Lista 4 - CÁLCULO NUMÉRICO

Samuel Lucas de Moura Ferino

May 9, 2019

Respostas

1. (a) Construindo a tabela de diferenças divididas, temos que:

Table 1: Tabela de diferenças divididas

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, \cdots, x_i]$	$f[x_{i-3}, \cdots, x_i]$
0	0	1			
			$\frac{3-1}{2-0} = 1$		
1	2	3		$\frac{(-2)-1}{4-0} = \frac{-3}{4}$	
			$\frac{(-1)-3}{4-2} = -2$		$\frac{\frac{11}{15}-(\frac{-3}{4})}{7-0} = \frac{89}{420}$
2	4	-1		$\frac{\frac{5}{3}-(-2)}{7-2} = \frac{11}{15}$	
			$\frac{4-(-1)}{7-4} = \frac{5}{3}$		
3	7	4			

Diante disso, temos o seguinte polinômio $p_3(x)$ que interpola o $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= d_0 + d_1 \cdot (x - x_0) + d_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + d_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\
&= 1 + 1 \cdot (x - 0) + \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (x - 0) \cdot (x - 2) + \left(\frac{89}{420}\right) \cdot (x - 0) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \\
&= 1 + x + \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(x^2 - 2x\right) + \left(\frac{89}{420}\right) \cdot \left(x^2 - 2x\right) \cdot (x - 4) \\
&= 1 + x + \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(x^2\right) - \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (2x) + \left(\frac{89}{420}\right) \cdot \left(x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x\right) \\
&= 1 + x + \left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(x^2\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot (x) + \left(\frac{89}{420}\right) \cdot \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)
\end{aligned}
$$

(b) Calculamos,

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(x) &= \begin{cases} 1+\frac{3-1}{2-0}\cdot(x-0), & 0\le x\le 2\\ 3+\frac{-1-3}{4-2}\cdot(x-2), & 2\le x\le 4\\ -1+\frac{4-(-1)}{7-4}\cdot(x-4), & 4\le x\le 7 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1+\frac{2}{2}\cdot x, & 0\le x\le 2\\ 3+\frac{-4}{2}\cdot(x-2), & 2\le x\le 4\\ -1+\frac{5}{3}\cdot(x-4), & 4\le x\le 7 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1+x, & 0\le x\le 2\\ 3+(-2)\cdot(x-2), & 2\le x\le 4\\ -1+\frac{5}{3}\cdot x-\frac{20}{3}, & 4\le x\le 7 \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1+x, & 0\le x\le 2\\ -2\cdot x+7, & 2\le x\le 4\\ \frac{5}{3}\cdot x-\frac{23}{3}, & 4\le x\le 7 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Diante disso, teremos o seguinte gráfico:

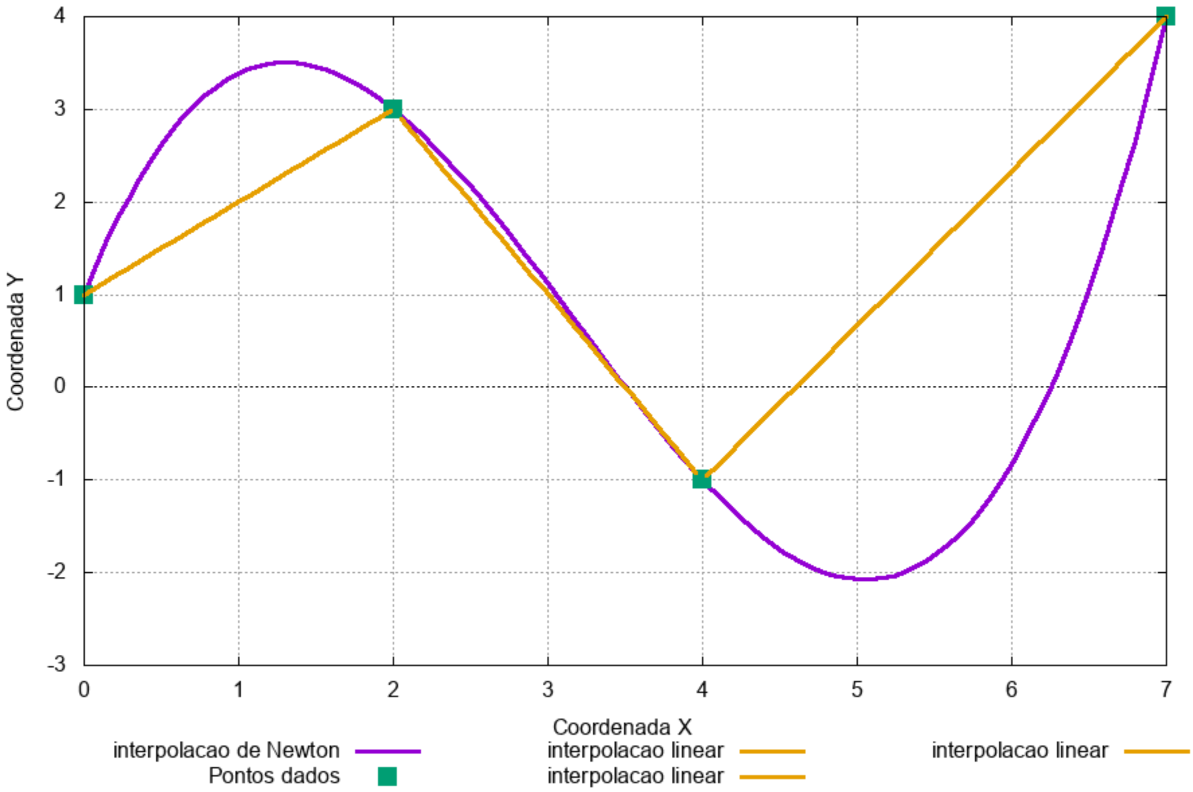

Figure 1: Gráfico contendo interpolação linear e de Newton.

2. Note que, posso ver esse problema como sendo para descobrir o momento em que o comprimento do lado do quadrado normal igual-se ao comprimento da diagonal do quadrado girado. Diante disso, temos que:

   Quadrado girado: $(\ 0,\ L\sqrt{2}\ )$ e $(\ 1,\ \frac{L}{2}\sqrt{2}\ )$ onde a primeira coordenada refere-se ao instante k e a segunda ao *comprimento da diagonal*.
   Quadrado normal: $(\ 0,\ L\ )$ e $(\ 1,\ 2L\ )$ onde a primeira coordenada refere-se ao instante k e a

segunda ao *comprimento do lado*.

Em seguida, aplicando o método de interpolação por polinômio de Lagrange teremos:

$$\begin{aligned} C_{QN}(x) &= L \cdot \left(\frac{x-1}{0-1}\right) + 2L \cdot \left(\frac{x-0}{1-0}\right) \\ &= -L \cdot (x-1) + 2L \cdot x \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} C_{QG}(x) &= L\sqrt{2} \cdot \left(\frac{x-1}{0-1}\right) + \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{x-0}{1-0}\right) \\ &= -\left(L\sqrt{2} \cdot (x-1)\right) + \left(\frac{x \cdot L\sqrt{2}}{2} \cdot x\right) \end{aligned}$$

Agora, igualando-se $C_{QN}(x)$ e $C_{QG}(x)$, temos que:

$$\begin{aligned} -L \cdot (x-1) + 2L \cdot x = L\sqrt{2} \cdot \left(\frac{x-1}{0-1}\right) + \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{x-0}{1-0}\right) &\iff \\ -Lx + L + 2L \cdot x = -xL\sqrt{2} + L\sqrt{2} + \left(\frac{x \cdot L\sqrt{2}}{2}\right) &\iff \\ -Lx + xL\sqrt{2} + 2L \cdot x - \left(\frac{x \cdot L\sqrt{2}}{2}\right) = L\sqrt{2} - L &\iff \\ x \cdot (-L + L\sqrt{2} + 2L - \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)) = L\sqrt{2} - L &\iff \\ x = \frac{L\sqrt{2} - L}{-L + L\sqrt{2} + 2L - \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)} & \end{aligned}$$

3. Aplicando o método da interpolação de Lagrange, temos que:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 0 \cdot \left(\frac{x-\frac{L}{2}}{0-\frac{L}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x-L}{0-L}\right) \\ &\quad +1 \cdot \left(\frac{x-0}{\frac{L}{2}-0}\right) \cdot \left(\frac{x-L}{\frac{L}{2}-L}\right) \\ &\quad +0 \cdot \left(\frac{x-0}{L-0}\right) \cdot \left(\frac{x-\frac{L}{2}}{L-\frac{L}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\frac{L}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x-L}{\frac{L}{2}-L}\right) \\ &= \frac{x \cdot (x-L)}{\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2} - L\right)} \end{aligned}$$

4. Na implementação da função *interpolacao* foi utilizado como método auxiliar o método de interpolação por polinômio de Lagrange.

5. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\beta(t) &= b_{0,3}(t)\cdot P_0 + b_{1,3}(t)\cdot P_1 + b_{2,3}(t)\cdot P_2 + b_{3,3}(t)\cdot P_3 \\
&= \binom{3}{0} t^0\,(1-t)^3\,P_0 + \binom{3}{1} t^1\,(t-1)^2\,P_1 + \binom{3}{2} t^2\,(t-1)^1\,P_2 + \binom{3}{3} t^3\,(t-1)^0\,P_3 \\
&= (1-t)^3\cdot P_0 + 3t\cdot(t-1)^2\cdot P_1 + 3t^2\cdot(t-1)\cdot P_2 + t^3\cdot P_3 \\
&= (1-t)^3\cdot[-1,2] + 3t\cdot(t-1)^2\cdot[1,5] + 3t^2\cdot(t-1)\cdot[2,5] + t^3\cdot[1,2]
\end{aligned}
$$

Logo, temos que:

$$x(t) = (1-t)^3\cdot(-1) + 3t\cdot(t-1)^2\cdot 1 + 3t^2\cdot(t-1)\cdot 2 + t^3\cdot$$

$$y(t) = (1-t)^3\cdot 2 + 3t\cdot(t-1)^2\cdot 5 + 3t^2\cdot(t-1)\cdot 5 + t^3\cdot 2$$

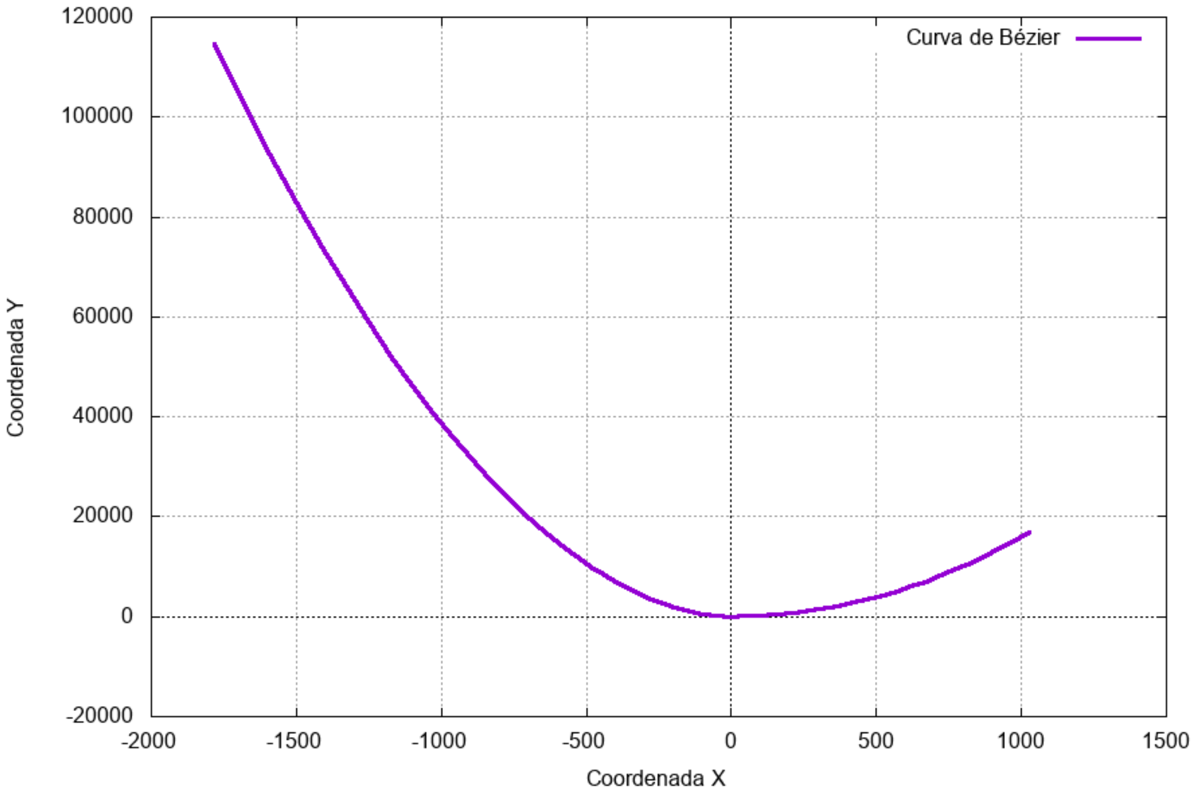

Figure 2: Curva de Bézier por meio de polinômio de Bernstein.