PaweÂł Keller, 999999, grupa 7, projekt 0, zadanie 00

WstĂŞp

Po krĂłtkiej naradzie, razem z WykÂładowcÂą zdecydowaliÂśmy siĂŞ udostĂŞpniĂ¦ PaĂ±*stwuniemal*
stwoczytaj.Przypominam, ewstppowinienzawieraopisanwasnymisowamiiwtrybieoznajmujcymtrezada

ProszĂŞ zwrĂłciĂ¦ rĂłwnieÂż uwagĂŞ, Âże w rozdziale opisujÂącym danÂą metodĂŞ numerycznÂą (proszĂŞ pamiĂŞtaĂ¦ o odpowiedniej modyfikacji tytuÂłu tego rozdziaÂłu — jeÂżeli ktoÂś odda raport z pozostawionym z tego przykÂładu tytuÂłem drugiego rozdziaÂłu, to odejmĂŞ za to 3 punkty!) wszystkie uÂżywane symbole i pojĂŞcia sÂą tam zdefiniowane. Innymi sÂłowy, nie wolno uÂżywaĂ¦ pojĂŞĂ¦ lub symboli wczeÂśniej niezdefiniowanych (najpĂłÂźniej naleÂży definiowaĂ¦ symbol/pojĂŞcie w zdaniu nastĂŞpujÂącym po tym, w ktĂłrym jest uÂżyty po raz pierwszy). Nie dotyczy to oczywiÂście pojĂŞĂ¦ ogĂłlnie znanych (np. *caÂłka*).

Rozszerzony zostaÂł teÂż *Dodatek* o dowody dwĂłch teoretycznych faktĂłw. Nie jest to jednak przykÂład jak *Dodatek* (raport) koniecznie powinien wyglÂądaĂ¦, a jedynie drobne uzupeÂłnienie materiaÂłu z poprzedniego semestru — jeÂśliby kogoÂś to zainteresowaÂło — oraz kilka dodatkowych, przykÂładowych wzorĂłw matematycznych. Dodano rĂłwnieÂż bardzo waÂżnÂą *UwagĂŞ koĂ±cow*.

Opis metody Newtona

ZaÂłĂłÂżmy, Âże α jest r-krotnym pierwiastkiem pewnej r-krotnie rĂłÂżniczkowalnej funkcji f, czyli takim, Âże $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0$ oraz $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Wtedy dla przybliÂżenia poczÂątkowego x_0 zmodyfikowana metoda Newtona wyznacza kolejne przybliÂżenia x_k $(k \geq 1)$ pierwiastka α zgodnie z nastĂŞpujÂącym wzorem:

$$x_k = x_{k-1} - r\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}. \tag{1}$$

JeÂżeli bÂłÂąd $|e_0|$, gdzie $e_k = x_k - \alpha$ $(k \geq 0)$, jest odpowiednio maÂły, to

$$|e_k| \leq C|e_{k-1}|^2 \qquad (k \geq 1)$$

dla pewnej staÂłej C. Oznacza to, Âże wystarczy juÂż kilka iteracji, aby przybliÂżyĂ¦ pierwiastek α z kilkunastocyfrowÂą dokÂładnoÂściÂą.

PoniewaÂż nie jest znana wystarczajÂąca liczba iteracji potrzebna do wyznaczenia pierwiastka z pewnÂą zadanÂą dokÂładnoÂściÂą, w praktycznej realizacji metody Newtona uÂżytej do wykonania eksperymentĂłw opisanych w raporcie, iteracje (1) *wykonuje siĂŞ do momentu, aÂż*

$$E_k := |x_k - x_{k-1}| \leq \delta \tag{2}$$

dla pewnej zadanej tolerancji $\delta > 0$. Dodatkowo, obliczenia sÂą przerywane, jeÂśli wartoÂśĂ¦ k w (1) *robi siĂŞ nazbyt duÂża lub gdy $f(x_{k-1}) = 0$. Ten ostatni warunek jest konieczny, poniewaÂż w wypadku zer wielokrotnych mamy wtedy $f'(x_{k-1}) = 0$. W* Dodatku *wykazano, Âże w otoczeniu wielokrotnego pierwiastka zachodzi nierĂłwnoÂśĂ¦ $|f(x_{k-1})| < |f'(x_{k-1})|$.*

Eksperymenty numeryczne

ZauwaÂżmy, Âże gdy mamy obliczone trzy kolejne bÂłĂŞdy przybliÂżenia: e_{k-1}, e_k i e_{k+1}, to moÂżemy Âłatwo szacowaĂ¦ wykÂładnik zbieÂżnoÂści metody. PrzyjmujÂąc, Âże $|e_{k+1}| \simeq C|e_k|^p$ oraz $|e_k| \simeq C|e_{k-1}|^p$, to po zlogarytmowaniu powyÂższych dwĂłch przybliÂżonych rĂłwnoÂści i odjĂŞciu stronami, dostaniemy

$$p \simeq \log\Big(\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}\Big)\log\Big(\frac{|e_k|}{|e_{k-1}|}\Big)^{-1}.$$

W tabeli 1 przedstawiono wyniki obliczeĂ±dlakilkuwybranychfunkcjiforazkilkuwartociparametrurw(1).
−−kolejnetrzybdyniemalaylubniebyymniejszenijeden).Podanotewartooszacowania(2)dlaostatniej(k−t
Jak widaĂ¦, przy odpowiednio dobranej wartoÂści r (rĂłwnej krotnoÂści pierwiastka) otrzymujemy najszybszÂą zbieÂżnoÂśĂ¦, co najmniej rzĂŞdu 2. W wypadku dwĂłch ostatnich przykÂładĂłw z tabeli, przy optymalnym doborze parametru r, zbieÂżnoÂśĂ¦ jest aÂż szeÂścienna, co potwierdzono dowodem teoretycznym w Dodatku. *Na podstawie otrzymanych wynikĂłw widaĂ¦ rĂłwnieÂż, Âże zÂłe dobranie parametru r moÂże skoĂ±czysiwmaointeresujcysposb.Jelinieznamyz*
InteresujÂący wydaje siĂŞ ostatni przykÂład z tabeli 1, dla ktĂłrego nie udaÂło siĂŞ obliczyĂ¦ przybliÂżenia pierwiastka z bÂłĂŞdem mniejszym niÂż 1.06×10^{-9} *(algorytm „utknÂąÂł” w tym punkcie). Opisany problem jest prawdopodobnie konsekwencjÂą faktu, Âże obliczanie wartoÂści wyraÂżenia* $\cos(x) - 1$ *dla argumentĂłw bliskich* 0 *obarczone jest bardzo duÂżym bÂłĂŞdem zwiÂązanym ze sporÂą redukcjÂą cyfr znaczÂących.*

Tabela 1: Oszacowana wartoÂśĂ¦ wykÂładnika zbieÂżnoÂści p, oszacowanie E_k bÂłĂŞdu przybliÂżenia, faktyczny bÂłÂąd $|e_k|$ oraz numer iteracji k, w ktĂłrej speÂłniony byÂł warunek $E_k < 10^{-12}$ dla kilku wybranych funkcji i kilku wartoÂści r w (1). Szukanym pierwiastkiem jest zawsze $\alpha = 0$, a przybliÂżenie poczÂątkowe jest rĂłwne $x_0 = 0.5$. JeÂśli w tabeli oszacowanie bÂłĂŞdu jest rĂłwne 0.0, oznacza to, Âże tyle wynosiÂła wartoÂśĂ¦ E_k lub $f(x_{k-1}) = 0$ — taka realizacja (a nie sprawdzanie, czy $f(x_k) = 0$) byÂła prostsza w praktyce.

funkcja f	r	p	E_k	$\lvert e_k\rvert$	k
$\exp(x) - 1$	1	2.00	1.1×10^{-16}	5.4×10^{-17}	5
	2	?	—	—	∞
	3	?	—	—	∞
$(\exp(x) - 1)^3$	1	1.00	8.7×10^{-13}	1.8×10^{-13}	66
	2	1.00	7.9×10^{-13}	3.9×10^{-13}	26
	3	2.00	0.0	1.1×10^{-16}	6
	4	1.00	1.0×10^{-12}	4.0×10^{-13}	67
	5	?	—	—	∞
$x^2(x-3)(x+1)$	1	1.00	5.5×10^{-13}	5.5×10^{-13}	40
	2	2.00	3.2×10^{-16}	0.0	4
	3	1.00	6.9×10^{-13}	2.3×10^{-13}	41
	4	?	—	—	∞
$\sin(x)^2$	2	3.00	1.2×10^{-14}	0.0	4
$\cos(x) - 1$	2	3.01	0.0	1.1×10^{-9}	4

Na rysunku 1 przedstawiono graficznie przedziaÂły zbieÂżnoÂści zmodyfikowanej metody Newtona dla funkcji $(x+1)^2(x-1)^2(x-2)^2(x-4)^2$ *i* $r \in \{1, 2, 3, 4\}$*. Jasne kolory oznaczajÂą zbieÂżnoÂśĂ¦ (dla danego punktu poczÂątkowego) do jednego z czterech pierwiastkĂłw:* -1, 1, 2 *albo* 4*. Otrzymane wyniki potwierdzajÂą tezĂŞ, Âże czasem bardzo istotny jest odpowiedni dobĂłr przybliÂżenia poczÂątkowego, oraz Âże zÂłe dobranie parametru r moÂże spowodowaĂ¦ brak zbieÂżnoÂści metody.*

fun3-1.png	fun3-2.png
fun3-3.png	fun3-4.png

Rysunek 1: PrzedziaÂły zbieÂżnoÂści zmodyfikowanej metody Newtona dla funkcji $(x+1)^2(x-1)^2(x-2)^2(x-4)^2$. Kolorami czerwonym, zielonym, niebieskim oraz ÂżĂłÂłtym oznaczono przybliÂżenia poczÂątkowe, ktĂłre „prowadzÂą” – odpowiednio – do pierwiastkĂłw -1, 1, 2 i 4. Ciemny kolor oznacza brak zbieÂżnoÂści. Kolejne rysunki (od lewego gĂłrnego, wierszami) odpowiadajÂą wartoÂściom 1, 2, 3 i 4 parametru r (porĂłwnaj wzĂłr (1)).

Dodatek

Przedstawione na rysunku 1 przedziaÂły zbieÂżnoÂści doÂśĂ¦ czytelnie pokazujÂą, jak dla wybranej funkcji f zmiany parametru r wpÂływajÂą na zbieÂżnoÂśĂ¦ zmodyfikowanej metody Newtona. Jednak od strony wizualnej moÂżna uznaĂ¦ te rysunki za maÂło ciekawe.

O wiele ciekawsze (wizualnie) obrazy otrzymaĂ¦ moÂżna, gdy zastosuje siĂŞ metodĂŞ Newtona do wyznaczania pierwiastkĂłw funkcji zespolonej i odpowiednio pokoloruje obszary zbieÂżnoÂści metody. W dziedzinie zespolonej metoda Newtona nadal opisywana jest wzorem (1).

Na rysunku 2 przedstawiono obszary zbieÂżnoÂści zmodyfikowanej metody Newtona (z parametrem $r = 2$) dla funkcji zespolonej

$$f(z) = \big(1 + \frac{1}{4}\sin(2z) - \frac{1}{4}\cos(2z)\big)(z+1)^2(z-1)^2(z-2)^2(z-4)^2. \tag{3}$$

Pierwiastkami tej funkcji sÂą liczby -1, 1, 2, 4 i — byĂ¦ moÂże — pewne inne liczby zespolone. Na rysunku 2 pokolorowano wyÂłÂącznie te punkty z wybranego prostokÂąta pÂłaszczyzny zespolonej, dla ktĂłrych metoda zbiegaÂła do jednego z czterech podanych pierwiastkĂłw rzeczywistych (istotne sÂą jedynie aspekty wizualne obrazkĂłw), pozostaÂłe punkty zaznaczono ciemno-szarym kolorem tÂła.

fun2_2D2.png

fun2_2D2_zoom.png

fun2_2D2_zoom_alt.png

fun2_2D2_zoom_zoom.png

Rysunek 2: Obszary zbieÂżnoÂści zmodyfikowanej ($r = 2$) metody Newtona dla funkcji (3). Kolorami czerwonym, zielonym, niebieskim oraz ÂżĂłÂłtym oznaczono przybliÂżenia poczÂątkowe, ktĂłre „prowadzÂą” – odpowiednio – do pierwiastkĂłw -1, 1, 2 i 4. Ciemny kolor oznacza brak zbieÂżnoÂści lub zbieÂżnoÂśĂ¦ do innego pierwiastka. Kolejne rysunki odpowiadajÂą rĂłÂżnym rozwaÂżanym obszarom.

Uzasadnienia kilku faktĂłw teoretycznych

Na poczÂątek pokaÂżemy, Âże dla funkcji $f(x) = \sin(x)^2$ zmodyfikowana metoda Newtona (1) z $r = 2$ jest zbieÂżna szeÂściennie do pierwiastka $\alpha = 0$, dla przybliÂżenia poczÂątkowego odpowiednio bliskiego α. ÂŁatwo zauwaÂżyĂ¦, iÂż speÂłnione sÂą rĂłwnoÂści

$$e_{k+1} = e_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{e_k f'(x_k) - 2f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

RozwijajÂąc $f(x_k)$ *oraz* $f'(x_k)$ *w szereg Taylora oraz zauwaÂżajÂąc, Âże w rozwaÂżanym przy-kÂładzie* $x_k = e_k$ *i* $f(0) = f'(0) = 0$, *otrzymujemy*

$$e_{k+1} = \frac{e_k\big(e_k f''(0) + \frac{1}{2}e_k^2 f'''(0) + \frac{1}{6}e_k^3 f^{(4)}(\xi_0)\big) - 2\big(\frac{1}{2}e_k^2 f''(0) + \frac{1}{6}e_k^3 f'''(0) + \frac{1}{24}e_k^4 f^{(4)}(\xi_1)\big)}{e_k f''(\xi_2)}.$$

dla pewnych wartoÂści ξ_0, ξ_1 *i* ξ_2 *leÂżÂących pomiĂŞdzy zerem a* x_k. *PoniewaÂż dla* $f(x) = \sin(x)^2$ *mamy* $f'''(0) = 0$, $f''(0) = 2$ *oraz* $f^{(4)}(0) = -8$, *to jeÂśli przybliÂżenie* x_k *jest dostatecznie bliskie* 0, *otrzymamy*

$$|e_{k+1}| = \left|\frac{\frac{1}{6}e_k^4 f^{(4)}(\xi_0) - \frac{1}{12}e_k^4 f^{(4)}(\xi_1)}{e_k f''(\xi_2)}\right| \simeq \frac{1}{3}|e_k|^3.$$

W wypadku funkcji $f(x) = \cos(x) - 1$ *dowĂłd, Âże zmodyfikowana metoda Newtona zbiega do pierwiastka* $\alpha = 0$ *z wykÂładnikiem zbieÂżnoÂści rĂłwnym* 3 *jest analogiczny.*

Na koniec uzasadnimy, Âże w pewnym otoczeniu wielokrotnego zera α *odpowiednio wiele razy rĂłÂżniczkowalnej funkcji* f *zachodzi warunek* $|f(x)| < |f'(x)|$. *W dowodzie zaÂłoÂżymy dla uproszczenia, Âże krotnoÂśĂ| zera wynosi* 2. *Dodatkowo wymagamy, aby* $|f''(\alpha)| < \infty$. *W takim wypadku dla* x *bliskich* α, *pamiĂŞtajÂąc Âże* $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, *otrzymujemy*

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2}f''(\xi_0) = \frac{(x-\alpha)^2}{2}f''(\xi_0)$$

oraz

$$f'(x) = f'(\alpha) + (x-\alpha)f''(\xi_1) = (x-\alpha)f''(\xi_1)$$

dla pewnych ξ_0 *oraz* ξ_1 *leÂżÂących pomiĂŞdzy* α *i* x. *PoniewaÂż* $0 < |f''(\alpha)| < \infty$, *to dla* x *odpowiednio bliskich* α *zachodzi*

$$\frac{1}{2}\big|(x-\alpha)^2 f''(\xi_0)\big| < \big|(x-\alpha)f''(\xi_1)\big|,$$

co koĂ±czydowd.

Uwaga koĂ±*cowa(bardzowana)*

Absolutnie zabronione jest kopiowanie zdaĂ±(sformuowa±)ztegoraportu.Niezastosowaniesitopowys
u.