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?

Ответ: нельзя. Приведём пример топологического пространства и оценки пропозициональных переменных, при которых $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$ истинно, а закон исключённого третьего $A \vee !A$ нет.

1. Пусть $X = (0, 10)$
2. Заметим, что для истинности З.И.Т. необходимо либо $A = \varnothing$ либо $A = X$, поскольку иначе $A \vee !A$ как объёдинение двух открытых непустых непересекающихся множеств будет содержать точку разрыва.
3. Таким образом определим переменные $A = (3, 4), B = \varnothing, C = X$
   - $[\![((X \setminus A) \cup B)^{\circ}]\!] = (0, 3) \cup (4, 10)$
   - $[\![((X \setminus B) \cup C)^{\circ}]\!] = X$
   - $[\![((X \setminus C) \cup A)^{\circ}]\!] = (3, 4)$
   - $[\![(0, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 10) \cup X]\!] = X$
4. $\Rightarrow$ выражение $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$ при данных пропозициональных переменных истинно.
5. Исходя из непустоты оценки переменной A и размышлений в пункте 2. З.И.Т. не выполняется.
   - $[\![A]\!] = (3, 4)$
   - $[\![!A]\!] = (0, 3) \cup (4, 10)$
   - $[\![A \cup !A]\!] = (0, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 10) \neq X$
6. Был приведён контрпример, следовательно закон исключённого третьего при данном высказывании доказать нельзя.

(микротян)

Задача 7

Назовем теорию *противоречивой*, если в ней найдется такое α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажите, что исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда в нем доказуема любая формула.

Доказательство.
$\Rightarrow$
Имеем $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажем вывод формулы β в классическом и интуиционистском исчислении высказываний.

1. Классическое исчисление высказываний:
   (a) $\vdash \alpha$ (дано)
   (b) $\vdash \neg\alpha$ (дано)
   (c) $\vdash (\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$ (сх. акс. 9)
   (d) $\vdash \alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ (сх. акс. 1)
   (e) $\vdash \neg\beta \to \alpha$ (М. Р. (a) и (d))
   (f) $\vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$ (М. Р. (c) и (e))
   (g) $\vdash \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (сх. акс. 1)
   (h) $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (М. Р. (b) и (g))
   (i) $\vdash \neg\neg\beta$ (М. Р. (f) и (h))
   (j) $\vdash \neg\neg\beta \to \beta$ (сх. акс. 10)
   (k) $\vdash \beta$ (М. Р. (i) и (j))
2. Интуиционистское исчисление высказываний:
   (a) $\vdash \alpha$ (дано)
   (b) $\vdash \neg\alpha$ (дано)

(c) $\vdash \alpha \to \neg\alpha \to \beta$ (сх. акс. 10)

(d) $\vdash \neg\alpha \to \beta$ (М. Р. (a) и (c))

(e) $\vdash \beta$ (М. Р. (b) и (d))

$\Leftarrow$
Так как в данной системе высказываний справедливо $\vdash \alpha$, то по тем же самым соображениям справедливо $\vdash \neg\alpha$.
(DK3!8)

Задача 8

Теорема Гливенко. Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Нужно доказать, что если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно:

1. Если α — аксиома, полученная из схем 1-9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

2. $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.

3. $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$.

4. Доказать утверждение теоремы и показать, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

Доказательство.

1. (a) $\vdash \alpha$ (дано)
   (b) $\vdash (\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$ (сх. акс. 9)
   (c) $\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \alpha)$ (сх. акс. 1)
   (d) $\vdash \neg\alpha \to \alpha$ (М. Р. (a) и (c))
   (e) $\vdash (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$ (М. Р. (b) и (d))
   (f) $\vdash \neg\alpha \to \neg\alpha$ (закон тождества)
   (g) $\vdash \neg\neg\alpha$ (М. Р. (e) и (f))

2. (a) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (сх. акс. 1)
   (b) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha$ (закон контрапозиции для (a))
   (c) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и (b))
   (d) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \neg\alpha \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (сх. акс. 10)
   (e) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$ (закон контрапозиции для (d))
   (f) $\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \vdash \neg\neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и (e))
   (g) $\vdash \neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha$ (теорема о дедукции для (c))
   (h) $\vdash \neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$ (теорема о дедукции для (f))
   (i) $\vdash (\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha) \to (\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (сх. акс. 9)
   (j) $\vdash (\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (М. Р. (g) и (i))
   (k) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (М. Р. (h) и (j))

3. Сейчас пойдет лютейшая глина. Очень надеюсь на ваше понимание))

   (a) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta$ (гипотеза)
   (b) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (закон контрапозиции для (a))
   (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \alpha \to \beta \vdash \neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и (b))
   (d) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ (теорема о дедукции для (c))
   (e) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash \neg\neg\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha)$ (сх. акс. 1)
   (f) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и (e))
   (g) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha) \to \neg(\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 9)
   (h) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash ((\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha) \to \neg(\alpha \to \beta)$ (М. Р. (d) и (g))
   (i) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ (М. Р. (f) и (h))

(j) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)$ (теорема о дедукции для (i))

(k) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\neg(\alpha \to \beta))$ (сх. акс. 1)

(l) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta \to \neg\neg(\alpha \to \beta)$ (М. Р. гипотезы и (k))

(m) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)) \to (\neg\beta \to \neg\neg(\alpha \to \beta)) \to \neg\neg\beta$ (сх. акс. 9)

(n) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash (\neg\beta \to \neg\neg(\alpha \to \beta)) \to \neg\neg\beta$ (М. Р. (j) и (m))

(o) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\neg\beta$ (М. Р. (l) и (n))

4. Воспользуемся индукцией по k, где k — длина доказательства:

   (a) База $k = 0$: пустая посылка $\Rightarrow$ доказано.

   (b) Индукционный переход: пусть для всех $i < k$ известно $\vdash_{\text{к}} \alpha_i \Rightarrow \vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha_i$. Рассмотрим α_k:

   - α_k — высказывание, построенное из схем аксиом 1-9, тогда $\vdash_{\text{к}} \alpha_k \Rightarrow \vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha_k$ (см. пункт 1)
   - $\alpha_k \equiv (\neg\neg\alpha \to \alpha) \Rightarrow \vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$ (см. пункт 2)
   - α_k — *Modus Ponens* высказываний α_p и $\alpha_p \to \alpha_k$. По индукционному предположению $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha_p$ и $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\alpha_p \to \alpha_k)$. По 3 пункту имеем $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha_k$.

   Докажем вторую часть этого пункта.

   $\Rightarrow$
   Классическое исчисление противоречиво. Значит, справедливо следующее: $\vdash_{\text{к}} \alpha$ и $\vdash_{\text{к}} \neg\alpha$. По теореме Гливенко: $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\neg\alpha$. Получили противоречивость интуиционистского исчисления высказываний.

   $\Leftarrow$
   Докажем выводимость 10 аксиомы интуиционистского исчисления в классическом исчислении:

   (a) $\alpha \vdash \alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ (сх. акс. 1)

   (b) $\alpha \vdash \neg\beta \to \alpha$ (М. Р. гипотезы и (a))

   (c) $\alpha \vdash \neg\alpha \to \neg\neg\beta$ (закон контрапозиции для (b))

   (d) $\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\neg\beta$ (теорема о дедукции для (c))

   (e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\neg\beta \to \beta$ (сх. акс. 10)

   (f) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ (М. Р. (d) и (e))

   (g) $\alpha \vdash \neg\alpha \to \beta$ (теорема о дедукции для (f))

   (h) $\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ (теорема о дедукции для (g))

   Таким образом, все высказывания, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний выводятся и в классическом. А значит, если интуиционистское исчисление противоречиво, то неизбежно противоречиво и классическое.

(DK3!8)

Домашняя работа №3

Задача 1

Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{и}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{e}$.

Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \,\&\, \neg A$ и $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \to \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: $\alpha', \beta', \ldots$.

1. Пусть $\Gamma \vdash_{и} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{e} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

2. Пусть $\Gamma \vdash_{e} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{и} \alpha$.

Доказательство. Напомним, что гильбертовский стиль — это система из 10 аксиом и правила вывода *Modus Ponens*, система натурального вывода — система из 10 правил вывода (деревья, растущие вверх).

1. Для начала докажем выводимость всех аксиом гильбертовского стиля ИИВ в системе натурального вывода

   (a) $\vdash_{и} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \psi \vdash \varphi}}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}$$

   (b) $\vdash_{и} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\psi \to \pi)) \to (\varphi \to \pi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \varphi \to (\psi \to \pi)} \quad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \psi \to \pi} \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \varphi \to \psi} \quad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \psi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi), \varphi \vdash \pi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \pi) \vdash \varphi \to \pi}}{\varphi \to \psi \vdash (\varphi \to (\psi \to \pi)) \to (\varphi \to \pi)}}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\psi \to \pi)) \to (\varphi \to \pi)}$$

   (c) $\vdash_{и} \varphi \to \psi \to \varphi \,\&\, \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \psi \vdash \varphi} \quad \dfrac{}{\varphi, \psi \vdash \psi}}{\varphi, \psi \vdash \varphi \,\&\, \psi}}{\varphi \vdash \psi \to \varphi \,\&\, \psi}}{\vdash \varphi \to \psi \to \varphi \,\&\, \psi}$$

   (d) $\vdash_{и} \varphi \,\&\, \psi \to \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi \,\&\, \psi}}{\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi}}{\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \varphi}$$

   (e) $\vdash_{и} \varphi \,\&\, \psi \to \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \,\&\, \psi \vdash \varphi \,\&\, \psi}}{\varphi \,\&\, \psi \vdash \psi}}{\vdash \varphi \,\&\, \psi \to \psi}$$

   (f) $\vdash_{и} \varphi \to \varphi \vee \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}}{\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi}$$

   (g) $\vdash_{и} \psi \to \varphi \vee \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}}{\psi \vdash \varphi \vee \psi}}{\vdash \psi \to \varphi \vee \psi}$$

(h) $\vdash_{и} (\varphi \to \pi) \to (\psi \to \pi) \to (\varphi \lor \psi \to \pi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \varphi \vdash \varphi \to \pi} \quad \dfrac{}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \varphi \vdash \pi} \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \psi \vdash \psi \to \pi} \quad \dfrac{}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \psi \vdash \psi \to \psi}}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi, \psi \vdash \pi} \quad \dfrac{}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi \vdash \varphi \lor \psi}}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi, \varphi \lor \psi \vdash \pi}}{\varphi \to \pi, \psi \to \pi \vdash \varphi \lor \psi \to \pi}}{\varphi \to \pi \vdash (\psi \to \pi) \to (\varphi \lor \psi \to \pi)}}{\vdash (\varphi \to \pi) \to (\psi \to \pi) \to (\varphi \lor \psi \to \pi)}$$

(придется немножко всмотреться)

(i) $\vdash_{и} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$. Заменим $\neg\psi$ на $\psi \to \bot$ и $\neg\varphi$ на $\varphi \to \bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \varphi \to (\psi \to \bot)} \quad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \psi \to \bot} \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \varphi \to \psi} \quad \dfrac{}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \varphi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \psi}}{\varphi \to \psi, \varphi \to (\psi \to \bot), \varphi \vdash \bot}}{\cdots}}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\psi \to \bot)) \to (\varphi \to \bot)}$$

(j) $\vdash_{и} \varphi \to \neg\varphi \to \psi$. Заменим $\neg\varphi$ на $\varphi \to \bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \varphi \to \bot} \quad \dfrac{}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \varphi}}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \bot}}{\varphi, \varphi \to \bot \vdash \psi}}{\varphi \vdash (\varphi \to \bot) \to \psi}}{\vdash \varphi \to (\varphi \to \bot) \to \psi}$$

Теперь можно доказать саму теорему. Так как $\Gamma \vdash_{и} \alpha$, то существует конечный вывод высказывания α в гильбертовском стиле. Воспользуемся индукцией по длине доказательства k:

(a) База $k = 1$: данная строка может быть либо аксиомой, либо гипотезой. Все аксиомы выводимы в системе натурального вывода. Для гипотез пользуемся первым правилом.

(b) Индукционный переход: пусть для всех $i < k$ доказано $\Gamma \vdash_{е} \alpha_i$. Рассмотрим строку α_k. Она может быть аксиомой, гипотезой или получаться по правилу *Modus Ponens*. Первые два случая были рассмотрены в базе индукции. Пусть α_k получается по правилу *Modus Ponens* из строк $\alpha_p \to \alpha_k$ и α_p. По индукционному предположению $\Gamma \vdash_{е} \alpha_p \to \alpha_k$ и $\Gamma \vdash_{е} \alpha_p$. Запишем правило удаления импликации

$$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha_p \to \alpha_k \quad \Gamma \vdash \alpha_p}{\Gamma \vdash \alpha_k}$$

Получили, что $\Gamma \vdash_{е} \alpha_k$.

2. Покажем выводимость 10 правил системы натурального вывода в гильбертовском стиле.

(a) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$. Очевиднейшим образом вытекает из $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$.

(b) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$. Теорема о дедукции для $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

(c) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$. *Modus Ponens* для $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ и $\Gamma \vdash \varphi$.

(d) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}$. По схеме аксиомы 3 $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \to \varphi \,\&\, \psi$. Применяя дважды *Modus Ponens* высказываний из посылки к этому высказыванию, получаем требуемое.

(e) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$. Аналогично применяем рассуждения из пункта (d) для схемы аксиомы 4.

(f) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \psi}$. Тоже самое для схемы аксиомы 5.

(g) $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}$. Внезапно, такие же рассуждения для схемы аксиомы 6.

(h) $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}$. Очевидно.

(i) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \lor \psi}{\Gamma \vdash \rho}$. Да это же схема аксиомы 8! Только она записана в более выебистой форме.

(j) $\dfrac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$. По замечанию из условия $\perp \Rightarrow \alpha \,\&\, \neg\alpha$. Нетрудно показать, что если $\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \neg\alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$. Получается, что Γ противоречиво, следовательно из Γ выводимо любое высказывание. В частности $\Gamma \vdash \varphi$.

Теперь нужно перестроить дерево из системы натурального вывода в последовательность высказываний гильбертовского стиля. Будем делать индукцией по глубине дерева, начиная с листьев.

(a) База. Имеем один лист. Он может быть только первым правилом. Запишем вместо него вывод в гильбертовском стиле.

(b) Индукционный переход. Пусть для всех узлов выше данного имеется вывод в гильбертовском стиле. Запишем его. Все узлы в системе натурального вывода являются правилами. Заметим, что высказывания в посылке данного правила являются следствием правил, стоящих выше $\Rightarrow$ имеют вывод в гильбертовском стиле. Вывод следствия правила текущего узла в гильбертовском стиле был показан выше.

(DK3!8)

Задача 2

Итак, у нас традиционные отношения порядка. Так что тут ничего придумывать не будем. Рассмотрим, наши операции и их определения в решетке:

$$a + b = \text{наим. } \{x \quad | \quad a \leq x \quad \& \quad b \leq x\}$$

то есть по факту, так как у нас есть отношения порядка, это максимум из a и b.

$$a \cdot b = \text{наиб. } \{x \quad | \quad a \geq x \quad \& \quad b \geq x\}$$

Аналогично с умножением, только это минимум из a и b.
Из тех свойств, что будут выполнены, все в общем-то просто. К примеру:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$max(a, max(b, c)) = max(max(a, b), c)$$

К примеру свойство: $a \cdot b \vdots a$ очевидно нарушается в нашей решетке.
Псевдодополнение не определено, 0 есть, 1 нет.
(Alya)

Задача 4

Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

1. ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
2. монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;
3. *Законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
4. $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
5. из $a \preceq b$ следует $b \to c \preceq a \to c$ и $c \to a \preceq c \to b$;
6. из $a \preceq b \to c$ следует $a \cdot b \preceq c$;
7. $b \preceq a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$;
8. $a \to b \preceq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
9. $a \preceq b \to a \cdot b$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$
10. $a \to c \preceq (b \to c) \to (a + b \to c)$

Доказательство. *Примечание*: вместо значка $\preceq$ будет использоваться значок $\leq$. Почему? Потому что мне так удобнее =).

1. Имеем $b \le b + c$ и $b + c \le a + (b + c)$. По транзитивности получаем, что $b \le a + (b + c)$. Так как $a \le a + (b + c)$, то из последних двух высказываний получаем $a + b \le a + (b + c)$. Нетрудно показать, что $c \le a + (b + c)$. Откуда можно заключить, что $(a + b) + c \le a + (b + c)$.

   Аналогичным образом показывается, что $a + (b + c) \le (a + b) + c$. Тогда по антисимметричности заключается, что $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   Схема доказательства ассоциативности оператора $(\cdot)$ аналогична схеме доказательства ассоциативности оперетора $(+)$.

2. Имеем $a \le b$ и $c \le d$. Так как $b \le b + d$ и $d \le b + d$, то по транзитивности $a \le b + d$ и $c \le b + d$. Тогда $a + c \le b + d$.

   Аналогично доказывается монотонность для оператора $(\cdot)$.

3. Очевидно, что $a \cdot (a + b) \le a$. С другой стороны по рефлексивности $a \le a$ и $a \le a + b$. Тогда $a \le a \cdot (a + b)$. По антисимметричности заключаем, что $a \cdot (a + b) = a$.

   Аналогично доказывается $a + (a \cdot b) = a$.

4. $(\Rightarrow)$
   Имеем $a \le b$. Тогда $a \cdot 1 \le b$, отсюда $1 \le a \to b$. Так как 1 — максимальный элемент, то $a \to b = 1$.

   $(\Leftarrow)$
   Имеем $a \to b = 1$. Тогда $a \cdot 1 \le b$ по определению, откуда получаем $a \le b$.

5. Имеем $a \le b$. Докажем первое утверждение. В силу монотонности имеем $a \cdot (b \to c) \le b \cdot (b \to c) \le c$. По транзитивности $a \cdot (b \to c) \le c$. Тогда из этого вытекает $b \to c \le a \to c$.

   Докажем второе утверждение. Имеем $c \cdot (c \to a) \le a \le b$. По транзитивности $c \cdot (c \to a) \le b$. Откуда получаем $c \to a \le c \to b$.

6. Имеем $a \le b \to c$. По монотонности $a \cdot b \le (b \to c) \cdot b \le c$. По транзитивности $a \cdot b \le c$.

7. Докажем первое утверждение. Так как $b \cdot a \le b$, то $b \le a \to b$.

   Докажем второе утверждение. Очевидно, что $b \cdot a \le a$, тогда $a \le b \to a$. По пункту 4 это равносильно тому, что $a \to (b \to a) = 1$.

8. Рассмотрим произвольные a, b и c. Запишем следующий вывод

   $$(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \cdot a \le (a \to b) \cdot a \le b$$

   С другой стороны

   $$(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \cdot a \le (a \to (b \to c)) \cdot a \le b \to c$$

   Из двух выражений выше следует

   $$(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \cdot a \le b \cdot (b \to c) \le c$$

   Запишем следующую цепочку

   $$(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \cdot a \le c$$

   $$\Leftrightarrow$$

   $$(a \to b) \cdot (a \to (b \to c)) \le a \to c$$

   $$\Leftrightarrow$$

   $$a \to b \le (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$$

9. По рефлексивности решетки получаем $a \cdot b \le a \cdot b$. Откуда получаем $a \le b \to (a \cdot b)$. Это равносильно по 4 пункту тому, что $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

10. Запишем следующее выражение

$$a \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \le a \cdot (a \to c) \le c$$

Откуда получаем

$$a \le (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$$

Аналогично

$$b \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \le b \cdot (b \to c) \le c$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b \le (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$$

По монотонности запишем

$$a + b \le (a \to c) \cdot (b \to c) \to c$$

По определению псевдодополнения запишем

$$(a + b) \cdot (a \to c) \cdot (b \to c) \le c$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a \to c) \cdot (b \to c) \le a + b \to c$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \to c \le (b \to c) \to (a + b \to c)$$

(DK3!8)

Задача 5

Покажите, что импликативная решетка дистрибутивна.

Доказательство. Докажем по определению. А именно, что для любых трех элементов a, b и c из решетки верно

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Пусть $d = a \cdot b + a \cdot c$. Тогда $a \cdot b \le a \cdot b + a \cdot c = d$. Из этого вытекает $b \le a \to d$. Аналогично можно показать, что $c \le a \to d$. Из этих двух высказываний следует $b + c \le a \to d$. Так как решетка рефлексивна, то $a \le a$. По свойству монотонности получаем $a \cdot (b + c) \le a \cdot (a \to d)$. Так как $a \cdot (a \to d) \le d$, то по транзитивности решетки получаем $a \cdot (b + c) \le d$.

С другой стороны, так как $b \le b + c$, то $a \cdot b \le a \cdot (b + c)$. Аналогично для $a \cdot c \le a \cdot (b + c)$. По свойству монотонности получаем $d = a \cdot b + a \cdot c \le a \cdot (b + c)$.

Имеем $a \cdot (b + c) \le d$ и $d \le a \cdot (b + c)$. По антисимметричности заключаем, что $a \cdot (b + c) = d = a \cdot b + a \cdot c$. (DK3!8)

Задача 6

Покажите, что в дистрибутивной решетке также выполнено $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

Доказательство. В силу дистрибутивности решетки имеем по определению

$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c$$

Применяя закон поглощения и дистрибутивность, получаем

$$(a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c = a + (a \cdot c + b \cdot c)$$

По ассоциативности и закону поглощения получаем

$$a + (a \cdot c + b \cdot c) = (a + a \cdot c) + b \cdot c = a + (b \cdot c)$$

(DK3!8)

Задача 7

Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega\rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением $\subseteq$. Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.

Доказательство. Очевидно, что $\subseteq$ — отношение частичного порядка. Теперь нужно определить операции $(+)$ и $(\cdot)$. Определим операцию $(+)$ следующим образом:

$$A + B = A \cup B$$

Так как $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$, то $A \cup B \in \Omega$ по определению топологии. Значит, операция $(+)$ определена для всех элементов топологии. Минимальность получившегося множества очевидна.

Определим операцию $(\cdot)$ следующим образом:

$$A \cdot B = A \cap B$$

Так как $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$, то $A \cap B \in \Omega$ по определению топологии. Значит, операция $(\cdot)$ определена для всех элементов топологии. Максимальность получившегося множества также очевидна.

Таким образом, получившаяся упорядоченная пара $\langle \Omega, \subseteq\rangle$ является решеткой. Очевидно, максимальным элементом данной решетки является X.

Докажем импликативность решетки. Рассмотрим два произвольных множества $A, B \in \Omega$. Рассмотрим их псевдодополнение

$$A \to B = \text{наиб.}\, \{C \mid A \cap C \subseteq B\}$$

Утверждается, что $A \to B = Int((X \setminus A) \cup B)$ (напоминаю, что $Int(X)$ — объединение всех открытых подмножеств X).

Для начала покажем, что $Int((X \setminus A) \cup B) \cap A \subseteq B$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in Int((X \setminus A) \cup B) \cap A$. Тогда $x \in Int((X \setminus A) \cup B)$, а значит $x \in (X \setminus A) \cup B$. Так как $x \in A$, то $x \in B$. В силу произвольности x доказали $Int((X \setminus A) \cup B) \cap A \subseteq B$.

Теперь докажем, что $Int((X \setminus A) \cup B)$ максимальное по включению. Рассмотрим другое множество C такое, что $A \cap C \subseteq B$. Так как C открыто, то достаточно показать, что $C \subseteq (X \setminus A) \cup B$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in C$.

1. Пусть $x \in A$. Тогда $x \in A \cap C \subseteq B$, значит $x \in B$. Из этого вытекает, что $x \in (X \setminus A) \cup B$.
2. Пусть $x \notin A$. Тогда $x \in (X \setminus A)$. Из этого вытекает, что $x \in (X \setminus A) \cup B$.

Таким образом, в силу произвольности x доказали, что $C \subseteq (X \setminus A) \cup B$.

Заметим, что в данной импликативной решетке существует минимальный элемент $\varnothing$. Таким образом, получили, что данная конструкция является импликативной решеткой с 0 — псевдобулевой алгеброй по определению.

Если топология дискретная, то для любого $A \in \Omega$ справедливо $X \setminus A \in \Omega$. Тогда:

$$\sim A = A \to 0 = \text{наиб.}\, \{C \mid A \cap C \subseteq \varnothing\} = X \setminus A$$

Получается что для любого $A \in \Omega$ справедливо следующее

$$A + \sim A = A \cup (X \setminus A) = X = 1$$

Таким образом, если топология дискретная, то $\langle \Omega, \subseteq\rangle$ — булева алгебра.
(DK3!8)

Задача 8

Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{array}{ccc} [\![\alpha \& \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to 0 \\ [\![\perp]\!] & = & 0 \end{array}$$

Доказательство. Напомним, что ИИВ корректно, если из $\vdash \alpha$ следует, что $\models \alpha$. Для начала докажем тождественность всех аксиом, используя данные функции оценок. Пусть $[\![\varphi]\!] = a$, $[\![\psi]\!] = b$, $[\![\pi]\!] = c$.

1. $[\![\varphi \to (\psi \to \varphi)]\!] = a \to (b \to a) = 1$ (см. 7 пункт задачи 4)
2. $[\![(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\psi \to \pi)) \to (\varphi \to \pi)]\!] = (a \to b) \to (a \to (b \to c)) \to (a \to c) = 1$ (см. пункты 4 и 8 задачи 4)
3. $[\![\varphi \to \psi \to \varphi \,\&\, \psi]\!] = a \to (b \to a \cdot b) = 1$ (см. 9 пункт задачи 4)
4. $[\![\varphi \,\&\, \psi \to \varphi]\!] = a \cdot b \to a$. Так как $a \cdot b \leq a$, то равносильно, что $a \cdot b \to a = 1$
5. $[\![\varphi \,\&\, \psi \to \psi]\!] = a \cdot b \to b$. Так как $a \cdot b \leq b$, то равносильно, что $a \cdot b \to b = 1$
6. $[\![\varphi \to \varphi \vee \psi]\!] = a \to a + b$. Так как $a \leq a + b$, то равносильно, что $a \to a + b = 1$.
7. $[\![\psi \to \varphi \vee \psi]\!] = b \to a + b$. Так как $b \leq a + b$, то равносильно, что $b \to a + b = 1$.
8. $[\![(\varphi \to \pi) \to (\psi \to \pi) \to (\varphi \vee \psi \to \pi)]\!] = (a \to c) \to (b \to c) \to (a + b \to c) = 1$ (см. пункты 3 и 10 из задачи 4)
9. $[\![(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi]\!] = (a \to b) \to (a \to (b \to 0)) \to (a \to 0) = 1$ (см. пункты 3 и 8 задачи 4)
10. $[\![\varphi \to \neg\varphi \to \psi]\!] = a \to ((a \to 0) \to b)$. Очевидно, что $a \cdot (a \to 0) \leq 0 \leq b$. По транзитивности $a \cdot (a \to 0) \leq b$, откуда вытекает $a \leq (a \to 0) \to b$. По 4 пункту 4 задачи получаем, что $a \to (a \to 0) \to b = 1$.

Таким образом, все аксиомы ИИВ общезначимы на такой системе оценок. Пусть $\vdash \alpha$ в ИИВ. Докажем $\models \alpha$ в данной системе оценок индукцией по числу строк k.

1. База $k = 1$. Первая строка в доказательстве может быть только аксиомой. Как было показано выше, все аксиомы общезначимы в данной системе оценок.
2. Индукционный переход. Пусть для всех $i < k$ строка α_i общезначима в данной системе оценок. Рассмотрим строку α_k. Она может быть либо аксиомой, либо получаться по правилу *Modus Ponens*. Случай аксиомы был рассмотрен в базе. Пусть α_k получается по правилу *Modus Ponens* из строк $\alpha_p \equiv \alpha_q \to \alpha_k$ и α_q ($p < k, q < k$). По индукционному предположению $[\![\alpha_q]\!] = 1$ и $[\![\alpha_q \to \alpha_k]\!] = 1 \to [\![\alpha_k]\!] = 1$. По 4 пункту 4 задачи это равносильно тому, что $1 \leq [\![\alpha_k]\!]$. Так как 1 — максимальный элемент, то $[\![\alpha_k]\!] = 1 \Rightarrow \alpha_k$ общезначимо.

Задача 9

Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A. Напомним несколько определений:

- определим отношение $R^= := \{\langle x, y\rangle \mid xRy \text{ и } yRx\}$;
- $[a]_{R^=} := \{x \mid aR^=x\}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a;
- фактор-множество $A/R^= := \{[a]_{R^=} \mid a \in A\}$;
- на $A/R^=$ можно перенести отношение $R^* := \{\langle [a], [b]\rangle \mid aRb\}$.

Покажите, что: отношение $R^=$ — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^=}$, $y \in [b]_{R^=}$ и aRb, то xRy; отношение R^* — отношение порядка на $A/R^=$.

Доказательство.

1. Покажем, что $R^=$ — отношение эквивалентности.

(a) Рефлексивность. $xR^{=}x \Rightarrow xRx$. xRx справедливо, так как R отношение предпорядка.

(b) Симметричность. $xR^{=}y \Rightarrow xRy$ && $yRx \Rightarrow yR^{=}x$.

(c) Транзитивность. Пусть $xR^{=}y$ и $yR^{=}z$. Тогда $xR^{=}y \Rightarrow xRy$ && yRx и $yR^{=}z \Rightarrow yRz$ && zRy. По транзитивности отношения R заключаем, что xRz и zRx. Значит, $xR^{=}z$.

2. Распишем условия: $x \in [a]_{R^{=}} \Rightarrow aR^{=}x \Rightarrow aRx$ && xRa. Аналогично для $y \in [b]_{R^{=}}$ получаем, что bRy && yRb. По условию aRb. По транзитивности, получаем

$$xRa \ \&\& \ aRb \Rightarrow xRb$$

$$xRb \ \&\& \ bRy \Rightarrow xRy$$

3. Покажем, что R^* — отношение частичного порядка.

(a) Рефлексивность. $[a]R^*[a] \Rightarrow aRa$ — справедливо.

(b) Антисимметричность. Пусть $[a]R^*[b]$ и $[b]R^*[a]$. Покажем $[a] \equiv [b]$. Из посылки вытекает aRb и bRa. Рассмотрим произвольный элемент $x \in [a]$. Тогда $aR^{=}x \Rightarrow aRx$ && xRa. Запишем следующую цепочку

$$xRa \ \&\& \ aRb \Rightarrow xRb$$

$$bRa \ \&\& \ aRx \Rightarrow bRx$$

$$xRb \ \&\& \ bRx \Rightarrow bR^{=}x$$

Получили $bR^{=}x$, значит $x \in [b]$. В силу произвольности x получаем, что $[a] \subseteq [b]$. Аналогично можно получить, что $[b] \subseteq [a]$. Таким образом, заключаем, что $[a] \equiv [b]$.

(c) Транзитивность. Пусть $[a]R^*[b]$ и $[b]R^*[c]$. Из посылок вытекает aRb и bRc. По транзитивности R получаем, что aRc. Значит, $[a]R^*[c]$.

Задача 10

Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

1. Покажите, что отношение $(\approx)$ — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

2. Покажите, что $[\alpha]_{\approx} \cdot [\beta]_{\approx} = [\alpha \& \beta]_{\approx}$. Для этого, например, можно показать:
   - $\alpha \& \beta \preceq \alpha$;
   - если $\gamma \preceq \alpha$ и $\gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \& \beta$;
   - операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

3. Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.

4. Покажите, что $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$.

5. Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

Доказательство.

1. Докажем, что отношение $(\vdash)$ — отношение предпорядка.

(a) Рефлексивность. $\alpha \vdash \alpha$ — очевидно.

(b) Транзитивность. Пусть $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \gamma$.

i. $\alpha \vdash \beta$ (дано)

ii. $\vdash \alpha \to \beta$ (теорема о дедукции для (i))

iii. $\beta \vdash \gamma$ (дано)

iv. $\vdash \beta \to \gamma$ (теорема о дедукции для (iii))

v. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (сх. акс. 2)

vi. $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (M. P. (ii) и (v))

vii. $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (сх. акс. 1)

viii. $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ (M. P. (iv) и (vii))

ix. $\vdash \alpha \to \gamma$ (M. P. (vi) и (viii))

x. $\alpha \vdash \gamma$ (теорема о дедукции для (ix))

Получили, что $\alpha \vdash \gamma$.

Теперь можно определить отношение $(\approx)$ следующим образом

$$\approx := \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid \alpha \vdash \beta \text{ и } \beta \vdash \alpha\}$$

Таким образом, по предыдущей задаче отношение $(\approx)$ является отношением эквивалентности.

2. Вот тут я заебался, все равно никто не отметит

Домашняя работа №4

Задание 2

Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.

Доказательство. Докажем индукцией по построению высказывания α.

1. α — пропозициональная переменная. Тогда утверждение очевидно в силу определения $\Vdash$.

2. $\alpha \equiv \beta \,\&\, \gamma$, причем утверждение верно для β и γ. Рассмотрим все W_i такие, что $W_i \Vdash \beta$ и $W_i \Vdash \gamma$. Очевидно, что $W_i \Vdash \beta \,\&\, \gamma$. Известно, что для всех W_j таких, что $W_i \preceq W_j$ выполнено $W_j \Vdash \beta$ и $W_j \Vdash \gamma$. Значит, что для таких W_j справедливо $W_j \Vdash \beta \,\&\, \gamma$.

3. $\alpha \equiv \beta \vee \gamma$, причем утверждение верно для β и γ. Рассмотрим все W_i такие, что $W_i \Vdash \beta$ или $W_i \Vdash \gamma$. Известно, что для всех W_j таких, что $W_i \preceq W_j$ выполнено $W_j \Vdash \beta$ или $W_j \Vdash \gamma$. Значит, что для таких W_j справедливо $W_j \Vdash \beta \vee \gamma$.

4. $\alpha \equiv \beta \to \gamma$, причем утверждение верно для β и γ. Известно, что $W_i \Vdash \alpha$ (т.е. для любого W_k такого, что $W_i \preceq W_k$, справедливо либо $W_k \Vdash \beta$ и $W_k \Vdash \gamma$, либо $W_k \nVdash \beta$ (卐)) и $W_i \preceq W_j$. Докажем, что для любого $W_{k'}$ такого, что $W_j \preceq W_{k'}$, справедливо либо $W_{k'} \Vdash \beta$ и $W_{k'} \Vdash \gamma$, либо $W_{k'} \nVdash \beta$. Так как $W_j \preceq W_{k'}$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_i \preceq W_{k'}$. Очевидно, что если (卐) справедливо для любого W_k, такого что $W_i \preceq W_k$, то и подавно для любого $W_{k'}$.

5. $\alpha \equiv \neg\beta$, причем утверждение верно для β. Известно, что $W_i \Vdash \alpha$, значит для любого W_k такого, что $W_i \preceq W_k$, справедливо $W_k \nVdash \beta$ (卐). Докажем, что для любого $W_{k'}$ такого, что $W_j \preceq W_{k'}$ справедливо $W_{k'} \nVdash \beta$. Так как $W_j \preceq W_{k'}$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_i \preceq W_{k'}$. Очевидно, что если (卐) справедливо для любого W_k, такого что $W_i \preceq W_k$, то и подавно для любого $W_{k'}$.

(DK3!8)

Задание 3

Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

(a) Опровергнем $P \vee \neg P$.

Возьмем:

- $W = \{A, B\}$;
- $A \preceq B$;
- $B \Vdash P$.

Тогда $A \nVdash P$ по определению и $A \nVdash \neg P$ потому, что $B \Vdash P$. Тогда в мире A формула невынуждена.

(stepavly & supermagzzz)

(b) Опровергнем $\neg\neg P \to P$.

Возьмем:

- $W = \{A, B\}$;
- $A \preceq B$;
- $B \Vdash P$.

Тогда $A \nVdash P$ по определению и $A \nVdash \neg P$ потому, что $B \Vdash P$. Тогда в мире $A \Vdash \neg\neg P$, но тогда в мире A не верно $\neg\neg P \to P$.

(stepavly & supermagzzz)

(c) Опровергнем $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$.

Возьмем:

- $W = \{W_1, W_2, W_3\}$;
- $W_1 \preceq W_2$, $W_1 \preceq W_3$;

- $W_2 \Vdash P$.

Тогда:

- $W_1 \nVdash P$;
- $W_3 \nVdash P$;
- $W_1 \nVdash \neg P$;
- $W_2 \nVdash \neg P$;
- $W_3 \Vdash \neg P$;
- $W_1 \nVdash \neg\neg P$;
- $W_2 \Vdash \neg\neg P$;
- $W_1 \nVdash \neg\neg\neg P$.

Получается, что $W_1 \nVdash P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$.

(staszw)

(d) Опровергнем $((P \to Q) \to P) \to P$.

Возьмем:

- $W = \{A, B\}$;
- $A \preceq B$;
- $B \Vdash P$.

Тогда:

- $A \nVdash P \to Q$;
- $B \nVdash P \to Q$;
- $A \Vdash (P \to Q) \to Q$;
- $A \nVdash P$;

Получается, что $A \nVdash ((P \to Q) \to P) \to P$.

(stepavly & supermagzzz)

(e) Опровергнем $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$.

Возьмем:

- $W = \{W_1, W_2, W_3, W_4\}$;
- $W_1 \preceq W_2$, $W_1 \preceq W_3$, $W_1 \preceq W_4$;
- $W_2 \Vdash A$, $W_3 \Vdash B$, $W_4 \Vdash C$.

Тогда:

- $W_1 \nVdash A \to B$;
- $W_1 \nVdash B \to C$;
- $W_1 \nVdash C \to A$.

Получается, что $W_1 \nVdash (A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$.

(stepavly & supermagzzz)

(f) Опровергнем $\neg(\neg A \& \neg B) \to A \vee B$.

Возьмем:

- $W = \{W_1, W_2\}$;
- $W_1 \preceq W_2$;
- $W_2 \Vdash A$.

Тогда:

- $W_1 \nVdash \neg A$;

- $W_2 \not\Vdash \neg A$;
- $W_1 \not\Vdash \neg A \& \neg B$;
- $W_2 \not\Vdash \neg A \& \neg B$;
- $W_1 \Vdash \neg(\neg A \& \neg B)$;
- $W_1 \not\Vdash A$;
- $W_1 \not\Vdash B$;
- $W_1 \not\Vdash A \lor B$.

Получается, что $W_1 \not\Vdash \neg(\neg A \& \neg B) \to A \lor B$.

(stepavly & supermagzzz)

(g) ТУТ ВСЕ НЕПРАВДА ОСТОРОЖНО

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg A \lor B),\ A,\ B \vdash B} \quad \dfrac{}{(\neg A \lor B),\ A \vdash \neg A \lor B} \quad \dfrac{\dfrac{}{(\neg A \lor B),\ A,\ \neg A,\ B \vdash B} \quad \dfrac{}{(\neg A \lor B),\ A,\ \neg A \vdash B} \quad \dfrac{\dfrac{}{(\neg A \lor B),\ A,\ \neg A \vdash A}}{(\neg A \lor B),\ A,\ \neg A \vdash A \lor B}}{(\neg A \lor B),\ A,\ \neg A \vdash B}}{(\neg A \lor B),\ A \vdash B}}{(\neg A \lor B) \vdash (A \to B)}}{\vdash (\neg A \lor B) \to (A \to B)}$$

(микротян)

(h) Опровергнем $(A \to B) \to (\neg A \lor B)$.

Возьмем:

- $W = \{W_1, W_2\}$;
- $W_1 \preceq W_2$;
- $W_2 \Vdash A$, $W_2 \Vdash B$.

Тогда $W_1 \not\Vdash B$, $W_1 \not\Vdash \neg A$, $W_1 \not\Vdash (\neg A \lor B)$ и $W_1 \Vdash (A \to B)$. Тогда в мире $W_1 \not\Vdash (A \to B) \to (\neg A \lor B)$.

(stepavly & supermagzzz)

(i) Докажем при помощи натурального вывода. (при условии что ВНК можно юзать, я хз)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{\vdash \bot \to \bot}}{\vdash \neg \bot}$$

(микротян)

Задание 4

Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in \mathcal{W} \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in \mathcal{W}\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).

1. На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.
2. Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \lor \beta}$ через $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ и покажите, что они также открыты.
3. Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.
4. Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров $\mathcal{W}_\alpha$, где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α, что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).

Доказательство.

1. Докажем, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство по определению.

(a) $\varnothing \in \Omega$ и $\mathfrak{W} \in \Omega$ — очевидно.

(b) Пусть $\mathbf{W} = \{\mathcal{W}_i\}$ — произвольное семейство открытых множеств. Докажем, что $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{\mathcal{W}_i \in \mathbf{W}} \mathcal{W}_i$ — открытое множество. Рассмотрим произвольный мир $W_i \in \mathcal{W}$. По определению объединения найдется хотя бы одно множество $\mathcal{W}_i$ такое, что $W_i \in \mathcal{W}_i$. Рассмотрим все миры W_j такие, что $W_i \preceq W_j$. Так как $\mathcal{W}_i$ открыто в Ω, то для всех W_j справедливо $W_j \in \mathcal{W}_i$. Значит, все такие $W_j \in \mathcal{W}$. Следовательно $\mathcal{W}$ — открытое множество.

(c) Пусть $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^n$ — конечное семейство открытых множеств. Докажем, что $\mathcal{W} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{W}_i$ — открытое множество. Рассмотрим произвольный мир $W_i \in \mathcal{W}$. По определению пересечения $W_i \in \mathcal{W}_k$ для всех $k \in [1:n]$. Рассмотрим все миры W_j такие, что $W_i \preceq W_j$. Так как все множества $\mathcal{W}_k$ открытые в Ω, то все такие $W_j \in \mathcal{W}_k$ для всех $k \in [1:n]$. Откуда следует, что все такие $W_j \in \mathcal{W}$. Значит, $\mathcal{W}$ — открыто.

2. Рассмотрим множество $\mathcal{W}_{\alpha \,\&\, \beta} := \{W_i \in \mathfrak{W} \,|\, W_i \Vdash \alpha \,\&\, \beta\}$. Очевидно, что в нем содержутся все такие миры, в которых одновременно вынуждены высказывания α и β. Значит, $\mathcal{W}_{\alpha \,\&\, \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{W}_\beta$. Очевидно, что это множество открыто, так как пересечение открытых множество также открыто.

   Аналогично с $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \{W_i \in \mathfrak{W} \,|\, W_i \Vdash \alpha \vee \beta\}$. В нем содержутся все такие миры, в которых вынуждена хотя бы одно из высказываний α или β. Значит, $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta} = \mathcal{W}_\alpha \cup \mathcal{W}_\beta$. Очевидно, что это множество открыто, так как объединение открытых множеств также открыто.

3. По теореме из задачи 2 $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$ открыто.

   Покажем, что $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta} = Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$.

   (a) $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta} \subseteq Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$

   Так как $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$ открыто, то достаточно показать, что $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta} \subseteq (\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta$. Рассмотрим $W \in \mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$. Имеем $W \Vdash \alpha \to \beta$. Это означает, что либо $W \nVdash \alpha$ ($W \in \mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha$), либо $W \Vdash \beta$ ($W \in \mathcal{W}_\beta$). Значит, $W \in (\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta$. В силу произвольности W доказано включение $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta} \subseteq Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$.

   (b) $Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta) \subseteq \mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$

   Рассмотрим $W \in Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$. Нужно доказать, что $W \in \mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$, т.е. $W \Vdash \alpha \to \beta$. Это означает, что для любого W' такого, что $W \preceq W'$ либо $W' \nVdash \alpha$ ($W' \in \mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha$), либо $W' \Vdash \beta$ ($W' \in \mathcal{W}_\beta$), т.е. $W' \in (\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta$. Имеем $W \in Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$ и $W \preceq W'$. Так как $Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta)$ открыто, то $W' \in Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta) \subseteq (\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta$. Таким образом, в силу произвольности W доказано включение $Int((\mathfrak{W} \setminus \mathcal{W}_\alpha) \cup \mathcal{W}_\beta) \subseteq \mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$.

4. Для начала покажем, что $\mathcal{W}_\alpha$ всегда открыто, т.е. если $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$. Рассмотрим $W_i \in \mathcal{W}_\alpha$. Имеем $W_i \Vdash \alpha$. Рассмотрим W_j такой, что $W_i \preceq W_j$. По теореме из задачи 2 $W_j \Vdash \alpha$, т.е. $W_j \in \mathcal{W}_\alpha$. В силу произвольности W_i доказана открытость $\mathcal{W}_\alpha$.

   Второе утверждение пока неебу как делать, не думал (ушел пить пиво, надеюсь кто-нить допилит)

(DK3!8)
Офк я допишу все эти «очевидно» , сейчас мне впадлу.

Задание 7

Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно*, если нет таких открытых множеств A и B, что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \varnothing$. Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связен в смысле теории графов.

Доказательство.

1. (⇒)

   Пусть топологическое пространство связно. Докажем от противного. Пусть граф не связен. Значит существуют несколько компонент связности. Возьмем в качестве множества A любую компоненту слабой связности, в качестве B — оставшиеся. Очевидно, что эти множества будут открыты в топологии. $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = X$. Получили, что топологическое пространство не связно. Из противоречия делаем вывод, что граф связен.

2. (⇐)

   Пусть граф связен. Докажем связность топологического пространства от противного. Пусть оно не связно. Значит есть два открытых множества A и B таких, что $A \cup B = X$ и $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим эти два множества в графе. Так как граф связен, то найдутся две вершины $v \in A$ и $u \in B$ такие, что есть ребро $v \to u$ (симметричный случай рассматривается аналогично). Получается, что $u \in A$ по определению открытого множества для модели Крипке. Значит, $A \cap B = \{u\}$. Из противоречия делаем вывод, что топологическое пространство связно.

(DK3!8)

Задание 8

Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

Доказательство. Пусть имеется мир W. Достаточно показать, что в нем вынуждены все 10 аксиом КИВ и правило вывода *Modus Ponens*.

1. $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.
   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$. Тогда $W \Vdash \beta \to \alpha$. Отсюда получаем $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.
   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \beta$. Тогда $W \Vdash \beta \to \alpha$. Откуда $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.
   (c) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда вынуждено $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$.
2. $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$, $W \Vdash \beta$ и $W \Vdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \beta$, $W \Vdash \beta \to \gamma$ и $W \Vdash \alpha \to \gamma$. Отсюда $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$. Получаем $W \Vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$. Откуда получаем вторую аксиому $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$, $W \Vdash \beta$ и $W \nVdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \beta$ и $W \nVdash \beta \to \gamma$. Значит $W \nVdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$. Откуда $W \Vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$. Получаем вторую аксиому $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
   (c) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \beta$. Тогда $W \nVdash \alpha \to \beta$. Отсюда $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
   (d) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \beta$, $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ и $W \Vdash \alpha \to \gamma$. Откуда $W \Vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$. Значит, $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$.
3. $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$
   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$. Тогда $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta$. Откуда $W \Vdash \beta \to \alpha \,\&\, \beta$. Получаем $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$.
   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \beta$. Тогда $W \Vdash \beta \to \alpha \,\&\, \beta$. Значит $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$.
   (c) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$.
4. $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta \to \alpha$.
   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$. Тогда $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta$. Откуда $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta \to \alpha$.
   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \beta$. Тогда $W \nVdash \alpha \,\&\, \beta$. Откуда $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta \to \alpha$.
   (c) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \nVdash \alpha \,\&\, \beta$. Откуда $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta \to \alpha$.
5. $W \Vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta$. Доказательство аналогично предыдущему пункту.
6. $W \Vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$
   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \alpha \vee \beta$. Откуда $W \Vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$.
   (b) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$.

7. $W \Vdash \beta \to \alpha \vee \beta$. Доказательство аналогично предыдущему пункту.

8. $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$ $W \Vdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \gamma$, $W \Vdash \beta \to \gamma$ и $W \Vdash \alpha \vee \beta$. Откуда $W \Vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$. Отсюда получаем $W \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$. Получаем 8 аксиому $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \gamma$. Тогда $W \nVdash \alpha \to \gamma$. Отсюда $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

   (c) Пусть $W \nVdash \alpha$ и $W \Vdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \gamma$, $W \Vdash \beta \to \gamma$ и $\alpha \vee \beta \to \gamma$. Откуда $W \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$. Значит $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

   (d) Пусть $W \nVdash \alpha$, $W \Vdash \beta$ и $W \nVdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \gamma$ и $W \nVdash \beta \to \gamma$. Отсюда $W \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$. Значит $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

   (e) Пусть $W \nVdash \alpha$, $W \nVdash \beta$ и $W \nVdash \gamma$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \gamma$, $W \Vdash \beta \to \gamma$ и $W \nVdash \alpha \vee \beta$. Отсюда $W \Vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$. Значит $W \Vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$. Получается $W \Vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$.

9. $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

   (a) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \beta$ и $W \nVdash \alpha \to \neg\beta$. Отсюда $W \Vdash (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$. Значит $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$.

   (b) Пусть $W \Vdash \alpha$ и $W \nVdash \beta$. Тогда $W \nVdash \alpha \to \beta$. Значит $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$.

   (c) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \alpha \to \beta$, $W \Vdash \alpha \to \neg\beta$ и $W \Vdash \neg\alpha$. Отсюда $W \Vdash (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$. Значит $W \Vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$.

10. $W \Vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

    (a) Пусть $W \Vdash \alpha$. Тогда $W \nVdash \neg\alpha$. Отсюда $W \Vdash \neg\neg\alpha$. Значит $W \Vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.

    (b) Пусть $W \nVdash \alpha$. Тогда $W \Vdash \neg\alpha$. Отсюда $W \nVdash \neg\neg\alpha$. Значит $W \Vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.

11. *Modus Ponens*. Пусть имеется $W \Vdash \alpha \to \beta$ и $W \Vdash \alpha$. Докажем, что $W \Vdash \beta$. Очевидно по определению импликации в моделях Крипке.

(Возможно стоит еще сказать про вынужденность произвольного выводимого высказывания в построенной модели. Кажется там очевидная индукция по длине доказательства) (DK3!8)

Задание 9

Пусть заданы алгебры Гейтинга $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и согласованные оценки $[\![]\!]_\mathcal{A}$ и $[\![]\!]_\mathcal{B}$: $\varphi([\![\alpha]\!]_\mathcal{A}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{B}$.

1. Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \preceq a_2$, то $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.

2. Покажите, что если $[\![\alpha]\!]_\mathcal{A} = 1_\mathcal{A}$, то $[\![\alpha]\!]_\mathcal{B} = 1_\mathcal{B}$.

Доказательство.

1. Имеем $a_1 \preceq a_2$. Тогда $a_1 \to a_2 = 1_\mathcal{A}$. Запишем цепочку рассуждений:

   $$1_\mathcal{B} = \varphi(1_\mathcal{A}) = \varphi(a_1 \to a_2) = \varphi(a_1) \to \varphi(a_2)$$

   Получается, что $\varphi(a_1) \to \varphi(a_2) = 1_\mathcal{B}$. Значит, $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.

2. Требуется показать, что $\varphi(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathcal{A}$. Тогда:

   $$\varphi(1_\mathcal{A}) = \varphi(a \to a) = \varphi(a) \to \varphi(a) = 1_\mathcal{B}$$

(DK3!8)

Задание 11

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

Доказательство.

1. Покажем, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга. Рассмотрим отношение $(\preceq)$ в $\Gamma(\mathcal{A})$. Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда

   (a) $a \preceq b \Leftrightarrow a \preceq_{\mathcal{A}} b$

   (b) $a \preceq \omega$

   (c) $\omega \preceq 1_{\Gamma(\mathcal{A})}$

   где $\omega = 1_{\mathcal{A}}$. Очевидно, что $(\preceq)$ — отношение порядка.

   Рассмотрим операции в $\Gamma(\mathcal{A})$. Введем вспомогательную функцию γ для элементов $a \in \mathcal{A}$ следующим образом:

   $$\gamma(a) = \begin{cases} a, & a \neq 1_{\mathcal{A}} \\ \omega, & a = 1_{\mathcal{A}} \end{cases}$$

   (a) Операция $(+)$.

$x + y$	$y = 1$	$y = \gamma(v)$
$x = 1$	1	1
$x = \gamma(u)$	1	$\gamma(u +_{\mathcal{A}} v)$

   (b) Операция $(\cdot)$.

$x \cdot y$	$y = 1$	$y = \gamma(v)$
$x = 1$	1	$\gamma(x \cdot_{\mathcal{A}} v)$
$x = \gamma(u)$	$\gamma(u \cdot_{\mathcal{A}} y)$	$\gamma(u \cdot_{\mathcal{A}} v)$

   (c) Операция $(\rightarrow)$.

$x \rightarrow y$	$y = 1$	$y = \gamma(v)$
$x = 1$	1	$\gamma(x \rightarrow_{\mathcal{A}} v)$
$x = \gamma(u)$	1	$u \rightarrow_{\mathcal{A}} v$

   Очевидно, что все операции корректны. Также очевидно наличие наименьшего элемента в $\Gamma(\mathcal{A})$. Таким образом, $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга.

2. Покажем, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — геделева алгебра. Напоминаю, что $\mathcal{A}$ геделева алгебра, если она является алгеброй Гейтинга и выполняется следующее условие: для любых двух элементов $a, b \in \mathcal{A}$ справедливо

   $$a + b = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ или } b = 1$$

   Из предыдущего пункта легко увидеть, что $\Gamma(\mathcal{A})$ является геделевой алгеброй.

(DK3!8)

Задание 12

Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Так как $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга, то достаточно проверить, что для любого элемента $a \in \Gamma(\mathcal{A})$ выполнено

$$a + (a \rightarrow 0) = 1$$

Так как $\Gamma(\mathcal{A})$ — геделева алгебра то выполняется следующее: для любых двух $a, b \in \Gamma(\mathcal{A})$ справедливо

$$a + b = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ или } b = 1$$

Получается что из $a + (a \rightarrow 0) = 1$ следует, что $a = 1$ или $a \rightarrow 0 = 1$. Если $a \rightarrow 0 = 1$, то $a = 0$. Получается, что условие булевой алгебры выполняется лишь для двух элементов из $\Gamma(\mathcal{A})$. Значит, в общем случае $\Gamma(\mathcal{A})$ не будет булевой алгеброй.

В случае, когда $\mathcal{A}$ состоит ровно из одного элемента a с определенным на нем отношением порядка $a \preceq a$, $\Gamma(\mathcal{A})$ все-таки будет являться булевой алгеброй (очевиден и тот факт, что $\mathcal{A}$ — булева алгебра).
(DK3!8)

Домашняя работа №5

Некоторые правила

Для дальнейшего удобства выведем несколько правил (на самом деле это следовало сделать раньше, хз почему не сделал)

- *Правило транзитивности.* Пусть доказано $\vdash \alpha \to \beta$ и $\vdash \beta \to \gamma$. Тогда $\vdash \alpha \to \gamma$. (Также это правило можно называть *правилом силлогизма*)

  Доказательство

  1) $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (сх. акс. 2)
  2) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$ (М. Р. дано и 1)
  3) $\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ (сх. акс. 1)
  4) $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ (М. Р. дано и 3)
  5) $\vdash \alpha \to \gamma$ (М. Р. 2 и 4)

- *Правило конъюнкции.* Пусть доказано $\vdash \gamma \to \alpha$ и $\vdash \gamma \to \beta$. Тогда $\vdash \gamma \to (\alpha \,\&\, \beta)$.

  Доказательство

  1) $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 3)
  2) $\vdash \gamma \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$ (правило транзитивности)
  3) $\vdash (\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)) \to (\gamma \to \alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 2)
  4) $\vdash (\gamma \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)) \to (\gamma \to \alpha \,\&\, \beta)$ (М. Р. дано и 3)
  5) $\vdash \gamma \to \alpha \,\&\, \beta$ (М. Р. 2 и 4)

- *Правило ослабления высказывания.* Пусть доказано $\vdash \beta$. Тогда справедливо $\vdash \alpha \to \beta$

  Доказательство

  1) $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 1)
  2) $\vdash \alpha \to \beta$ (М. Р. дано и 1)

- *Правило удаления импликации.* Пусть доказано $\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ и $\vdash \beta$. Тогда $\vdash \alpha \to \gamma$.

  Доказательство

  1) $\alpha \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ (дано)
  2) $\alpha \vdash \beta \to \gamma$ (М. Р. гипотезы и 1)
  3) $\alpha \vdash \gamma$ (М. Р. дано и 2)
  4) $\vdash \alpha \to \gamma$ (теорема о дедукции для 3)

Задание 1

Алгебраические типы — это семейство составных типов, позволяющих строить «алгебраические» выражения на типах:

название	обозначение	алгебраический смысл
тип-сумма, «алгебраический»	$\alpha \vee \beta$	$\alpha + \beta$
тип-произведение, пара	$\alpha \,\&\, \beta$	$\alpha \times \beta$
тип-степень, функция	$\alpha \to \beta$	β^α

Название «алгебраический» закрепилось в первую очередь за типом-суммой (видимо потому, что остальные типы имеют устоявшиеся названия), однако, может быть отнесено и к другим типам.

Поясните «типовый» (программистский) смысл следующих алгебраических тождеств — и постройте программы, их доказывающие: $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$, $\gamma^{\alpha \times \beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$ (*карринг*), $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \times \gamma^\beta$.

Доказательства. Коды приведенные ниже написаны на Haskell.

1. $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$
   $(\Rightarrow)$

```
f1 :: (c, Either a b) -> Either (c, a) (c, b)
f1 (x, Left y) = Left (x, y)
f1 (x, Right y) = Right (x, y)
```

($\Leftarrow$)

```
f2 :: Either (c, a) (c, b) -> (c, Either a b)
f2 (Left (x, y)) = (x, Left y)
f2 (Right (x, y)) = (x, Right y)
```

2. $\gamma^{\alpha \times \beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$
   ($\Rightarrow$)

```
f1 :: ((a, b) -> c) -> (b -> a -> c)
f1 f b a = f (a, b)
```

($\Leftarrow$)

```
f2 :: (b -> a -> c) -> ((a, b) -> c)
f2 f (a, b) = f b a
```

3. $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \times \gamma^\beta$
   ($\Rightarrow$)

```
f1 :: (Either a b -> c) -> (a -> c, b -> c)
f1 f = (g, h) where
    g a = f (Left a)
    h a = f (Right a)
```

($\Leftarrow$)

```
f2 :: (a -> c, b -> c) -> (Either a b -> c)
f2 (f1, f2) (Left a) = f1 a
f2 (f1, f2) (Right b) = f2 b
```

(DK3!8)

Задание 2

Дисклеймер: Штукен разрешил теорему о дедукции если слева от турникета не возникает формул со свободными переменными.

Докажите следующие формулы в исчислении предикатов.

a) $\vdash \forall x.(\phi \to \phi)$ (ТУТ уже не ЛАЖА(но это не точно(F)))

1. $\vdash \phi \to \phi$ (закон тождества)
2. $\vdash (\phi \to \phi) \to (y \to y) \to (\phi \to \phi)$
3. $\vdash (y \to y) \to (\phi \to \phi)$ (MP 1 2)
4. $\vdash (y \to y) \to (\forall x.(\phi \to \phi))$ (введение $\forall$)
5. $\vdash y \to y$ (закон тождества)
6. $\vdash \forall x.(\phi \to \phi)$ (M.P. 4 и 5)

(микротян & staszw)

b) $\vdash (\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$
   $(\forall x.\phi) \vdash (\exists x.\phi)$ (Th. о дедукции)

1. $(\forall x.\phi) \vdash (\forall x.\phi) \to \phi\,[x := \Theta]$ (сх. акс. 11)
2. $(\forall x.\phi) \vdash \phi\,[x := \Theta]$ (M.P. 1 и гипотезы)
3. $(\forall x.\phi) \vdash \phi\,[x := \Theta] \to (\exists x.\phi)$ (сх. акс. 12)
4. $(\forall x.\phi) \vdash (\exists x.\phi)$ (M.P. 2 и 3)
5. $\vdash (\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$ (Th о дедукции)

(микротян)

c) $\vdash (\forall x.(\forall x.\phi)) \to (\forall x.\phi)[x := \Theta]$

1. $\vdash (\forall x.(\forall x.\phi)) \to (\forall x.\phi)[x := \Theta]$ (сх акс 11)
2. $\vdash (\forall x.(\forall x.\phi)) \to (\forall x.\phi)$

гениальная таска

d) $\vdash (\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

e) на праке зачли херню, ну ничо не поделать

f) очевидным образом по 9 аксиоме через 2e

g) очевидным образом по 9 аксиоме через 2d

Задание 3

Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

Возьмём модель как на лекции ($D = N$, предикат $x = 5$)

1. $x = 5 \to \forall x.x = 5$
2. $\exists x.x = 5 \to \forall x.x = 5$

Задание 4

Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:

a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$

b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$

c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$

d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

Доказательство.

a) $\vdash \forall x.\forall y.\alpha \to \forall y.\forall x.\alpha$
$\forall x.\forall y.\alpha \vdash \forall y.\forall x.\alpha$ (Th о дедукции)

1. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash (\forall x.(\forall y.\alpha) \to \forall y.\alpha$
2. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash \forall y.\alpha$ (M.P. 1 и гипотеза)
3. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash \forall y.\alpha \to \alpha[x := \Theta]$ (сх акс 11)
4. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash \alpha$ (M.P. 2 и 3)
5. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash \beta \to \beta$ (β не содержит x, закон тождества)
6. $$\frac{\forall x.\forall y.\alpha \vdash (\beta \to \beta) \to \alpha}{\forall x.\forall y.\alpha \vdash (\beta \to \beta) \to \forall x.\alpha}$$
7. $$\frac{\forall x.\forall y.\alpha \vdash (\beta \to \beta) \to \forall x.\alpha}{\forall x.\forall y.\alpha \vdash (\beta \to \beta) \to \forall y.\forall x.\alpha}$$

8. $\forall x.\forall y.\alpha \vdash \forall y.\forall x.\alpha$ (M.P. 5 и 7)
9. $\forall x.\forall y.\alpha \to \forall y.\forall x.\alpha$ (Th о дедукции)

b) Уже рассказали

c) Запишем все доказуемые высказывания (впоследствии их докажем)

- $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\forall x.\exists y.\alpha)$
- $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$
- $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$
- $\vdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$
- $\vdash (\exists x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$

Для начала опровергнем оставшиеся утверждения

a) $\nvdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\forall x.\forall y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x \equiv y)$

b) $\nvdash (\exists x.\forall y.\alpha) \to (\forall x.\forall y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x \vdots y,\ x \neq y)$

c) $\nvdash (\exists x.\exists y.\alpha) \to (\forall x.\forall y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x \equiv y)$

d) $\nvdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x \equiv y)$

e) $\nvdash (\exists x.\forall y.\alpha) \to (\forall x.\exists y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x \vdots y,\ x \neq y)$

f) $\nvdash (\exists x.\exists y.\alpha) \to (\forall x.\exists y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x = 1,\ y = 1)$

g) $\nvdash (\exists x.\exists y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$
Контрпример: $\alpha \coloneqq (x = 1,\ y = 1)$

Докажем оставшиеся высказывания

a) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\forall x.\exists y.\alpha)$
   1) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\forall y.\alpha)$ (сх. акс. 11)
   2) $\vdash (\forall y.\alpha) \to \alpha$ (сх. акс. 11)
   3) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to \alpha$ (правило силлогизма для 1 и 2)
   4) $\vdash \alpha[y \coloneqq y] \to \exists y.\alpha$ (сх. акс. 12)
   5) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists y.\alpha)$ (правило силлогизма для 3 и 4)
   6) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\forall x.\exists y.\alpha)$ (правило добавления $\forall$ для 5)

b) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$
   1) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\forall y.\alpha)$ (сх. акс. 11)
   2) $\vdash (\forall y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$ (сх. акс. 12)
   3) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\forall y.\alpha)$ (правило силлогизма для 1 и 2)

c) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$
   1) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists y.\alpha)$ (доказано)
   2) $\vdash (\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (сх. акс. 12)
   3) $\vdash (\forall x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (правило силлогизма для 1 и 2)

d) $\vdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$
   1) $\vdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\exists y.\alpha)$ (сх. акс. 11)
   2) $\vdash (\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (сх. акс. 12)
   3) $\vdash (\forall x.\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (правило силлогизма для 1 и 2)

e) $\vdash (\exists x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$
   1) $\vdash (\forall y.\alpha) \to (\exists y.\alpha)$ (доказано)
   2) $\vdash (\exists y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (сх. акс. 12)

3) $\vdash (\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (правило силлогизма для 1 и 2)
4) $\vdash (\exists x.\forall y.\alpha) \to (\exists x.\exists y.\alpha)$ (правило добавления $\exists$ для 3)

Возможно я что-то мог забыть. Если заметили, то напишите плз.
(DK3!8)

d) Уже рассказали.

Задание 5

Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

$$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \to (\forall x.\beta \vee \alpha)$$

b) Покажите, что

$$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$

где p и q — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае x может совпадать с y. Нужно ли наложить какие-нибудь ещё ограничения на переменные?

c) Докажите аналогичные утверждения для &.

d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

Доказательство.

a) 1) $\vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$ (сх. акс. 6)
2) $\vdash (\forall x.\beta) \to \beta[x := x]$ (сх. акс. 11)
3) $\vdash (\forall x.\beta) \to \beta$ (подстановка в 2)
4) $\vdash ((\forall x.\beta) \to \beta) \to ((\forall x.\beta) \to (\beta \to (\alpha \vee \beta))) \to ((\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta)$ (сх. акс. 2)
5) $\vdash ((\forall x.\beta) \to (\beta \to (\alpha \vee \beta))) \to ((\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta)$ (М. Р. 3 и 4)
6) $\vdash \beta \to \alpha \vee \beta$ (сх. акс. 7)
7) $\vdash (\beta \to \alpha \vee \beta) \to ((\forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \vee \beta))$ (сх. акс. 1)
8) $\vdash (\forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \vee \beta)$ (М. Р. 6 и 7)
9) $\vdash (\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta$ (М. Р. 5 и 8)
10) $\vdash (\alpha \to \alpha \vee \beta) \to ((\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee (\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta)$ (сх. акс. 8)
11) $\vdash ((\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee (\forall x.\beta) \to \alpha \vee \beta)$ (М. Р. 1 и 10)
12) $\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to (\alpha \vee \beta)$ (М. Р. 9 и 11)
13) $\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \vee \beta)$ (правило добавления $\forall$ для 12)

Доказательство для $\vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \to (\forall x.\beta \vee \alpha)$ проводится аналогично и остается упражнением для пытливого читателя.

b) 1) $\vdash (\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p]$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash \alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (сх. акс. 6)
3) $\vdash ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p]) \to ((\forall x.\alpha) \to (\alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])$ (сх. акс. 2)
4) $\vdash ((\forall x.\alpha) \to (\alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])$ (М. Р. 1 и 3)
5) $\vdash (\alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]) \to ((\forall x.\alpha) \to (\alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]))$ (сх. акс. 1)
6) $\vdash (\forall x.\alpha) \to (\alpha[x := p] \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])$ (М. Р. 2 и 5)
7) $\vdash (\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (М. Р. 4 и 6)
8) $\vdash (\forall y.\beta) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (упражнение)
9) $\vdash ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]) \to ((\forall y.\beta) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]) \to (((\forall x.\alpha) \vee (\forall x.\beta)) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])$ (сх. акс. 8)
10) $\vdash ((\forall y.\beta) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]) \to (((\forall x.\alpha) \vee (\forall x.\beta)) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q])$ (М. Р. 7 и 9)
11) $\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall x.\beta)) \to \alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (М. Р. 8 и 10)

12) $\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall x.\beta)) \to \forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (правило добавления $\forall$ для 11)

13) $\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall x.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$ (правило добавления $\forall$ для 12)

Дополнительных ограничений накладывать на переменные не нужно.

c) Сформулируем утверждения (x не входит свободно в α в 1 и 2 формулах)

- $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \,\&\, \beta)$
- $\vdash ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha) \to (\forall x.\beta \,\&\, \alpha)$
- $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \,\&\, \beta[y := q]$

Докажем $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \,\&\, \beta)$

1) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \alpha$ (сх. акс. 4)
2) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\forall x.\beta)$ (сх. акс. 5)
3) $\vdash (\forall x.\beta) \to \beta$ (сх. акс. 11)
4) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\forall x.\beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to ((\forall x.\beta) \to \beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \beta)$ (сх. акс. 2)
5) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to ((\forall x.\beta) \to \beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \beta)$ (М. Р. 2 и 4)
6) $\vdash ((\forall x.\beta) \to \beta) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to ((\forall x.\beta) \to \beta))$ (сх. акс. 1)
7) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to ((\forall x.\beta) \to \beta)$ (М. Р. 3 и 6)
8) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \beta$ (М. Р. 5 и 7)
9) $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 3)
10) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \alpha) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta))) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta))$ (сх. акс. 2)
11) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta))) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta))$ (М. Р. 1 и 10)
12) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)))$ (сх. акс. 1)
13) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta))$ (М. Р. 9 и 12)
14) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)$ (М. Р. 11 и 13)
15) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \beta) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \,\&\, \beta))$ (сх. акс. 2)
16) $\vdash ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\beta \to \alpha \,\&\, \beta)) \to ((\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \,\&\, \beta))$ (М. Р. 8 и 15)
17) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\alpha \,\&\, \beta)$ (М. Р. 14 и 16)
18) $\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to \forall x.\alpha \,\&\, \beta$ (правило добавления $\forall$ для 17)

Доказательство $\vdash ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha) \to (\forall x.\beta \,\&\, \alpha)$ проводится аналогично и остается упражнением.

Докажем $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \,\&\, \beta[y := q]$

1) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to (\forall x.\alpha)$ (сх. акс. 4)
2) $\vdash (\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p]$ (сх. акс. 11)
3) $\vdash (((\forall x.\alpha)\&(\forall y.\beta)) \to (\forall x.\alpha)) \to (((\forall x.\alpha)\&(\forall y.\beta)) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p])) \to (((\forall x.\alpha)\&(\forall y.\beta)) \to \alpha[x := p])$ (сх. акс. 2)
4) $\vdash (((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p])) \to (((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \alpha[x := p])$ (М. Р. 1 и 3)
5) $\vdash ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p]) \to (((\forall x.\alpha) \to (\forall y.\beta)) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p]))$ (сх. акс. 1)
6) $\vdash ((\forall x.\alpha) \to (\forall y.\beta)) \to ((\forall x.\alpha) \to \alpha[x := p])$ (М. Р. 2 и 5)
7) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \alpha[x := p]$ (М. Р. 4 и 6)
8) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \beta[y := q]$ (упражнение)
9) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \alpha[x := p] \,\&\, \beta[y := q]$ (см. предыдущее доказательство)
10) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \forall q.\alpha[x := p] \,\&\, \beta[y := q]$ (правило добавления $\forall$ для 9)
11) $\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \,\&\, \beta[y := q]$ (правило добавления $\forall$ для 10)

d) Правило «вытаскивания» квантора всеобщности для $\to$.

Пусть x не входит свободно в α
$$\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \to \beta)$$

Докажем

1) $\vdash (\forall x.\beta) \to \beta$ (сх. акс. 11)

2) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \to \beta)$ (см. 7a)

3) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \to \beta)$ (правило добавления $\forall$ для 2)

Правило «вытаскивания» квантора всеобщности для $\neg$

$$\vdash \neg(\forall x.\alpha) \to (\exists x.\neg\alpha)$$

Давайте докажем его.

1) $\vdash \neg\alpha \to \exists x.\neg\alpha$ (сх. акс. 12)

2) $\vdash \neg(\exists x.\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$ (правило контрапозиции для 1)

3) $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ (сх. акс. 10)

4) $\vdash \neg(\exists x.\neg\alpha) \to \alpha$ (правило силлогизма для 2 и 3)

5) $\vdash \neg(\exists x.\neg\alpha) \to (\forall x.\alpha)$ (правило добавления $\forall$ для 4)

6) $\vdash \neg(\forall x.\alpha) \to \neg\neg(\exists x.\neg\alpha)$ (правило контрапозиции для 5)

7) $\vdash \neg\neg(\exists x.\neg\alpha) \to (\exists x.\neg\alpha)$ (сх. акс. 10)

8) $\vdash \neg(\forall x.\alpha) \to (\exists x.\neg\alpha)$ (правило силлогизма для 6 и 7)

(DK3!8)

Задание 6

Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

$$\vdash (\forall x.\alpha \lor \beta) \to (\alpha \lor \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \lor \alpha) \to ((\forall x.\beta) \lor \alpha)$$

b) Покажите, что если p не входит свободно в β и q не входит свободно в α, то

$$\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \lor \beta) \to (\forall x.\alpha[p := x]) \lor (\forall y.\beta[q := y])$$

при условии, что x свободно для подстановки вместо p в α и y свободно для подстановки вместо q в β. Нужно ли наложить какие-нибудь ещё ограничения на переменные?

c) Докажите аналогичные утверждения для &.

d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

Доказательство.

a) Докажем два утверждения в КИВ

- $\vdash (\alpha \lor \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$
- $\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \lor \beta)$

Докажем $\vdash (\alpha \lor \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$

1) $\vdash (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) \to (\beta \to (\neg\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \lor \beta) \to (\neg\alpha \to \beta))$ (сх. акс. 8)

2) $\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 10 ИИВ)

3) $\vdash (\beta \to (\neg\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \lor \beta) \to (\neg\alpha \to \beta))$ (М. Р. 1 и 2)

4) $\vdash \beta \to (\neg\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 1)

5) $\vdash (\alpha \lor \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (М. Р. 3 и 4)

Докажем $\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \lor \beta)$

1) $\neg(\alpha \lor \beta) \vdash \alpha \to (\alpha \lor \beta)$ (сх. акс. 6)

2) $\neg(\alpha \lor \beta) \vdash \neg(\alpha \lor \beta) \to \neg\alpha$ (правило контрапозиции для 1)

3) $\neg(\alpha \lor \beta) \vdash \neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и 2)

4) $\neg(\alpha \lor \beta) \vdash \neg\beta$ (упражнение)

5) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ (сх. акс. 3)

6) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta \to \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$ (М. Р. 3 и 5)

7) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$ (М. Р. 4 и 6)

8) $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ (теорема о дедукции для 7)

9) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash (\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \to \neg\alpha$ (сх. акс. 4)

10) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ (М. Р. гипотезы и 9)

11) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg\beta$ (аналогично)

12) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\neg\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 9)

13) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash ((\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$ (сх. акс. 2)

14) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ (правило ослабления для 10)

15) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$ (М. Р. 13 и 14)

16) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (закон тождества)

17) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to \beta$ (М. Р. 15 и 16)

18) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash ((\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to \neg(\neg\alpha \to \beta)$ (М. Р. 12 и 17)

19) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash (\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ (правило ослабления для 11)

20) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\neg\alpha \to \beta)$ (М. Р. 18 и 19)

21) $\vdash (\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \to \neg(\neg\alpha \to \beta)$ (теорема о дедукции для 20)

22) $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \to \beta)$ (правило силлогизма для 8 и 21)

23) $\vdash (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$ (закон обратной контрапозиции для 22)

Теперь можно доказать то, что нас просили. Докажем $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta)$

1) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \beta)$ (сх. акс. 11)

2) $\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (доказано)

3) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (правило силлогизма для 1 и 2)

4) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\forall x.\neg\alpha \to \beta)$ (правило добавления $\forall$ для 3)

5) $\vdash (\forall x.\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \forall x.\beta)$ (правило «внесения» квантора $\forall$)

6) $\vdash (\neg\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta)$ (доказано)

7) $\vdash (\forall x.\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta)$ (правило силлогизма для 5 и 6)

8) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta)$ (правило силлогизма для 4 и 7)

Докажем $\vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$

1) $\vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to (\beta \vee \alpha)$ (сх. акс. 11)

2) $\vdash (\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$ (коммутативность $\vee$)

3) $\vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$ (правило силлогизма для 1 и 2)

4) $\vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to (\forall x.\alpha \vee \beta)$ (правило добавления $\forall$ для 3)

5) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta)$ (доказано)

6) $\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$ (коммутативность $\vee$)

7) $\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$ (правило силлогизма для 5 и 6)

8) $\vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$ (правило силлогизма для 4 и 7)

b) Докажем вспомогательный факт. Пусть y свободно для подстановки вместо x в β и не входит свободно в α. Тогда $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \to \forall y.\beta[x := y])$

1) $\vdash (\forall x.\beta) \to \beta[x := y]$ (сх. акс. 11)

2) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \to ((\forall x.\beta) \to \beta[x := y])) \to (\alpha \to \beta[x := y])$ (сх. акс. 2)

3) $\vdash \alpha \to ((\forall x.\beta) \to \beta[x := y])$ (правило ослабления для 1)

4) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \to \beta[x := y])$ (правило удаления $\to$ для 2 и 3)

5) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\forall y.\alpha \to \beta[x := y])$ (правило добавления $\forall$ для 4)

6) $\vdash (\forall y.\alpha \to \beta[x := y]) \to (\alpha \to \forall y.\beta[x := y])$ (правило «внесения» квантора $\forall$ для 5)

7) $\vdash (\alpha \to \forall x.\beta) \to (\alpha \to \forall y.\beta[x \coloneqq y])$ (правило силлогизма для 5 и 6)

Наложим дополнительные ограничения на x и y. А именно запретим им входить свободно в $\alpha \vee \beta$.

1) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\forall q.\alpha \vee \beta)$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash (\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \beta)$ (сх. акс. 11)
3) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \beta)$ (правило силлогизма для 1 и 2)
4) $\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (сведение $\vee$ к $\to$)
5) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$ (правило силлогизма для 3 и 4)
6) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\forall q.\neg\alpha \to \beta)$ (правило добавления $\forall$ для 5)
7) $\vdash (\forall q.\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \forall q.\beta)$ (правило «внесения» квантора $\forall$ для $\to$)
8) $\vdash (\neg\alpha \to \forall q.\beta) \to (\neg\alpha \to \forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (доказано)
9) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (правило силлогизма для 6, 7 и 8)
10) $\vdash (\neg\alpha \to \forall y.\beta[q \coloneqq y]) \to (\alpha \vee \forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (сведение $\to$ к $\vee$)
11) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (правило силлогизма для 9 и 10)
12) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to ((\forall y.\beta[q \coloneqq y]) \vee \alpha)$ (коммутативность $\vee$ + правило силлогизма)
13) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to ((\forall y.\beta[q \coloneqq y]) \vee (\forall x.\alpha[p \coloneqq x]))$ (аналогично)
14) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to ((\forall x.\alpha[p \coloneqq x]) \vee (\forall y.\beta[q \coloneqq y]))$ (коммутативность $\vee$ + правило силлогизма)

c) Сформулируем аналогичные утверждения для & (ограничения на переменные ровно такие же)

- $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \forall x.\beta)$
- $\vdash (\forall x.\beta \,\&\, \alpha) \to ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha)$
- $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\alpha[p \coloneqq x]) \,\&\, (\forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (x и y не входят свободно в $\alpha \,\&\, \beta$)

Докажем $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \forall x.\beta)$ ($\vdash (\forall x.\beta \,\&\, \alpha) \to ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha)$ доказывается аналогично)

1) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash (\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha$ (сх. акс. 4)
3) $\vdash ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta)) \to ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta \to \alpha)) \to ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha)$ (сх. акс. 2)
4) $\vdash ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta \to \alpha)) \to ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha)$ (M. P. 1 и 3)
5) $\vdash (\alpha \,\&\, \beta \to \alpha) \to ((\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta \to \alpha))$ (сх. акс. 1)
6) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta \to \alpha)$ (M. P. 2 и 5)
7) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha$ (M. P. 4 и 6)
8) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to \beta$ (упражнение)
9) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\beta)$ (правило добавления $\forall$ для 8)
10) $\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \forall x.\beta)$ (см. 5c)

Теперь приступим к доказательству $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\alpha[p \coloneqq x]) \,\&\, (\forall y.\beta[q \coloneqq y])$

1) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall q.\alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash (\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta)$ (сх. акс. 11)
3) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \beta)$ (правило транзитивности для 1 и 2)
4) $\vdash (\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha$ (сх. акс. 4)
5) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha$ (правило транзитивности для 3 и 4)
6) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall p.\alpha)$ (правило добавления $\forall$ для 5)
7) $\vdash (\forall p.\alpha) \to \alpha[p \coloneqq x]$ (сх. акс. 11)
8) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to \alpha[p \coloneqq x]$ (правило транзитивности для 6 и 7)
9) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\alpha[p \coloneqq x])$ (правило добавления $\forall$ для 8)
10) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (упражнение)
11) $\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\alpha[p \coloneqq x]) \,\&\, (\forall y.\beta[q \coloneqq y])$ (правило конъюнкции для 9 и 10)

d) Правила «внесения» квантора всеобщности для $\to$ (x не входит свободно в α)

$$\vdash (\forall x.\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x.\beta)$$

$$\vdash (\forall x.\beta \to \alpha) \to ((\exists x.\beta) \to \alpha)$$

Докажем

1) $\vdash (\forall x.\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 11)
2) $(\forall x.\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \beta$ (теорема о дедукции для 1)
3) $(\forall x.\alpha \to \beta) \vdash \alpha \to \forall x.\beta$ (правило добавления $\forall$ для 2)
4) $\vdash (\forall x.\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x.\beta)$ (теорема о дедукции для 3)

1) $\vdash (\forall x.\beta \to \alpha) \to (\beta \to \alpha)$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash (\forall x.\beta \to \alpha) \vdash \beta \to \alpha$ (теорема о дедукции для 1)
3) $(\forall x.\beta \to \alpha) \vdash (\exists x.\beta) \to \alpha$ (правило добавления квантора $\exists$ для 2)
4) $\vdash (\forall x.\beta \to \alpha) \to ((\exists x.\beta) \to \alpha)$ (теорема о дедукции для 3)

Правило «внесения» квантора всеобщности для $\neg$

$$(\forall x.\neg\alpha) \to (\neg\forall x.\alpha)$$

Докажем

1) $\vdash (\forall x.\neg\alpha) \to \neg\alpha$ (сх. акс. 11)
2) $\vdash (\forall x.\alpha) \to \alpha$ (сх. акс. 11)
3) $\vdash \neg\alpha \to \neg(\forall x.\alpha)$ (правило контрапозиции для 2)
4) $\vdash (\forall x.\neg\alpha) \to \neg(\forall x.\alpha)$ (правило силлогизма для 1 и 3)

Также имеет место следующее правило

$$\vdash (\forall x.\neg\alpha) \to \neg(\exists x.\alpha)$$

Оно было успешно доказано в 2f.

(DK3!8)

Задание 7

Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \to \beta$, тогда:

a) Докажите:

$$\vdash \psi \lor \alpha \to \psi \lor \beta \quad \vdash \psi \& \alpha \to \psi \& \beta \quad \vdash (\psi \to \alpha) \to (\psi \to \beta) \quad \vdash (\beta \to \psi) \to (\alpha \to \psi)$$

b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \to (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \to (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

Решение.

a) работа руками, рассказали на праке (Илона поленилась затехать =( )

b) Докажем следующие свойства

$$\vdash \neg(\psi \lor \beta) \to \neg(\psi \lor \alpha) \quad \vdash \neg(\psi \& \beta) \to \neg(\psi \& \alpha) \quad \vdash \neg(\psi \to \beta) \to \neg(\psi \to \alpha) \quad \vdash \neg(\alpha \to \psi) \to \neg(\beta \to \psi)$$

1) $\vdash \neg(\psi \lor \beta) \to \neg(\psi \lor \alpha)$
   1) $\vdash \psi \lor \alpha \to \psi \lor \beta$ (7a)
   2) $\vdash \neg(\psi \lor \beta) \to \neg(\psi \lor \alpha)$ (правило контрапозиции для 1)
2) $\vdash \neg(\psi \& \beta) \to \neg(\psi \& \alpha)$

1) $\vdash \psi \,\&\, \alpha \to \psi \,\&\, \beta$ (7a)
2) $\vdash \neg(\psi \,\&\, \beta) \to \neg(\psi \,\&\, \alpha)$ (правило контрапозиции для 1)

3) $\vdash \neg(\psi \to \beta) \to \neg(\psi \to \alpha)$
1) $\vdash (\psi \to \alpha) \to (\psi \to \beta)$ (7a)
2) $\vdash \neg(\psi \to \beta) \to \neg(\psi \to \alpha)$ (правило контрапозиции для 1)

4) $\vdash \neg(\alpha \to \psi) \to \neg(\beta \to \psi)$
1) $\vdash (\beta \to \psi) \to (\alpha \to \psi)$ (7a)
2) $\vdash \neg(\alpha \to \psi) \to \neg(\beta \to \psi)$ (правило контрапозиции для 1)

c) 1) $\alpha \to \beta \vdash (\forall x.\alpha) \to \alpha$ (сх. акс. 11)
2) $\alpha \to \beta \vdash ((\forall x.\alpha) \to \alpha) \to ((\forall x.\alpha) \to \beta)$ (7a)
3) $\alpha \to \beta \vdash (\forall x.\alpha) \to \beta$ (М. Р. 1 и 2)
4) $\alpha \to \beta \vdash (\forall x.\alpha) \to (\forall x.\beta)$ (правило добавления $\forall$ для 3)

d) 1) $\alpha \to \beta \vdash \beta \to \exists x.\beta$ (сх. акс. 12)
2) $\alpha \to \beta \vdash (\beta \to \exists x.\beta) \to (\alpha \to \exists x.\beta)$ (7a)
3) $\alpha \to \beta \vdash \alpha \to \exists x.\beta$ (М. Р. 1 и 2)
4) $\alpha \to \beta \vdash (\exists x.\alpha) \to (\exists x.\beta)$ (правило довабления $\exists$ для 3)

(DK3!8)

Секретная таска Штукена

Формулой исчисления предикатов с *поверхностными* кванторами (формулой в предварённой форме) назовём формулу, соответствующую нетерминалу ψ в грамматике

$$\psi ::= \forall x.\psi | \exists x.\psi | \sigma$$

где σ — это формула, не содержащая кванторов. Иными словами, это формула, в которой все кванторы снаружи — квантор не может быть указан внутри конъюнкции, дизъюнкции, импликации или отрицания.

Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если α — формула, то для неё найдётся такая формула β с поверхностными кванторами, что:

1. $\vdash \alpha \to \beta$
2. $\vdash \beta \to \alpha$

(Таска спизжена из исходников теха Штукена. Вполне возможно, что он ее даст в следующей домашке)

Домашняя работа №6

Задание 1

Имеется ли свобода для подстановки в следующих примерах?

1. $\forall x.P(x,y) \to Q(y,x)\ [x := y]$
2. $\forall x.P(x,y)\ [z := x]$
3. $\forall z.(\forall y.P(z)) \to P(z)\ [z := y]$
4. $(\forall y.(\forall x.P(z))) \vee P(z)\ [z := y]$
5. $(\forall y.P(a)) \vee P(b)\ [a := y]$

Решение.

1. $\forall x.P(x,y) \to Q(y,x)\ [x := y]$
   Свободных вхождений x нет, никаких замен не происходит.
2. $\forall x.P(x,y)\ [z := x]$
   Свободных вхождений z нет, никаких замен не происходит.
3. $\forall z.(\forall y.P(z)) \to P(z)\ [z := y]$
   Свободных вхождений z нет, никаких замен не происходит.
4. $(\forall y.(\forall x.P(z))) \vee P(z)\ [z := y]$
   $(\forall y.(\forall x.P(y))) \vee P(y)$ – y перестала быть свободной в θ, значит свободы для подстановки нет.
5. $(\forall y.P(a)) \vee P(b)\ [a := y]$
   $(\forall y.P(y)) \vee P(b)$ – y перестала быть свободной в θ, значит свободы для подстановки нет.
   (stepavly & supermagzzz)

Задание 2

Пусть выполняется замена x на θ в формуле α.

a) Докажите, что если свобода для подстановки есть, то $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\alpha[x := \theta]]\!]$.

b) Постройте пример, когда $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} \neq [\![\alpha[x := \theta]]\!]$.

Решение.

a) Докажем при помощи индукции по структуре высказывания α.

- *База.* α — предикат. Тогда из оценки предиката очевидно $[\![P(x, x_1, \dots x_n)]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![P(\theta, x_1, \dots, x_n)]\!]$
- *Индукционный переход.* Пусть α составлено из одного или двух выражений, для которых уже доказано утверждение.
  1) $\alpha \equiv \beta \to \gamma$, $\alpha \equiv \beta \,\&\, \gamma$, $\alpha \equiv \beta \vee \gamma$, $\alpha \equiv \neg\beta$. Все случаи рассматриваются одинаково. Рассмотрим $\alpha \equiv \beta \,\&\, \gamma$.

  $$[\![\beta \,\&\, \gamma]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\beta]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} \,\&\, [\![\gamma]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\beta[x := \theta]]\!] \,\&\, [\![\gamma[x := \theta]]\!] = [\![\beta[x := \theta] \,\&\, \gamma[x := \theta]]\!] =$$
  $$= [\![(\beta \,\&\, \gamma)[x := \theta]]\!]$$

  2) $\alpha \equiv \forall y.\beta$, $\alpha \equiv \exists y.\beta$. Оба случая рассматриваются одинаково. Рассмотрим $\alpha \equiv \forall y.\beta$. Заметим если x не входит свободно в $\forall y.\beta$, то утверждение $[\![\forall y.\beta]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\beta[x := \theta]]\!]$ очевидно. Пусть x входит свободно в $\forall y.\beta$. Заметим, что и y не входит свободно в θ. Значит любая оценка y не будет влиять на вычисление оценки $[\![\theta]\!]$. Получается, что для любого $v_y \in D$ справедливо $[\![\beta]\!]^{x:=[\![\theta]\!],y:=v_y} = [\![\beta[x := \theta]]\!]^{y:=v_y}$ Из этого можно сделать вывод, что $[\![\forall x.\beta]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall x.\beta[x := \theta]]\!]$.

(DK3!8)

b) Рассмотрим $\alpha \equiv \forall y.P_1(x) \vee P_2(y)$. Пусть предметное множество $D \coloneqq \{1, 2\}$. Оценим предикаты следующим образом

-
$$[\![P_1(x)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & [\![x]\!] = 1 \\ \text{Л}, & [\![x]\!] = 2 \end{cases}$$

-
$$[\![P_2(x)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & [\![x]\!] = 2 \\ \text{Л}, & [\![x]\!] = 1 \end{cases}$$

Пусть $[\![y]\!] = 2$. Тогда $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![y]\!]} = \text{Л}$ и $[\![\alpha[x := y]]\!] = \text{И}$.
(DK3!8)

Задание 3

Будем говорить, что формула α *следует* из контекста Γ, если при любой оценке, такой, что при всех $\gamma \in \Gamma$ выполнено $[\![\gamma]\!] = \text{И}$, также выполнено и $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

Возможно показать, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$, при условии, что в выводе отсутствуют применения правил для кванторов по свободным переменным из контекста. Доказательство аналогично таковому для исчисления высказываний, однако, требуется разобрать два новых случая:

(a) Покажите, что формулы, полученные из 11 и 12 схем аксиом, всегда общезначимы.

(b) Покажите, что формулы, полученные применением правил для кванторов из общезначимых утверждений, также окажутся общезначимыми.

Доказательство.

(a) 1) Докажем $\models (\forall x.\alpha) \to \alpha[x := \theta]$. Докажем от противного. Пусть $[\![(\forall x.\alpha) \to \alpha[x := \theta]]\!] = \text{Л}$. Тогда $[\![\forall x.\alpha]\!] = \text{И}$ и $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = \text{Л}$. Так как θ свободно для подстановки, то $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]}$. Таким образом, $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{Л}$. Из оценки квантора $\forall$ следует, что $[\![\forall x.\alpha]\!] = \text{Л}$. Получили противоречие.

2) Докажем $\models \alpha[x := \theta] \to \exists x.\alpha$. Докажем аналогично от противного. Пусть $[\![\alpha[x := \theta] \to \exists x.\alpha]\!] = \text{Л}$. Тогда $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = \text{И}$ и $[\![\exists x.\alpha]\!] = \text{Л}$. Аналогично $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$. Из оценки квантора $\exists$ следует, что $[\![\exists x.\alpha]\!] = \text{И}$. Получили противоречие.

(b) Докажем для правила введения $\forall$ (для $\exists$ доказывается аналогично). Пусть высказывание $\alpha \to \beta$ общезначимо и переменная x не входит свободно в α. Покажем $\models \alpha \to \forall x.\beta$. Докажем от противного. Пусть $[\![\alpha \to \forall x.\beta]\!] = \text{Л}$. Тогда $[\![\alpha]\!] = \text{И}$ и $[\![\forall x.\beta]\!] = \text{Л}$. Из второго можно сделать вывод, что найдется $v_x \in D$ такой, что $[\![\beta]\!]^{x:=v_x} = \text{Л}$. Так как x не входит свободно в α, что $[\![\alpha]\!]^{x:=v_x} = \text{И}$. Делаем вывод, что $[\![\alpha \to \beta]\!]^{x:=v_x} = \text{Л}$. Получили противоречие с общезначимостью $\alpha \to \beta$.

(DK3!8)

Домашняя работа №7

Задание 1

Покажите, что связанную переменную под квантором можно переименовывать: $(\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x := y])$ и $(\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x := y])$, если y свободен для подстановки вместо x в φ.

Доказательство. Наложим дополнительные ограничения на формулу φ. А именно запретим y свободно входить в φ. Приведем 2 контрпримера для того, чтобы показать зачем это дополнительное ограничение нужно.

- $(\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x := y])$

  Пусть $\varphi \equiv P_1(x) \& P_2(y)$. Рассмотрим предметное множество $D \coloneqq \{1, 2\}$. Определим функции оценки следующим образом:

  1. $[\![y]\!] = 1$
  2. $[\![P_1(x)]\!] = \text{И}$
  3. $$[\![P_2(y)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & [\![y]\!] = 1 \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

  При такой оценке формула $[\![(\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x := y])]\!] = \text{Л}$.

- $(\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x := y])$

  Пусть $\varphi \equiv P_1(x) \& P_2(y)$. Рассмотрим предметное множество $D \coloneqq \{1, 2\}$. Определим функции оценки следующим образом:

  1. $[\![y]\!] = 1$
  2. $$[\![P_1(x)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & [\![x]\!] = 2 \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$
  3. $$[\![P_2(y)]\!] = \begin{cases} \text{И}, & [\![y]\!] = 1 \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

  При такой оценке формула $[\![(\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x := y])]\!] = \text{Л}$.

Приступим к доказательству.

a) $\vdash (\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x \coloneqq y])$

   1) $\vdash (\forall x.\varphi) \to \varphi[x \coloneqq y]$ (сх. акс. 11)
   2) $\vdash (\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x \coloneqq y])$ (правило добавления $\forall$ для 1)

b) $\vdash (\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x \coloneqq y])$
   Так как y не входит свободно в φ, то $\varphi[x \coloneqq y][y \coloneqq x] \equiv \varphi$.

   1) $\vdash \varphi[x \coloneqq y][y \coloneqq x] \to \exists y.(\varphi[x \coloneqq y])$ (сх. акс. 12)
   2) $\vdash (\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x \coloneqq y])$ (правило добавления $\exists$ для 1)

(DK3!8)

Задание 2

Для следующих формул найдите эквивалентные им формулы с поверхностными кванторами и наметьте план доказательства эквивалентности (укажите, какие и в каком порядке применять леммы из предыдущего задания).

(a) $((\forall x.P(x)) \to P(x)) \to P(x)$

(b) $((\forall x.P(x)) \to (\forall x.Q(x))) \to (\forall x.R(x))$

(c) $(\neg\forall x.P(x)) \vee (\exists y.\forall x.Q(x, y))$

Доказательство. Напоминаю, что формулой исчисления предикатов с *поверхностными* кванторами (формулой в предварённой форме) называется формула, соответствующая нетерминалу ψ в грамматике

$$\psi ::= \forall x.\psi | \exists x.\psi | \sigma$$

где σ — это формула, не содержащая кванторов.

(a) $((\forall x.P(x)) \to P(x)) \to P(x)$

$$((\forall x.P(x)) \to P(x)) \to P(x) \Leftrightarrow (\exists x.P(x) \to P(y)) \to P(x) \Leftrightarrow \forall x.(P(x) \to P(y)) \to P(z)$$

(b) $((\forall x.P(x)) \to (\forall x.Q(x))) \to (\forall x.R(x))$

$$((\forall x.P(x)) \to (\forall x.Q(x))) \to (\forall x.R(x)) \Leftrightarrow (\forall p.\exists q.P(p) \to Q(q)) \to (\forall x.R(x)) \Leftrightarrow$$

$$\forall x.(\forall p.\exists q.P(p) \to Q(q)) \to R(x) \Leftrightarrow \forall x.\exists p.\forall q.(P(p) \to Q(q)) \to R(x)$$

(c) $(\neg\forall x.P(x)) \vee (\exists y.\forall x.Q(x, y))$

$$(\neg\forall x.P(x)) \vee (\exists y.\forall x.Q(x, y)) \Leftrightarrow (\exists x.\neg P(x)) \vee (\exists y.\forall x.Q(x, y)) \Leftrightarrow \exists p.\exists q.\neg P(p) \vee \forall x.Q(x, q) \Leftrightarrow$$

$$\exists p.\exists q.\forall x.\neg P(p) \vee Q(x, q)$$

(DK3!8)

Задание 3

Рассмотрим полное непротиворечивое множество формул исчисления предикатов Γ. Рассмотрим оценку формул, определённую на лекции (D — множество всех строк, составленных из функциональных символов, $[\![P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] =$ И тогда и только тогда, когда $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Gamma$ и т.п.). Пусть для любой формулы α с не более чем n связками выполнено, что $[\![\alpha]\!] =$ И тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$. Тогда покажите:

(a) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \,\&\, \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] =$ И

(b) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \vee \beta]\!] =$ И

(c) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \to \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \to \beta]\!] =$ И

(d) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\neg\alpha \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\neg\alpha]\!] =$ И

Доказательство.

(a) 1) Пусть $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] =$ И. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ И и $[\![\beta]\!] =$ И. По предположению $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Gamma$. Докажем $\alpha \,\&\, \beta \in \Gamma$.

   1) $\Gamma \vdash \alpha$ (гипотеза)
   2) $\Gamma \vdash \beta$ (гипотеза)
   3) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \,\&\, \beta$ (сх. акс. 3)
   4) $\Gamma \vdash \beta \to \alpha \,\&\, \beta$ (М. Р. 1 и 3)
   5) $\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta$ (М. Р. 2 и 3)

2) Пусть $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] =$ Л. Покажем, что $\alpha \,\&\, \beta \notin \Gamma$. Для этого достаточно показать, что $\neg(\alpha \,\&\, \beta) \in \Gamma$. Так как $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] =$ Л, то либо $[\![\alpha]\!] =$ Л, либо $[\![\beta]\!] =$ Л. Не умаляя общности пусть $[\![\alpha]\!] =$ Л. Тогда $\alpha \notin \Gamma$. Значит $\neg\alpha \in \Gamma$.

   1) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ (гипотеза)
   2) $\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \to \neg\alpha$ (правило ослабления для 1)

3) $\Gamma \vdash \alpha \mathbin{\&} \beta \to \alpha$ (сх. акс. 4)
4) $\Gamma \vdash (\alpha \mathbin{\&} \beta \to \alpha) \to (\alpha \mathbin{\&} \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \mathbin{\&} \beta)$ (сх. акс. 9)
5) $\Gamma \vdash (\alpha \mathbin{\&} \beta \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \mathbin{\&} \beta)$ (М. Р. 3 и 4)
6) $\Gamma \vdash \neg(\alpha \mathbin{\&} \beta)$ (М. Р. 2 и 5)

(b) 1) Пусть $[\![\alpha \vee \beta]\!] = $ И. Тогда либо $[\![\alpha]\!] = $ И, либо $[\![\beta]\!] = $ И. Не умаляя общности пусть $[\![\alpha]\!] = $ И. Тогда $\alpha \in \Gamma$ по предположению. Докажем, что $\alpha \vee \beta \in \Gamma$.

1) $\Gamma \vdash \alpha$ (гипотеза)
2) $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$ (сх. акс. 6)
3) $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ (М. Р. 1 и 2)

2) Пусть $[\![\alpha \vee \beta]\!] = $ Л. Тогда $[\![\alpha]\!] = $ Л и $[\![\beta]\!] = $ Л. Значит, $\neg\alpha \in \Gamma$ и $\neg\beta \in \Gamma$. Покажем, что $\alpha \vee \beta \notin \Gamma$. Для этого достаточно показать, что $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$.

1) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ (гипотеза)
2) $\Gamma \vdash \neg\beta$ (гипотеза)
3) $\Gamma \vdash \neg\alpha \to \neg\beta \to \neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta$ (сх. акс. 3)
4) $\Gamma \vdash \neg\beta \to \neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta$ (М. Р. 1 и 3)
5) $\Gamma \vdash \neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta$ (М. Р. 2 и 4)
6) $\Gamma \vdash (\alpha \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)) \to (\beta \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta))$ (сх. акс. 8)
7) $\Gamma \vdash \neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta \to \neg\alpha$ (сх. акс. 4)
8) $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ (правило контрапозиции для 7)
9) $\Gamma \vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ (правило добавления двойного отрицания)
10) $\Gamma \vdash \alpha \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ (правило силлогизма для 8 и 9)
11) $\Gamma \vdash \beta \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ (аналогично)
12) $\Gamma \vdash (\beta \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta))$ (М. Р. 6 и 10)
13) $\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ (М. Р. 11 и 12)
14) $\Gamma \vdash \neg\neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$ (правило контрапозиции для 13)
15) $\Gamma \vdash (\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta) \to \neg\neg(\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ (правило добавления двойного отрицания)
16) $\Gamma \vdash (\neg\alpha \mathbin{\&} \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$ (правило силлогизма для 14 и 15)
17) $\Gamma \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ (М. Р. 5 и 16)

(c) 1) Пусть $[\![\alpha \to \beta]\!] = $ И. Тогда либо $[\![\beta]\!] = $ И, либо $[\![\alpha]\!] = $ Л.

- $[\![\beta]\!] = $ И.

  По предположению $\beta \in \Gamma$. Докажем $\alpha \to \beta \in \Gamma$.
  1) $\Gamma \vdash \beta$ (гипотеза)
  2) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ (правило ослабления для 1)

- $[\![\alpha]\!] = $ Л.

  По предположению $\neg\alpha \in \Gamma$.
  1) $\Gamma \vdash \neg\alpha$ (гипотеза)
  2) $\Gamma \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ (правило ослабления для 1)
  3) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ (правило обратной контрапозиции для 2)

2) Пусть $[\![\alpha \to \beta]\!] = $ Л. Тогда $[\![\alpha]\!] = $ И и $[\![\beta]\!] = $ Л. Значит $\alpha \in \Gamma$ и $\neg\beta \in \Gamma$. Покажем, что $\neg(\alpha \to \beta) \in \Gamma$.

1) $\Gamma \vdash \alpha$ (гипотеза)
2) $\Gamma \vdash \neg\beta$ (гипотеза)
3) $\Gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \to \beta)$ (сх. акс. 9)
4) $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha$ (правило ослабления для 1)
5) $\Gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \to \beta)$ (М. Р. 3 и 4)
6) $\Gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ (сх. акс. 2)
7) $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ (правило ослабления для 2)
8) $\Gamma \vdash ((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ (М. Р. 6 и 7)
9) $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (правило контрапозиции)
10) $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ (М. Р. 8 и 9)
11) $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$ (М. Р. 5 и 10)

(d) 1) Пусть $[\![\neg\alpha]\!] =$ И. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ Л. По предположению $\alpha \notin \Gamma$. Из полноты Γ следует, что $\neg\alpha \in \Gamma$.

2) Пусть $[\![\neg\alpha]\!] =$ Л. Тогда $[\![\alpha]\!] =$ И. По предположению $\alpha \in \Gamma$. Так как Γ полно и непротиворечиво, то $\neg\alpha \notin \Gamma$.

(DK3!8)

Домашняя работа №8

Некоторые правила

Для дальнейшего удобства выведем несколько правил для теории первого порядка для теории групп.

- *Правило подстановки.* Пусть $\vdash x \cdot y = z$ и $\vdash x = a$. Тогда $\vdash a \cdot y = z$.

  Доказательство.

  1) $\vdash x = a \to x \cdot y = a \cdot y$ (аксиома правого домножения)
  2) $\vdash x \cdot y = a \cdot y$ (М. Р. 1 и дано)
  3) $\vdash x \cdot y = a \cdot y \to x \cdot y = z \to x \cdot y = a \cdot y \,\&\, x \cdot y = z$ (сх. акс. 3)
  4) $\vdash x \cdot y = z \to x \cdot y = a \cdot y \,\&\, x \cdot y = z$ (М. Р. 2 и 3)
  5) $\vdash x \cdot y = a \cdot y \,\&\, x \cdot y = z$ (М. Р. дано и 4)
  6) $\vdash x \cdot y = a \cdot y \,\&\, x \cdot y = z \to a \cdot y = z$ (аксиома транзитивности)
  7) $\vdash a \cdot y = z$ (М. Р. 5 и 6)

  Аналогично можно доказать и $x \cdot y = z, y = a \vdash x \cdot a = z$.

- *Правило транзитивности.* Пусть $\vdash x = y$ и $\vdash x = z$. Тогда $\vdash y = z$.

  Доказательство.

  1) $\vdash x = y \to x = z \to x = y \,\&\, x = z$ (сх. акс. 3)
  2) $\vdash x = z \to x = y \,\&\, x = z$ (М. Р. дано и 1)
  3) $\vdash x = y \,\&\, x = z$ (М. Р. дано и 2)
  4) $\vdash x = y \,\&\, x = z \to y = z$ (аксиома транзитивности)
  5) $\vdash y = z$ (М. Р. 3 и 4)

Задание 1

a) $\vdash 1 = 1$

1) $1 \cdot 1 = 1$ *сх. акс. нейтр. эл.*
2) $1 \cdot 1 = 1 \to (1 \cdot 1 = 1 \to (1 \cdot 1 = 1) \,\&\, (1 \cdot 1 = 1))$ *сх. акс. 3*
3) $1 \cdot 1 = 1 \to (1 \cdot 1 = 1) \,\&\, (1 \cdot 1 = 1)$ *MP 1, 2*
4) $(1 \cdot 1 = 1) \,\&\, (1 \cdot 1 = 1)$ *MP 1, 3*
5) $(1 \cdot 1 = 1) \,\&\, (1 \cdot 1 = 1) \to 1 = 1$ *транзитивность*
6) $1 = 1$ *MP 4, 5*

(Alya)

b) $\vdash \forall a.a = a$

1) $\vdash 1 \cdot a = a$ (аксиома нейтрального элемента)
2) $\vdash 1 \cdot a = a \to 1 \cdot a = a \to 1 \cdot a = a \,\&\, 1 \cdot a = a$ (сх. акс. 3)
3) $\vdash 1 \cdot a = a \to 1 \cdot a = a \,\&\, 1 \cdot a = a$ (М. Р. 1 и 2)
4) $\vdash 1 \cdot a = a \,\&\, 1 \cdot a = a$ (М. Р. 1 и 3)
5) $\vdash 1 \cdot a = a \,\&\, 1 \cdot a = a \to a = a$ (аксиома транзитивности)
6) $\vdash a = a$ (М. Р. 4 и 5)
7) $\vdash (b \to b) \to a = a$ (правило ослабления для 6)
8) $\vdash (b \to b) \to \forall a.a = a$ (правило добавления $\forall$ для 7)
9) $\vdash b \to b$ (правило тождества)
10) $\vdash \forall a.a = a$ (М. Р. 8 и 9)

(DK3!8)

c) $\vdash \forall a.\forall b.a = b \to b = a$

1) $a = b \vdash a = a$ (правило тождества для теории групп)
2) $a = b \vdash a = b \to a = a \to a = b \,\&\, a = a$ (сх. акс. 3)
3) $a = b \vdash a = a \to a = b \,\&\, a = a$ (М. Р. гипотезы и 2)
4) $a = b \vdash a = b \,\&\, a = a$ (М. Р. 1 и 3)
5) $a = b \vdash a = b \,\&\, a = a \to b = a$ (аксиома транзитивности)
6) $a = b \vdash b = a$ (М. Р. 4 и 5)
7) $\vdash a = b \to b = a$ (теорема о дедукции для 6)
8) $\vdash \forall b.a = b \to b = a$ (правило добавления $\forall$ для 7)
9) $\vdash \forall a.\forall b.a = b \to b = a$ (правило добавления $\forall$ для 8)

(DK3!8)

d) $\vdash 1^{-1} = 1$

1) $1^{-1} \cdot 1 = 1$ *сх. акс. обратн. эл.*
2) $1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}$ *сх. акс. нейтр. эл.*
3) $1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1} \to (1^{-1} \cdot 1 = 1 \to (1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}) \,\&\, (1^{-1} \cdot 1 = 1))$ *сх. акс. 3*
4) $1^{-1} \cdot 1 = 1 \to (1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}) \,\&\, (1^{-1} \cdot 1 = 1)$ *MP 2, 3*
5) $(1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}) \,\&\, (1^{-1} \cdot 1 = 1)$ *MP 1, 4*
6) $(1^{-1} \cdot 1 = 1^{-1}) \,\&\, (1^{-1} \cdot 1 = 1) \to 1^{-1} = 1$ *транзитивность*
7) $1^{-1} = 1$ *MP 5, 6*

(Alya)

e) $\vdash \forall a.(a^{-1})^{-1} = a$

1) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1$ (аксиома обратного элемента)
2) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1 \to ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a = 1 \cdot a$ (аксиома правого домножения)
3) $\vdash ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a = 1 \cdot a$ (М. Р. 1 и 2)
4) $\vdash ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a = (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a)$ (аксиома ассоциативности)
5) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) = 1 \cdot a$ (правило транзитивности для 3 и 4)
6) $\vdash a^{-1} \cdot a = 1$ (аксиома обратного элемента)
7) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) = (a^{-1})^{-1} \cdot 1$ (левое домножение 6 + М. Р.)
8) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot 1 = 1 \cdot a$ (Транзитивность 5 и 7 + симметричность)
9) $\vdash (a^{-1})^{-1} \cdot 1 = (a^{-1})^{-1}$ (аксиома нейтрального элемента)
10) $\vdash (a^{-1})^{-1} = 1 \cdot a$ (правило транзитивности для 8 и 9)
11) $\vdash 1 \cdot a = (a^{-1})^{-1}$ (правило симметричности $=$ для 10)
12) $\vdash 1 \cdot a = a$ (аксиома нейтрального элемента)
13) $\vdash a = (a^{-1})^{-1}$ (правило транзитивности для 11 и 12)
14) $\vdash (a^{-1})^{-1} = a$ (правило симметричности $=$ для 13)
15) $\vdash \forall a.(a^{-1})^{-1} = a$ (правило добавления $\forall$ для 14)

(DK3!8)

f) $\vdash \forall a.\forall b.a \cdot b = 1 \to b = a^{-1}$

1) $a \cdot b = 1 \vdash a \cdot b = 1 \to a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 1$ (аксиома домножения слева)
2) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 1$ (М. Р. гипотезы и 1)
3) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} \cdot (a \cdot b) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b$ (аксиома ассоциативности)
4) $a \cdot b = 1 \vdash (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 1$ (правило транзитивности для 2 и 3)
5) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} \cdot a = 1$ (аксиома обратного элемента)
6) $a \cdot b = 1 \vdash 1 \cdot b = a^{-1} \cdot 1$ (правило подстановки для 4 и 5)

7) $a \cdot b = 1 \vdash 1 \cdot b = b$ (аксиома нейтрального элемента)
8) $a \cdot b = 1 \vdash b = a^{-1} \cdot 1$ (правило транзитивности для 6 и 7)
9) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} \cdot 1 = b$ (правило симметричности $=$ для 8)
10) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} \cdot 1 = a^{-1}$ (аксиома нейтрального элемента)
11) $a \cdot b = 1 \vdash a^{-1} = b$ (правило транзитивности для 9 и 10)
12) $a \cdot b = 1 \vdash b = a^{-1}$ (правило симметричности $=$ для 11)
13) $\vdash a \cdot b = 1 \to b = a^{-1}$ (теорема о дедукции для 12)
14) $\vdash \forall b. a \cdot b = 1 \to b = a^{-1}$ (правило добавления $\forall$ для 13)
15) $\vdash \forall a. \forall b. a \cdot b = 1 \to b = a^{-1}$ (правило добавления $\forall$ для 14)

(DK3!8)

g) $\vdash \forall a. \forall b. \forall c. c \cdot a = c \cdot b \to a = b$

1) $c \cdot a = c \cdot b \vdash c \cdot a = c \cdot b \to c^{-1} \cdot (c \cdot a) = c^{-1} \cdot (c \cdot b)$ (аксиома домножения слева)
2) $c \cdot a = c \cdot b \vdash c^{-1} \cdot (c \cdot a) = c^{-1} \cdot (c \cdot b)$ (M. P. гипотезы и 1)
3) $c \cdot a = c \cdot b \vdash c^{-1} \cdot (c \cdot a) = (c^{-1} \cdot c) \cdot a$ (аксиома ассоциативности)
4) $c \cdot a = c \cdot b \vdash (c^{-1} \cdot c) \cdot a = c^{-1} \cdot (c \cdot b)$ (правило транзитивности для 2 и 3)
5) $c \cdot a = c \cdot b \vdash c^{-1} \cdot c = 1$ (аксиома обратного элемента)
6) $c \cdot a = c \cdot b \vdash 1 \cdot a = c^{-1} \cdot (c \cdot b)$ (правило подстановки для 4 и 5)
7) $c \cdot a = c \cdot b \vdash 1 \cdot a = a$ (аксиома нейтрального элемента)
8) $c \cdot a = c \cdot b \vdash a = c^{-1} \cdot (c \cdot b)$ (правило транзитивности для 6 и 7)
9) $c \cdot a = c \cdot b \vdash c^{-1} \cdot (c \cdot b) = a$ (правило симметричности $=$ для 8)
10) $c \cdot a = c \cdot b \vdash b = a$ (аналогично)
11) $c \cdot a = c \cdot b \vdash a = b$ (симметричность $=$ для 10)
12) $\vdash c \cdot a = c \cdot b \to a = b$ (теорема о дедукции для 11)
13) $\vdash \forall c. c \cdot a = c \cdot b \to a = b$ (правило добавления $\forall$ для 12)
14) $\vdash \forall b. \forall c. c \cdot a = c \cdot b \to a = b$ (правило добавления $\forall$ для 13)
15) $\vdash \forall a. \forall b. \forall c. c \cdot a = c \cdot b \to a = b$ (правило добавления $\forall$ для 14)

(DK3!8)

h) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash p = q$

1) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash a \cdot p = b$ (гипотеза)
2) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash b = a \cdot p$ (симметричность $=$ для 1)
3) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash b = a \cdot q$ (аналогично)
4) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash a \cdot p = a \cdot q$ (правило транзитивности для 2 и 3)
5) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash a \cdot p = a \cdot q \to p = q$ (доказано)
6) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash p = q$ (M. P. 4 и 5)

(DK3!8)

Задание 4

Определите теорию первого порядка, формализующую решётки. Докажите в ней закон поглощения: $\forall a. \forall b. a + a \cdot b = a$.

Решение. Добавим к исчислению предикатов два двуместных функциональных символа $(\cdot)$ и $(+)$, два двуместных предикатных символа $(\preceq)$ и $(=)$ и следующие нелогические схемы аксиом:

1) $x \preceq x$ (схема аксиомы рефлексивности)

2) $x \preceq y \,\&\, y \preceq x \to x = y$ (схема аксиомы антисимметричности)

3) $x \preceq y \,\&\, y \preceq z \to x = z$ (схема аксиомы транзитивности)

4) $x \preceq x + y$

5) $y \preceq x + y$

6) $x \preceq z \,\&\, y \preceq z \rightarrow x + y \preceq z$

7) $x \cdot y \preceq x$

8) $x \cdot y \preceq y$

9) $z \preceq x \,\&\, z \preceq y \rightarrow z \preceq x \cdot y$

Докажем закон поглощения

1) $\vdash a \preceq a$ (схема аксиомы рефлексивности)

2) $\vdash a \cdot b \preceq a$ (схема аксиомы 7 для решеток)

3) $\vdash a \preceq a \rightarrow a \cdot b \preceq a \rightarrow a \preceq a \,\&\, a \cdot b \preceq a$ (сх. акс. 3)

4) $\vdash a \cdot b \preceq a \rightarrow a \preceq a \,\&\, a \cdot b \preceq a$ (М. Р. 1 и 3)

5) $\vdash a \preceq a \,\&\, a \cdot b \preceq a$ (М. Р. 2 и 4)

6) $\vdash a \preceq a \,\&\, a \cdot b \preceq a \rightarrow a + a \cdot b \preceq a$ (сх. акс. 6 для решеток)

7) $\vdash a + a \cdot b \preceq a$ (М. Р. 5 и 6)

8) $\vdash a \preceq a + a \cdot b$ (сх. акс. 4 для решеток)

9) $\vdash a + a \cdot b \preceq a \rightarrow a \preceq a + a \cdot b \rightarrow a + a \cdot b \preceq a \,\&\, a \preceq a + a \cdot b$ (сх. акс. 3)

10) $\vdash a \preceq a + a \cdot b \rightarrow a + a \cdot b \preceq a \,\&\, a \preceq a + a \cdot b$ (М. Р. 7 и 9)

11) $\vdash a + a \cdot b \preceq a \,\&\, a \preceq a + a \cdot b$ (М. Р. 8 и 10)

12) $\vdash a + a \cdot b \preceq a \,\&\, a \preceq a + a \cdot b \rightarrow a + a \cdot b = a$ (схема аксиомы антисимметричности)

13) $\vdash a + a \cdot b = a$ (М. Р. 11 и 12)

14) $\vdash \forall b. a + a \cdot b = a$ (правило добавления $\forall$ для 13)

15) $\vdash \forall a. \forall b. a + a \cdot b = a$ (правило добавления $\forall$ для 14)

(DK3!8)

Домашняя работа №9

Условия

1. Постройте множества N, удовлетворяющие следующим изменённым аксиоматикам Пеано:
   (a) не выполняется аксиома индукции — покажите, что остальные аксиомы выполняются;
   (b) без инъективности операции $(')$ — покажите, что остальные аксиомы выполняются; обязательно ли в таком множестве 0 единственен?
   (c) с выделенным элементом 0, не имеющим свойства отсуствия предшественников (т.е. существует $x : x' = 0$) — покажите, что остальные аксиомы выполняются.
2. Покажите в аксиоматике Пеано:
   (a) ассоциативность сложения;
   (b) коммутативность умножения;
   (c) дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \leq a$ и $a' \leq b'$, если $a \leq b$. Покажите, что:
   (a) $x \leq x + y$;
   (b) $a'' + b'' \leq (a'') \cdot (b'')$;
   (c) Если существует n, что $x + n = y$, то $x \leq y$.
   (d) Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q, что $a = b \cdot p + q$ и $0 \leq q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.
4. Докажите в формальной арифметике:
   (a) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ (теперь вы знаете правду);
   (b) $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля — нужна ли здесь аксиома A6?);
   (c) $\vdash p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (отсутствие делителей нуля);
5. Выразите (представьте) в формальной арифметике:
   (a) «полное» отношение $R = \mathbb{N}^2$;
   (b) отношение $(=)$;
   (c) функцию $f(x) = 0$;
   (d) функцию $f(x) = x + 1$;

Задание 1

Постройте множества N, удовлетворяющие следующим изменённым аксиоматикам Пеано:

(a) не выполняется аксиома индукции — покажите, что остальные аксиомы выполняются;

Пусть:

- N — множество натуральных чисел и число 0;
- $x' = x + 2$.

Выполнение остальных аксиом очевидно (0 не имеет предшественника и операция $(')$ инъективна), однако не выполняется аксиома индукции для следующего рассмотрим предикат

$$P(x) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } x \text{ — четное число,} \\ \text{Л}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(stepavly & supermagzzz)

(b) без инъективности операции $(')$ — покажите, что остальные аксиомы выполняются; обязательно ли в таком множестве 0 единственен?

Пусть:

- $N = \{0, 1, 2\}$;
- $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 1$.

Вопрос с выполнением остальных аксиом не так интересен, как вопрос из формулировки, поэтому перейдем сразу к нему.

Обязательно ли в таком множестве 0 единственен? Да, обязательно. Для доказательства этого факта можно воспользоваться доказательством с лекции (оно не ломается).

(stepavly & supermagzzz)

(c) с выделенным элементом 0, не имеющим свойства отсуствия предшественников (т.е. существует $x : x' = 0$) — покажите, что остальные аксиомы выполняются.

Пусть:

- $N = \{0, 1\}$;
- $0' = 1$, $1' = 0$.

Очевидно, что операция $(')$ инъективна и что выполнена аксиома индукции.

(stepavly & supermagzzz)

Задание 2

Покажите в аксиоматике Пеано:

(a) ассоциативность сложения

$a + (b + c) = (a + b) + c$

Пусть

$$P(x) : x + (b + c) = (x + b) + c$$

1. $P(0) : 0 + (b + c) = (0 + b) + c$
   (a) $0 + (b + c) = (b + c) + 0 = b + c$
   (b) $(0 + b) + c = (b + 0) + c = b + c$
2. Пусть $P(x) : x + (b + c) = (x + b) + c$, докажем $P(x')$:
   т.к $x + (b + c) = (x + b) + c$,
   то $(x + (b + c))' = ((x + b) + c)'$
   (a) $(x + (b + c))' = ((b + c) + x)' = (b + c) + x' = x' + (b + c)$
   (b) $((x+b)+c)' = (c+(x+b))' = (c+(b+x))' = c+(b+x)' = c+(b+x') = (b+x')+c = (x'+b)+c$
   Но, т.к. $(x + (b + c))' = ((x + b) + c)'$, то $x' + (b + c) = (x' + b) + c$
3. $P(a) : a + (b + c) = (x + b) + c$

(Rai_fox)

(b) коммутативность умножения

$a * b = b * a$

- Лемма 1. $0 * a = 0$
  1. $P(0) : 0 * 0 = 0$
  2. Пусть $P(a) : 0 * a = 0$, докажем $P(a')$:
     (a) $0 * a' = 0 * a + 0 = 0 * a$
  3. $P(a) : 0 * a = 0$
- Лемма 2. $a' * b = a * b + b$
  1. $P(0) : a' * 0 = a * 0 + 0$
     (a) $0 * a' * 0 = 0$
     (b) $a * 0 + 0 = a * 0 = 0$
  2. Пусть $P(b) : a' * b = a * b + b$, докажем $P(b')$:
     (a) $a * b' + b' = a * b + a + b' = (a * b + a + b)' = a * b + b + a' = a' * b + a' = a' * b'$
  3. $P(b) : a' * b = a * b + b$

– Доказательство. $a * b = b * a$

1. $P(0) : a * 0 = 0 * a$
   (a) $0 * a = 0$
   (b) $a * 0 = 0$
2. Пусть $P(b) : a * b = b * a$, докажем $P(b')$:
   (a) $a * b' = a * b + a$
   (b) $b' * a = b * a + a = a * b + a$
3. $P(b) : a * b = b * a$

(Rai_fox)

(c) дистрибутивность

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Рассмотрим произвольные фиксированные элементы $a, b \in N$ и множество $M = \{c \in M | (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\}$. Нужно проверить, что $M = N$.
Установим выполнимость посылок аксиомы индукции для множества M.

– Докажем, что $1 \in M$. Нужно проверить, что $(a + b) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1$. Из определения умножения $(a + b) \cdot 1 = a + b$, $a \cdot 1 = a$ и $b \cdot 1 = b$. Поэтому нужно установить $a + b = a + b$, что очевидно.
– Предположим, что $c \in M$, т.е. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Проверим, что $c' \in M$, т.е. $(a+b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'$. Преобразуем левую часть $L = (a + b) \cdot c'$ из этого равенства так, чтобы получить правую часть. При этом учитываем, что можно произвольно расставлять скобки и переставлять слагаемые при операции $+$.
Из определения операции умножения следует, что $L = (a+b) \cdot c + (a+b)$. По условию $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Тогда $L = (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) = a \cdot c' + b \cdot c'$. Получили правую часть $a \cdot c' + b \cdot c'$.
Поэтому $c' \in M$, $M = N$, чтд.

(copypasted by staszw)

Задание 4

Нелогические аксиомы формальной арифметики

1) $a = b \to a' = b'$

2) $a = b \to a = c \to b = c$

3) $a' = b' \to a = b$

4) $\neg a' = 0$

5) $a + b' = (a + b)'$

6) $a + 0 = a$

7) $a \cdot 0 = 0$

8) $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Схема аксиомы индукции (x входит свободно в ψ)

$$(\psi[x := 0]) \,\&\, (\forall x.\psi \to (\psi[x := x'])) \to \psi$$

Некоторые свойства

- $\vdash \forall a.a = a$ (тождество)
  Доказательство. Было на лекции.
- $\vdash a = b \to b = a$ (симметричность $=$)
  Доказательство.

1. $\vdash a = b \to a = a \to b = a$ (акс. 2 ф. а. + добавление квантора $\forall c$ и замена $c := a$)
2. $a = b \vdash a = a \to b = a$ (теорема о дедукции для 1)

3. $a = b \vdash \forall a.a = a$ (тождество)
4. $a = b \vdash (\forall a.a = a) \to a = a$ (сх. акс. 11)
5. $a = b \vdash a = a$ (М. Р. 3 и 4)
6. $a = b \vdash b = a$ (М. Р. 2 и 5)
7. $\vdash a = b \to b = a$ (теорема о дедукции для 6)

- $\vdash a = b \to \forall x.a + x = b + x$ (инвариантность сложения)
  Доказательство

  1) $a = b \vdash (a + 0 = b + 0) \,\&\, (\forall x.a + x = b + x \to a + x' = b + x') \to a + x = b + x$ (сх. акс. индукции)
  2) $a = b \vdash a + 0 = a$ (акс. 6 ф. а.)
  3) $a = b \vdash a = a + 0$ (симметричность $=$ для 2)
  4) $a = b \vdash a = b \to a = a + 0 \to b = a + 0$ (акс. 2 ф. а. $+$ добавление квантора $\forall c$ и замена $c \coloneqq a + 0$)
  5) $a = b \vdash a = a + 0 \to b = a + 0$ (М. Р. гипотезы и 4)
  6) $a = b \vdash b = a + 0$ (М. Р. 3 и 5)
  7) $a = b \vdash b = b + 0$ (акс. 6 $+$ симметричность $=$)
  8) $a = b \vdash b = c \to b = d \to c = d$ (акс. 8 ф. а.)
  9) $a = b \vdash b = a + 0 \to b = b + 0 \to a + 0 = b + 0$ (добавление кванторов $\forall c$ и $\forall d$ $+$ замены $c \coloneqq a + 0$ и $d \coloneqq b + 0$)
  10) $a = b \vdash a + 0 = b + 0$ (М. Р. 6, 7 и 9)
  11) $a = b, a + x = b + x \vdash a + x' = (a + x)'$ (акс. 5 ф. а.)
  12) $a = b, a + x = b + x \vdash b + x' = (b + x)'$ (акс. 5 ф. а.)
  13) $a = b \vdash a + x = b + x \to (a + x)' = (b + x)'$ (акс. 1 ф. а. $+$ добавление кванторов $\forall a$ и $\forall b$ $+$ замены $a \coloneqq a + x$ и $b \coloneqq b + x$)
  14) $a = b, a + x = b + x \vdash (a + x)' = (b + x)'$ (теорема о дедукции для 13)
  15) $a = b, a + x = b + x \vdash a + x' = b + x'$ (аналогично для 11, 12 и 14)
  16) $a = b \vdash \forall x.a + x = b + x \to a + x' = b + x'$ (теорема о дедукции для 15 $+$ добавление квантора $\forall x$)
  17) $a = b \vdash (a + 0 = b + 0) \,\&\, (\forall x.a + x = b + x \to a + x' = b + x')$ (сх. акс. 3 $+$ М. Р. с 10 и 16)
  18) $a = b \vdash a + x = b + x$ (М. Р. 1 и 17)
  19) $\vdash a = b \to a + x = b + x$ (теорема о дедукции для 18)
  20) $\vdash a = b \to \forall x.a + x = b + x$ (правило добавления квантора $\forall$ для 19)

- *Правило замены.* Пусть $\vdash a = b$ и $\vdash a + x = c$. Тогда $\vdash b + x = c$.
  Доказательство.

  1) $\vdash a = b$ (дано)
  2) $\vdash a + x = b + x$ (инвариантность сложения для 1)
  3) $\vdash b + x = c$ (акс. 2 ф. а. $+$ добавление кванторов $+$ соответствующие замены $+$ М. Р. с дано и 2)

- *Инвариантность умножения.* $\vdash a = b \to \forall c.a \cdot c = b \cdot c$

  1) $a = b \vdash (a \cdot 0 = b \cdot 0) \,\&\, (\forall c.a \cdot c = b \cdot c \to a \cdot c' = b \cdot c') \to a \cdot c = b \cdot c$ (сх. акс. индукции)
  2) $a = b \vdash 0 = a \cdot 0$ (акс. 7 ф. а. $+$ симметричность)
  3) $a = b \vdash 0 = b \cdot 0$ (акс. 7 ф. а. $+$ симметричность)
  4) $a = b \vdash a \cdot 0 = b \cdot 0$ (акс. 2 ф. а. $+$ добавление кванторов $+$ соответствующие замены $+$ М. Р. с 2 и 3)
  5) $a = b, a \cdot c = b \cdot c \vdash a \cdot c + b = b \cdot c + b$ (инвариантность сложения для гипотезы)
  6) $a = b, a \cdot c = b \cdot c \vdash a \cdot c + a = b \cdot c + b$ (правило замены для гипотезы и 5)
  7) $a = b, a \cdot c = b \cdot c \vdash a \cdot c + a = a \cdot c'$ (акс. 8 ф. а. $+$ симметричность)
  8) $a = b, a \cdot c = b \cdot c \vdash a \cdot c' = b \cdot c + b$ (акс. 2 ф. а. $+$ добавление кванторов $+$ соответствующие замены $+$ М. Р. с 6 и 7)
  9) $a = b, a \cdot c = b \cdot c \vdash a \cdot c' = b \cdot c'$ (аналогично)

10) $a = b \vdash a \cdot c = b \cdot c \to a \cdot c' = b \cdot c'$ (теорема о дедукции для 9)
11) $a = b \vdash \forall c. a \cdot c = b \cdot c \to a \cdot c' = b \cdot c'$ (правило добавления квантора $\forall$ для 10)
12) $a = b \vdash (a \cdot 0 = b \cdot 0) \,\&\, (\forall c. a \cdot c = b \cdot c \to a \cdot c' = b \cdot c')$ (сх. акс. 3 + М. Р. с 4 и 11)
13) $a = b \vdash a \cdot c = b \cdot c$ (М. Р. 1 и 12)
14) $\vdash a = b \to a \cdot c = b \cdot c$ (теорема о дедукции для 13)
15) $\vdash a = b \to \forall c. a \cdot c = b \cdot c$ (правило добавления квантора $\forall$ для 14)

- *Правило замены для умножения.* Пусть $\vdash a = b$ и $\vdash a \cdot x = c$. Тогда $\vdash b \cdot x = c$.
  1) $\vdash a \cdot x = b \cdot x$ (инвариантность умножения для дано)
  2) $\vdash b \cdot x = c$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 1 и дано)
- *Сложение, равное 0* Пусть $\vdash a + b = 0$. Тогда $\vdash b = 0$.
  1) $b = 0 \vdash b = 0$ (гипотеза)
  2) $b = c' \vdash a + c' = 0$ (правило замены для дано и гипотезы)
  3) $b = c' \vdash a + c' = (a + c)'$ (акс. 5 ф. а.)
  4) $b = c' \vdash (a + c)' = 0$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 2 и 3)
  5) $b = c' \vdash \neg (a + c)' = 0$ (акс. 4 ф. а. + -//-)
  6) $b = c' \vdash b = 0$ (противоречивая теория)
  7) $\vdash b = 0 \to b = 0$ (теорема о дедукции для 1)
  8) $\vdash c' = b \to b = 0$ (теорема о дедукции для 6 + симметричность равенства)
  9) $\vdash (\exists c. c' = b) \to b = 0$ (правило добавления квантора $\exists$)
  10) $\vdash (\exists c. c' = b) \vee b = 0 \to b = 0$ (сх. акс. 8 + М. Р. с 9 и 7)
  11) $\vdash b = 0$ (доказано в 4b)

(a) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$

1) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{2} \cdot \overline{1} + \overline{2}$ (акс. 8 ф. а.)
2) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2} \cdot 0 + \overline{2}$ (акс. 8 ф. а.)
3) $\vdash \overline{2} \cdot 0 = 0$ (акс. 7 ф. а.)
4) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{1} = 0 + \overline{2}$ (правило замены для 2 и 3)
5) $\vdash 0 + \overline{2} = \overline{2}$ (акс. 6 + коммутативность сложения)
6) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2}$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 4 и 5)
7) $\vdash \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \cdot \overline{2}$ (правило замены для 1 и 6 + симметричность =)
8) $\vdash \overline{2} + \overline{2} = \overline{4}$ (доказано на лекции)
9) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 7 и 8)

(b) $\vdash \forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0$

1) $\vdash ((\exists q. q' = 0) \vee 0 = 0) \,\&\, (\forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0 \to (\exists q. q' = p') \vee p' = 0) \to (\exists q. q' = p) \vee p = 0$ (сх. акс. индукции)
2) $\vdash \forall a. a = a$ (тождество)
3) $\vdash (\forall a. a = a) \to 0 = 0$ (сх. акс. 11)
4) $\vdash 0 = 0$ (М. Р. 2 и 3)
5) $\vdash 0 = 0 \to (\exists q. q' = 0) \vee 0 = 0$ (сх. акс. 7)
6) $\vdash (\exists q. q' = 0) \vee 0 = 0$ (М. Р. 4 и 5)
7) $p = 0 \vdash 0 = p$ (симметричность = для гипотезы)
8) $p = 0 \vdash 0 = p \to 0' = p'$ (акс. 1 ф. а.)
9) $p = 0 \vdash 0' = p'$ (М. Р. 7 и 8)
10) $p = 0 \vdash 0' = p' \to \exists q. q' = p'$ (сх. акс. 12)
11) $p = 0 \vdash \exists q. q' = p'$ (М. Р. 9 и 10)

12) $p = 0 \vdash (\exists q.q' = p') \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (сх. акс. 6)
13) $p = 0 \vdash (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (М. Р. 11 и 12)
14) $\vdash p = 0 \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (теорема о дедукции для 13)
15) $q' = p \vdash q' = p \to (q')' = p'$ (акс. 1. ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены)
16) $q' = p \vdash (q')' = p'$ (М. Р. гипотезы и 15)
17) $q' = p \vdash (q')' = p' \to \exists q.q' = p'$ (сх. акс. 12)
18) $q' = p \vdash \exists q.q' = p'$ (М. Р. 16 и 17)
19) $q' = p \vdash (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (сх. акс. 6 + М. Р. с 18)
20) $\vdash q' = p \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (теорема о дедукции для 19)
21) $\vdash (\exists q.q' = p) \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (правило добавления квантора $\exists$ для 20)
22) $\vdash (\exists q.q' = p) \vee p = 0 \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (сх. акс. 8 + М. Р. с 14 и 21)
23) $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0 \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0$ (добавления квантора $\forall$ для 22)
24) $\vdash ((\exists q.q' = 0) \vee 0 = 0) \,\&\, (\forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0 \to (\exists q.q' = p') \vee p' = 0)$ (сх. акс. 3 + М. Р. с 6 и 23)
25) $\vdash (\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (М. Р. 1 и 24)
26) $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (добавление квантора $\forall$ для 25)

(c) $\vdash p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$

1) $q = 0, p \cdot q = 0 \vdash q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (сх. акс. 7)
2) $q = 0, p \cdot q = 0 \vdash p = 0 \vee q = 0$ (М. Р. гипотезы и 1)
3) $\vdash q = 0 \to p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (теорема о дедукции для 2)
4) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p \cdot t' = 0$ (правило замены для гипотез)
5) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p \cdot t' = p \cdot t + p$ (акс. 8 ф. а.)
6) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p \cdot t + p = 0$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 4 и 5)
7) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p = 0$ (сложение, равное 0 в 6)
8) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (сх. акс. 6)
9) $q = t', p \cdot q = 0 \vdash p = 0 \vee q = 0$ (М. Р. 7 и 8)
10) $\vdash t' = q \to p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (теорема о дедукции для 9 + симметричность равенства)
11) $\vdash (\exists t.t' = q) \to p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (правило добавления квантора $\exists$ для 10)
12) $\vdash (\exists t.t' = q) \vee q = 0 \to p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (сх. акс. 8 + М. Р. с 3 и 11)
13) $\vdash p \cdot q = 0 \to p = 0 \vee q = 0$ (М. Р. с предыдущим номером)

Задание 5

(a)

(b) Докажем, что отношение равенства в формальной арифметике задается формулой $a = b$.

1) Пусть $k_1 = k_2$. Докажем $\vdash \overline{k_1} = \overline{k_2}$. Так как $k_1 = k_2$, (дальше идут сложные кукареки на метаязыке, я запутался)

(c)

(d) $f(x) = x + 1$

Пусть $\varphi \equiv x + 1 = y$.

1) Пусть $f(k) = k + 1$. Докажем $\vdash \overline{k} + 1 = \overline{k+1}$.
   1) $\vdash \overline{k} + 1 = (\overline{k} + 0)'$ (акс. 5 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены)
   2) $\vdash \overline{k} + 0 = \overline{k}$ (акс. 6 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены)
   3) $\vdash (\overline{k} + 0)' = \overline{k+1}$ (акс. 1 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 2)
   4) $\vdash \overline{k} + 1 = \overline{k+1}$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с 1 и 3)

2) Докажем $\vdash (\exists y.x+1=y) \,\&\, (\forall p.\forall q.(x+1=p) \,\&\, (x+1=q) \to p=q)$.

   1) $\vdash \forall a.a=a$ (рефлексивность)
   2) $\vdash x+1=x+1$ (сх. акс. 11 для 1 и М. Р. с 1)
   3) $\vdash x+1=x+1 \to \exists y.x+1=y$ (сх. акс. 12)
   4) $\vdash \exists y.x+1=y$ (М. Р. 2 и 3)
   5) $x+1=p \,\&\, x+1=q \vdash p=q$ (акс. 2 ф. а. + добавление кванторов + соответствующие замены + М. Р. с гипотезами)
   6) $\vdash x+1=p \,\&\, x+1=q \to p=q$ (теорема о дедукции для 5)
   7) $\vdash \forall p.\forall q.x+1=p \,\&\, x+1=q \to p=q$ (добавление кванторов для 6)
   8) $\vdash (\exists y.x+1=y) \,\&\, (\forall p.\forall q.(x+1=p) \,\&\, (x+1=q) \to p=q)$ (сх. акс. 3 + М. Р. с 4 и 7)

Домашняя работа №10

Задание 2

Покажите, что функция Аккермана — рекурсивная.

Напоминаю, что функцию Аккермана можно посчитать следующим образом

1) $A(0, y) = y + 1$

2) $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$

3) $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$

Заметим, что в общем случае вычисление функции Аккермана будет выглядеть следующим образом

$$A(\omega_1, A(\omega_2, A(\omega_3, \ldots A(\omega_{k-1}, \omega_k) \ldots)))$$

Также на каждом шаге редукции будет раскрываться самая правая функция Аккермана.

Таким образом, каждый шаг редукции можно кодировать следующим кортежем.

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k)$$

Такой кортеж удобно представить в виде следующего геделевого номера

$$2^k \cdot 3^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\omega_{k-1}} \cdot p_{k+1}^{\omega_k}$$

Рассмотрим три предиката $Q_1(z), Q_2(z), Q_3(z)$. Они принимают геделев номер кортежа и возвращают 1, если текущий шаг редукции нужно раскрывать по соответствующему правилу и 0 иначе. Также введем три функции $h_1(z), h_2(z), h_3(z)$, которые принимают геделев номер кортежа и проводят соответствующий шаг редукции. Теперь можно ввести в рассмотрение функцию $\psi(n, x, y)$, которая делает n шагов редукции для $A(x, y)$ и возвращает соответствующий кортеж. Эту функцию можно описать следующим образом:

```
psi(0, x, y):
    return 2 ^ 2 * 3 ^ x * 5 ^ y
psi(n, x, y):
    acc = psi(n - 1, x, y)
    if Q1(acc):
        return h1(acc)
    elif Q2(acc):
        return h2(acc)
    elif Q3(acc):
        return h3(acc)
    else:
        return acc
```

Очевидно, что эта функция примитивно-рекурсивная, при условии, что $Q_1(z), Q_2(z), Q_3(z), h_1(z), h_2(z), h_3(z)$ также примитивно-рекурсивные. Предикаты реализовать несложно (достаточно проверить чему равны последние два элемента кортежа). Функции преобразования также несложно реальзовать. Рассмотрим на примере $h_3(z)$. Она преобразует кортеж следующим образом

$$(\ldots, x + 1, y + 1) \to (\ldots, x, x + 1, y)$$

.

Введем вспомогательную функцию $L(z) = elemBy(1, z)$, которая вычисляет длину кортежа по его геделевому номеру ($elemBy(x, y)$ — функция двух аргументов, вычисляющая элемент в 1-индексации на позиции x в геделевом списке y). Теперь заметим, что функция ψ рекуцирует кортеж ровно до какого-то момента, затем перестает. А именно она перестает редуцировать в момент, когда $L(z) = 1$. Давайте найдем минимальный номер, при котором это происходит

$$minNum(x, y) = M < L(\psi(n, x, y)) > 1 > (x, y)$$

Тогда функцию Аккермана можно вычислить следующим образом

$$A(x, y) = elemBy(2, \psi(minNum(x, y), x, y))$$

Исходный код можно посмотреть тут (поставьте звездочку пж)
(DK3!8)

Домашняя работа №11

Задание 3

Добавим к формальной арифметике аксиому $\neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Будет ли получившаяся теория ω-непротиворечивой?

Спойлер: не будет.
Доказательство. Предположим, что формальная арифметика ω-непротиворечива.

1) $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ (свежая аксиома)

2) $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$ (определение σ)

3) $\vdash \neg\neg\exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$ (правило вынесения отрицания под квантор всеобщности)

4) $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$ (сх. акс. 10 + М. Р. с 3)

Таким образом, по ω-непротиворечивости получили, что существует такой геделев номер доказательства p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. То есть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Получается, что в такой формальной арифметике доказуемы $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ и $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, формальная арифметика противоречива $\Rightarrow$ не может быть ω-непротиворечивой. Получили противоречие. Значит, такая формальная арифметика не ω-непротиворечива.
(DK3!8)

Задание 4

Покажите, что формальная арифметика противоречива тогда и только тогда, когда $\vdash \overline{1} = 0$.

Доказательство.

($\Rightarrow$)
Пусть формальная арифметика противоречива. Тогда в ней доказуемо все что угодно. В частности $\vdash \overline{1} = 0$.

($\Leftarrow$)
Пусть $\vdash \overline{1} = 0$.

1) $\vdash \neg a' = 0$ (акс. 4 ф. а.)

2) $\vdash \neg 0' = 0$ (добавление квантора всеобщности + замена a на 0 для 1 пункта)

3) $\vdash \neg\overline{1} = 0$ (замена на макрос)

Таким образом, получили, что в данной формальной арифметике доказуемо $\vdash \overline{1} = 0$ и $\vdash \neg\overline{1} = 0$. Следовательно формальная арифметика противоречива.
(DK3!8)