$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{bmatrix} \tag{3}
$$

Rozpatrzmy układ równań:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{1a}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{1b}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{1c}$$

Przepiszmy ten układ w postaci

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \tag{2a}$$
$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \tag{2b}$$
$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \tag{2c}$$

Gdyby po prawej stronie (2) były “stare” elementy x_j, a po lewej “nowe”, dostalibyśmy metodę iteracyjną

Metoda gradientów sprzężonych, *Conjugate Gradients*, CG

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symetryczna, dodatnio określona, $\mathbf{x}_1$ — początkowe przybliżenie rozwiązania równania (12), $0 < \varepsilon \ll 1$.

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1,\, \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 \\
\textbf{while } \|\mathbf{r}_k\| > \varepsilon \\
\qquad \begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T\mathbf{A}\mathbf{p}_k} \\
\mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k \\
\beta_k &= \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T\mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k} \\
\mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k
\end{aligned} \\
\textbf{end}
\end{array}
\tag{13}
$$