Aㅏ 두이노로
Bbㅏ 르게 배우는
Control of
DRONE

Lecture 2: 쿼드콥터 운동특성 이해 및 시뮬레이션

이성헌 | 항공우주공학과 / 박사과정
심태민 | 항공우주공학과 / 박사과정

목차

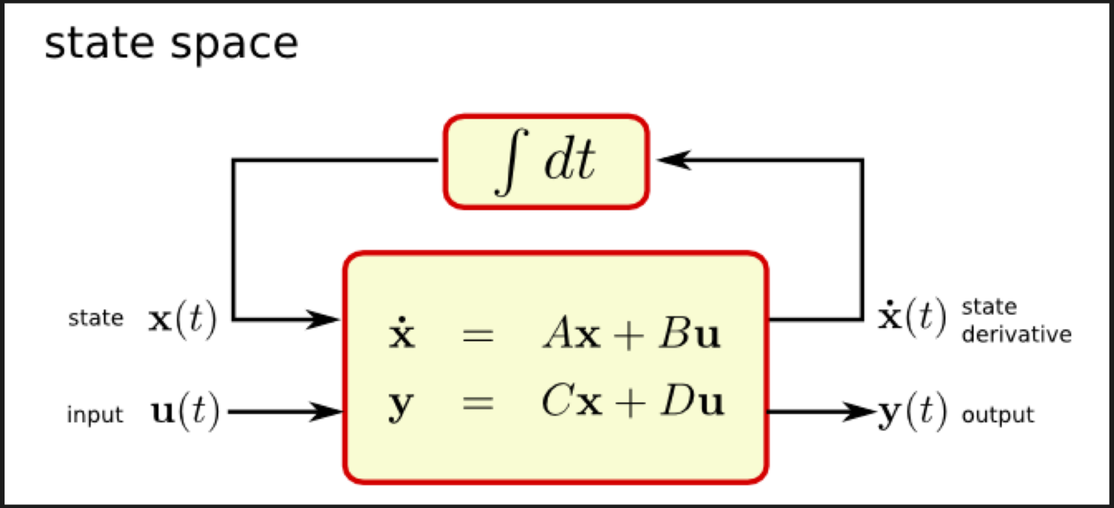
Chapter 1

사전 지식

사전 지식

상태 공간 방정식 (State Space Equation)

상태 공간 : 어떠한 물리적 계를 입력, 출력, 상태 변수의 1차 미분 방정식으로 표현하는 수학 모델
상태 변수 : 어떤 주어진 **순간**, 전체 **시스템의 상태를 표현**할 수 있는 최소한의 시스템 변수



드론 시스템에서의 상태 변수?

3차원 위치 (x, y, z)
3축 자세 (ϕ (Roll) , θ (Pitch), ψ (Yaw))

3차원 속도 (u, v, w)
3축 각속도 (p, q, r)

사전 지식

Euler Method

상태 공간 방정식을 기술하는 미분 방정식은, 연속적으로 정의됨.
그러나 실제 계산 및 활용을 위해서는, 연속적인 시간을 일정한 시간 간격 (timestep)으로 분할하여 나타낼 필요가 있으며, 이를 위해 이산화 과정이 필요!

$$\dot{x} = f(x) \longrightarrow x(t + dt) = x(t) + \,?$$

이를 위한 다양한 방법론이 존재하지만, 그 중 가장 간단하고 널리 사용되는 방법이 바로 Euler Method

$$x(t + dt) = x(t) + dt \, * \, \dot{x}(t)$$

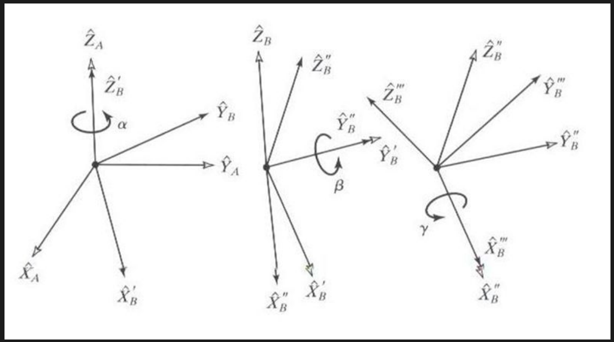
동역학 시간에 Runge-Kutta Method를 배웠거나/배우게 될 것

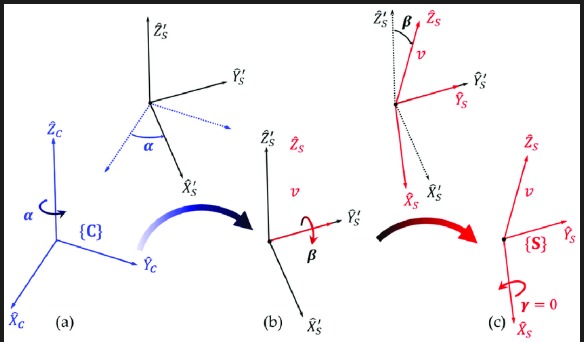
사전 지식

오일러 각 (Euler Angle)

강체의 자세를 표현하기 위한 3개의 각도.
강체에 고정된 Body Frame 좌표계와, 고정된 기준 좌표계를 각각 정의
고정된 기준 좌표계를 3번 회전시켜 Body Frame 좌표계와 일치 시킴
이때 3번의 회전을 나타내는 각도를 오일러 각도라고 하는데…

축의 조합이 매우 다양하지만, 그 중 항공우주공학 분야에서 사용하는 오일러 각의 정의는 아래와 같음.





Z 축 회전 - 회전하고 난 후 의 Y축 (Y')축 회전 - 2번 회전 하고 난 후의 X축 (X")축 회전)

이를 수식으로 나타내면,

$$
\begin{aligned}
&R_X R_Y R_Z \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ 0 & \sin A & \cos A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ \sin A \sin B & \cos A & -\sin A \cos B \\ -\cos A \sin B & \sin A & \cos A \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C & 0 \\ \sin C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos B \cos C & -\cos B \sin C & \sin B \\ \sin A \sin B \cos C + \cos A \sin C & -\sin A \sin B \sin C + \cos A \cos C & -\sin A \cos B \\ -\cos A \sin B \cos C + \sin A \sin C & \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos C & \cos A \cos B \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

사전 지식

오일러 각에서의 짐벌 락 (Gimbal Lock) 현상

만약 pitch 각도가 90도가 된다면 어떻게 될까?

회전 하기 전의 z축 = 2번 회전 하고 난 후의 x축 (x''축)

즉, 두 개의 축을 기준으로 한 회전으로만 물체의 회전을 기술해야하는 상황에 처하게 되고, 결과적으로 회전을 제대로 나타낼 수 없는 상황에 직면하게 됨!

이를 회피하기 위한 방법?

1. 피치가 90도가 되지 않도록, 89나 91정도까지의 값만 가지도록 함 (아폴로 11호)
2. 회전의 순서를 바꾸거나, 임의의 새로운 축을 이용한다.
3. 쿼터니언 개념을 사용

쿼터니언 - quarternion - 사원수

넓은 개념으로는, 복소수보다 한층 더 높은 개념의 수 체계

4개의 실수 q_0, q_1, q_2, q_3를 이용해 정의한 사원수 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \cdots$

자세한 내용은 skip!

사전 지식

퀘터니언의 유용한 성질

1. 회전 행렬의 표현

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_0q_2+q_1q_3) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_0q_1+q_2q_3) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}$$

2. 오일러 각과 쿼터니언의 변환

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\mathrm{IB}} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2)+\sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2)-\cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2)+\sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2)-\sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{atan2}(2(q_0q_1+q_2q_3), 1-2(q_1^2+q_2^2)) \\ \mathrm{asin}(2(q_0q_2-q_3q_1)) \\ \mathrm{atan2}(2(q_0q_3+q_1q_2), 1-2(q_2^2+q_3^2)) \end{bmatrix}$$

사전 지식

쿼터니언의 유용한 성질

1. 회전 행렬의 표현

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

2. 오일러 각과 쿼터니언의 변환

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\mathrm{IB}} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

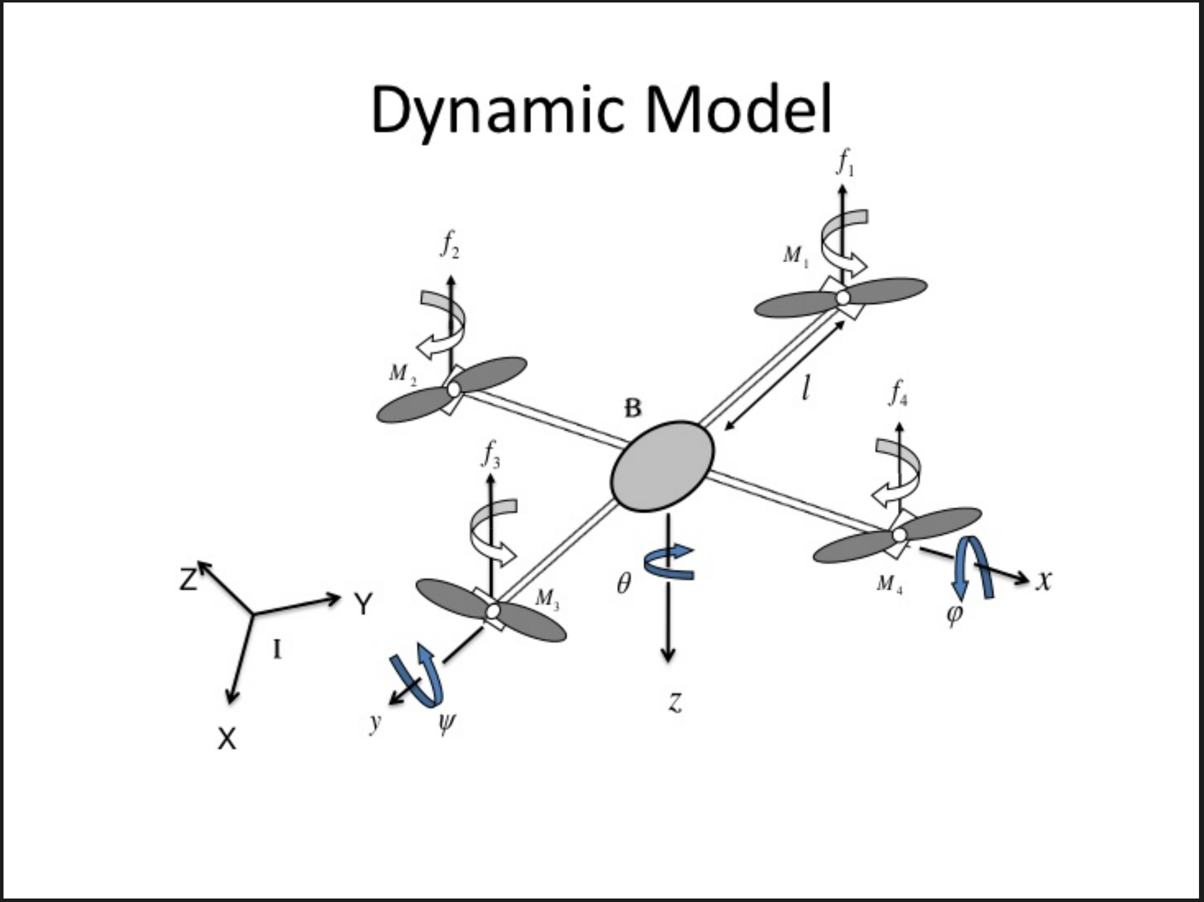
$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{atan2}(2(q_0 q_1 + q_2 q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)) \\ \mathrm{asin}(2(q_0 q_2 - q_3 q_1)) \\ \mathrm{atan2}(2(q_0 q_3 + q_1 q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)) \end{bmatrix}$$

Chapter 2

쿼드 로터 동역학

쿼드로터 운동학

쿼드로터 운동 좌표계



쿼드로터 운동학

쿼드로터 운동학 (Kinematics)

운동학 (Kinematics)와 동역학 (Dynamics)

운동학 (Kinematics)는 힘과 모멘트가 주어진 상황에서, 운동이 어떻게 일어나는지를 기술
동역학 (Dynamics)는, 힘과 모멘트의 발생 원인에 대해서 전부 기술

우리는, Kinematics를 중점적으로, Dynamics의 일부만을 다룸!

위치(X)의 운동학

뉴턴의 운동 방정식 $F = ma$ 을 이용하자. 여기서 F의 성분은 (1) 중력 F_g(2) 프로펠러 추력의 합 F_T 의 두 가지만을 고려한다.

$$m\ddot{X} = R(\psi, \theta, \psi) * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

또한, 위치의 미분인 속도는 상태 변수에 그대로 존재하므로, 그 값을 그대로 쓴다.

쿼드로터 운동학

자세(η)의 운동학

모멘트 관계식인 $\tau = I\alpha = I\ddot{\eta}$을 이용하자. 여기서 M의 성분은 (1) 모터의 추력에 의한 토크 (2) 자이로스코픽 이펙트 만을 고려한다.

$$I\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} - \omega \times I \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_1 - \Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_4 \end{bmatrix}$$

마지막으로, 쿼터니언의 미분은 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

감사합니다. 이제 실습으로!