

Projekt 1, zadanie 18

Andrii Voznesenskyi, 323538

Grupa 6b, czwartek 12:15

12 grudnia 2023

- ◀ Zdefiniowano zadanie: Obliczanie całek postaci

$$I(f, x, y) = \int \int_D f(x, y) dx dy,$$

gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r = 1\}$ przez transformację na kwadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ i zastosowanie złożonych kwadratur trapezów ze względu na każdą zmienną.

- ◀ Zostały wybrane dwie szczególne postaci przekształcenia współrzędnych transformacji kwadratu na koło do porównania uzyskanych wyników.
- ◀ Metoda złożonych kwadratur trapezów polega na podziale obszaru całkowania na mniejsze segmenty, gdzie wartość całki jest aproksymowana sumą wartości funkcji w punktach siatki pomnożonych przez odpowiednie wagi.
- ◀ Znaczącą cechą tej metody jest jej drugi rząd zbieżności, co oznacza, że błąd przybliżenia maleje proporcjonalnie do kwadratu długości kroku siatki.

Metoda w zadaniu

- ◀ Zadanie polega na obliczeniu wartości całki podwójnej $\int \int_D f(x, y) dx dy$, gdzie D jest obszarem koła jednostkowego $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- ◀ Proces przekształcenia: Wykorzystujemy transformację, która mapuje kwadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ na koło jednostkowe, która jest opisana przez funkcje $\phi_\tau(x, y)$ i $\psi_\tau(x, y)$, gdzie $\tau = 1, 2$.
- ◀ Zastosowanie Jakobianu: Do przeliczenia elementu powierzchni przy zmianie zmiennych używamy Jakobianu transformacji $J_{\phi_\tau(x, y), \psi_\tau(x, y)}(x, y)$.
- ◀ Przybliżenie całki po transformacji:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m A_{ij} f(\phi_\tau(x_i, y_j), \psi_\tau(x_i, y_j)) J_{\phi_\tau(x_i, y_j), \psi_\tau(x_i, y_j)}(x_i, y_j)$$

gdzie A_{ij} są wagami kwadratury trapezów, a x_i, y_j są punktami na podzielonym obszarze kwadratu oraz indeksy i i j odpowiadają pozycji punktu na siatce podziału obszaru całkowania. Wyrażenie po prawej stronie przybliżonej równości oznaczmy $St_{\phi_\tau(x, y), \psi_\tau(x, y)}(f, x, y)$

- ◀ Wagi są obliczane w następujący sposób:

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } i = 1 \text{ lub } i = n \text{ oraz } j = 1 \text{ lub } j = m \\ \frac{1}{2} & \text{(dla } i = 1 \text{ lub } i = n \text{ oraz } 1 < j < m) \text{ lub (dla } j = 1 \text{ lub } j = m \text{ oraz } 1 < i < n) \\ 1 & \text{dla punktów wewnętrznych} \end{cases}$$

Transformacje z Kwadratu na Koło

Transformacje z kwadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ na obszar koła D są przedstawione jako:

◀ Transformacja 1:

•

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x, y) \\ \psi_1(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot \cos(\pi \cdot (y + 1)) \\ \frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot \sin(\pi \cdot (y + 1)) \end{bmatrix}$$

◀ Transformacja 2:

•

$$\begin{bmatrix} \phi_2(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot y^2} \\ y \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot x^2} \end{bmatrix}$$

Metodologia Eksperymentów

- ◀ Eksperymenty numeryczne realizowane za pomocą funkcji ``numtest0``, ``numtest1``, ``numtest3``.
- ◀ **numtest0**: Badanie zastosowania transformacji w metodzie złożonych trapezów do przybliżania podwójnych całek. Testowane funkcje to m.in. $x^2 + y^2$, $x \cdot y$, $e^{-x^2-y^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^4 \cdot y^2$, $e^{x^2+y^2}$. Analizowano błędy bezwzględne w zależności od liczby podziałów siatki całkowania.
- ◀ **numtest1**: Test zbieżności złożonej metody trapezów z uwzględnieniem różnych funkcji. Klucowym celem było obserwowanie, jak zmienia się błąd przybliżenia w miarę zwiększania liczby podziałów siatki. Oczekiwany był spadek błędu proporcjonalny do kwadratu długości kroku siatki (h^2).
- ◀ **numtest3**: Testy obu transformacji względem stosowanej metody trapezów, wizualizacja błędów przybliżenia dla różnych funkcji i transformacji.

Cel testu numerycznego numtest0

Cel Testu

- ▶ Głównym celem testu numtest0 jest zbadanie skuteczności metody złożonych kwadratur trapezów w przybliżaniu wartości podwójnych całek dla różnych funkcji testowych po zastosowaniu specyficznych transformacji. Test skupia się na analizie, jak dokładność przybliżenia zmienia się wraz ze zwiększaniem liczby podziałów siatki całkowania. Badane funkcje obejmują typowe przypadki, takie jak $x^2 + y^2$, $x \cdot y$, $e^{-x^2-y^2}$, $e^{x^2+y^2}$, $x^4 \cdot y^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}$, xy . Wyniki szczegółowe dla funkcji $x^2 + y^2$, $e^{-x^2-y^2}$, $x^4 \cdot y^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ są przedstawione odpowiednio w Tabelach 1, 2, 3 i 4.
- ▶ Celem jest ocena, czy zwiększanie liczby podziałów siatki prowadzi do znaczącej poprawy dokładności przybliżenia względem stosowanego przekształcenia, a także porównanie efektywności transformacji dla tych funkcji.

Oznaczenia Testu Numerycznego numtest0

Oznaczenia

- ▶ $|E_1| := |I(f, x, y) - St_{\phi_1(x, y), \psi_1(x, y)}(f, x, y)|$ - błąd bezwzględny przybliżenia całki podwójnej przy stosowaniu pierwszej transformacji.
- ▶ $|E_2| := |I(f, x, y) - St_{\phi_2(x, y), \psi_2(x, y)}(f, x, y)|$ - błąd bezwzględny przybliżenia całki podwójnej przy stosowaniu drugiej transformacji.
- ▶ $St_1 := St_{\phi_1(x, y), \psi_1(x, y)}(f, x, y)$ - przybliżona wartość całki względem stosowania transformacji 1 po zastosowaniu złożonej kwadratury trapezów ze względu na każdą zmienną.
- ▶ $St_2 := St_{\phi_2(x, y), \psi_2(x, y)}(f, x, y)$ - przybliżona wartość całki względem stosowania transformacji 2 po zastosowaniu złożonej kwadratury trapezów ze względu na każdą zmienną.

Tabela Wyników numtest0 dla $f(x, y) = x^2 + y^2$

n	m	St ₁	St ₂	l(f, x, y)	E ₁	E ₂
400	400	1.570806	1.570792	$\pi/2$	9.8175×10^{-6}	4.7565×10^{-6}
800	800	1.570799	1.570795		2.4544×10^{-6}	1.1892×10^{-6}
1000	1000	1.570798	1.570796		1.5708×10^{-6}	7.6106×10^{-7}
5000	5000	5.398142	5.3981415		1.4985×10^{-7}	8.2751×10^{-8}
10000	10000	5.398142	5.398142		3.7463×10^{-8}	2.0688×10^{-8}

Tabela 1: Wyniki dla $f(x, y) = x^2 + y^2$ w eksperymencie numtest0.

Tabela Wyników numtest0 dla $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

n	m	St ₁	St ₂	I(f, x, y)	E ₁	E ₂
400	400	1.985861	1.985854	$\pi(1 - e^{-1})$	4.4764×10^{-6}	1.1381×10^{-5}
800	800	1.985864	1.985862		1.1191×10^{-6}	2.8452×10^{-6}
1000	1000	1.985865	1.985863		7.1622×10^{-7}	1.8209×10^{-6}
5000	5000	1.985865	1.985865		2.8649×10^{-8}	7.2838×10^{-8}
10000	10000	1.985865	1.985865		7.1622×10^{-9}	1.8209×10^{-8}

Tabela 2: Wyniki dla $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ w eksperymencie numtest0.

Tabela Wyników numtest0 dla $f(x, y) = x^4 \cdot y^2$

n	m	St ₁	St ₂	I(f, x, y)	E ₁	E ₂
400	400	0.049089	0.049087	$\pi/64$	1.4317×10^{-6}	8.7997×10^{-7}
800	800	0.049088	0.049087		3.5793×10^{-7}	2.1999×10^{-7}
1000	1000	0.049088	0.049087		2.2907×10^{-7}	1.4079×10^{-7}
5000	5000	0.049087	0.049087		9.1630×10^{-9}	5.6318×10^{-9}
10000	10000	0.049087	0.049087		2.2907×10^{-9}	1.4079×10^{-9}

Tabela 3: Wyniki dla $f(x, y) = x^4 \cdot y^2$ w eksperymencie numtest0.

Tabela Wyników numtest0 dla $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

n	m	St ₁	St ₂	I(f, x, y)	E ₁	E ₂
400	400	2.094402	2.094384	$2\pi/3$	6.5450×10^{-6}	1.1330×10^{-5}
800	800	2.094397	2.094392		1.6362×10^{-6}	2.8290×10^{-6}
1000	1000	2.094396	2.094393		1.0472×10^{-6}	1.8101×10^{-6}
5000	5000	2.094395	2.094394		4.1888×10^{-8}	7.2345×10^{-8}
10000	10000	2.094395	2.094395		1.0472×10^{-8}	1.8084×10^{-8}

Tabela 4: Wyniki dla $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w eksperymencie numtest0.

Cel Testu Numerycznego numtest1

Cel Testu

- ◀ Celem testu numtest1 jest oszacowanie szybkości zbieżności rzędu złożonej metody trapezów stosowanej po transformacji.
- ◀ Wyniki testu są przedstawione w Tabeli 5.

Oznaczenie 'k'

- ◀ Symbol 'k' w kontekście testu numtest1 odnosi się do kroku iteracji w procesie zwiększania rozdzielczości siatki całkowania, gdzie 'k-1' oznacza poprzedni krok, a 'k' obecny krok.
- ◀ Wartość r_i^k jest miarą, jak szybko błąd przybliżenia spada, gdy liczba podziałów siatki się podwaja.

Rząd Zbieżności

- ◀ Rząd zbieżności r_i^k jest miernikiem efektywności metody numerycznej, wskazującym, o ile razy błąd zmniejsza się przy podwojeniu liczby podziałów siatki.
- ◀ Teoretyczna wartość dla metody drugiego rzędu wynosi 2, co oznacza, że błąd powinien zmniejszyć się czterokrotnie, gdy liczba podziałów siatki jest podwajana.

Oznaczenia Testu Numerycznego numtest1

Oznaczenia

- ▶ $|E_1| := |I(f, x, y) - St_{\phi_1(x, y), \psi_1(x, y)}(f, x, y)|$ - błąd bezwzględny przybliżenia całki podwójnej przy stosowaniu pierwszej transformacji.
- ▶ $|E_2| := |I(f, x, y) - St_{\phi_2(x, y), \psi_2(x, y)}(f, x, y)|$ - błąd bezwzględny przybliżenia całki podwójnej przy stosowaniu drugiej transformacji.
- ▶ r_1^k - Rząd zbieżności dla pierwszej transformacji.
- ▶ r_2^k - Rząd zbieżności dla drugiej transformacji.
- ▶ Rząd zbieżności r_m^k jest obliczany jako: $r_m^k \approx \log_2 \left(\frac{|E_{m, k-1}|}{|E_{m, k}|} \right)$, gdzie m to numer transformacji, k - iteracja po zwiększeniu liczby podziałów podprzedziałów (rozmiaru siatki).

Tabela 5: Szczegółowe wyniki dla różnych funkcji testowych z eksperymentu numtest1.

$f(x, y)$	n	m	$ E_1 $	$ E_2 $	r_1^k	r_2^k
$x^2 + y^2$	40	40	9.8175×10^{-4}	4.7471×10^{-4}	-	-
	80	80	2.4544×10^{-4}	1.1886×10^{-4}	2	2
	160	160	6.1359×10^{-5}	2.9725×10^{-5}	2	2
$\exp(-x^2 - y^2)$	40	40	4.4767×10^{-4}	1.1383×10^{-3}	-	-
	80	80	1.1191×10^{-4}	2.8453×10^{-4}	2	2
	160	160	2.7977×10^{-5}	7.1131×10^{-5}	2	2
$\sqrt{x^2 + y^2}$	40	40	6.5450×10^{-4}	$1.1583e \times 10^{-3}$	-	-
	80	80	1.6362×10^{-4}	2.8609×10^{-4}	2	2.02
	160	160	4.0906×10^{-5}	7.1080×10^{-5}	2	2.01
	320	320	1.0227×10^{-5}	1.7715×10^{-5}	2	2.00
$x^4 \cdot y^2$	40	40	1.4313×10^{-4}	8.8025×10^{-5}	-	-
	80	80	3.5790×10^{-5}	$2.2001e \times 10^{-5}$	2	2
$\exp(x^2 + y^2)$	40	40	2.3411×10^{-3}	1.2906×10^{-3}	-	-
	80	80	5.8533×10^{-4}	3.2310×10^{-4}	2	2

Cel Testu Numerycznego numtest3

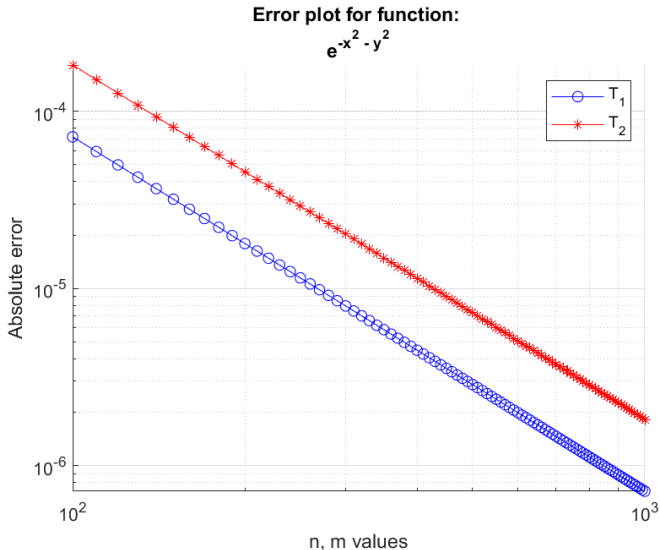
Cel Testu

- ◀ Celem testu numtest3 jest zbadanie efektywności i dokładności transformacji zastosowanych w metodzie złożonych kwadratur trapezów do przybliżania podwójnych całek.
 - ◀ Kluczowym elementem testu jest również wizualizacja zmian błędów przybliżenia dla różnych funkcji i transformacji w zależności od liczby podziałów siatki całkowania.
 - ◀ Wyniki testu dla funkcji wykorzystanych w numtest0 są przedstawione na Rysunkach 1, 2, 3, 4 oraz 5.
-
- ◀ Zaobserwowano różnice w błędach dla różnych transformacji, potwierdzając skuteczność metody w zależności od wybranej transformacji.
 - ◀ Zastosowanie animacji pozwoliło na dynamiczne obserwowanie zmian błędów w zależności od parametrów siatki całkowania.

Oznaczenia wykorzystane dla wykresów

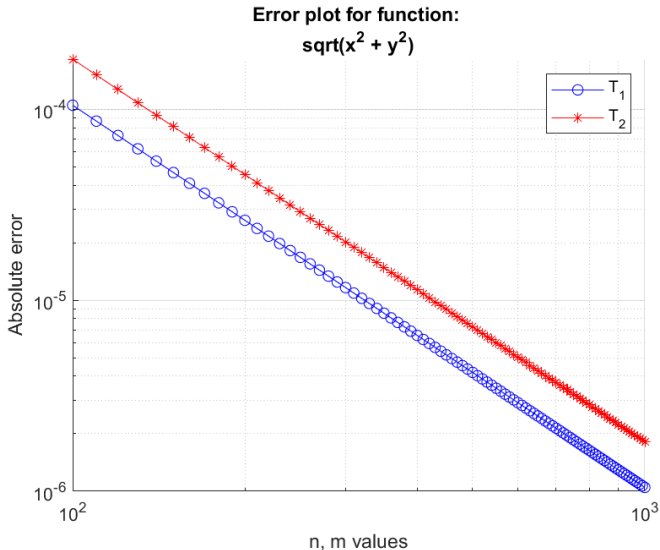
- ◀ T_1 - wartość błędu bezwzględnego $|E_1| = |I(f, x, y) - St_{\phi_1(x,y), \psi_1(x,y)}(f, x, y)|$
- ◀ T_2 - wartość błędu bezwzględnego $|E_2| = |I(f, x, y) - St_{\phi_2(x,y), \psi_2(x,y)}(f, x, y)|$

Wyniki numtest3 - Wykresy



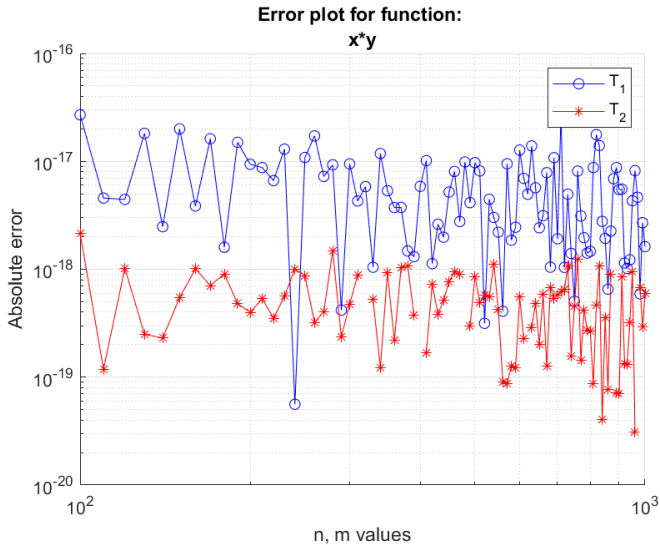
Rysunek 1: Zależność błędu od liczby podziałów dla funkcji $\exp(-x^2 - y^2)$

Wyniki numtest3 - Wykresy



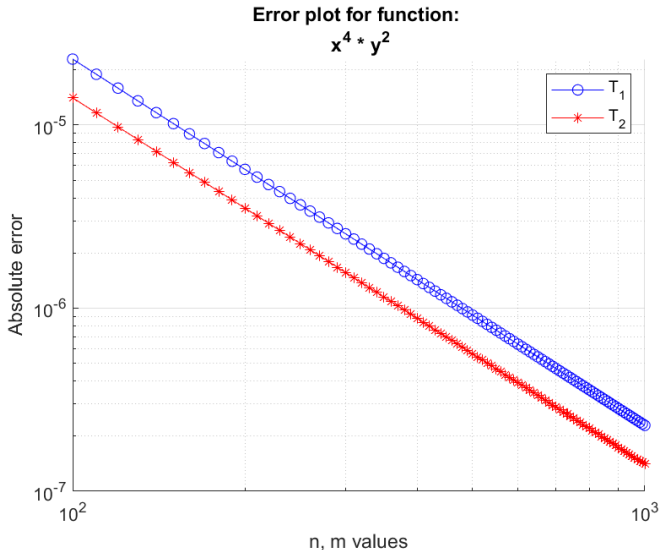
Rysunek 2: Porównanie różnych transformacji dla funkcji $\sqrt{x^2 + y^2}$

Wyniki numtest3 - Wykresy



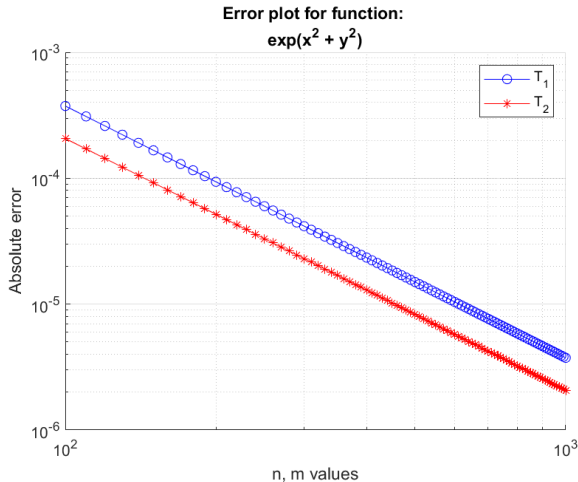
Rysunek 3: Porównanie efektywności transformacji dla różnych funkcji xy

Wyniki numtest3 - Wykresy



Rysunek 4: Analiza błędów dla funkcji $x^4 \cdot y^2$ z różnymi transformacjami

Wyniki numtest3 - Wykresy



Rysunek 5: Wizualizacja wpływu liczby podziałów na błąd dla funkcji $\exp(x^2 + y^2)$