به نام خدا

مینی‌پروژه ۳

مدل مار (مرز فعال پارامتری) با نیروی خارجی پتانسیل گاوسی چند مقیاسی

سید سجاد ائمی

شماره دانشجویی: ۹۶۱۳۶۶۶۱۱۹

استاد: دکتر مهدی سعادتمند طرزجان

تاریخ تحویل: ۹۷/۰۴/۱۶

توضیحات:

همانطور که درس داده شد، مدل مار (مرز فعال پارامتری) را می‌توان با فرمول گسسته‌سازی مطابق با معادله زیر پیاده‌سازی نمود:

$$x^{n+1} = (I - \lambda A)^{-1}\left[x^{n} + \lambda\, f_{ext}(x^{n})\right] \qquad (۱)$$

که در آن A ماتریس پنج قطری می باشد.

الف- دو فرمول فوق را بدست آورده و عناصر ماتریس‌های A و A' را مشخص کنید.

می دانیم که تابع انرژی برای مدل اسنیک به صورت زیر می باشد.

$$E(X) = E_{int} + E_{ext} = \int \alpha | \frac{\partial X}{\partial S} |^2 + \beta | \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} |^2 \, \mathrm{ds} \; + \int E\big(X(s)\big)\, ds$$

به کمک معادله اویلر-لاگرانژ سعی در کمینه کردن این تابع انرژی داریم.

مرحله اول:

انرژی داخلی یعنی تابع E_{int} را به فرم معادله اویلر-لاگرانژ می نویسیم:

$$L(s\, ,X\, , X_s\, , X_{ss}) = \alpha | \frac{\partial X}{\partial S} |^2 + \beta | \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} |^2$$

در نتیجه معادله اویلر-لاگرانژ آن به این صورت می‌باشد:

$$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial X_s} + \frac{d^2}{ds^2}\frac{\partial L}{\partial X_{ss}} = 0$$

معادله فوق را حل نموده و برابر با معادله تکامل قرار می دهیم:

$$\frac{\partial\, E_{int}}{\partial\, X} = -\alpha \frac{\mathrm{dX}^2}{\mathrm{dS}^2} + \beta \frac{\mathrm{dX}^4}{\mathrm{dS}^4} = 0$$

$$\frac{\partial\, X}{\partial\, t} = -\eta \frac{\partial\, E_{int}}{\partial\, x}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial\, X}{\partial\, t} = \; \alpha \frac{\mathrm{dX}^2}{\mathrm{dS}^2} - \beta \frac{\mathrm{dX}^4}{\mathrm{dS}^4}$$

مرحله دوم:

برای تابع انرژی خارجی یعنی E_{ext} معادله اویلر-لاگرانژ را می‌نویسیم. اگر انرژی خارجی را برابر با نیروی پتانسیل گوسی در نظر بگیریم، به صورت زیر آن را حل کرده و برابر با معادله تکامل قرار می دهیم:

$$\frac{\partial\, E_{ext}}{\partial\, X} = \; \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$\frac{\partial\, X}{\partial\, t} = -\eta \frac{\partial\, E_{int}}{\partial\, x}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\eta \frac{\partial P}{\partial X}$$

اویلر-لاگرانژ کل تابع انرژی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{t}} = \boldsymbol{F_{int}} + \boldsymbol{F_{ext}} = \boldsymbol{\alpha} \frac{\mathbf{dX^2}}{\mathbf{ds^2}} - \boldsymbol{\beta} \frac{\mathbf{dX^4}}{\mathbf{dS^4}} - \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X})$$

با توجه به تعریف مشتق در یک سیگنال دو بعدی یا تصویر ،گسسته سازی را انجام می دهیم. در نتیجه:

$$\boldsymbol{X^k} = \left(\boldsymbol{I} - \lambda \mathbf{A}\right)^{-1} \left(\mathbf{X^{k-1}} + \lambda \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X^{k-1}}) \right)$$

ماتریس A که یک ماتریس ۵ قطری می باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} -2\alpha - 6\beta & \alpha + 4\beta & -\beta & 0 \ \dots \ 0 & -\beta & \alpha + 4\beta \\ \alpha + 4\beta & -2\alpha - 6\beta & \alpha + 4\beta & -\beta & 0 \ \dots \ 0 & -\beta \\ -\beta & \alpha + 4\beta & -2\alpha - 6\beta & \alpha + 4\beta & -\beta & 0 \ \dots \ 0 \\ & & & \vdots & & \\ -\beta \quad 0 \ \dots \ 0 & & -\beta & \alpha + 4\beta & -2\alpha - 6\beta & \alpha + 4\beta \\ \alpha + 4\beta & -\beta & 0 \ \dots \ 0 & -\beta & \alpha + 4\beta & -2\alpha - 6\beta \end{bmatrix}$$

ب- فرمول (۱) را در قالب تابعی با نام SnakeImp پیاده‌سازی نمایید. مرز فعال را به صورت زنجیره‌ای شامل ۱۰۰ نقطه تعریف نمایید. در ابتدا، نقاط بر روی محیط مربعی با طول ضلع ۱ با فاصله مساوی از یکدیگر قرار گرفته‌اند؛ به طوری که گوشه پایین-چپ مربع بر روی مبدا قرار گرفته و مختصات گوشه بالا-راست مربع (1,1) است. مرز اولیه فوق را به عنوان ورودی به تابع SnakeImp داده و مراحل متوالی تکامل مرز را (با نیروی خارجی صفر) در یک پنجره (به کمک دستورات plot و hold on) رسم نمایید. نتایج خود را به ازای پارامترهای ($\alpha\neq0,\beta=0$)، ($\alpha=0,\beta\neq0$) و ($\alpha\neq0,\beta\neq0$) (انتخاب مقادیر مناسب پارامترها بر عهده خودتان است) تکرار کنید. درباره نتایج بدست آمده بحث نمایید.

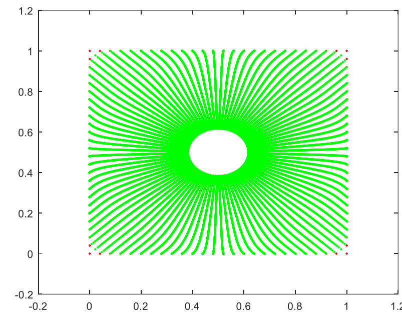
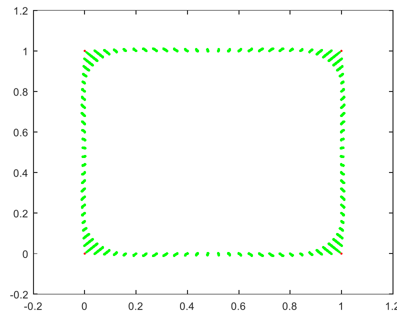
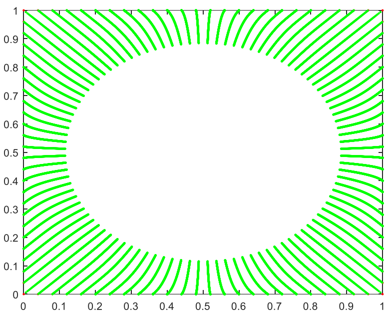
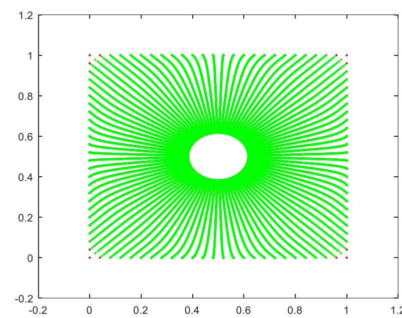
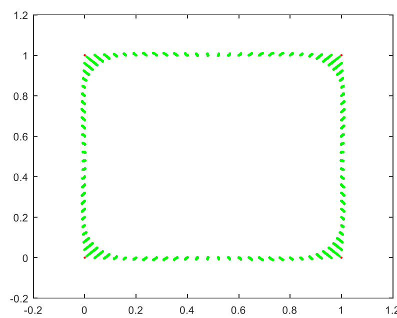
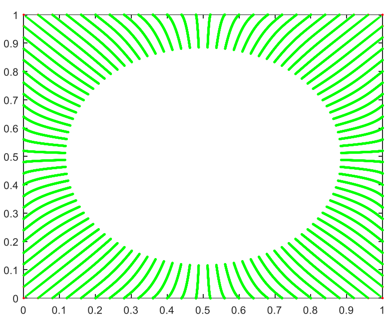
نتایج:

میدانیم که پارامتر α همانند کش عمل می کند و هرچه بزرگتر باشد، منحنی را جمع تر می کند. در مقابل پارامتر β مانند میله عمل می کند و هرچه بزرگتر باشد، منحنی را بزرگتر می کند.

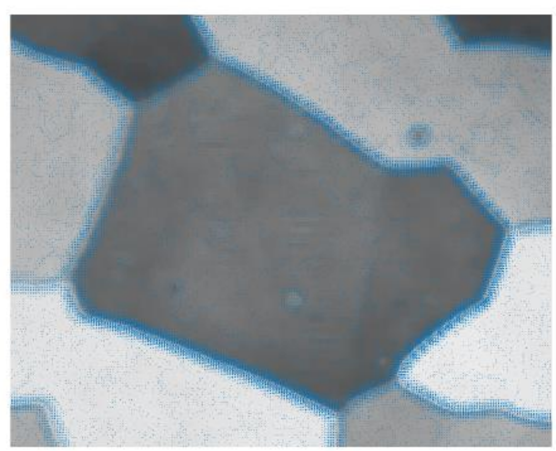
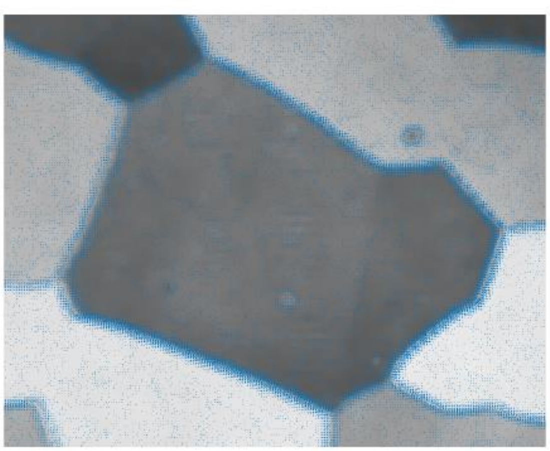
اگر پارامترها به صورت ($\alpha \neq 0 . \beta \neq 0$) باشد، مرز منحنی به دلیل پارامتر α تمایل به جمع شدن دارد و به سمت داخل حرکت می‌کند. بنابراین با افزایش α مرز جمع تر (فشرده تر) خواهد شد. هرچند پارامتر β برابر صفر نمی باشد. اما پارامتر α دارای قدرت بیشتری می باشد.

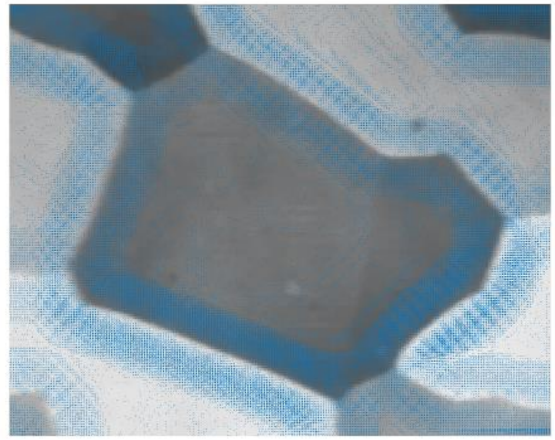
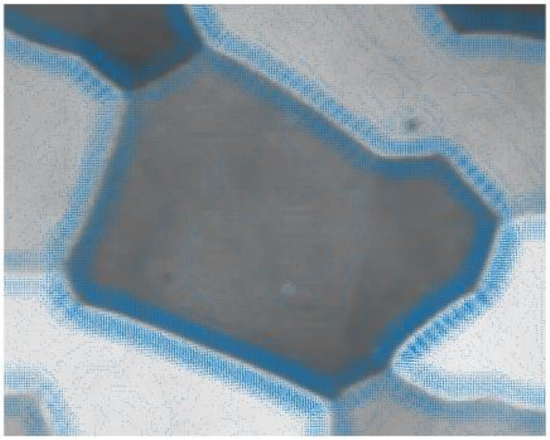
اگر پارامترها به صورت $(\alpha \neq 0 \,.\, \beta = 0)$ باشد، مرز منحنی تمایل به جمع شدن دارد و به سمت داخل حرکت می‌کند. بنابراین با افزایش α مرز جمع تر (فشرده تر) خواهد شد و چون $\beta = 0$ می باشد تکامل مرز به دلیل صفر شدن جمله مربوط به انرژی تلاش برای گسترش به بیرون یا باز شدن انجام نمی‌دهد.

اگر مقادیر پارامترها به صورت $(\alpha = 0 \,.\, \beta \neq 0)$ باشد نیروی ترم اول انرژی که مربوط به جمع کنندگی می‌باشد به دلیل صفر بودن مقدار α وجود نخواهد داشت و مرز به آرامی بر طبق مقدار β به سمت بیرون حرکت خواهد کرد.

$\alpha = 0.8 \;.\beta = 2$	$\alpha = 0 \;.\beta = 0.2$	$\alpha = 0.2 \;.\beta = 0$
		
$\alpha = 0.5 \;.\beta = 0.5$	$\alpha = 0 \;.\beta = 2$	$\alpha = 0.4 \;.\beta = 0$
		

ج- تصویر 'tile.tif' را در محیط متلب بارگزاری نمایید. ابتدا، میدان نیروی خارجی پتانسیل گاوسی را به ازای σ=0.5، σ=1، σ=2 و σ=4 (با استفاده از دستور quiver) رسم کنید. توضیح دهید که با افزایش σ، میدان نیرو چگونه تغییر می‌کند؟

σ=1	σ=0.5
	

$\sigma=4$	$\sigma=2$
	

نتایج:

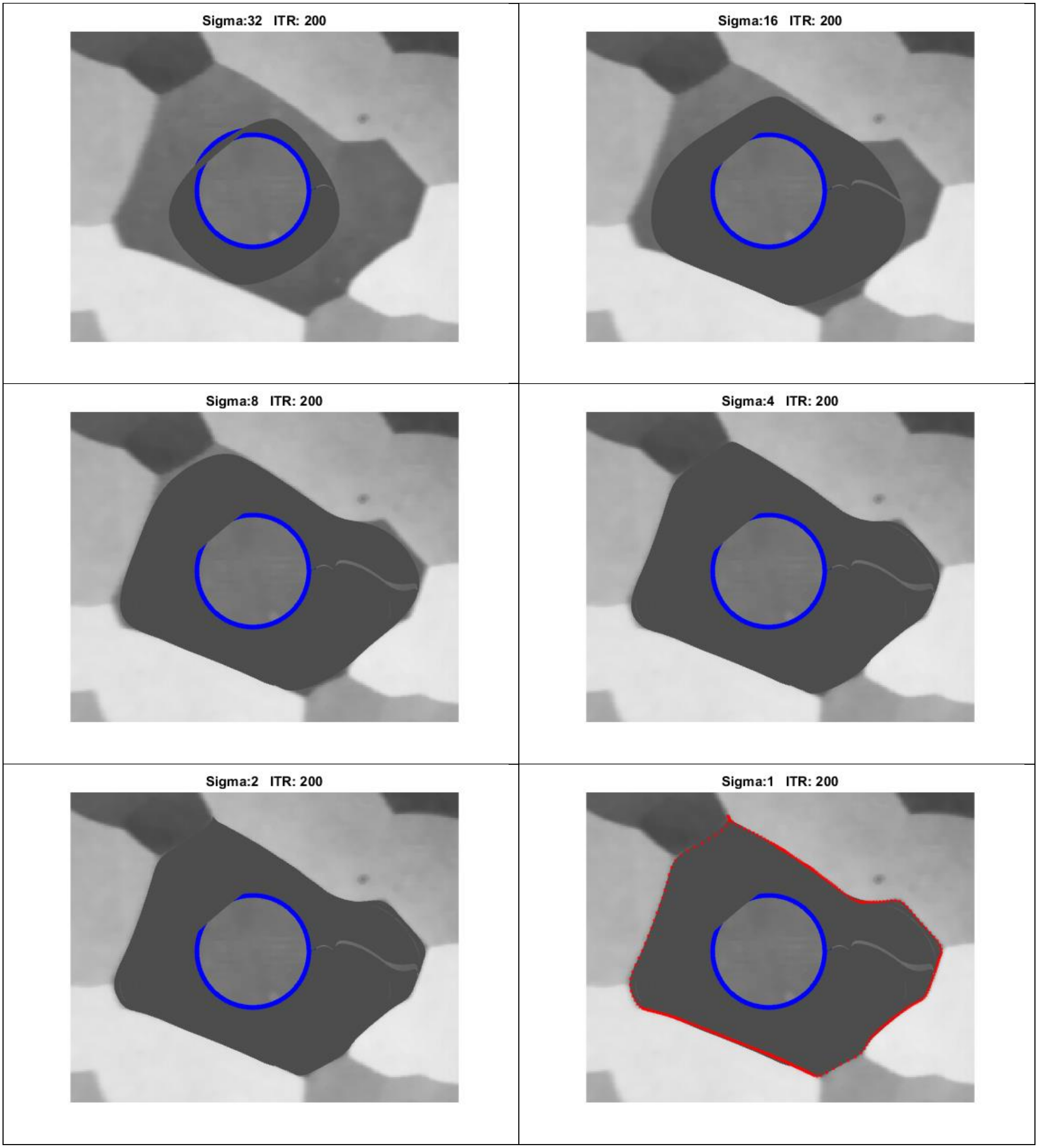
با افزایش پارامتر σ ، دامنه تابع گوسی باز تر می شود، در نتیجه تصویر حاصل هموار تر شده و لبه های آن نرم‌تر و پخش تر می شود. بنابراین انرژی جذب در لبه‌ها بیشتر شده و منحنی را بیشتر به سمت خود می‌کشد.

د- منحنی اولیه مرز فعال را به صورت دایره‌ای به مرکز پیکسل با مختصات (94,82) و شعاع ۳۰ پیکسل شامل ۵۰۰ نقطه مقداردهی اولیه نمایید. سپس، با استفاده از تابع SnakeImp مرز فعال را به صورت هرمی با استفاده از نیروهای خارجی پتانسیل گاوسی تکامل دهید؛ به طوری که به مرز چند ضلعی موجود در سطح کاشی همگرا شود. با استفاده از دستورات imshow، hold on و plot مرز اولیه (با رنگ آبی)، منحنی‌های میانی در طول تکامل مرز فعال (با رنگ خاکستری) و مرز نهایی (با رنگ قرمز) را بر روی تصویر رسم کنید. مقادیر پارامترهای α و β را با آزمایش و خطا در هر مقیاس تنظیم نمایید.

نتایج:

پارامتر ها را به صورت زیر تنظیم می کنیم:

```
sigma = 32;
alpha = 0.1;
beta = 0.5;
mu = 1;
n = 500;
Xcenter = 94;
Ycenter = 82;
r = 30;
iter = 200;
```



پیوست:

فایل اصلی main.m

```
clc;
clear all;
close all;
```

```
%% Parameters
sigma = 32;    alpha = 0.1;    beta = 0.5;     mu = 1;
n = 500;       Xcenter = 94;   Ycenter = 82;   r = 30;
iter = 200;

%%
img = im2double(imread('tile.tif'));
smooth_img = img;
imshow(smooth_img,'InitialMagnification','fit');
hold on;

A = zeros(n);
for i = 0:n-1
    A(i+1 ,:) = circshift([(-2*alpha - 6*beta) (alpha + 4*beta) (-beta) zeros(1,n-5) (-
beta) (alpha + 4*beta)],i);
end

I = eye(n);

%% draw cyrcle curve
teta =  linspace(0,360,n);
X(:, 1) = r .* cosd(teta) + Xcenter;
X(:, 2) = r .* sind(teta) + Ycenter;
plot(X(:,1), X(:,2), 'b' , 'LineWidth',8);

%% Evolution
while sigma >= 1

    smooth_img = imgaussfilt(img, sigma);

    %potential energy
    [XX, YY] = imgradientxy(smooth_img);
    P = 1 ./ (1 + mu .* sqrt(XX.^2 + YY.^2));

    [Fext_x, Fext_y] = imgradientxy(P);

    Fext_x = -Fext_x;
    Fext_y = -Fext_y;

    %quiver(Fext_x, Fext_y);

    for i = 1:iter

        X = SnakeImp(A,X,sigma,I,Fext_x,Fext_y);
        plot(X(:,1), X(:,2),'Color', [0.3 0.3 0.3]);
        drawnow;
        Text = ['Sigma:', num2str(sigma) , '    ' ,'ITR: ',num2str(i)];
        title(Text);
    end
    sigma = sigma / 2;
end

%% Result
plot(X(:,1), X(:,2), 'r.', 'LineWidth',8);
```

تابع SnakeImp.m

```
function out = SnakeImp(A,X,lambda,I,Fext_x,Fext_y)

iFext_x = interp2(Fext_x, X(:,1), X(:,2), 'bilinear');
iFext_x(isnan(iFext_x))=0;
iFext_y = interp2(Fext_y, X(:,1), X(:,2), 'bilinear');
iFext_y(isnan(iFext_y))=0;

iFext = [iFext_x , iFext_y];
out = (inv(I - lambda * A)) * (X + (lambda * iFext));

end
```

فایل main2.m (پیاده سازی بخش ب و رسم مربع)

```
clc
close all;
clear all;

%% parameters
sigma = 1;       samples = 100;      alpha = 0.8;
beta = 2;        iteration = 500;
%%
I = eye(samples);
X = zeros(samples,2);

step = (1/25);

for j=1:25
  i=j-1;
  x = i*step;
  y= 0;
  X(j,1)=x;
  X(j,2)=y;

end

for j=26:50

  x=1;
  y=(j-26)*step;
  X(j,1)=x;
  X(j,2)=y;
end

for j=51:75
  y=1;
  x = (76 - j)*step;
  X(j,1)=x;
  X(j,2)=y;
end

for j=76:100
  x=0;
  y=(101-j)*step;
  X(j,1)=x;
  X(j,2)=y;
end

A = zeros(100);
for i = 0:99
    A(i+1 ,:) = circshift([(-2*alpha - 6*beta) (alpha + 4*beta) (-beta) zeros(1,95) (-
beta) (alpha + 4*beta)] ,i);
end

plot(X(:,1),X(:,2),'r.');
hold on;
pause(0.01)

for i=1:iteration
    X = (inv(I - sigma * A)) * (X);
    plot(X(:,1),X(:,2),'g.')
    pause(0.01)
end
```