

理想 (ideal)

李代数 L 的子空间 I , 若满足以下性质:

$\forall x \in L$, 若 $y \in I$, 则有 $[x, y] \in I$

(由于 $[x, y] = -[y, x]$, 所以 x, y 的位置, 只要一个在 L , 另一个在 I 中的并不重要).

$0 \in L$ 是显然的理想, 我们说它是平凡的.

第一个例子: 中心 $Z(L) = \{z \in L : [x, z] = 0, \forall x \in L\}$

验证一下: $[x, 0] = 0, 0 \in Z(L)$

$y \in Z(L), [x, y] = 0, 0 \in Z(L)$.

若 L 是 abel 群, 计算: $Z(L) = L$. ($xy = yx$)

导代数: 包含了所有 $[x, y] (\forall x, y \in L)$ 的线性组合.

它当然是一个理想.

I 与 J 为两个理想, 则 $I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$

亦为理想: $[z, x+y] = [z, x] + [z, y] \in I+J$

$[IJ] = \{\sum x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J\}$

亦为理想: $a \in [I, J]$

涉及抽象概念, 跳过.

从理想入手来研究李代数:

单 (simple): L 除了自己, 0 , 无理想, 且: $[L, L] \neq 0$.

即, $Z(L) = 0, [L, L] = L$.

$$\text{e.g. } L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \text{ 有基: } x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[x, y] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, [h, x] = \begin{bmatrix} 2 \\ 2x \end{bmatrix}, [h, y] = \begin{bmatrix} -2 \\ -2y \end{bmatrix}$$

这就是乘法表.

假設 \mathbb{I} 为 L 一个理想, $\mathbb{I} \neq 0, \mathbb{I} \neq L$.

$\forall \alpha \in L, \alpha = ax + by + ch$.

$$[x, [\alpha, ax + by + ch]] = -2bx \in \mathbb{I}$$

$$[y, [\alpha, ax + by + ch]] = -2ay \in \mathbb{I}.$$

若, $a, b \neq 0$, 则 $y, x \in \mathbb{I}, [x, y] = h \in \mathbb{I}$.
 $\mathbb{I} = L$, 矛盾!

$$\text{如 } a = b = 0, \text{ 则 } h \in \mathbb{I}. [x, h] = -2x \in \mathbb{I}$$

$$[y, h] = 2y \in \mathbb{I}$$

$\mathbb{I} = L$, 矛盾!

故 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ 单.

若 L 不单, 则可分解出一个合适的理想 \mathbb{I} , 从而得到一个低维的李代数.

商代数: L / \mathbb{I} (\mathbb{I} 为理想).

乘法: $[\alpha + \mathbb{I}, \gamma + \mathbb{I}] = [\alpha, \gamma] + \mathbb{I}$.

因为: $x' = x + \frac{u}{\epsilon \mathbb{I}}$ $y' = y + \frac{v}{\epsilon \mathbb{I}}$

$$(x+u, y+v) = (x, y) + \underbrace{(u, y) + (x, v)}_{\text{It's}} + (u, v)$$

正规化子：子代数 KCL 的正规化子：

$$\underline{N}_L(K) = \{x \in L : (L \times K) \subseteq K\}.$$

$N_L(K)$ 是一个子代数: $\forall x, y \in N_L(K), z \in K$

$$[x, z] \in K, [y, z] \in K.$$

$$[(x, y), z] = -[y, z]_x - [z, x]_y \in K.$$

若 $K = N_L(K)$, 則稱其為自正規子 (self-normalizer).

中心化子： L 子集 X 的中心化子：

$$C_L(x) = \{x \in L : [x, x] = 0\}$$

这仍为一个子代数.

$$\forall x, y \in C_L(x), \exists z \in X.$$

$$[(x, y), z] = -\underbrace{[(y, z), x]}_0 - \underbrace{[(z, x), y]}_0 = 0.$$

同态与表示

线性变换: $\phi : L \rightarrow L'$ (当然李代数了)

若 $\phi([x:y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ 则称 ϕ 为同态.

零範： $\ker \phi = 0$. 同构：双单又滿.

湯鼎： $\Im \phi = U$

$\text{Ker } \phi$ 中元 $[x]$ 的像数: $\phi([x]) = 0$, $y \in L$, $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = 0$.

$\text{Im } \phi$ 为 L' 子代数.

典范映射: $x \rightarrow x + \bar{1}$

推论:

(a): $\phi: L \rightarrow L'$ 是李代数的同构, 则:

$$L/\text{Ker } \phi \cong \text{Im } \phi.$$

I 为 L 中理想, $I \subset \text{Ker } \phi$, 则存在唯一同态:

$\psi: L/I \rightarrow L$ 使得下图交换 (π 为典范映射).

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L' \\ \pi \searrow & \uparrow \psi & \\ & L/I & \end{array}$$

同态定理

定理 (同态基本定理): 映射 $f: R \rightarrow R'$ 是一个环同态, 则存在唯一单同态 $\bar{f}: R/\text{ker}(f) \rightarrow R'$, 使得: $f = \bar{f} \cdot \varphi$, 其中: $\varphi: R \rightarrow R/\text{ker}(f)$ 是商同态.

证明:

令 $I = \text{ker}(f)$, $\bar{f}(a+I) = f(a), \forall a+I \in R/I$, 可以验证 \bar{f} 确实是映射:
 $a+I = b+I \Rightarrow a-b \in I \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow \bar{f}(a+I) = \bar{f}(b+I)$

另一方面: $\bar{f}(a+I) = \bar{f}(b+I) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a-b \in I \Rightarrow a+I = b+I$, 所以 \bar{f} 是单射, 另外, 可以验证它是同态, 且 $f = \bar{f} \cdot \varphi$.

唯一性: 若还有单同态 $g: R/I \rightarrow R'$ 满足 $f = g \cdot \varphi$, 则
 $\forall a+I \in R/I, g(a+I) = g \cdot \varphi(a) = f(a) = \bar{f}(a+I)$

从而 $g = \bar{f}$.

Proposition 1.30. Quotient Rings: Universal Property

Suppose that R is a ring and I is an ideal of R . The quotient ring is the ring R/I with the canonical projection $\pi: R \rightarrow R/I$ satisfying the following universal property:

For any ring S and ring homomorphism $f: R \rightarrow S$ such that $I \subseteq \text{ker } f$, there exists a unique ring homomorphism $\tilde{f}: R/I \rightarrow S$ such that $f = \tilde{f} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ R/I & & \end{array}$$

Moreover, any ring satisfying the universal property is uniquely determined up to ring isomorphism.

(b)、 I 、 J 为 L 的理想, $I \subset J$, 则 J/I 为 L/I 的理想.

且: $(L/I)/(J/I)$ 同构于 L/J

$\pi : L \rightarrow L/J$, $I \subseteq J = \ker \pi$

π 诱导满射 $\bar{\pi} : L/I \rightarrow R/J$, $\ker \bar{\pi} = J/I$.

(c) I, J 为 L 的理想, 则 $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$ 有自然同构.

考虑: $J \xrightarrow{c} J+I \xrightarrow{\pi} (J+I)/I$.

$$\ker(\pi \circ c) = I \cap S.$$

表示: 同态中: $L \rightarrow gl(V)$.
 L 有限维, V 维数任数.

e.g. $ad : L \rightarrow gl(L)$.

保括号: $[ad_x, ad_y]z = ad_x ad_y z - ad_y ad_x z$.

$$= [x, [y z]] - [y [x z]]$$

$$= [x [y z]] + [[x z] y]$$

$$= [[x y] z] \quad (\text{by Jacobi identity}).$$

$$= ad_{[x y]} z.$$

$\ker ad$: $x \in \ker ad$, 则 $\forall y \in L$, $[x y] = 0$.

即 $\ker ad = Z(L)$.

结论: 若 L 是单的, 则 $Z(L) = 0$, $ad : L \rightarrow gl(L)$ 是单射.

故任意单的李代数同构于 线性李代数.

($gl(L)$ 的子代数).

自同构: L 到 L 自己的同构, 记作 $\text{Aut } L$.

(Automorphism).

重要的例子: $L \subset gl(V)$ 为线性李代数.

若 $g \in GL(V)$ 为 V 中可逆自同态, $g L g^{-1} = L$, 则

$x \mapsto g x g^{-1}$ 是 L 的自同构. 如: $L = gl(V)$ 或 $sl(V)$.

e^{δ} : 若 δ^k 零: $e^{\delta} = 1 + \frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!}$

且有 $e^{\delta_x} \cdot e^{\delta_y} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i x}{i!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\delta^j y}{j!} \right).$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \left(\sum_{i=0}^n \left(\frac{\delta^i x}{i!} \right) \left(\frac{\delta^{n-i} y}{(n-i)!} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{\delta^n (xy)}{n!} = e^{\delta(xy)}$$

e^{δ} 的逆: $\eta = e^{\delta} - 1$, 则其逆为: $1 - \eta + \eta^2 - \dots - \eta^{k-1}$

$$e^{\delta}(1 - \eta + \eta^2 - \dots - \eta^{k-1})$$

$$= (\eta + 1)(1 - \eta + \dots + \eta^{k-1})$$

$$= (\eta - \eta^2 + \eta^3 - \dots - \eta^k) + 1 - \eta + \eta^2 - \dots - \eta^{k-1}$$

$$= 1 + (-1)^{k-1} \cdot \eta^k.$$

$$\eta^k = (e^{\delta} - 1)^k = \left(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{\delta^n}{n!} \right)^k = 0.$$

若一个同构可被写成 $e^{\text{ad } x}$ 形式, 且 $\text{ad } x$ 零, 则称其为 内的 (inner)

$\text{Aut } L$ 中, 由内同构生成的子群记作 $\text{Int } L$.

它是正规子群: 若 $\phi \in \text{Aut } L$, $x \in L$, 则 $\phi(\text{ad } x)\phi^{-1} = \text{ad } \phi(x)$

(因为 $\phi \text{ad}_x \cdot y = \phi([x \cdot y]) = (\phi(x) \cdot \phi(y)) = \text{ad}_{\phi(x)} \cdot \phi(y)$
 $\phi \text{ad}_x \cdot \phi^{-1} = \text{ad}_{\phi(x)}$)

$$\text{故 } \phi \cdot e^{\text{ad}_x} \phi^{-1} = e^{\text{ad}_{\phi(x)}}$$

e.g. $L = sl(2, \mathbb{F})$, 取标准基, 令 $G = e^{\text{ad}_x} e^{\text{ad}_{f(y)}} \cdot e^{\text{ad}_y}$
 $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

则 $\sigma \in \text{Int } L$.

$$e^{\text{ad}_x} = 1 + \text{ad}_x \quad e^{\text{ad}_{f(y)}} = 1 + \text{ad}_{f(y)}$$

$$\sigma(x) = -y \quad \sigma(y) = -x \quad \sigma(h) = -h.$$

可角解与零零的李代数:

首先定义这样-列 L 的理想:

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(1)} = [L, L] = \text{Span} \{[x \cdot y] : x, y \in L\}$$

$$L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$$

若 $\exists n_0$ s.t. $L^{(n_0)} = 0$, 则称其为可角解的.

e.g. abel 的则可角解, 单的就不可角解(因为 $[L, L] = L$).

e.g. $t(n, \mathbb{F})$ (上三角阵) 其基为 e_{ij} ($i \leq j$).

维数: $\frac{n(n+1)}{2}$. 考虑直接计算基的指数.

$$[e_{ii}, e_{il}] = e_{il} \quad (i < l), \text{ 故 } t(n, \mathbb{F}) \subset [L, L]$$

($t(n, \mathbb{F})$ 是严格上三角阵). 而 $t(n, \mathbb{F}) = d(n, \mathbb{F}) + n(n, \mathbb{F})$.

$d(n, \mathbb{F})$ 为 abel 的, 故 $[L, L] = t(n, \mathbb{F})$

现仅需考虑 $n(n, \bar{A})$ 是否可解.

$i < j, k < l$, 不失一般性令 $i = l$.

现对 e_{ij} 定义一个水平: $d = j - i$.

$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il} \quad (若 j = k).$

$$= 0 \quad (\text{otherwise}).$$

$i < j = k = l$.

此时 $l - i \geq 2$.

则 $[L, L]$ 中的元素均为 $d \geq 2$ 的 e_{ij}

$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il} \quad (j = k)$

$$= 0 \quad (\text{otherwise})$$

$i < j = k = l. \quad l - i \geq 4.$

一直这样下去, 总会变成 0 的.

关于可解性的推论:

(a). 若 L 可解, 则 L 的子代数, 同态的像亦可解.

证: 同态是保括号的.

(b). 若 I 是 L 的一个可解理想, 且 L/I 可解, 则 L 也可解.

证: $(L/I)^{(n)} = 0$. 考虑典范同态: $\pi: L \rightarrow L/I$.

$\pi(L^{(n)}) = 0. \quad L^{(n)} \subset I = \ker \pi. \quad I^{(n)} = 0$

故 L 可解.

(c)、若 I, J 为 L 的可解理想, 则 $I+J$ 亦可解.

证 $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$

有同态 $\phi: I \rightarrow I/(I \cap J)$ (因为 $I \cap J$ 仍为理想).

I 可解, 知 $I/(I \cap J)$ 可解.

故 $(I+J)/J$ 可解.

有同态: $\phi_2: I+J \rightarrow (I+J)/J$ (因为 $I+J$ 仍为理想).

故 $I+J$ 可解.

应用: L 为李代数, S 是最大的可解理想 (不存在包含它的可解理想.)

若 J 为任一可解理想, 由最大性, 知 $J+S=S$, 或 $J \subset S$
故 S 是唯一的! 这样的 S , 称为 L 的根 (radical).

记作 $\text{Rad } L$.

如 $\text{Rad } L=0$, 则 L 是半单的 (semi-simple)

e.g. 一个单的李代数一定是半单的.

因为其理想仅有自己与 0 , 且 L 不可解.

$L=0$ 也是半单的.

对李代数 L , $L/\text{Rad } L$ 也是半单的.

(因为: 设 J 为 $L/\text{Rad } L$ 的可解理想, $p: L \rightarrow L/\text{Rad } L$

为商映射. $U=p^{-1}(J)$ 是 L 中, 包含 $\text{Rad } L$ 的一个理想.

$U/\text{rad } L \cong J$ $\text{rad } L$ 可解, J 可解, 故 $U/\text{rad } L$ 可解.
 $\text{ker } p \subset \text{rad } L$.

则 U 可解 $\text{rad } L$ 为最大可解理想, 则 $U=\text{rad } L$.

$U/\text{rad } L = 0$, $\bar{J} = 0$, $L/\text{rad } L$ 半单).

零：定义 L 的一列理想： $L^0 = L$, $L' = [L, L^0]$, $L'' = [L, L']$

$L^n = [L, L^{n-1}]$. 称为降中心列(lower central series).
如 $\exists n$ s.t. $L^n = 0$, 则称 L 零.

写开来： $[x_1, [x_2, [\dots [x_n, y]] \dots]] = 0$ $\underset{x: \text{任意}}{\text{adx}_1 \text{adx}_2 \cdots \text{adx}_{n-1} y = 0}$

abel 的一定零. 虽然, $L^{(i)} \subset L^i$ 故而零的一定
可解. 反过来不一定对.

e.g. $L = t(n, \mathbb{F})$ (上三角阵).

由于 $[e_{ii}, e_{jj}] = e_{jj}$, $e_{ii} \notin [L, L]$,

知： $L^n = L' = n(n, \mathbb{F})$ (严格上三角阵).

推论：若 L 是一个李代数.

(a) 若 L 零, 则 L 的子代数、同态的像也是零的.

(b) 若 $L/Z(L)$ 零, 则 L 亦零.

证：知 $\exists n$ s.t. $L^n \subset Z(L)$, 则 $L^{n+1} = [L, L^n] = 0$.

(c) 若 L 非 0 且零, 则 $Z(L) \neq 0$

如 $[L, L^n] \neq 0$, $[L, L^{n+1}] = 0$, 则 $Z(L) = L^{n+1}$.

若 L 是零的, 则 $\exists n$, $\underbrace{\forall x \in L, (\text{ad } x)^n = 0}$.
称为 ad-零.

反过来也对：

Engel 定理：如 L 所有元素均为 ad-零, 则 L 零.

Lemma： $x \in gl(V)$ 为一个零的自同态, 则 $\text{ad } x$ 亦零.

证： $\text{ad } x y = xy - yx = Ax y - P_x y$

$\text{ad } x = A - P_x$ 因为 $x^n = 0$, 知 $A^n - P_x^n = 0$.

$$ad_x = \lambda_x - \rho_x$$

$$\lambda_x \circ \rho_x \text{ 互换: } \lambda_x \rho_x y = xyx \quad \rho_x \lambda_x y = xyx$$

$$(ad_x)^{2n} = (\lambda_x - \rho_x)^{2n} = 0.$$

(这个 Lemma 反过来不一定对, e.g. $x = \text{id}_V$)

Thm 1: 全 L 为 $gl(V)$ 的子代数, V 有限维。若 L 由零的自同态组成, $V \neq 0$, 则存在非零向量 $v \in V$ s.t. $\forall x \in L$, $xv = 0$

证: 归纳. $\dim L = 1$, 显然.

$\dim L = n$ 时, 取 L 的极大真子代数 K . $\dim L/K < n$.

def: $\varphi: K \rightarrow gl(L/K)$.

$\forall x \in K: \varphi(x): y+K \rightarrow [x, y]+K$. (φ 就是 $\overline{\text{ad}}$.)

若 $y_1 - y_2 \in K$, 则 $[x, y_1] - [x, y_2] = [x, y_1 - y_2] \in K$.

$$\varphi(x) \cdot (y_1 + K) = \varphi(x) \cdot (y_2 + K)$$

故 φ 定义合理, $\varphi \in gl(L/K)$.

$\forall x_1, x_2 \in K, y \in L: \varphi([x_1, x_2])(y+K) = [\bar{[x_1, x_2]}y] + K$.

$$\begin{aligned} & [\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \cdot (y+K) = ([\varphi(x_1)\varphi(x_2) - \varphi(x_2)\varphi(x_1)])(y+K) \\ &= [\bar{x_1}, \bar{[x_2, y]}] - [\bar{x_2}, \bar{[x_1, y]}] + K \\ &= [\bar{[\bar{x_1}, \bar{x_2}]}y] + K. \end{aligned}$$

$$\text{则 } \varphi([\bar{x_1}, \bar{x_2}]) = [\varphi(\bar{x_1}), \varphi(\bar{x_2})]$$

$$\dim \varphi(K) \leq \dim K < \dim L.$$

由归纳假设, $\exists 0 \neq u+K \in L/K, \forall x \in K$.

$$\overline{\text{ad}}[\bar{x}, u+K] = [\bar{x}, u] + K = 0 \quad [\bar{x}, u] \in K$$

$u \in N_L(K)$. 但 $u \notin K$, 故 $K \subsetneq N_L(K)$.

由 K 极大性, $N_L(K) = L$.

则 K 为 L 理想.

取 $\alpha \in L - K$, $\text{If } \alpha$ 是子代数. 故 $\text{If } \alpha \subset K$

$$[K \oplus \text{If } \alpha, K \oplus \text{If } \alpha] \subseteq K \subseteq K \oplus \text{If } \alpha.$$

故 $K \oplus \text{If } \alpha$ 为 L 中包含 K 子代数. 则 $L = K \oplus \text{If } \alpha$.

由归纳假设: $\exists 0 \neq v \in V$, $\forall x \in K, x(v) = 0$.

$$W := \{v \in V : \forall x \in K, x(v) = 0\}$$

$\forall x \in K, y \in L, v \in W$.

$$x \cdot (y(v)) = \underbrace{[x \cdot y]}_{\in K}(v) + y(\underbrace{x(v)}_0)$$

则 W 为 L 不变. 故 $\alpha(W) \subseteq W$. α 零, $\alpha|_W$ 有特征向量 $v \in W$, 故 $\forall x \in L, x(v) = 0$.

Engel Thm: L 为 If 上有限维李代数, L 零 $\Leftrightarrow \forall x \in L, \text{ad}_x$

\Rightarrow : 已证. 零.

\Leftarrow : $\dim L = 1$: 成立.

设对 $\dim L < n$ 均成立. $\text{ad}: L \rightarrow \text{gl}(L)$.

$\forall x \in L$, ad_x 为 L 上零同态.

$\exists y \in L$ s.t. $\forall x \in L, [x \cdot y] = 0$.

$y \in Z(L)$ $Z(L) \neq 0$.

$\dim(L/Z(L)) < \dim L$

$\forall \bar{x} = x + Z(L), \text{ad}_{\bar{x}}$ 零. 则 $L/Z(L)$ 零.

证毕：

定义： V 有限维，flag是一串子空间：

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V, \dim V_i = i.$$

$x \in \text{End } V.$

若： $xV_i \subset V_{i+1}$, 则说 x 在 flag 下不衰.

推论： L 为零李代数，则 $\exists \text{ flag} \subset V$. $xV_i \subset V_{i+1}, \forall i$.
也就是说，存在 V -组基，使 L 的矩阵为严格上三角.

证：由 Engel 定理， $\exists v \in V, v \neq 0, Lv = 0$.

$V_1 = \text{span } v, W = V/V_1$. 用维数归纳即可.

$\dim V = 1$ 当然成立，该对于 $\dim V < n$ 均成立.

$\dim W < n$. 则 $\exists 0 = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{n-1} = W$.
拉回到 V 中即可.

Lemma: L 零零， K 为 L 理想，若 $K \neq 0$ ，则 $K \cap Z(L) \neq 0$,

