Simon König 3344789 - Klausurzettel
Turingmaschine: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ mit $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$
Endl. Automat: $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$
Gerichteter Graph $G = (V, E), E = \left\{(v, w) \in V^2 \,\middle|\, \text{von } v \text{ zu } w\right\}$
Ungerichteter Graph $G = (V, E), E = \{\{v, w\} \subseteq V \mid v, w \text{ sind verbunden}\}$

1 Berechenbarkeit

LOOP-Anweisungen:

- $x_i := x_j + c$ bzw. $x_i := x_j - c$ mit $c \in \mathbb{N}$
- `LOOP` x_i `DO` P `END`
- Hintereinanderausführung von LOOP-Programmen

Primitiv rekursive Funktionen:

- `s(n)`
- `dec(n)`
- `add(a,b)`
- `sub(a,b)`
- `mul(a,b)`
- c^i_j=j
- `even(n)`
- `odd(n)`
- `leq(a,b)`
- `eq(a,b)`

Nicht LOOP-berechenbare Funktionen (aber Turing):

- Ω, nirgends definierte Funktion
- $a(x, y)$, Ackermannfunktion

2 Entscheidbarkeit

- $A \leq B$ und A *nicht* semi-entscheidbar, dann ist B ebenfalls nicht semi-entscheidbar. Ist B semi-entscheidbar, dann ist auch A semi-entscheidbar.
- **Satz von Rice**: $\mathcal{R}$ die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen. Die Menge

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

  ist unentscheidbar, wenn $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$.
- Eine Sprache ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie sich auf H reduzieren lässt. (Vortragsübung)

Entscheidbarkeiten

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnitt
REG	✓	✓	✓	✓
DCFL	✓	✓	✓	X
CFL	✓	✓	X	X
CSL	✓	X	X	X
r.e.	X	X	X	X

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinig.	Kompl.	Konkat.	Stern
REG	✓	✓	✓	✓	✓
DCFL	X	X	✓	X	X
CFL	X	✓	X	✓	✓
CSL	✓	✓	✓	✓	✓
r.e.	✓	✓	X	✓	✓

2.1 Probleme

Spez Haltep	$K = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$	semi
Allg Haltep	$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$	semi
Haltep auf ϵ	$H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$	semi
PCP	$((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$	semi
MPCP	Für alle Lösungen gilt $i_1 = 1$	semi

3 Komplexität

- In den Platzklassen ist $\mathcal{O}$-Notation egal, Konstanten können vernachlässigt werden

$$\mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \mathrm{DSPACE}(f)$$
$$\mathrm{NSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \mathrm{NSPACE}(f)$$

- In nichtdeterministischen Zeitklassen spielt die $\mathcal{O}$-Notation keine Rolle

$$\mathrm{NTIME}(\mathcal{O}(f)) = \mathrm{NTIME}(f)$$

- Bei deterministischen Zeitklassen gilt i.A. $\mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(f)) \neq \mathrm{DTIME}(f)$, nur für größer als lineare Funktionen gilt Gleichheit d.h.

$$\mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(f)) = \mathrm{DTIME}(f) \;\; f(n) \geq (1 + \epsilon)n \text{ für ein } \epsilon > 0$$

- **Satz von Hennie und Stearns**: Falls $\epsilon > 0, f(n) \geq (1 + \epsilon)n$, dann gilt

$$\mathrm{DTIME}(f) \subseteq \mathrm{DTIME}(f \log f)$$

- Für alle $f(n) \geq n$ gilt für die Zeitklassen

$$\mathrm{DTIME}(f) \subseteq \mathrm{NTIME}(f) \subseteq \mathrm{DSPACE}(f)$$

- Und für alle $f(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathrm{DSPACE}(f) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\mathcal{O}(f)})$$

- **Satz von Immerman und Szelepcsenyi**: Falls $f \in \Omega(\log(n))$, gilt:

$$\mathrm{NSPACE}(f) = \mathrm{coNSPACE}(f)$$

- Alle deterministischen Zeit- und Platzklassen sind gegen Komplement abgeschlossen:

$$\mathrm{DSPACE}(f) = \mathrm{coDSPACE}(f)$$
$$\mathrm{DTIME}(f) = \mathrm{coDTIME}(f)$$

- **Satz von Savitch**: Sei $s \in \Omega(\log(n))$, dann gilt

$$\mathrm{NSPACE}(s) \subseteq \mathrm{DSPACE}(s^2)$$

- Sei $s_1 \notin \Omega(s_2)$ und $s_2 \in \Omega(\log(n))$ und beide platzkonstruierbar, dann gilt der **Platzhierarchiesatz**

$$\mathrm{DSPACE}(s_2) \setminus \mathrm{DSPACE}(s_1) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \mathrm{DSPACE}(s_1) \subsetneq \mathrm{DSPACE}(s_2)$$

- Sei $t_1 \log(t_1) \notin \Omega(t_2)$ und $t_2 \in \Omega(n \log(n))$ und beide zeitkonstruierbar, dann gilt der **Zeithierarchiesatz**

$$\mathrm{DTIME}(t_2) \setminus \mathrm{DTIME}(t_1) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \mathrm{DTIME}(t_1) \subsetneq \mathrm{DTIME}(t_2)$$

- **Lückensatz von Borodin**: Für jede totale berechenbare Funktion $r(n) \geq n$ existiert effektiv eine totale berechenbare Funktion $s(n) \geq n + 1$ mit

$$\mathrm{DTIME}(s(n)) = \mathrm{DTIME}(r(s(n)))$$

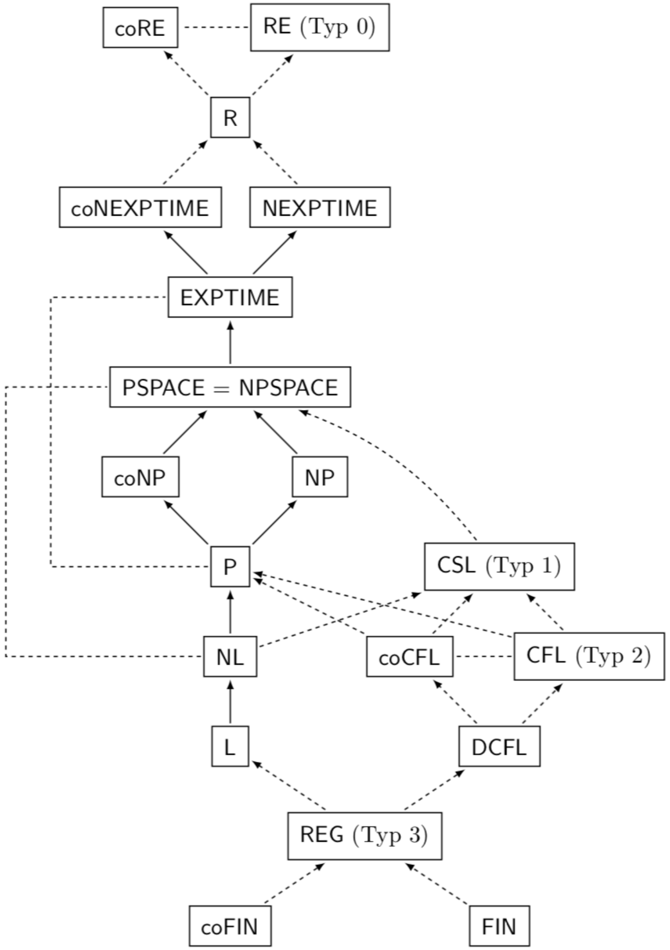
- Translationtechnik:
  Die Translationssätze werden verwendet, Separationen von größeren zu kleineren Klassen bzw. Gleichheiten oder Inklusionen von kleineren zu größeren Klassen zu übertragen. Die durch Padding aufgebläte Sprache ist $Pad_f(L) := \left\{w\$^{f(|w|)-|w|} \,\middle|\, w \in L\right\}$.

  1. Für zwei Funktionen $f(n), g(n) \geq n$ gilt der **Translationssatz für Zeitklassen**:

$$Pad_f(L) \in \mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \mathrm{NTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{NTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

  2. Und analog für $g \in \Omega(\log)$ und $f(n) \geq n$ der **Translationssatz für Platzklassen**:

$$Pad_f(L) \in \mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \mathrm{NSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{NSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$



$\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}_2$ $\quad$ $\mathcal{C}_1 \overset{\neq}{\cdots\cdots} \mathcal{C}_2$ $\quad$ $\mathcal{C}_1 \overset{\subsetneq}{\dashrightarrow} \mathcal{C}_2$

Zu den Reduktionen

1. Für zwei beliebige Sprachen A und B gilt
$$A \leq_{\log} B \Rightarrow A \leq_p B \Rightarrow A \leq B \Rightarrow A \leq_T B$$
2. $A \leq_p B \wedge B \in$ **P** $\Rightarrow A \in$ **P**
3. $A \leq_p B \wedge B \in$ **NP** $\Rightarrow A \in$ **NP**
4. A **NP**-vollständig, dann: $A \in$ **P** $\Leftrightarrow$ **P** $=$ **NP**

3.1 Vollständige Probleme

Folgende Probleme sind $\leq_p$ vollständig bezüglich **NP**

SAT	$\{w \mid w$ kodiert eine erfüllbare Formel$\}$
3KNF-SAT	KNF mit max. 3 Literalen pro Klausel erfüllbar?
CLIQUE	Enthält ein Graph eine Clique der Größe k?
FÄRB.	Gibt es eine Knotenfärbung mit k Farben?

NL-vollstädnig bezüglich $\leq_{\log}$ ist **GAP**: existiert ein Pfad vom source-Knoten zum target-Knoten in einem gerichteten Graphen?

4 Beispiele

- Verhältnis von $\mathrm{NSPACE}(2^n)$ und $\mathrm{DSPACE}(5^n)$:
$$\mathrm{NSPACE}(2^n) \overset{\text{S.v.S.}}{\subseteq} \mathrm{DSPACE}(2^{2n})$$
$$= \mathrm{DSPACE}(4^n) \overset{\text{P.H.S.}}{\subsetneq} \mathrm{DSPACE}(5^n)$$

- **Folgerung mit Translationssatz**, **P** $\subseteq$ **L** $\Rightarrow$ **EXPTIME** $\subseteq$ **PSPACE**:
Sei $L \in$ **EXPTIME** $\Rightarrow L \in \mathrm{DTIME}(2^{n^k})$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist mit der Translationsfunktion $f(n) = 2^{\frac{n^k}{k}}$ (denn $f(n^k) = 2^{k*(n^k)*\frac{1}{k}} = 2^{n^k}$) nach dem Translationssatz für Zeitklassen $Pad_f(L) \in \mathrm{DTIME}(n^k)$. Nach der Annahme **P** $\subseteq$ **L** folgt dann, $Pad_f(L) \in \mathrm{DSPACE}(\log n)$. Mit dem Translationssatz für Platzklassen und der selben Funktion folgt, $L \in \mathrm{DSPACE}(\log f(n)) = \mathrm{DSPACE}(\log(2^{\frac{n^k}{k}})) = \mathrm{DSPACE}(\frac{n^k}{k}) \subseteq$ **PSPACE**. □

- **Ungleichheit mit dem Translationssatz**, $\forall c \in \mathbb{N} : \mathrm{NSPACE}(n^c) \neq$ **NP**:
Annahme: $\exists c \in \mathbb{N} : \mathrm{NSPACE}(n^c) =$ **NP**. Sei $L \in \mathrm{NSPACE}(n^{3c})$ beliebig. Mit $f(n) = n^3$ folgt dann, $Pad_f(L) \in \mathrm{NSPACE}(n^c) \subseteq$ **NP** nach Annahme. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N} : Pad_f(L) \in \mathrm{NTIME}(n^k)$, nach Zeithierarchiesatz ist $L \in \mathrm{NTIME}(n^{3k})$. Es wurde gezeigt:
$$\mathrm{NSPACE}(n^c) \subseteq \mathbf{NP} \Rightarrow \mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \mathbf{NP}$$
Damit folgt aber nach Annahme
$$\mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \mathbf{NP} = \mathrm{NSPACE}(n^c)$$
Was im Widerspruch zum Platzhierarchiesatz steht. □