

Solution

Hometown

October 22, 2018

1 Preface

由于我出的上一场模拟赛被大家各种 A 穿，所以这一次我稍微出难了一点。不过所有算法仍然没有超出 NOIP 的范围，相信大家拿到高分并不困难。

2 Sequence

2.1 算法一

直接暴力维护数列即可。时间复杂度 $O(nm)$ ，期望得分 40pts。

2.2 算法二

对于 $k = 1$ 的情况，容易发现我们给一个区间的每个数分别加上了 $1, 2, 3, \dots, r - l + 1$ 。我们可以直接维护一个差分数组，然后做一个二阶前缀和即可。结合算法一可以获得 50pts。

2.3 算法三

也许有 $O(nk^2)$ 或者 $O(nk \log n)$ 的做法？

2.4 算法四

可以发现组合数有一个简单的性质，即 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ，我们可以从这个式子中获得启发。考虑一个下标从 0 开始的数列，这个数列的每个数均为 1。我们对这个数列做 k 阶前缀和。通过这个简单的式子，容易发现这个数列的第 i 项即为 $\binom{k+i}{k}$ 。于是我们可以得出一个这样的做法。

对于这个数列，维护这个数列的 k 阶差分。对于一次修改操作，我们只需要在各阶差分数组上修改，最后做一遍 k 阶的前缀和即可。注意差分数组上修改时，区间边界要相应地减掉一些值。时间复杂度 $O(nk)$ ，期望得分 100pts。

2.5 Some Interesting Facts

本来这题很早的时候就出好了，然而很不幸和 Wearry 的课件撞了……
欢迎各位大佬吊打标算！

3 Bomb

3.1 算法一

直接暴力枚举每条边即可获得 30pts 的好成绩。

3.2 算法二

对于 $k = 1$ 的情况，直接输出 1 即可。结合算法一即可获得 40pts 的好成绩。

3.3 算法三

对于 $k = n$ 的情况，你只需要求出 n 个点的带标号连通图的个数即可。这里并没有要求用 NTT 优化，所以直接 $O(n^2)$ 的 DP 就足够了。

DP 大概是这么做的。设 f_i 表示 i 个点的带标号连通图的个数。考虑反面计数，求出不连通图的个数，于是我们有

$$f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{\binom{i-j}{2}} \binom{i-1}{j-1} f_j$$

最后 f_n 即为答案。时间复杂度 $O(n^2)$ ，结合算法二即可获得 50pts 的好成绩。

3.4 算法四

当我们得到了大小为 i 的连通图的个数之后，我们可以考虑一个这样的 DP。设 $g_{i,j}$ 表示当前已经考虑了前 i 个点，当前最大的联通块大小为 j 的方案数。转移的时候注意转移顺序要确定，你可以强制选择当前未被选择的编号最小的点。这样你的复杂度是 $O(n^3)$ 的，结合算法三可以获得 70pts 的好成绩。

3.5 算法五

我们发现最大联通块恰好为 k 并不太好处理，因此可以拆成最大联通块小于等于 k 的方案数，减去最大联通块小于等于 $k-1$ 的方案数。于是直接 DP 即可将算法四的 DP 去掉一维，复杂度来到了 $O(n^2)$ ，期望得分 100pts。

3.6 Some Interesting Facts

其实这题可以用分治 + FFT 优化到至少 $O(n \log^2 n)$ ，不知道能不能多项式求逆做到 $O(n \log n)$? 我也没继续往下想了.....

这题感觉有点套路?

4 Queue

Source : Codeforces 455D Serega and Fun

这里为了方便我造数据，就把强制在线扔了.....不过我也没想到啥离线做法？

4.1 算法一

日常人口普查，留给暴力写挂和没时间写暴力的选手。时间复杂度 $O(0)$ ，期望得分 5pts。

4.2 算法二

直接暴力模拟即可。时间复杂度 $O(nm)$ ，期望得分 30pts。

4.3 算法三

当 1 操作每次操作的都是全区间时，你可以不修改原序列，记录一下全区间轮转了多少次。回答询问时，轮转询问区间相应的次数。于是你只需要对每个颜色记录一下位置就可以了。时间复杂度 $O(m \log n)$ ，结合算法二可以获得 40pts。

4.4 算法四

对于 a_i 互不相同的测试点，也许可以用标号的一些奇技淫巧，利用数据结构来解决？具体我其实也没太想清楚.....

4.5 算法五

数据范围只有 10^5 ，然后数据结构不那么好维护，怎么办？分块！

其实想到了分块应该就很简单了。你只需要维护每个块内，每种颜色的出现次数。然后轮转就可以在每个块内用链表修改一下，查询就可以暴力统计边角料，暴力将每个整块内的答案加上来。

利用 `std::deque` 代替链表可以大大简化代码。

似乎这个题也可以直接上 Splay？不过联赛出 Splay 还是太毒瘤了。

4.6 Some Interesting Facts

我和 *Faker Beng* 讲了一下这个题有平衡树做法之后，*Faker Beng* 回了我一句，“联赛出平衡树不是蛮好的么？”

数据似乎非常菜啊.....感觉会有很多乱搞选手通过此题，或者拿到 $70pts$ 左右的高分.....我的裸暴力跑 7 号点到 14 号点大概只要 $1.8s$