Simon König 3344789 - Klausurzettel
Turingmaschine: $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit $\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$
ATM: zusätzlich $t : Z \to \{\forall, \exists\}$
Endl. Automat: $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$
Gerich. Graph $G = (V, E), E = \left\{(v, w) \in V^2 \,\middle|\, \text{von } v \text{ zu } w\right\}$
Unger. Graph $G = (V, E), E = \{\{v, w\} \subseteq V \mid v, w \text{ sind verbunden}\}$

1 Berechenbarkeit

- **LOOP-Anweisungen**:
  - $x_i := x_j + c$ bzw. $x_i := x_j - c$ mit $c \in \mathbb{N}$
  - `LOOP` x_i `DO` P `END`
  - Hintereinanderausführung von LOOP-Programmen
- **Primitiv rekursive Funktionen**:
  - `s(n)`
  - `dec(n)`
  - `add(a,b)`
  - `sub(a,b)`
  - `mul(a,b)`
  - c_j^i=j
  - `even(n)`
  - `odd(n)`
  - `leq(a,b)`
  - `eq(a,b)`
  - `c(x,y)`
- **Turing-berechenbar (nicht LOOP)**:
  - Ω, nirgends definierte Funktion
  - $a(x, y)$, Ackermannfunktion
- **μ-Rekursion bzw. WHILE**:
  - Für eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ist

$$\mu f(x_2, \ldots, x_k) = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ \wedge f(n_0, x_2, \ldots, x_k) > 0 \;\; \forall n_0 < n\}$$

  - **Satz von Kleene**: Jede WHILE-berechenbare Funktion lässt sich mit einer WHILE-Schleife darstellen. Genauso bei μ-Rekursion mit einem μ-Operator.

2 Entscheidbarkeit

- $A \leq B$ und A *nicht* semi-entscheidbar, dann ist B ebenfalls nicht semi-entscheidbar. Ist B semi-entscheidbar, dann ist auch A semi-entscheidbar.
- **Dovetailing**: Simuliere Maschine M auf Eingabe $\omega(e(n))$ genau $f(n)$ Schritte lang, erhöhe n. Hierbei sei $\omega(n)$ die Funktion zur rekursiven Aufzählbarkeit. $e(c(a, b)) = a$ und $f(c(a, b)) = b$.
- **Satz von Rice**: $\mathcal{R}$ die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen. Die Menge

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\}$$

  ist unentscheidbar, wenn $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{R}$.
- Eine Sprache ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie sich auf H reduzieren lässt. (Vortragsübung)
- Für zwei kontextfreie Grammatiken sind unentscheidbar: Leerheit des Schnitts, Endlichkeit des Schnitts, Kontextfreiheit des Schnitts, Inklusion und Äquivalenz
- **Entscheidbarkeiten**:

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnitt
REG	✓	✓	✓	✓
DCFL	✓	✓	✓	X
CFL	✓	✓	X	X
CSL	✓	X	X	X
r.e.	X	X	X	X

- **Abschlusseigenschaften**:

	Schnitt	Vereinig.	Kompl.	Konkat.	Stern
REG	✓	✓	✓	✓	✓
DCFL	X	X	✓	X	X
CFL	X	✓	X	✓	✓
CSL	✓	✓	✓	✓	✓
r.e.	✓	✓	X	✓	✓

2.1 Entscheidbarkeitsprobleme

Spez Haltep	$K = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w\}$	semi
Allg Haltep	$H = \{w\#x \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } x\}$	semi
Haltep auf ϵ	$H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } \epsilon\}$	semi
PCP	$((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ zusammenpassen	semi
MPCP	Für alle Lösungen gilt $i_1 = 1$	semi
WA	Menge aller wahren arithm. Formeln	unentsch.
$\overline{WA}$	Menge aller falschen arithm. Formeln	unentsch.

3 Komplexität

- Wichtige Komplexitätsklassen
  - **PSPACE** $= \bigcup \text{DSPACE}(p) = \bigcup \text{NSPACE}(p)$
  - **NP** $= \bigcup \text{NTIME}(p)$
  - **P** $= \bigcup \text{DTIME}(p)$
  - **NL** $= \text{NSPACE}(\log n)$
  - **L** $= \text{DSPACE}(\log n)$
- $\text{co}\mathcal{C} = \left\{L \,\middle|\, \overline{L} \in \mathcal{C}\right\}$ und $\overline{\mathcal{C}} = \{L \mid L \notin \mathcal{C}\}$
- In den Platzklassen ist $\mathcal{O}$-Notation egal, Konstanten können vernachlässigt werden

$$\text{DSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \text{DSPACE}(f)$$
$$\text{NSPACE}(\mathcal{O}(f)) = \text{NSPACE}(f)$$

- In nichtdeterministischen Zeitklassen spielt die $\mathcal{O}$-Notation keine Rolle

$$\text{NTIME}(\mathcal{O}(f)) = \text{NTIME}(f)$$

- Bei deterministischen Zeitklassen gilt i.A. $\text{DTIME}(\mathcal{O}(f)) \neq \text{DTIME}(f)$, nur für größer als lineare Funktionen gilt Gleichheit d.h.

$$\text{DTIME}(\mathcal{O}(f)) = \text{DTIME}(f) \;\; f(n) \geq (1 + \epsilon)n \text{ für ein } \epsilon > 0$$

- **Satz von Hennie und Stearns**: Falls $\epsilon > 0, f(n) \geq (1 + \epsilon)n$, dann gilt

$$\text{DTIME}(f) \subseteq \text{DTIME}_{\text{2-Band}}(f \log f)$$

- Für alle $f(n) \geq n$ gilt für die Zeitklassen

$$\text{DTIME}(f) \subseteq \text{NTIME}(f) \subseteq \text{DSPACE}(f)$$

- Und für alle $f(n) \geq \log n$ gilt

$$\text{DSPACE}(f) \subseteq \text{NSPACE}(f) \subseteq \text{DTIME}(2^{\mathcal{O}(f)})$$

- **Satz von Immerman und Szelepcsenyi**: Falls $f \in \Omega(\log(n))$, gilt:

$$\text{NSPACE}(f) = \text{coNSPACE}(f)$$

- Alle deterministischen Zeit- und Platzklassen sind gegen Komplement abgeschlossen:

$$\text{DSPACE}(f) = \text{coDSPACE}(f)$$
$$\text{DTIME}(f) = \text{coDTIME}(f)$$

- **Satz von Savitch**: Sei $s \in \Omega(\log(n))$, dann gilt

$$\text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DSPACE}(s^2)$$

- Sei $s_1 \notin \Omega(s_2)$ und $s_2 \in \Omega(\log(n))$ und beide platzkonstruierbar, dann gilt der **Platzhierarchiesatz**

$$\text{DSPACE}(s_2) \setminus \text{DSPACE}(s_1) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \text{DSPACE}(s_1) \subsetneq \text{DSPACE}(s_2)$$

- Sei $t_1 \log(t_1) \notin \Omega(t_2)$ und $t_2 \in \Omega(n \log(n))$ und beide zeitkonstruierbar, dann gilt der **Zeithierarchiesatz**

$$\text{DTIME}(t_2) \setminus \text{DTIME}(t_1) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \text{DTIME}(t_1) \subsetneq \text{DTIME}(t_2)$$

- **Lückensatz von Borodin**: Für jede totale berechenbare Funktion $r(n) \geq n$ existiert effektiv eine totale berechenbare Funktion $s(n) \geq n + 1$ mit

$$\text{DTIME}(s(n)) = \text{DTIME}(r(s(n)))$$

- Translationtechnik:
  Die Translationssätze werden verwendet, Separationen von größeren zu kleineren Klassen bzw. Gleichheiten oder Inklusionen von kleineren zu größeren Klassen zu übertragen. Die durch Padding aufgebläte Sprache ist $Pad_f(L) := \left\{w\$^{f(|w|)-|w|} \,\middle|\, w \in L\right\}$.
  1. Für zwei Funktionen $f(n), g(n) \geq n$ gilt der **Translationssatz für Zeitklassen**:

$$Pad_f(L) \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \text{DTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \text{NTIME}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \text{NTIME}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

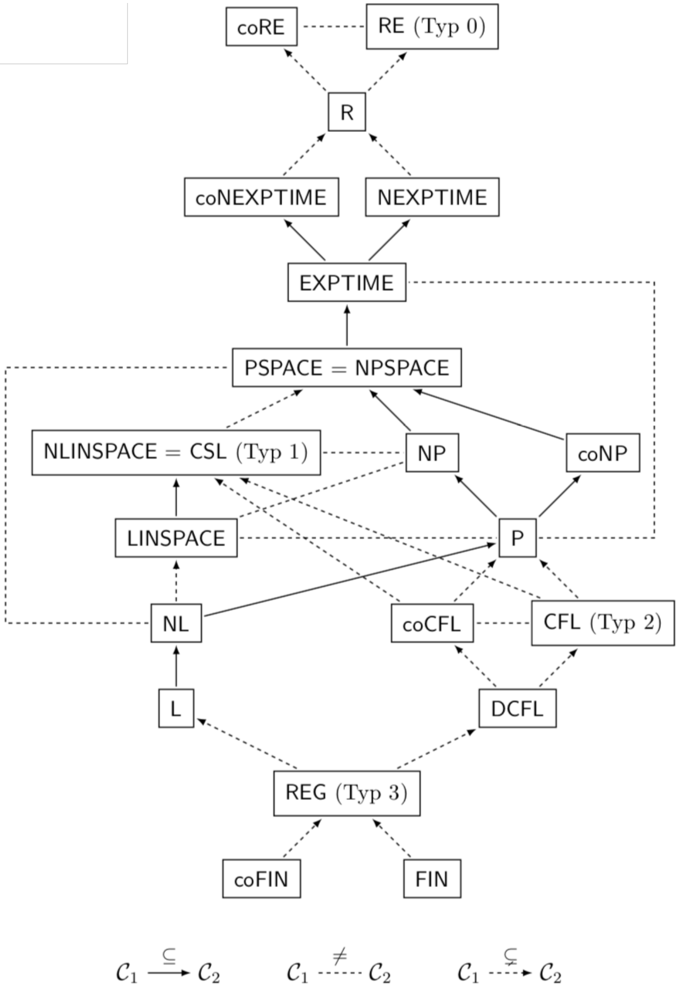
  2. Und analog für $g \in \Omega(\log)$ und $f(n) \geq n$ der **Translationssatz für Platzklassen**:

$$Pad_f(L) \in \text{DSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \text{DSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$
$$Pad_f(L) \in \text{NSPACE}(\mathcal{O}(g)) \Leftrightarrow L \in \text{NSPACE}(\mathcal{O}(g \circ f))$$

- Reduktionen
  1. Für zwei beliebige Sprachen A und B gilt

$$A \leq_{\log} B \Rightarrow A \leq_p B \Rightarrow A \leq B \Rightarrow A \leq_T B$$

  2. $A \leq_p B \wedge B \in$ **P** $\Rightarrow A \in$ **P**
  3. $A \leq_p B \wedge B \in$ **NP** $\Rightarrow A \in$ **NP**
  4. A **NP**-vollständig, dann: $A \in$ **P** $\Leftrightarrow$ **P** $=$ **NP**



3.1 Vollständige Probleme

- Folgende Probleme sind **NP**-vollständig bezüglich $\leq_p$:

SAT	$\{w \mid w$ kodiert eine erfüllbare Formel$\}$
3KNF-SAT	KNF mit max. 3 Literalen pro Klausel erfüllbar?
CLIQUE	Enthält ein Graph eine Clique der Größe k?
FÄRB.	Gibt es eine Knotenfärbung mit k Farben?

- **QBF** ist **PSPACE**-vollständig.
- **P**-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist
  1. **CVP**: Circuit Value Problem, Wert eines Schaltnetzes bestimmen
  2. L_{cfe}: Leerheit kontextfreier Sprachen
- **NL**-vollständig bezüglich $\leq_{\log}$ ist
  1. **GAP**: existiert ein Pfad vom source-Knoten zum target-Knoten in einem gerichteten Graphen?
  2. **2KNF-SAT**

4 Beispiele

- Verhältnis von $\mathrm{NSPACE}(2^n)$ und $\mathrm{DSPACE}(5^n)$:

$$\mathrm{NSPACE}(2^n) \overset{\text{S.v.S.}}{\subseteq} \mathrm{DSPACE}(2^{2n})$$
$$= \mathrm{DSPACE}(4^n) \overset{\text{P.H.S.}}{\subsetneq} \mathrm{DSPACE}(5^n)$$

- **Folgerung mit Translationssatz**, **P** $\subseteq$ **L** $\Rightarrow$ **EXPTIME** $\subseteq$ **PSPACE**:
  Sei $L \in$ **EXPTIME** $\Rightarrow L \in \mathrm{DTIME}(2^{n^k})$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist mit der Translationsfunktion $f(n) = 2^{\frac{n^k}{k}}$ (denn $f(n^k) = 2^{k*(n^k)*\frac{1}{k}} = 2^{n^k}$) nach dem Translationssatz für Zeitklassen $Pad_f(L) \in \mathrm{DTIME}(n^k)$. Nach der Annahme **P** $\subseteq$ **L** folgt dann, $Pad_f(L) \in \mathrm{DSPACE}(\log n)$. Mit dem Translationssatz für Platzklassen und der selben Funktion folgt, $L \in \mathrm{DSPACE}(\log f(n)) = \mathrm{DSPACE}(\log(2^{\frac{n^k}{k}})) = \mathrm{DSPACE}(\frac{n^k}{k}) \subseteq$ **PSPACE**. □
- **Ungleichheit mit dem Translationssatz**, $\forall c \in \mathbb{N} : \mathrm{NSPACE}(n^c) \neq$ **NP**:
  Annahme: $\exists c \in \mathbb{N} : \mathrm{NSPACE}(n^c) =$ **NP**. Sei $L \in \mathrm{NSPACE}(n^{3c})$ beliebig. Mit $f(n) = n^3$ folgt dann, $Pad_f(L) \in \mathrm{NSPACE}(n^c) \subseteq$ **NP** nach Annahme. Es existiert also ein $k \in \mathbb{N} : Pad_f(L) \in \mathrm{NTIME}(n^k)$, nach Zeithierarchiesatz ist $L \in \mathrm{NTIME}(n^{3k})$. Es wurde gezeigt:

$$\mathrm{NSPACE}(n^c) \subseteq \textbf{NP} \Rightarrow \mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \textbf{NP}$$

Damit folgt aber nach Annahme

$$\mathrm{NSPACE}(n^{3c}) \subseteq \textbf{NP} = \mathrm{NSPACE}(n^c)$$

Was im Widerspruch zum Platzhierarchiesatz steht. □