shipout/backgroundshipout/foreground

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Santiago Jiménez Gómez
CC. 1037659981
sajimenezgo@unal.edu.co

TRABAJO DEL CURSO
Mecánica Estructural, 2020-2

2020-11-6

ENUNCIADO

La estructura presentada en la figura está formada por cinco elementos y tiene una articulación en el nudo 4. Los elementos A y E son tipo pila, mientras que los elementos B, C, y D son tipo pórtico plano. El material de los cinco elementos es concreto con un módulo de elasticidad $E = 1,9 * 10^7 kN/m^2$, sus pilas son circulares y macizas de radio 45cm, mientras que los elementos tipo pórtico plano son de sección transversal rectangular de base 35cm y altura 40cm.

Las cargas externas están definidas por los valores de $Q_1 = 42kN/m$ y $Q_2 = 35kN/m$, mientras que la geometría de de la estructura se define por $a = 3m$, $b = 5m$, $c = 3m$, $d = 3m$ y $e = 3m$. Además que lo anterior. el ingeniero geotecnista ha indicado que el suelo blando en el cual se encuentran las pilas tiene una rigidez lateral por unidad de longitud $k_{lateral} = 5100kN/m^2$

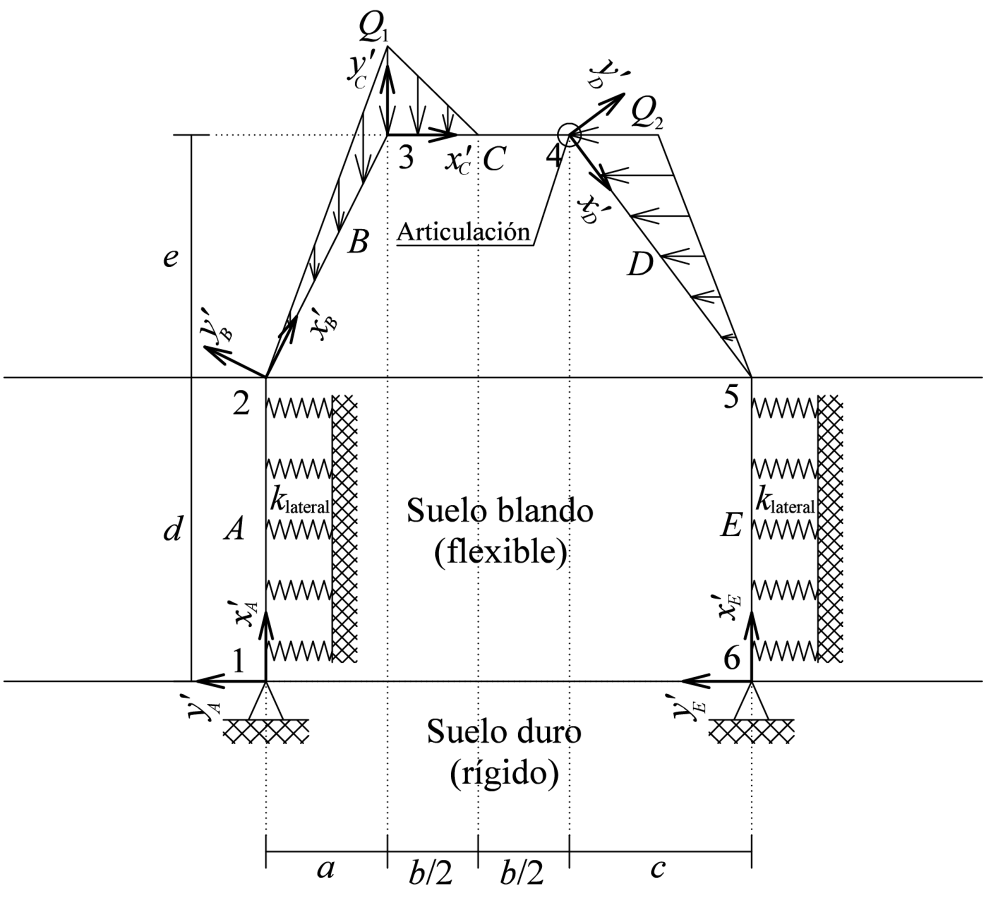

Figura 1: Diagrama de la Estructura

1. Introducción

2. Marco Teórico

2.1. Elemento tipo pórtico plano

El elemento tipo pórtico plano es la superposición de un elemento tipo cercha y uno tipo viga. en dirección del eje x'_E se comporta como una barra, mientras que en dirección y'_E se comporta como una viga, por lo tanto el elemento se encuentra sometido a cargas de flexión, cortantes y fuerzas axial.

Ecuaciones diferenciales gobernantes

las Ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano son:

$$A_E E_E \frac{d^2 u_E}{d{x'_E}^2}(x'_E) = -p_E(x'_E) \tag{1}$$

$$E_E I_E \frac{d^4 v_E}{d{x'_E}^4}(x'_E) = q_E(x'_E) \tag{2}$$

Funciones de forma

Las funciones de forma para el comportamiento axial (eje local x'_E) son ${\psi_1}^E(x'_E)$ y ${\psi_4}^E(x'_E)$, mientras que las funciones de forma para el comportamiento en dirección y'_E son ${\psi_2}^E(x'_E)$, ${\psi_3}^E(x'_E)$, ${\psi_5}^E(x'_E)$, ${\psi_6}^E(x'_E)$.

$$\psi_1 = 1 - \left(\frac{x'_E}{L_E}\right) \tag{3}$$

$$\psi_2 = 1 - 3\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^2 + 2\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^3 \tag{4}$$

$$\psi_3 = L_E\left[\left(\frac{x'_E}{L_E}\right) - 2\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^2 + \left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^3\right] \tag{5}$$

$$\psi_4 = \frac{x'_E}{L_E} \tag{6}$$

$$\psi_5 = 3\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^2 - 2\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^3 \tag{7}$$

$$\psi_6 = L_E\left[-\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^2 + \left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^3\right] \tag{8}$$

Función de Green

$$G_{xx}(x'_E, \xi'_E) = \begin{cases} G^I_{xx}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E}{A_E E_E}{\psi_4}^E(x'_E){\psi_1}^E(\xi'_E) & 0 < x'_E \leq \xi'_E \\ \\ G^{II}_{xx}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E}{A_E E_E}{\psi_1}^E(x'_E){\psi_4}^E(\xi'_E) & \xi'_E \leq x'_E < L_E \end{cases} \tag{9}$$

$$G_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \begin{cases} G^I_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E^3}{6E_E I_E}\left[-\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^3 {\psi_2}^E(\xi'_E) + 3\left(\frac{x'_E}{L_E}\right)^2 \frac{{\psi_3}^E(\xi'_E)}{L_E}\right] & 0 < x'_E \leq \xi'_E \\ \\ G^{II}_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E^3}{6E_E I_E}\left[-\left(1 - \frac{x'_E}{L_E}\right)^3 {\psi_5}^E(\xi'_E) + 3\left(1 - \frac{x'_E}{L_E}\right)^2 \frac{{\psi_3}^E(\xi'_E)}{L_E}\right] & \xi'_E < x'_E \leq L_E \end{cases} \tag{10}$$

Descomposiciones de los campos de desplazamiento

Este tipo de elemento tiene dos componentes de desplazamientos (una en dirección del eje local x'_E y la otra en dirección del eje local y'_E), las cuales se descomponen de la siguiente manera respectivamente:

$$u_E(x'_E) = u_E{}^h(x'_E) + u_E{}^f(x'_E) \tag{11}$$

$$v_E(x'_E) = v_E{}^h(x'_E) + v_E{}^f(x'_E) \tag{12}$$

Campo de desplazamiento homogéneo

$$u_E{}^h(x'_E) = \psi_1{}^E(x'_E)u'^E_i + \psi_4{}^E(x'_E)u'^E_j \tag{13}$$

$$v_E{}^h(x'_E) = \psi_2{}^E(x'_E)v'^E_i + \psi_3{}^E(x'_E)\theta'^E_i + \psi_5{}^E(x'_E)v'^E_j + \psi_6{}^E(x'_E)\theta'^E_j \tag{14}$$

Campo empotrado

Las componentes de campo empotrado en dirección x'_E y y'_E se calcula a partir de las funciones de green.

$$u_E{}^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}{}^{II}(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}{}^{I}(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

$$v_E{}^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}{}^{II}(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}{}^{I}(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E \tag{17}$$

Cálculo de fuerzas internas

Estas se hallan a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano.

$$P_E(x'_E) = A_E E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{18}$$

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'_E}^2(x'_E) \tag{19}$$

$$V_E(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx'_E}^3(x'_E) \tag{20}$$

Sistema de ecuaciones en coordenadas locales

$$\begin{bmatrix} FX'^E_i \\ FY'^E_i \\ M'^E_i \\ FX'^E_j \\ FY'^E_j \\ M'^E_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_E I_E}{L_E^3} & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & 0 & -\frac{12E_E I_E}{L_E^3} & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} \\ 0 & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{4E_E I_E}{L_E} & 0 & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{2E_E I_E}{L_E} \\ -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_E I_E}{L_E^3} & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & 0 & \frac{12E_E I_E}{L_E^3} & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} \\ 0 & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{2E_E I_E}{L_E} & 0 & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{4E_E I_E}{L_E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'^E_i \\ v'^E_i \\ \theta'^E_i \\ u'^E_j \\ v'^E_j \\ \theta'^E_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_0^{L_E} \psi_1{}^E(x'_E)p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_2{}^E(x'_E)q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_3{}^E(x'_E)q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_4{}^E(x'_E)p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_5{}^E(x'_E)q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_6{}^E(x'_E)q_E dx'_E \end{Bmatrix}$$

Matriz de transformación de coordenadas

$$[T^*_E] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_E - \phi_i) & \sin(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_E - \phi_i) & \cos(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_E - \phi_j) & \sin(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_E - \phi_j) & \cos(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Elemento tipo pila

Este elemento se encuentra compuesto por dos tipos de elementos, un elemento tipo viga sobre fundación flexible y otro elemento tipo pila sin fricción en el fuste.

Ecuaciones diferenciales gobernantes

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del elemento son:

$$A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx_E'^2}(x_E') = -p_E(x_E') \tag{21}$$

$$E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx_E'^4}(x_E') + k_E v_E(x_E') = q_E(x_E') \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Donde: k_E es la constate de rigidez del suelo

funciones de forma

Las funciones de forma para el comportamiento axial (eje local x_E') son ${\psi_1}^E$ y ${\psi_4}^E$, las cuales corresponden al elemento tipo pórtico plano mencionado anteriormente.

Mientras que las funciones de forma para el comportamiento en dirección y_E' son ${\Psi_2}^E$, ${\Psi_3}^E$, ${\Psi_5}^E$, ${\Psi_6}^E$, las cuales corresponden al elemento tipo viga sobre fundación flexible de sección transversal constante.

$$\Psi_2^E(x_E') = \frac{-(s^2 \cdot ch^2 + c^2 \cdot sh^2)\sin(\lambda_E x_E') + \sinh(\lambda_E x_E') + (s \cdot c + sh \cdot ch)[\sin(\lambda_E x_E')\cosh(\lambda_E x_E') - \cos(\lambda_E x_E')\sinh(\lambda_E x_E')] + (sh^2 - s^2)\cos(\lambda_E x_E')\cosh(\lambda_E x_E')}{sh^2 - s^2}$$

$$\Psi_3^E(x_E') = \frac{1}{\lambda_E}\frac{(s \cdot c - sh \cdot ch)\sin(\lambda_E \cdot x_E')\sinh(\lambda_E \cdot x_E') + sh^2 \sin(\lambda_E \cdot x_E')\cosh(\lambda_E \cdot x_E') - s^2\cos(\lambda_E \cdot x_E')\sinh(\lambda_E \cdot x_E')}{sh^2 - s^2}$$

$$\Psi_5^E(x_E') = \frac{s \cdot sh \cdot \sin(\lambda_E x_E')\sinh(\lambda_E x_E') - (s \cdot ch + c \cdot sh)\sin(\lambda_E x_E')\cosh(\lambda_E x_E') + (s \cdot ch + c \cdot sh)\cos(\lambda_E x_E')\sinh(\lambda_E x_E')}{sh^2 - s^2}$$

$$\Psi_6^E(x_E') = \frac{1}{\lambda_E}\frac{(c \cdot sh - s \cdot ch)\sin(\lambda_E x_E')\sinh(\lambda_E x_E') + s \cdot sh \cdot \sin(\lambda_E x_E') \cdot \cosh(\lambda_E x_E') - s \cdot sh \cdot \cos(\lambda_E x_E')\sinh(\lambda_E x_E')}{sh^2 - s^2}$$

Donde:
s $= \sin(\lambda_E x_E')$
$c = \cos(\lambda_E x_E')$
$sh = \sinh(\lambda_E x_E')$
$ch = \cosh(\lambda_E x_E')$
$\lambda_E = \sqrt[4]{\frac{k_E}{4E_E I_E}}$

Función de Green

La función de green para una viga sobre fundación flexible doblemente empotrada sometida a una fuerza puntual es:

$$G_{yy}(x_E', \xi_E') = \begin{cases} G_{yy}^{I}(x_E', \xi_E') & 0 < x_E' \leq \xi_E' \\ \\ G_{yy}^{II}(x_E', \xi_E') & \xi_E' < x_E' \leq L_E \end{cases} \tag{24}$$

Donde:

$$G_{yy}^{I}(x'_E,\xi'_E) = \frac{1}{E_E I_E}\left[-\frac{\sin(\lambda_E x'_E)\cosh(\lambda_E x'_E)-\sinh(\lambda_E x'_E)\cos(\lambda_E x'_E)}{4\lambda_E{}^3}.\Psi_2{}^E(x'_E) + \frac{\sin(\lambda_E x'_E)\sinh(\lambda_E x'_E)}{2\lambda_E{}^2}.\Psi_3{}^E(x'_E)\right]$$

$$G_{yy}^{II}(x'_E,\xi'_E) = \frac{1}{E_E I_E}\left[-\frac{\sin[\lambda_E(L_E-x'_E)]\cosh[\lambda_E(L_E-x'_E)]-\sinh[\lambda_E(L_E-x'_E)]\cos[\lambda_E(L_E-x'_E)]}{4\lambda_E{}^3}.\Psi_5^E(x'_E) - \frac{\sin[\lambda_E(L_E-x'_E)]\sinh[\lambda_E(L_E-x'_E)]}{2\lambda_E{}^2}.\Psi_6^E(x'_E)\right]$$

Descomposiciones de los campos de desplazamiento

De igual manera que en el elemento tipo pórtico plano se tienen dos componentes de desplazamientos (una en dirección del eje local x'_E y la otra en dirección del eje local y'_E), las cuales se descomponen de la siguiente manera respectivamente:

$$u_E(x'_E) = u_E{}^h(x'_E) + u_E{}^f(x'_E) \tag{25}$$

$$v_E(x'_E) = v_E{}^h(x'_E) + v_E{}^f(x'_E) \tag{26}$$

Campo de desplazamiento homogéneo

$$u_E{}^h(x'_E) = \psi_1{}^E(x'_E)u'^E_i + \psi_4{}^E(x'_E)u'^E_j \tag{27}$$

$$v_E{}^h(x'_E) = \Psi_2{}^E(x'_E)v'^E_i + \Psi_3{}^E(x'_E)\theta'^E_i + \Psi_5{}^E(x'_E)v'^E_j + \Psi_6{}^E(x'_E)\theta'^E_j \tag{28}$$

Campo empotrado

Las componentes de campo empotrado en dirección x'_E y y'_E se calcula a partir de las funciones de green.

$$u_E{}^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}{}^{II}(x'_E,\xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}{}^{I}(x'_E,\xi'_E)d\xi'_E \tag{29}$$

(30)

$$v_E{}^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}{}^{II}(x'_E,\xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}{}^{I}(x'_E,\xi'_E)d\xi'_E \tag{31}$$

Donde $G_{xx}(x'_E,\xi'_E)$ es la función de green de una barra doblemente empotrada y $G_{yy}(x'_E,\xi'_E)$ es la función de Green de una viga sobre fundación flexible doblemente empotrada.

Cálculo de fuerzas internas

Estas se hallan a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano.

$$P_E(x'_E) = A_E E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \tag{32}$$

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'_E{}^2}(x'_E) \tag{33}$$

$$V_E(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx'_E{}^3}(x'_E) \tag{34}$$

Fuerza que ejerce sobre la pila

La fuerza que el suelo ejerce sobre la pila solo ocurre en dirección del eje local y'_E y se calcula como:

$$f_s(x'_E) = -k_E v_E(x'_E) \tag{35}$$

Sistema de ecuaciones en coordenadas locales

$$
\begin{bmatrix} FX_i'^E \\ FY_i'^E \\ M_i'^E \\ FX_j'^E \\ FY_j'^E \\ M_j'^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{32} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i'^E \\ v_i'^E \\ \theta_i'^E \\ u_j'^E \\ v_j'^E \\ \theta_j'^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_0^{L_E} \psi_1{}^E(x_E')p_E dx_E' \\ \int_0^{L_E} \Psi_2{}^E(x_E')q_E dx_E' \\ \int_0^{L_E} \Psi_3{}^E(x_E')q_E dx_E' \\ \int_0^{L_E} \psi_4{}^E(x_E')p_E dx_E' \\ \int_0^{L_E} \Psi_5{}^E(x_E')q_E dx_E' \\ \int_0^{L_E} \Psi_6{}^E(x_E')q_E dx_E' \end{Bmatrix}
$$

Donde los términos k_{ij} son aquellos de la viga sobre fundación flexible y se obtienen de la siguiente manera:

$$k_{22} = k_{55} = 4E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot c + sh \cdot ch}{sh^2 - s^2} \tag{36}$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{56} = -k_{65} = 2E_E I_E \lambda E^2 \cdot \frac{s^2 + sh^2}{sh^2 - s^2} \tag{37}$$

$$k_{25} = k_{52} = -4E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot ch + c \cdot sh}{sh^2 - s^2} \tag{38}$$

$$k_{26} = k_{62} = -k_{35} = -k_{53} = 4E_E I_E \lambda E^2 \cdot \frac{s \cdot sh}{sh^2 - s^2} \tag{39}$$

$$k_{33} = k_{66} = 2E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{sh \cdot ch - s \cdot c}{sh^2 - s^2} \tag{40}$$

$$k_{36} = k_{63} = 2E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot ch - c \cdot ch}{sh^2 - s^2} \tag{41}$$

Matriz de transformación de coordenadas

$$
[T_E^*] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_E - \phi_i) & \sin(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_E - \phi_i) & \cos(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_E - \phi_j) & \sin(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_E - \phi_j) & \cos(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Nota:

El marco teorico fue realizado en base a las notas de clase del profesor Juan Camilo Molina villegas - Introducción al análisis matricial de estructuras [1]

3. Desarrollo

3.1. Datos iniciales

- a = 3m
- b = 5m
- c = 3m
- d = 3m
- e = 3m

- $K_{lateral} = 5100\ kN/m^2$
- $Q_1 = 42\ kN/m^2$
- $Q_2 = 35\ kN/m^2$
- E $= 2.2 * 10^7\ kN/m^2$

Longitud de los elementos

- L_A = d = 3 m
- $L_B = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ m
- L_C = b = 5 m
- $L_D = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$ m
- L_E = d = 3 m

Sección tranversal de los elementos

- Elementos tipo pila (A,E)
  - Pilas circulares de radio igual a 45 cm
- Elementos tipo pórtico plano (B,C,D)
  - Pilas circulares de radio igual a 45 cm
  - Elementos rectangulares de base 35 cm y altura 40 cm

3.2. transformación de las fuerzas externas en coordenadas locales

Elemento B

$$R'_B(x'_B) = -7\sqrt{2}x'_B$$
$$p_B(x'_B) = R'_B(x'_B)|cos(\theta_B)|sen(\theta_B) = - - \frac{7\sqrt{2}x'_B}{2}$$
$$q_B(x'_B) = R'_B(x'_B)|cos(\theta_B)|cos(\theta_B) = -\frac{7\sqrt{2}x'_B}{2}$$

Elemento D

$Q'_D(x'_D) = 11.666x'_C - 35$

$p_D(x'_D) = Q'_D(x'_D)|sen(\theta_D)|cos(\theta_D) = 5.833x'_C - \frac{35}{2}$

$q_D(x'_D) = -Q'_D(x'_D)|sen(\theta_D)|sen(\theta_D) = 5.833x'_C - \frac{35}{2}$

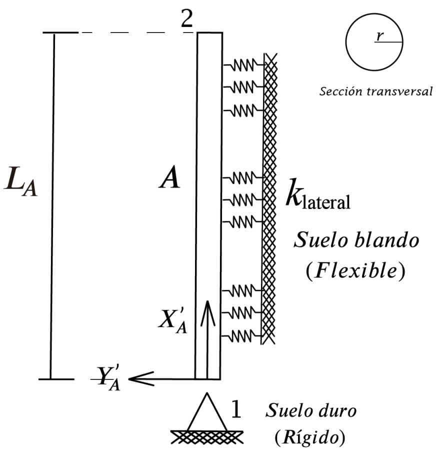

Figura 2: Elemento A

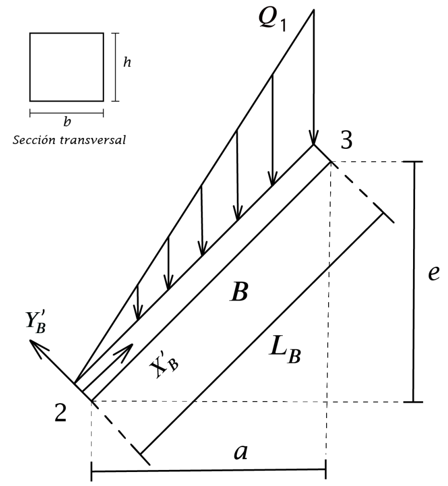

Figura 3: Elemento B

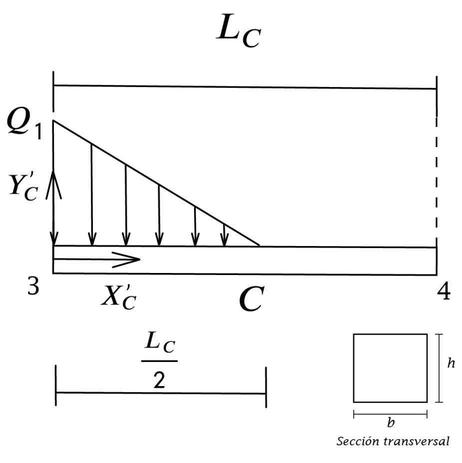

Figura 4: Elemento C

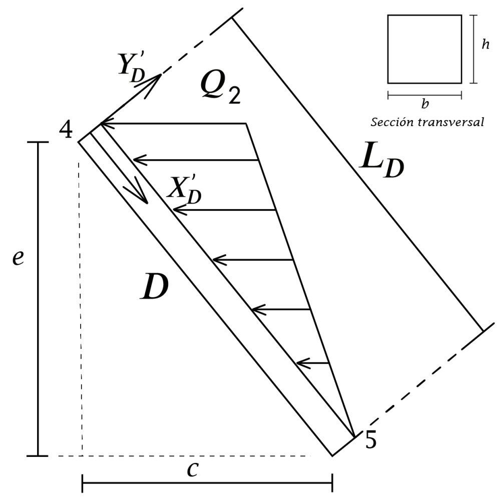

Figura 5: Elemento D

3.3. Discretización de los elementos

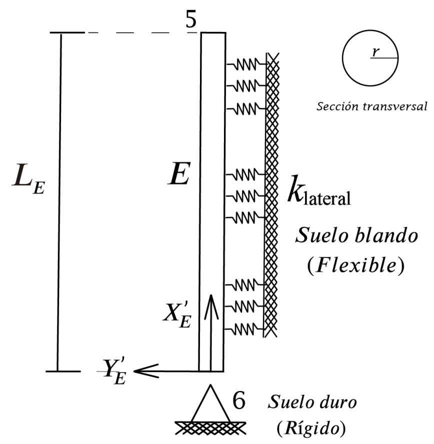

Figura 6: Elemento E

3.4. Matrices de rigidez y transformación en coordenadas locales por elemento

Siguiendo la teoría anteriormente descrita, según el tipo de elemento se determina su correspondiente matriz de rigidez en coordenadas locales y se define el correspondiente sistema de ecuaciones en coordenadas locales.

Elemento A

$$\begin{Bmatrix} FX_1'^A \\ FY_1'^A \\ M_1'^A \\ FX_2'^A \\ FY_2'^A \\ M_2'^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4029092.58 & 0.0 & 0.0 & -4029092.58 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 277642.84 & 410347.54 & 0.0 & -270000.01 & 406527.14 \\ 0.0 & 410347.54 & 817201.17 & 0.0 & -406527.14 & 406963.51 \\ -4029092.58 & 0.0 & 0.0 & 4029092.58 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -270000.01 & -406527.14 & 0.0 & 277642.84 & -410347.54 \\ 0.0 & 406527.14 & 406963.51 & 0.0 & -410347.54 & 817201.17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1'^A \\ v_1'^A \\ \theta_1'^A \\ u_2'^A \\ v_2'^A \\ \theta_2'^A \end{Bmatrix} \tag{42}$$

Elemento B

$$\begin{Bmatrix} FX_2'^B \\ FY_2'^B \\ M_2'^B \\ FX_3'^B \\ FY_3'^B \\ M_3'^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 626968.01 & 0.0 & 0.0 & -626968.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 5573.05 & 11822.22 & 0.0 & -5573.05 & 11822.22 \\ 0.0 & 11822.22 & 33438.29 & 0.0 & -11822.22 & 16719.15 \\ -626968.01 & 0.0 & 0.0 & 626968.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -5573.05 & -11822.22 & 0.0 & 5573.05 & -11822.22 \\ 0.0 & 11822.22 & 16719.15 & 0.0 & -11822.22 & 33438.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2'^B \\ v_2'^B \\ \theta_2'^B \\ u_3'^B \\ v_3'^B \\ \theta_3'^B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 14.85 \\ 13.36 \\ 12.6 \\ 29.7 \\ 31.18 \\ -18.9 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Elemento C

$$\begin{Bmatrix} FX_3'^C \\ FY_3'^C \\ M_3'^C \\ FX_4'^C \\ FY_4'^C \\ M_4'^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 532000.0 & 0.0 & 0.0 & -532000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3404.8 & 8512.0 & 0.0 & -3404.8 & 8512.0 \\ 0.0 & 8512.0 & 28373.33 & 0.0 & -8512.0 & 14186.67 \\ -532000.0 & 0.0 & 0.0 & 532000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3404.8 & -8512.0 & 0.0 & 3404.8 & -8512.0 \\ 0.0 & 8512.0 & 14186.67 & 0.0 & -8512.0 & 28373.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3'^C \\ v_2'^C \\ \theta_2'^C \\ u_4'^C \\ v_4'^C \\ \theta_4'^C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 47.25 \\ 25.16 \\ 0.0 \\ 5.25 \\ -7.66 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Elemento D

$$\begin{Bmatrix} FX_4'^D \\ FY_4'^D \\ M_4'^D \\ FX_5'^D \\ FY_5'^D \\ M_5'^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 626968.01 & 0.0 & 0.0 & -626968.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 5573.05 & 11822.22 & 0.0 & -5573.05 & 11822.22 \\ 0.0 & 11822.22 & 33438.29 & 0.0 & -11822.22 & 16719.15 \\ -626968.01 & 0.0 & 0.0 & 626968.01 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -5573.05 & -11822.22 & 0.0 & 5573.05 & -11822.22 \\ 0.0 & 11822.22 & 16719.15 & 0.0 & -11822.22 & 33438.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4'^D \\ v_4'^D \\ \theta_4'^D \\ u_5'^D \\ v_5'^D \\ \theta_5'^D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 19.62 \\ 21.37 \\ 11.4 \\ 2.12 \\ 0.37 \\ -3.98 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Elemento E

$$\begin{Bmatrix} FX_6'^E \\ FY_6'^E \\ M_6'^E \\ FX_5'^E \\ FY_5'^E \\ M_5'^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4029092.58 & 0.0 & 0.0 & -4029092.58 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 277642.84 & 410347.54 & 0.0 & -270000.01 & 406527.14 \\ 0.0 & 410347.54 & 817201.17 & 0.0 & -406527.14 & 406963.51 \\ -4029092.58 & 0.0 & 0.0 & 4029092.58 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -270000.01 & -406527.14 & 0.0 & 277642.84 & -410347.54 \\ 0.0 & 406527.14 & 406963.51 & 0.0 & -410347.54 & 817201.17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_6'^E \\ v_6'^E \\ \theta_6'^E \\ u_5'^E \\ v_5'^E \\ \theta_5'^E \end{Bmatrix} \tag{46}$$

3.5. Sistema de ecuaciones de cada elemento en coordenadas globales

El sistema se transforma de coordenadas locales a globales por medio de $[T_E^*]$ realizando el siguiente producto de matrices:

$$[T_E^*]^\top \cdot [K_E] \cdot [T_E^*] \tag{47}$$

Elemento A

$$[T_A^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_1{}^A \\ FY_1{}^A \\ M_1{}^A \\ FX_2{}^A \\ FY_2{}^A \\ M_2{}^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 277642.84 & 0.0 & -410347.54 & -270000.01 & 0.0 & -406527.14 \\ 0.0 & 4029092.58 & 0.0 & 0.0 & -4029092.58 & 0.0 \\ -410347.54 & 0.0 & 817201.17 & 406527.14 & 0.0 & 406963.51 \\ -270000.01 & 0.0 & 406527.14 & 277642.84 & 0.0 & 410347.54 \\ 0.0 & -4029092.58 & 0.0 & 0.0 & 4029092.58 & 0.0 \\ -406527.14 & 0.0 & 406963.51 & 410347.54 & 0.0 & 817201.17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1{}^A \\ v_1{}^A \\ \theta_1{}^A \\ u_2{}^A \\ v_2{}^A \\ \theta_2{}^A \end{Bmatrix} \tag{49}$$

<u>Elemento B</u>

$$[T_B^*] = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.71 & 0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.71 & 0.71 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.71 & 0.71 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_2{}^B \\ FY_2{}^B \\ M_2{}^B \\ FX_3{}^B \\ FY_3{}^B \\ M_3{}^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 316270.53 & 310697.48 & -8359.57 & -316270.53 & -310697.48 & -8359.57 \\ 310697.48 & 316270.53 & 8359.57 & -310697.48 & -316270.53 & 8359.57 \\ -8359.57 & 8359.57 & 33438.29 & 8359.57 & -8359.57 & 16719.15 \\ -316270.53 & -310697.48 & 8359.57 & 316270.53 & 310697.48 & 8359.57 \\ -310697.48 & -316270.53 & -8359.57 & 310697.48 & 316270.53 & -8359.57 \\ -8359.57 & 8359.57 & 16719.15 & 8359.57 & -8359.57 & 33438.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2{}^B \\ v_2{}^B \\ \theta_2{}^B \\ u_3{}^B \\ v_3{}^B \\ \theta_3{}^B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.05 \\ 19.95 \\ 12.6 \\ -1.05 \\ 43.05 \\ -18.9 \end{bmatrix} \tag{51}$$

<u>Elemento C</u>

$$[T_C^*] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_3{}^C \\ FY_3{}^C \\ M_3{}^C \\ FX_4{}^C \\ FY_4{}^C \\ M_4{}^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 532000.0 & 0.0 & 0.0 & -532000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3404.8 & 8512.0 & 0.0 & -3404.8 & 8512.0 \\ 0.0 & 8512.0 & 28373.33 & 0.0 & -8512.0 & 14186.67 \\ -532000.0 & 0.0 & 0.0 & 532000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3404.8 & -8512.0 & 0.0 & 3404.8 & -8512.0 \\ 0.0 & 8512.0 & 14186.67 & 0.0 & -8512.0 & 28373.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3{}^C \\ v_3{}^C \\ \theta_3{}^C \\ u_4{}^C \\ v_4{}^C \\ \theta_4{}^C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 47.25 \\ 25.16 \\ 0.0 \\ 5.25 \\ -7.66 \end{bmatrix} \tag{53}$$

<u>Elemento D</u>

$$[T_D^*] = \begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.71 & 0.71 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.71 & -0.71 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.71 & 0.71 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_4{}^D \\ FY_4{}^D \\ M_4{}^D \\ FX_5{}^D \\ FY_5{}^D \\ M_5{}^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 316270.53 & -310697.48 & 8359.57 & -316270.53 & 310697.48 & 8359.57 \\ -310697.48 & 316270.53 & 8359.57 & 310697.48 & -316270.53 & 8359.57 \\ 8359.57 & 8359.57 & 33438.29 & -8359.57 & -8359.57 & 16719.15 \\ -316270.53 & 310697.48 & -8359.57 & 316270.53 & -310697.48 & -8359.57 \\ 310697.48 & -316270.53 & -8359.57 & -310697.48 & 316270.53 & -8359.57 \\ 8359.57 & 8359.57 & 16719.15 & -8359.57 & -8359.57 & 33438.29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4{}^D \\ v_4{}^D \\ \theta_4{}^D \\ u_5{}^D \\ v_5{}^D \\ \theta_5{}^D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 28.99 \\ 1.24 \\ 11.4 \\ 1.77 \\ -1.24 \\ -3.98 \end{bmatrix} \tag{55}$$

<u>Elemento E</u>

$$[T_E^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_5{}^E \\ FY_5{}^E \\ M_5{}^E \\ FX_6{}^E \\ FY_6{}^E \\ M_6{}^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 277642.84 & 0.0 & -410347.54 & -270000.01 & 0.0 & -406527.14 \\ 0.0 & 4029092.58 & 0.0 & 0.0 & -4029092.58 & 0.0 \\ -410347.54 & 0.0 & 817201.17 & 406527.14 & 0.0 & 406963.51 \\ -270000.01 & 0.0 & 406527.14 & 277642.84 & 0.0 & 410347.54 \\ 0.0 & -4029092.58 & 0.0 & 0.0 & 4029092.58 & 0.0 \\ -406527.14 & 0.0 & 406963.51 & 410347.54 & 0.0 & 817201.17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5{}^E \\ v_5{}^E \\ \theta_5{}^E \\ u_6{}^E \\ v_6{}^E \\ \theta_6{}^E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

4. Cálculo de los desplazamientos nodales

La porción del sistema de ecuaciones que contiene las fuerzas nodales conocidas y los desplazamiento nodales desconocidas es:

4.1. Ensamblaje del sistema de ecuaciones

las ecuaciones de equilibrio que se utilizan para el ensamblaje del sistema son las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ FX_2 \\ FY_2 \\ M_2 \\ FX_3 \\ FY_3 \\ M_3 \\ FX_4 \\ FY_4 \\ M_4^C \\ M_4^D \\ FX_5 \\ FY_5 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^A \\ FX_2^A + FX_2^B \\ FY_2^A + FY_2^B \\ M_2^A + M_2^B \\ FX_3^B + FX_3^C \\ FY_3^B + FY_3^C \\ M_3^B + M_3^C \\ FX_4^C + FX_4^D \\ FY_4^C + FY_4^D \\ M_4^C \\ M_4^D \\ FX_5^D + FX_5^E \\ FY_5^D + FY_5^E \\ M_5^D + M_5^E \\ M_6^E \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4^C \\ \theta_4^D \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
817201.17 & 406527.14 & 0.0 & 406963.51 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
406527.14 & 593913.37 & 310697.48 & 401987.96 & -316270.53 & -310697.48 & -8359.57 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 310697.48 & 4345363.11 & 8359.57 & -310697.48 & -316270.53 & 8359.57 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
406963.51 & 401987.96 & 8359.57 & 850639.46 & 8359.57 & -8359.57 & 16719.15 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -316270.53 & -310697.48 & 8359.57 & 848270.53 & 310697.48 & 8359.57 & -532000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -310697.48 & -316270.53 & -8359.57 & 310697.48 & 319675.33 & 152.43 & 0.0 & -3404.8 & 8512.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & -8359.57 & 8359.57 & 16719.15 & 8359.57 & 152.43 & 61811.63 & 0.0 & -8512.0 & 14186.67 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -532000.0 & 0.0 & 0.0 & 848270.53 & -310697.48 & 0.0 & 8359.57 & -316270.53 & 310697.48 & 8359.57 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -3404.8 & -8512.0 & -310697.48 & 319675.33 & -8512.0 & 8359.57 & 310697.48 & -316270.53 & 8359.57 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8512.0 & 14186.67 & 0.0 & -8512.0 & 28373.33 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8359.57 & 8359.57 & 0.0 & 33438.29 & -8359.57 & -8359.57 & 16719.15 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -316270.53 & 310697.48 & 0.0 & -8359.57 & 593913.37 & -310697.48 & 401987.96 & 406527.14 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 310697.48 & -316270.53 & 0.0 & -8359.57 & -310697.48 & 4345363.11 & -8359.57 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8359.57 & 8359.57 & 0.0 & 16719.15 & 401987.96 & -8359.57 & 850639.46 & 406963.51 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 406527.14 & 0.0 & 406963.51 & 817201.17
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4{}^C \\ \theta_4{}^D \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ \theta_6
\end{Bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0.0 \\ 1.05 \\ 19.95 \\ 12.6 \\ -1.05 \\ 90.3 \\ 6.26 \\ 28.99 \\ 6.49 \\ -7.66 \\ 11.4 \\ 1.77 \\ -1.24 \\ -3.98 \\ 0.0
\end{bmatrix}
$$

$$
\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ {\theta_4}^C \\ {\theta_4}^D \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{array}\right\} = \begin{bmatrix} 0.000675 \\ -0.00183 \\ -2.51 \cdot 10^{-5} \\ 0.00047 \\ 0.00316 \\ -0.00521 \\ -0.00135 \\ 0.00309 \\ 0.00167 \\ 0.00301 \\ -0.000963 \\ 0.00137 \\ -3.61 \cdot 10^{-6} \\ -0.000452 \\ -0.000456 \end{bmatrix} \tag{59}
$$

4.2. Cálculo de las reacciones y fuerzas que el suelo ejerce sobre las pilas en coordenadas globales.

4.2.1. Reacciones

Una vez teniendo determinados los desplazamientos nodales se procede a determinar las reacciones en FX_1,FY_1,FX_6,FY_6 haciendo uso de la porción que las realciona con los desplazamientos hallados.

$$
\left\{\begin{array}{c} FX_1 \\ FY_1 \\ FX_6 \\ FY_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 406527.14 & 593913.37 & 310697.48 & 401987.96 & -316270.53 & -310697.48 & -8359.57 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 310697.48 & 4345363.11 & 8359.57 & -310697.48 & -316270.53 & 8359.57 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -316270.53 & 310697.48 & 0.0 & -8359.57 & 593913 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 310697.48 & -316270.53 & 0.0 & -8359.57 & -310697 \end{array}\right. \tag{60}
$$

$$
\left\{\begin{array}{c} FX_1 \\ FY_1 \\ FX_6 \\ FY_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 25.268 \\ 100.957 \\ 1.217 \\ 14.543 \end{array}\right\} \tag{61}
$$

4.2.2. Fuerzas del suelo sobre las pilas

Elemento A

$$f_s(x'_A) = 2.21{\cdot}10^{-15}\sin(0.214x'_A)\sinh(0.214x'_A) - 2.66\sin(0.214x'_A)\cosh(0.214x'_A) - 13.5\cos(0.214x'_A)\sinh(0.214x'_A) \tag{62}$$

Elemento E

$$f_s(x'_A) = 2.21{\cdot}10^{-15}\sin(0.214x'_E)\sinh(0.214x'_E) + 5.7\sin(0.214x'_E)\cosh(0.214x'_E) + 5.18\cos(0.214x'_E)\sinh(0.214x'_E) \tag{63}$$

5. Cálculo de las funciones y diagramas de desplazamientos para cada elemento

Elemento A

$$\mathrm{u}_A(x'_A) = -8.35\cdot 10^{-6}x'_A$$

$$v_A(x'_A) = -4.34{\cdot}10^{-19}\sin(0.214x'_A)\sinh(0.214x'_A) + 0.000521\sin(0.214x'_A)\cosh(0.214x'_A) + 0.00264\cos(0.214x)\sinh(0.214x'_A)$$

Elemento B

$$\mathrm{u}_B(x'_B) = 3.1\cdot 10^{-7}{x'_B}^3 - 3.75\cdot 10^{-5}x'_B - 0.00131$$

$$v_B(x'_B) = -1.16\cdot 10^{-6}{x'_B}^5 + 0.000203{x'_B}^3 - 0.00128{x'_B}^2 + 0.000471x'_B + 0.00127$$

Elemento C

$$\mathrm{u}_B(x'_C) = -1.5\cdot 10^{-5}x'_C + 0.00316$$

$$v_B(x'_C) = \begin{cases} v_C^I & \text{si} 0 < x'_C \leq \frac{LC}{2} \\ v_C^{II} & \text{si} \frac{LC}{2} < x'_C \leq LC \end{cases}$$

Donde:

$$\mathrm{v}_C^I = 4.66\cdot 10^{-10}{x'_C}^7 + 3.94\cdot 10^{-6}{x'_C}^5 - 4.94\cdot 10^{-5}{x'_C}^4 + 0.000178{x'_C}^3 + 0.000408{x'_C}^2 - 0.00135x'_C{}'_C - 0.00521$$

$$v_C^{II} = -6.83\cdot 10^{-5}{x'_C}^3 + 0.00103{x'_C}^2 - 0.00212x'_C - 0.00482$$

Elemento D

$$u_B(x'_D) = -3.65\cdot 10^{-7}{x'_D}^3 + 3.29\cdot 10^{-6}{x'_D}^2 - 1.45\cdot 10^{-5}x'_D + 0.001 \tag{64}$$

$$v_B(x'_D) = -1.16\cdot 10^{-10}{x'_D}^7 - 1.86\cdot 10^{-9}{x'_D}^6 + 1.37\cdot 10^{-6}{x'_D}^5 - 2.06\cdot 10^{-5}{x'_D}^4 + 8.46\cdot 10^{-5}{x'_D}^3 + 3.73\cdot 10^{-7}{x'_D}^2 - 0.000964x'_D + 0.0033 \tag{65}$$

Elemento E

$$u_E(x'_E) = -1.2 \cdot 10^{-6} X'_E$$

$$v_B(x'_E) =$$
$$-4.34 \cdot 10^{-19} \sin(0.214x'_E) \sinh(0.214x'_E) - 0.00112 \sin(0.214x'_E) \cosh(0.214x'_E) - 0.00102 \cos(0.214x'_E) \sinh(0.214x'_E)$$

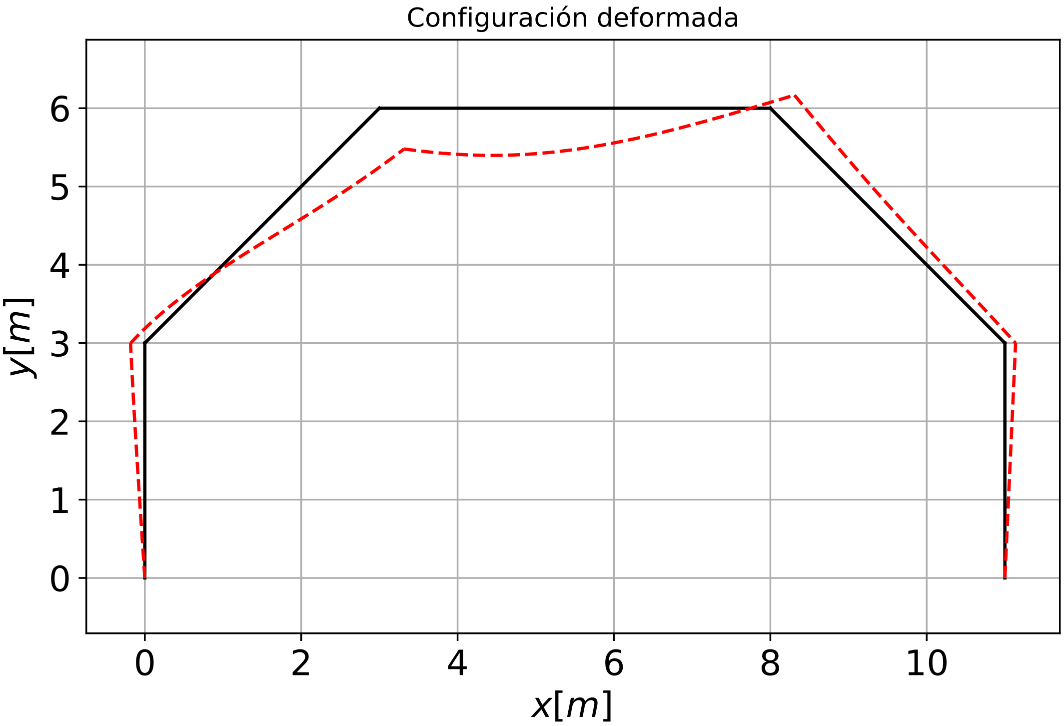

Figura 7: Configuración Deformada para cada uno de los elementos

6. Cálculo de las fuerzas internas(axial, cortante y momento flector) para cada elemento en coordenadas locales

A partir de los campos de desplazamientos en coordenadas locales se obtienen derivando las fuerzas internas para cada elemento.

<u>Elemento A</u>

$$P_E(x'_A) = -101.0V_E(x'_A) = 37.7 \sin(0.214x'_A) \sinh(0.214x'_A) - 5.18 \cdot 10^{-15} \sin(0.214x'_A) \cosh(0.214x'_A) + 5.18 \cdot 10^{-15} \cos(0.214x'_A) \sinh \tag{66}$$

x'_A	P(x'$_A$)	V(x'$_A$)	M(x'$_A$)
0.000	-100.957	25.268	-0.000
0.333	-100.957	25.459	-8.444
0.667	-100.957	26.031	-17.015
1.000	-100.957	26.980	-25.840
1.333	-100.957	28.299	-35.043
1.667	-100.957	29.980	-44.746
2.000	-100.957	32.009	-55.068
2.333	-100.957	34.372	-66.122
2.667	-100.957	37.049	-78.017
3.000	-100.957	40.018	-90.854

(67)

Elemento B

$\mathrm{P}_E(x'_A) = -0.000244{x'_B}^3 + 2.48{x'_B}^2 - 99.7$

$V_E(x'_A) = -0.000488{x'_B}^4 + 2.48{x'_B}^2 - 43.1$

$M_E(x'_A) = -0.823{x'_B}^3 + 43.1x'_B - 90.8$ (68)

x'_B	P(x'$_B$)	V(x'$_B$)	M(x'$_B$)
0.000	-99.685	-43.091	-90.854
0.471	-99.135	-42.541	-70.627
0.943	-97.485	-40.891	-50.919
1.414	-94.735	-38.141	-32.248
1.886	-90.885	-34.291	-15.132
2.357	-85.935	-29.341	-0.091
2.828	-79.886	-23.292	12.358
3.300	-72.736	-16.142	21.696
3.771	-64.486	-7.892	27.404
4.243	-55.137	1.457	28.964

(69)

Elemento C

$\mathrm{P}_E(x'_A) = -0.000244{x'_B}^3 + 2.48{x'_B}^2 - 99.7$

$V_E(x'_A) = -0.000488{x'_B}^4 + 2.48{x'_B}^2 - 43.1$

$M_E(x'_A) = -0.823{x'_B}^3 + 43.1x'_B - 90.8$

x'_C	P(x'$_C$)	V(x'$_C$)	M(x'$_C$)
0.000	-40.018	-37.957	28.964
0.556	-40.018	-17.217	44.050
1.111	-40.018	-1.661	49.053
1.667	-40.018	8.709	46.855
2.222	-40.018	13.895	40.337
2.778	-40.018	14.543	32.317
3.333	-40.018	14.543	24.238
3.889	-40.018	14.543	16.159
4.444	-40.018	14.543	8.079
5.000	-40.018	14.543	-0.000

(70)

<u>Elemento D</u>

$\mathrm{P}_E(x'_D) = -2.92{x'_D}^2 + 17.5x'_D - 38.6$

$V_E(x'_D) = -2.92{x'_D}^2 + 17.5x'_D - 18.0$

$M_E(x'_D) = x'_D\left(0.000977{x'_D}^3 + 0.971{x'_D}^2 - 8.75x'_D + 18.0\right)$

x'_D	P(x'$_D$)	V(x'$_D$)	M(x'$_D$)
0.000	-38.580	-18.014	-0.000
0.471	-30.979	-10.412	6.649
0.943	-24.674	-4.107	10.020
1.414	-19.665	0.902	10.725
1.886	-15.952	4.614	9.374
2.357	-13.536	7.030	6.578
2.828	-12.416	8.150	2.949
3.300	-12.592	7.974	-0.902
3.771	-14.065	6.501	-4.365
4.243	-16.834	3.732	-6.828

(71)

<u>Elemento E</u>

$\mathrm{P}_E(x'_E) = -14.5$

$V_E(x'_A) = -25.5\sin(0.214x'_E)\sinh(0.214x'_E) - 5.18\cdot10^{-15}\sin(0.214x'_E)\cosh(0.214x'_E) + 5.18\cdot10^{-15}\cos(0.214x'_E)\sinh(0.214x'_E) + 1.22\cos(0.214x'_E)\cosh(0.214x'_E)$

$M_E(x'_A) = 56.8\sin(0.214x'_E)\cosh(0.214x'_E) - 62.5\cos(0.214x'_E)\sinh(0.214x'_E) - 2.42\cdot10^{-14}\cos(0.214x'_E)\cosh(0.214x'_E)$

x_E	P(x'$_E$)	V(x'$_E$)	M(x'$_E$)
0.000	-14.543	1.217	-0.000
0.333	-14.543	1.088	-0.391
0.667	-14.543	0.700	-0.696
1.000	-14.543	0.054	-0.829
1.333	-14.543	-0.852	-0.703
1.667	-14.543	-2.016	-0.232
2.000	-14.543	-3.440	0.670
2.333	-14.543	-5.123	2.090
2.667	-14.543	-7.065	4.114
3.000	-14.543	-9.264	6.828

(72)

6.1. Diagramas campos de las fuerzas internas

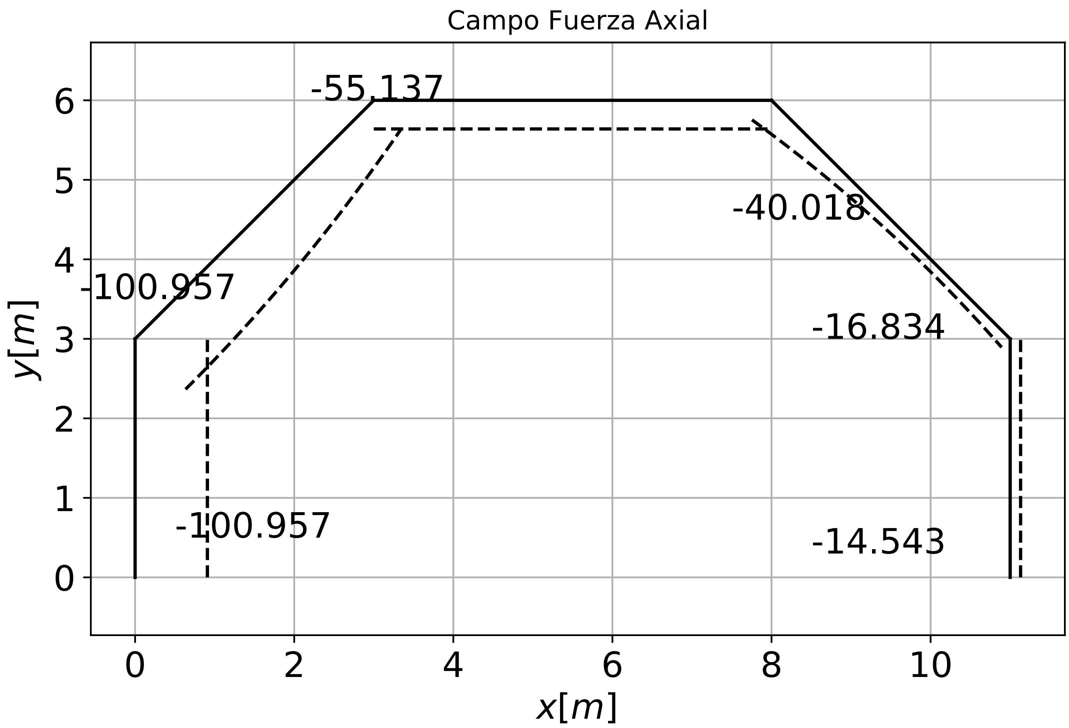

Figura 8: Campo de Fuerza Axial

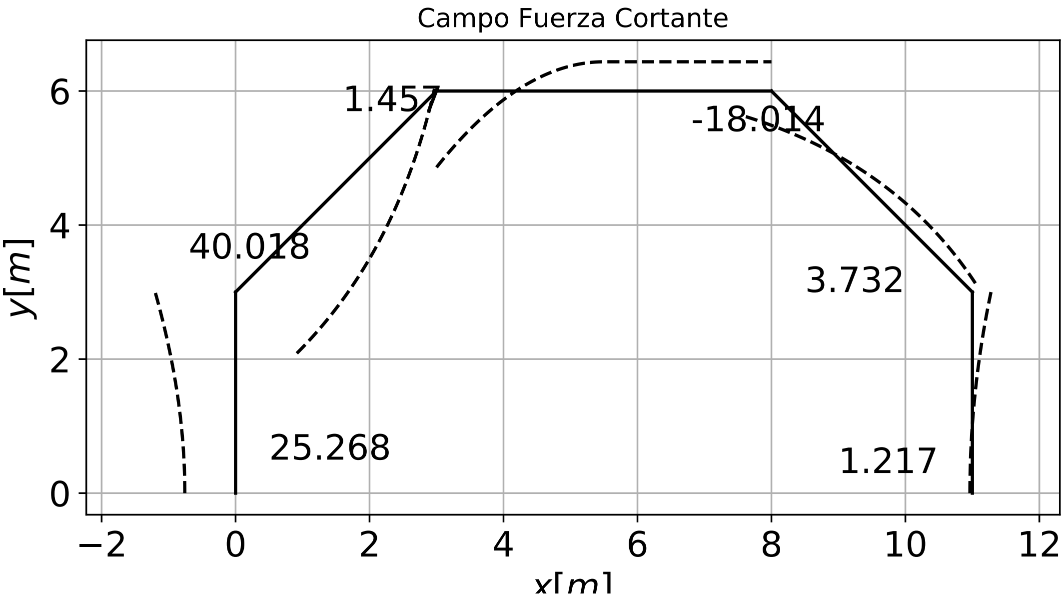

Figura 9: Campo Fuerza Cortante

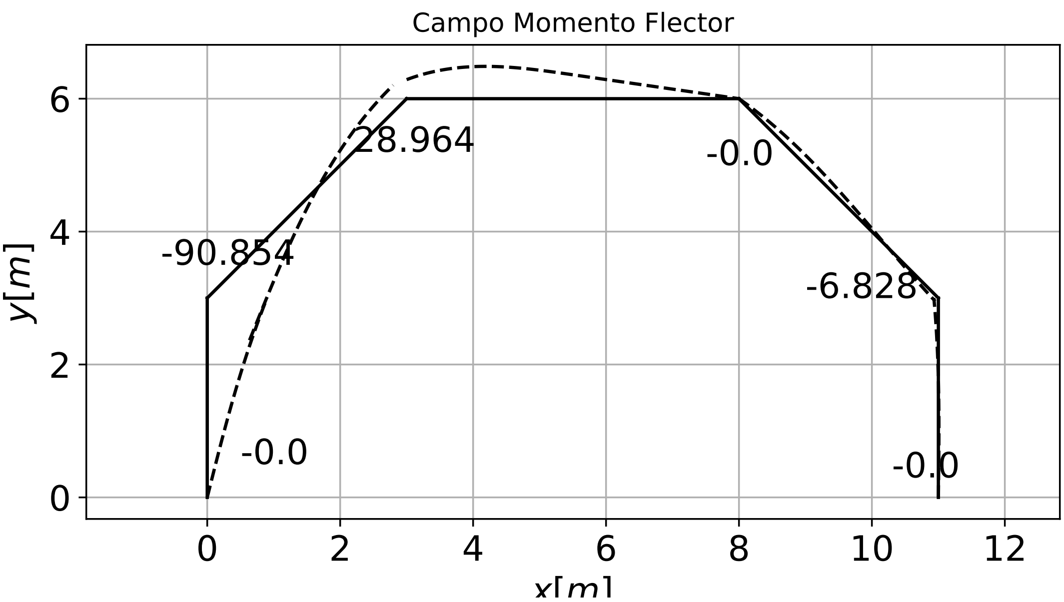

Figura 10: Campo Momento Flector