

Simon König 3344789 - Klausurzettel
Turingmaschine: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit $\delta : Z \times \Gamma \rightarrow Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$
ATM: zusätzlich $t : Z \rightarrow \{\forall, \exists\}$
Endl. Automat: $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$
Gerich. Graph $G = (V, E), E = \{(v, w) \in V^2 \mid \text{von } v \text{ zu } w\}$
Unger. Graph $G = (V, E), E = \{\{v, w\} \subseteq V \mid v, w \text{ sind verbunden}\}$

1 Berechenbarkeit

• LOOP-Anweisungen:

- $x_i := x_j + c$ bzw. $x_i := x_j - c$ mit $c \in \mathbb{N}$
- LOOP x_i DO P END
- Hintereinanderausführung von LOOP-Programmen

• Primitiv rekursive Funktionen:

- $s(n)$
- $\text{dec}(n)$
- $\text{add}(a, b)$
- $\text{sub}(a, b)$
- $\text{mul}(a, b)$
- $c_j^i = j$
- $\text{even}(n)$
- $\text{odd}(n)$
- $\text{leq}(a, b)$
- $\text{eq}(a, b)$
- $c(x, y)$

• Turing-berechenbar (nicht LOOP):

- Ω , nirgends definierte Funktion
- $a(x, y)$, Ackermannfunktion

• μ -Rekursion bzw. WHILE:

- Für eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ist

$$\mu f(x_2, \dots, x_k) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x_2, \dots, x_k) = 0 \\ \wedge f(n_0, x_2, \dots, x_k) > 0 \ \forall n_0 < n\}$$

- **Satz von Kleene:** Jede WHILE-berechenbare Funktion lässt sich mit einer WHILE-Schleife darstellen. Genauso bei μ -Rekursion mit einem μ -Operator.

2 Entscheidbarkeit

- $A \leq B$ und A *nicht* semi-entscheidbar, dann ist B ebenfalls nicht semi-entscheidbar. Ist B semi-entscheidbar, dann ist auch A semi-entscheidbar.
- **Dovetailing:** Simuliere Maschine M auf Eingabe $\omega(e(n))$ genau $f(n)$ Schritte lang, erhöhe n . Hierbei sei $\omega(n)$ die Funktion zur rekursiven Aufzählbarkeit. $e(c(a, b)) = a$ und $f(c(a, b)) = b$.
- **Satz von Rice:** \mathcal{R} die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen. Die Menge

$$\mathcal{C}(S) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

ist unentscheidbar, wenn $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$.

- Eine Sprache ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie sich auf H reduzieren lässt. (Vortragsübung)

- Für zwei kontextfreie Grammatiken sind unentscheidbar: Leerheit des Schnitts, Endlichkeit des Schnitts, Kontextfreiheit des Schnitts, Inklusion und Äquivalenz

• Entscheidbarkeiten:

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnitt
REG	✓	✓	✓	✓
DCFL	✓	✓	✓	X
CFL	✓	✓	X	X
CSL	✓	X	X	X
r.e.	X	X	X	X

• Abschlusseigenschaften:

	Schnitt	Vereinig.	Kompl.	Konkat.	Stern
REG	✓	✓	✓	✓	✓
DCFL	X	X	✓	X	X
CFL	X	✓	X	✓	✓
CSL	✓	✓	✓	✓	✓
r.e.	✓	✓	X	✓	✓

2.1 Entscheidbarkeitsprobleme

Spez Haltep	$K = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$	semi
Allg Haltep	$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$	semi
Haltep auf ϵ	$H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$	semi
PCP	$((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ zusammenpassen	semi
MPCP	Für alle Lösungen gilt $i_1 = 1$	semi
WA	Menge aller wahren arithm. Formeln	unentsch.
\overline{WA}	Menge aller falschen arithm. Formeln	unentsch.

3 Komplexität

• Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathbf{PSPACE} = \bigcup \mathbf{DSPACE}(p) = \bigcup \mathbf{NSPACE}(p)$
- $\mathbf{NP} = \bigcup \mathbf{NTIME}(p)$
- $\mathbf{P} = \bigcup \mathbf{DTIME}(p)$
- $\mathbf{NL} = \mathbf{NSPACE}(\log n)$
- $\mathbf{L} = \mathbf{DSPACE}(\log n)$

- $\text{co}\mathcal{C} = \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{C}\}$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{L \mid L \notin \mathcal{C}\}$

- In den Platzklassen ist \mathcal{O} -Notation egal, Konstanten können vernachlässigt werden

$$\mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \mathbf{DSPACE}(f)$$

$$\mathbf{NSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \mathbf{NSPACE}(f)$$

- In nichtdeterministischen Zeitklassen spielt die \mathcal{O} -Notation keine Rolle

$$\mathbf{NTIME}(\mathcal{O}(f)) = \mathbf{NTIME}(f)$$

- Bei deterministischen Zeitklassen gilt i.A. $\mathbf{DTIME}(\mathcal{O}(f)) \neq \mathbf{DTIME}(f)$, nur für größer als lineare Funktionen gilt Gleichheit d.h.

$$\mathbf{DTIME}(\mathcal{O}(f)) = \mathbf{DTIME}(f) \quad f(n) \geq (1 + \epsilon)n \text{ für ein } \epsilon > 0$$

- **Satz von Hennie und Stearns:** Falls $\epsilon > 0, f(n) \geq (1 + \epsilon)n$, dann gilt

$$\mathbf{DTIME}(f) \subseteq \mathbf{DTIME}_{2\text{-Band}}(f \log f)$$

- Für alle $f(n) \geq n$ gilt für die Zeitklassen

$$\mathbf{DTIME}(f) \subseteq \mathbf{NTIME}(f) \subseteq \mathbf{DSPACE}(f)$$

- Und für alle $f(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathbf{DSPACE}(f) \subseteq \mathbf{NSPACE}(f) \subseteq \mathbf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(f)})$$

- **Satz von Immerman und Szelepcsenyi:** Falls $f \in \Omega(\log(n))$, gilt:

$$\mathbf{NSPACE}(f) = \text{co}\mathbf{NSPACE}(f)$$

- Alle deterministischen Zeit- und Platzklassen sind gegen Komplement abgeschlossen:

$$\mathbf{DSPACE}(f) = \text{co}\mathbf{DSPACE}(f)$$

$$\mathbf{DTIME}(f) = \text{co}\mathbf{DTIME}(f)$$

- **Satz von Savitch:** Sei $s \in \Omega(\log(n))$, dann gilt

$$\mathbf{NSPACE}(s) \subseteq \mathbf{DSPACE}(s^2)$$

- Sei $s_1 \notin \Omega(s_2)$ und $s_2 \in \Omega(\log(n))$ und beide platzkonstruierbar, dann gilt der **Platzhierarchiesatz**

$$\mathbf{DSPACE}(s_2) \setminus \mathbf{DSPACE}(s_1) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbf{DSPACE}(s_1) \subsetneq \mathbf{DSPACE}(s_2)$$

- Sei $t_1 \log(t_1) \notin \Omega(t_2)$ und $t_2 \in \Omega(n \log(n))$ und beide zeitkonstruierbar, dann gilt der **Zeithierarchiesatz**

$$\mathbf{DTIME}(t_2) \setminus \mathbf{DTIME}(t_1) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbf{DTIME}(t_1) \subsetneq \mathbf{DTIME}(t_2)$$

- **Lückensatz von Borodin:** Für jede totale berechenbare Funktion $r(n) \geq n$ existiert effektiv eine totale berechenbare Funktion $s(n) \geq n + 1$ mit

$$\mathbf{DTIME}(s(n)) = \mathbf{DTIME}(r(s(n)))$$

• Translationstechnik:

Die Translationssätze werden verwendet, Separationen von größeren zu kleineren Klassen bzw. Gleichheiten oder Inklusionen von kleineren zu größeren Klassen zu übertragen. Die durch Padding aufgeblähte Sprache ist $\text{Pad}_f(L) := \{w\$f(|w|) - |w| \mid w \in L\}$.

1. Für zwei Funktionen $f(n), g(n) \geq n$ gilt der **Translationssatz für Zeitklassen:**

$$\text{Pad}_f(L) \in \mathbf{DTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathbf{DTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

$$\text{Pad}_f(L) \in \mathbf{NTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathbf{NTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

2. Und analog für $g \in \Omega(\log)$ und $f(n) \geq n$ der **Translationssatz für Platzklassen:**

$$\text{Pad}_f(L) \in \mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathbf{DSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

$$\text{Pad}_f(L) \in \mathbf{NSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \mathbf{NSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

• Reduktionen

1. Für zwei beliebige Sprachen A und B gilt

$$A \leq_{\log} B \Rightarrow A \leq_p B \Rightarrow A \leq B \Rightarrow A \leq_T B$$

2. $A \leq_p B \wedge B \in \mathbf{P} \Rightarrow A \in \mathbf{P}$
3. $A \leq_p B \wedge B \in \mathbf{NP} \Rightarrow A \in \mathbf{NP}$
4. A **NP**-vollständig, dann: $A \in \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

