Дифференциальные уравнения
Конспект лекций для студентов групп M3234–M3239 Университета ИТМО

9 сентября 2020 г.

Содержание

Лекция №1, 1 сентября 2020 г.

Введение

Предположим, что мы изучаем какое-либо явление окружающего нас мира. Пусть в этом явлении нас интересует некоторая величина, которую мы обозначим через y. Это может быть температура какого-то тела, атмосферное давление, количество особей в биологической популяции или напряжение на участке электрической цепи. Во всех этих примерах величина y зависит от некоторых параметров, например, от момента времени или положения в пространстве. Другими словами, это не просто число, а функция.

Определить эту функцию непосредственно удаётся не всегда. Но часто бывает возможно установить связь между этой функцией, её производными и независимой переменной. Уравнение, выражающее такую связь, называется *дифференциальным уравнением.*

Рассмотрим простую модель, описывающую изменение численности биологической популяции. Обозначим через $y(t)$ количество её особей в момент времени t. Предположим, проведённый эксперимент показал, что прирост числа особей пропорционален их количеству в данный момент, то есть при малом изменении времени Δt

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx k y(t) \Delta t.$$

Разделив обе части на Δt, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky.$$

Пусть экспериментальные данные указывают ещё на то, что данное равенство тем точнее, чем меньше шаг Δt. Тогда естественно предположить, что при устремлении Δt к нулю получится уравнение, наиболее точно описывающее искомый закон $y(t)$. Переходя к пределу, находим

$$y' = ky.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение. Функция, описывающая численность популяции, которую мы ищем основываясь на исходных предположениях о приросте числа особей, должна удовлетворять этому уравнению.

Что означают слова «функция удовлетворяет уравнению»? Если взять, например, функцию $\varphi(t) = kt$ и подставить её в полученное уравнение вместо y, то придём к равенству $k = k^2 t$, которое верно при $t = 1/k$, и только при таком значении t. Однако, в рассматриваемом примере, конечно, нас интересует закон, справедливый при *любых* значениях t. Другими словами, искомая функция должна при подстановке обращать уравнение в *тождество.*

Легко убедиться, что при подстановке функции $\varphi(t) = e^{kt}$ вместо y получается тождество (верное при $t \in \mathbb{R}$), то есть φ является его решением. Но такая функция не единственная: всевозможные решения даются формулой

$$y = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная (рис. 1). Для того, чтобы её вычислить, нужно иметь некоторую дополнительную информацию.

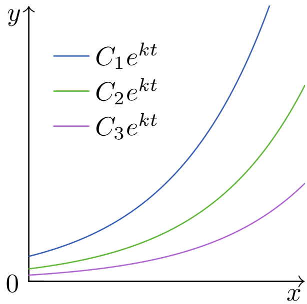

Рис. 1. Графики некоторых решений уравнения $y' = ky$

Рассмотрим более конкретный пример.

Пример 1. Пусть масса дрожжей, помещённых в раствор сахара, в начальный момент времени была 25 грамм. Через полчаса их масса стала 42 грамма. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

Решение. Для получения ответа на данный вопрос воспользуемся только что построенной моделью. А именно, будем предполагать, что масса дрожжей $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m' = km,$$

а значит, $m = Ce^{kt}$. Поскольку $m(0) = 25$, то $C = m(0) = 25$, следовательно,

$$m(t) = 25e^{kt}.$$

Найдём ещё коэффициент k. Из условия $m(30) = 42$ получаем

$$k = \frac{\ln(42/25)}{30} \approx 0{,}0173.$$

Таким образом, масса дрожжей в момент времени t равна

$$m(t) = 25e^{0{,}0173t}.$$

Требуется найти такое значение t_2, что $m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50$. Имеем $50 = 25\exp(0{,}0173t_2)$, отсюда

$$t_2 = \frac{\ln 2}{0{,}0173} \approx 40,$$

то есть примерно через 40 минут следует ожидать удвоение массы дрожжей. $\square$

Конечно, полученная зависимость имеет ограниченную область применимости. В реальной жизни масса дрожжей не может неограниченно возрастать, но полученные значения $m(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Дифференциальное уравнение было решено верно, а причина неполного соответствия найденной зависимости и настоящей в том, что само исходное уравнение описывает действительность лишь приближённо. Многие факторы не были учтены при его выводе. Поэтому пользоваться найденной функцией можно лишь до тех пор, пока влияние этих факторов незначительно.

Многие законы физики формулируются в виде дифференциальных уравнений. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma,$$

связывающий ускорение тела a, его массу m и приложенные силы F, есть ни что иное, как дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку ускорение — это вторая производная от перемещения тела.

Пример 2. Рассмотрим пружину с коэффициентом упругости k, один конец которой закреплён, а к другому подвешен груз массой m (рис. 2). Пружину оттягивают на небольшое расстояние и отпускают. Найти закон движения груза.

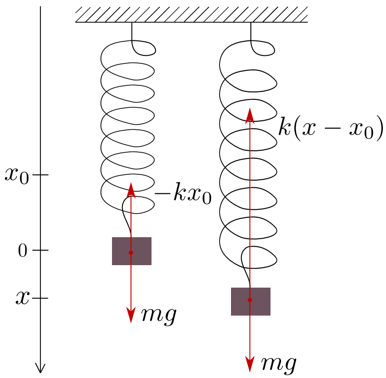

Рис. 2. Колебания пружины

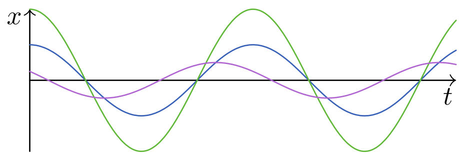

Рис. 3. Графики некоторых решений уравнения $mx'' = -kx$.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз, а за начало отсчёта примем положение равновесия груза. В любой момент времени на груз действует сила тяжести mg, а также сила упругости пружины $-k\Delta x$, по закону Гука пропорциональная величине растяжения $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — координата свободного конца пружины в нерастянутом положении.

Применяя второй закон Ньютона, находим уравнение движения груза

$$mx'' = -k(x - x_0) + mg.$$

Если груз покоится в положении равновесия, то

$$0 = -k(0 - x_0) + mg,$$

поэтому $kx_0 = -mg$. Исключая mg из уравнения движения, находим

$$mx'' = -kx.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что в качестве решений подходят функции вида

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{k/m} + C_2\right). \qquad \square$$

В отличие от предыдущего примера, здесь две произвольных постоянных. Причина этого в том, что полученное уравнение движения содержит вторую производную. Постоянные C_1 и C_2 однозначно определятся, если будут известны *начальные условия*, то есть положение груза и скорость в момент, когда его отпустили.

Дифференциальные уравнения возникают во многих областях знания, где приходится изучать эволюцию какого-либо процесса. Данный курс посвящён изучению уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, то есть *обыкновенных дифференциальных уравнений*.

Глава 1

Уравнения первого порядка. Основные понятия

§1.1. Уравнение первого порядка и его решение

В общем случае дифференциальным уравнением называют уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Определение. Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Определение. Функция φ называется ***решением уравнения*** (1.1) на интервале (a, b), если

- $\varphi \in C^1(a, b)$;
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ на (a, b).

Замечание 1.1. В указанном определении вместо чисел a и b могут участвовать символы $\pm\infty$.

Замечание 1.2. Знак тожества «$\equiv$» используют вместо знака равенства «$=$» когда хотят подчеркнуть, что равенство выполняется не в отдельных точках, а *во всех* точках некоторого множества.

Замечание 1.3. Решения также рассматривают на отрезках и полуинтервалах. В этом случае под производной в крайних точках, включённых в промежуток, необходимо понимать одностороннюю производную.

Определение. График решения уравнения (1.1) называют его ***интегральной кривой***.

Определение. ***Общим решением*** уравнения (1.1) называют множество всех его решений.

Если желают подчеркнуть, что речь идёт о каком-то одном конкретном решении, то говорят о *частном решении* уравнения. Во многих случаях решение не выражается в явном виде, а задаётся неявно из некоторого соотношения, которое иногда называют *частным интегралом*.

Определение. Уравнение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которое при каждом допустимом значении параметра C неявно задаёт некоторое частное решение дифференциального уравнения (1.1), будем называть ***общим интегралом*** этого уравнения.

Замечание 1.4. Общий интеграл не всегда описывает *общее решение* уравнения[1]. Множество всех решений может быть шире, чем множество решений, определяемых общим интегралом.

Пример 1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = x.$$

Ясно, что его решением будет любая первообразная правой части[2]:

$$y = \int x\,dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Таким образом, мы получили целое семейство решений (рис. 1.1), заданных на всей вещественной оси.

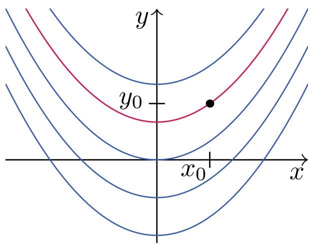

Рис. 1.1. Семейство решений уравнения $y' = x$ и частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$

Функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2},\ \ y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2,\ \ y_3(x) = \frac{x^2}{2} - 5$$

[1] Существуют и другие определения понятий «общее решение» и «общий интеграл». В нашем курсе мы будем придерживаться определений, данных в этой главе.

[2] Под символом $\int f(x)\,dx$ мы всегда будем понимать какую-нибудь одну первообразную, не важно какую, а постоянную интегрирования приписывать отдельно в качестве слагаемого.

представляют различные *частные решения* этого уравнения. Семейство

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

является его *общим решением*, а соотношение $x^2 - 2y + C = 0$ — *общим интегралом*, поскольку при каждом конкретном значении параметра C получаем его *частный интеграл*. $\square$

§1.2. Формы записи уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

называют ***уравнением, разрешённым относительно производной***, или уравнением, записанным ***в нормальной форме***.

Если представить производную как отношение дифференциалов, то уравнение (1.2) запишется в виде

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

Определение. Уравнение вида

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{1.3}$$

называют ***уравнением в дифференциалах***.

Определение. Функция φ является ***решением уравнения*** (1.3) на (a, b), если

- $\varphi \in C^1(a, b)$;
- $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a, b).

Переменные x и y входят в уравнение (1.3) равноправно, поэтому его решением называется не только функция вида $y = \varphi(x)$, но и функция вида $x = \psi(y)$. Соответствующее определение аналогично приведённому.

Графики решений вида $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ могут быть частями одной гладкой кривой. Такую кривую естественно считать интегральной кривой уравнения (1.3), а её параметризацию — решением.

Определение. Вектор-функция $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ называется ***параметрическим решением уравнения*** (1.3) на (α, β), если

- $\varphi, \psi \in C^1(\alpha, \beta)$ и $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$;
- $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на (α, β).

Изучать уравнение (1.3) — всё равно что изучать пару уравнений

$$y'_x = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad \text{если } Q(x,y) \neq 0,$$
$$x'_y = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad \text{если } P(x,y) \neq 0.$$

Если же в какой-то точке одновременно и функция P, и функция Q обращаются в ноль, то в этой точке интегральные кривые могут вести себя совершенно по-разному, в том числе и вовсе не проходить через неё.

Определение. Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется ***особой точкой*** уравнения (1.3), если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Убедимся подстановкой, что функция $y(x) = \sqrt{C^2 - x^2}$ — при любом $C > 0$ является его решением на интервале $(-C, C)$. Действительно, эта функция имеет непрерывную производную на $(-C, C)$. Её дифференциал

$$dy = \frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}}\,dx.$$

При подстановке в исходное уравнение получаем равенство

$$x\,dx + \sqrt{C^2 - x^2}\,\frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}}\,dx = 0,$$

верное для всех $x \in (-C, C)$.

Аналогично устанавливается, что функция $y(x) = -\sqrt{C^2 - x^2}$, а также функции $x(y) = \pm\sqrt{C^2 - y^2}$ являются решениями на интервале $(-C, C)$. При одинаковом значении C графики всех этих функций являются частями одной гладкой кривой — окружности радиуса C с центром в начале координат (рис. 1.2).

Вектор-функция с компонентами

$$x(t) = C\cos t,$$
$$y(t) = C\sin t,$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$, даёт пример *параметрического решения.*

Начало координат — *особая точка* уравнения. В данном случае через неё не проходит ни одна интегральная кривая. □

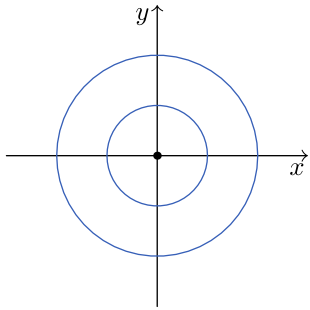

Рис. 1.2. Интегральные кривые и особая точка уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$

§1.3. Поле направлений и приближённое решение

Рассмотрим геометрический смысл уравнения (1.2) и его решения. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является его решением, то есть при любом x из некоторого интервала (a, b) справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Зафиксируем некоторую точку на интегральной кривой с координатами (x_0, y_0), где $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, значение функции f в точке (x_0, y_0) определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 1.3).

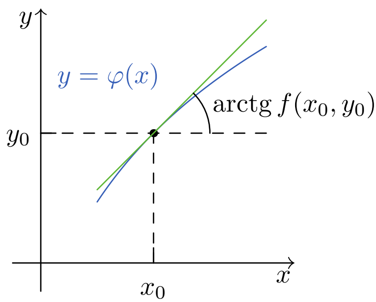

Рис. 1.3. Правая часть уравнения определяет тангенс угла наклона касательной

Если каждой точке (x, y) области, где определена функция f, поставить в соответствие вектор, направленный под углом $\operatorname{arctg} f(x, y)$, то получится так называемое ***поле направлений*** уравнения (1.2). Задачу нахождения его решений тогда можно сформулировать так: найти все гладкие кривые, которые в каждой своей точке касаются вектора поля направлений (рис. 1.4).

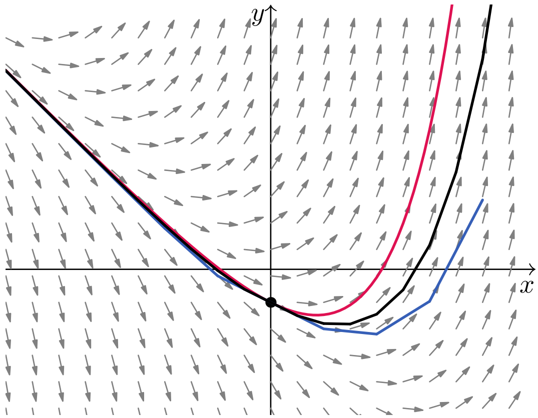

Рис. 1.4. Поле направлений уравнения $y' = y + x$; интегральная кривая, проходящая через точку $x_0 = 0$, $y_0 = -1/2$ (красным цветом); ломаные Эйлера с шагом $h = 0{,}8$ (синим цветом) и $h = 0{,}4$ (чёрным цветом), проходящие через эту же точку

Векторное поле даёт представление о том, как примерно ведут себя интегральные кривые. Оно может быть использовано для предварительного качественного исследования дифференциального уравнения, построения эскизов интегральных кривых и для контроля найденных решений.

Поясним подробнее, как построить приближение к интегральной кривой. Взяв некоторую точку (x_0, y_0) в качестве начальной, будем двигаться вправо от неё по направлению поля до точки с абсциссой $x_1 = x_0 + h$, ординату которой обозначим через y_1. От точки (x_1, y_1) продолжим движение вправо до точки (x_2, y_2), где $x_2 = x_1 + h$, но теперь по направлению поля в (x_1, y_1). Продолжая этот процесс дальше, получаем ***ломаную Эйлера***. Аналогично она строится и влево от точки (x_0, y_0).

Ломаная Эйлера даёт приближение интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0). Приближение тем точнее, чем меньше берётся шаг h (рис. 1.4). Исходя из условия

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k),$$

получаем формулы для координат вершин ломаной:

$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h.$$

§1.4. Задача Коши

Как правило, дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для получения какого-нибудь конкретного решения, кроме самого уравнения, необходимы дополнительные условия, выделяющие это конкретное решение из множества всех решений.

Определение. Задача отыскания решения уравнения (1.2), удовлетворяющего ***начальному условию*** $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши*** (или ***начальной задачей***) для уравнения (1.2). Пара чисел (x_0, y_0) при этом называется ***начальными данными***.

С геометрической точки зрения это задача отыскания среди всех интегральных кривых той, которая проходит через точку с координатами (x_0, y_0) (рис. 1.1).

Пример 1.3. Решить задачу Коши $y' = x$, $y(\sqrt{2}) = 2$.

Решение. Интегрируя правую часть, получим общее решение

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Положим здесь $y = 2$, $x = \sqrt{2}$. Тогда

$$2 = 1 + C,$$

откуда $C = 1$. Подставляя найденное значение C в общее решение, находим

$$y = \frac{x^2}{2} + 1.$$

Это и есть частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. □

Лекция №2, 8 сентября 2020 г.

Относительно задачи Коши естественно возникают вопросы:

- Существует ли решение поставленной задачи?
- Насколько велико множество всех её решений?

Приведём простые достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Следующие теоремы являются частными случаями более общих утверждений, которые будут доказаны позднее.

Теорема 1.1 (существование решения задачи Коши). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область*[1]*, $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует решение задачи*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.4}$$

[1] Напомним, что областью называют открытое связное множество

Теорема 1.2 (единственность решения задачи Коши). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область, $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, φ_1 и φ_2 — решения задачи (1.4) на (a, b). Тогда $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на (a, b).*

Таким образом, в условиях теоремы 1.2 через каждую точку области G проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$. Другими словами, вся область G покрыта не пересекающимися интегральными кривыми (рис. 1.5).

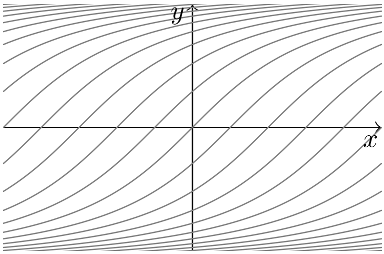

Рис. 1.5. Интегральные кривые уравнения $y' = \cos^2 y$ в области $G = \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$

Дифференциальное уравнение (1.2) может иметь решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

Определение. Решение уравнения (1.2) называют ***особым***, если через каждую точку соответствующей интегральной кривой проходит ещё одна интегральная кривая этого уравнения, не совпадающая с данной в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пример 1.4 (нарушение единственности). Рассмотрим уравнение

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Его правая часть непрерывна, тогда по теореме существования 1.1 решение существует для любых начальных данных $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y}(3\sqrt[3]{y^2}) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}},$$

то теорема единственности 1.2 гарантирует, что при $y_0 \neq 0$ в некоторой окрестности x_0 решение может быть лишь одно:

$$y(x) = (x - C)^3 \tag{1.5}$$

В точках $(x_0, 0)$ единственность нарушается, поскольку, помимо решения $y_1(x) = (x - x_0)^3$, через эту точку проходит решение $y_2(x) = 0$, не совпадающее с y_1 ни в какой окрестности точки x_0. Таким образом, y_2 — особое решение.

Общее решение данного уравнения имеет сложную структуру. Оно является не просто объединением семейства (1.5) и функции $y(x) = 0$. Общее решение содержит ещё составные решения, то есть такие функции, графики которых составлены из частей графиков функций (1.5) и особого решения (рис. 1.6).

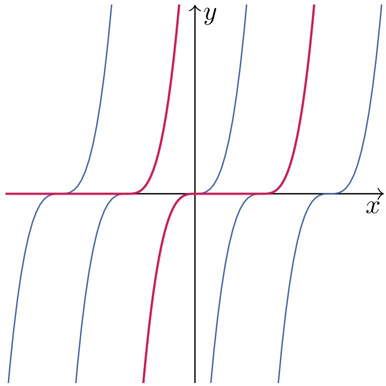

Рис. 1.6. Составные решения

Глава 2

Некоторые уравнения, интегрируемые в квадратурах

Если все решения дифференциального уравнения явно или неявно выражаются через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий, суперпозиций и операций нахождения первообразных, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах*[2]. Следует отметить, что это довольно узкий класс уравнений.

§2.1. Неполные уравнения первого порядка

2.1.1. Уравнение вида $y' = f(x)$

Уравнение первого порядка $y' = f(x)$, в котором правая часть зависит только от переменной x (*неполное* уравнение), является простейшим дифференциальным уравнением. Если $f \in C(a,b)$, то его общее решение даётся формулой

$$y = \int f(x)\,dx + C, \quad x \in (a,b), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ранее мы уже встречались с такими уравнениями (см. пример 1.1).

2.1.2. Уравнение вида $y' = f(y)$

Уравнение $y' = f(y)$ также является неполным, поскольку правая часть зависит только от одного аргумента, но теперь его роль играет искомая функция.

Предположим, что f непрерывна и не обращается в ноль на интервале (c,d). В этом случае, если $y(x)$ — решение данного уравнения, то его производная также не обращается в ноль. Таким образом, для функции $y(x)$ имеется обратная функция $x(y)$, а их производные связаны формулой $x'_y = 1/y'_x$.

Разделив обе части уравнения $y' = f(y)$ на $y' f(y)$, получаем

$$x' = \frac{1}{f(y)}.$$

[2] «Квадратура» — в прежние времена синоним слова «интеграл».

Это уравнение предыдущего типа, в котором x и y поменялись ролями. Его общий интеграл

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

неявно задаёт решения исходного уравнения.

Пример 2.1. Найти общий интеграл уравнения $y' = 1 + y^2$.

Решение. Правая часть уравнения не обращается в ноль ни при каких значениях y. Разделив обе части на $y'(1+y^2) \neq 0$, имеем

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{y'},$$

то есть

$$x' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Отсюда, интегрируя по y, находим

$$x = \operatorname{arctg} y + C, \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь случай, когда правая часть уравнения $y' = f(y)$ может обратиться в ноль. Если $f(y_0) = 0$, то $y \equiv y_0$ — решение, в чём убеждаемся подстановкой. При этом оно может оказаться особым. Для дальнейшего поиска интегральных кривых плоскость Oxy необходимо разбить на две части и рассматривать каждую из них в отдельности (рис. 2.1). Если функция f имеет не один, а больше корней, то и соответствующих областей будет больше.

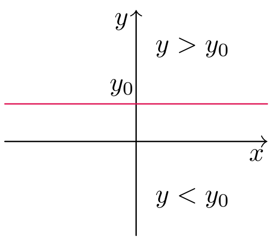

Рис. 2.1. Области поиска интегральных кривых в случае $f(y_0) = 0$

Изучим подробно уравнение, которое уже встречалось нам во введении.

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $y' = y$.

Решение. Правая часть $f(y) = y$ имеет корень $y_0 = 0$, поэтому тождественный ноль является решением.

Далее будем искать интегральные кривые, лежащие в полуплоскости, где $y > 0$. Разделив обе части на y, а затем на y', находим

$$x' = \frac{1}{y}.$$

Интегрируя правую часть, получаем

$$x = \ln|y| + C = \ln y + C. \tag{2.1}$$

Функция y отсюда выражается явно:

$$y = e^{x-C} = e^{-C}e^x = C_1 e^x,$$

где $C_1 > 0$ — произвольная положительная постоянная.

Легко понять, что в полуплоскости, где $y < 0$, решения определяются той же формулой, но при $C_1 < 0$. Рассуждения в этой области те же, лишь в формуле (2.1) модуль раскроется со знаком минус.

Ни одна из найденных интегральных кривых не пересекается с осью Ox, а значит, решение $y \equiv 0$ не является особым. Кроме того, оно получается из общего интеграла при $C_1 = 0$.

Таким образом, приходим к общему решению:

$$y = Ce^x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

§2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

2.2.1. Уравнение с разделёнными переменными

Определение. Уравнение в дифференциалах вида

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0 \tag{2.2}$$

называют ***уравнением с разделёнными переменными***.

Такое название мотивировано тем, что каждое его слагаемое зависит только от одной переменной.

Теорема 2.1 (общее решение уравнения с разделёнными переменными). *Пусть $X \in C(a,b)$, $Y \in C(c,d)$. Тогда*

(i) если y — решение на (α,β) уравнения (2.2), то при некотором значении $C \in \mathbb{R}$ функция y неявно задаётся уравнением

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = C; \tag{2.3}$$

(ii) если при некотором значении $C \in \mathbb{R}$ уравнение (2.3) неявно задаёт функцию $y \in C^1(\alpha,\beta)$, то y — решение уравнения (2.2) на (α,β).

Доказательство. (i) Покажем, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3) при любом $x \in (\alpha, \beta)$ и некотором $C \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\begin{aligned}\int X(x)\,dx + \int Y(y)dy &= \int X(x)\,dx + \int Y(y)y'\,dx \\ &= \int (X(x) + Y(y)y')\,dx.\end{aligned}$$

Так как по условию y — решение (2.2) на (α, β), то при любом $x \in (\alpha, \beta)$ подынтегральное выражение равно нулю. Следовательно, интеграл равен некоторой постоянной.

(ii) Покажем, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2.2) при любом $x \in (\alpha, \beta)$. Дифференцируя обе части (2.3), находим

$$X(x) + Y(y)y' = 0.$$

Исходя из условия, это равенство выполнено тождественно на (α, β). Следовательно, y — решение (2.2) на (α, β) по определению. □

Таким образом, чтобы получить общий интеграл уравнения (2.2), достаточно формально приписать с обеих сторон знаки интегралов. Возникающая при этом постоянная, вообще говоря, не может быть произвольной, что демонстрирует следующий пример.

Пример 2.3. Найти общий интеграл уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$.

Решение. Интегрируя уравнение, находим

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C.$$

Отсюда получаем общий интеграл

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где $r^2 = 2C > 0$. □

Замечание 2.1. Используя теорему о неявной функции можно показать, что если (x_0, y_0) — не особая точка уравнения (2.2), то через неё проходит единственная его интегральная кривая, которая задаётся уравнением

$$\int_{x_0}^{x} X(s)\,ds + \int_{y_0}^{y} Y(s)\,ds = 0.$$

При этом в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) это уравнение не определяет больше никаких других функций.

2.2.2. Уравнение с разделяющимися переменными

Определение. Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)\,dx + p_2(x)q_2(y)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

называют ***уравнением с разделяющимися переменными***.

При делении на $q_1(y)p_2(x)$ получается уравнение с разделёнными переменными. Однако, при этом необходимо убедиться, что не происходит деления на ноль.

Пусть $p_1, p_2 \in C(a,b)$, $q_1, q_2 \in C(c,d)$. Если $q_1(y_0) = 0$, то $y(x) \equiv y_0$, $x \in (a,b)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых всю область $(a,b)\times(c,d)$ требуется разбить на две подобласти, общей границей которых является прямая $y = y_0$.

Аналогично, если $p_2(x_0) = 0$, то $x(y) \equiv x_0$, $y \in (c,d)$ — решение исходного уравнения. Для поиска других интегральных кривых область $(a,b)\times(c,d)$ требуется разбить на две подобласти с общей границей $x = x_0$.

Разбив всю область поиска интегральных кривых на необходимое количество частей (рис. 2.2), нужно рассмотреть исходное уравнение на каждой части отдельно. На каждой такой подобласти его можно разделить на $q_1(y)p_2(x)$, не опасаясь получить ноль в знаменателе.

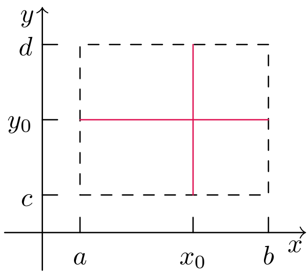

Рис. 2.2. Области поиска интегральных кривых, если $q_1(y_0) = 0$, $p_2(x_0) = 0$

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения

$$\sin x\,dy - y\ln y\,dx = 0$$

в области D: $-\pi < x < \pi$, $y > 0$.

Решение. Перенесём слагаемое с dx в правую часть:

$$\sin x\,dy = y\ln y\,dx. \tag{2.5}$$

Переменные разделятся, если обе части уравнения поделить на $\sin x \cdot y\ln y$. Это выражение может обращаться в ноль в области D: $\sin x = 0$ при $x = 0$,

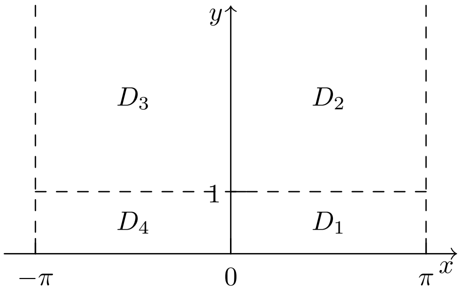

Рис. 2.3. Области поиска интегральных кривых уравнения $\sin x\,dy = y\ln y\,dx$

$\ln y = 0$ при $y = 1$. Отсюда следует, во-первых, что $x \equiv 0$ и $y \equiv 1$ — интегральные кривые уравнения. Во-вторых, область поиска других интегральных кривых разбивается на четыре части (рис. 2.3).

Рассмотрим область D_1. Разделив уравнение (2.5) на $\sin x \cdot y \ln y$, находим

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}. \tag{2.6}$$

Переходя к интегралам, получаем:

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{d\ln y}{\ln y} = \ln|\ln y| + C_1.$$

Интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$
$$= \int \frac{d\,(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C_2.$$

Таким образом,

$$\ln|\ln y| + C_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C_2.$$

Упростим эту формулу. Для этого запишем $C_2 - C_1 = \ln C_3$, где $C_3 > 0$. Тогда

$$\ln|\ln y| = \ln\left(C_3\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right).$$

Избавляясь от логарифмов, и переобозначая C_3 через C, получаем общее решение в области D_1:

$$|\ln y| = C\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad C > 0. \tag{2.7}$$

Поскольку при $(x, y) \in D_1$ будет $\ln y < 0$ и $\operatorname{tg}(x/2) > 0$, то можно ещё упростить формулу, избавившись от модулей:

$$-\ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

то есть

$$y = e^{-C \operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (0, \pi), \quad C > 0.$$

Заметим, что рассуждения, приведшие к формуле (2.7) для области D_1, остаются такими же и для областей D_2, D_3, D_4. Выбор области влияет лишь на то, каким образом раскрываются модули. В результате имеем

$$\begin{aligned} D_2: &\quad y = e^{C \operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (0, \pi), \\ D_3: &\quad y = e^{-C \operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (-\pi, 0), \\ D_4: &\quad y = e^{C \operatorname{tg}(x/2)}, \quad x \in (-\pi, 0). \end{aligned}$$

при этом во всех формулах C — произвольная *положительная* постоянная. Приведём графики некоторых решений (рис. 2.4).

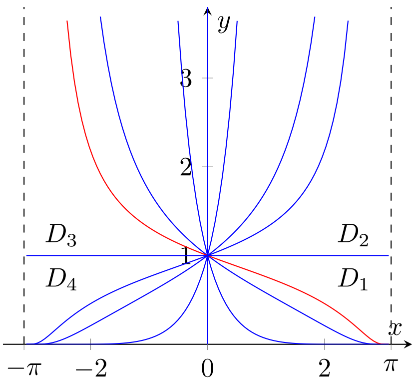

Рис. 2.4. Интегральные кривые уравнения $\sin x\, dy - y \ln y\, dx = 0$

Сделаем несколько замечаний относительно полученного результата. Во-первых, на интервале $(0, \pi)$ семейства решений $y = e^{C \operatorname{tg}(x/2)}$, $y = e^{-C \operatorname{tg}(x/2)}$, а также решение $y \equiv 1$ объединяются одной формулой

$$y = e^{C \operatorname{tg}(x/2)}, \tag{2.8}$$

если считать, что C может принимать не только положительные, а вообще любые вещественные значения. То же относится и к решениям на промежутке $(-\pi, 0)$. Формула при этом получается такой же, что и на $(0, \pi)$.

Во-вторых, если различные интегральные кривые уравнения (2.6) входят в точку $(0, 1)$ под одним углом, то их можно объединить в одну интегральную кривую уравнения (2.5). В данном случае эти кривые задаются единой формулой (2.8) на всём интервале $(-\pi, \pi)$. Одна из таких кривых изображена на рис. 2.4 красным цветом.

В-третьих, интегральная кривая $x \equiv 0$ не получается из формулы (2.8) ни при каком значении постоянной C, поэтому в ответе выпишем её отдельно.

Ответ: $y(x) = e^{C\,\mathrm{tg}(x/2)}$ при $x \in (-\pi, \pi)$, $C \in \mathbb{R}$; $x(y) = 0$ при $y \in (0, +\infty)$. □

§2.3. Однородное уравнение

Определение. Функция $F(x, y)$ называется ***однородной функцией*** степени α, если при всех допустимых t, x и y верно равенство

$$F(tx, ty) = t^{\alpha} F(x, y).$$

Примеры однородных функций: $x + y + z$ (первой степени), $x^2 + 3xy + y^2$ (второй степени), $(y/x)\cos(x/y)$ (нулевой степени), $\frac{\sqrt{x+y}}{x^2+y^2}$ (степени $-3/2$).

Определение. Пусть P и Q — однородные функции одной степени. Тогда уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{2.9}$$

называется ***однородным уравнением.***

Заметим, что к нему приводится уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

и поэтому оно тоже называется однородным.

Введение новой искомой функции $z = y/x$ сводит уравнение (2.9) к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 2.5. Решить уравнение

$$(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0.$$

Решение. Данное уравнение — однородное, поскольку коэффициенты при dx и dy суть однородные функции второй степени однородности. Будем рассматривать уравнение в полуплоскости, где $x > 0$. Воспользуемся подстановкой

$$y = xz(x),$$

тогда $dy = x\,dz + z\,dx$. Уравнение преобразуется к виду

$$x^3(1 - z)\,dz + x^2 z\,dx = 0.$$

Разделив обе части на $x^3 \neq 0$ и перенеся слагаемое с dx в правую часть, находим

$$(1 - z)\,dz = -\frac{z}{x}\,dx. \tag{2.10}$$

Прежде, чем делить на z, отметим, что $z \equiv 0$ является решением данного уравнения. При $z > 0$ имеем

$$\frac{1-z}{z}\,dz = -\frac{dx}{x}.$$

Вычисляя интегралы от правой и левой части, получаем

$$\ln|z| - z = -\ln|x| + C_1. \tag{2.11}$$

Отсюда после потенцирования и раскрытия модулей находим

$$ze^{-z} = \frac{C}{x},$$

где $C = e^{C_1} > 0$.

В области $z < 0$ модуль в левой части уравнения (2.11) раскроется с противоположным знаком. Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения (2.10) задаётся формулой

$$ze^{-z} = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Возвращаясь к прежней переменной $y = xz$, находим

$$ye^{-y/x} = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Рассуждения в области $x < 0$ остаются такими же, поменяется лишь знак при раскрытии модуля в правой части (2.11). При этом общий интеграл (2.12) не изменится.

До этого момента прямая $x = 0$ исключалась из рассмотрения. Она может оказаться интегральной кривой исходного уравнения, и в данном случае это действительно так, в чём убеждаемся непосредственной подстановкой.

Может оказаться, что полученные интегральные кривые гладко сшиваются в точках прямой $x = 0$, образуя составные решения. Более детальный анализ формулы (2.12) показывает, что эта ситуация также реализуется для данного уравнения (составные кривые проходят через начало координат).

$\square$

Однородное уравнение не изменится, если в нём вместо x и y подставить, соответственно, tx и ty. Это преобразование координат соответствует растяжению (при $t > 1$) или сжатию (при $0 < t < 1$) всей плоскости относительно начала координат. Следовательно, такое преобразование плоскости любую интегральную кривую однородного уравнения переводит в другую интегральную кривую того же уравнения.

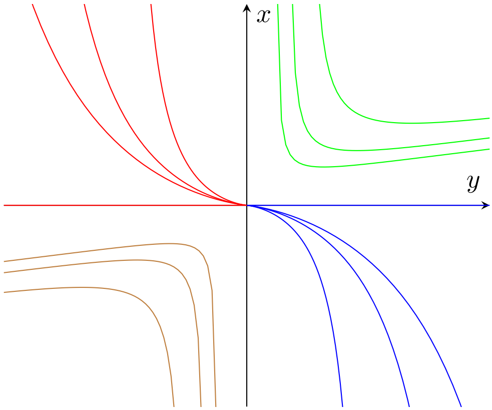

Рис. 2.5. Интегральные кривые уравнения $(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0$.

§2.4. Линейное уравнение первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{2.13}$$

называется ***линейным уравнением первого порядка***.

Название *линейное* мотивировано тем, что оно составлено из многочленов первой степени по отношению к символам y и y'.

Определение. Уравнение (2.13) называется ***однородным***, если $q \equiv 0$ на (a, b), иначе — ***неоднородным***.

Лемма 2.1 (общее решение ЛОУ 1-го порядка). *Пусть $p \in C(a, b)$. Тогда общее решение уравнения*

$$y' = p(x)y \tag{2.14}$$

на промежутке (a, b) даётся формулой

$$y(x) = Ce^{\int p(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Заметим, что функция, тождественно равная нулю на (a, b), является решением уравнения (2.14). По теореме единственности 1.2 никакое другое решение не пересекает координатную ось x.

В области, где $y > 0$, исходное уравнение равносильно

$$\frac{dy}{y} = p(x)\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln y = \int p(x)\, dx + C.$$

Отсюда

$$y = Ae^{\int p(x)\, dx}, \quad A > 0.$$

По теореме 2.1 полученное соотношение описывает все интегральные кривые в области, где $y > 0$.

Аналогичный результат получается при $y < 0$. Таким образом, все решения имеют вид

$$y = Ce^{\int p(x)\, dx},$$

где $C \in \mathbb{R}$. $\square$