$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Wzór Shermana-Morrisona

Twierdzenie: Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$ oraz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$. Niech $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Wówczas

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}. \tag{59}$$

Niech $\mathbf{u} = \mathbf{v} = [1, 0, 0, 0, 1]^T$. Wówczas

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{60}$$

Niech teraz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{61}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} = \left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\mathbf{b}$$

Algortym wygląda następująco:

(a) Rozwiąż równanie

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \tag{64a}$$

(b) Rozwiąż równanie

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{u} \tag{64b}$$

(c) Oblicz

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{z}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{q}}\,\mathbf{q}\,. \tag{64c}$$