家用理论物理教程[1]

Courses of Theoretical Physics

Shunz Dai[2]

Individual, Shenzhen, China

shunzdai@outlook.com

[1]Update: 2023 年 4 月 30 日

[2]*Author Website*

目录

PART

I

微分几何

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Section 1

联络

对于任意标量场$\phi \in \mathit{\Gamma}(T_{(0,0)}M)$, 其外微分

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \in \mathit{\Gamma}(T_{(0,1)}M), \tag{1.1}$$

这意味着$d\phi$仍是张量丛截面的元素, 用学物理家的话来说也就是$d\phi$仍然满足张量的变换规律.

一个自然的问题是, 对于切矢量场或余切矢量场, 它们的外微分是否仍然是张量丛截面的元素? 但问题就出在这, 外微分算子是一个定义在外形式丛截面上的线性算子, 而切矢量场不是外形式丛截面的元素, 因此我们无法对一个切矢量场求外微分;余切矢量场是外形式丛截面的元素, 而外形式丛只是协变张量丛的子集, 因此我们无法通过外微分运算得到一个非全反对称的高阶协变张量场. 这些引申出的问题意味着我们需要推广外微分算子, 并期望得到一个定义在一般张量丛截面$\mathit{\Gamma}(T_{(p,q)}M)$上的线性微分算子, 使我们能对那些不在外形式丛截面中的张量场进行“微分”运算. 这样构造的线性微分算子被称为**仿射联络**.

Remark 1微分形式$\omega \in \mathit{\Gamma}(\Lambda^1(M^*))$在局部坐标系改变时满足

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \omega'_\nu dx'^\nu, \tag{1.2}$$

我们对(1.2)求全微分得到

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega'_{\nu} \wedge dx'^{\nu} \\ &= d\left(\omega_{\mu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right) \wedge dx'^{\nu} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} d\omega_{\mu} \wedge dx'^{\nu} + \omega_{\mu} d\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right) \wedge dx'^{\nu} \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \omega_{\mu}\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}\partial x'^{\nu}}\right) dx'^{\rho} \wedge dx'^{\nu} \\ &= \frac{\partial \omega'_{\nu}}{\partial x'^{\rho}} dx'^{\rho} \wedge dx'^{\nu}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中

$$\frac{\partial \omega'_{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \equiv \frac{\partial \omega_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}.$$

注意到(1.3)中产生了一个二阶偏微分项, 与张量的变换规律对比可知, 这一项破坏了张量的变换规律. 但外微分形式场的全反对称特性可以消除掉这一项带来的影响, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_{\nu}}{\partial x'^{\rho}} dx'^{\rho} \wedge dx'^{\nu} &= 2\partial'_{[\rho}\omega'_{\nu]} dx'^{\rho} \otimes dx'^{\nu} \\ &= 2\left(\partial_{[\sigma}\omega_{\mu]}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \omega_{\mu}\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{[\rho}\partial x'^{\nu]}}\right) dx'^{\rho} \otimes dx'^{\nu} \\ &= 2\partial_{[\sigma}\omega_{\mu]}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\rho} \otimes dx'^{\nu}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

所以$d\omega$实际上仍是张量场. 但微分形式场说到底只是一种特殊的全反对称张量场, 对于一般的张量场, 我们无法通过张量场自身的对称性消除上述二阶偏微分项.

我们先讨论切丛$T_{(1,0)}(M)$上的仿射联络, 然后逐步构造出张量丛$T_{(p,q)}(M)$上的联络. 下面, 我们直接给出仿射联络的定义.

Definition 1 仿射联络是一个映射

$$D : \Gamma(T_{(1,0)}M) \to \Gamma(T_{(1,1)}M), \tag{1.5}$$

它满足下列条件:

1. 对任意的$A, B \in \Gamma(T_{(1,0)}M)$有 D(A+B)=D(A)+D(B);
2. 对任意的$A \in \Gamma(T_{(1,0)}M), \alpha \in \Gamma(T_{(0,0)}M)$有$D(\alpha A) = d\alpha \otimes A + \alpha D(A)$.

局部上, 仿射联络由一组1微分形式给出. 我们先来看自然切标架场$\{\partial_{\mu}\}$的联络, 命

$$D(\partial_{\mu}) = \omega^{\rho}{}_{\mu} \otimes \partial_{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} dx^{\nu} \otimes \partial_{\rho}, \tag{1.6}$$

其中$\omega^{\rho}{}_{\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} dx^{\nu}$, $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$称为**联络系数**, 它是局部坐标系中的光滑函数. 将$\omega^{\rho}{}_{\mu}$作为矩阵ω第ρ行第μ列的元素, 这样构造的矩阵ω称为**联络方阵**. 可见, 任意两个联络间的差异

完全体现在联络方阵上. 现在, 我们来看联络的变换规律. 在标架变换下, 由联络的定义立即得到

$$
\begin{aligned}
D(\partial'_\nu) &= D\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\partial_\mu\right) \\
&= d\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)\otimes\partial_\mu+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}D\left(\partial_\mu\right) \\
&= \left[d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho{}_\mu\right]\otimes\partial_\rho \\
&= \left[d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho{}_\mu\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}\right]\otimes\partial'_\sigma \\
&= \omega'^\sigma{}_\nu\otimes\partial'_\sigma,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

其中

$$
\omega'^\sigma{}_\nu = d\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\right)\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega^\rho{}_\mu\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho},
\tag{1.8}
$$

这就是联络方阵在局部标架场改变时的变换公式. 进一步展开(1.8)得到

$$
\Gamma'^\sigma{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\lambda\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho}+\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\rho},
\tag{1.9}
$$

这正是通常意义下的联络变换公式. 可见联络系数$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$并不是一个张量, 但引入它能使$D(\partial_\mu)$遵循张量的变换规律.

Remark 若使用全反对称化的技巧, 我们也能利用联络系数构造出一个张量. 我们将在稍后给出具体讨论.

切丛截面上的联络(1.5)在余切丛截面上诱导出一个从$\Gamma(T_{(0,1)}M)$到$\Gamma(T_{(0,2)}M)$的联络(仍记为D), 它由下式确定

$$
d\left(\partial_\mu, dx^\nu\right) = \left(D(\partial_\mu), dx^\nu\right)+\left(\partial_\mu, D(dx^\nu)\right).
$$

我们设$D(dx^\nu)=\omega^{*\nu}{}_\rho\otimes dx^\rho$, 得到

$$
(\partial_\mu, D(dx^\nu)) = (\partial_\mu, \omega^{*\nu}{}_\rho\otimes dx^\rho) = \omega^{*\nu}_\rho\delta^\rho_\mu = \omega^{*\nu}{}_\mu.
$$

考虑到对偶标架满足$(\partial_\mu, dx^\nu)=\delta^\nu_\mu$, 得到

$$
\begin{aligned}
\omega^{*\nu}{}_\mu = &\quad (\partial_\mu, D(dx^\nu)) = -\left(D(\partial_\mu), dx^\nu\right) \\
= &\quad -\left(\omega^\rho{}_\mu\otimes\partial_\rho, dx^\nu\right) = -\omega^\rho_\mu\delta^\nu_\rho = -\omega^\nu_\mu,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

即$D(dx^\nu)=-\omega^\nu_\rho\otimes dx^\rho$.

至此, 我们就能计算任意$A\in\Gamma(T_{(1,0)}M)$与$B\in\Gamma(T_{(0,1)}M)$的联络了. 在局部坐标系

下, 我们有

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A^\mu \partial_\mu) \\ &= dA^\mu \otimes \partial_\mu + A^\mu D(\partial_\mu) \\ &= (\partial_\rho A^\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}) dx^\rho \otimes \partial_\mu \\ &= \nabla_\rho A^\mu dx^\rho \otimes \partial_\mu; \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} D(B) &= D(B_\mu dx^\mu) \\ &= dB_\mu \otimes dx^\mu + B_\mu D(dx^\mu) \\ &= (\partial_\rho B_\mu - B_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}) dx^\rho \otimes dx^\mu \\ &= \nabla_\rho B_\mu dx^\rho \otimes dx^\mu, \end{aligned} \tag{1.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla_\rho A^\mu = &\quad \partial_\rho A^\mu + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}; \\ \nabla_\rho B_\mu = &\quad \partial_\rho B_\mu - B_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.13)正是通常意义下的**协变导数**运算. 由此可见, 协变导数是一种依赖于局部坐标系的分量表述. 用类似的方法, 我们能得到$T_{(p,q)}(M)$上的诱导联络.

Definition 2 在一般张量从$T_{(p,q)}M$上, 由仿射联络诱导的联络是一个映射

$$D : \Gamma(T_{(p,q)}M) \to \Gamma(T_{(p,q+1)}M),$$

设任意$S \in \Gamma(T_{(p,q)}M)$, 则S的联络在局部坐标系下满足如下运算

$$\begin{aligned} D(S) &= D(S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_q}) \\ &= \nabla_\rho S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} dx^\rho \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_q}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla_\rho S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} &= \partial_\rho S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \\ &+ S^{\sigma \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \Gamma^{\mu_1}{}_{\sigma\rho} + \cdots + S^{\mu_1 \cdots \sigma}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \Gamma^{\mu_p}{}_{\sigma\rho} \\ &- S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\sigma \ldots \nu_q} \Gamma^\sigma{}_{\nu_1\rho} - \cdots - S^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu_q\rho}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Section 2

局部坐标系

微分几何的研究对象是一个称为**流形**(Manifold)[1]的集合, 其上拥有线性结构与自然的拓扑结构.为了引出流形, 我们先回顾一下线性空间、度量空间以及拓扑空间的公理化构造, 然后逐步往集合上添加这些结构.

[1] 天地有正气, 杂然赋流形. 下则为河岳, 上则为日星. 於人曰浩然, 沛乎塞苍冥.
文天祥《正气歌》, 江泽涵译

Definition 3 域F上的线性空间V是这样一个集合, 对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V;a,b\in F$有
矢量加法映射$V\times V\to V$:
1)(交换律)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
2)(结合律)$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
3)(零元)存在唯一的$0\in V$, 使得$0+\alpha=\alpha$;
4)(逆元)对任意$\alpha\in V$, 存在唯一的$\beta\in V$, 使得$\alpha+\beta=0$.
矢量数乘映射$F\times V\to V$:
5)(酉性)对$1\in F$, 有$1\alpha=\alpha$;
6)(结合律)$a(b\alpha)=(ab)\alpha$;
7)(分配律1)$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$;
8)(分配律2)$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$.

我们用$\mathbb{R}$表示实数域, 记$\mathbb{R}^n$表示全体n元有序实数组构成的集合.任意$x\in\mathbb{R}^n$的第i个坐标均可用实数x^i表示, 其中$i=1,\cdots,n$, 称为**抽象指标**.

Remark 需要注意的是, 坐标x^i的上指标的标记方法是习惯上的约定, 不可随意变更为下指标.我们会在稍晚些时候看出, 这是非常有效的的符号表征方法.

$\mathbb{R}^n$除了上述的线性构造, 还具有自然的度量结构.

Definition 4 S是一个集合, 若存在一个映射$d:S\times S\to\mathbb{R}$, 使得对于任意$x,y\in S$都满足
1)(正定性)$d(x,y)\geqslant 0$, 且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$时成立;
2)(对称性)$d(x,y)=d(y,x)$;
3)(三角不等式)$d(x,z)+d(z,y)\geqslant d(x,y)$,
则称(S,d)是一个度量空间, 映射d称为S上的度量.

对任意$x,y\in\mathbb{R}^n$, 命

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to R,(x,y)\mapsto d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}, \tag{2.1}$$

容易验证映射(2.1)满足度量的定义, 于是$(\mathbb{R}^n,d)$是一个度量空间.

Remark 需要注意的是, 此时我们仅引入了度量结构(而不是内积结构), 所以此时只有“距离”的概念, 尚且没有“角度”的概念.

可以发现, $\mathbb{R}^n$还拥有自然的拓扑结构.

Definition 5 设S是一个集合, O是一些S的子集构成的集合.若O满足
1)$\varnothing \in O$且$S \in O$;
2)O中任意多个元素的并集仍是O的元素;
3)O中有限多个元素的交集仍是O的元素,
则称(S, O)是一个拓扑空间, O的元素称为开集.

在$\mathbb{R}^n$中, 记半径为r的开球为

$$O(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\},$$

若命

$$O = \{O(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\},$$

则$(\mathbb{R}^n, O)$成为一个拓扑空间.我们陆续为集合$\mathbb{R}^n$加上线性结构、度量结构、拓扑结构后, $\mathbb{R}^n$便称为Euclidean空间.

Remark 这是Chern的表述.但笔者认为这样构造的$\mathbb{R}^n$上还没有内积结构, 似乎并不能被称为“欧氏空间”.笔者认为Chern这样构造是想通过$\mathbb{R}^n$的拓扑结构与流形的拓扑结构对应.欧氏空间的一个比较通俗的定义是直接往线性结构上附加内积结构, 不必有拓扑结构.

拓扑空间上还可以加入额外的Hausdorff性质, 这种性质强调了拓扑空间是无限可分的.

Definition 6 设(S, O)是一个拓扑空间, 若对于任意两点$x, y \in S$, 都存在邻域$O(x,a), O(y,b) \in O$, 使得$O(x,a) \cap O(y,b) \neq \varnothing$, 则称这个拓扑空间是Hausdorff空间.

然后便可以给出流形的定义了.

Definition 7 设(M, O)是一个Hausdorff空间.若对于任意一点$x \in M$, 都存在邻域$O(x,r) \in O$同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开集, 则称M是一个n维**拓扑流形**.

Remark “同胚”指的是一个映射

$$\varphi_{O_i} : O_i \subset O \to U \subset \mathbb{R}^n, u \in O_i \mapsto x^\mu \in U, \tag{2.2}$$

形象的说, 就是将弯曲空间的局部与欧氏空间等同起来, 建立一个一一对应的映射关系.我们将(O_i, φ_{O_i})称为流形M的一个**坐标卡**(Chart).同胚是一种在拓扑上很强的映射关系, 以至于我们可以直接将映射φ_{O_i}的定义域和值域视为等同, 直接将任意一点u(这是流形M的元素)的坐标定义成它在同胚映射φ_{O_i}下的像(这是欧氏空间$\mathbb{R}^n$的元素):

$$x \equiv \varphi_{O_i}(u), \tag{2.3}$$

我们将(O_i, x^μ)称为一个**局部坐标系**.

有了流形局部与欧氏空间的同胚关系, 我们便可以在流形上逐点定义同胚映射, 用可数个局部坐标系覆盖整个流形.由于流形上的每个邻域$O(x,r)$都是开集, 为了让这些开

集能将流形覆盖, 则相邻开集的交集必不为空集(这里就用到了流形的Hausdorff性质), 现在我们来看看这个交集上会发生什么.

假设(O_i, x)和(O_j, x')是流形上的两个局部坐标系, 且$O_i \cap O_j \neq \varnothing$.由于同胚映射是一一的, 这意味着它还是可逆的, 于是在O_i和O_j的交叠区域$O_i \cap O_j$(这也是一个开集)中可定义一个复合的同胚映射$\varphi_{O_j} \circ \varphi_{O_i}^{-1}$, 其中$\varphi_{O_i}^{-1}$是$\varphi_{O_i}$的逆, 因此它是从$\mathbb{R}^n$的开子集到$O_i \cap O_j$的映射, 而$\varphi_{O_j}$又是从$O_i \cap O_j$到$\mathbb{R}^n$的开子集的映射, 所以复合映射$\varphi_{O_j} \circ \varphi_{O_i}^{-1}$是从$\mathbb{R}^n$的一个开集到另一个开集的映射:

$$\varphi_{O_j} \circ \varphi_{O_i}^{-1} : U_i \subset \mathbb{R}^n \to U_j \subset \mathbb{R}^n, (x^1, \cdots, x^n) \mapsto (x'^1, \cdots, x'^n). \tag{2.4}$$

注意到(2.4)相当于“输入x^μ, 输出x'^1;$\cdots$;输入x^μ, 输出x'^n”, 于是上述复合映射实质上是n个函数构成的函数组:

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu), \tag{2.5}$$

这个函数组就是我们常说的坐标变换函数组.同理, 我们可以导出复合映射$\varphi_{O_i} \circ \varphi_{O_j}^{-1}$的坐标变换函数组:

$$\varphi_{O_i} \circ \varphi_{O_j}^{-1} : U_j \subset \mathbb{R}^n \to U_i \subset \mathbb{R}^n, (x'^1, \cdots, x'^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^n); \tag{2.6}$$

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu). \tag{2.7}$$

上述两个同胚映射是互逆的, 这是因为$\varphi_{O_j} \circ \varphi_{O_i}^{-1} \circ \varphi_{O_i} \circ \varphi_{O_j}^{-1} = id$.如果坐标变换$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$和$x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$有直到$r \in \mathbb{Z}^+$阶连续的偏导数, 则称这两个坐标系是$C^r$相容的.如果坐标变换有任意阶连续的偏导数, 则称这两个坐标系是C^∞相容的.

Remark 需要注意的是, 相容性条件对$O_i \cap O_j = \varnothing$或$O_i \cap O_j \neq \varnothing$均成立, 这意味着(2.5)和(2.7)的定义域分别是U_i和U_j, 值域分别是U_j和U_i, 而不是U_i和U_j中互相同胚的那部分开子集.事实上(2.4)和(2.6)也展示了这一点.

下面我们给出**坐标卡册**(Atlas)的定义.

Definition 8 设M是一个n维流形, $\mathcal{A} = \{(O_i, \varphi_{O_i})\}$是数个坐标卡的集合.若$\mathcal{A}$满足

1)$\{O_i\}$构成M的开覆盖, 也即$\bigcup_{i=1}^{k} O_i = M, k \in \mathbb{Z}^+, k < \infty$;

2)任意$(O_i, \varphi_{O_i}), (O_j, \varphi_{O_j}) \in \mathcal{A}$都是$C^r$相容的;

3)$\mathcal{A}$是极大的,

则称$\mathcal{A}$是M的一个C^r微分结构(同一拓扑流形可以有不同的微分结构).如果在M上给定了一个C^r微分结构, 则称M是一个C^r**微分流形**.