

B1-火星熔岩猫之划分空间---题解

(火星熔岩猫系列---WangQiLong 原创题目)

题目预定设计

此题仿照 NOIP 的较为基础的题目设计而成，【NOIP2017】小凯的疑惑和【NOIP2016】组合数问题为其原型。难度略高于联赛第一题难度。使用的知识，除题面转化一步外，全部属于联赛难度。数据富有梯度，具有很高的可做性。

预估做题情况

- 1) 此题读懂题平均用时不低于 30 分钟，题目正确完成平均时间约 60 分钟。
- 2) 一般水平的选手，得分应在 30~60 分左右，测试部分通过前 12 个点。
高水平选手，得分在 100 分左右，测试通过全部 20 个点。

题目详细解答

将 20 个测试点分成几部分，依次讲解，部分详细讲解。
1~12 为基础得分，13~20 为较高难度得分。

方法 1: 暴力 (20 分)

可以容易通过 1~2, 7~8, 得到 20 分，具体方法略。

方法 2: 特殊性质研究 (20 分)

可以容易通过 3~4, 得到 10 分。

尝试找到 $n=2*k+1$ 时数列的通项，直接快速幂即可。(跟 2 的幂有关)

$$ans = 2^{2^k}$$

ans 给出的原因详见方法 4。

5~6, 出题人没有非常好的方法。

方法 3: k 较小的研究 (20 分)

$k=1$ 和 $k=2$ 是在一维和二维中进行研究，出题人已经在题面及样例解释中讲述了 $k=3$ 即三维情况中的较小 n 对应的 $D(n, k)$ 的探究方法。出题人希望选手能够通过阅读学习的方式，学会相应的简单研究方法。

篇幅关系，这里就不再细致讨论 k 的特殊情况。详见方法 4。

方法 4: 正解第一步 (+前三个方法 共 70 分)

这一部分是整篇题解最重要的部分，最详细的部分，内含题目转化的过程。

题目转化

请先读懂题目在干什么。

求在 k 维空间中，用 n 个一般位置上的 $(k-1)$ 维超平面分割 k 维空间所生成的区域数 $D(n, k)$ 。

一般位置是什么，这里不做过多解释，详见题面。

此题的难点就在于 $k \geq 4$ ，在真实世界中很难清楚地理解。
当然，这个不是重点，不理解没关系，可以避开此部分解决此题。

题目中强调此题只研究相邻维度之间的直接理论关系，“相邻”是关键。

直接上 k 维情况，（选手在理解时最好用 $k=3$ 即三维情况来考虑）。

$D(n+1, k)$ 的求解：

为了便于说明：规定 k 维图形叫做空间， $k-1$ 维图形叫做（超）平面， $k-2$ 维图形叫做（超）直线/交线。

任意用一个平面划分一个空间区域时，均由原有的 1 个区域转变成 2 个区域。考虑所添加的第 $n+1$ 个平面，由于一般位置的规定可知，前 n 个平面与新平面相交成处于一般位置 n 条直线，这 n 条直线把新平面分成 $D(n, k-1)$ 个平面区域，这些平面区域每个均将原有的一个空间区域一分为二。因此，从 $D(n, k)$ 转移至 $D(n+1, k)$ 时增加了 $D(n, k-1)$ 。

故有： $D(n+1, k) - D(n, k) = D(n, k-1)$ ，对于 $k \geq 1$ 成立

初值 $D(i, 1)$ 和 $D(1, k)$ 很简单，此处略过。

注：这一步转化是关键性的一步，同时也是此题考查的一个核心点。递推关系处于一种未知的状态，状态很清楚表达出来（题目直接告诉你），但是很难直接算出来。在这种条件下来分析问题，寻求关系，是题意转化求解的核心。

动动手，自行计算部分 $D(n, k)$ 的结果，可以把 $n \leq 9$ 且 $k \leq 9$ 的计算出来。

$D(n, k)$ 的值

差分 $D(n, k) - D(n, k-1)$ 的值

2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	4	4	4	4	4	4	4	4
4	7	8	8	8	8	8	8	8
5	11	15	16	16	16	16	16	16
6	16	26	31	32	32	32	32	32
7	22	42	57	63	64	64	64	64
8	29	64	99	120	127	128	128	128
9	37	93	163	219	247	255	256	256
10	46	130	256	382	466	502	511	512

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0
6	4	1	0	0	0	0	0	0
10	10	5	1	0	0	0	0	0
15	20	15	6	1	0	0	0	0
21	35	35	21	7	1	0	0	0
28	56	70	56	28	8	1	0	0
36	84	126	126	84	36	9	1	1

观察后便可发现其实差分后的值就是杨辉三角形中的组合数。

然后，就很简单了。初值确定，递推式唯一确定。

$$\text{故有 } D(n, k) = \sum_{i=0}^k C_n^i$$

$O(k)$ 时间计算即可，type=1 问题圆满解决。（组合数，行前缀求和没有更快的方法。）

13~14 解决，所以多给 10 分，前三个方法一同使用，目前得分 70 分。

方法 5：正解第二步（+方法 4 100 分 AC 此题）

知道并会运用一些基本的组合学知识解决问题，也是考察的小核心点。

运用差分和公式 $\sum_{i=0}^n C_i^m = C_{n+1}^{m+1}$ 化简问题，行求和变列求和的小技巧。

化简结果略（请自行动手计算）。

$O(2*k) = O(k)$ 时间计算即可，type=2 问题也圆满解决，100-AC 此题。