Theoretische Informatik

Kurzzusammenfassung zur theoretischen Informatik

Simon König 15. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1: Schreibweisen und Definitionen

1.1 Formale Sprachen

Definition 1: Alphabet

Als Alphabet bezeichnen wir eine endliche, nichtleere Menge, deren Elemente Buchstaben genannt werden.
Dieses wird üblich mit Σ bezeichnet.

Definition 2: Freies Monoid über Σ

Ein Monoid ist eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und einem neutralen Element. Die Menge aller endlichen Zeichenketten, die sich aus Elementen von Σ bilden lassen bilden mit der *Konkatenation* ein Monoid $\Sigma^\star$.
Das leere Wort (ϵ) bildet das neutrale Element.

Definition 3: Grammatik

Eine Grammatik ist ein Quadrupel:

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

V Eine Menge an Zeichen, den Variablen

Σ Das Alphabet, $V \cap \Sigma = \varnothing$

P Die Produktionsmenge, $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^\star$

S Das Startsymbol oder die Startvariable, $S \in V$

1.2 Turingmaschinen und deren Kodierungen

Für Kodierungen von Turingmaschinen wird stets ein Wort $w \in \{0,1\}^\star$ verwendet. Die zugehörige Turingmaschine der Kodierung wird als M_w bezeichnet. In der Literatur ist oft auch üblich für die Maschine nur M zu verwenden, die zugehörige Kodierung ist dann $\langle M \rangle \in \Sigma^\star$.
Die zugrundeliegende Gödelisierung darf keinen Einfluss auf die Arbeitsweise der Maschine haben.
Es wird festgelegt, dass jedes Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ einer Turingmaschine zugeordnet wird, dabei können mehrere Kodierungen auf die gleiche Turingmaschine abgebildet werden.

2: Grundlagen

2.1 Aussagen- und Prädikatenlogik

2.1.1 Syntax der Aussagenlogik

- Atomare Formeln: A_i mit $i \in \mathbb{N}$
- F und G Formeln, dann sind $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ und $\neg F$ auch Formeln

Aus dieser grundlegenden Syntaxdefinition lassen sich die in der Mathematik sonst auch üblichen Verknüpfungen als Abkürzungen darstellen

- Implikation: $F_i \Rightarrow F_j \equiv (\neg F_i \vee F_j)$
- Äquivalenz: $F_i \Leftrightarrow F_j \equiv ((F_i \wedge F_j) \vee (\neg F_i \wedge \neg F_j))$
- n-faches Und: $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i \equiv (\ldots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \ldots \wedge F_n)$
- n-faches Oder: $\bigvee_{i=1}^{n} F_i \equiv (\ldots((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \ldots \vee F_n)$

2.1.2 Semantik der Aussagenlogik

$D \subseteq \{A_1, A_2, \ldots\}$ eine Teilmenge der Menge aller Variablen (atomare Formeln).
Eine Abbildung $\mathcal{A} : D \longrightarrow \{0, 1\}$ heißt Belegung. Durch diese Abbildung erhält jede atomare Formel einen Wert. Der Wert von zusammengesetzten aussagenlogischen Formeln berechnet sich wie üblich über die induktive Definition der Semantik, dies wird hier nicht näher ausgeführt.

- Eine Belegung $\mathcal{A}$ ist **passend** zu einer Formel F, falls alle in F vorkommenden atomaren Variablen zum Definitionsbereich von $\mathcal{A}$ gehören.
- Eine Belegung $\mathcal{A}$ ist **Modell** für eine Formel, falls $\mathcal{A}$ zu F passend ist und $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt.
  Man schreibt dann $\mathcal{A} \vDash F$.
- F ist **erfüllbar**, falls ein Modell für F existiert.
- F ist **gültig**, falls alle passenden Belegungen Modelle sind. $\longrightarrow$ F nennt man dann eine **Tautologie**.
  Das Komplement einer Tautologie ist unerfüllbar.
- Zwei Formeln F und G heißen **semantisch äquivalent**, wenn alle zu beiden passenden Belegungen $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Man schreibt dann $F \equiv G$.

Wichtige Äquivalenzen sind die folgenden:

- Itempotenz: $F \equiv (F \wedge F) \equiv (F \vee F)$
- Kommutativität: $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F), (F \vee G) \equiv (G \vee F)$
- Assoziativität: $((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H)), ((F \vee G) \vee H) \equiv (F \vee (G \vee H))$

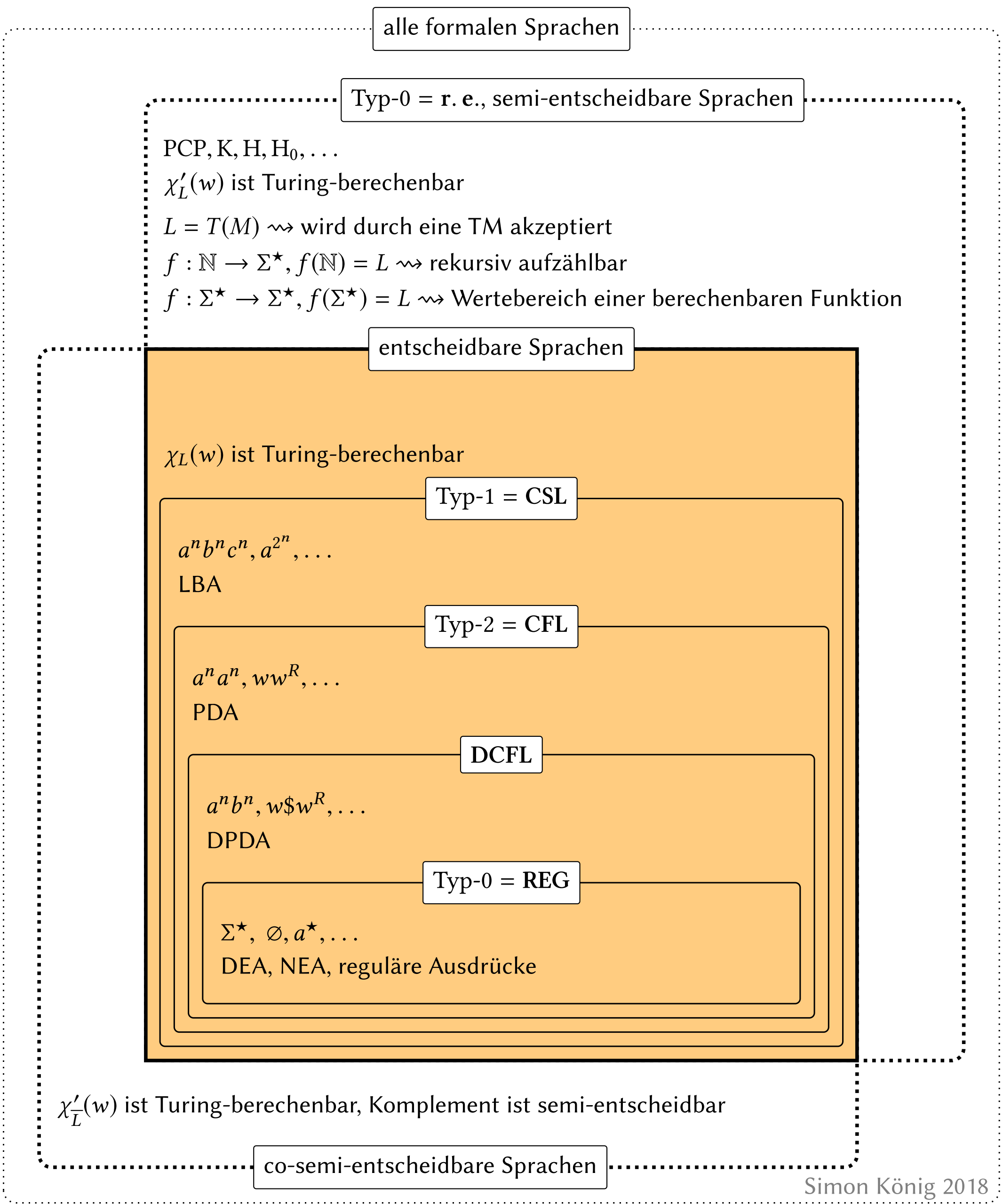
- Absorption: $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F \equiv (F \vee (F \wedge G))$
- Distributivität: $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)), (F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
- Doppelnegation: $\neg\neg F \equiv F$
- deMorgan-Regeln: $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G), \neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$

2.1.3 Prädikatenlogik

ACHTUNG: Dieser Abschnitt ist noch nicht abgeschlossen und enthält möglicherweise Fehler!
Die Prädikatenlogik stellt eine Erweiterung der Aussagenlogik dar. So können nun zusätzlich quantifizierte Aussagen getroffen, sowie Funktionen und Relationen definiert werden.
Zur Auswertung von Prädikatenlogischen Formeln benötigen wir eine sogenannte Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$. Dabei ist $U_{\mathcal{A}}$ die Menge der Individuen. Die Abbildung $I\mathcal{A}$ ordnet jedem Prädikatsymbol, beziehungsweise Funktionssymbol ein Prädikat oder eine Funktion zu und jeder benutzten Variable ein Element aus $U_{\mathcal{A}}$.

3: Überblick

Ein kurzer Gesamtüberblick über den Zusammenhang von formalen Sprachen zur Komplexität und Berechenbarkeitstheorie:



1

Theoretische Informatik 1: Formale Sprachen und Automatentheorie

1: Einstieg

In der Theorie um formale Sprachen geht es grundsätzlich darum, Probleme durch formale Sprachen beschreiben zu können. Diese Probleme werden dann in Klassen eingeordnet und gegeneinander abgegrenzt. Wichtig ist zu verstehen, wie man eine formale Sprache beschreiben kann und wo die Unterschiede zwischen den Klassen liegen.

2: Endliche Sprachen

$$\mathbf{FIN} \subset \mathbf{REG} \subset \mathbf{DCFL} \subset \mathbf{CFL} \subset \mathbf{CSL} \subset \mathbf{REC} \subset \mathbf{r.e.}$$

Alle endlichen Sprachen sind regulär.

2.1 Beispiele

- $L_1 = \varnothing$ (leere Sprache ist endlich)
- $L_2 = \Sigma$ (nur die Buchstaben)
- $L_3 = \{aaa, baba\}$ (z.B. nur zwei Wörter)

3: Reguläre Sprachen

Typ-3 = **REG** ⊂ **DCFL** ⊂ **CFL** ⊂ **CSL** ⊂ **REC** ⊂ **r. e.**

3.1 Automatenmodell DEA

Ein deterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$$

Z endliche Zustandsmenge

Σ Eingabealphabet

δ Überführungsfunktion $\delta : Z \times \Sigma \longrightarrow Z$

z_0 Startzustand, $z_0 \in Z$

E Endzustandsmenge, $E \subseteq Z$

Es lässt sich außerdem eine erweiterte Funktion $\hat{\delta}$ definieren:

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^\star \longrightarrow Z$$

Mit den folgenden Eigenschaften:

$$\hat{\delta}(z, \epsilon) = z$$

$$\hat{\delta}(z, ax) = \hat{\delta}(\delta(z, a), x)$$

Die von einem deterministischen Automaten M akzeptierte Sprache ist

$$T(M) = \left\{ w \in \Sigma^\star \;\middle|\; \hat{\delta}(z_0, w) \in E \right\}$$

3.2 Automatenmodell NEA

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat ist ein 5-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$$

Z endliche Zustandsmenge

Σ Eingabealphabet

δ Überführungsfunktion $\delta : Z \times \Sigma \longrightarrow \mathrm{Pot}(Z)$

S Startzustandsmenge, $S \subseteq Z$

E Endzustandsmenge, $E \subseteq Z$

Der NEA ist formal stärker als der DEA, sie akzeptieren jedoch beide die selbe Sprachklasse.
Die akzeptierte Sprache eines nichtdeterministischen endlichen Automaten ist:

$$T(M) = \left\{ w \in \Sigma^\star \;\middle|\; \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \varnothing \right\}$$

3.3 Reguläre Ausdrücke

Die regulären Sprachen lassen sich zusätzlich zu den zwei Automatenmodellen auch durch sog. reguläre Ausdrücke beschreiben. Eine Definition für die Syntax der regulären Ausdrücke ist:

- $\varnothing$ und ϵ sind reguläre Ausdrücke.
- a ist ein regulärer Ausdruck für alle $a \in \Sigma$
- Wenn α und β eguläre Ausdrücke sind, dann sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^\star$ reguläre Ausdrücke.

Die Semantik der regulären Ausdrücke ist ebenso induktiv bestimmt:

- $L(\varnothing) = \varnothing$ und $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ für jedes $a \in \Sigma$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$, $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$, $L((\alpha)^\star) = L(\alpha)^\star$

3.4 Sätze zu den regulären Sprachen:

- Typ-3 Sprachen können *nicht* inhärent mehrdeutig sein, da sich zu jeder Sprache ein Minimalautomat bilden lässt.
- Die Klasse der Typ-3 Sprachen ist unter allen boole'schen Operationen, Sternoperation und der Konkatenation abgeschlossen.
- Für reguläre Sprachen ist das Wortproblem (in Linearzeit), das Leerheitsproblem, das Äquivalenzproblem sowie das Schnittproblem entscheidbar.
- Alle Typ-2 Sprachen über einem einelementigen Alphabet sind bereits regulär.

3.4.1 Pumping-Lemma für Typ-3

Für jede reguläre Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung in drei Teile exisitert: $x = uvw$, so dass die drei Bedingungen erfüllt sind:

- $|v| \geq 1$
- $|uv| \leq n$
- $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$ („Pump-Bedingung“)

Gilt die Negation dieser Aussage, also

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x \in L, |x| \geq n : \forall u, v, w \in \Sigma^\star, x = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n : \exists i \in \mathbb{N} : uv^iw \notin L$$

so ist L nicht regulär!

ABER: Das Pumping-Lemma gibt keine Charakterisierung der Typ-3 Sprachen an! Es gibt auch Sprachen, die nicht Typ-3 sind, die Aussage des Lemmas aber trotzdem erfüllen!
Das Pumping-Lemma gibt also nur eine Möglichkeit, zu Beweisen, dass eine Sprache *nicht* regulär ist! (Siehe Unterabschnitt 3.6.1)

3.4.2 Myhill-Nerode-Äquivalenz

Mit der Myhill-Nerode-Äquivalenz ist es möglich nachzuweisen, ob eine Sprache regulär ist.

$$xR_Ly \iff \left[\forall w \in \Sigma^\star : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L\right]$$

Bzw. anhand eines DEA (dies führt zu einer Verfeinerung von R_L)

$$xR_My \iff [\delta(z_0, x) = \delta(z_0, y)]$$

Es gilt:

$$xR_My \Rightarrow \forall w \in \Sigma^\star : \delta(z_0, xw) = \delta(z_0, yw) \Rightarrow xR_Ly$$

Die Sprache $L \subseteq \Sigma^\star$ ist genau dann regulär, wenn der Index der Myhill-Nerode-Äquivalenz $R_L$endlich ist.

3.4.3 Erkennung durch Monoide – Syntaktisches Monoid

Sei $L \subseteq \Sigma^\star$ eine formale Sprache und M ein Monoid.
M erkennt L, wenn eine Teilmenge $A \subseteq M$ und ein Homomorphismus $\varphi : \Sigma^\star \longrightarrow M$ existiert, so dass gilt:

$$L = \varphi^{-1}(A) \qquad \text{d.h. } w \in L \Leftrightarrow \varphi(w) \in A$$
$$L = \varphi^{-1}(\varphi(L)) \qquad \text{d.h. } w \in L \Leftrightarrow \varphi(w) \in \varphi(L)$$

Weiter kann man für eine konkrete Sprache L die *syntaktische Kongruenz* definieren:

$$w_1 \equiv_L w_2 \iff [\forall x, y \in \Sigma^\star : xw_1y \in L \Leftrightarrow xw_2y \in L]$$

Basierend auf dieser Kongruenz definieren wir das Quotientenmonoid der Kongruenz, dessen Elemente die Äquivalenzklassen sind.
Das Quotientenmonoid oder auch syntaktisches Monoid bezüglich der syntaktischen Kongruenz wird mit

$$\mathrm{Synt}(L) := \left(\Sigma^\star / \equiv_L\right)$$

bezeichnet.
Für jede Sprache L gibt es ein syntaktisches Monoid das L mit dem Homomorphismus

$$\varphi : L \longrightarrow \mathrm{Synt}(L), w \mapsto [w]$$

erkennt. Ist $|\mathrm{Synt}(L)|$ endlich, so ist L regulär bzw. erkennbar.

3.4.4 Wohldefiniertheit des Produkts der Äquivalenzklassen

$$[u_1]_{\equiv_L} \cdot [u_2]_{\equiv_L} \stackrel{?}{=} [u_1u_2]_{\equiv_L} \quad \text{wohldefiniert?}$$

Es gilt:

$$u_1, \widetilde{u_1} \in [u_1]_{\equiv_L} \iff u_1 \equiv_L \widetilde{u_1} \iff \left[\forall x, y \in \Sigma^\star : xu_1y \in L \Leftrightarrow x\widetilde{u_1}y \in L\right] \tag{3.1}$$
$$u_2, \widetilde{u_2} \in [u_2]_{\equiv_L} \iff u_2 \equiv_L \widetilde{u_2} \iff \left[\forall x, y \in \Sigma^\star : xu_2y \in L \Leftrightarrow x\widetilde{u_2}y \in L\right] \tag{3.2}$$

Setzt man nun in Gleichung 3.1 für $y = u_2y'$ ein:

$$u_1, \widetilde{u_1} \in [u_1]_{\equiv_L} \iff u_1 \equiv_L \widetilde{u_1} \iff \left[\forall x, y' \in \Sigma^\star : xu_1u_2y' \in L \Leftrightarrow x\widetilde{u_1}u_2y' \in L\right]$$

Äquivalent gilt das selbe für $\widetilde{u_2}$. Ebenso gilt das gleiche für Gleichung 3.2 mit $x = x'u_1$:

$$u_2, \widetilde{u_2} \in [u_2]_{\equiv_L} \iff u_2 \equiv_L \widetilde{u_2} \iff \left[\forall x', y \in \Sigma^\star : x'u_1u_2y \in L \Leftrightarrow x'u_1\widetilde{u_2}y \in L\right]$$

Äquivalent gilt das selbe für $\widetilde{u_1}$. Setzt man nun alle Gleichungen zusammen, erhält man:

$$u_1u_2 \equiv_L \widetilde{u_1}\widetilde{u_2} \iff \left[\forall x, y \in \Sigma^\star : xu_1u_2y \in L \Leftrightarrow x\widetilde{u_1}\widetilde{u_2}y \in L\right]$$

Dies gilt wie oben gezeigt für alle Kombinationen $u_1u_2, u_1\widetilde{u_2}, \widetilde{u_1}u_2$ und $\widetilde{u_1}\widetilde{u_2}$. Damit erzeugt diese Äquivalenz die Klasse:

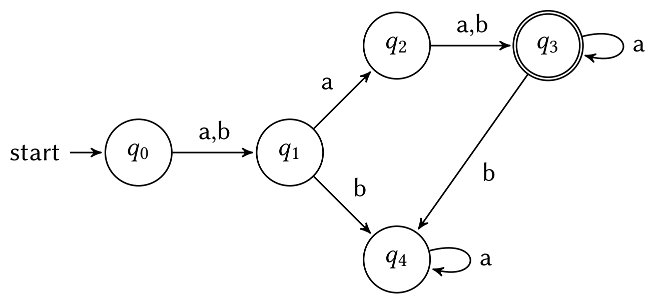
$$[u_1u_2]_{\equiv_L} \text{ mit } u_1u_2, u_1\widetilde{u_2}, \widetilde{u_1}u_2, \widetilde{u_1}\widetilde{u_2} \in [u_1u_2]_{\equiv_L}$$

3.5 Konstruktionsalgorithmus für Minimal-DEAs

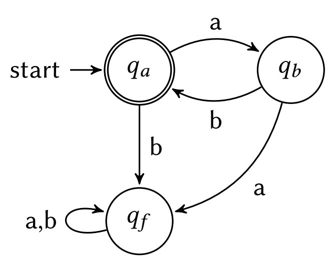
Mit dem Beweis zur Myhill-Nerode-Äquivalenz wird ein Automat definiert, dieser ist isomorph zum Minimalautomaten. Der Index der Myhill-Nerode-Äquivalenz ist genau die Anzahl der Zustände des Minimalautomaten.
Man kann mit einem einfachen Algorithmus aus einem beliebigen DEA den Minimalautomaten erzeugen: Wir ermitteln algorithmisch, welche Zustände nicht äquivalent sind und verschmelzen die übrig bleibenden. Nicht äquivalent sind Zustände, bei denen bei Eingabe eines Worts vom einen aus ein Endzustand erreicht wird, vom anderen jedoch nicht.
So sind im ersten Schritt Zustandspaare aus Endzustand und Nichtendzustand nicht äquivalent und werden markiert.

3.6 Beispiele:

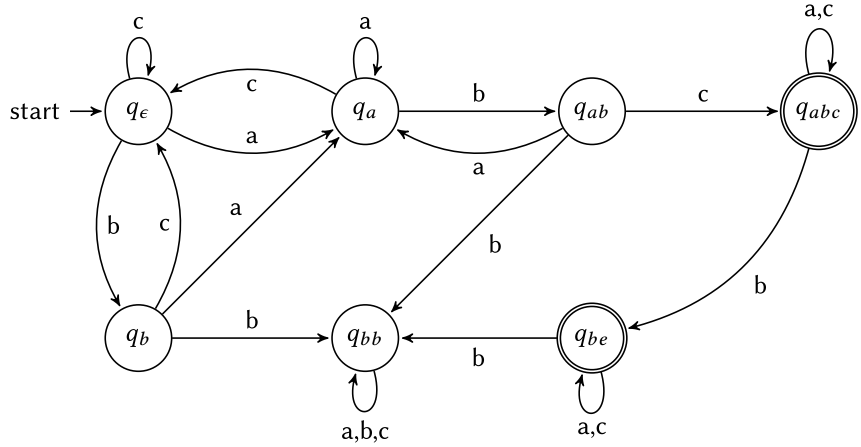
- $L_1 = \Sigma^\star$
- $L_2 = L\left((a|b)a(a|b)a^\star\right)$



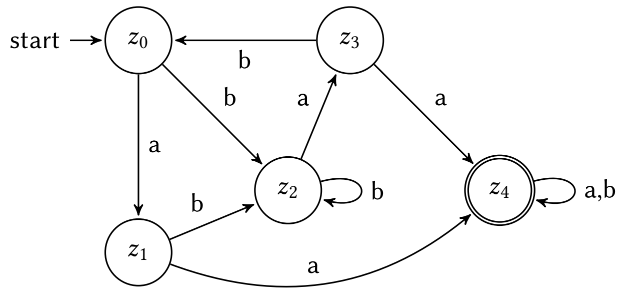
- Automat M mit $L_3 = T(M) = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$:



- Automat erkennt die Sprache
  $L_3 = \{w \in \{a,b,c\}^\star \mid w \text{ enthält das Teilwort } abc \text{ aber nicht das Teilwort } ab\}$:



Konstruktion für den Minimalautomaten



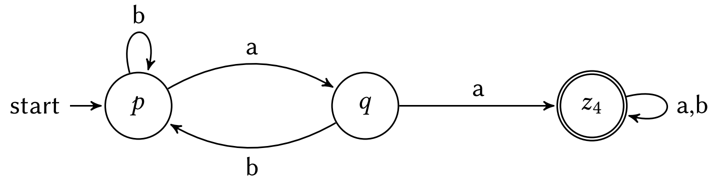
Die Paare $\{z_i, z_4\}$ mit $i = 0,1,2,3$ werden markiert:

z_1				
z_2				
z_3				
z_4	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	z_0	z_1	z_2	z_3

Durch Testen der Zustandspaare erhält man die untenstehende Tabelle. Hierbei wurden Zeugen für die Inäquivalenz eingetragen.

z_1	a			
z_2		a		
z_3	a		a	
z_4	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	z_0	z_1	z_2	z_3

Damit lassen sich Zustände zusammenfassen: $p = \{z_0, z_2\}$, $q = \{z_1, z_3\}$. Der Minimalautomat ist also:



$$T(M) = \left\{ waaw' \,\middle|\, w, w' \in \{a,b\}^\star \right\}$$

3.6.1 Pumping-Lemma für Typ-3

Für die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$:

Zunächst wählt man ein Wort x, mit $|x| \geq n$:

$$x = a^n b^n \in L, \quad |a^n b^n| = 2n > n$$

Nun zu einer beliebigen Zerlegung $x = uvw$, für die die Bedingungen gelten:

$$x = uvw = a^n b^n$$
$$u = a^{n-l-k} \quad v = a^l \quad w = a^k b^n \text{ mit } l \geq 1$$
$$x = (a^{n-l-k})(a^l)(a^k b^n)$$

Pumpt man nun v mit $v = 0$:

$$x = (a^{n-l-k})(a^l)^i(a^k b^n) = (a^{n-l-k})(a^l)^0(a^k b^n)$$
$$x = (a^{n-l-k})(a^k b^n) = a^{n-l} b^n \notin L, \text{ da } l \geq 1$$

3.6.2 Myhill-Nerode-Äquivalenz

Für die Sprache $L = \left\{ w \in \{a,b\}^\star \,\middle|\, w \text{ enthält das Teilwort } abb \right\}$:

Finden der Äquivalenzklassen:

$$[\epsilon] = \{\epsilon, b, bb, \ldots\} = \{b^n \mid n \in N_0\}$$
$$[a] = \left\{ b^n a^m \,\middle|\, n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}^+ \right\}$$
$$[ab] = \left\{ w \in \{a,b\}^\star \,\middle|\, w \text{ enthält das Teilwort } ab \text{ aber nicht das Teilwort } abb \right\}$$
$$[abb] = \left\{ wabbw' \,\middle|\, w, w' \in \{a,b\}^\star \right\}$$

3.6.3 Beweis durch Abschlusseigenschaften

Zu zeigen: $L = \{b^n a^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0, n \neq m\} \notin \mathbf{REG}$

Annahme:

$$L \in \mathbf{REG}$$

Mit dem Abschluss gegen Komplement folgt

$$\overline{L} \in \mathbf{REG}$$

Wegen Abschluss gegen Schnitt folgt dann auch

$$\overline{L} \cap L(b^\star a^\star) \in \mathbf{REG}$$

Jedoch gilt

$$\overline{L} \cap L(b^\star a^\star) = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \in \mathbf{DCFL} \supsetneq \mathbf{REG}$$

Widerspruch! $L \notin \mathbf{REG}$

4: Deterministisch kontextfreie Sprachen

$$\mathbf{DCFL} \subset \mathbf{CFL} \subset \mathbf{CSL} \subset \mathbf{REC} \subset \mathbf{r.\,e.}$$

4.1 Automatenmodell DPDA

Der deterministische Kellerautomat ist ähnlich definiert wie ein der nichtdeterministische (Siehe Abschnitt 5.1).
Der Unterschied zum PDA liegt dabei, dass beim DPDA in jeder Situation nur ein Übergang möglich sein darf,

$$\forall z \in Z, a \in \Sigma, A \in \Gamma : |\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \epsilon, A)| \leq 1$$

und der DPDA akzeptiert nicht durch leeren Keller sondern durch Endzustände.

Ein deterministischer Kellerautomat ist ein 7-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$$

Z endliche Zustandsmenge

Σ Eingabealphabet

Γ Kelleralphabet

δ Überführungsfunktion $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to Z \times \Gamma^\star$

z_0 Startzustand, $z_0 \in Z$

$\#$ Keller-Bottom-Symbol $\# \in \Gamma \setminus \{\Sigma\}$

E Endzustandsmenge $E \subseteq Z$

Akzeptierte Sprache eines deterministischen PDA:

$$N(M) := \left\{ w \in \Sigma^\star \,\middle|\, \exists e \in E, V \in \Gamma^\star : (z_0, w, \#) \vdash^\star (e, \epsilon, V) \right\}$$

dies wird auch als *Akzeptieren durch Endzustand* bezeichnet.
Beide Akzeptanzarten, (durch Endzustand und leeren Keller, siehe Abschnitt 5.1) sind äquivalent.

4.2 Sätze zu DCFL

- Eine deterministisch kontextfreie Sprache geschnitten mit einer regulären Sprache ist wieder eine deterministisch kontextfreie Sprache.

  $$L_1 \in \mathbf{DCFL}, L_2 \in \mathbf{REG} \Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathbf{DCFL}$$

- Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist nur abgeschlossen unter Komplement.

- Das Leerheitsproblem (Markieren von produktiven Variablen), das Wortproblem (in Linearzeit mit Kellerautomat) und das Äquivalenzproblem sind entscheidbar.

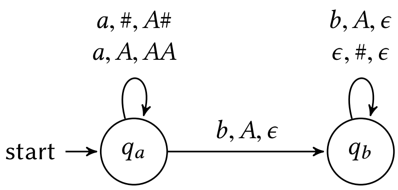
  Zum Äquivalenzproblem:

$$\begin{aligned} L = L' &\Leftrightarrow L \subseteq L' \land L' \subseteq L \\ &\Leftrightarrow L \cap \overline{L'} = \emptyset \land L' \cap \overline{L} = \emptyset \end{aligned}$$

  entscheidbar, da Abschluss unter Komplement und Leerheitsproblem entscheidbar.

4.3 Beispiele

- $L_1 = \left\{ w\$w^R \,\middle|\, w \in \Sigma^\star \right\}$ (markierte Palindrome)
- Deterministischer Kellerautomat, der die Sprache $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ akzeptiert:



  Konfigurationsübergänge bei Eingabewort *aaabb*:

$$\begin{aligned} (z_a, aaabb, \#) &\vdash (z_a, aabb, A\#) \\ &\vdash (z_a, abb, A\#) \\ &\vdash (z_a, bb, AAA\#) \\ &\vdash (z_a, b, AA\#) \\ &\vdash (z_a, \epsilon, A\#) \\ &\rightsquigarrow aaabb \notin N(M) = L_2 \end{aligned}$$

5: Kontextfreie Sprachen

Typ-2 = **CFL** $\subset$ **CSL** $\subset$ **REC** $\subset$ **r. e.**

5.1 Automatenmodell PDA

Der Push DownAutomat (Kellerautomat) ist ähnlich definiert wie ein nichtdeterministischer endlicher Automat (Siehe Abschnitt 3.2).
Der PDA jedoch hat einen entscheidenden Unterschied, er hat einen sogenannten *Kellerspeicher*, in dem Informationen zwischengespeichert werden können.

Ein Kellerautomat ist ein 6-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$$

Z endliche Zustandsmenge

Σ Eingabealphabet

Γ Kelleralphabet

δ Überführungsfunktion $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow \mathrm{Pot}_e(Z \times \Gamma^\star)$

z_0 Startzustand, $z_0 \in Z$

\# Keller-Bottom-Symbol $\# \in \Gamma \setminus \{\Sigma\}$

Akzeptierte Sprache eines nichtdeterministischen PDA

$$N(M) := \left\{ w \in \Sigma^\star \,\middle|\, \exists z \in Z : (z_0, w, \#) \vdash^\star (z, \epsilon, \epsilon) \right\}$$

dies wird auch als *Akzeptieren durch leeren Keller* bezeichnet.
Insbesondere beim deterministischen Kellerautomaten gibt es eine zweite Definition der akzeptierten Sprache, beide Definitionen sind äquivalent (Siehe Abschnitt 4.1).

Konfiguration des PDA Eine Konfiguration ist jedes Element k aus der Menge $Z \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$
Einen Konfigurationsübergang stellt man durch $\vdash$ dar.
Die aktuelle Konfiguration sei $(z, a_1 a_2 \ldots a_n, A_1 \ldots A_m)$, möglich sind jetzt die Übergänge aus $\delta(z, a_1, A_1)$ und $\delta(z, \epsilon, A_1)$.
Ein möglicher Übergang ist also für $(z', B_1 \ldots B_k) \in \delta(z, a_1, A_1)$:

$$(z, a_1 a_2 \ldots a_n, A_1 \ldots A_m) \vdash (z', a_2 \ldots a_n, B_1 \ldots B_k A_2 \ldots A_m)$$

5.2 Sätze zu CFL

- Alle Typ-2 Sprachen über einem einelementigen Alphabet sind bereits regulär.
- Die Kontextfreien Sprachen sind gegen Substitution abgeschlossen.

- Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Sternoperation, Vereinigung und Konkatenation.

  Zur Vereinigung: $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1), G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2), V_1 \cap V_2 = \emptyset, S \notin V_1 \cup V_2$.

  $$G = (V_1 \cup V_2, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{(S, S_1), (S, S_2)\}, S) \rightsquigarrow L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$$

- Das Wortproblem ($O(n^3)$) sowie das Leerheits- und Endlichkeitsproblem ist entscheidbar (Siehe Unterabschnitt 5.2.2).
- Die Klasse der Typ-2 Sprachen ist identisch zu der durch EBNF beschreibbaren Sprachen.

5.2.1 Pumping-Lemma für Typ-2

Sei $L \subseteq \Sigma^\star$ eine kontextfreie Sprache, dann gibt es eine Zahl n so, dass für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung mit $z = uvwxy$ in $u, v, w, x, y \in \Sigma^\star$ exisitert für die die drei Bedingungen erfüllt sind:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$

5.2.2 CYK-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für Typ-2

Mit dem CYK-Algorithmus ist das Wortproblem für Typ-2 in $O(n^3)$ entscheidbar.
Hierfür werden alle Ableitungsmöglichkeiten in einer Tabelle geordnet dargestellt. Ist am Ende die Startvariable als Startknoten für die Ableitung möglich, so ist das Wort in L.

5.3 Chomsky-Normalform

Eine Typ-2 Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Chomsky-Normalform (CNF), wenn gilt:

$$\forall (u, v) \in P : v \in V^2 \cup \Sigma$$

Zu jeder Typ-2 Grammatik existiert eine Grammatik G' in CNF, für die gilt $L(G) = L(G')$!
Für alle Ableitungen in CNF gilt: Die Ableitung eines Wortes der Länge n benötigt genau $2n - 1$ Schritte!

5.3.1 Umformungsalgorithmus

1. Zunächst wollen wir erreichen, dass folgendes gilt: $(u, v) \in P \Longrightarrow (|v| > 1 \vee v \in \Sigma)$

   (a) **Ringableitungen entfernen:**
   Eine Ringableitung liegt vor, wenn es Variablen $V_1, \ldots V_r$ gibt, die sich im Kreis in einander ableiten lassen, d.h. es gibt Regeln $V_i \longrightarrow V_{i+1}$ und $V_r \longrightarrow V_1$.
   Um dies loszuwerden, werden alle Variablen V_i durch eine neue Variable V ersetzt. Überflüssige Regeln wie $V \longrightarrow V$ werden gelöscht.

   (b) **Variablen anordnen:**
   Man legt eine Ordnung der Variablen fest: $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, hierfür muss gelten:

   $$A_i \longrightarrow A_j \in P \Leftrightarrow i < j$$

   Falls dies nicht gilt, müssen Abkürzungen verwendet werden, also alle Produktionen von A_j werden eingesetzt:

   $$P = (P \setminus \{A_i \longrightarrow A_j\}) \cup \{(A_i, w) \,|\, (A_j, w) \in P\}$$

2. Jetzt gilt für jede Regel $(u, v) \in P$ entweder $v \in \Sigma$ oder $|v| \geq 2$.

   Für letztere Regeln werden nun **Pseudoterminale** eingeführt. Es werden neue Variablen und Produktionen für jedes Terminalsymbol hinzugefügt, z.B. $V_a \to a$.

3. **Letzter Schritt:** Alle rechten Seiten mit $|v| > 2$ müssen nun noch auf Länge 2 gekürzt werden. Hierfür werden wiederum neue Variablen eingefügt:

   $$A \to C_1C_2C_3$$

   Wird gekürzt zu

   $$\begin{aligned} A &\to C_1D_1 \\ D_1 &\to C_2C_3 \end{aligned}$$

5.4 Greibach-Normalform

Eine Typ-2 Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Greibach-Normalform (GNF), wenn gilt:

$$\forall (u, v) \in P : v \in \Sigma V^\star$$

Zu jeder Typ-2 Grammatik existiert eine Grammatik G' in GNF, für die gilt $L(G) = L(G')$!

5.4.1 Umformungsalgorithmus

1. **Der erste Algorithmus:**

   Der erste Algorithmus hat zum Ziel, dass alle Produktionen einer bestimmten Ordnung unterliegen. Hierfür werden zunächst die Variablen angeordnet:

   $$V = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

   Nun sollen nur Regeln $A_i \to A_j\alpha$ in P sein, wenn $i < j$ gilt.

   Um dies zu erreichen wird solange Eingesetzt bis keine Regeln dieser Form vorliegen.

   Für alle $A_i \to A_j\alpha \in P$ mit $i > j$ werden alle Produktionsregeln

   $$A_j \to \beta_1 | \ldots | \beta_r$$

   Eingesetzt zu

   $$A_i \to \beta_1\alpha | \ldots | \beta_r\alpha$$

   Und schließlich die Regel $A_i \to A_j\alpha$ aus P gestrichen.

2. **Beseitigung von Linksrekursion:**

   Alle Produktionsregeln sind von der Form:

   $$A \to A\alpha_1 | \ldots | A\alpha_k | \beta_1 | \ldots | \beta_l$$

   Diese können durch diese $2k + 2l$ Regeln ersetzt werden:

   $$\begin{aligned} &A \to \beta_1 | \ldots | \beta_l \\ &A \to \beta_1 B | \ldots | \beta_l B \\ &B \to \alpha_1 | \ldots | \alpha_k \\ &B \to \alpha_1 B | \ldots | \alpha_k B \end{aligned}$$

   Nun sind keinerlei Linksrekursionen mehr vorhanden!

3. **Der zweite Algorithmus:**

   Der zweite Algorithmus hat zum Ziel, dass alle rechten Seiten mit einem Terminalsymbol beginnen.

   Da die Regeln mit A_m auf der linken Seite nur in ein Terminal übergehen können, da sie am Ende der Variablenanordnung stehen müssen wir nur alle A_m-Produktionen bei den A_{m-1}-Regeln einsetzen und so weiter.

4. **Der letzte Schritt:**

   Als letztes müssen wir überprüfen ob die B-Regeln aus der Beseitigung der Linksrekursionen die gewünschte Form haben. Da aber alle B-Produktionen entweder mit einem A_i oder einem Terminal beginnen, muss wieder nur eingesetzt werden.

   Schließlich müssen die Terminalsymbole, die in allen Produktionen weiter hinten auftreten durch Pseudoterminale ersetzt werden.

5.5 Beispiele

- $L_1 = \left\{ww^R \middle| w \in \Sigma^\star\right\}$ (unmarkierte Palindrome)
- Korrekt geklammerte arithmetische Ausdrücke (Dyck-Wörter)

CYK-Algorithmus

Produktionsregeln der Grammatik (CNF):

$$S \rightarrow AX|YB, A \rightarrow XA|AB|a, B \rightarrow XY|BB, X \rightarrow YA|a, Y \rightarrow XX|b$$

Eingabewort: *abbaab*

Länge	a	b	b	a	a	b
1	$\{A, X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$	$\{A, X\}$	$\{A, X\}$	$\{Y\}$
2	$\{B\}$	$\varnothing$	$\{X\}$	$\{A, S, Y\}$	$\{B\}$	
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{A, Y, X\}$	$\{A\}$		
4	$\varnothing$	$\{X\}$	$\{B, X\}$			
5	$\{S, Y\}$	$\{B, S\}$				
6	$\{A, B\}$					

Da die unterste Zelle nun $\{A, B\}$ enthält, ist $w = abbaab \notin L$

5.5.1 Pumping-Lemma für Typ-2

- Für die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$:

  Zunächst wählt man ein Wort z, mit $|z| \geq n$:

  $$x = a^n b^n c^n \in L, \quad |a^n b^n c^n| = 3n > n$$

  Nun zu einer beliebigen Zerlegung $z = uvwxy$, für die die Bedingungen gelten. Da $|vwx| \leq n$, können v und x nur maximal zwei unterschiedliche Buchstaben beinhalten, niemals jedoch a, b und c.

  Damit kann $uv^i wx^i y$ nicht in L sein für ein $i \neq 1$. □

- Für die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$:

  Zunächst wählt man ein Wort x, mit $|x| \geq n$:

  $$z = a^{n^2} \in L$$

Bei jeder Zerlegung $z = uvwxy$ sind nur as in den Teilwörtern v und x, die gepumpt werden. Betrachtet man die Länge $|vx| = r$, so gilt:

$$|uv^i wx^i y| = n^2 + r(i - 1)$$

Insbesondere gilt für das Wort

$$\begin{aligned} z' &= uv^2wx^2y = a^s \\ |z'| &= n^2 + r = s \end{aligned}$$

Das hieße, $n^2 + r$ müsste eine Quadratzahl sein damit x' wiederum in L läge. Für r gilt aber die Ausgangsbedinung des Pumping-Lemmas!

$$|vwx| = r + |w| \leq n$$

s kann damit unmöglich eine Quadratzahl sein. □

6: Kontextsensitive Sprachen

Typ-1 = **CSL** ⊂ **REC** ⊂ **r. e.**

6.1 Automatenmodell Turingmaschine

Eine Turingmaschine ist ein 7-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$$

Z endliche Zustandsmenge

Σ Eingabealphabet $\Sigma \subseteq \Gamma$

Γ Bandalphabet

δ Überführungsfunktion $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

z_0 Startzustand, $z_0 \in Z$

$\square$ Leersymbol, $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$

E Endzustandsmenge $E \subseteq Z$

Konfiguration Eine Konfiguration k einer Turingmaschine definieren wir als ein Element der Menge

$$k \in \Gamma^\star Z \Gamma^\star$$

Das bedeutet, dass sich die Turingmaschine in der Konfiguration $k = \alpha z \beta$ im Zustand z befindet und der Schreib- Lesekopf das erste Symbol von β liest.

Die akzeptierte Sprache einer Turingmaschine Die akzeptierte Sprache einer Turingmaschine ist definiert als

$$T(M) := \left\{ w \in \Sigma^\star \,\middle|\, \exists \alpha, \beta \in \Gamma^\star, e \in E : z_o w \vdash^\star \alpha e \beta \right\}$$

Wenn $w \notin T(M)$ können drei verschiedene Dinge geschehen:

1. Die Turingmaschine hält an und ist nicht in einem Endzustand.
2. Die Turingmaschine läuft weiter und kommt irgendwann in eine Schleife
   $z_o w \vdash^\star \alpha z \beta \vdash^\star \alpha' z' \beta' \vdash^\star \alpha z \beta \vdash \cdots$
3. Die Turingmaschine rechnet endlos, ohne in eine Schleife zu kommen (Halteproblem).

6.1.1 Einschränkung LBA

Ein linear beschränkter Automat ist eine Turingmaschine, die bei der Verarbeitung der Eingabe niemals den Platz der Eingabe auf dem Arbeitsband verlässt.
Um das zu erreichen muss das letze Symbol der Eingabe markiert sein um den rechten Rand der Eingabe erkennbar zu machen, deshalb definieren wir:

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$$

Eine nichtdeterministische Turingmaschine nennen wir einen linear beschränkten Automaten, wenn gilt:

$$\forall a_1 a_2 \dots a_{n-1}\hat{a}_n \in \Sigma^+, \alpha, \beta \in \Gamma^\star, z \in Z \text{ mit } z_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}\hat{a}_n \vdash^\star \alpha z \beta : |\alpha\beta| \leq n$$

Für die akzeptierte Sprache gilt dann:

$$T(M) := \left\{a_1 \dots a_n \in \Sigma^\star \,\middle|\, \exists \alpha, \beta \in \Gamma^\star, e \in E : z_o a_1 \dots \hat{a}_n \vdash^\star \alpha e \beta\right\}$$

Die Klasse der durch LBAs erkannten Sprachen ist gleich der Typ-1 Sprachen!
Dabei ist die Frage ob nichtdeterministische und deterministische LBAs gleich mächtig sind noch offen.

6.2 Sätze zu CSL

- Die Klasse der kontextsensitiven Sprachen ist abgeschlossen unter allen Operationen!
- Für die kontextsensitiven Sprachen und alle höheren Sprachklassen gibt es die sog. Epsilon-Sonderregel, die oft verwendet wird um trotz der Eigenschaft nichtverkürzend ein Wort der Länge Null zu erreichen:

  $$(S, \epsilon) \in P \text{ aber } \forall (u, v) \in P : S \notin v$$

6.2.1 Algorithmus zur Entscheidbarkeit des Wortproblems

Die Funktion $\mathrm{Abl}_n(X)$ wird iteriert angewendet, bis sich entweder X nicht mehr ändert ($w \notin L(G)$) oder das gesuchte Wort w in X enthalten ist ($w \in L(G)$).
Dabei ist n die Länge des gesuchten Worts w, also $|w|$.
Die Funktion $\mathrm{Abl}_n(X)$ ist für eine Grammatik G wie folgt definiert:

$$\mathrm{Abl}_n(X) := X \cup \left\{w \in (V \cup \Sigma)^\star \,\middle|\, |w| \leq n \wedge \exists y \in X : y \Rightarrow_G w\right\}$$

6.3 Kuroda-Normalform

Eine Typ-1 Grammatik (V, Σ, P, S) ist in Kuroda-Normalform wenn alle Regeln von einem der vier Typen sind:

- $A \rightarrow a$
- $A \rightarrow B$
- $A \rightarrow BC$
- $AB \rightarrow CD$

Wobei $A, B, C, D \in V$ und $a \in \Sigma$ ist.
Zu jeder Typ-1 Grammatik existiert eine äquivalente Grammatik in Kuroda-Normalform

6.3.1 Umformungsalgorithmus

1. **Pseudoterminale:** Zunächst alle Terminalsymbole, die nicht alleine auf einer rechten Seite stehen durch Pseudoterminale ersetzen.

   Jetzt stören noch die Regeln $A_1 \dots A_n \to B_1 \dots B_m$ mit $1 \leq n \leq m, m > 2$

2. Für Regeln der Form $A \to B_1 \dots B_m, m > 2$ können wir die gleiche Methode wie bei den Typ-2 Normalformen anwenden (Siehe Unterabschnitt 5.3.1).

3. Regeln der Form $A_1 \dots A_n \to B_1 \dots B_m$ mit $2 \leq n \leq m, m > 2$ ersetzen wir durch:

$$A_1A_2 \to B_1D_1$$
$$D_1A_2A_1 \dots A_n \to B_2 \dots B_m$$

6.4 Beispiele

- $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ (drei und mehr gleiche Exponenten)
- $L_2 = \left\{a^{n^2} \middle| n \in N^+\right\}$

2

Theoretische Informatik 2: Berechenbarkeitstheorie und Komplexität

1: Rekursiv aufzählbare Sprachen

Typ-0 = **r. e.**

Eine Turingmaschine M *akzeptiert* die Sprache L, wenn sie nach endlicher Zeit hält. Bei Eingaben, die nicht zu L gehören, rechnet sie unendlich lang weiter (dieses Verhalten führt später auf das Halteproblem). Solche Sprachen L gehören dann zu **r. e.**, sie sind *semi-entscheidbar*.

1.1 Sätze zu r. e.

- Die Klasse der Typ-0 Sprachen ist abgeschlossen unter Sternopertaion, Vereinigung, Schnitt und Konkatenation.
- Die Klasse der durch Turingmaschinen erkennbaren/akzeptierten Sprachen ist gleich der Klasse der rekursiv aufzählbaren.

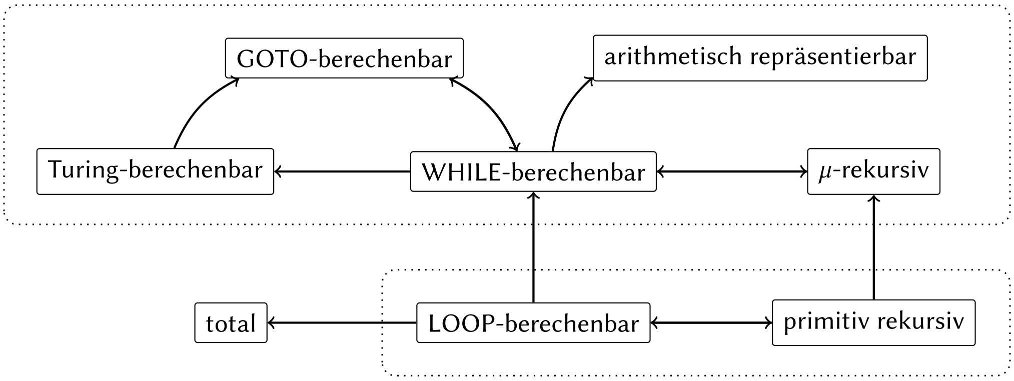
2: Entscheidbare Sprachen

REC $\subset$ **r. e.**

Eine Turingmaschine *entscheidet* die Sprache L, wenn sie für jede Eingabe nach endlicher Zeit stoppt und JA oder NEIN ausgibt, je nachdem ob $w \in L$ gilt oder nicht. Diese Sprachen L gehören dann zur Klasse der entscheidbaren Sprachen **REC** (rekursive Sprachen).

3: Berechenbarkeitstheorie

3.1 Berechenbarkeiten



3.1.1 LOOP-Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt LOOP-berechenbar, falls es ein LOOP-Program P gibt, das gestartet auf der Eingabe $n_1, n_2, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nach endlich vielen Schritten hält und die Variable x_0 den Wert $f(n_1, \ldots, n_k)$ beinhaltet.

Erlaubte Basisanweisungen

- $x_i := x_j + c$ bzw. $x_i := x_j - c$ mit $c \in \mathbb{N}$
- `LOOP` x_i `DO` P `END`
- Hintereinanderausführung von LOOP-Programmen

Simulierbare Makros

- Wertzuweisungen $x_i := x_j$ und $x_i := c$
- `IF` $x_i > c$ `THEN` P `END`
- Alle üblichen arithmetischen Operationen, auch Modulrechnung

3.1.2 WHILE-Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt WHILE-berechenbar, falls es ein WHILE-Program P gibt, das gestartet auf der Eingabe $n_1, n_2, \ldots, n_k$ in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nach endlich vielen Schritten hält (falls das Ergebnis definiert ist) und die Variable x_0 den Wert $f(n_1, \ldots, n_k)$ beinhaltet. Ist $f(n_1, \ldots, n_k)$ undefiniert, so hält P nicht.

1. Jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm mit nur einer einzigen WHILE-Schleife simuliert werden.

2. Jede WHILE-Berechenbare Funktion kann durch ein WHILE-Programm mit nur einer einzigen WHILE-Schleife berechnet werden (Kleene'sches Normalform-Theorem)

Erlaubte Anweisungen

- Alle Anweisungen von LOOP-Programmen
- `WHILE` $x_i \neq 0$ `DO` P `END`

3.1.3 GOTO-Berechenbarkeit

Erlaubte Anweisungen

- Berechnungen und Zuweisungen: $x_i \coloneqq x_j \pm c$
- Marken: M_i
- `GOTO` M_i
- `HALT`
- `IF` $x_i = c$ `THEN GOTO` M_j

Simulierbare Makros

- Die `WHILE`-Schleife

3.1.4 Turing-Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt Turing-berechenbar, falls eine deterministische Turingmaschine existiert, die $f(n_1, \dots, n_k) = m$ berechnet indem, sie gestartet auf dem k-Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ nach endlich vielen Berechnungsschritten einen Endzustand erreicht und dann m auf dem Band steht. Falls das Ergebnis für die Eingabe undefiniert ist, terminiert die Maschine nie.

3.1.5 Primitive Rekursion

Eine Funktion ist genau dann primitiv rekursiv, wenn sie LOOP-berechenbar ist.

- Konstante Funktionen sind primitiv rekursiv
- Projektionen sind primitiv rekursiv
- Die Nachfolgerfunktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ ist primitiv rekursiv
- Verkettungen von primitiv rekursiven Funktionen sind primitiv rekursiv
- Funktionen, die durch primitive Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen entstehen, sind primitiv rekursiv:

  $$\begin{aligned} f(0, x_1, \dots, x_k) &= g(x_1, \dots, x_k) && \text{(Startwert)} \\ f(n+1, x_1, \dots, x_k) &= h(f(n, x_1, \dots, x_k), n, x_1, \dots, x_k) && \text{(Rekursionsschritt)} \end{aligned}$$

  Das heißt, g, h primitiv rekursiv $\Rightarrow f$ primitiv rekursiv.

3.1.6 μ-Rekursion

$$\mu f(x_1, \dots, x_k) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x_1, \dots, x_k) = 0 \land \forall m < n : f(m, x_1, \dots, x_k) > 0\}$$

Der μ-Operator liefert den kleinsten Eingabewert n der ersten Variable, bei der die Funktion 0 ausgibt. Dabei muss insbesondere f für alle Werte kleiner als n definiert sein, da sonst eine Berechnung nicht möglich wäre.

Satz von Kleene: Eine μ-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ lässt sich immer durch zwei $n+1$-stellige primitiv rekursive Funktionen darstellen:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n, \mu q(x_1, \ldots, x_n))$$

3.1.7 Arithmetische Repräsentierbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt arithmetisch repräsentierbar, falls es eine $(k+1)$ stellige arithmetische Formel F gibt, so dass gilt

$$F(n_1, \ldots, n_k, m) \Leftrightarrow f(n_1, \ldots, n_k) = m$$

Hierfür besteht eine arithmetische Formel zunächst aus Termen:

- Alle $n \in \mathbb{N}$ sind Terme
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist x_i ein Term
- Verknüpfung zweier Terme mit $+$ oder $*$ sind ebenfalls Terme

Aus den Termen werden Formeln gebildet

- Gleichheit zweier Terme $(t_1 = t_2)$ ist eine Formel
- Für F, G Formeln sind auch $\neg F, (F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln
- Für F eine Formel und $i \in \mathbb{N}$ sind auch $\forall x_i F$ und $\exists x_i F$ Formeln

Gödel'scher Unvollständigkeitssatz Jedes Beweissystem, das nur wahre Formeln der Arithmetik beweist muss unvollständig sein.

4: Entscheidbarkeitstheorie

Die Berechenbarkeitstheorie spielt sich innerhalb der Entscheidbarkeitstheorie ab. Wenn eine Sprache entscheidbar ist, macht es Sinn ihre Komplexität zu bestimmen. Andersherum heißt das, dass jede Sprache, die in einer der Komplexitätsklassen enthalten ist entscheidbar ist (also insbesondere semi- und co-semi-entscheidbar).

4.1 Definitionen

4.1.1 Charakteristische Funktionen

Für jede Menge A existiert die sogenannte *charakteristische Funktion* $\chi_A(w)$. Diese Funktion entscheidet für jedes Wort w aus einer festgelegten Grundmenge, ob $w \in A$ gilt.

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, \text{ falls } w \in A \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Ebenso lässt sich die semi-charakteristische Funktion $\chi'_A(w)$ definieren

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1, \text{ falls } w \in A \\ \text{undefiniert, sonst} \end{cases}$$

Eine Menge heißt *entscheidbar*, wenn ihre zugehörige charakteristische Funktion *berechenbar* ist. Eine Menge heißt semi-entscheidbar, falls die semi-charakteristische Funktion berechenbar ist. Das Komplement einer Mengen, deren semi-charakteristische Funktion berechenbar ist, heißt co-semi-entscheidbar. Ist eine Menge entscheidbar, so ist es ihr Komplement trivialerweise auch.

4.1.2 Rekursive Aufzählbarkeit

Eine Sprache A ist rekursiv aufzählbar, wenn eine totale, berechenbare Funktion $c : \mathbb{N} \to \Sigma^\star$ existiert sodass $A = \{c(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt. Rekursive Aufzählbarkeit ist äquivalent zu Semi-Entscheidbarkeit.

4.1.3 Entscheidbarkeitsprobleme

Hierbei seien die Gödelisierungen der Maschinen in einer geeigneten Art und Weise kodiert. Beispielsweise $w \in \{0, 1\}^\star$ für eine Maschine M_w.

Spezielles Halteproblem	$K = \{w \mid M_w$ hält auf Eingabe $w\}$	semi-entscheidbar
Allgemeines Halteproblem	$H = \{w\#x \mid M_w$ hält auf Eingabe $x\}$	semi-entscheidbar
Halteproblem auf leerem Band	$H_0 = \{w \mid M_w$ hält auf Eingabe $\epsilon\}$	semi-entscheidbar
PCP	Postsches Korrespondenzproblem	semi-entscheidbar
MPCP	Für alle Lösungen gilt $i_1 = 1$	semi-entscheidbar
WA	Menge aller wahren arithmetischen Formeln	unentscheidbar
$\overline{\text{WA}}$	Menge aller falschen arithm. Formeln	unentscheidbar

Satz von Rice Sei $\mathcal{R}$ die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen und $\mathcal{S}$ eine nichttriviale Teilmenge von $\mathcal{R}$. Dann ist die Menge $C(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w$ berechnet eine Funktion aus $\mathcal{S}\}$ unentscheidbar.
Wichtig ist, dass der Satz von Rice nur Aussagen über berechnete Funktionen macht, Aussagen über die berechnende Turingmaschine werden nicht in Betracht gezogen.
Bei der Verwendung des Satzes von Rice führt man eigentlich eine Reduktion durch, muss sich jedoch keine Funktion mehr einfallen lassen.

Probleme in der Theorie der formalen Sprachen

- Für deterministisch kontextfreie Sprachen $L, K \in \mathbf{DCFL}$ sind die Fragen $L \cap K = \emptyset$, $|L \cap K| < \infty$, $L \cap K \in \mathbf{CFL}$ sowie $L \subseteq K$ unentscheidbar.
- Für eine kontextfreie Grammatik sind die Frage nach Mehrdeutigkeit, $\overline{L(G)} \in \mathbf{CFL}$, $L(G) \in \mathbf{REG}$ und $L(G) \in \mathbf{DCFL}$ alle unentscheidbar.
- Für eine kontextsensitive-Grammatik ist die Leerheit sowie die Endlichkeit der erzeugten Sprache unentscheidbar.

4.2 Reduktion von Problemen

Um die prinzipielle Lösbarkeit zweier Probleme zu betrachten, verwendet man Reduktionen:
Seien $A \subseteq \Sigma^\star$ und $B \subseteq \Gamma^\star$ zwei Probleme. Kann man eine *totale und berechenbare Funktion* $f : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ finden, so dass gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B,$$

so sagt man, A ist auf B (many-one-)reduzierbar. Man schreibt dann auch $A \leq B$.

1. $A \leq B$ und B entscheidbar $\Rightarrow A$ entscheidbar.
2. $A \leq B$ und B semi-entscheidbar $\Rightarrow A$ semi-entscheidbar.

Bei der Reduktion übertragen sich immer fehlende Eigenschaften von links nach rechts, d.h. reduziert man ein semi-entscheidbares, aber nicht co-semi-entscheidbares Problem A auf ein Problem B (d.h. $A \leq B$), so ist B ebenfalls nicht co-semi-entscheidbar. Über die Semi-Entscheidbarkeit von B wird keine Aussage gemacht.
Reduziert man allerdings ein unbekanntes Problem A auf ein semi-entscheidbares Problem B (d.h. $A \leq B$), so hat man die Semi-Entscheidbarkeit von A gezeigt. Es übertragen sich also „positive Eigenschaften" von rechts nach links.
Letzterer Sachverhalt wird klar, wenn man sich überlegt, dass man mit der Reduktion eine Funktion gefunden hat, die eine Fragestellung aus A in eine aus B überträgt. Man kann also das Entscheidungsproblem für A zunächst in B übersetzen und schließlich mit dem Entscheidungsalgorithmus für B entscheiden.

Beispiel einer Reduktion: Wir wollen zeigen, dass die Sprache

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^\star \,\middle|\, T(M_w) \in \mathbf{REG} \right\}$$

das heißt die Menge der Turingmaschinen, die reguläre Sprachen akzeptieren, unentscheidbar ist. Dafür reduzieren wir $H_0 \leq L$, dabei sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine die auf Eingabe x wie folgt arbeitet

- Wenn die Eingabe von der Form $x = a^n b^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist, akzeptiere.
- Sonst lösche die Eingabe und simuliere M_w auf leerem Band.

Hierbei sei die Maschine o.B.d.A. über einem Alphabet $\{a, b\} \subset \Sigma$ definiert. Damit ist f total und berechenbar und es gilt

$$w \in H_0 \Rightarrow T(M_{f(w)}) = \Sigma^\star \qquad\qquad w \notin H_0 \Rightarrow T(M_{f(w)}) = \left\{ a^n b^n \in \Sigma^\star \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$\Rightarrow T(M_{f(w)}) \in \mathbf{REG} \qquad\qquad \Rightarrow T(M_{f(w)}) \in \mathbf{CFL} \setminus \mathbf{REG}$$

Da H_0 unentscheidbar ist, ist es auch L. □

5: Komplexität

Die Frage in der Komplexitätstheorie ist, wie viel Aufwand benötigt wird, ein Problem zu lösen. Die theoretische Lösbarkeit wird in der Entscheidbarkeits- bzw. Berechenbarkeitstheorie behandelt.
Die Komplexitätstheorie befasst sich mit oberen und unteren Schranken an den Ressourcenaufwand zur Problemlösung. Wichtig sind hierbei auch inhärente Komplexitäten, also eine Beschränkung nach oben und unten.

5.1 Komplexitätsklassen

Diese Komplexitätsklassen liegen alle in der Menge der entscheidbaren Sprachen. Alle folgenden Klassen sind also Teilmengen von **REC**.
Für alle Komplexitätsklassen C ist zu unterscheiden:

$$\mathrm{co}\,C = \left\{L \in \Sigma^\star \,\middle|\, \overline{L} \in C\right\} \qquad \overline{C} = \left\{L \in \Sigma^\star \,\middle|\, L \notin C\right\}$$

5.1.1 Zeitklassen

Die Funktion $\mathrm{time}_M : \Sigma^\star \to \mathbb{N}$ ordnet einer Eingabe die Anzahl Schritte zu, die eine deterministische Maschine M auf ihr ausführt.
Die Zeitklasse $\mathrm{DTIME}(f(n))$ enthält alle Probleme, die sich durch eine deterministische Turingmaschine in einem Zeitaufwand kleiner als f lösen lassen. Das heißt, f ist eine obere Schranke für die Komplexität der Probleme in $\mathrm{TIME}(f)$.

Die Funktion $\mathrm{ntime}_M : \Sigma^\star \to \mathbb{N}$ ordnet einer Eingabe die Länge des kürzesten akzeptierenden Pfades der nichtdeterministischen Maschine M zu. Falls die Maschine nicht akzeptiert, ist $\mathrm{ntime}_M(w) = 0$.
Die Zeitklasse $\mathrm{NTIME}(f(n))$ enthält alle Probleme, die sich durch eine nichtdeterministische Turingmaschine in einem Zeitaufwand kleiner als f lösen lassen.

$$\mathbf{P} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{DTIME}(n^k) \qquad \mathbf{NP} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{NTIME}(n^k)$$

5.1.2 Platzklassen

Analog zu den Zeitklassen sind Platzklassen definiert, die den maximal belegten Platz für eine Berechnung beschränken. Die Funktion $\mathrm{space}_M : \Sigma^\star \to \mathbb{N}$ ordnet dabei jeder Eingabe auf einer deterministischen Turingmaschine die Anzahl der maximal verwendeten Bandelemente (auf einem Arbeitsband) zu.
So ist die Platzklasse $\mathrm{SPACE}(f(n))$ definiert als die Klasse aller Probleme für die f eine Platzbeschränkung für alle Eingaben ist.
Analog wie bei Zeitklassen die Unterscheidung deterministische-nichtdeterministische Platzklassen.

$$\begin{aligned}
\textbf{L} &= \text{DSPACE}(\log n) \\
\textbf{NL} &= \text{NSPACE}(\log n) \\
\textbf{PSPACE} &= \bigcup_{k\geq 1} \text{DSPACE}(n^k) = \bigcup_{k\geq 1} \text{NSPACE}(n^k)
\end{aligned}$$

5.2 Beziehungen zwischen den Klassen

Für ein beliebiges $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, falls nicht näher angegeben

5.2.1 Äquivalenzen von Klassen

- In den Platzklassen spielt die O-Notation keine Rolle, Konstanten können wegen Bandreduktion und Bandkompression vernachlässigt werden

  $$\text{DSPACE}(O(f)) = \text{DSPACE}_{\text{1-Band}}(f)$$
  $$\text{NSPACE}(O(f)) = \text{NSPACE}_{\text{1-Band}}(f)$$

- In nichtdeterministischen Zeitklassen spielt die O-Notation ebenfalls keine Rolle

  $$\text{NTIME}(O(f)) = \text{NTIME}(f)$$

- Bei deterministischen Zeitklassen gilt i. A. $\text{DTIME}(O(f)) \neq \text{DTIME}(f)$, nur für größer als lineare Funktionen gilt Gleichheit d.h.

  $\text{DTIME}(O(f)) = \text{DTIME}(f)$ mit $f(n) \geq (1+\epsilon)\cdot n$ für ein $\epsilon > 0$

- **Satz von Immerman und Szelepcsenyi**: Falls $f \in \Omega(\log(n))$, gilt:

  $$\text{NSPACE}(f) = \text{coNSPACE}(f)$$

- Alle deterministischen Zeit- und Platzklassen sind gegen Komplement abgeschlossen:

  $$\text{DSPACE}(f) = \text{coDSPACE}(f)$$
  $$\text{DTIME}(f) = \text{coDTIME}(f)$$

5.2.2 Hierarchien und Teilmengen

- Für alle $f(n) \geq n$ gilt für die Zeitklassen

  $$\text{DTIME}(f) \subseteq \text{NTIME}(f) \subseteq \text{DSPACE}(f)$$

- Und für alle $f(n) \geq \log n$ gilt

  $$\text{DSPACE}(f) \subseteq \text{NSPACE}(f) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(f)})$$

- **Satz von Savitch**: Sei $s \in \Omega(\log(n))$, dann gilt

  $$\text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DSPACE}(s^2)$$

- **Platzhierarchiesatz**: Sei $s_1 \notin \Omega(s_2)$ und $s_2 \in \Omega(\log(n))$, dann gilt

$$\mathrm{DSPACE}(s_2) \setminus \mathrm{DSPACE}(s_1) \neq \emptyset \\ \Rightarrow \mathrm{DSPACE}(s_1) \subsetneq \mathrm{DSPACE}(s_2)$$

- **Zeithierarchiesatz**: Sei $t_1 \log(t_1) \notin \Omega(t_2)$ und $t_2 \in \Omega(n \log(n))$, dann gilt

$$\mathrm{DTIME}(t_2) \setminus \mathrm{DTIME}(t_1) \neq \emptyset \\ \Rightarrow \mathrm{DTIME}(t_1) \subsetneq \mathrm{DTIME}(t_2)$$

- **Satz von Hennie und Stearns**: Falls $\epsilon > 0, f(n) \geq (1+\epsilon)n$, dann gilt

$$\mathrm{DTIME}(f) \subseteq \mathrm{DTIME}_{\text{2-Band}}(f \log f)$$

5.2.3 Weitere Sätze

- **Lückensatz von Borodin**: Für jede totale berechenbare Funktion $r(n) \geq n$ existiert effektiv eine totale berechenbare Funktion $s(n) \geq n+1$ mit

$$\mathrm{DTIME}(s(n)) = \mathrm{DTIME}(r(s(n)))$$

5.3 Polynomialzeitreduktion

Reduktionen können nicht nur verwendet werden um Entscheidbarkeiten festzustellen, sondern helfen genauso bei der Einstufung von Problemen in Komplexitätsklassen. So kann man durch Beschränken der Reduktionsfunktion beispielsweise eine Lösbarkeit in einer bestimmen Zeit zeigen.
Ähnlich wie in der Berechenbarkeitstheorie kann man zur Analyse der Komplexität von Problemen Reduktionen zwischen diesen entwickeln. Hier ist das Ergebnis allerdings sogar eine Beschränkung des Aufwands nach oben oder unten.
Allerdings ist die bereits vorgestellte many-one-Reduktion (ohne Beschränkungen) zu grob um sinnvolle Reduktionen zwischen Problemen mit Zeitbeschränkung durchzuführen. (Ein Problem, das in Polynomialzeit lösbar ist, könnte durch so eine Reduktionsfunktion gelöst werden. So kann man eigentlich alle berechenbaren Probleme aufeinander reduzieren, diese Aussage ist jedoch für eine Komplexitätsbetrachtung uninteressant.)
Deshalb gibt es die sog. Polynomialzeitreduktion. Hier ist eine Beschränkung an die Reduktionsfunktion gesetzt, nämlich muss diese zusätzlich in Polynomialzeit berechenbar sein. Man schreibt $A \leq_p B$.

1. $A \leq_p B \land B \in \mathbf{P} \Rightarrow A \in \mathbf{P}$
2. $A \leq_p B \land B \in \mathbf{NP} \Rightarrow A \in \mathbf{NP}$

5.3.1 Härte und Vollständigkeit

NP-Härte Eine Sprache ist **NP**-hart falls sich alle Probleme aus **NP** in Polynomialzeit darauf reduzieren lassen. Das heißt dieses Problem ist mindestens so schwierig zu lösen wie ein Problem aus **NP**. Es gilt: A **NP**-hart und $A \leq_p B \Rightarrow B$ **NP**-hart.

NP-Vollständigkeit Ist eine Sprache **NP**-hart und selbst in **NP** enthalten, so nennt man sie **NP**-vollständig. Diese Sprachen gehören zu den schwierigsten Sprachen aus **NP**. Kann man von einer **NP**-vollständigen Sprache zeigen, dass sie sogar in **P** liegt, so hat man **P**=**NP** gezeigt.
Einige **NP**-vollständige Probleme:

SAT	$\{w \mid w$ kodiert eine erfüllbare Formel$\}$
3KNF-SAT	Ist eine Formel in KNF mit max. 3 Literalen pro Klausel erfüllbar?
CLIQUE	Enthält ein Graph eine Clique der Größe k?
FÄRBBARKEIT	Gibt es eine Knotenfärbung mit k Farben?

PSPACE-Vollständigkeit
Die quantifizierten booleschen Formeln (QBF) stellen ein bekanntes **PSPACE**-vollständiges Problem dar

$$\textbf{QBF} = \{F \mid F \text{ ist eine geschlossene QBF-Formel, die sich zu TRUE auswerten lässt }\}$$

5.3.2 Logspace-Reduktion

Logspace-Transducer Ein Logspace-Transducer ist eine deterministische Turingmaschine mit einem read-only Eingabeband und einem logarithmisch beschränkten Arbeitsband, sowie einem write-only Ausgabeband auf dem der Schreib-/ Lesekopf nicht nach links bewegt werden kann.
Eine Funktion heißt logspace-berechenbar, wenn ein Logspace-Transducer existiert, der sie berechnet.
Auf Basis dieser Definitionen gibt es nun als Verfeinerung der Polynomialzeitreduktion die Logspace-Reduktion:
Seien $A, B \subseteq \Sigma^\star$ Sprachen. A heißt auf B *logspace-reduzierbar*, falls eine logspace-berechenbare Funktion $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ existiert, so dass

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Man schreibt dann $A \leq_{\log} B$.
So kann man nun Begriffe wie **NL**- bzw. **P**-Härte und -Vollständigkeit sinnvoll (und analog zur **NP**-Vollständigkeit) definieren.
Einige Probleme, die **NL**-vollständig bezüglich Logspace-Reduktion sind:

GAP	Grapherreichbarkeitsproblem
2-SAT	erfüllbare boole'sche Formeln in 2KNF-Darstellung
2-NSAT	nicht erfüllbare Formeln in 2KNF-Darstellung

Einige Probleme, die **P**-vollständig bezüglich Logspace-Reduktion sind:

CFE	$L_{cfe} = \{w \mid w \text{ ist Kodierung einer Typ-2 Grammatik } G \text{ mit } L(G) = \emptyset\}$
CVP	Circuit Value Problem (Ausgabe eines Schaltnetzes)
MCVP	Wie **CVP**, allerdings ohne Inverter (Negationen)

5.3.3 Weitere Reduktionen

Man kann beliebige Reduktionen definieren indem man bestimmte Einschränkungen an die Reduktionsfunktion vorgibt. Bekannte Reduktionen sind die Logplatz-Reduktion, die Polynomialzeitreduktion, die allgemeine many-one-Reduktion sowie die Turing-Reduktion $\leq_T$. Diese sind jeweils Verfeinerungen voneinander

$$A \leq_{\log} B \Rightarrow A \leq_p B \Rightarrow A \leq B \Rightarrow A \leq_T B.$$

(Bei der Turing-Reduktion wird die Übersetzungsfunktion mit einer Orakel-Turingmaschine durchgeführt.)

5.4 Translationtechnik

Die Translationssätze werden verwendet, Separationen von größeren zu kleineren Klassen bzw. Gleichheiten oder Inklusionen von kleineren zu größeren Klassen zu übertragen. Die durch Padding mit f aufgeblähte Sprache ist $Pad_f(L) := \left\{w\$^{f(|w|)-|w|} \,\middle|\, w \in L\right\}$, wobei $\{\$\} \cap \Sigma = \emptyset$.

1. Für zwei Funktionen $f(n), g(n) \geq n$ gilt der **Translationssatz für Zeitklassen**:

$$Pad_f(L) \in \mathrm{DTIME}(O(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{DTIME}(O(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \mathrm{NTIME}(O(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{NTIME}(O(g \circ f))$$

2. Und analog für $g \in \Omega(\log)$ und $f(n) \geq n$ der **Translationssatz für Platzklassen**:

$$Pad_f(L) \in \mathrm{DSPACE}(O(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{DSPACE}(O(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \mathrm{NSPACE}(O(g)) \Leftrightarrow L \in \mathrm{NSPACE}(O(g \circ f))$$

Beispiel: Wir wollen für alle $c \in \mathbb{N}$ zeigen, dass

$$\mathrm{NSPACE}(n^c) \neq \mathbf{NP}.$$

Wir nehmen an, dass ein c existiert sodass $\mathrm{NSPACE}(n^c) = \mathbf{NP}$. Sei also

$$L \in \mathrm{NSPACE}(n^{3c})$$

eine beliebige Sprache.
Wir wählen die Padding-Funktion $f(n) = n^3$, damit folgt dann

$$Pad_f(L) \in \mathrm{NSPACE}(n^c) = \mathbf{NP}$$

nach Annahme. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}$ mit dem

$$Pad_f(L) \in \mathrm{NTIME}(n^k)$$

ist. Nach dem Translationssatz für Zeitklassen ist dann $L \in \mathrm{NTIME}(n^{3k}) \subset \mathbf{NP}$.
Es wurde also gezeigt

$$\mathrm{NSPACE}(n^c) = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \mathbf{NP}$$

Daraus folgt aber nach der Annahme

$$\mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \mathbf{NP} = \mathrm{NSPACE}(n^c)$$

was im Widerspruch zum Platzhierarchiesatz steht. □

3

Theoretische Informatik 3: Algorithmen und diskrete Strukturen

1: Laufzeitanalyse

Zunächst benötigen wir einen Algorithmenbegriff.

Definition 4: Algorithmus

Ein Algorithmus ist eine schrittweise auszuführende Vorschrift, bei der jeder auszuführende Schritt tatsächlich in endlicher Zeit und auf eindeutig definierte Weise ausgeführt werden kann.

Grundsätzlich soll vor Beginn der Ausführung immer eine Eingabe der Länge $n \in \mathbb{N}$ bereitgestellt sein, auf die die ausführende Maschine zugreifen kann.

1.1 Worst- und Average-case Laufzeiten

Analog zur Aufwandsanalyse von Maschinen aus Theoretischer Informatik 2 ist die Anzahl Berechnungsschritte, die für den gegebenen Algorithmus A bei Input x durchgeführt werden müssen gegeben durch die Abbildung

$$\text{time}_A(x) : \Sigma^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,.$$

Hieraus ergibt sich die *worst-case-Laufzeit* bei Eingabelänge höchstens n als

$$\text{time}_A(n) = \max_{|x| \leq n} \{\text{time}_A(x)\}\,.$$

Um die sogenannte *average-case-Laufzeit* zu berechnen, gehen wir davon aus, dass alle Eingaben der Länge n gleich wahrscheinlich sind (gleichverteilt). Damit ist

$$\text{av-time}_A(n) = \frac{1}{N} \sum_{|x|=n} \text{time}_A(x)$$

wobei $N = |\{x \mid |x| = n\}|$.

1.2 Landau-Symbole

Die fünf Landau-Symbole sind O, o, Ω, ω und Θ, mit ihnen werden Klassen von Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschrieben.

(O) Man sagt g ist zu f eine asymptotische obere Schranke, wenn

$$f \in O(g) \iff \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty \iff \exists c, N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

(Ω) Analog zu O stellt Ω die Klasse der asymptotischen unteren Schranken dar.

$$f \in \Omega(g) \iff \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| > 0 \iff \exists c, N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$$

(Θ) Man sagt g ist zu f eine asymptotisch scharfe Schranke, wenn

$$f \in \Theta(g) \iff f \in \Theta(g) \land f \in \mathcal{O}(g)$$

Es gilt $\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$.

(o) f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar, wenn

$$f \in o(g) \iff \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 0 \iff \forall c\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_0 : f(n) < c \cdot g(n)$$

Man sieht, dass $o(g) \subset \mathcal{O}(g)$ gilt.

(ω) f ist gegenüber g asymptotisch dominant, wenn

$$f \in \omega(g) \iff \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty \iff \forall c\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Analog ist hier wieder $\omega(g) \subset \Omega(g)$.

1.3 Rekursionsgleichungen

Rekursion bedeutet, ein Problem für den Parameterwert n unter Zuhilfenahme des Ergebnisses für den/die Parameterwert/e m bzw m_i zu berechnen. Oft ist dabei $m < n$. Man reduziert also ein Problem auf ein bereits gelöstes plus einen meist nur noch kleinen Rechenaufwand.

Beispiele: Die Fibonacci-Zahlen sowie der euklidische Algorithmus werden oft rekursiv programmiert. Aber auch Suchalgorithmen wie die binäre Suche.

Satz 5: Mastertheorem 1

Satz 6: Mastertheorem 2

2: Entwurfsmethoden

2.1 Divide and Conquer

Das divide and Conquer / Teile und herrsche-Prinzip basiert auf Rekursion. Allgemein wird die Eingabe in zwei (oder mehr) Teile aufgeteilt. Die Berechnung wird rekursiv auf den Teilen durchgeführt, am Schluss werden die beiden Teillösungen zur Gesamtlösung zusammengeführt.
Wichtig für einen effizienten divide and conquer-Algorithmus ist, dass die Teile ungefähr gleich groß sind, d.h. $m \approx \frac{n}{2}$. Außerdem sollte das Aufteilen und Zusammensetzen mit linearer Zeit ($\mathcal{O}(n)$ bzw. $\Theta(n)$) auskommen.

Beispiele:

- Mergesort
- Quicksort
- Multiplikation großer Zahlen

2.2 Dynamisches Programmieren

2.3 Backtracking bzw. Branch and Bound

2.4 Greedy Algorithmen

2.5 Randomisierte Algorithmen

3: Algebra und Zahlentheorie

Definition 7: Halbgruppe

Definition 8: Monoid

Definition 9: Gruppe

Definition 10: Ring

Definition 11: Körper

Definition 12: Homomorphismus

Definition 13: Gruppe

Größter gemeinsamer Teiler

```
function ggt(m,n)
begin
  if m = 0 then
    return n
  else
    return ggT(n mod m, m)
  end if
end
```

4: Diskrete Wahrscheinlichkeit

4.1 Kombinatorik

5: Modulare Arithmetik

Wir rechnen in den sogenannten Restklassen. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien für $k \in \mathbb{Z}$ die Mengen

$$k + n\mathbb{Z} = \{\ldots, k - 2n, k - n, k, k + n, k + 2n, \ldots\}.$$

die sogenannten Restklassen. Wir definieren hierauf die Äquivalenzrelation $\equiv \pmod{n}$ durch

$$k \equiv l \mod n \Leftrightarrow k \in l + n\mathbb{Z}$$

Aus den Restklassen bilden wir den Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(k + n\mathbb{Z}) + (l + n\mathbb{Z}) &= k + l + n\mathbb{Z}\\ (k + n\mathbb{Z}) \cdot (l + n\mathbb{Z}) &= k \cdot l + n\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Die multiplikative Gruppe in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besteht aus den bezüglich Multiplikation invertierbaren Elementen. Sie wird bezeichnet mit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Wir bezeichnen mit $\varphi(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $k < n$ für die $\mathtt{ggT}(k, n) = 1$ gilt. Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ hat also $\varphi(n)$ viele Elemente.

5.1 Wichtige Sätze und Lemmas

- Allgemein gilt

  $$\mathtt{ggT}(ca, cb) = c \cdot \mathtt{ggT}(a, b)$$

- **Lemma von Bezout** Für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass

  $$\mathtt{ggT}(m, n) = am + bn$$

  das heißt, der größte gemeinsame Teiler lässt sich als Linearkombination darstellen.

- **Fundamentalsatz der Arithmetik** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich n eindeutig darstellen als

  $$n = \prod_{p \text{ Prim}} p^{n_p}$$

  Dabei ist $n_p \neq 0$ genau dann, wenn p ein Teiler von n ist. Das heißt also, die Primfaktorzerlegung einer Zahl ist eindeutig.

- Die multiplikative Gruppe besteht aus den Elementen, die teilerfremd zum Modul sind

  $$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{k + n\mathbb{Z} \mid \mathtt{ggT}(k, n) = 1\}$$

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Körper genau dann, wenn n eine Primzahl ist.

- Die lineare Abbildung $x \mapsto kx$ auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann bijektiv, wenn $\mathtt{ggT}(k, n) = 1$.

- Sind m, n teilerfremd, d.h. $\texttt{ggT}(m,n) = 1$, dann ist

  $$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$$

  surjektiv. Damit erhält man eine bijektive Abbildung

  $$(x \mod mn) \mapsto (x \mod m, x \mod n)$$

- **Chinesischer Restsatz** Für teilerfremde Zahlen m, n ist die Abbildung

  $$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} x + mn\mathbb{Z} \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$$

  ein Isomorphismus (bijektiver Homomorphismus).

- **Der kleine Satz von Fermat** Für alle Primzahlen p und alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt

  $$a^p \equiv a \mod p$$

  Falls a und p teilerfremd sind, gilt sogar

  $$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

- **Satz von Euler** Für teilerfremde ganze Zahlen a, n gilt

  $$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

  dies gilt sogar für jede kommutative Gruppe G und jedes $a \in G$ (die multiplikative Gruppe $(Z/n\mathbb{Z})^*$ ist kommutativ)

  $$a^{|G|} = 1$$

- Summe über die $\phi(t)$ der Teiler von n ist gleich n

  $$\sum_{t|n} \varphi(t) = n$$

5.2 Beispiele und Anwendungen

5.2.1 Lösen von Kongruenzen

Finden der Inversen in der multiplikativen Gruppe

Das Finden des Inversen eines Elements in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ efolgt durch Lösen einer besonderen linearen diophantischen Gleichung. Wollen wir das Inverse von a bestimmen, so wollen wir die Kongruenz

$$a \cdot x \equiv 1 \mod n$$

für x lösen. Das Inverse existiert nur, wenn a und n teilerfremd sind, das heißt $\texttt{ggT}(a,n) = 1$ ist. Damit lässt sich das Problem auf die diophantische Gleichung

$$a \cdot x + n \cdot y = 1 = \texttt{ggT}(a,n)$$

reduzieren. Wir wissen aus dem Lemma von Bezout, dass sich der $\texttt{ggT}$ als Linearkombination darstellen lässt. Diese können wir mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus finden.

Beispiel: Wir wollen das Inverse von 17 in $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^*$ bestimmen. Wir wissen, dass $\mathtt{ggT}(17, 31) = 1$, wir wollen also folgendes lösen

$$17 \cdot x \equiv 1 \mod 31$$
$$17 \cdot x + 31 \cdot y = 1 = \mathtt{ggT}(17, 31)$$

Dafür führen wir den euklidischen Algorithmus durch, der ggT ist markiert

$$31 = 1 \cdot 17 + 14$$
$$17 = 1 \cdot 14 + 3$$
$$14 = 4 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + \boxed{1} \leftarrow \text{ ab hier nach oben arbeiten.}$$
$$2 = 2 \cdot \boxed{1} + 0.$$

Gehen wir nun aus der vorletzten Zeile die Schritte rückwärts zurück, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= 3 - (14 - 4 \cdot 3) = 5 \cdot 3 - 14 \\ &= 5 \cdot (17 - 14) - 14 = 5 \cdot 17 - 6 \cdot 14 \\ 1 &= 5 \cdot 17 - 6 \cdot (31 - 17) = \boxed{11} \cdot 17 - 6 \cdot 31 \end{aligned}$$

womit wir bereits die Linearfaktorzerlegung und damit insbesondere das Inverse gefunden haben.

Lösen einer allgemeinen diophantischen Gleichung

Möchte man eine lineare diophantische Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

lösen bei der $c \neq \mathtt{ggT}(a, b)$ ist, muss man wie folgt vorgehen.
Zu erst ist wichtig, dass c ein Vielfaches von $\mathtt{ggT}(a, b)$ sein muss, sonst ist die Gleichung nicht lösbar.
Dann kann man wie oben vorgehen, den ggT berechnen und anschließend die vorletzte Zeile so erweitern, dass der Rest gleich c ist. Verfährt man nun weiter wie oben und setzt rückwärts ein, erhält man die gesuchte Lösung.

5.2.2 Fehlererkennung

5.2.3 Primzahltest und -Zertifikat

Primzahltest nach Fermat 22.3

Exaktes Primzahlzertifikat

Sei $n \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Falls für alle Primzahlen p mit $n \equiv 1 \mod p$ eine Zahl $a \in Z$ existiert, so dass

$$a^{n-1} \equiv 1 \mod n \quad \text{und} \quad a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \mod n$$

gilt, dann ist n eine Primzahl.

5.2.4 Simultane Kongruenzen lösen

5.2.5 Schnelle Exponentiation 22.6

5.2.6 RSA

Das RSA-Verfahren ist ein asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren, das sehr weit verbreitet ist.
Möchte Bob (B) eine Nachricht an Alice (A) senden, so muss Alice zunächst das folgende vorbereiten

1. Große Primzahlen p, q mit $p < q$, beide müssen geheim bleiben.
2. Berechne $n = p \cdot q$ (öffentlich),
3. setze $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$,
4. wähle $e > 1$ mit $\texttt{ggT}(e, \varphi(n) = 1$ (öffentlich), diese Zahl wird zum Verschlüsseln verwendet.
5. Berechne $s < n$ mit $e \cdot s \equiv 1 \mod \varphi(n)$, d.h. $e \cdot s = k \cdot \varphi(n) + 1$. Diese Zahl wird zum Entschlüsseln verwendet und muss unbedingt geheim bleiben.

Das Paar (n, e) bildet den *öffentlichen Schlüssel*.
Bobs Nachricht muss im Bereich $\{0, \ldots, n-1\}$ sein, dies kann zum Beispiel durch Aufteilen der Nachricht in mehrere Teile erreicht werden. Die Nachricht sei x.
Bob verschlüsselt nun

$$y = x^e \mod n$$

Alice kann dann wieder entschlüsseln mit

$$x' = y^s \mod n$$

Dies funktionert, da

$$(x^e)^s = x^{e \cdot s} = x^{k \cdot \varphi(n)+1} = x \cdot (x^{\varphi(n)})^k \equiv x \cdot 1^k \mod n$$

6: Graphen

Wir beschränken uns auf einfache ungerichtete Graphen.

Definition 14: Einfacher ungerichteter Graph

Ein *einfacher ungerichteter Graph* ist ein Paar (V, E) wobei V die Menge der Knoten und $E \subseteq \binom{V}{2}$ die Menge der Kanten ist.

Definition 15: Komplementgraph

Für einen Graph $G = (V, E)$ ist der *Komplementgraph* der Graph $G' = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$.

Definition 16: Isomorphie

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ gibt, so dass für alle $u, v \in V_1$ gilt:

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$

Definition 17: Bipartiter Graph

Wenn die Knotenmenge V des Graphen $G = (V, E)$ so in zwei Teile V_1, V_2 aufgeteilt werden kann, dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ genau einer der beiden Knoten in V_1 und der andere in V_2 liegt, so spricht man von einem *bipartiten Graphen*.

Da eine Kante nach Definition eine zweielementige Menge ist, kann man für eine Kante e und einen Knoten v ob $v \in e$ gilt. Wir sagen dann u und e sind *inzident*.
Zwei Knoten sind adjazent (benachbart), wenn es eine Kante zwischen ihnen gibt, d.h. $\{u, v\} \in E$ bedeutet, dass u und v adjazent sind.
Der Grad des Knotens $u \in V$ ist die Anzahl der Kanten die zu u inzident sind.

Definition 18: Weg

Ein Weg (auch Pfad) in einem Graph (V, E) ist eine Folge von Knoten $(v_0, \dots, v_n)$ von Knoten $v_i \in V$ mit der Eigenschaft, dass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\{v_{i-1}, v_i\} \in E$$

Die Länge des Weges ist n, man zählt also die Anzahl durchlaufener Kanten.
In einem einfachen Weg sind alle Knoten verschieden.

Ein Weg heißt Eulerweg, wenn auf ihm jede Kante des Graphen genau einmal durchlaufen wird.

Definition 19: Kreis

Ein Kreis ist ein Pfad, bei dem Start- und Endknoten gleich sind.
In einem einfachen Kreis sind alle Knoten außer der erste und letzte verschieden.

Ein Eulerweg der gleichzeitig ein Kreis ist, heißt Eulerkreis.

Definition 20: Planarität

Ein Graph heißt planar, wenn er sich so in die Ebene einzechnen lässt, dass sich die Kanten nicht schneiden.

Eine Facette ist eine zusammenhängende Fläche, die von Kanten berandet ist, insbesondere ist das Äußere immer eine Facette.

6.1 Sätze zu Graphen

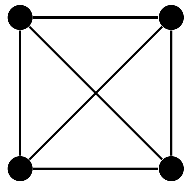
- Die Summe aller Knotengrade in einem ungerichteten Graphen ist immer gerade.
- In jedem endlichen Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.
- Ein zusammenhängender endlicher Graph hat genau dann einen Eulerpfad, wenn die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad maximal 2 ist. Ein Eulerkreis existiert genau dann, wenn alle Knoten geraden Grad haben.
- In endlichen zusammenhängenden planaren Graphen mit $n \geq 1$ Knoten, m Kanten und f Facetten gilt

  $$n - m + f = 2 \quad \text{bezeihungsweise} \quad n - m + f = z + 1$$

  für z Zusammenhangskomponenten. Wichtige Folgerungen hieraus sind
  - Ein planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten hat höchstens $3n - 6$ Kanten.
  - Ein planarer bipartiter Graph mit $n \geq 4$ Knoten hat höchstens $2n - 4$ Kanten
  - In jedem planaren Graph gibt es mindestens einen Knoten mit Grad kleiner oder gleich 5.
  - Der K_5 und der $K_{3,3}$ sind nicht planar.
- **Satz von Kuratowski** Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ enthält.

6.2 Wichtige Graphen und deren Eigenschaften

- Der K_4 ist der vollständige Graph mit 4 Knoten

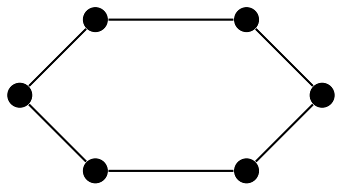
  Im K_n haben alle Knoten den Grad $n-1$. Die Graphen $K_2 = P_2, K_3 = C_3$ und K_4 sind planar, der K_5 jedoch nicht.

- Der P_5 ist der Pfad-Graph mit 5 Knoten

  Der P_n hat für $n \geq 2$ immer einen Eulerweg aber keinen Eulerkreis. Alle P_n sind planar.

- Der C_6 ist der Kreis-Graph mit 6 Knoten

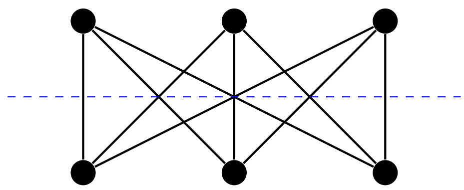
  Der kleinste Kreis-Graph ist der C_3.

  Der C_n hat immer einen Eulerkreis.

  Alle C_n sind planar.

  Im C_n hat jeder Knoten hat den Grad 2.

- Der $K_{3,3}$ ist der bipartite Graph mit jeweils 3 Knoten in einer Partition

  Im $K_{3,3}$ hat jeder Knoten den Grad 3.

  Der $K_{3,3}$ ist nicht planar.

7: Zahlen und deren Wachstum

7.1 Wachstum der Fakultät

$$\log(n!) \in \Theta(n \log n)$$

denn es gilt

$$\forall n \geq 2: \quad \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} < n! < n^n \text{ oder auch } e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n \cdot e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

7.2 Wachstum des Binomialkoeffizienten

Wir interessieren uns für die Binomialkoeffizienten der Form $\binom{2n}{n}$ bzw. $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (diese sind die Binomialkoeffizienten mit größtem Wert) für große n. Aus dem binomischen Lehrsatz folgt (mit $a = b = 1$), dass

$$\sum_k \binom{n}{k} = 2^n.$$

Damit wissen wir, dass die Binomialkoeffizienten im Durchschnitt von der Größenordnung $\frac{2^n}{n}$ sind. Damit folgt

$$\forall n \geq 3: \quad \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} > \frac{2^n}{n}$$

7.3 Wachstum des kgV

7.4 Fibonacci-Zahlen

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Sogenannte Dominostein-Interpretation der Fibonacci-Zahlen: Es stehen beliebig viele Dominosteine von zwei Sorten zu Verfügung, solche der Länge 1 und solche der Länge 2.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, damit eine Sequenz der Länge n zu legen? $\rightsquigarrow F_n$

7.4.1 Abschätzung der Fibonacci-Zahlen

Es gilt

$$F_n \leq 2^n \leq F_{2n}$$
$$\text{bzw. } 2^n \leq F_{2n} \leq 2^{2n}$$
$$\text{bzw. } (\sqrt{2})^n \leq F_n \leq 2^n$$

dies lässt sich durch Induktion leicht zeigen.
Es gilt

$$\mathtt{ggT}(F_m, F_n) = F_{\mathtt{ggT}(m,n)}.$$

7.5 Catalanzahlen