

## 1. Enunciado

La estructura presentada en la figura 1 es de concreto con un módulo de elasticidad de  $E = 2.0107 \text{ kN/m}^2$  y está formada por 4 elementos, uno de ellos tipo pila (A) y tres tipo pórtico plano (B, C y D). El elemento tipo pila tiene sección transversal con diámetro de 110cm y los elementos tipo pórtico plano tienen de sección transversal rectangular con base 40cm y una altura de 30cm.

Además de lo anterior, el ingeniero geotecnista ha indicado que el suelo blando en el cual se encuentra la pila tiene una rigidez lateral por unidad de longitud  $k_{\text{Lateral}} = 9600 \text{ kN/m}^2$ .

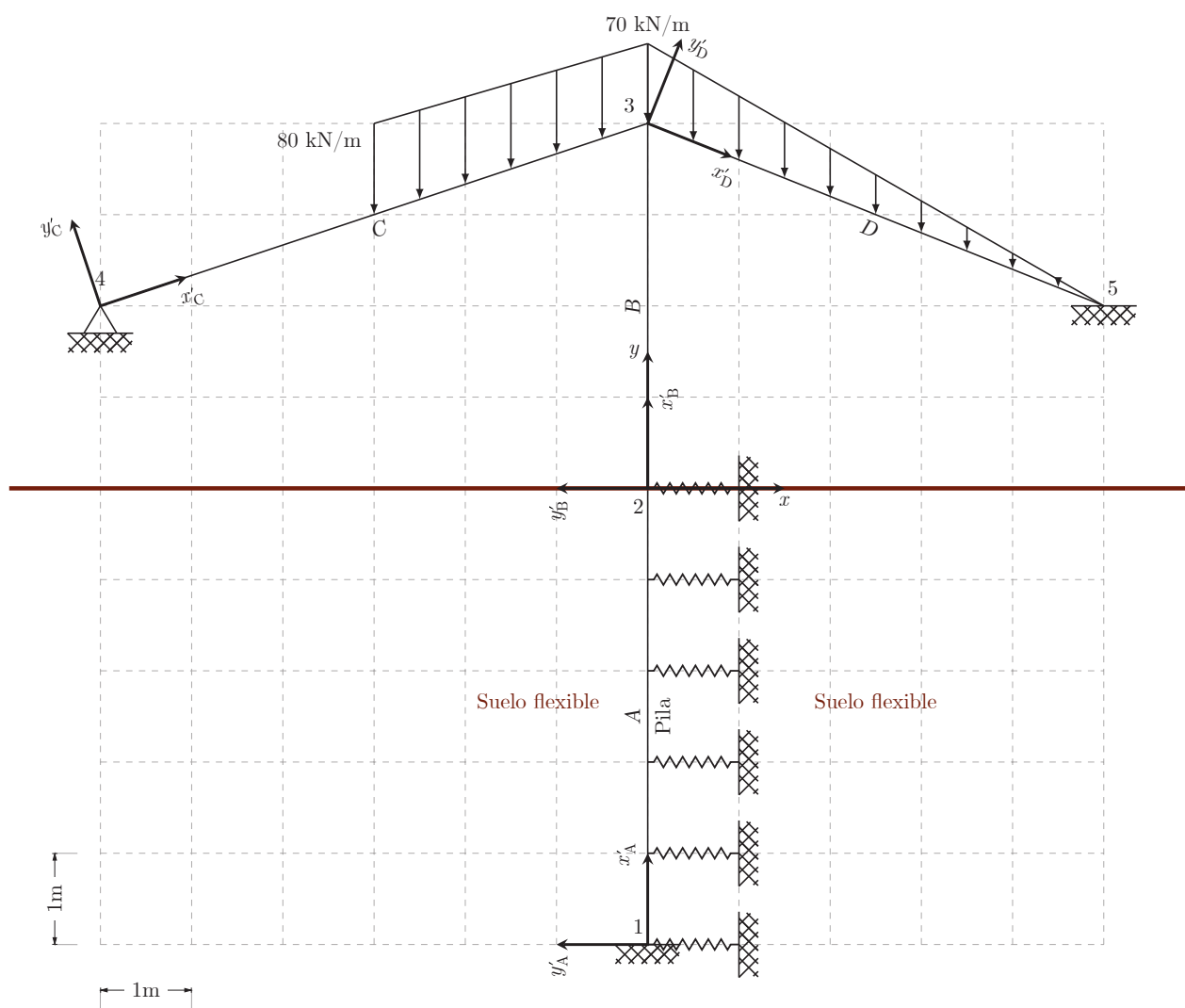


Figura 1: Estructura a desarrollar

## 2. Marco Teórico

### 2.1. Elemento tipo pórtico plano

El elemento tipo pórtico plano es la superposición de un elemento tipo cercha y uno tipo viga. en dirección del eje  $x'_E$  se comporta como una barra, mientras que en dirección  $y'_E$  se comporta como una viga, por lo tanto el elemento se encuentra sometido a cargas de flexión, cortantes y fuerzas axial.

#### Ecuaciones diferenciales gobernantes

las Ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano son:

$$-p_E(x'_E) = A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx'^2_2}(x'_E) \quad (1a)$$

$$q_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx'^4_2}(x'_E) \quad (1b)$$

#### Funciones de forma

Las funciones de forma para el comportamiento axial (eje local  $x'_E$ ) son  $\psi_1^E(x'_E)$  y  $\psi_4^E(x'_E)$ , mientras que las funciones de forma para el comportamiento en dirección  $y'_E$  son  $\psi_2^E(x'_E)$ ,  $\psi_3^E(x'_E)$ ,  $\psi_5^E(x'_E)$ ,  $\psi_6^E(x'_E)$ .

$$\psi_1 = 1 - \left( \frac{x'_E}{L_E} \right) \quad (2a)$$

$$\psi_2 = 1 - 3 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 + 2 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \quad (2b)$$

$$\psi_3 = L_E \left[ \left( \frac{x'_E}{L_E} \right) - 2 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 + \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \right] \quad (2c)$$

$$\psi_4 = \frac{x'_E}{L_E} \quad (2d)$$

$$\psi_5 = 3 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 - 2 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \quad (2e)$$

$$\psi_6 = L_E \left[ - \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 + \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \right] \quad (2f)$$

#### Función de Green

$$G_{xx}(x'_E, \xi'_E) = \begin{cases} G_{xx}^I(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E}{A_E E_E} \psi_4^E(x'_E) \psi_1^E(\xi'_E) & 0 \leq x'_E < \xi'_E \\ G_{xx}^{II}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E}{A_E E_E} \psi_1^E(x'_E) \psi_4^E(\xi'_E) & \xi'_E \leq x'_E < L_E \end{cases} \quad (3)$$

$$G_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \begin{cases} G_{yy}^I(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E^3}{6 E_E I_E} \left[ - \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \psi_2^E(\xi'_E) + 3 \left( \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 \frac{\psi_3^E(\xi'_E)}{L_E} \right] & 0 \leq x'_E \leq \xi'_E \\ G_{yy}^{II}(x'_E, \xi'_E) = \frac{L_E^3}{6 E_E I_E} \left[ - \left( 1 - \frac{x'_E}{L_E} \right)^3 \psi_5^E(\xi'_E) + 3 \left( 1 - \frac{x'_E}{L_E} \right)^2 \frac{\psi_6^E(\xi'_E)}{L_E} \right] & \xi'_E < x'_E \leq L_E \end{cases} \quad (4)$$

#### Descomposiciones de los campos de desplazamiento

Este tipo de elemento posee dos componentes de desplazamientos una en dirección del eje local  $x'_E$  y la otra en dirección del eje local  $y'_E$ , las cuales se descomponen de la siguiente manera respectivamente:

$$u_E(x'_E) = u_E^h(x'_E) + u_E^f(x'_E) \quad (5a)$$

$$v_E(x'_E) = v_E^h(x'_E) + v_E^f(x'_E) \quad (5b)$$

### Campo de desplazamiento homogéneo

$$u_E^h(x'_E) = \psi_1^E(x'_E)u_i^E + \psi_4^E(x'_E)u_j^E \quad (6a)$$

$$v_E^h(x'_E) = \psi_2^E(x'_E)v_i^E + \psi_3^E(x'_E)\theta_i^E + \psi_5^E(x'_E)v_j^E + \psi_6^E(x'_E)\theta_j^E \quad (6b)$$

### Campo empotrado

Las componentes de campo empotrado en dirección  $x'_E$  y  $y'_E$  se calcula a partir de las funciones de green.

$$u_E^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}^H(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} p_E(\xi'_E)G_{xx}^I(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E \quad (7a)$$

$$(7b)$$

$$v_E^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}^H(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} q_E(\xi'_E)G_{yy}^I(x'_E, \xi'_E)d\xi'_E \quad (7c)$$

### Cálculo de fuerzas internas

Estas se hallan a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano.

$$P_E(x'_E) = A_E E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \quad (8a)$$

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'^2_E}(x'_E) \quad (8b)$$

$$V_E(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx'^3_E}(x'_E) \quad (8c)$$

### Sistema de ecuaciones en coordenadas locales

$$\begin{Bmatrix} FX_i^E \\ FY_i^E \\ M_i^E \\ FX_j^E \\ FY_j^E \\ M_j^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_E I_E}{L_E^3} & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & 0 & -\frac{12E_E I_E}{L_E^3} & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} \\ 0 & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{4E_E I_E}{L_E} & 0 & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{2E_E I_E}{L_E} \\ -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_E I_E}{L_E^3} & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & 0 & \frac{12E_E I_E}{L_E^3} & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} \\ 0 & \frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{2E_E I_E}{L_E} & 0 & -\frac{6E_E I_E}{L_E^2} & \frac{4E_E I_E}{L_E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^E \\ v_i^E \\ \theta_i^E \\ u_j^E \\ v_j^E \\ \theta_j^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_0^{L_E} \psi_1^E(x'_E) p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_2^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_3^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_4^E(x'_E) p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_5^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_6^E(x'_E) q_E dx'_E \end{Bmatrix} \quad (9)$$

### Matriz de transformación de coordenadas

$$[T_E^*] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_E - \phi_i) & \sin(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_E - \phi_i) & \cos(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_E - \phi_j) & \sin(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_E - \phi_j) & \cos(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 2.2. Elemento tipo pila

Este elemento se encuentra compuesto por dos tipos de elementos, un elemento tipo viga sobre fundación flexible y otro elemento tipo pila sin fricción en el fuste.

### Ecuaciones diferenciales gobernantes

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del elemento son:

$$-p_E(x'_E) = A_E E_E \frac{d^2 u_E}{dx'^2_2}(x'_E) \quad (11a)$$

$$q_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^4 v_E}{dx'^4_2}(x'_E) + k_E v_E(x'_E) \quad (11b)$$

Donde:  $k_E$  es la constate de rigidez del suelo

### funciones de forma

Las funciones de forma para el comportamiento axial (eje local  $x'_E$ ) son  $\psi_1^E$  y  $\psi_4^E$ , las cuales corresponden al elemento tipo pórtico plano mencionado anteriormente.

Mientras que las funciones de forma para el comportamiento en dirección  $y'_E$  son  $\Psi_2^E, \Psi_3^E, \Psi_5^E, \Psi_6^E$ , las cuales corresponden al elemento tipo viga sobre fundación flexible de sección transversal constante.

$$\begin{aligned} \Psi_2^E(x'_E) = & \frac{-(s^2 \cdot ch^2 + c^2 \cdot sh^2) \sin(\lambda_E x'_E) + \sinh(\lambda_E x'_E) + (s \cdot c + sh \cdot ch)[\sin(\lambda_E x'_E) \cosh(\lambda_E x'_E) - \cos(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E)]}{sh^2 - s^2} \\ & + \frac{(sh^2 - s^2) \cos(\lambda_E x'_E) \cosh(\lambda_E x'_E)}{sh^2 - s^2} \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\Psi_3^E(x'_E) = \frac{1}{\lambda_E} \frac{(s \cdot c - sh \cdot ch) \sin(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E) + sh^2 \sin(\lambda_E x'_E) \cosh(\lambda_E x'_E) - s^2 \cos(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E)}{sh^2 - s^2} \quad (12b)$$

$$\Psi_5^E(x'_E) = \frac{s \cdot sh \cdot \sin(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E) - (s \cdot ch + c \cdot sh) \sin(\lambda_E x'_E) \cosh(\lambda_E x'_E) + (s \cdot ch + c \cdot sh) \cos(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E)}{sh^2 - s^2} \quad (12c)$$

$$\Psi_6^E(x'_E) = \frac{1}{\lambda_E} \frac{(c \cdot sh - s \cdot ch) \sin(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E) + s \cdot sh \cdot \sin(\lambda_E x'_E) \cdot \cosh(\lambda_E x'_E) - s \cdot sh \cdot \cos(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E)}{sh^2 - s^2} \quad (12d)$$

Donde:

$$\begin{aligned} s &= \sin(\lambda_E x'_E) \\ c &= \cos(\lambda_E x'_E) \\ sh &= \sinh(\lambda_E x'_E) \\ ch &= \cosh(\lambda_E x'_E) \\ \lambda_E &= \sqrt[4]{\frac{k_E}{4E_E I_E}} \end{aligned}$$

### Función de Green

La función de green para una viga sobre fundación flexible doblemente empotrada sometida a una fuerza puntual es:

$$G_{yy}(x'_E, \xi'_E) = \begin{cases} G_{yy}^I(x'_E, \xi'_E) & 0 \leq x'_E \leq \xi'_E \\ G_{yy}^{II}(x'_E, \xi'_E) & \xi'_E < x'_E \leq L_E \end{cases} \quad (13)$$

Donde:

$$G_{yy}^I(x'_E, \xi'_E) = \frac{1}{E_E I_E} \left\{ -\frac{\sin(\lambda_E x'_E) \cosh(\lambda_E x'_E) - \sinh(\lambda_E x'_E) \cos(\lambda_E x'_E)}{4\lambda_E^3} \cdot \Psi_2^E(x'_E) + \frac{\sin(\lambda_E x'_E) \sinh(\lambda_E x'_E)}{2\lambda_E^2} \cdot \Psi_3^E(x'_E) \right\} \quad (14)$$

$$G_{yy}^{II}(x'_E, \xi'_E) = \frac{1}{E_E I_E} \left\{ -\frac{\sin[\lambda(L_E - x'_E)] \cosh[\lambda(L_E - x'_E)] - \sinh[\lambda(L_E - x'_E)] \cos[\lambda(L_E - x'_E)]}{4\lambda_E^3} \cdot \Psi_5^E(\xi'_E) - \frac{\sin[\lambda(L_E - x'_E)] \sinh[\lambda(L_E - x'_E)]}{2\lambda_E^2} \right\} \quad (15)$$

### Descomposiciones de los campos de desplazamiento

De igual manera que en el elemento tipo pórtico plano se tienen dos componentes de desplazamientos (una en dirección del eje local  $x'_E$  y la otra en dirección del eje local  $y'_E$ ), las cuales se descomponen de la siguiente manera respectivamente:

$$u_E(x'_E) = u_E^h(x'_E) + u_E^f(x'_E) \quad (16a)$$

$$v_E(x'_E) = v_E^h(x'_E) + v_E^f(x'_E) \quad (16b)$$

### Campo de desplazamiento homogéneo

$$u_E^h(x'_E) = \psi_1^E(x'_E) u_i^E + \psi_4^E(x'_E) u_j^E \quad (17a)$$

$$v_E^h(x'_E) = \Psi_2^E(x'_E) v_i^E + \Psi_3^E(x'_E) \theta_i^E + \Psi_5^E(x'_E) v_j^E + \Psi_6^E(x'_E) \theta_j^E \quad (17b)$$

### Campo empotrado

Las componentes de campo empotrado en dirección  $x'_E$  y  $y'_E$  se calcula a partir de las funciones de green.

$$u_E^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} p_E(\xi'_E) G_{xx}^{II}(x'_E, \xi'_E) d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} p_E(\xi'_E) G_{xx}^I(x'_E, \xi'_E) d\xi'_E \quad (18a)$$

$$(18b)$$

$$v_E^f(x'_E) = \int_0^{x'_E} q_E(\xi'_E) G_{yy}^{II}(x'_E, \xi'_E) d\xi'_E + \int_{x'_E}^{L'_E} q_E(\xi'_E) G_{yy}^I(x'_E, \xi'_E) d\xi'_E \quad (18c)$$

Donde  $G_{xx}(x'_E, \xi'_E)$  es la función de green de una barra doblemente empotrada y  $G_{yy}(x'_E, \xi'_E)$  es la función de Green de una viga sobre fundación flexible doblemente empotrada.

### Cálculo de fuerzas internas

Estas se hallan a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del elemento tipo pórtico plano.

$$P_E(x'_E) = A_E E_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \quad (19a)$$

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx'^2_E}(x'_E) \quad (19b)$$

$$V_E(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx'^3_E}(x'_E) \quad (19c)$$

### Fuerza que ejerce sobre la pila

La fuerza que el suelo ejerce sobre la pila solo ocurre en dirección del eje local  $y'_E$  y se calcula como:

$$f_s(x'_E) = -k_E v_E(x'_E) \quad (20)$$

Sistema de ecuaciones en coordenadas locales

$$\begin{Bmatrix} FX_i^E \\ FY_i^E \\ M_i^E \\ FX_j^E \\ FY_j^E \\ M_j^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 & \frac{A_E E_E}{L_E} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^E \\ v_i^E \\ \theta_i^E \\ u_j^E \\ v_j^E \\ \theta_j^E \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_0^{L_E} \psi_1^E(x'_E) p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \Psi_2^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \Psi_3^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \psi_4^E(x'_E) p_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \Psi_5^E(x'_E) q_E dx'_E \\ \int_0^{L_E} \Psi_6^E(x'_E) q_E dx'_E \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Donde los términos  $k_{ij}$  son aquellos de la viga sobre fundación flexible y se obtienen de la siguiente manera:

$$k_{22} = k_{55} = 4E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot c + sh \cdot ch}{sh^2 - s^2} \quad (22a)$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{56} = -k_{65} = 2E_E I_E \lambda E^2 \cdot \frac{s^2 + sh^2}{sh^2 - s^2} \quad (22b)$$

$$k_{25} = k_{52} = -4E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot ch + c \cdot sh}{sh^2 - s^2} \quad (22c)$$

$$k_{26} = k_{62} = -k_{35} = -k_{53} = 4E_E I_E \lambda E^2 \cdot \frac{s \cdot sh}{sh^2 - s^2} \quad (22d)$$

$$k_{33} = k_{66} = 2E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{sh \cdot ch - s \cdot c}{sh^2 - s^2} \quad (22e)$$

$$k_{36} = k_{63} = 2E_E I_E \lambda E^3 \cdot \frac{s \cdot ch - c \cdot ch}{sh^2 - s^2} \quad (22f)$$

Matriz de transformación de coordenadas

$$[T_E^*] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_E - \phi_i) & \sin(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_E - \phi_i) & \cos(\theta_E - \phi_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_E - \phi_j) & \sin(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_E - \phi_j) & \cos(\theta_E - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

**Nota:**

El marco teórico fue realizado en base a las notas de clase del profesor Juan Camilo Molina Villegas - Introducción al análisis matricial de estructuras [1]

Solución

### 3. Cálculo de las fuerzas externas en coordenadas locales

Con base en la dirección global de las cargas externas se descomponen de la siguiente manera, siendo  $R'(x'_E)$  y  $Q'(x'_E)$  orientadas verticalmente y horizontalmente respectivamente.

Para el caso de la fuerza externa en dirección vertical  $R'(x'_E)$ , las cargas externas en coordenadas locales son:

$$p_E(x'_E) = R'(x'_E) |\cos \theta_E \sin \theta_E \quad (24a)$$

$$q_E(x'_E) = R'(x'_E) |\cos \theta_E \cos \theta_E \quad (24b)$$

De forma similar al caso de la fuerza externa en dirección vertical  $R'(x'_E)$ , las cargas externas en coordenadas locales son para una carga en dirección horizontal son:

$$p_E(x'_E) = Q'(x'_E) |\sin \theta_E \cos \theta_E| \quad (25a)$$

$$q_E(x'_E) = -Q'(x'_E) |\sin \theta_E \sin \theta_E| \quad (25b)$$

#### Elemento C

Carga distribuida en coordenadas globales orientada en dirección vertical con  $\theta_C$  igual a  $\frac{424}{23}$  grados.

$$R_C(x'_C) = \frac{10}{3}x'_C - 90 \quad \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \quad (26)$$

Cargas distribuidas en dirección de los ejes locales.

$$p_C = x'_C - 27 \quad \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \quad (27a)$$

$$q_C = 3x'_C - 81 \quad \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \quad (27b)$$

#### Elemento D

Carga distribuida en coordenadas globales orientada en dirección vertical con  $\theta_D$  igual a  $\frac{-109}{5}$  grados.

$$R_D(x'_D) = 14x'_D - 70 \quad 0 \leq x'_D \leq 2\sqrt{10} \quad (28)$$

Cargas distribuidas en dirección de los ejes locales.

$$p_D = \frac{700}{29} - \frac{140}{29}x'_D \quad 0 \leq x'_D \leq 2\sqrt{10} \quad (29a)$$

$$q_D = \frac{350}{29}x'_D - \frac{1750}{29} \quad 0 \leq x'_D \leq 2\sqrt{10} \quad (29b)$$

## 4. Definición del sistema de ecuaciones de cada elemento en coordenadas locales

A continuación se presentan los sistemas de ecuaciones para cada uno de los elementos en coordenadas locales:

#### Elemento A

$$\begin{Bmatrix} FX_1^A \\ FY_1^A \\ M_1^A \\ FX_2^A \\ FY_2^A \\ M_2^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5574 \cdot 10^5 & 3.5747 \cdot 10^5 & 0 & -1.3188 \cdot 10^5 & 3.3761 \cdot 10^5 \\ 0 & 3.5747 \cdot 10^5 & 1.1613 \cdot 10^6 & 0 & -3.3761 \cdot 10^5 & 5.6646 \cdot 10^5 \\ -3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3188 \cdot 10^5 & -3.3761 \cdot 10^5 & 0 & 1.5574 \cdot 10^5 & -3.5747 \cdot 10^5 \\ 0 & 3.3761 \cdot 10^5 & 5.6646 \cdot 10^5 & 0 & -3.5747 \cdot 10^5 & 1.1613 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^A \\ v_1^A \\ \theta_1^A \\ u_2^A \\ v_2^A \\ \theta_2^A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

#### Elemento B

$$\begin{Bmatrix} FX_2^B \\ FY_2^B \\ M_2^B \\ FX_3^B \\ FY_3^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3375.0 & 6750.0 & 0 & -3375.0 & 6750.0 \\ 0 & 6750.0 & 18000.0 & 0 & -6750.0 & 9000.0 \\ -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -3375.0 & -6750.0 & 0 & 3375.0 & -6750.0 \\ 0 & 6750.0 & 9000.0 & 0 & -6750.0 & 18000.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^B \\ v_2^B \\ \theta_2^B \\ u_3^B \\ v_3^B \\ \theta_3^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

### Elemento C

$$\begin{Bmatrix} FX_4^C \\ FY_4^C \\ M_4^C \\ FX_3^C \\ FY_3^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 853.81 & 2700.0 & 0 & -853.81 & 2700.0 \\ 0 & 2700.0 & 11384.0 & 0 & -2700.0 & 5692.1 \\ -3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -853.81 & -2700.0 & 0 & 853.81 & -2700.0 \\ 0 & 2700.0 & 5692.1 & 0 & -2700.0 & 11384.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4^C \\ v_4^C \\ \theta_4^C \\ u_3^C \\ v_3^C \\ \theta_3^C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 78.715 \\ 238.14 \\ 244.7 \\ 72.048 \\ 214.14 \\ -232.05 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

### Elemento D

$$\begin{Bmatrix} FX_3^D \\ FY_3^D \\ M_3^D \\ FX_5^D \\ FY_5^D \\ M_5^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1383.1 & 3724.1 & 0 & -1383.1 & 3724.1 \\ 0 & 3724.1 & 13370.0 & 0 & -3724.1 & 6685.0 \\ -4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -1383.1 & -3724.1 & 0 & 1383.1 & -3724.1 \\ 0 & 3724.1 & 6685.0 & 0 & -3724.1 & 13370.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^D \\ v_3^D \\ \theta_3^D \\ u_5^D \\ v_5^D \\ \theta_5^D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -41.66 \\ 109.98 \\ 83.006 \\ -18.327 \\ 39.983 \\ -51.593 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

## 5. Definición del sistema de ecuaciones de cada elemento en coordenadas globales

A continuación se presenta para cada uno de los elementos su matriz de transformación  $T_E^*$  y el sistema de ecuaciones en coordenadas globales, el cual es obtenido realización el siguiente producto matricial:

$$[T_E^*]^T \cdot [K_E] \cdot [T_E^*]$$

### Elemento A

$$[T_A^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_1^A \\ FY_1^A \\ M_1^A \\ FX_2^A \\ FY_2^A \\ M_2^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5574 \cdot 10^5 & 0 & -3.5747 \cdot 10^5 & -1.3188 \cdot 10^5 & 0 & -3.3761 \cdot 10^5 \\ 0 & 3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -3.8013 \cdot 10^6 & 0 \\ -3.5747 \cdot 10^5 & 0 & 1.1613 \cdot 10^6 & 3.3761 \cdot 10^5 & 0 & 5.6646 \cdot 10^5 \\ -1.3188 \cdot 10^5 & 0 & 3.3761 \cdot 10^5 & 1.5574 \cdot 10^5 & 0 & 3.5747 \cdot 10^5 \\ 0 & -3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3.8013 \cdot 10^6 & 0 \\ -3.3761 \cdot 10^5 & 0 & 5.6646 \cdot 10^5 & 3.5747 \cdot 10^5 & 0 & 1.1613 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$



### Elemento B

$$[T_B^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_2^B \\ FY_2^B \\ M_2^B \\ FX_3^B \\ FY_3^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3375.0 & 0 & -6750.0 & -3375.0 & 0 & -6750.0 \\ 0 & 6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 \\ -6750.0 & 0 & 18000.0 & 6750.0 & 0 & 9000.0 \\ -3375.0 & 0 & 6750.0 & 3375.0 & 0 & 6750.0 \\ 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 6.0 \cdot 10^5 & 0 \\ -6750.0 & 0 & 9000.0 & 6750.0 & 0 & 18000.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

### Elemento C

$$[T_C^*] = \begin{bmatrix} 0.94868 & 0.31623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.31623 & 0.94868 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.94868 & 0.31623 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.31623 & 0.94868 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_4^C \\ FY_4^C \\ M_4^C \\ FX_3^C \\ FY_3^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4161 \cdot 10^5 & 1.1359 \cdot 10^5 & -853.81 & -3.4161 \cdot 10^5 & -1.1359 \cdot 10^5 & -853.81 \\ 1.1359 \cdot 10^5 & 38716.0 & 2561.4 & -1.1359 \cdot 10^5 & -38716.0 & 2561.4 \\ -853.81 & 2561.4 & 11384.0 & 853.81 & -2561.4 & 5692.1 \\ -3.4161 \cdot 10^5 & -1.1359 \cdot 10^5 & 853.81 & 3.4161 \cdot 10^5 & 1.1359 \cdot 10^5 & 853.81 \\ -1.1359 \cdot 10^5 & -38716.0 & -2561.4 & 1.1359 \cdot 10^5 & 38716.0 & -2561.4 \\ -853.81 & 2561.4 & 5692.1 & 853.81 & -2561.4 & 11384.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.63246 \\ 250.82 \\ 244.7 \\ 0.63246 \\ 225.94 \\ -232.05 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

### Elemento D

$$[T_D^*] = \begin{bmatrix} 0.92848 & -0.37139 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.37139 & 0.92848 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.92848 & -0.37139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.37139 & 0.92848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_3^D \\ FY_3^D \\ M_3^D \\ FX_5^D \\ FY_5^D \\ M_5^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8439 \cdot 10^5 & -1.532 \cdot 10^5 & 1383.1 & -3.8439 \cdot 10^5 & 1.532 \cdot 10^5 & 1383.1 \\ -1.532 \cdot 10^5 & 62664.0 & 3457.8 & 1.532 \cdot 10^5 & -62664.0 & 3457.8 \\ 1383.1 & 3457.8 & 13370.0 & -1383.1 & -3457.8 & 6685.0 \\ -3.8439 \cdot 10^5 & 1.532 \cdot 10^5 & -1383.1 & 3.8439 \cdot 10^5 & -1.532 \cdot 10^5 & -1383.1 \\ 1.532 \cdot 10^5 & -62664.0 & -3457.8 & -1.532 \cdot 10^5 & 62664.0 & -3457.8 \\ 1383.1 & 3457.8 & 6685.0 & -1383.1 & -3457.8 & 13370.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2.1664 \\ 117.59 \\ 83.006 \\ -2.1664 \\ 43.93 \\ -51.593 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

## 6. Cálculo de los desplazamientos nodales desconocidos

### 6.1. Ensamblaje del sistema de ecuaciones gobernante de la estructura

Las ecuaciones que se emplean para dar solución al cálculo de los desplazamientos desconocidos son:

$$FX_2 = FX_2^A + FX_2^B \quad (42a)$$

$$FY_2 = FY_2^A + FY_2^B \quad (42b)$$

$$M_2 = M_2^A + M_2^B \quad (42c)$$

$$FX_3 = FX_3^B + FX_3^C + FX_3^D \quad (42d)$$

$$FY_3 = FY_3^B + FY_3^C + FY_3^D \quad (42e)$$

$$M_3 = M_3^A + M_3^B + M_3^D \quad (42f)$$

$$M_4 = M_4^C \quad (42g)$$

A partir de las ecuaciones de equilibrio presentadas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} FX_2 \\ FY_2 \\ M_2 \\ FX_3 \\ FY_3 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5912 \cdot 10^5 & 0 & 3.5072 \cdot 10^5 & -3375.0 & 0 & -6750.0 & 0 \\ 0 & 4.4013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 3.5072 \cdot 10^5 & 0 & 1.1793 \cdot 10^6 & 6750.0 & 0 & 9000.0 & 0 \\ -3375.0 & 0 & 6750.0 & 7.2937 \cdot 10^5 & -39616.0 & 8986.9 & 853.81 \\ 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 & -39616.0 & 7.0138 \cdot 10^5 & 896.33 & -2561.4 \\ -6750.0 & 0 & 9000.0 & 8986.9 & 896.33 & 42754.0 & 5692.1 \\ 0 & 0 & 0 & 853.81 & -2561.4 & 5692.1 & 11384.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.7989 \\ 343.53 \\ -149.05 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos y rotaciones nodales de la estructura:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000671 \text{ m} \\ -7.82 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -0.000229 \text{ rad} \\ -7.6 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -0.000574 \text{ m} \\ 0.00395 \text{ rad} \\ -0.0021 \text{ rad} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

## 7. Cálculo de las reacciones y fuerzas que el suelo ejerce sobre la pila

### 7.1. Reacciones en los apoyos

Con el valor obtenido de los desplazamientos nodales desconocidos y la porción de los sistemas de ecuaciones de los elementos se relacionan las fuerzas nodales desconocidas con los desplazamientos anteriormente obtenidos, se obtienen las reacciones o las fuerzas nodales desconocidas:

Reacciones	
$FX_1$	-11.110 kN
$FY_1$	297.290 kN
$M_1$	96.750 kN×m
$FX_4$	88.896 kN
$FY_4$	286.39 kN
$FX_5$	-66.321 kN
$FY_5$	54.593 kN
$M_5$	-27.292 kN×m

Cuadro 1: Tabla resumen de reacciones

## 7.2. Fuerza del suelo sobre la pila

La fuerza ejercida por el suelo sobre la viga ocurre en dirección de  $y'_A$  y es positiva en dirección del eje local  $y'_A$  y se calcula de la siguiente manera:

$$f_S(x'_A) = -K_A v_A(x'_A) \quad (45)$$

$$f_S(x'_A) = 7.9068 \sin\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) - 2.2454 \sin\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) + 2.2454 \cos\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \quad (45)$$

## 8. Cálculo de las fuerzas en los extremos de cada elemento en coordenadas locales

A continuación se obtienen las fuerzas internas en cada uno de los elementos que componen la estructura:

### Elemento A

$$\begin{Bmatrix} FX_1^A \\ FY_1^A \\ M_1^A \\ FX_2^A \\ FY_2^A \\ M_2^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5574 \cdot 10^5 & 3.5747 \cdot 10^5 & 0 & -1.3188 \cdot 10^5 & 3.3761 \cdot 10^5 \\ 0 & 3.5747 \cdot 10^5 & 1.1613 \cdot 10^6 & 0 & -3.3761 \cdot 10^5 & 5.6646 \cdot 10^5 \\ -3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3.8013 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3188 \cdot 10^5 & -3.3761 \cdot 10^5 & 0 & 1.5574 \cdot 10^5 & -3.5747 \cdot 10^5 \\ 0 & 3.3761 \cdot 10^5 & 5.6646 \cdot 10^5 & 0 & -3.5747 \cdot 10^5 & 1.1613 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.82 \cdot 10^{-5} \\ -0.000671 \\ -0.000229 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_1^A \\ FY_1^A \\ M_1^A \\ FX_2^A \\ FY_2^A \\ M_2^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 297.287 \text{ kN} \\ 11.1077 \text{ kN} \\ 96.7495 \text{ kN} \times \text{m} \\ -297.287 \text{ kN} \\ -22.5756 \text{ kN} \\ -26.3548 \text{ kN} \times \text{m} \end{Bmatrix}$$

### Elemento B

$$\begin{Bmatrix} FX_2^B \\ FY_2^B \\ M_2^B \\ FX_3^B \\ FY_3^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3375.0 & 6750.0 & 0 & -3375.0 & 6750.0 \\ 0 & 6750.0 & 18000.0 & 0 & -6750.0 & 9000.0 \\ -6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 6.0 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -3375.0 & -6750.0 & 0 & 3375.0 & -6750.0 \\ 0 & 6750.0 & 9000.0 & 0 & -6750.0 & 18000.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -7.8206 \cdot 10^{-5} \\ -0.00067143 \\ -0.00022938 \\ -0.00057369 \\ 7.5953 \cdot 10^{-5} \\ 0.0039476 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_2^B \\ FY_2^B \\ M_2^B \\ FX_3^B \\ FY_3^B \\ M_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 297.287 \text{ kN} \\ 22.5756 \text{ kN} \\ 26.3548 \text{ kN}\times\text{m} \\ -297.287 \text{ kN} \\ -22.5756 \text{ kN} \\ 63.9477 \text{ kN}\times\text{m} \end{Bmatrix}$$

#### Elemento C

$$\begin{Bmatrix} FX_4^C \\ FY_4^C \\ M_4^C \\ FX_3^C \\ FY_3^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 853.81 & 2700.0 & 0 & -853.81 & 2700.0 \\ 0 & 2700.0 & 11384.0 & 0 & -2700.0 & 5692.1 \\ -3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 3.7947 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -853.81 & -2700.0 & 0 & 853.81 & -2700.0 \\ 0 & 2700.0 & 5692.1 & 0 & -2700.0 & 11384.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0020972 \\ -0.00025347 \\ -0.00052023 \\ 0.0039476 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 78.715 \\ 238.14 \\ 244.7 \\ 72.048 \\ 214.14 \\ -232.05 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{Bmatrix} FX_4^C \\ FY_4^C \\ M_4^C \\ FX_3^C \\ FY_3^C \\ M_3^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 174.9 \text{ kN} \\ 243.585 \text{ kN} \\ 244.702 \text{ kN}\times\text{m} \\ -24.137 \text{ kN} \\ 208.704 \text{ kN} \\ -197.645 \text{ kN}\times\text{m} \end{Bmatrix}$$

#### Elemento D

$$\begin{Bmatrix} FX_3^D \\ FY_3^D \\ M_3^D \\ FX_5^D \\ FY_5^D \\ M_5^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 & -4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1383.1 & 3724.1 & 0 & -1383.1 & 3724.1 \\ 0 & 3724.1 & 13370.0 & 0 & -3724.1 & 6685.0 \\ -4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 4.4567 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & -1383.1 & -3724.1 & 0 & 1383.1 & -3724.1 \\ 0 & 3724.1 & 6685.0 & 0 & -3724.1 & 13370.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00014254 \\ -0.00056086 \\ 0.0039476 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -41.66 \\ 109.98 \\ 83.006 \\ -18.327 \\ 39.983 \\ -51.593 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{pmatrix} FX_3'^D \\ FY_3'^D \\ M_3'^D \\ FX_5'^D \\ FY_5'^D \\ M_5'^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.866 \text{ kN} \\ 123.909 \text{ kN} \\ 133.697 \text{ kN}\times\text{m} \\ -81.8528 \text{ kN} \\ 26.0577 \text{ kN} \\ -27.2918 \text{ kN}\times\text{m} \end{pmatrix}$$

## 9. Cálculo del campo de desplazamientos

Se calculan los campos de desplazamiento de los elementos de la estructura, empleando la descomposición del campo de desplazamiento como una homogénea y otra empotrada:

### Elemento A

Debido a que el elemento A no posee una carga externa su campo de desplazamiento empotrado es igual a 0 en ambas direcciones.

El campo de desplazamiento en dirección  $x'_A$  del elemento A es igual a:

$$u_A(x'_A) = u_A^h(x'_A) = -\frac{1}{63934}x'_A \quad (50)$$

El campo de desplazamiento en dirección  $y'_A$  es igual a:

$$\begin{aligned} v_A(x'_A) = v_A^h(x'_A) = & -0.0015763 \sin\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) + 0.00086381 \sin\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) \\ & - 0.00086381 \cos\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{95x'_A}{353\sqrt[4]{\pi}}\right) \end{aligned} \quad (51)$$

### Elemento B

Al igual que el elemento A el elemento B no posee un campo empotrado por lo que sus campos de desplazamiento dependen solamente del campo homogéneo.

El campo de desplazamiento en dirección  $x'_B$  del elemento B es igual a:

$$u_B(x'_B) = u_B^h(x'_B) = -\frac{1}{8073}x'_B - \frac{7}{89507} \quad (52)$$

El campo de desplazamiento en dirección  $y'_B$  es igual a:

$$v_B(x'_B) = v_B^h(x'_B) = \frac{13}{62191}x_B'^3 - \frac{41}{56005}x_B'^2 - \frac{7}{30517}x'_B - \frac{25}{37234} \quad (53)$$

### Elemento C

El campo de desplazamiento en dirección  $x'_C$  del elemento C igual a:

$$u_C^h(x'_C) = -\frac{1}{24952}x'_C \quad (54)$$

$$u_C^f(x'_C) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ \frac{11111}{8888900000}x_C'^2 - \frac{\sqrt{10}}{71111}x'_C + \frac{5}{88889}, & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (55)$$

$$u_C(x'_C) = \begin{cases} -\frac{3}{77543}x'_C, & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ \frac{11111}{8888900000}x_C'^2 - \frac{\sqrt{10}}{71111}x'_C - \frac{1}{26810}x'_C + \frac{5}{88889}, & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (56)$$

El campo de desplazamiento en dirección  $y'_C$  es igual a:

$$v_C^h(x'_C) = \frac{36022130375}{715104008001984} x_C'^3 - \frac{3449\sqrt{10}}{357552004000992} x_C'^2 - \frac{299}{142572} x'_C \quad (57)$$

$$v_C^f(x'_C) = \begin{cases} \frac{7}{19200} x_C'^3 + \frac{68567\sqrt{10}}{487616000} x_C'^3 - \frac{17\sqrt{10}}{14400} x_C'^2 - \frac{3}{1280} x_C'^2, & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ -\frac{3}{16000} x_C'^4 + \frac{242}{79551} x_C'^3 - \frac{719}{43712} x_C'^2 + \frac{1986}{91801} x'_C - \frac{1163}{74610}, & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (58)$$

$$v_C(x'_C) = \begin{cases} \frac{64}{74451} x_C'^3 - \frac{209}{34392} x_C'^2 - \frac{170}{81061} x'_C, & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ -\frac{3}{16000} x_C'^4 + \frac{242}{64027} x_C'^3 - \frac{719}{78487} x_C'^2 + \frac{790}{40437} x'_C - \frac{1555}{99758}, & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (59)$$

#### Elemento D

El campo de desplazamiento en dirección  $x'_D$  del elemento D es igual a:

$$u_D^h(x'_D) = -\frac{1}{37780} x'_D + \frac{\sqrt{29}}{37780} \quad (60)$$

$$u_D^f(x'_D) = -\frac{571}{9942900000} x_D'^2 - \frac{1}{100000} x'_D + \frac{\sqrt{29}}{100000} x'_D \quad (61)$$

$$u_D(x'_D) = -\frac{571}{9942900000} x_D'^2 - \frac{6889}{188900000} x'_D + \frac{\sqrt{29}}{100000} x'_D + \frac{\sqrt{29}}{37780} \quad (62)$$

Mientras que el campo de desplazamiento en dirección  $y'_D$  es igual a:

$$v_D^h(x'_D) = \frac{1983839}{15385555832} x_D'^3 - \frac{4022933\sqrt{29}}{15385555832} x_D'^2 + \frac{349}{88408} x'_D - \frac{5\sqrt{29}}{48008} \quad (63)$$

$$v_D^f(x'_D) = \frac{62639}{11210806080} x_D'^5 - \frac{7}{50112} x_D'^4 + \frac{7}{8640} x_D'^3 + \frac{60553\sqrt{29}}{216742752} x_D'^3 - \frac{7\sqrt{29}}{4320} x_D'^2 - \frac{20185}{4982592} x_D'^2 \quad (64)$$

$$v_D(x'_D) = \frac{1}{100000} x_D'^5 - \frac{7}{50112} x_D'^4 + \frac{131}{53609} x_D'^3 - \frac{1336}{94183} x_D'^2 + \frac{349}{88408} x'_D - \frac{36}{64187} \quad (65)$$

## 10. Cálculo de las fuerzas internas

A continuación se presentan las funciones de las fuerzas internas obtenidas a partir del campo de desplazamiento de cada elemento de la siguiente manera:

$$P_E(x'_E) = A_E I_E \frac{du_E}{dx'_E}(x'_E) \quad (66a)$$

$$M_E(x'_E) = E_E I_E \frac{d^2 v_E}{dx_E'^2}(x'_E) \quad (66b)$$

$$V_E(x'_E) = -E_E I_E \frac{d^3 v_E}{dx_E'^3}(x'_E) \quad (66c)$$

Donde:

$P_E(x'_E)$ : Campo de fuerza axial.

$M_E(x'_E)$ : Campo de momento flector.

$V_E(x'_E)$ : Campo de fuerza cortante

#### Elemento A

$$P_A(x'_A) = -\frac{\sqrt{88549}}{2} - \frac{297}{2} \quad (67)$$

$$M_A(x'_A) = 27.474 \sin\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) + 27.474 \cos\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) - 96.749 \cos\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \quad (68)$$

$$V_E(x'_A) = -19.557 \sin\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) + 19.557 \cos\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \sinh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) - 11.108 \cos\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \cosh\left(\frac{20183x'_A}{74996\sqrt[4]{\pi}}\right) \quad (69)$$

Elemento B

$$P_B(x'_B) = -\frac{\sqrt{88549}}{2} - \frac{297}{2} \quad (70)$$

$$M_B(x'_B) = \frac{1614653}{71522}x'_B - \frac{2073779}{78687} \quad (71)$$

$$V_B(x'_B) = -\frac{\sqrt{113362}}{29} - \frac{318}{29} \quad (72)$$

Elemento C

$$P_C(x'_C) = \begin{cases} -\frac{117}{2} - \frac{\sqrt{12409}}{2} & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{20}x'^3_C + \frac{27\sqrt{10}}{40}x'^2_C + 6x'_C - \frac{135\sqrt{10}}{4} - \frac{7506674}{85447} & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (73)$$

$$M_C(x'_C) = \begin{cases} \frac{6665899}{71798}x'_C - \frac{19174692}{87647} & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ -\frac{11}{10}x'^3_C - \frac{81}{2}x'^2_C + \frac{684005}{2048}x'_C - \frac{606361}{1024} & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (74)$$

$$V_C(x'_C) = \begin{cases} -\frac{164}{7} - \frac{\sqrt{25727}}{7} & 0 \leq x'_C < \sqrt{10} \\ \frac{33}{10}x'^2_C + 81x'_C - \frac{1539\sqrt{10}}{16} + \frac{1639137}{98242} & \sqrt{10} \leq x'_C \leq 2\sqrt{10} \end{cases} \quad (75)$$

Elemento D

$$P_D(x'_D) = -\frac{140\sqrt{29}}{841}x'^3_D - \frac{350\sqrt{29}}{841}x'^2_D - \frac{8}{29}x'_D - \frac{8470616}{97521} + \frac{350\sqrt{29}}{29} \quad (76)$$

$$M_D(x'_D) = \frac{7830125}{3892641}x'^3_D - \frac{875}{29}x'^2_D + \frac{350812925911}{3458816962}x'_D + \frac{875\sqrt{29}}{29}x'_D - \frac{351483705365\sqrt{29}}{5188225443} - \frac{875}{6} \quad (77)$$

$$V_D(x'_D) = -\frac{7830125}{1297547}x'^2_D + \frac{1750}{29}x'_D - \frac{875\sqrt{29}}{29} + \frac{3066927}{79507} \quad (78)$$

## 11. Tablas de resumen

Elemento A

$x_A$	$P(x'_A)$	$V(x'_A)$	$M(x'_A)$
0.00000	-297.28727	-11.10766	-96.74946
0.55556	-297.28727	-11.12583	-90.57601
1.11111	-297.28727	-11.25068	-84.36763
1.66667	-297.28727	-11.58237	-78.03691
2.22222	-297.28727	-12.21390	-71.44276
2.77778	-297.28727	-13.23087	-64.39448
3.33333	-297.28727	-14.71104	-56.65596
3.88889	-297.28727	-16.72374	-47.95020
4.44444	-297.28727	-19.32887	-37.96425
5.00000	-297.28727	-22.57561	-26.35479

Cuadro 2: Tabla resumen fuerzas internas elemento A

#### Elemento B

$x_B$	$P(x'_B)$	$V(x'_B)$	$M(x'_B)$
0.00000	-297.28727	-22.57561	-26.35479
0.44444	-297.28727	-22.57561	-16.32118
0.88889	-297.28727	-22.57561	-6.28757
1.33333	-297.28727	-22.57561	3.74603
1.77778	-297.28727	-22.57561	13.77964
2.22222	-297.28727	-22.57561	23.81324
2.66667	-297.28727	-22.57561	33.84685
3.11111	-297.28727	-22.57561	43.88046
3.55556	-297.28727	-22.57561	53.91406
4.00000	-297.28727	-22.57561	63.94767

Cuadro 3: Tabla resumen fuerzas internas elemento B

#### Elemento C



$x_C$	$P(x'_C)$	$V(x'_C)$	$M(x'_C)$
0.00000	-114.19719	-46.34241	-71.72589
0.70273	-114.19719	-46.34241	-39.15977
1.40546	-114.19719	-46.34241	-6.59364
2.10819	-114.19719	-46.34241	25.97248
2.81091	-114.19719	-46.34241	58.53860
3.51364	-105.88320	-21.40042	86.71202
4.21637	-89.62558	27.37242	84.52692
4.91910	-73.86179	74.66379	48.58829
5.62183	-58.59183	120.47368	-20.06279
6.32456	-43.81569	164.80209	-120.38523

Cuadro 4: Tabla resumen fuerzas internas elemento C

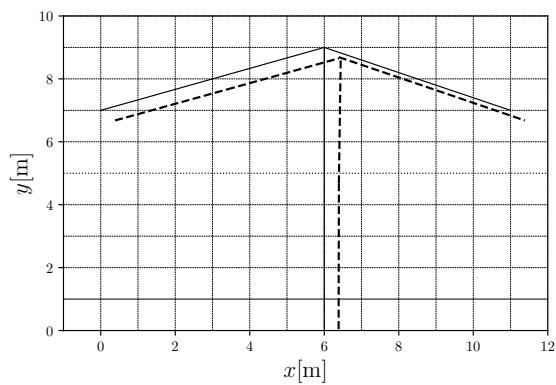
#### Elemento D

$x_D$	$P(x'_C)$	$V(x'_C)$	$M(x'_C)$
0.00000	-21.86604	-123.90912	-133.69744
0.59835	-35.44481	-89.96219	-69.92777
1.19670	-47.29519	-60.33624	-25.17757
1.79505	-57.41717	-35.03128	3.13863
2.39341	-65.81076	-14.04731	17.60630
2.99176	-72.47595	2.61567	20.81092
3.59011	-77.41275	14.95766	15.33795
4.18846	-80.62115	22.97867	3.77286
4.78681	-82.10116	26.67869	-11.29888
5.38516	-81.85277	26.05772	-27.29180

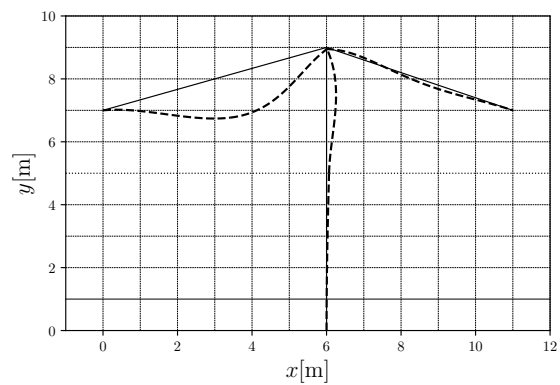
Cuadro 5: Tabla resumen fuerzas internas elemento D

## 12. Diagramas

Como resumen gráfico se presentan las configuraciones deformadas de la estructura, de igual manera se presentan los diagramas de fuerzas internas en los elementos de la estructura:

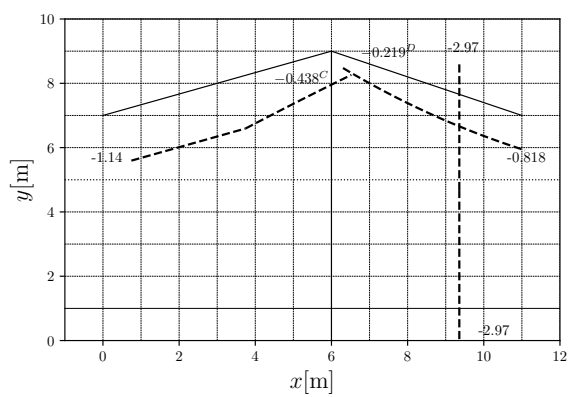


((a)) Configuración deformada horizontal

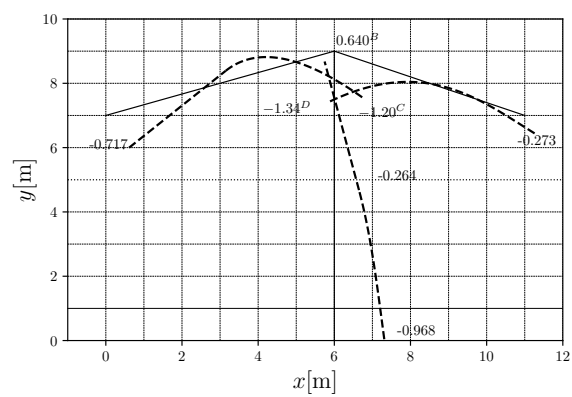


((b)) Configuración deformada vertical

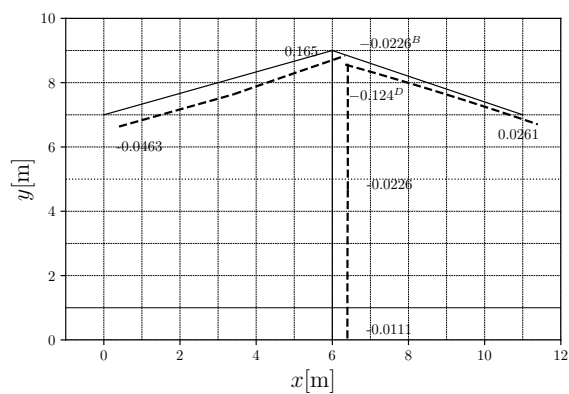
Figura 2: Diagramas de configuración deformada para la estructura aumentada 100 veces.



((a)) Fuerza axial en escala  $\frac{1}{100}$



((b)) Momento flector en escala  $\frac{1}{100}$



((c)) Fuerza cortante en escala  $\frac{1}{1000}$

Figura 3: Diagramas de fuerzas internas para estructura