Chan–Vese Segmentation

Équation de Hamilton–Jacobi

Institut National des Sciences Appliquées de Rouen Normandie

26 février 2019

Sommaire

Sommaire

Introduction

Définition

La segmentation d'image est une opération de traitement d'images qui a pour but de rassembler des pixels entre eux suivant des critères pré-définis. Les pixels sont ainsi regroupés en régions, qui constituent un pavage ou une partition de l'image.

Segmentation

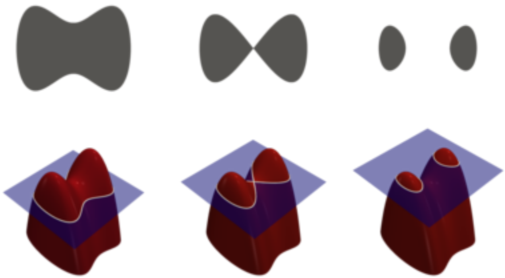
Exemple

Contours actifs paramétriques

Exemple

Level set

Exemple



Sommaire

Modèle de Mumford-Shah

Modélisation du problème de segmentation :

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{image à segmenter} \tag{1}$$

$$\hat{u} \approx f \qquad \text{segmentation de l'image} \tag{2}$$

Modèle de Mumford-Shah

Modélisation du problème de segmentation :

$$\hat{u} = \underset{u,C}{\operatorname{argmin}} \ \mu \cdot Length(C) + \lambda \int_{\Omega} \left[f(x) - u(x) \right]^2 dx + \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (3)$$

$u \in \{$ fonctions lisses par morceaux $\}$

Modèle de Chan-Vese

Modélisation du problème de segmentation :

$$u = \begin{cases} c_1 \text{ si x à l'intérieur de } C \\ c_2 \text{ si x à l'extérieur de } C \end{cases} \tag{4}$$

Modèle de Chan-Vese

Modélisation du problème de segmentation :

$$\hat{u} = \underset{u,C}{\operatorname{argmin}} \ \mu \cdot Length(C) + \nu \cdot Area(Inside(C)) +$$
$$\lambda_2 \int_{outside(C)} \left[f(x) - c_2\right]^2 dx$$
$$\lambda_1 \int_{inside(C)} \left[f(x) - c_1\right]^2 dx + \tag{5}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Formulation Level-Set

Si φ est une fonction de distance alors :

$$
\begin{aligned}
C &= \left\{x \in \Omega : \varphi(x) = 0\right\} \\
Length(C) &= \int_\Omega \left|\nabla H(\varphi(x))\right| dx = \int_\Omega \delta\left(\varphi(x)\right) |\nabla \varphi(x)| dx \qquad (6) \\
Area(C) &= \int_\Omega H\left(\varphi(x)\right) dx
\end{aligned}
$$

Formulation Level-Set

On a donc :

$$\hat{u} = \underset{u}{\operatorname{argmin}}\, \mu \cdot \int_\Omega \delta\Big(\varphi(x)\Big)\big|\nabla\varphi(x)\big| dx + \nu \cdot \int_\Omega H\Big(\varphi(x)\Big)\, dx$$
$$+ \lambda_1 \int_\Omega \Big[f(x) - c_1\Big]^2 H\big(\varphi(x)\big) dx$$
$$+ \lambda_2 \int_\Omega \Big[f(x) - c_2\Big]^2 \Big(1 - H\big(\varphi(x)\big)\Big) dx \tag{7}$$

$$\underset{\varphi}{\operatorname{argmin}}\, J[\varphi] = \int_\Omega \mathcal{L}(x, \varphi, \nabla\varphi) dx \tag{8}$$

Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{x_i}}\right) = 0 \tag{9}$$

Formulation Level-Set

Par déscente de gradient en φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\varphi)\left[\mu * div\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) - \nu - \lambda_1(f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2(f_{i,j} - c_2)^2\right] \\ \\ \frac{\delta_\epsilon(\varphi)}{|\nabla\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{n}} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Sommaire

Fonction Heaviside et Masse de Dirac

Régularisation de H et de δ :

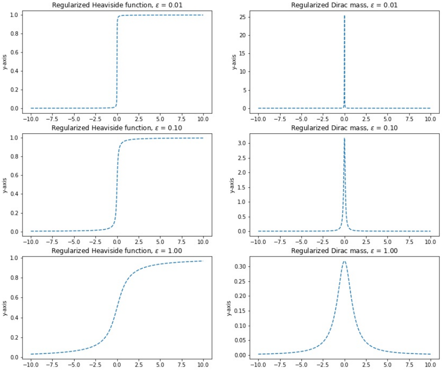


Schéma numérique

Le schéma numérique est construit en discrétisant φ en espace comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t} =& \delta_\epsilon(\varphi_{i,j})\Bigg[\mu\Bigg(\nabla_x^- \frac{\nabla_x^+ \varphi_{i,j}}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^+ \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^0 \varphi_{i,j})^2}} \\ &+ \nabla_y^- \frac{\nabla_y^+ \varphi_{i,j}}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^0 \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^+ \varphi_{i,j})^2}}\Bigg) - \nu \\ &- \lambda_1 (f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2 (f_{i,j} - c_2)^2\Bigg]\end{aligned}$$

avec ∇_x^+ le schéma forward dans la direction x, ∇_x^- le schéma backward dans la direction x et $\nabla_x^0 = (\nabla_x^+ + \nabla_x^-)/2$.

Schéma numérique

De façon à ne garder qu'une seule copie de φ en mémoire, le temps est discrétisé avec le schéma, semi-explicite, de Gauss-Seidel. En notant :

$$A_{i,j} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^+ \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^0 \varphi_{i,j})^2}} \tag{11}$$

$$B_{i,j} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 + (\nabla_x^0 \varphi_{i,j})^2 + (\nabla_y^+ \varphi_{i,j})^2}} \tag{12}$$

Schéma numérique

Nous obtenons le schéma suivant :

$$\varphi_{i,j}^{n+1} \leftarrow \Big[\varphi_{i,j}^{n} + dt\delta_\epsilon(\phi_{i,j}^{n})\Big(A_{i,j}\varphi_{i+1,j}^{n} + A_{i-1,j}\varphi_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j}\varphi_{i,j+1}^{n}$$
$$+ B_{i,j-1}\varphi_{i,j-1}^{n+1} - \nu - \lambda_1(f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2(f_{i,j} - c_2)^2\Big)\Big]$$
$$/ \left[1 + dt\delta_\epsilon(\varphi_{i,j}^{n+1})(A_{i,j} + A_{i-1,j} + B_{i,j} + B_{i,j-1})\right]$$

Algorithme

Initialize φ
for $n = 1, 2, \ldots$ **do**
  Compute c_1 and c_2 as the region averages
  Evolve φ with one semi-implicit timestep
  if $\|\varphi^{n+1} - \varphi^n\|_2/|\Omega| \leq tol$ **then stop**
  (Optional) If n is divisible by N, reinitialize φ

Algorithm 1

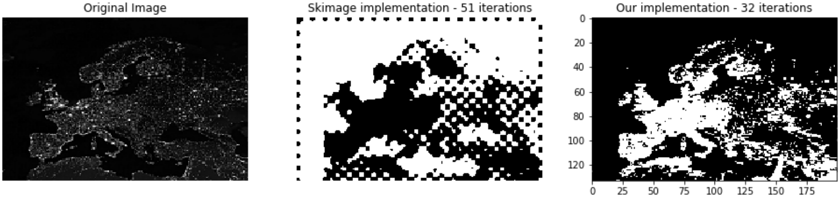
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Sommaire

Résultats


Original Image
Skimage implementation - 103 iterations
Our implementation - 33 iterations

Résultats


Original Image
Skimage implementation - 51 iterations
Our implementation - 32 iterations
0
20
40
60
80
100
120
0
25
50
75
100
125
150
175

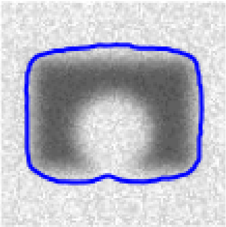
Résultats

(a) Avec $\mu = 0.2$

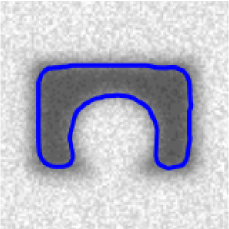
(b) Avec $\mu = 0.8$

Figure – Variation de l'hyper-paramètre μ

Résultats



(a) Avec $\nu = -0.1$



(b) Avec $\nu = 0.1$

Figure – Variation de l'hyper-paramètre ν

Sommaire

Perspectives d'évolution

- Prendre en charge des images en couleur
- Implémenter la méthode Narrow-Band

Apports du projet

- Nouvelle technique de segmentation d'image
- Résolution numérique d'une équation de Hamilton-Jacobi