3.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung

In Abschnitt 2.4.3.2 haben wir gezeigt, dass man die *allgemeine* Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 1. Ordnung erhält, wenn man zur *allgemeinen* Lösung der zugehörigen *homogenen* Gleichung *irgendeine partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Gleichung addiert. Diese Aussage bleibt auch für eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten unverändert gültig.

Über die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x) \qquad \text{(IV-155)}$$

ist als *Summe* aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \text{(IV-156)}$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \qquad \text{(IV-157)}$$

Der Beweis verläuft analog wie in Abschnitt 2.4.3.2.

Das *Lösungsverfahren* für eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten entspricht daher weitgehend der in Abschnitt 2.4.3.2 unter der Bezeichnung „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*" behandelten Lösungsmethode für inhomogene Differentialgleichungen *1. Ordnung*. Zunächst wird dabei die zugehörige *homogene* Gleichung gelöst. Wie dies geschieht, wurde im vorherigen Abschnitt ausführlich dargelegt. Dann bestimmt man mit Hilfe eines *geeigneten Lösungsansatzes*, der im Wesentlichen vom *Typ der Störfunktion* $g(x)$ abhängt, eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Gleichung und *addiert* diese zur *allgemeinen* Lösung der *homogenen* Gleichung.

In der nachfolgenden Tabelle 2 sind die *Lösungsansätze* für einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Störglieder aufgeführt.

Tabelle 2: Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung $y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ $y'' + ay' + by = g(x)$ in Abhängigkeit vom Typ der Störfunktion $g(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
1. Polynomfunktion vom Grade n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) \quad \text{für} & a \neq 0, \quad b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten des Polynoms $Q_n(x)$
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) c ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ (*Parameter:* A)
	(2) c ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ (*Parameter:* A)
	(3) c ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ (*Parameter:* A)
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination aus beiden Funktionen	(1) $j\beta$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter:* A, B bzw. C, φ
	(2) $j\beta$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \varphi)$ *Parameter:* A, B bzw. C, φ

Tabelle 2: (Fortsetzung)

<table>
<tr><th>Störfunktion $g(x)$</th><th>Lösungsansatz $y_p(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4. $g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$
oder
$g(x) = P_n(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$
($P_n(x)$ ist dabei eine Polynomfunktion vom Grade n)</td><td>(1) $c + j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung:
$y_p = e^{cx} [Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$
$Q_n(x), R_n(x)$: Polynome vom Grade n
Parameter: Koeffizienten der Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$</td></tr>
<tr><td>(2) $c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung:
$y_p = x \cdot e^{cx} [Q_n(x) \cdot \sin(\beta x) + R_n(x) \cdot \cos(\beta x)]$
$Q_n(x), R_n(x)$: Polynome vom Grade n
Parameter: Koeffizienten der Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$</td></tr>
</table>

Anmerkungen zur Tabelle 2

(1) Der jeweilige Lösungsansatz gilt auch dann, wenn die Störfunktion zusätzlich noch einen *konstanten Faktor* enthält.

(2) Die im Lösungsansatz y_p enthaltenen Parameter sind so zu bestimmen, dass die Funktion eine (partikuläre) *Lösung* der vorgegebenen inhomogenen Differentialgleichung darstellt. Dies führt stets zu einem *eindeutig* lösbaren Gleichungssystem für die im Lösungsansatz enthaltenen Stellparameter.

(3) Besteht die Störfunktion $g(x)$ aus *mehreren* (*additiven*) Störgliedern, so erhält man den Lösungsansatz y_p als *Summe* der Lösungsansätze für die *Einzelglieder*.

(4) Liegt die Störfunktion in der Form eines *Produktes* vom Typ $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ vor, so erhält man in vielen (aber leider nicht allen) Fällen einen geeigneten Lösungsansatz für die gesuchte partikuläre Lösung y_p, indem man die aus Tabelle 2 entnommenen Lösungsansätze y_{p1} und y_{p2} für die beiden „Störfaktoren" $g_1(x)$ und $g_2(x)$ miteinander *multipliziert*: $y_p = y_{p1} \cdot y_{p2}$.

(5) Bei *periodischen* Störfunktionen vom Typ $g(x) = \sin(\beta x)$ oder $g(x) = \cos(\beta x)$ verwendet man häufig auch *komplexe* Lösungsansätze der allgemeinen Form

$$y_p(x) = C \cdot e^{j(\beta x + \varphi)} \qquad \text{(Parameter: } C, \varphi)$$

Wir fassen zusammen:

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + a y' + b y = g(x) \qquad \text{(IV-158)}$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Zunächst wird die *allgemeine* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y'' + a y' + b y = 0 \qquad \text{(IV-159)}$$

bestimmt.

2. Dann ermittelt man mit dem aus Tabelle 2 entnommenen Lösungsansatz eine *partikuläre* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* Differentialgleichung.

3. Durch *Addition* von $y_0 = y_0(x)$ (1. Schritt) und $y_p = y_p(x)$ (2. Schritt) erhält man schließlich die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ der *inhomogenen* Differentialgleichung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) \qquad \text{(IV-160)}$$

Anmerkungen

(1) Wir bezeichnen wiederum (wie bereits bei den linearen Differentialgleichungen *1. Ordnung*) die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Gleichung mit $y_0 = y_0(x)$ und die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Gleichung mit $y = y(x)$.

(2) Ein weiteres Lösungsverfahren, das auf einer Anwendung der *Laplace-Transformation* beruht, werden wir in Kapitel VI kennenlernen.

■ **Beispiele**

(1) $y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Gleichung

$$y'' + 10y' - 24y = 0$$

Die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + 10\lambda - 24 = 0$$