Redukcja do postaci trójdiagonalnej symetrycznej

Niech $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T$.

Niech teraz

$$\mathbf{P}_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & {}^{(N-1)}\mathbf{P}_1 & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \tag{26}$$

gdzie ${}^{(N-1)}\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ jest transformacją Householdera, zbudowaną na pierwszej kolumnie macierzy $\mathbf{A}_1$, poczynając od drugiego (poddiagonalnego) elementu. Cała macierz $\mathbf{P}_1$ jest ortogonalna.

Obliczam

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1\mathbf{P}_1^T = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{27}$$

W następnym kroku tworzymy

$$\mathbf{P}_2 = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & {}^{(N-2)}\mathbf{P}_2 & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right] \tag{28}$$

Obliczam

$$\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\mathbf{P}_2^T = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{29}$$

Niech $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u} \neq 0$. Tworzymy macierz

$$\mathbf{P} = \mathbb{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}\,. \tag{38}$$

Niech teraz w (38)

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \mp \|\mathbf{x}\|\,\hat{\mathbf{e}}_1\,, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 &= \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 &= \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3 \end{aligned}$$

....

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{R}_{n-1}\mathbf{Q}_{n-1} = \mathbf{Q}_n\mathbf{R}_n \tag{22}$$

Jak pamiętamy[*], faktoryzację *QR* macierzy trójdiagonalnej, symetrycznej można znaleźć za pomocą obrotów Givensa w czasie liniowym:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_{N-1}\cdots\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\mathbf{A}\,, \tag{23a}$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{G}_1^T\mathbf{G}_2^T\cdots\mathbf{G}_{N-1}^T}_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}\,, \tag{23b}$$

a wobec tego

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{Q} = \underbrace{\mathbf{G}_{N-1}\ldots\underbrace{\mathbf{G}_2\,\underbrace{\mathbf{G}_1\mathbf{A}\mathbf{G}_1^T}\,\mathbf{G}_2^T}\ldots\mathbf{G}_{N-1}^T} \tag{23c}$$

Faktoryzacja *QR* macierzy trójdiagonalnej symetrycznej

Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, trójdiagonalną symetryczną

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & d & e & & \\ & e & f & g & \\ & & g & h & l \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{52}$$

Zadziałajmy na nią macierzą Givensa taką, aby zerowała drugi element pierwszej kolumny

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & & & \\ -s_1 & c_1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}\,. \tag{51}$$